УДК 535.422

ИССЛЕДОВАНИЕ КАРТИН ДИФРАКЦИИ ФРЕНЕЛЯ НА КОНТУРНЫХ АПЕРТУРАХ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ АЛЬТЕРНАТИВНЫМИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИМИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯМИ

Л.Б. Дубман[1]

[1]Самарский университет, г. Самара
e-mail: lyuba.dubman13@gmail.com

Аннотация

Исследуются картины дифракции Френеля плоского пучка на контурных апертурах, определяемых параметрически и через преобразование Гилиса. Рассматриваются кольцевая и эллиптическая апертуры. Показано, что метод задания апертуры влияет на периферийные области и пространственную модуляцию интенсивности, сохраняя при этом глобальную симметрию, соответствующую эволютам контурных апертур.

Ключевые слова: контурная апертура, преобразование Френеля, параметрические кривые, преобразование Гилиса, распространение волн.

Введение

Структурированные световые поля, среди которых хорошо известны Гауссовы и бездифракционные пучки, играют решающую роль в волновой оптике. Теория катастроф, которая ранее использовалась для анализа каустик, сейчас применяется для исследования свойств новых типов пучков [1].

В работе исследуется влияние формы контурной апертуры, заданной как параметрически [2], так и с использованием преобразования Гилиса [3, 4], на картину дифракции Френеля, а также соответствие ее геометрии эволюте контурной апертуры. Впервые показано, что способ задания контурной апертуры оказывает влияние на тонкую структуру дифракционных картин Френеля, в частности на периферийные области и распределение интенсивности, при сохранении глобальной геометрической симметрии.

1. Теоретические сведения

Преобразование Гилиса позволяет моделировать кривые с вращательной симметрией и определенной формой лепестков. Его математическое представление дает широкий класс геометрических сложных контуров [3, 4] и имеет вид:

$$R(t) = \left[\left|\frac{1}{a}cos\left(\frac{m}{4}t\right)\right|^{n_2} + \left|\frac{1}{b}sin\left(\frac{m}{4}t\right)\right|^{n_3}\right]^{-\frac{1}{n_1}}, \quad (1)$$

где *a, b, c* – это параметры масштабирования, n_1, n_2, n_3 – это параметры формы, m – это порядок симметрии.

Преобразование Френеля является описанием дифракции и связано с преобразованием Фурье:

$$F(u,v,z) = \mathbb{F}\left\{E(x,y)\cdot e^{\frac{ik}{2z}(x^2+y^2)}\right\}, \quad (2)$$

где z – это расстояние распространения, k – это волновое число.

1.1 Эволюта кольца

Кольцо в параметрической форме задается выражениями:

$$x(t) = r\cos(t),\ y(t) = r\sin(t). \quad (3)$$

Радиус в полярной системе координат из формулы (1) при подстановке $m = 4, n_1 = n_2 = n_3 = 2, a = b = r$ равен радиусу круга r.

При переходе к декартовым координатам получается выражение (3). В обоих способах задания эволюта вырождается в центральную точку.

1.2 Эволюта эллипса

Параметрическое представление эллипса имеет вид:

$$x(t) = a\cos(t),\ y(t) = b\sin(t). \quad (4)$$

Преобразование Гилиса (1) для параметров $m = 4,\ n_1 = n_2 = n_3 = 2,\ a = 2,\ b = 1$ даёт кривую, совпадающую с параметрическим представлением (4):

$$R(t) = \left(\frac{(\cos t)^2}{a^2} + \frac{(\sin t)^2}{b^2}\right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (5)$$

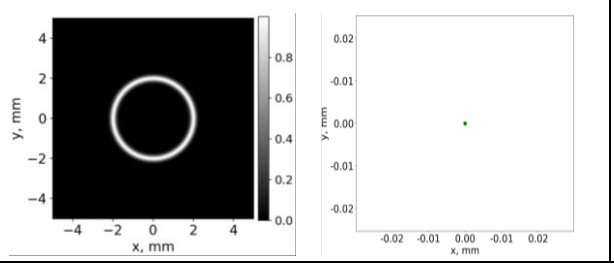
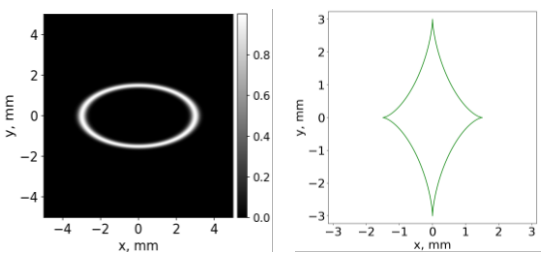
В обоих формулах (4) и (5) результирующая эволюта соответствует астроиде:

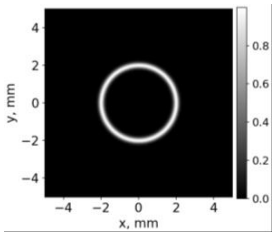
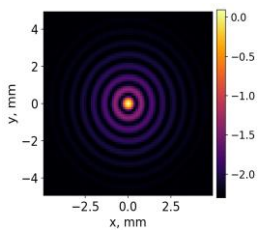
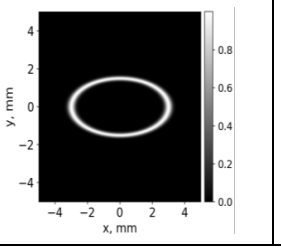
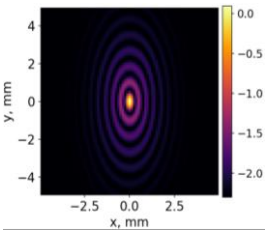
$$X = \frac{a^2-b^2}{a}(\cos t)^3 = \frac{3}{2}(\cos t)^3, Y = \frac{b^2-a^2}{b}(\sin t)^3 = -(\sin t)^3. \quad (6)$$

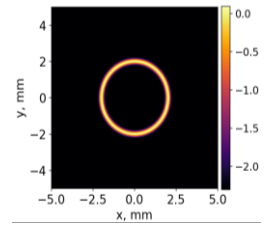
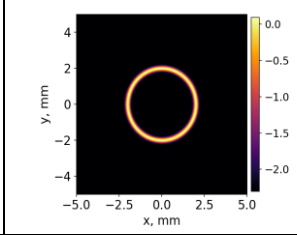
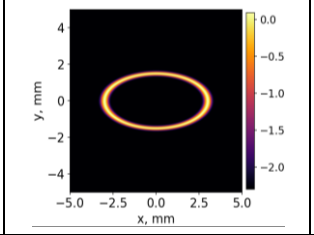
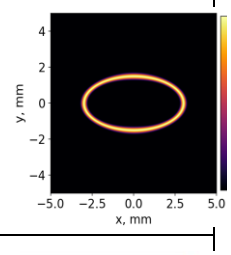
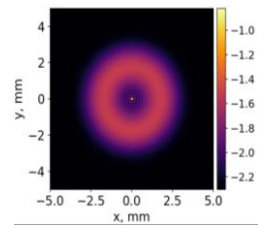
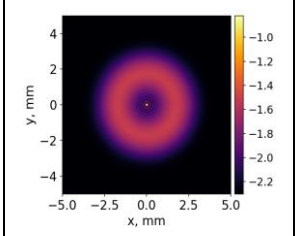
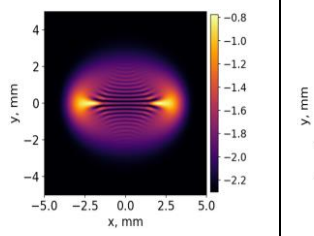
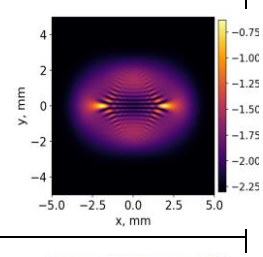
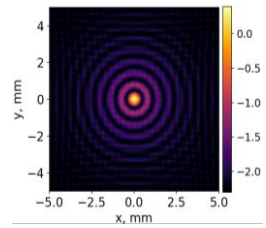
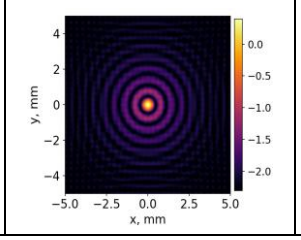
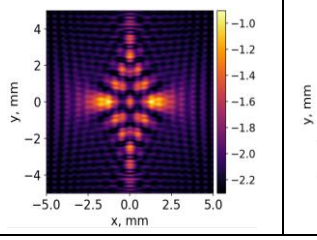
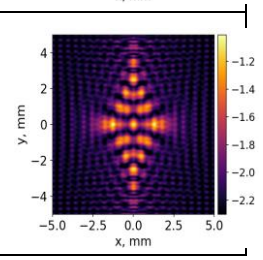
2. Исследование дифракционных картин и их соответствия эволютам

В таблице 1 представлены результаты моделирования дифракции Френеля для различных контурных апертур, заданных параметрически и через преобразование Гилиса.

Таблица 1 – Анализ дифракции Фраунгофера (дальняя зона) и Френеля от апертуры, определяемой параметрическим представлением и преобразованием Гилиса

Картина кривой и ее эволюты	
Кольцо	Эллипс
	

Кольцо		Эллипс	
Апертура	Преобразование Фурье от апертуры	Апертура	Преобразование Фурье от апертуры
			

Преобразование Френеля от апертуры				
z, м	Кольцо		Эллипс	
	Классическая формула	Суперформула	Классическая формула	Суперформула
0,001				
1				
4				

Эллиптическая апертура, в отличие от кольцевой, не обладает радиальной симметрией, что приводит к анизотропной дифракции. В ближней зоне формируется распределение, близкое к структуре апертуры. С увеличением расстояния происходит перераспределение интенсивности и формируется картина, соответствующая эволюте (астроиде). При дальнейшем увеличении расстояния распространения структура переходит к Фурье-образу (зона дифракции Фраунгофера), сохраняя двуосную симметрию. Кольцевая апертура, обладая полной осевой симметрией, формирует пучок Бесселя, центральная часть которого в виде яркого светового пятна может рассматриваться как эволюта окружности (соответствует точке).

Заключение

Исследование дифракции Френеля на апертурах, заданных параметрически и через преобразование Гилиса, показало, что ключевым фактором формирования дифракционных структур является определение кривизны границ.

Кольцевая апертура с постоянной кривизной создает аксиально-симметричную картину со стабильной структурой, соответствующей формированию пучка Бесселя в дальней зоне дифракции. Апертуры с плавно изменяющейся кривизной, например, эллипс, приводят к анизотропной локализации энергии, образуя огибающие, отвечающие астроидной форме эволюты эллипса. Проведенное сравнение показало, что именно геометрические характеристики контурных апертур – кривизна и ее экстремумы – определяют структуру формируемых полей. Понимание этой взаимосвязи позволяет создать основу для управляемого проектирования структурированных оптических полей.

Практическая значимость работы заключается в возможности управления дифракционными полями при проектировании оптических элементов за счет выбора геометрии и способа задания апертуры.

Список использованных источников

1. Ren, Z. Symmetric form-invariant dual Pearcey beams / Z. Ren, C. Fan, Y. Shi, B. Chen // Journal of the Optical Society of America A. – 2016. – V. 33, №. 8. – P. 1523–1530.

2. Khonina, S.N., Porfirev A.P., Generation of multi-contour plane curves using vortex beams / S.N. Khonina, A.P. Porfirev // Optik. – 2021. – V. 229. – P. 166299.

3. Caratelli, D. The Robin problem for the Laplace equation in a three-dimensional starlike domain / D. Caratelli, P. E. Ricci, J. Gielis // Applied Mathematics and Computation. – 2011. – V. 218, №. 3. – P. 713–719.

4. Spíchal, L. Superelipsa a superformule / L. Spíchal // Matematika-Fyzika-Informatika. – 2020. – V. 29, № 1. – P. 54–69.

STUDY OF FRESNEL DIFFRACTION PATTERNS ON CONTOUR APERTURES DEFINED BY ALTERNATIVE GEOMETRIC TRANSFORMATIONS

L.B. Dubman[1]

[1]Samara University, Samara
e-mail: lyuba.dubman13@gmail.com

Abstract

Fresnel diffraction patterns of a plane wave on contour apertures defined both parametrically and via the Gillis transformation are under investigation. Circular and elliptical apertures are considered. It is shown that the method of aperture definition affects peripheral regions and spatial intensity modulation while preserving the global symmetry corresponding to the evolutes of the aperture contours.

Keywords: contour aperture, Fresnel transform, parametric curves, Gillis transformation, wave propagation, near-field diffraction.