УДК 629.78

Ву Кунсюй, Лю Юнькай

РАСЧЁТ И ПРИМЕНЕНИЕ РЕЗОНАНСНЫХ ОРБИТ В СИСТЕМЕ ЗЕМЛЯ-ЛУНА

Введение. Резонансные орбиты являются важной частью теории и практики межпланетного движения и в последние годы стали актуальной темой научных исследований. Использование резонансных орбит для перелётов космических аппаратов (КА) с малой тягой может эффективно снизить расход топлива. В 2013 г. группа под руководством Кэтлин С.Хоуэлл профессора Стэнфордского университета опубликовала теорию генерации резонансных орбит, объединив её с теорией инвариантных многообразий [1]. Однако методика генерации резонансных орбит ещё не была разработана. В 2019 г. Ли-Бо Лю и др. [2] описали методику получения начальных значений фазовых координат для получения резонансной орбиты на базе модели движения двух тел. При использовании этой методики в рамках ограниченной задачи трёх тел методика даёт существенные ошибки, которые требуют коррекции.

В данной работе для определения начальных фазовых координат движения по резонансной орбите используется метод дифференциальной коррекции. Этот метод не только определяет относительно простое начальное приближение, но и позволяет рассчитывать заданные орбитальные семейства.

Модель движения и методика построения резонансных орбит. При описании движения КА в системе Земля-Луна в рамках ограниченной круговой задачи трёх тел, можно считать, что относительное движение Земли и Луны происходит в одной орбитальной плоскости с постоянной угловой скоростью $\omega = 2,6653 \cdot 10^{-6}$ рад/с. Будем использовать барицентрическую вращающуюся систему координат ось Ox' которой направлена на Луну, ось Oy' лежит в плоскости движения и перпендикулярна Ox', ось Oz перпендикулярна плоскости движения (рис. 1).

Для удобства расчётов нормализуем фазовые координаты:

$$[L] = l_{E-M},\ [M] = m_E + m_M,\ [T] = \left[L\right]^{3/2} \Big/ \left(G[M]\right)^{1/2}. \quad (1)$$

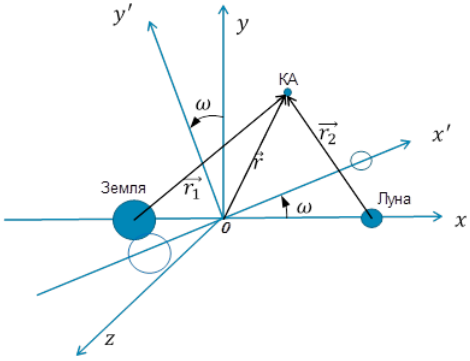


Рис. 1. Барицентрическая вращающаяся система координат

Здесь $[L]$ – размер единицы дальности равен среднему расстоянию между Землёй и Луной; $[M]$ – размер единицы массы равен сумме масс Земли и Луны; $[T]$ – размер единицы времени. В этих единицах уравнения движения имеют вид

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\dot{y} = \dfrac{\partial U}{\partial x} \\ \ddot{y} - 2\dot{x} = \dfrac{\partial U}{\partial y}, \\ \ddot{z} = \dfrac{\partial U}{\partial z} \end{cases} \quad \begin{aligned} U &= \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right) + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}, \\ r_1 &= \sqrt{\left(x+\mu\right)^2 + y^2 + z^2}, \\ r_2 &= \sqrt{\left(x-1+\mu\right)^2 + y^2 + z^2}. \end{aligned} \tag{2}$$

Следуя [2], сначала решим задачу о резонансе в рамках плоской задачи двух тел. Предположим, что отношение периода обращения КА вокруг Земли к периоду обращения Земля-Луна равно $m:n$. Это позволяет определить элементы орбиты КА:

– период обращения $$T_{KA} = \frac{n}{m} T_M = \frac{n}{m} 2\pi [T], \tag{3}$$

– большая полуось $$a = \sqrt[3]{\mu \left(\frac{T_{KA}}{2\pi}\right)^2} = [L]\left(\frac{n}{m}\right)^{2/3}, \tag{4}$$

– радиус перигея орбиты $$r_\pi = a(1-e) = [L]\left(\frac{n}{m}\right)^{2/3}(1-e), \tag{5}$$

– скорость в перигее $V_\pi = \sqrt{2G[M]\left(\frac{1}{r_\pi} - \frac{1}{2a}\right)} = \sqrt{G[M]\frac{1+e}{[L]\left(\frac{n}{m}\right)^{2/3}(1-e)}}$. (6)

Формулы (5) и (6) определяют начальные фазовые координаты КА в инерциальной системе координат на резонансной орбите

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_\pi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} V_X \\ V_Y \\ V_Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ V_\pi \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Для использования этого результата в дальнейшем необходимо перевести эти значения в безразмерный вид и во вращающуюся систему координат [4]:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{[L]}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{[L]}{G[M]}}\left(\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_X \\ V_Y \\ V_Z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega Y \\ -\omega X \\ 0 \end{pmatrix}\right), \tag{8}$$

Здесь $\theta = \theta_0 + \omega t$ – текущий угол между осями Ox' и Ox, θ_0 – начальное угловое положение Луны. После проведения моделирования траектория движения ожидаемо отличается от замкнутой резонансной орбиты, так как в расчётах начальных значений фазовых координат (7) – (8) притяжение Луны не учитывалось.

Для уточнения начального значения фазовых координат использовался метод дифференциальной коррекции со следующей формулой [5].

$$\begin{aligned} &\delta \boldsymbol{u}_{f-d} = \boldsymbol{\Phi}(\tau_d, \ \tau_0)\delta \boldsymbol{u}_0 + \dot{\boldsymbol{u}}_d \delta\tau_d, \\ &\dot{\boldsymbol{\Phi}}(\tau, \ \tau_0) = \boldsymbol{A}(\tau)\boldsymbol{\Phi}(\tau_0, \ \tau_0), \ \boldsymbol{\Phi}(\tau_0, \ \tau_0) = \boldsymbol{I}_{6\times 6}. \end{aligned} \tag{9}$$

Здесь, $\boldsymbol{u}_0 = \left(x_0, \ y_0, \ z_0, \ V_{x0}, \ V_{y0}, \ V_{z0}\right)^T$ – начальное значение фазовых координат; $\boldsymbol{u}_f$, $\boldsymbol{u}_d$ – идеальное и реальное конечные состояния;

$\boldsymbol{\Phi}(\tau,\ \tau_0)$ – матрица перехода состояний; τ – параметр времени; $\boldsymbol{A}(\tau)$ – матрица Якоби определяющая линейную зависимость эволюции матрицы перехода состояний от времени, её форма описана в [5].

Полученные результаты. Рассмотрим резонансную орбиту 4:3, т.е. КА четыре раза облетает Землю, в то время как Луна делает три оборота. Получим резонансную орбиту с параметрами $e = 0.7,\ \theta_0 = 45°$. С использованием формул (3) – (6) получаем траекторию движения, показанную на рис. 2 а). После пересчёта во вращающуюся систему координат получим траекторию, показанную на рис.е 2 б). Легко заметить, что она не является периодической.

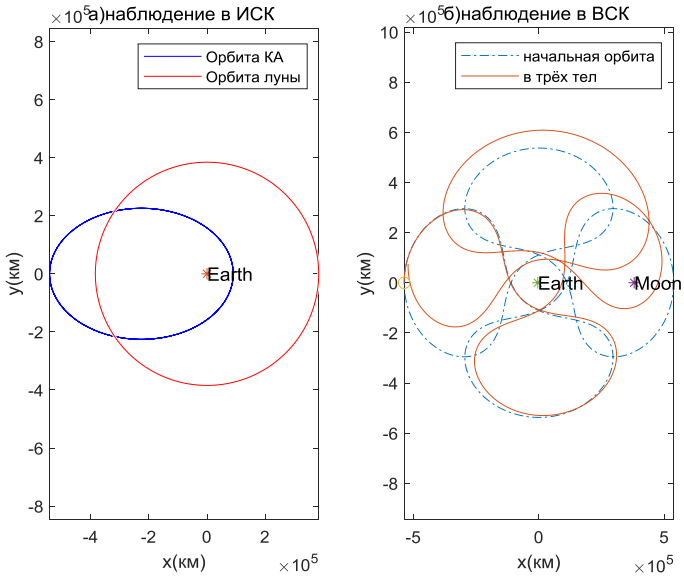


Рис. 2. Резонансная орбита (4:3, $e = 0.7,\ \theta_0 = 45°$)
а) в инерциальной системе координат,
б) во вращающейся системе координат до коррекции

После применения метода дифференциальной коррекции получаем симметричную, замкнутую траекторию, показанную на рис. 3.

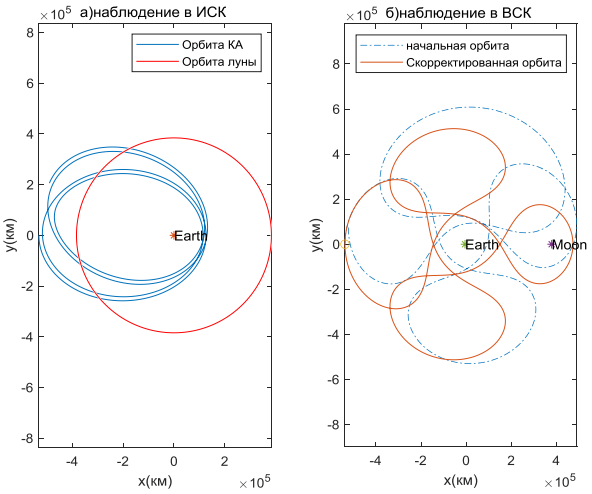


Рис. 3. Резонансная орбита (4:3, $e = 0.7$, $\theta_0 = 45°$)
после использования метода дифференциальной коррекции

Если незначительно изменять исходные данные для расчёта, то можно получить целое семейство подобных траекторий. Например, на рис. 4 показано семейство траекторий, полученное изменением параметра θ_0.

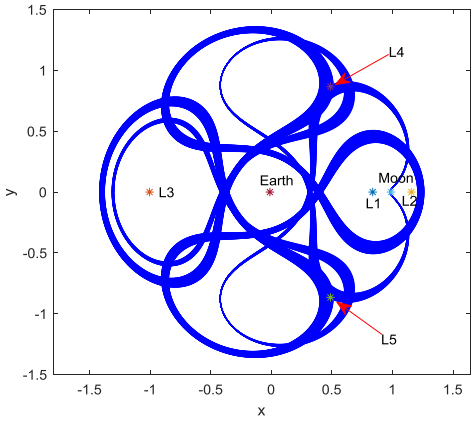


Рис. 4. Семейство резонансных (4:3) орбит ($e = 0.7$, $\theta_0 - \text{var}$)

Заключение. Используя метод дифференциальной коррекции, мы можем легко получить резонансные периодические орбиты в рамках ограниченной задачи трёх тел для системы Земля-Луна. Предложенная методика сначала не учитывает гравитационное воздействие Луны, а получает начальные фазовые координаты орбиты. Затем, используя преобразование координат и метод дифференциальной коррекции, получается требуемая периодическая орбита. Используя полученные резонансные орбиты, можно в определённой степени снижать расход рабочего тела на осуществление перелётов с двигателями малой тяги.

Список использованных источников

1. Vaquero M, Howell K C. Leveraging resonant orbit manifolds to design transfers between libration point orbits in multi-body regimes //23rd AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meeting, AAS. 2013, 13334: 18.

2. Liu L B, Qian Y J, Yang X D. Initial Parameter Analysis about Resonant Orbits in Earth-Moon System // Advances in Astronomy, 2019, 2019(1): 6324901.

3. Curtis H D. Orbital mechanics for engineering students / Butterworth-Heinemann, 2019.

4. Микрин Е, Михайлов М. Навигация космических аппаратов по измерениям от глобальных спутниковых навигационных систем. 2017.

5. Grebow D. Generating periodic orbits in the circular restricted three-body problem with applications to lunar south pole coverage // MSAA Thesis, School of Aeron. and Astronautics, Purdue University, 2006: 8-14.

УДК 629.78

С.А. Омельчук

БАЛЛИСТИЧЕСКОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ПЕРЕЛЁТА ЗЕМЛЯ–МАРС–ЗЕМЛЯ МИССИИ ПО ДОСТАВКЕ ОБРАЗЦОВ МАРСИАНСКОГО ГРУНТА

Введение. Разрабатывается схема перелёта автоматической межпланетной станции (АМС), которая способна выполнить миссию по доставке образцов марсианского грунта на Землю. На рис. 1 представлена компоновочная схема АМС с указанием основных функциональных элементов.