УДК 004.932

ПРИМЕНЕНИЕ ГИРАТОРНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДЛЯ КОДИРОВАНИЯ И ВОССТАНОВЛЕНИЯ ЦВЕТНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

В.И. Кузьмин[1]

[1]*Самарский университет, г. Самара*
e-mail: 9538469@gmail.com

Аннотация

Представлена математическая модель и высокопроизводительная программная реализация гираторного преобразования для обработки полноцветных изображений. Разработанные алгоритмы базируются на прямом численном интегрировании с применением JIT-компиляции (Numba) и параллельных вычислений, что обеспечивает существенное повышение производительности при сохранении высокой точности. Показаны результаты прямого (кодирование) и обратного (декодирование) преобразования изображений, подтверждающие унитарность, обратимость и высокую точность преобразования.

Ключевые слова: гираторное преобразование, RGB-изображения, обратимое преобразование, оптическая криптография, дескриптор.

Введение

В условиях лавинообразного нарастания объемов цифровой визуальной информации особую актуальность приобретают методы ее обработки, защиты и анализа [1]. Среди математических инструментов выделяется гираторное преобразование (ГП) [2, 3] – унитарное линейное преобразование, обобщающее преобразование Фурье и представляющее собой частный случай линейных канонических преобразований, в том числе, дробное преобразование Фурье [4, 5]. Ключевая особенность ГП заключается в способности к вращению в фазовом пространстве, что расширяет возможности управления амплитудно-фазовой структурой сигнала. Несмотря на развитую теоретическую базу, потенциал применения ГП для обработки цветных (RGB) изображений реализован не в полной мере: существующие подходы преимущественно ориентированы на полутоновые изображения либо рассматривают цветовые каналы изолированно. В отличие от полутоновых изображений, цветные RGB-изображения позволяют назначать независимые параметры преобразования α для каждого цветового канала, что повышает криптостойкость за счёт расширения пространства ключей. Это определило цель работы – комплексное исследование гираторного преобразования в контексте кодирования и декодирования цветных изображений на основе прямого и обратного преобразования.

1. Математическая модель и алгоритмическая реализация

Математическая модель гираторного преобразования порядка α, применяемого к двумерному комплексному полю $f(x, y)$, задаётся унитарным интегральным оператором, ядро которого содержит гиперболические (астигматические) компоненты:

$$G_\alpha[f](u,v) = \frac{1}{|sin\alpha|}\iint f(x,y)exp\left(i2\pi\left[(xy+uv)\,cot\alpha - \frac{xv+yu}{sin\alpha}\right]\right)dx\,dy.$$

Параметр α определяет степень «скручивания» фазового фронта. В частных случаях преобразование вырождается в тождественное ($\alpha = 0$), поворот на 180° ($\alpha = \pi$) или классическое преобразование Фурье ($\alpha = \pi/2$). Указанные свойства обусловливают применимость гираторного преобразования как инструмента для управляемого изменения пространственно-частотной структуры изображений.

Для численной реализации разработан модуль на языке Python (класс Gyrator), в котором реализован алгоритм, основанный на прямом дискретном суммировании в соответствии с интегральным определением. Данный подход обеспечивает высокую точность вычислений, однако характеризуется вычислительной сложностью $O(N^4)$, что ограничивает его применение изображениями малого размера. Обратное преобразование выполняется как прямой оператор с параметром $-\alpha$, что строго следует из соотношения $G_\alpha^{-1} = G_{-\alpha}$. В модуле image.py осуществляется обработка полноцветных изображений: каждый из каналов цветовой модели RGB подвергается независимому гираторному преобразованию с заданным углом α, после чего амплитудная и фазовая составляющие сохраняются в виде отдельных RGB-изображений. Модуль decriptor.py решает обратную задачу – восстановление исходного изображения на основе сохранённых данных.

2. Численное моделирование

На тестовых примерах (гауссовы пучки с кубической фазой, моды Эрмита–Гаусса, круговая функция и другие) подтверждена реализация таких фундаментальных свойств, как унитарность (сохранение энергии) и обратимость преобразования.

На рисунке 1 приведен пример цикла восстановления исходного изображения из сохранённых кодированных амплитуды и фазы ГП.

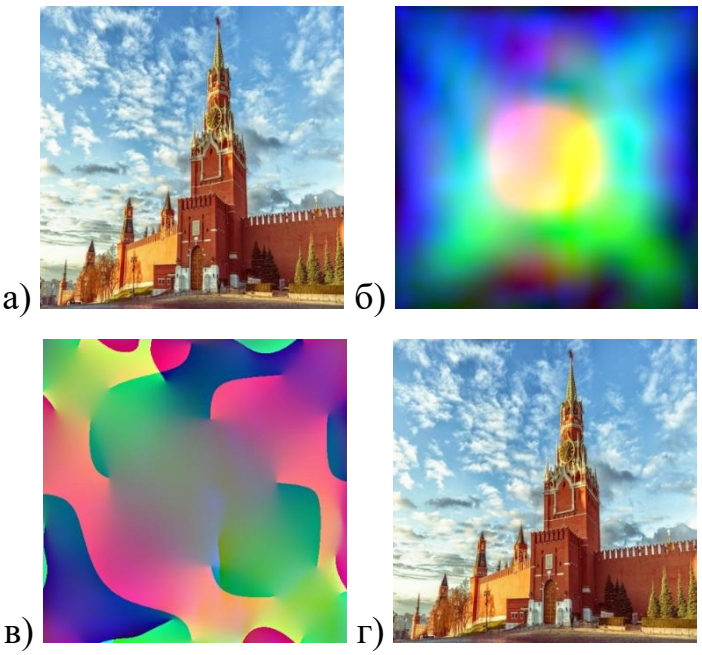

Рисунок 1 – Полный цикл восстановления изображения: а) исходное изображение, б) сохранённая амплитуда, в) сохранённая фаза, г) восстановленное изображение. Параметры: $\alpha_R = 0{,}45\pi$, $\alpha_G = 0{,}75\pi$, $\alpha_B = 0{,}07\pi$, размер 512×512

Количественная оценка точности восстановления проводилась путём сравнения исходного и реконструированного изображений. При этом были получены следующие метрики: средняя абсолютная ошибка (MAE) составила $3{,}82 * 10^{-17}$, средняя относительная ошибка – $1{,}71 * 10^{-15}$, максимальная ошибка – $1{,}67 * 10^{-16}$. Эти значения подтверждают обратимость преобразования с машинной точностью вычислений. Дополнительно проверена унитарность преобразования: энергия исходного сигнала сохраняется после прямого и обратного преобразования с точностью до 10^{-6}, что свидетельствует о строгом выполнении закона сохранения энергии.

В ходе обработки реальных цветных изображений (на примере изображения «Витраж») установлено, что разработанный программный модуль обеспечивает точное восстановление исходных данных только при корректном задании углов α для каждого цветового канала. Результаты параметрического анализа устойчивости, проиллюстрированные на рисунке 2, свидетельствуют о том, что отклонение угла α на величину $0{,}0001\pi$ ($\sim 0{,}018°$) приводит к заметным, но плавным искажениям восстановленного изображения, тогда как ошибка в $0{,}01\pi$ и более вызывает его полную деструкцию. Данный факт подтверждает, что параметр α может выполнять функцию криптографического ключа, обеспечивая высокую чувствительность системы к его изменению.

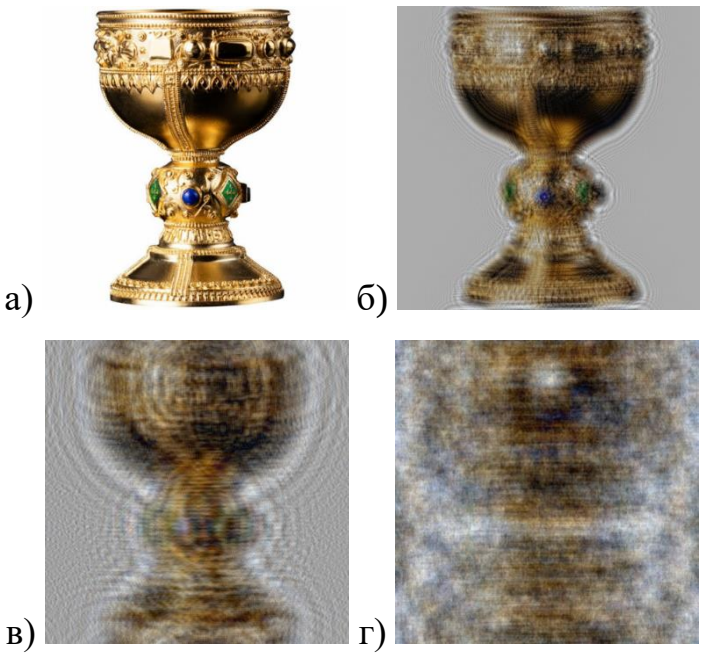

Рисунок 2 – Восстановление при неточном задании α: а) ошибка 0, б) ошибка 0.0001π, в) ошибка 0.001π, г) ошибка 0.01π. Параметры: исходный $\alpha_R = 0{,}25\pi$, $\alpha_G = 0{,}25\pi$, $\alpha_B = 0{,}25\pi$, размер 512×512.

Заключение

В ходе исследования подтверждены корректность, унитарность и обратимость реализованного гираторного преобразования на синтетических и реальных данных. Установлена зависимость точности реконструкции от параметра α, что определяет перспективность подхода в оптической криптографии, где α может выступать секретным ключом. Результаты создают основу для применения гираторного преобразования

в анализе сигналов, фазовом восстановлении и высокоскоростной обработке изображений.

Список использованных источников

1. Villegas-Ch, W. A Comprehensive Approach to Image Protection in Digital Environments / W. Villegas-Ch, J. García-Ortiz, J. Govea // Computers. – 2023. – V. 12, № 8. – P. 155. – URL: https://www.mdpi.com/2073-431X/12/8/155 (дата обращения: 27.03.2026).

2. Perez, R.A. Image processing operators based on the Gyrator transform: Generalized shift, convolution and correlation / R.A. Perez, J.M. Vilardy O., C.O. Torres M. // Photonics. – 2019. – V. 6, № 4. – Ст. 120. – URL: https://www.mdpi.com/2304-6732/6/4/120 (дата обращения: 27.03.2026).

3. Kirilenko, M.S. Calculation of eigenfunctions of a bounded fractional Fourier transform / M.S. Kirilenko, R.O. Zubtsov, S.N. Khonina // Computer Optics. – 2015. – V. 39, № 3. – P. 332–338. – URL: https://doi.org/10.18287/0134-2452-2015-39-3-332-338 (дата обращения: 27.03.2026).

4. Basiri, S. Innovative Quantum Encryption Method for RGB Images Based on Bit-Planes and Logistic Maps / S. Basiri, L. Farhang Matin, M. Naseri // Computation. – 2025. – V. 13, № 2. – P. 56. – URL: https://www.mdpi.com/2079-3197/13/2/56 (дата обращения: 27.03.2026).

5. Tian, M. Optical Audio Cryptosystem Using Hyperchaotic Implementation in Gyrator Domain / M. Tian, Y. Cui, Z. Liu, H. Chen // Optical Switching and Networking. – 2025. – V. 55. – P. 100826. – URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2666032625000146 (дата обращения: 27.03.2026).

APPLICATION OF GYRATOR TRANSFORM FOR CODING AND RESTORING COLOR IMAGES

V.I. Kuzmin[1]

[1]*Samara University, Samara*
e-mail: 9538469@gmail.com

Abstract

A mathematical model and a high-performance software implementation of the gyrator transform for processing full-color images are presented. The developed algorithms are based on direct numerical integration using JIT compilation (Numba) and parallel computing, which significantly improves performance while maintaining the same accuracy. The results of direct (encoding) and reverse (decoding) image transformations are shown, confirming the unitary, reversible, and highly accurate nature of the transformation.

Keywords: gyrator transformation, RGB images, reversible transformation, optical cryptography, descriptor.