УДК 004.942

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СЛОЖНОСТИ И ОПТИМИЗАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ ДРОБНОГО ФИЛЬТРА КАЛМАНА ПРИ РЕАЛИЗАЦИИ НА ЯЗЫКЕ PYTHON

А.М. Бирюкова[1]

[1]*Универстет Иннополис, г. Иннополис*
e-mail: nastya22bir@gmail.com

Аннотация

В работе исследуется вычислительная сложность дробного фильтра Калмана (FKF), применяемого для оценки состояния динамических систем. В отличие от классического аналога, FKF требует значительных ресурсов из-за необходимости хранения истории состояний. Представлены аналитические формулы для расчета количества арифметических операций, демонстрирующие линейную зависимость сложности алгоритма дробной фильтрации от длины памяти L.

Ключевые слова: дробный фильтр Калмана, вычислительная сложность, дробное исчисление, дробная производная Грюнвальда–Летникова, оптимизация параметров фильтра, оценка состояния динамической системы дробного порядка.

Введение

Классический фильтр Калмана обеспечивает оптимальные оценки для линейных систем с гауссовскими шумами, однако его эффективность снижается при наличии негауссовых помех и нецелочисленных динамических характеристик объекта исследования. Решением данной проблемы является использование алгоритма дробного исчисления, в частности, дробного фильтра Калмана, основанного на определении производной Грюнвальда–Летникова [1].

Главным практическим ограничением дробных алгоритмов является их высокая вычислительная сложность, связанная с необходимостью хранения и обработки истории состояний длины L. В существующих исследованиях приводятся лишь качественные оценки сложности или результаты эмпирических замеров времени выполнения. При этом отсутствует теоретическая оценка количества арифметических операций (FLOPs), позволяющая заранее прогнозировать нагрузку на процессор в зависимости от размерности системы.

Цель данной работы – получить аналитические формулы для расчета вычислительной сложности дробного фильтра Калмана, провести сравнительный анализ со стандартным алгоритмом и экспериментально определить границы целесообразного использования метода дробной фильтрации.

1. Математическая модель и алгоритм

Математическим основанием метода служит определение дробной разности порядка α в форме Грюнвальда–Летникова [2]:

$$\Delta^{\alpha} x_k = \sum_{j=0}^{min(k,L)} w_j^{(\alpha)} x_{k-j}, \;\; w_j^{(\alpha)} = (-1)^j \binom{\alpha}{j}, \qquad (1)$$

где L – параметр усечения (длина памяти), ограничивающий бесконечную сумму в (1).

Обобщенная модель пространства состояний для многомерного случая (d измерений):

$$\Delta^n x_{k+1} = A_d x_k + B u_k + w_k, \;\; x_{k+1} = \Delta^n x_{k+1} - \sum_{j=1}^{min(k+1,L)} (-1)^j \Upsilon_j x_{k+1-j}, \qquad (2)$$

где A_d – матрица динамики системы, B – матрица управления, u_k – скалярный входной сигнал, x_k – вектор состояния системы, $n = [n_1, n_2]^{\top}$ – вектор дробных порядков, $\Upsilon_j = \mathrm{diag}\left(\binom{n_1}{j}, \binom{n_2}{j}\right)$ – матрица весов для многомерного случая, $\omega_k \sim \mathcal{N}(0, \mathrm{Q})$, $\nu_k \sim \mathcal{N}(0, R)$. Данная модель реализуется в виде рекуррентного алгоритма дробного фильтра Калмана, состоящего из основных шагов предсказания и обновления.

2. Теоретическая оценка вычислительной сложности

Для оценки вычислительной сложности стандартного и дробного ковариационных алгоритмов определим количество операций с плавающей запятой для каждого из них, опираясь на базовые матричные операции [3]. Рассмотрим систему размерности состояния d и размерности измерений p. Результаты теоретического расчета количества операций для обоих алгоритмов представлены в таблице 1.

Таблица 1 – Сравнительный анализ вычислительной сложности

Этап алгоритма	**Операция**	**Стандартный фильтр Калмана (KF)**	**Дробный фильтр Калмана (FKF)**
Предсказание состояния	Ax_k	$2d^2$	$2d^2 + 2d \cdot min(k, L$
Предсказание ковариации	APA^T	$2d^3$	$2d^3$
Расчет усиления	$K_k = PH^T S^{-1}$	$\frac{2}{3}p^3 + 2d^2 p$	$\frac{2}{3}p^3 + 2d^2 p$
Обновление состояния	$x_k + K(y - Hx)$	$2dp + 2d$	$2dp + 2d$
Обновления ковариации	$(I - KH)P$	$2d^2 p + d^2$	$2d^2 p + d^2$
Всего		$\frac{8}{3}d^3 + 2d^2 p$	$\frac{8}{3}d^3 + 2d^2 p + 2dL$

Вычисление весовых коэффициентов биномиального ряда $\binom{\alpha}{j}$ не учитывается в пошаговой сложности, так как они могут быть рассчитаны рекуррентно ($O(1)$ на шаг) или заранее однократно вычислены перед началом фильтрации.

Стандартный фильтр Калмана требует выполнения матричных операций умножения и обращения, что дает кубическую зависимость от размерности системы. Дробный фильтр включает все эти этапы, но дополняет их вычислением дробной разности Грюнвальда–Летникова по истории длиной L. Поскольку веса умножаются на вектор состояния (диагональная матрица), дополнительные затраты растут линейно: $2dL$ операций (умножения и сложения).

Тогда формула сложности для дробного фильтра на одном шаге будет следующая:

$$\mathrm{FLOPs}_{FKF}(L) = \left(\frac{8}{3}d^3 + 2d^2p + d^2\right) + 2d \cdot \min(k, L) + O(1)\,. \qquad (3)$$

Полная сложность траектории из N шагов имеет порядок $O(N \cdot L)$, что подтверждает линейный рост затрат от длины памяти.

3. Критерий оптимизации и результаты моделирования

Для выбора оптимального значения L в данной работе предлагается использовать критерий, учитывающий точность оценивания и вычислительные затраты:

$$J(L) = \alpha \cdot \frac{\mathrm{RMSE}(L)}{\max \mathrm{RMSE}} + (1-\alpha) \cdot \frac{\mathrm{FLOPs}(L)}{\max \mathrm{FLOPs}}, L^* = \arg min_L J(L), \qquad (4)$$

где $\alpha \in [0,1]$— весовой коэффициент приоритета точности.

Компьютерное моделирование выполнено на языке Python с использованием библиотек NumPy и Matplotlib. Эксперименты проводились для системы второго порядка с параметрами $n_1 = 0.7$, $n_2 = 1.2$, $A_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.1 & -0.2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C = [0.1 \quad 0.3]$, ковариациями шумов $Q = 0.003 \cdot I_2$, $R = 0.003$, длиной реализации $N = 200$. «Истинная» траектория генерировалась при $L_{\mathrm{ref}} = 500$, фильтр тестировался при $L \in [5, 200]$. Результаты экспериментов представлены на рисунке 1.

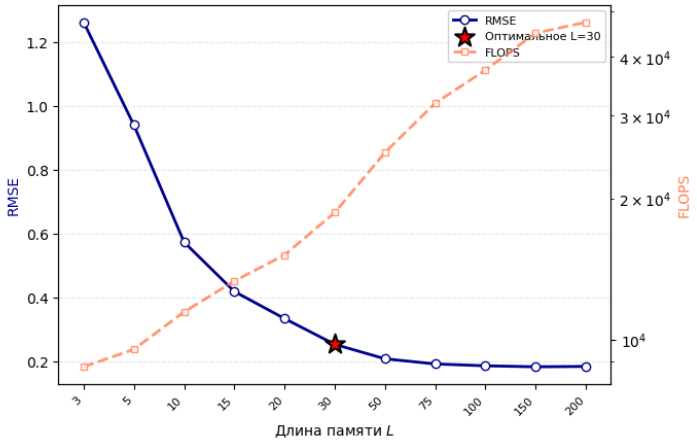


Рисунок 1 – Графики точности и сложности вычислений

Проведенное численное моделирование показало, алгоритм дробного фильтра Калмана демонстрирует устойчивую работоспособность при варьировании параметра L. При увеличении данного параметра наблюдается монотонное снижение RMSE, причем основной вклад в повышение точности вносится при $L \leq 30$, тогда как дальнейший рост L дает лишь незначительное улучшение при линейном увеличении вычислительной сложности. На основе комбинированного критерия, учитывающего точность оценивания и вычислительные затраты, определено оптимальное значение L = 30. Для задач реального времени, допускающих умеренные вычислительные затраты, рекомендовано L = 75. При L > 75 нарушается баланс эффективности алгоритма.

Заключение

В работе получены аналитические формулы оценки сложности дробного фильтра Калмана, показавшие, что дополнительная нагрузка определяется членом *2dL*. Также

выполнен сравнительный анализ фильтров, показавший, что при малых значениях параметра памяти ($L \ll d^2$) вычислительная сложность дробного алгоритма сопоставима со стандартным методом, однако в дробном фильтре она дополняется линейно растущими затратами на обработку истории состояний, которые становятся определяющим фактором производительности при увеличении параметра L.

Экспериментально обосновано, что для систем низкой размерности оптимальным является диапазон $L \in [20, 30]$. В этом интервале алгоритм сохраняет преимущества в точности оценивания, не требуя избыточных вычислительных ресурсов, что делает его применимым в системах реального времени, разработанных на языке Python.

Список использованных источников

1. Sierociuk, D. Fractional Kalman filter algorithm for the states, parameters and order of fractional system estimation / D. Sierociuk, A. Dzieliński // International Journal of Applied Mathematics and Computer Science. – 2006. – V. 16, №. 1. – P. 129–140.

2. Fractional central difference Kalman filter with unknown prior information / T. Liu [et al.] // Signal Processing. – 2019. – V. 154. – P. 294–303.

3. Голуб, Д. Матричные вычисления / Д. Голуб, Л. Ч. Ван // М.: Мир, 1999. – Т. 548.

THEORETICAL ESTIMATION OF COMPUTATIONAL COMPLEXITY AND PARAMETER OPTIMIZATION OF THE FRACTIONAL KALMAN FILTER IMPLEMENTED IN PYTHON

A.M. Biryukova[1]

[1]Innopolis University, Innopolis
e-mail: nastya22bir@gmail.com

Abstract

This paper investigates the computational complexity of the Fractional Kalman Filter (FKF) applied to dynamic system state estimation. Unlike the classical counterpart, the FKF demands significant computational resources due to the necessity of storing the state history. Analytical formulas for calculating the number of arithmetic operations are presented, demonstrating a linear dependence of complexity on the memory length L.

Keywords: Fractional Kalman Filter, computational complexity, fractional calculus, Grünwald–Letnikov derivative, filter parameters optimization, state estimation of dynamical system of the fractional order.