3 H.Liu and B.H.Tongue, Indirect spacecraft trajectory optimization using modified equinoctial elements, *J. Guid., Control, Dyn.*, vol. 33, no. 2, Mar.–Apr. 2010, doi: 10.2514/1.45498.

4 E.Taheri, Optimization of many-revolution minimum-time low-thrust trajectories using Sundman transformation, in *AIAA SciTech 2021 Forum*, Virtual Event, Jan. 11–15 & 19–21, 2021. doi: 10.2514/6.2021-1343.

УДК 629.78

Т.М. Коджабаш, О.Л. Старинова

МЕТОДИКА РАСЧЁТА ТРАЕКТОРИЙ ПЕРЕЛЁТА В СИСТЕМЕ ЗЕМЛЯ-ЛУНА БЕЗ РАЗБИЕНИЯ НА УЧАСТКИ ДВИЖЕНИЯ

Введение. Гравитационное поле системы Земля-Луна имеет сложную форму, близкую к ограниченной задаче трёх тел особенности которой (низкоэнергетические траектории) разработчики миссий могут использовать для минимизации затрат топлива на перелёт [1]. Достижения в области электрических двигателей и методов непрерывной работы на малой тяге ещё больше повышают гибкость миссии, позволяя космическим аппаратам (КА) маневрировать вблизи нестабильных областей, перемещаться между динамическими коридорами и повышать эффективность захвата Луной. В этой работе представлена единая математическая модель для использования низкоэнергетических траекторий КА с большой и малой тягой, сформулированная в полярных координатах учитывающая гравитацию Земли, Луны и Солнца, сопротивление атмосферы и расход топлива. Разработанная модель позволяет формировать единое программное управление движением для гибридного химико-электрического режима получения тяги. По сравнению с классическими сегментированными подходами, эта система непрерывной интеграции уникальным образом учитывает атмосферное сопротивление при наборе высоты, солнечные возмущения при старте и плавные переходы между двигательными установками, обеспечивая более адаптивный и комплексный метод проектирования траектории.

Математическая модель и методика расчёта. Мы описываем движение КА вектором $\left(r,\ \theta,\ \dot{r},\ \dot{\theta},\ m\right)$ в плоской геоцентрической сино-

дической полярной системе координат вращающейся вместе с Луной с постоянной угловой скоростью ω_{EM}. Орбита Луны считается плоской, круговой и совпадающей с плоскостью движения КА, т.е. Луна имеет фиксированное положение $(D_M,\ \ 0)$, где D_M – расстояние от Земли до Луны. Гравитационное воздействие Солнца рассчитывается в предположении, что оно движется в той же плоскости на фиксированном расстоянии R_{SE} с изменяющимся фазовым углом $\alpha_S(t) = \alpha_{S0} + \omega_S t$, где $\omega_S = -7.2722 \cdot 10^{-5}$ рад/с. Уравнения движения КА включают гравитационные ускорения от Земли, Луны и Солнца, атмосферное сопротивление, тягу двигателей и изменение текущей массы КА. Распишем проекции каждого из ускорений на радиальное и трансверсальное направление

– ускорение от центрального притяжения Земли:

$$a_{r,E} = -\frac{GM_E}{mr^2}; \qquad (1)$$

– гравитационное ускорение от Луны:

$$\begin{aligned} a_{r,M} &= -\frac{GM_M}{\Delta_M^3}(r\cos\theta - D_M), \\ a_{\theta,M} &= -\frac{GM_M}{\Delta_M^3} D_M \sin\theta, \end{aligned} \qquad \Delta_M = \sqrt{r^2 + D_M^2 - 2rD_M\cos\theta}. \qquad (2)$$

– гравитационное ускорение от Солнца:

$$\begin{aligned} a_{r,S} &= -\frac{GM_S}{\Delta_S^3}(r\cos\theta - R_{SE}\cos\alpha_S), \\ a_{\theta,S} &= -\frac{GM_S}{\Delta_S^3} R_{SE}\sin(\alpha_S - \theta), \end{aligned} \qquad \Delta_M = \sqrt{r^2 + R_{SE}^2 - 2rR_{SE}\cos(\alpha_S - \theta)}. \qquad (3)$$

– Кориолисово ускорение от вращения системы координат:

$$\begin{aligned} a_{r,K} &= -2\omega_{EM} r\dot{\theta}, \\ a_{r,K} &= 2\omega_{EM}\dot{r}. \end{aligned} \qquad (4)$$

– центробежное ускорение от вращения системы координат:

$$a_{r,E} = -\omega_{EM}^2 r\,. \qquad (5)$$

– ускорение от сопротивления атмосферы:

$$a_{r,D} = -\frac{1}{2} c_D \rho(r) A \frac{\dot{r}}{\sqrt{\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2}},$$
$$a_{\theta,D} = -\frac{1}{2} c_D \rho(r) A \frac{r\dot{\theta}}{\sqrt{\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2}}, \quad \rho(r) = \rho_0 \exp \frac{r - R_E}{R_E},. \qquad (6)$$

– ускорение от тяги двигателей:

$$a_{r,T} = \frac{\dot{m} I_{sp} g_0}{m} (e_x \cos\theta + e_y \sin\theta),$$
$$a_{r,T} = \frac{\dot{m} I_{sp} g_0}{m} (-e_x \sin\theta + e_y \cos\theta). \qquad (6)$$

Здесь M_E, M_M, M_S – массы Земли, Луны и Солнца соответственно; ρ_0 – плотность атмосферы на уровне моря; R_E – средний радиус Земли, c_D – коэффициент аэродинамического сопротивления КА; A – площадь миделя КА; I_{sp} – специфический импульс двигательной установки, g_0 – ускорение свободного падения на уровне моря.

Текущая масса КА $m(t)$ уменьшается во время работы двигателей со скоростью $\dot{m}$.

Массовая модель КА. Начальная масса КА m_0 равна

$$m_{dry} + m_{0,prop}, \qquad (7)$$

где m_{dry} – сухая масса космического аппарата, а $m_{0,prop}$ – исходное химическое топливо. Массовый расход на стадии 1 равен

$$\dot{m}_1 = -\frac{m_{0,prop}}{t}, \qquad (8)$$

а химическое топливо в конце стадии 1 равно

$$m_{1,prop} = m_{0,prop} - \dot{m}_1 t_1 = m_{2,che}. \qquad (9)$$

На втором этапе начинают использовать электрическое топливо, и начальная масса на этапе 2 равна

$$m_2 = m_{dry} + m_{2,che} + m_{2,elec}, \qquad (10)$$

где $m_{2,elec}$ начальное электрическое топливо на этапе 2. Массовый расход химического ракетного топлива равен

$$\dot{m}_{2,che} = -\frac{m_{2,che}}{t_2}, \tag{11}$$

а массовый расход электрического ракетного топлива равен

$$\dot{m}_{2,ele} = -\frac{m_{2,ele}}{t_2} \tag{12}$$

Следовательно, общий массовый расход на стадии 2 равен

$$\dot{m}_2 = -\left(\dot{m}_{2,che} + \dot{m}_{2,ele}\right). \tag{13}$$

Масса оставшегося электрического топлива равна

$$m_{3,ele} = m_{2,ele} - \dot{m}_{2,ele} t_2. \tag{14}$$

На третьей и четвертой ступенях используется только электрическое топливо, и начальная масса космического аппарата на этих ступенях равна

$$m_{3,4} = m_{dry} + m_{3,4,elec}. \tag{15}$$

Массовые расходы на стадиях 3 и 4 составляют

$$\dot{m}_{3,4,ele} = -\frac{m_{3,4,ele}}{t_{3,4}}. \tag{16}$$

В рамках каждого под этапа RK4 (полного или половинчатого) мы обрабатываем оценку m точно с правой стороны. Традиционные модели импульсного сжигания часто вычитают всю массу топлива сразу, а затем переключаются на новый ODE, но в нашем подходе масса расходуется постепенно, поэтому инерция и тяга космического аппарата обновляются плавно, без скачков.

Полные уравнения движения: Объединяя все приведённые выше уравнения, радиальные и угловые уравнения космического аппарата становятся:

$$\ddot{r} = r\dot{\theta}^2 - \frac{GM_e}{r^2} + \left(-GM_m \frac{r\cos\theta - D_m}{\Delta_m^3}\right) + \left(-GM_s \frac{r\cos\theta - R_{se}\cos a_s(t)}{\Delta_s^3}\right) -$$

$$-2\omega_{EM} r\dot{\theta} + \omega_{EM}^2 r + \frac{F_{r,d}+F_{r,T}}{m}, \tag{17}$$

$$\ddot{\theta} = -2\dot{r}\dot{\theta} + \left(rGM_m \frac{D_m \sin\theta}{r\Delta_m^3}\right) + \left(rGM_s \frac{R_{se}\sin(\alpha_s-\theta)}{r\Delta_s^3}\right) + 2\omega_{EM}\dot{r} + \frac{F_{\theta,d}+F_{\theta,T}}{m}.$$

Адаптивный интегратор RK4. Для интегрирования связанных уравнений движения мы используем схему Рунге-Кутты четвёртого порядка со встроенной оценкой локальной ошибки и адаптивным управлением размером шага. Одношаговая формула даёт ошибку усечения на шаг порядка $O(h^5)$. Чтобы контролировать локальную ошибку, не прибегая к формулам более высокого порядка, мы сравниваем “один полный шаг” размером h с двумя последовательными “полушагами” размером $h/2$.

Полный шаг:

$$y_{full} = y_{RK4}(t + h; h), \tag{18}$$

используя приведённую выше формулу RK4.

Полушаг: Первый полушаг равен

$$y_{1/2} = y_{RK4}\left(t + \frac{h}{2}; \frac{h}{2}\right). \tag{19}$$

Общий полушаг равен

$$y_{half} = y_{RK4}\left(t + \frac{h}{2}; \frac{h}{2}\right). \tag{20}$$

Оценка ошибки: Локальная оценка ошибки усечения равна

$$E = y_{half} - y_{full}, \tag{21}$$

где норма $\|E\|$ равна $O(h^5)$.

tol_{abs} и tol_{rel} – это абсолютные и относительные допуски ошибок соответственно. На каждый предпринятый шаг

$$Y_{scale} = max(\|y_{half}\|, \|y_{full}\|) \tag{22}$$

и допускается допуск

$$tol = max(tol_{abs}, tol_{rel} Y_{scale}). \tag{23}$$

Если $\|E\| \leq tol$, шаг принимается: $y(t + h) = y_{half}$ и $t \leftarrow t + h$. В противном случае значение h уменьшается.

На основе оценки погрешности рассчитывается коэффициент запаса прочности:

$$S = 0.8\left(\frac{tol}{\max(\|E\|, 10^{-10})}\right)^{1/5} \tag{24}$$

как рекомендовано Хайрером и др. [2]. Следующий размер шага равен

$$h_{new} = \min(\max(0.1\,h, S\,h), h_{max}), \tag{25}$$

где h_{max} гарантирует, что $t + h_{new}$ не превысит временной горизонт какого-либо этапа.

Используя эту адаптивную процедуру RK4, интегратор поддерживает локальную погрешность усечения ниже заданных допусков (tol_{abs}, tol_{rel}) на всех этапах и при самых разных значениях ускорения (от режимов с высокой химической тягой до режимов с малой электрической тягой).

Обзор этапов миссии. Архитектура полёта состоит из четырёх последовательных этапов, которые переходят от подъёма на высокой химической тяге к электрической тяге малой тяги и завершаются точной мягкой посадкой на Луну. На первом этапе химическая тяга быстро выводит космический аппарат с поверхности Земли на низкую околоземную орбиту (НОО) с орбитальной скоростью. На втором этапе используется электрическая тяга наряду с оставшимся химическим топливом, чтобы приблизить апогей траектории к лунному расстоянию. На третьем этапе используется исключительно электрическая тяга, чтобы следовать траектории с ограниченной устойчивостью для захвата Луны. На четвёртом этапе используется электрическая тяга с регулируемым дросселем для выполнения управляемой мягкой посадки. На всех этапах используется единая динамика полярных координат, включающая гравитацию Земли, Луны и Солнца, атмосферное сопротивление и постоянную тягу, а также постоянно обновляемое состояние массы с помощью адаптивной схемы RK4.

Этап 1 начинается с химического набора высоты на полной скорости, во время которого масса непрерывно уменьшается, а атмосферное сопротивление влияет на малых высотах. Закон управления разворотом, основанный на силе тяжести, переходит от вертикального набора высоты к горизонтальному набору скорости и к спиральному профилю старта, чтобы создать коридор вылета из окололунной зоны. Для обновления массы и скорости на каждом временном шаге интегрируются значения силы тяжести Земли, Луны и Солнца, а также лекарственная и химическая тяга. Этап 1 заканчивается, когда космический аппарат достигает высоты НОО (300-500 км) с превышением орбитальной скорости на этой высоте.

Этап 2 начинается сразу после этапа 1, сочетая остаточное химическое топливо с электрической тягой для достижения апогея. Во время этапа 2 химическая тяга постепенно уменьшается, и преобладающей ста-

новится электрическая тяга. Этап 2 заканчивается, когда космический аппарат превышает вторую космическую скорость.

На этапе 3 используется только ЭРДУ, чтобы достичь области, граничащей со сферой действия Луны. Закон наведения, основанный на отслеживании траектории, постоянно направляет КА к заранее рассчитанной стабильной траектории у выбранной точки либрации с учётом притяжения Земли, Луны и Солнца. Когда КА отклоняется от эталонной траектории, тяга направляется для уменьшения ошибки. Тяга и гравитационные силы совместно управляют траекторией до тех пор, пока не будет осуществлён перелёт к орбите Луны.

Заключительный этап миссии начинается с захвата Луной КА на большой высоте и использования тяги с регулируемым значением для выполнения мягкой посадки. Закон наведения сначала снижает скорость полёта с помощью спирали с малой тягой, а затем переходит к высокоточному спуску с ЖРД, чтобы противостоять лунной гравитации, ограничить вертикальную скорость и скорректировать горизонтальный дрейф. Модуляция тяги напрямую связывает массовый расход с мгновенной потребностью в тяге, обеспечивая плавное и непрерывное снижение. Этап 4 завершается контролируемым приземлением на низкой скорости на лунную поверхность. Сравнение предложенной методики с традиционной представлено в табл. 1.

Табл. 1. Сравнение предложенной методики с традиционной

Аспект	Предложенная методика	Традиционная методика
Сегментация траектории	Единое, непрерывное моделирование движения от запуска до посадки	Перелёт разделён на отдельные участки [3] пассивного или управляемого движения, которые затем стыкуются
Моделирование выведения	Выведение с ЖРД с учётом сопротивления атмосферы	Обычно моделирование миссии начинается с низкой околоземной орбиты
Межорбитальный перелёт	Учитывается гибридная двигательная установка (ЖРД и ЭРДУ)	Учитывается электроракетная двигательная установка
Закон управления	Учитывается изменение величины и направления тяги и удельного импульса	На некоторых участках используется оптимальное управление, на других импульсные постановки [4]

Окончание табл. 1

Метод моделирования	Метод Рунге-Кутты с контролем ошибок	Методы интегрирования с фиксированным или переменным шагом [4]
Учёт гравитации трёх тел	Учитывается гравитация Земли, Луны и Солнца	На разных участках рассматриваются различные гравитационные возмущения [5]
Изменение массы	Непрерывное уменьшение массы	Дискретное и непрерывное изменение массы [6]
Управление на этапе спуска	Закон управления величиной тяги	Стандартные профили изменения тяги [3]

Заключение. Это исследование представляет модель и методику моделирования движения КА позволяющую выполнить моделирование движения КА от старта с Земли до посадки на Луну. Математическая модели, описывает движение КА во вращающейся системе координат с учётом гравитации Земли, Луны и Солнца, сопротивления атмосферы Земли и изменяющиеся характеристики двигательной установки и КА в рамках единого набора дифференциальных уравнений. Это позволяет обосновать выбор проектных параметров и законов управления для миссии в целом, а не по отдельным участкам, как в традиционном подходе. Моделирование траектории движения показало хорошую согласованность результатов, по сравнению с классическими методами и позволило выявить неучтённые возмущения.

Список использованных источников

1 Koon, W. S., Lo, M. W., Marsden, J. E., & Ross, S. D. (2001a). Low energy transfer to the moon. Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 81(1/2), 63–73.

2 Hairer, E., Norsett, S., & Wanner, G. (1993). Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems. In Springer Series in Computational Mathematics. Springer Berlin Heidelberg.

3 Mingotti, G., Topputo, F., & Bernelli-Zazzera, F. (2009). Low-energy, low-thrust transfers to the Moon. Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 105(1-3), 61–74.

4 Epenoy, R., & Pérez-Palau, D. (2019). Lyapunov-based low-energy low-thrust transfers to the Moon. Acta Astronautica, 162, 87–97.

5 Liu, L., & Liu, Y. (2024). A note on the computation of multi-revolution NRHO under the ephemeris model. Advances in Space Research.

6 Fu, S., Liang, Y., Wu, D., & Gong, S. (2025). Low-energy Earth-Moon transfers with lunar ballistic capture based on Lagrangian coherent structures in a four-body model. *Advances in Space Research*.

УДК 629.78

Лю Юнькай, Сюй Чензя

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДИКИ СОЗДАНИЯ БАЗЫ ДАННЫХ ДЛЯ ОПТИМИЗАЦИИ ПЕРЕЛЁТА ЗЕМЛЯ-ЮПИТЕР С МАЛОЙ ТЯГОЙ

Введение. Процесс проектно-баллистической оптимизации миссии космического аппарата (КА) с электроракетной двигательной установкой (ЭРДУ) [1] требует многократного решения вариационных задач о перелётах Земля – планета назначения для различных проектных параметров [2-4]. Сохранение и обработка уже полученных результатов даёт возможность их использования как для решения вариационных задач с другими значениями параметров, так и для проектной оптимизации миссии по приближённым аппроксимационным зависимостям.

В работе получены приближённые аппроксимационные зависимости баллистических параметров перелётов для миссии в систему Юпитера.

Модели и численные методы. На гелиоцентрическом участке межпланетного перелёта, движение КА с ЭРДУ описывается системой дифференциальных уравнений в безразмерной форме. Для описания движения в данной работе используется плоская полярная система координат. Предполагается, что КА имеет солнечную энергоустановку, мощность которой уменьшается пропорционально квадрату гелиоцентрического расстояния.

Для формирования оптимального по быстродействию управления будем использовать принцип максимума Понтрягина, согласно которому оптимальное управляемое движение КА описывается системой дифференциальных уравнений.

Здесь r – величина радиус-вектора, направленного в сторону КА, который в данной работе представляет собой величину расстояния КА от Солнца; φ – угол между радиус-вектором и начальным положением КА;