

Г. В. Филиппов, В. Г. Махов

К РАСЧЕТУ ТРЕХМЕРНЫХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ  
ТУРБУЛЕНТНЫХ ПОГРАНИЧНЫХ СЛОЕВ

Описывается метод расчета трехмерных осесимметричных пограничных слоев несжимаемой жидкости, в котором учтено влияние продольного градиента давления, кривизны поверхности и взаимного влияния осевого и окружного течения на профили скоростей и законы сопротивлений.

В опубликованных работах [1—8], посвященных пространственным турбулентным течениям, поперечное течение предполагалось слабым и не влияющим на основное течение. Это позволяло использовать профили продольной скорости и законы сопротивлений, полученные для плоского течения. Однако в ряде случаев, из-за пространственной природы турбулентности, необходим учет взаимного влияния основного и вторичного течения. Кроме того, следует учесть влияние продольного градиента давления и поперечной кривизны поверхности на профили скоростей и законы сопротивлений [9—13].

1. *Напряжения трения.* Рассмотрим продольное обтекание поверхности вращения, вращающейся вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . (Сказанное ниже с точностью до постоянной соответствует вращательному движению жидкости при неподвижном теле.). Выберем криволинейную систему координат. Ось  $x$  направим вдоль образующей, ось  $y$  — по нормали к поверхности, координату  $\varphi$  будем отсчитывать вокруг оси вращения. Составляющие скорости вдоль этих осей обозначим через  $u$ ,  $\omega$  и  $v$  соответственно.

Следуя [9—13], представим составляющие напряжения в виде

$$\frac{r\tau_1}{r_w\tau_{10}} = \sum_0 A_i \gamma_{11}^i, \quad \frac{r^2\tau_2}{r_w^2\tau_{20}} = \sum_0 B_i \gamma_{12}^i \quad (1.1)$$

$$r \approx r_w \pm y, \quad \gamma_{1n} = \frac{y^n}{\delta_n} \quad (n = 1, 2)$$

Здесь  $r_w$  — радиус поперечного сечения твердой поверхности;

$\tau_1$ ,  $\tau_2$  — соответственно продольная и окружная составляющие напряжения трения в пограничном слое;  $\tau_{10}$ ,  $\tau_{20}$  — соответственно значения  $\tau_1$  и  $\tau_2$  на стенке;  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  — толщина пограничного слоя в осевом и окружном направлениях соответственно.

Коэффициенты рядов (1.1) определяются из условий на стенке и внешней границе пограничного слоя, получаемых последовательным дифференцированием уравнений движения.

$$\frac{r\tau_1}{r_w\tau_{10}} = \frac{r^2\tau_2}{r_w^2\tau_{20}} = 1 \quad (\gamma_1 = \gamma_2 = 0); \quad (1.2)$$

$$\frac{r\tau_1}{r_w\tau_{10}} = 0 \quad (\gamma_1 = 1), \quad \frac{r^2\tau_2}{r_w^2\tau_{20}} = 0 \quad (\gamma_2 = 1); \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta_1} \frac{r\tau_1}{r_w\tau_{10}} = \left[ \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)_{\eta_1=0} - \frac{\rho v_0^2}{r_w} \frac{dr_w}{dx} \right] \frac{\delta_1}{\tau_{10}},$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta_2} \frac{r^2\tau_2}{r_w^2\tau_{20}} = 0 \quad \left( \begin{matrix} \gamma_1 = 0 \\ \gamma_2 = 0 \end{matrix} \right); \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta_1} \frac{r\tau_1}{r_w\tau_{10}} = 0 \quad (\gamma_1 = 1), \quad \frac{\partial}{\partial \eta_2} \frac{r^2\tau_2}{r_w^2\tau_{20}} = 0 \quad (\gamma_2 = 1). \quad (1.5)$$

Здесь  $\rho$  — плотность жидкости,  
 $p$  — давление,  $v_0 = \omega r_w$ .

Обычно  $\delta_1/\delta_2$  мало отличается от единицы, а скорости  $u$  и  $v$  быстро (особенно при турбулентном течении) стремятся к своим предельным (соответствующим невязкому течению) значениям. Поэтому при выводе (1.5) кроме обычного предположения

$$-\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)_{\eta_1=1} = U \frac{dU}{dx} \quad (1.6)$$

принято

$$v(\delta_1, x) \approx 0. \quad (1.7)$$

Прежде всего следует отметить, что, как и в плоском случае [10], условия (1.2) — (1.5) в равной мере справедливы как для ламинарных, так и для турбулентных осесимметричных пространственных пограничных слоев. Следовательно, с той же точностью, с которой полиномы (1.1) аппроксимируют действительные распределения напряжений трения, безразмерные профили напряжений трения в ламинарном и турбулентном пространственных осесимметричных пограничных слоях могут считаться одинаковыми при одинаковых соотношениях между силой давления и силой трения у стенки в направлении оси  $x$ , действующих на элемент пограничного слоя.

К сожалению, пока еще нет возможности теоретически оценить порядок приближения использованных полиномиальных аппроксимаций.

Вводя обозначения

$$\left[ \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)_{\tau_1=0} - \rho \frac{v_0^2}{r_w} \frac{dr_w}{dx} \right] \frac{\delta_1}{\tau_{10}} = \lambda, \quad \delta_n^0 = \frac{\delta_n}{r_w} \quad (n = 1, 2), \quad (1.8)$$

получим следующие выражения для напряжений трения с учетом условий (1.2) — (1.5)

$$\frac{\tau_1}{\tau_{10}} = \frac{1 + \lambda \tau_{11} - (3 + 2\lambda) \tau_{11}^2 + (2 + \lambda) \tau_{11}^3}{1 \pm \delta_1^0 \tau_{11}}, \quad \frac{\tau_2}{\tau_{20}} = \frac{1 - 3\tau_{12}^2 - 2\tau_{12}^3}{(1 \pm \delta_2^0 \tau_{12})^2}; \quad (1.9)$$

условий (1.2) — (1.4)

$$\frac{\tau_1}{\tau_{10}} = \frac{1 + \lambda \tau_{11} - (1 + \lambda) \tau_{11}^2}{1 \pm \delta_1^0 \tau_{11}}, \quad \frac{\tau_2}{\tau_{20}} = \frac{1 - \tau_{12}^2}{(1 \pm \delta_2^0 \tau_{12})^2}; \quad (1.10)$$

условий (1.2) — (1.4)

$$\frac{\tau_1}{\tau_{10}} = \frac{1 + \lambda \tau_{11}}{1 \pm \delta_1^0 \tau_{11}}, \quad \frac{\tau_2}{\tau_{10}} = \frac{1}{(1 \pm \delta_2^0 \tau_{12})^2}. \quad (1.11)$$

Определение границ изменения параметра  $\lambda$  делается способом, аналогичным описанному в [9, 10].

Отметим, что при  $\delta_1 = 0$  (1.9) — (1.11) переходят в условия, полученные для плоского турбулентного пограничного слоя [9].

На фиг. 1. приведены значения  $\tau_1/\tau_{10}$  и  $\tau_2/\tau_{20}$  для случая обтекания вращающегося цилиндра осевым потоком ( $\lambda = \delta_1 = \delta_2 = 0$ ). Кривая 1 подсчитана по уравнению (1.9), 3 — по (1.10) и 4 — по (1.11), кривая 2 заимствована из [14]. Здесь же нанесены экспериментальные точки Клебанова [15], подтверждающие аппроксимации (1.9). Однако аппроксимации (1.10) и (1.11) также использовались в ряде работ и в частных случаях нашли косвенное экспериментальное подтверждение [13], [14] и др.

2. О связи между напряжениями трения и осредненными скоростями. Чтобы установить законы изменения скоростей поперек пограничного слоя, необходимо принять какие-либо зависимости между напряжениями трения и осредненными скоростями.

Для ламинарного пограничного слоя такими зависимостями будут

$$\tau_1 = \mu \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \tau_2 = \mu r \frac{\partial}{\partial y} \frac{v}{r}. \quad (2.1)$$

В случае турбулентного пограничного слоя аналогичные связи определяются выбором модели турбулентности.

На основании двухслойной модели турбулентного пограничного слоя Прандтля вдали от стенок канала

$$\tau_1 = -\rho \langle u' w' \rangle, \quad \tau_2 = -\rho \langle v' m' \rangle. \quad (2.2)$$

Здесь  $u^1, v^1, w^1$  — соответственно пульсационные составляющие скорости в направлении осей  $x, \varphi, y$ ; угловые скобки  $\langle \rangle$  — знак осреднения.

Введем коэффициенты корреляций

$$\beta_1 = \frac{\langle u' w' \rangle}{\langle u'^2 \rangle^{\frac{1}{2}} \langle w'^2 \rangle^{\frac{1}{2}}}; \quad \beta_2 = \frac{\langle v' w' \rangle}{\langle v'^2 \rangle^{\frac{1}{2}} \langle w'^2 \rangle^{\frac{1}{2}}}. \quad (2.3)$$

Это позволяет привести (2.2) к виду

$$\begin{aligned} \tau_1 &= -\rho \beta_1 \langle u'^2 \rangle^{\frac{1}{2}} \langle w'^2 \rangle^{\frac{1}{2}}, \\ \tau_2 &= -\rho \beta_2 \langle v'^2 \rangle^{\frac{1}{2}} \langle w'^2 \rangle^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

В настоящее время существуют, по крайней мере, две гипотезы относительно функций  $\langle u'^2 \rangle^{\frac{1}{2}}$  и  $\langle v'^2 \rangle^{\frac{1}{2}}$ . По первой гипотезе [16] их принимают пропорциональными соответствующим составляющим тензора осредненных скоростей деформаций, т. е.

$$\langle u'^2 \rangle^{\frac{1}{2}} \sim \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \langle v'^2 \rangle^{\frac{1}{2}} \sim r \frac{\partial}{\partial r} \frac{v}{r}. \quad (2.5)$$

Находит применение и гипотеза о сохранении количества движения в осевом направлении и момента количества движения в окружном [17].

В этом случае

$$\langle u'^2 \rangle^{\frac{1}{2}} \sim \frac{1}{\rho} \frac{\partial (-\rho u)}{\partial r}, \quad \langle v'^2 \rangle^{\frac{1}{2}} \sim \frac{1}{\rho r} \frac{\partial (-\rho r v)}{\partial r}. \quad (2.6)$$

Предположение относительно  $\langle w'^2 \rangle^{\frac{1}{2}}$  не имеет разночтений

$$\langle w'^2 \rangle \sim \langle u'^2 \rangle + \langle v'^2 \rangle. \quad (2.7)$$

Тогда, в соответствии с первой гипотезой

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \rho l^2 \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( r \frac{\partial}{\partial y} \frac{v}{r} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial y}, \\ \tau_2 &= \rho l^2 \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( r \frac{\partial}{\partial y} \frac{v}{r} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} r \frac{\partial}{\partial y} \frac{v}{r}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

со второй

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \rho l^2 \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Gamma}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial y}, \\ \tau_2 &= \rho l^2 \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Gamma}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \frac{1}{r} \frac{\partial \Gamma}{\partial y}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Здесь  $l$  — путь перемешивания;  $\Gamma = rv$ .

Имея в виду, что

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{r \frac{\partial}{\partial y} \frac{v}{r}}, \quad \frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{\frac{1}{r} \frac{\partial \Gamma}{\partial y}} \quad (2.10)$$

уравнения (2.8) (2.9) можно представить в более удобном для практического использования виде

$$\tau_1 = \rho l^2 \left[ 1 + \left( \frac{\tau_2}{\tau_1} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2, \\ \tau_2 = \rho l^2 \left[ 1 + \left( \frac{\tau_1}{\tau_2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left( r \frac{\partial}{\partial y} \frac{v}{r} \right)^2; \quad ((2.11)$$

$$\tau_1 = \rho l^2 \left[ 1 + \left( \frac{\tau_2}{\tau_1} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2; \\ \tau_2 = \rho l^2 \left[ 1 + \left( \frac{\tau_1}{\tau_2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Gamma}{\partial y} \right)^2. \quad (2.12)$$

Обычно в теории пограничного слоя считают, что главные оси тензоров напряжения и скоростей деформаций совпадают. Следовательно, несмотря на то, что множитель  $\sqrt{1 + \left( \frac{\tau_2}{\tau_1} \right)^2} \rightarrow \infty$  при  $\eta_1 \rightarrow 1$  (что обусловлено различием в значениях  $\delta_1$  и  $\delta_2$ ),  $\tau_1 \rightarrow 0$  так как  $\frac{\partial u}{\partial y} \rightarrow 0$ . Сказанное в равной мере относится и к  $\tau_2$ .

Использование первой гипотезы при исследовании закрученных струй [16] и второй — при исследовании линейных вихрей [17] приводит к удовлетворительному совпадению результатов расчета и эксперимента. Недостаток прямых экспериментальных данных о профилях скоростей турбулентных пограничных слоев на вращающихся поверхностях не позволяет предпочесть одну гипотезу другой. Однако в работе [18], где рассмотрено течение закрученного потока в кольцевом канале, указывается косвенно подтверждающая вторую гипотезу универсальная связь

$$\frac{(\Gamma_1 - \Gamma)}{\Gamma_*} = f\left(\frac{y}{\delta_2}\right) \left( \Gamma_1 = v_0 r_w, \Gamma_* = r_w \sqrt{\frac{\tau_{20}}{\rho}} \right). \quad (2.13)$$

Так же, как и в плоском случае [9—10], будем считать, что  $l/\delta_n$  зависит только от безразмерного расстояния от стенки. Обычно полагают зависимости вида

$$\frac{l}{\delta_n} = k\eta_n(1 + b\eta_n), \quad \frac{l}{\delta_n} = k\eta_n \quad (n = 1, 2). \quad (2.14)$$

Таким образом, безразмерный путь смещения можно рассматривать как величину, более общую по сравнению с профилями напряжений трения, и считать его приближенно одинаковым для широкого класса пограничных слоев.

Тогда различие в профилях скоростей будет обусловлено исключительно различием в профилях напряжений трения.

3. *Профили скорости.* Подставляя (1.9) — (1.11) и (2.14) в (2.11) или (2.12) и разрешая последние относительно производных скоростей, после интегрирования получаем

$$u = U(x) - \left( \frac{\tau_{10}}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{k} F_1(A, \lambda, \delta_1^0, \gamma_{11}),$$

$$\frac{v}{r} = \frac{1}{r_w} \left( \frac{\tau_{20}}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{k} F_2(A, \lambda, \delta_2^0, \gamma_{12}); \quad (3.1)$$

$$u = U(x) - \left( \frac{\tau_{10}}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{k} F_1(A, \lambda, \delta_1^0, \gamma_{11}),$$

$$\Gamma = r_w \left( \frac{\tau_{20}}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{k} F_3(A, \lambda, \delta_2^0, \gamma_{12}); \quad (3.2)$$

$$F_1 = k \int_1^{\gamma_1} \left( \frac{\tau_1}{\tau_{10}} \right)^{\frac{1}{2}} \left[ 1 + \frac{1}{A} \left( \frac{\tau_{20}}{\tau_1} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{4}} \frac{d\gamma_{11}}{\left( \frac{l}{\delta_1} \right)}$$

$$F_2 = k \int_1^{\gamma_2} \frac{1}{1 \pm \delta_2^0 \gamma_{12}} \left( \frac{\tau_2}{\tau_{20}} \right)^{\frac{1}{2}} \left[ 1 + A \left( \frac{\tau_{10}}{\tau_2} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{4}} \frac{d\gamma_{12}}{\left( \frac{l}{\delta_2} \right)}, \quad (3.3)$$

$$F_3 = k \int_1^{\gamma_2} (1 \pm \delta_2^0 \gamma_{12}) \left( \frac{\tau_2}{\tau_{20}} \right)^{\frac{1}{2}} \left[ 1 + A \left( \frac{\tau_{10}}{\tau_2} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{4}} \frac{d\gamma_{12}}{\left( \frac{l}{\delta_2} \right)}$$

$$A = \left( \frac{\tau_{10}}{\tau_{20}} \right)^2.$$

Напомним, что верхний знак соответствует выпуклой поверхности, а нижний — вогнутой.

В частном случае  $A \rightarrow \infty$  (вращение отсутствует) профили осевых скоростей переходят в аналогичные соотношения для двухмерного движения [9—13].

Рис. 2 иллюстрирует результаты расчета профилей осевой скорости в тонком пограничном слое на вращающемся цилиндре ( $\lambda = \delta_1^0 = 0$ ) при различных значениях  $A$  и  $z_1 = \frac{Uk}{\sqrt{\frac{\tau_{10}}{\rho}}}$ . Видно,

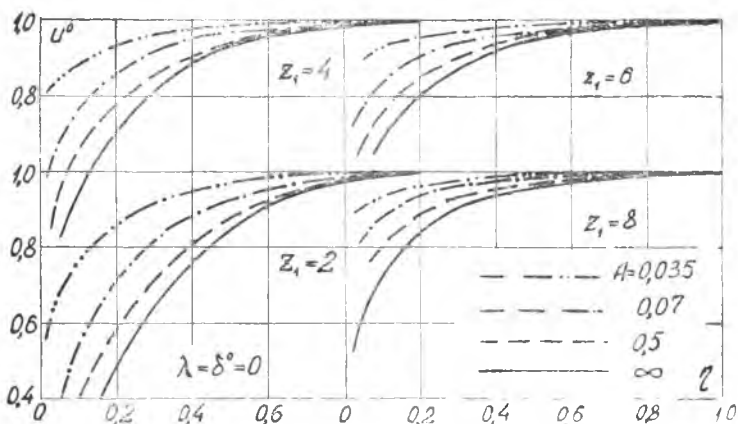
что влияние вращения может быть значительным (см. ниже, п. 5).

4. Законы сопротивлений. Профили скорости (3.1) и (3.2) не удовлетворяют на поверхности тела условиям прилипания. Обратимся к ламинарному подслою. Полагая, что параметры последнего зависят не только от физических свойств жидкости и величины на-

пряжения трения на стенке, но и от поперечной кривизны канала [11—13], по П-теореме теории размерностей [19] находим

$$\delta_l = \alpha(\eta_w) \frac{\nu}{(v_{1*}^2 + v_{2*}^2)^{\frac{1}{2}}} = \alpha(\eta_w) \frac{\nu}{v_{1*}} B = \alpha(\eta_w) \frac{\nu}{v_{2*}} C, \quad (4.1)$$

где  $\delta_l$  — толщина ламинарного подслоя



Фиг. 2.

$$\eta_w = \frac{(v_{1*}^2 + v_{2*}^2)^{\frac{1}{2}} r_w}{\nu} = \frac{k}{B} \frac{R_{eff}}{z_1} = \frac{k}{C} \frac{R_{eff}^x}{z_2}, \quad (4.2)$$

$$v_{1*} = \left( \frac{\tau_{10}}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad v_{2*} = \left( \frac{\tau_{20}}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad R_{eff} = \frac{U r_w}{\nu}, \quad x = \frac{\Gamma_1}{U r_w}.$$

$$B = \left[ 1 + A^{\frac{1}{2}} \right]^{-\frac{1}{2}}, \quad C = \left[ 1 + A^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad z_1 = \frac{U k}{v_{1*}}, \quad z_2 = \frac{\Gamma_1 k'}{\Gamma_*}.$$

Зависимость  $\alpha(\eta_w)$  так же как и величины  $k$  и  $w$  в (2.14), можно получить только из опыта. В дальнейшем для определенности будем пользоваться вторым из соотношений (2.14). Из-за отсутствия подробных экспериментальных данных в первом приближении примем  $k=0.4$  и  $\alpha=11.5$ , как и для двумерного пограничного слоя [10].

Для ламинарного подслоя справедливы (2.1). Подставляя в них  $\tau_1$  и  $\tau_2$  из (1.9) — (1.11), интегрируя по переменной  $y$ , получаем профили скоростей в ламинарном подслое

$$u = U \frac{k^2}{z_1^2} R_{eff} \delta_1^0 \int_0^{\eta_1} \frac{\tau_1}{\tau_{10}} d\eta_1 = U \frac{k^2}{z_1^2} R_{eff} \delta_1^0 \Phi_1(\lambda, \delta_1^0, \eta_1); \quad (4.3)$$

$$\Gamma = \Gamma_1 (1 \pm \delta_2^0 \gamma_{l2})^2 \left( 1 + \frac{k^2}{z_2^2} \times R_{\text{eff}} \delta_2^0 \int_0^{\gamma_2} \frac{\tau_2}{\tau_{20}} \frac{d\gamma_2}{1 \pm \delta_2^0 \gamma_{l2}} \right) =$$

$$= \Gamma_1 (1 \pm \delta_2^0 \gamma_{l2})^2 \left[ 1 + \left( \frac{k}{z_2} \right)^2 \times R_{\text{eff}} \delta_2^0 \Phi_2(\lambda, \delta_2^0, \gamma_{l2}) \right].$$

На границе ламинарного подслоя ( $y = \delta_l$ , или  $\gamma_{l1} = \delta_{l1}^0$  и  $\gamma_{l2} = \delta_{l2}^0$ ) соотношения (3.1) (или (3.2)) и (4.3) (или (4.4)) следует считать одинаково справедливыми. Полагая в них

$$\gamma_{l1} = \delta_{l1}^0 = \frac{\alpha B}{\delta_{l1}^0 \gamma_{lw}} \quad \left( \text{или} \quad \gamma_{l2} = \delta_{l2}^0 = \frac{\alpha C}{\delta_{l2}^0 \gamma_{lw}} \right)$$

и приравнивая (3.1) (или (3.2)) и (4.3) (или (4.4)), получаем связь между напряжениями трения на поверхности и толщинами пограничного слоя — законы сопротивлений

$$z_1 = F_1 \left( A, \lambda, \delta_1^0 \frac{\alpha B}{\delta_{l1}^0 \gamma_{lw}} \right) + k \gamma_{lw} B \delta_1^0 \Phi_1 \left( \lambda, \delta_1^0 \frac{\alpha B}{\delta_{l1}^0 \gamma_{lw}} \right); \quad (4.5)$$

$$z_2 = F_2 \left( A, \lambda, \delta_2^0 \frac{\alpha C}{\delta_{l2}^0 \gamma_{lw}} \right) + k \gamma_{lw} C \delta_2^0 \Phi_2 \left( \lambda, \delta_2^0 \frac{\alpha C}{\delta_{l2}^0 \gamma_{lw}} \right); \quad (4.6)$$

или

$$z_2 = \frac{1}{\left( 1 \pm \frac{\alpha C}{\gamma_{lw}} \right)^2} F_2 \left( A, \lambda, \delta_2^0, \frac{\alpha C}{\delta_{l2}^0 \gamma_{lw}} \right) + k \gamma_{lw} C \delta_2^0 \Phi_2 \left( \lambda, \delta_2^0, \frac{\alpha C}{\delta_{l2}^0 \gamma_{lw}} \right).$$

При  $A \rightarrow \infty$  (4.3) и (4.5) совпадают с результатами, полученными в [15]. Соотношения для профилей скоростей (3.1) или (3.2) вместе с законами сопротивлений (4.5) и (4.6) и системой интегральных соотношений для пограничного слоя позволяют полностью решить поставленную задачу.

**5. Годограф скорости.** Будем искать проекцию годографа полной скорости на поверхность обтекаемого тела, т. е. зависимость  $u = u(v)$ .

Рассмотрим обтекание цилиндра ( $\lambda = 0$ ). При малых  $\delta_n^0$ , для ламинарного подслоя из (4.3) и (4.4) находим

$$\frac{u}{U} = \frac{k^2}{z_1^2} \int_0^{\gamma_1} \frac{\tau_1}{\tau_{10}} d\gamma, \quad \frac{v}{v_0} = 1 - \frac{k^2}{z_2^2} \int_0^{\gamma_2} \frac{\tau_2}{\tau_{20}} d\gamma. \quad (5.1)$$

Из (1.5) — (1.7) следует  $\frac{\tau_1}{\tau_{10}} = \frac{\tau_2}{\tau_{20}}$  при  $\lambda = \delta_1^0 = \delta_2^0 = 0$ . Тогда из (5.1), вспоминая определения  $\kappa$ ,  $z_1$  и  $z_2$  (4.2), следует

$$\frac{u}{U} = \zeta \left( 1 - \frac{v}{v_0} \right) \quad \left( \zeta = \kappa \frac{\tau_{10}}{\tau_{20}} \right). \quad (5.2)$$

В турбулентном ядре пограничного слоя при тех же предположениях из (3.1) или (3.2) имеем

$$\frac{u}{U} = 1 - \frac{1}{z_1} \left( \frac{A}{1+A} \right)^{\frac{1}{4}} \int_1^{\gamma_1} \left( \frac{\tau_1}{\tau_{10}} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{d\gamma_1}{\gamma_1},$$



$$\frac{v}{v_0} = \frac{1}{z_2} \frac{1}{(1+A)^{\frac{1}{4}}} \int_1^{\eta} \left( \frac{\tau_2}{\tau_{20}} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{d\eta}{r_1}, \quad (5.3)$$

откуда вытекает:

$$\frac{v}{U} = 1 - \frac{v}{v_0}. \quad (5.4)$$

Годограф скорости будет замкнутой кривой, а (5.2) и (5.4) — уравнения параллельных прямых. Из условия их пересечения (слияния) следует

$$\zeta = 1 \quad \text{или} \quad \zeta = \kappa \frac{\tau_{10}}{\tau_{20}} = 1 \quad (5.5)$$

и годограф скорости будет линейным

$$\frac{v}{v_0} = 1 - \frac{n}{U}. \quad (5.6)$$

Эта линейность подтверждается опытами Парра [5] (фиг. 3).

Обработка опытов Парра дает  $\zeta \approx 0.8$ . Совпадение теоретического и опытного значений  $\zeta$  следует считать удовлетворительным, так как расхождение их лежит в пределах точности эксперимента и его обработки.

Определяя  $z_1$  графическим дифференцированием опытных результатов Парра [5] и полагая  $\zeta=1$ , можно построить профили скоростей при  $x=var$  (фиг. 4). Результаты расчетов качественно подтверждаются экспериментами Парра [5]. Количественная оценка затруднена, так как измерения Парра были проведены в непосредственной близости к переходной зоне, где турбулентное течение могло быть недостаточно развитым. Во всяком случае опыты безусловно подтверждают существенное влияние вторичного течения на основное.

Был также проведен ряд расчетов профилей скорости закрученного течения жидкости в кольцевом канале. Найдено качественное, а в ряде случаев и количественное совпадение с результатами эксперимента [18].

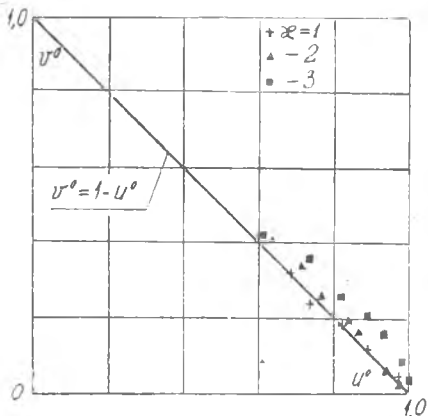


Рис. 3.

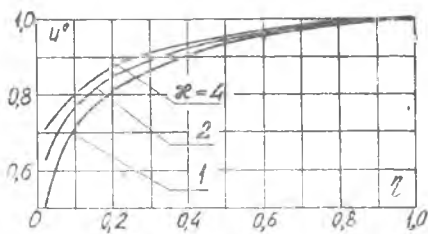


Рис. 4.

6. *Характеристики слоя в зоне отрыва.* Будем полагать, что вследствие осевой симметрии пограничный слой отрывается по линии, лежащей в плоскости, перпендикулярной к оси тела. Условием отрыва является  $\tau_{10}=0$ . В этом случае  $\lambda \rightarrow \infty$ . Поэтому, вместо (1.1) в этой зоне удобно пользоваться аппроксимацией вида

$$r\tau_1 = \sum_0 A_i' \gamma_{11}^i. \quad (6.1)$$

Коэффициенты  $A_i'$  находятся из условий

$$\tau_1 = 0 \quad (\gamma_{11} = 0), \quad \tau_1 = 0 \quad (\gamma_{11} = 1); \quad (6.2)$$

$$\frac{\partial(r\tau_1)}{\partial\gamma_{11}} = r_w \left[ \left( \frac{\partial p}{\partial\eta} \right)_{\gamma_{11}=0} - \frac{p v_0^2}{r_w} \frac{dr_w}{dx} \right] \delta_1 \quad (\gamma_{11} = 0); \quad (6.3)$$

$$\frac{\partial(r\tau_1)}{\partial\gamma_{11}} = 0 \quad (\gamma_{11} = 1). \quad (6.4)$$

Следовательно, профили осевой составляющей напряжения трения будут иметь вид из (6.2) — (6.4).

$$\frac{\tau_1}{\lambda_1} = \frac{\gamma_{11} (1 - 2\gamma_{11} + \gamma_{11}^2)}{1 \pm \delta_1^0 \gamma_{11}}, \quad \lambda_1 = \delta \left[ \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)_{\gamma_{11}=0} - \frac{p v_0^2}{r_w} \frac{dr_w}{dx} \right]. \quad (6.5)$$

Подставляя (6.5) в (2.11), получаем

$$u = U(x) - \left( \frac{\lambda_1}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{k} F_1'(A', \delta_1^0, \gamma_{11}),$$

$$\frac{v}{r} = \frac{1}{r_w} \left( \frac{\tau_{20}}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{k} F_2'(A', \delta_2^0, \gamma_{12}); \quad (6.6)$$

$$u = U(x) - \left( \frac{\lambda_1}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{k} F_1'(A_1', \delta_1', \gamma_{11}),$$

$$\Gamma = r_w \left( \frac{\tau_{20}}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{k} F_3'(A', \delta_2^0, \gamma_{12}); \quad (6.7)$$

$$F_1' = k \int_0^{\gamma_{11}} \left( \frac{\tau_1}{\lambda_1} \right)^{\frac{1}{2}} \left[ 1 + \frac{1}{A'} \left( \frac{\tau_{20}}{\tau_1} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{4}} \frac{d\gamma_{11}}{\left( \frac{l}{\delta_1} \right)} \quad (6.8)$$

$$F_2' = k \int_1^{\gamma_{12}} \frac{1}{1 \pm \delta_2^0 \gamma_{12}} \left( \frac{\tau_2}{\tau_{20}} \right)^{\frac{1}{2}} \left[ 1 + A' \left( \frac{\tau_1}{\tau_2} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{4}} \frac{d\gamma_{12}}{\left( \frac{l}{\delta_2} \right)},$$

$$F_3' = k \int_1^{\gamma_{12}} (1 \pm \delta_2^0 \gamma_{12}) \left( \frac{\tau_2}{\tau_{20}} \right)^{\frac{1}{2}} \left[ 1 + A' \left( \frac{\tau_2}{\tau_2} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{4}} \frac{d\gamma_{12}}{\left( \frac{l}{\delta_2} \right)},$$

$$A' = \left( \frac{\lambda_1}{\tau_{20}} \right)^2$$

Величину  $\sqrt{\frac{\lambda_1}{\rho}}$  можно интерпретировать как аналог динамической скорости в отрывном сечении. Следовательно, в указанном сечении будет соблюдаться подобие профилей составляющих скоростей при условии равенства параметров  $A'$ ,  $\sqrt{\frac{\lambda_1}{\rho}}$ ,  $\delta_n^0$ .

Профиль осевой составляющей скорости в ламинарном подслое найдем из (2.1) с учетом (6.5)

$$u = \frac{\lambda_1}{\rho} \frac{\delta_1}{v} \int_0^{\eta_1} \frac{\tau_1}{\lambda_1} d\tau_1 = \frac{\lambda_1}{\rho} \frac{\delta_1}{v} \Phi_1'(\delta_1^0, \tau_1). \quad (6.9)$$

Тогда законы сопротивлений в отрывном сечении будут иметь вид

$$U(x) - \left(\frac{\lambda_1}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{k} F_1'(A', \delta_1^0, \delta_{l_1}^0) = \frac{\lambda_1}{\rho} \frac{\delta_1}{v} \Phi_1'(\delta_1^0, \delta_{l_1}^0) \quad (6.10)$$

$$(1 \pm \delta_2^0 \delta_{l_2}^0) \left[ 1 + \frac{k^2}{z_2^2} \kappa R_{\text{eff}} \delta_2^0 \Phi_2(\delta_2^0, \delta_{l_2}^0) \right] = \frac{1}{z_2} F_2'(A', \delta_2^0, \delta_{l_2}^0),$$

$$(1 \pm \delta_2^0 \delta_{l_2}^0)^3 \left[ 1 + \frac{k^2}{z_2^2} \kappa R_{\text{eff}} \delta_2^0 \Phi_2(\delta_2^0, \delta_{l_2}^0) \right] = \frac{1}{z_2} F_3'(A', \delta_2^0, \delta_{l_2}^0). \quad (6.11)$$

Если  $A' \rightarrow \infty$ , равенство (6.10) переходит в соответствующее соотношение, полученное в [13] при использовании первого условия (6.2) и условия (6.3).

7. Другая аппроксимация напряжений трения. Аппроксимация напряжений трения вида (1.1) часто при вычислении интегралов (3.3) приводит последние к эллиптическому типу, или требует применения численных методов вычислений. Часто это оказывается неудобным. Поэтому рассмотрим другие представления напряжений трения поперек пограничного слоя [9—10], а именно

$$\left(\frac{r\tau_1}{r_w\tau_{10}}\right)^{\frac{1}{2}} = \sum_0 A_i'' \eta_1^i, \quad \left(\frac{r^2\tau_2}{r_w^2\tau_{20}}\right) = \sum_0 B_i'' \eta_2^i. \quad (7.1)$$

Условиями для определения  $A_i''$  и  $B_i''$  являются

$$\left(\frac{r\tau_1}{r_w\tau_{10}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{r^2\tau_2}{r_w^2\tau_{20}}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 \quad (\eta_1 = \eta_2 = 0); \quad (7.2)$$

$$\left(\frac{r\tau_1}{r_w\tau_{10}}\right)^{\frac{1}{2}} = 0 \quad (\eta_1 = 1), \quad \left(\frac{r^2\tau_2}{r_w^2\tau_{20}}\right)^{\frac{1}{2}} = 0 \quad (\eta_2 = 1); \quad (7.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta_1} \left(\frac{r\tau_1}{r_w\tau_{10}}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\lambda}{2}, \quad \frac{\partial}{\partial \eta_2} \left(\frac{r^2\tau_2}{r_w^2\tau_{20}}\right)^{\frac{1}{2}} = 0 \quad (\eta_1 = \eta_2 = 0); \quad (7.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta_1} \left(\frac{r\tau_1}{r_w\tau_{10}}\right)^{\frac{1}{2}} = 0 \quad (\eta_1 = 1), \quad \frac{\partial}{\partial \eta_2} \left(\frac{r^2\tau_2}{r_w^2\tau_{20}}\right)^{\frac{1}{2}} = 0 \quad (\eta_2 = 1). \quad (7.5)$$

Ради экономии места далее рассмотрим аппроксимацию (7.1), исходя из условий только (7.2) — (7.4).

$$\left(\frac{r_{\tau_1}}{r_{w\tau_{10}}}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{\lambda}{2} \eta_1 - \left(1 + \frac{\lambda}{2} \eta_1\right), \quad \left(\frac{r_{\tau_2}}{r_{w\tau_{20}}}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 - \eta_2^2. \quad (7.6)$$

Для определенности используем гипотезу (2.11), но вторично подчеркнем, что еще нет убедительных доказательств в поддержку той или иной из гипотез.

В результате ряда численных расчетов выяснилось, что

$$\left[1 + \frac{1}{A} \left(\frac{\tau_1}{\tau_{10}}\right)^{\frac{1}{4}}\right]^{\frac{1}{4}} \approx \left(1 + \frac{1}{A}\right)^{\frac{1}{4}},$$

$$\left[1 + A \left(\frac{\tau_{10}}{\tau_1}\right)^{\frac{1}{4}}\right]^{\frac{1}{4}} \approx (1 + A)^{\frac{1}{4}}. \quad (7.7)$$

Введем обозначения

$$\left(\frac{A}{1+A}\right)^{\frac{1}{4}} = B_1, \quad \left(\frac{1}{1+A}\right)^{\frac{1}{4}} = C_1. \quad (7.8)$$

Тогда профили скорости и законы сопротивлений примут вид

$$u^0 = \frac{u}{U} = 1 - \frac{B_1}{z_1} \left\{ \ln \left| \frac{(\sqrt{1 \pm \delta_1^0 \eta_1} - 1)(\sqrt{1 \pm \delta_1^0 + 1})}{(\sqrt{1 \pm \delta_1^0 \eta_1} + 1)(\sqrt{1 \pm \delta_1^0 - 1})} \right| \pm \right.$$

$$\pm \frac{\lambda}{\delta_1^0} (\sqrt{1 \pm \delta_1^0} - \sqrt{1 \pm \delta_1^0}) + \frac{2}{3\delta_1^{02}} \left(1 + \frac{\lambda}{2}\right) \times$$

$$\times \left[ \sqrt{1 \pm \delta_1^0 \eta_1} (2 \mp \delta_1^0 \eta_1) - \sqrt{1 \pm \delta_1^0} (2 \mp \delta_1^0) \right] \Big\}; \quad (7.9)$$

$$v^0 = \frac{v}{v_0} = \frac{C_1}{z_2} (1 \pm \delta_2^0 \eta_2) \left[ 2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 \pm \delta_2^0 \eta_2}} - \frac{1}{\sqrt{1 \pm \delta_2^0}} \right) + \right.$$

$$+ \ln \left| \frac{(\sqrt{1 \pm \delta_2^0 \eta_2} - 1)(\sqrt{1 \pm \delta_2^0 + 1})}{(\sqrt{1 \pm \delta_2^0 \eta_2} + 1)(\sqrt{1 \pm \delta_2^0 - 1})} \right| -$$

$$\left. - \frac{2}{\delta_2^{02}} \left( \frac{2 \pm \delta_2^0 \eta_2}{\sqrt{1 \pm \delta_2^0 \eta_2}} - \frac{2 \pm \delta_2^0}{\sqrt{1 \pm \delta_2^0}} \right) \right]; \quad (7.10)$$

$$1 + \frac{B_1}{z_1} \psi_1 \left( \lambda, \delta_1^0, \frac{\sigma B}{\delta_1^0 \eta_{w\tau}} \right) =$$

$$= \pm \frac{k^2}{z_1^2} R_{\text{eff}} \left\{ \ln \left( 1 \pm \frac{\sigma B}{\eta_{w\tau}} \right) + \frac{\lambda}{\delta_1^0} \left[ \frac{\sigma B}{\eta_{w\tau}} \mp \ln \left( 1 \pm \frac{\sigma B}{\eta_{w\tau}} \right) \right] \right\}; \quad (7.11)$$

$$\frac{C_1}{z_2} \psi_2 \left( \delta_2^0, \frac{\sigma C}{\delta_2^0 \eta_{w\tau}} \right) = \left( 1 \pm \frac{\sigma C}{\eta_{w\tau}} \right) \times$$

$$\times \left\{ 1 \mp \frac{k^2}{z_2^2} R_{\text{eff}} \left[ \frac{1}{(1 \pm \frac{\sigma C}{\eta_{w\tau}})^2} - \frac{1}{(1 \pm \delta_2^0)^2} \right] \right\}, \quad (7.12)$$

где  $\psi_1$  и  $\psi_2$  соответственно представляют собой функции в фигурных скобках в (7.9) и квадратных в (7.10).

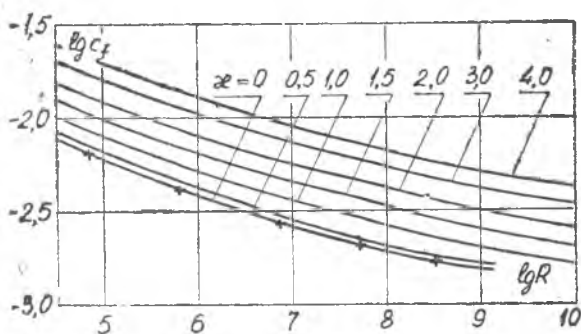
В частном случае  $B=B_1=1$ ,  $\delta_1^0=\delta_2^0=0$  (7.9) и (7.11) совпадают с результатами, полученными в [10]. Наконец, при  $\lambda=\delta_1^0=\delta_2^0=0$  и  $\delta_1\approx\delta_2$  из (7.9) и (7.10) снова следует (5.4).

Отметим, что все формулы п. 7 справедливы при значениях  $\lambda$  больше некоторого  $\lambda_*$ , при котором меняется знак в (7.1). Поэтому та область течения, где действует «вентиляторный эффект» [4], остается вне пределов применимости, приведенного выше анализа. Кроме того, такая аппроксимация исключает возможность рассмотрения характеристик пограничного слоя в области отрыва.

В перечисленных выше случаях необходимо использовать аппроксимации п. 1. Для рассмотрения, «вентиляторного эффекта» необходимо также в п. 3 решить нелинейные дифференциальные уравнения содержащие абсолютные величины производных искомых функций, что выходит за рамки поставленной нами задачи.

8. Частные задачи. Полученные выше профили скорости и законы сопротивлений были применены для расчета осесимметричного трехмерного турбулентного пограничного слоя несжимаемой жидкости для двух случаев.

а) *Вращающийся цилиндр в осевом потоке.* Эта задача в предположении малости толщины пограничного слоя по сравнению с радиусом цилиндра решается в конечном виде без применения приближенных методов решения нелинейной системы интегральных уравнений пограничного слоя.



Фиг. 5.

На фиг. 5 представлено изменение коэффициента сопротивления трения  $c_f$  от числа Рейнольдса  $R_{eff}$  для ряда значений  $x$ . Здесь же крестиками отмечены расчеты по формуле Шлихтинга [20], хорошо подтвержденной экспериментами с плоской пластиной ( $x=0$ ).

На фиг. 6 построена зависимость коэффициента момента трения  $c_m$  [14] от  $R_s = xR_{eff}$  для ряда значений  $x$ . Крестиками отмечены точки, соответствующие эксперименту с цилиндром, вращающимся

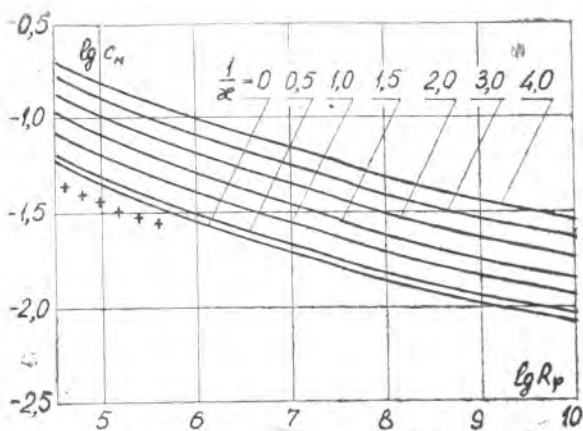


Рис. 6.

ся в неограниченном пространстве при  $1/x=0$  [14]. Некоторые расхождения с расчетом объясняются, по-видимому, влиянием поперечной кривизны пограничного слоя.

б) Турбулентное течение вращающейся жидкости в круглой трубе.

Было учтено влияние поперечной кривизны твердой поверхности на пограничный слой и взаимное влияние поперечных и продольных составляющих коэффициентов турбулентного трения и про-

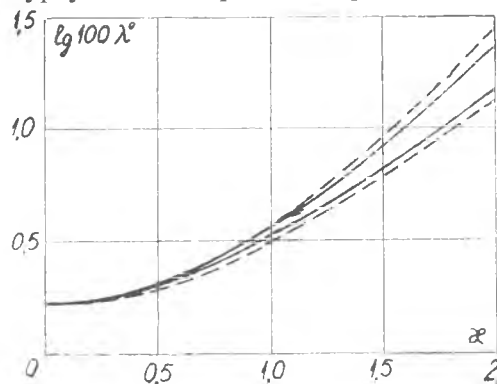
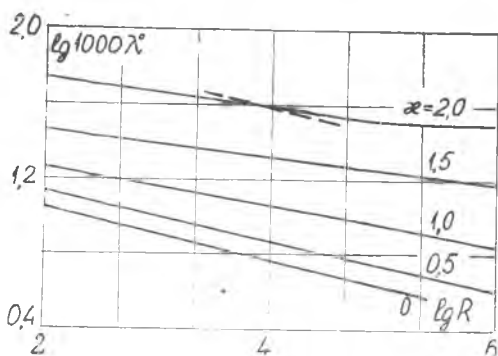


Рис. 8.



Фиг. 7.

филей скорости в пограничном слое. Никаких ограничений на вид закрутки не накладывалось.

Из рассмотрения результатов экспериментов [6,7] и др. следует вывод о подобии профилей скорости вне пограничного слоя (в невязком ядре течения).

На фиг. 7 представлено изменение коэффициента соп-

ротивления  $\lambda^0 = \frac{2\Delta p}{(\rho u^2 > x^0)}$  (здесь  $\Delta p$  — падение давле-

ния;  $x^0 = x/r_w$ ) при закрученном течении жидкости в цилиндрической трубе. Пунктирная кривая иллюстрирует эксперимент [6].

В работе [7] коэффициент сопротивления  $\lambda^0$  измерялся в диапазоне чисел  $Re_{eff} = 10^5 - 7 \cdot 10^5$  для различных  $x_0 = x(x=0)$ . На рис. 8 пунктирные линии — результат эксперимента. Теоретические кривые (сплошные линии — верхняя для  $Re_{eff} = 7 \cdot 10^5$ , нижняя для  $Re_{eff} = 10^5$ ) удовлетворительно согласуются с опытом.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Мур Ф. Теория трехмерного пограничного слоя. В сб. «Проблемы механики», вып. II, М. Изд-во иностр. лит., 1959.
2. Schlichting H. Three-dimensional boundary layer flow. Inter. Association for Hydraulic Research, 9-th Convention, Dibroviuk, 1961. (Рус. перев.: «Механика», Период. сб. перев. иностр. статей № 3, 1964).
3. Cooke J. C. Three-dimensional turbulent boundary layers Aeronautical Research Council, C. P. № 655, 1963. (Рус. перев.: «Механика» период. сб. перев. иностр. статей, № 5, 1964).
4. Л. А. Дорфман. Турбулентный пограничный слой на осесимметричном теле, быстро вращающемся в осевом потоке. Изв. АН СССР, ОН, Механика и машиностроение, № 4, 1962.
5. Parr O. Untersuchungen der dreidimensionalen Grenzschicht an rotierenden Drehkorpern bei axial Anstromung, Ing.—Arch., 1963, Bd. 32, H. 6.
6. Nissan A. H., Breasan V. P. Swirling flow in cylinder, A. I. Ch. E. Journal, 1961, vol. 7, No. 4.
7. Liepe F. Untersuchungen uber das Verhalten von Drallströmungen in Kegeldiffusoren, Maschinenbautechnik, 1963, Bd. 12, No 3.
8. А. В. Колесников. Приближенный метод расчета пространственного пограничного слоя. Сб. статей по аэрогидродинамике. Тр. ЦАГИ вып. 940, 1964.
9. К. К. Федяевский. Турбулентный пограничный слой крыла, ч. 1. Тр. ЦАГИ, вып. 282, ч. 2, 1935; Тр. ЦАГИ, вып. 316, 1937.
10. К. К. Федяевский, А. С. Гиневский. Метод расчета турбулентного пограничного слоя при наличии продольного градиента давления, Ж. техн. физ. т. 27, № 2, 1957.
11. Е. Е. Солодкин, А. С. Гиневский. Определение характеристик турбулентного пограничного слоя и сопротивления длинных осесимметричных тел. Тр. НТО судостроит, пром-ти, 1957, т. 7, вып. 2.
12. Е. Е. Солодкин, А. С. Гиневский. Турбулентное течение вязкой жидкости в начальных участках осесимметричных и плоских каналов, Тр. ЦАГИ, № 701, 1957.
13. А. С. Гиневский, Е. Е. Солодкин. Влияние поперечной кривизны поверхности на характеристики осесимметричного турбулентного пограничного слоя, ПММ, т. 22, вып. 6, 1958.
14. Л. А. Дорфман. Гидродинамическое сопротивление и теплоотдача вращающихся тел, М., Физматгиз, 1960.
15. Клаузер Ф. Турбулентный пограничный слой. В сб. «Проблемы механики», вып. 2, Изд-во иностр. лит. 1959.
16. Л. Г. Лойцянский. Распространение закрученной струи в безграничном пространстве, заполненном той же жидкостью, ПММ, т. 17, вып. 1. 1953.
17. Hoffmann E. R., Joubert P. N. Turbulent line vortices. J. Fluid. Mech., 1963, vol. 16, No 3. (Рус. перев.: «Механика», период. сб. перев. иностр. статей, 1964, № 3).
18. Hsuan Yeh. Boundary layer along annular walls in a swirling flow, Trans. ASME, 1958, vol 80, No 4.
19. Л. И. Седов. Методы подобия и размерности в механике, Изд. 4. М., Физматгиз, 1957.
20. Г. Шлихтинг. Теория пограничного слоя. Изд-во иностр. лит., 1956.