

Н. Н. Огородников, М. П. Шатунов

ОХЛАЖДЕНИЕ ДЛИННОЙ МЕТАЛЛИЧЕСКОЙ ТРУБЫ ГАЗОВЫМ ПОТОКОМ

В процессе продувания длинных металлических труб или щелевых каналов газовым теплоносителем происходит нестационарное перераспределение температуры стенок и потока по ходу течения. Подобные процессы характерны, например, для регенеративных теплообменных аппаратов с металлической насадкой из труб или листов.

До настоящего времени оценка их теплового режима производится по средним температурам.

В статье дается уточнение температурной картины этого явления в зависимости от координаты вдоль оси трубы x и времени τ для симметричных и несимметричных каналов.

§ 1. СИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА

Рассмотрим сначала течение газа в трубе или в канале, образованными металлическими стенками одинаковой толщины δ .

В этом случае температурное поле стенки и газа полностью определяется системой, состоящей из двух дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a_{ст} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\alpha}{(\delta \gamma C_p)_{ст}} \cdot (T - t), \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a_r \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\alpha U}{(F \cdot \gamma \cdot C_p)_r} \cdot (T - t) - w \cdot \frac{\partial t}{\partial x}, \quad (1.2)$$

и граничных условий:

$$T(x, 0) = t(x, 0) = T_0; \quad T(x, \infty) = t(x, \infty) = t_0; \quad t(0, \tau) = t_0. \quad (1.3)$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$T = T(x, \tau)$, $t = t(x, \tau)$ — средние по сечению температуры стенки и газового потока соответственно на расстоянии x от входа канала в момент времени τ ;
 γ , C_p , α , a — соответственно плотность, удельная теплоёмкость, коэффициент теплоотдачи и коэффициент температуропроводности;
 U , F — периметр и площадь поперечного сечения канала;
 W — средняя массовая скорость потока в канале;
 $T_0 = \text{const}$ — начальная температура стенки и потока;
 $t_0 = \text{const}$ — температура газового потока на входе в канал после начала процесса ($\tau > 0$).

Дифференциальные уравнения (1.1) и (1.2) есть уравнения теплового баланса бесконечно малых по длине элементов стенки и газового потока. Первые члены в правой части характеризуют тепловой поток за счет теплопроводности вдоль оси канала; вторые члены — тепловой поток за счет взаимной теплоотдачи через боковую поверхность элементов; наконец, входящий в уравнение (1.2) третий член $W \frac{\partial t}{\partial x}$ определяет тепловой поток за счет механического движения газа в канале.

Если скорость этого движения велика, то тепловой поток за счет молекулярной и турбулентной теплопроводности вдоль оси канала будет незначителен по сравнению с другими тепловыми потоками. Это позволяет пренебречь первыми членами в правой части уравнений (1.1) и (1.2).

В результате получим вместо них более простые приближенные уравнения:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = -M(T - t), \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = m(T - t) - W \frac{\partial t}{\partial x}, \quad (1.5)$$

где

$$M = \frac{\alpha}{(\delta \cdot \gamma \cdot C_p)_{\text{ст}}}, \quad m = \frac{\gamma U}{(F \cdot C_p)_r}. \quad (1.6)$$

Будем решать их с помощью преобразования Лапласа. Обозначив $\bar{T} = \bar{T}(x, p)$; $\bar{t} = \bar{t}(x, p)$ изображения по Лапласу искомых функций $T(x, \tau)$, $t(x, \tau)$ и учитывая граничные условия (1.3), получим следующие уравнения для изображений:

$$p\bar{T} - T_0 = -M(\bar{T} - \bar{t}), \quad (1.7)$$

$$p\bar{t} - T_0 = m(\bar{T} - \bar{t}) - W \frac{d\bar{t}}{dx}, \quad (1.8)$$

$$t(0, p) = \frac{t_p}{p}. \quad (1.9)$$

Исключив из этой системы

$$\bar{T} = \frac{T_0 + M\bar{t}}{p + M}, \quad (1.10)$$

получим для другой функции $\bar{t}$ уравнение:

$$W \frac{d\bar{t}}{dx} + \left(p + m - \frac{mM}{p+M} \right) \bar{t} = \frac{p + m + M}{p + M} \cdot T_0. \quad (1.11)$$

Его решением, удовлетворяющим условию (1.9), является функция:

$$\bar{t} = \frac{T_0}{p} - \frac{T_0 - t_0}{p} \cdot e^{-\frac{x}{w} \left(p + m - \frac{mM}{p+M} \right)}. \quad (1.12)$$

Подставив $\bar{t}$ в (1.10), найдем вторую функцию:

$$\bar{T} = \frac{T_0}{p} - \frac{(T_0 - t_0) M}{p(p + M)} \cdot e^{-\frac{x}{w} \left(p + m - \frac{mM}{p+M} \right)}. \quad (1.13)$$

Остается по этим изображениям найти соответствующие им оригиналы. Сначала найдем оригинал для их разности:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{T} - \bar{t}}{T_0 - t_0} &= \frac{1}{p+M} \cdot e^{-\frac{x}{w} \left(p + m - \frac{mM}{p+M} \right)} - \frac{x}{w} \cdot m - \frac{x}{w} p \\ &= e^{-\frac{x}{w} \cdot m - \frac{x}{w} p} \times \\ &\times \frac{1}{p+M} e^{\frac{x}{w} \cdot \frac{mM}{p+M}}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Используя известное операционное соотношение [1], [3]

$$\frac{1}{p} e^{\frac{b}{p}} \doteq I_0(2\sqrt{a\tau}) \quad (1.15)$$

и теорему смещения, получим:

$$\frac{1}{p+M} e^{\frac{b}{p+M}} \doteq e^{-M\tau} \cdot I_0(2\sqrt{b\tau}), \quad \text{где } b = \frac{x}{w} mM. \quad (1.16)$$

Применяя далее теорему запаздывания, определим по изображению (1.14) соответствующий оригинал:

$$\frac{T - t}{T_0 - t_0} = \begin{cases} 0, & \text{если } \tau < \frac{x}{w}, \\ e^{-m\frac{x}{w} - M\left(\tau - \frac{x}{w}\right)} \cdot I_0\left(2\sqrt{b\left(\tau - \frac{x}{w}\right)}\right), & \text{если } \tau < \frac{x}{w}. \end{cases} \quad (1.17)$$

Подставив это выражение в (1.4), получим:

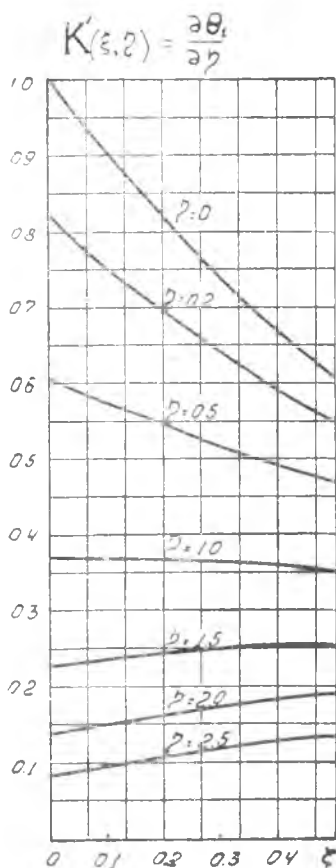
$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = -M(T_0 - t_0) \begin{cases} 0 & \text{если } \tau < \frac{x}{w}, \\ e^{-m\frac{x}{w} - M\left(\tau - \frac{x}{w}\right)} \cdot I_0\left(2\sqrt{b\left(\tau - \frac{x}{w}\right)}\right), & \text{если } \tau < \frac{x}{w}, \\ \text{если } \tau > \frac{x}{w}. \end{cases} \quad (1.18)$$

Принтегрировав по τ , будем иметь:

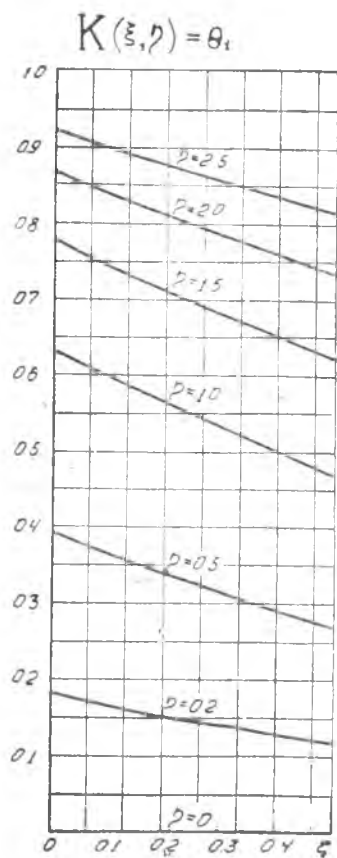
$$\frac{T_0 - T}{T_0 - t_0} = M \cdot \begin{cases} 0, & \text{если } \tau < \frac{x}{W}, \\ \int_{\frac{x}{W}}^{\tau} e^{-m \frac{x}{W} - M \left(u - \frac{x}{W}\right)} \cdot I_0 \left(2 \sqrt{m \frac{x}{m} \cdot M \left(u - \frac{x}{W}\right)} \right) du, & \\ \text{если } \tau > \frac{x}{W}. \end{cases} \quad (1.19)$$

Для упрощения записи полученных формул введем безразмерные параметры длины, времени и температуры:

$$\xi = m \frac{x}{W}, \quad \eta = M \left(\tau - \frac{x}{W} \right), \quad \Theta = \frac{T_0 - T}{T_0 - t_0}. \quad (1.20)$$



Фиг. 1.



Фиг. 2.

В этих обозначениях формулы (1.18), (1.19) запишутся соответственно в виде:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \eta} = e^{-\xi - \eta} \cdot I_0(2\sqrt{\xi \eta}) \quad (\eta > 0), \quad (1.21)$$

$$\Theta = \int_0^{\eta} e^{-\xi - u} \cdot I_0(2\sqrt{\xi u}) du \quad (\eta > 0). \quad (1.22)$$

Здесь $I_0(z)$ есть функция Бесселя нулевого порядка. Ее таблицы имеются, например, в [2].

Полученные формулы позволяют определить скорость охлаждения стенки через посредство известной табулированной функции и температуру стенки — в виде интеграла от этой функции.

Интеграл (1.22) не выражается через известные функции в конечном виде. Поэтому в приложении приводится для него таблица, полученная методом трапеций (табл. 2). Для упрощения расчетов мы помещаем также таблицу подынтегральной функции (табл. 1).

С помощью этих таблиц построена серия графиков (фиг. 1, 2), которые дают наглядное представление об изменении скорости охлаждения и температуры стенки при изменении пространственной и временной координат в области ($0 \leq \xi < 0,5$; $0 < \eta \leq 2,9$). Отметим в частности, что при переходе времени через момент, соответствующий $\eta \approx 1,0$, имеет место явление «опрокидывания» скорости охлаждения по длине канала (фиг. 1).

§ 2. НЕСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА

Рассмотрим теперь течение газа по каналу, образованному металлическими стенками различной толщины δ_1 и δ_2 .

Принимая те же упрощающие предположения, что и в § 1, получим для определения температурного поля стенок и газа систему трех дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial T_1}{\partial \tau} = -M_1(T_1 - t), \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial \tau} = -M_2(T_2 - t), \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{1}{2} m [(T_1 - t) + (T_2 - t)] - W \frac{\partial t}{\partial x}, \quad (2.3)$$

где $T_1 = T_1(x, \tau)$, $T_2 = T_2(x, \tau)$, $t = t(x, \tau)$ — средние температуры стенок и газа;

$$M_1 = \frac{\alpha}{(\delta_1 C_p)_{\text{ст. 1}}}, \quad M_2 = \frac{\alpha}{(\delta_2 C_p)_{\text{ст. 2}}}, \quad m = \frac{\gamma U}{(F \gamma C_p)_{\tau}}. \quad (2.4)$$

Обозначения остальных величин указаны в § 1.

Граничные условия такие же, как в симметричной задаче. Для упрощения дальнейших выкладок сразу же приведем уравнения (2.1) — (2.3) к безразмерным параметрам:

$$\Theta_1 = \frac{T_0 - T_1}{T_0 - t_0}, \quad \Theta_2 = \frac{T_0 - T_2}{T_0 - t_0}, \quad \Theta = \frac{T_0 - t}{T_0 - t_0}, \quad (2.5)$$

$$\xi = m \frac{x}{W}, \quad \eta = M_1 \left(\tau - \frac{x}{W} \right), \quad \sigma = \frac{M_2}{M_1}, \quad (2.6)$$

где по-прежнему $T_0 = \text{const}$ есть начальная температура стенок и газа в канале;

$t_0 = \text{const}$ — температура газового потока на входе в канал при $\tau > 0$.

Выразив производные по x, τ через производные по ξ, η :

$$\frac{\partial T_1}{\partial z} = \frac{\partial T_1}{\partial \eta} \cdot M_1, \quad \frac{\partial T_2}{\partial z} = \frac{\partial T_2}{\partial \eta} \cdot M_1, \quad \frac{\partial t}{\partial \eta} = \frac{\partial t}{\partial \eta} \cdot M_1,$$

$$\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\partial t}{\partial \xi} \cdot \frac{m}{W} - \frac{\partial t}{\partial \eta} \cdot \frac{M_1}{W},$$

получим вместо уравнений (2.1) — (2.3) следующую систему:

$$\frac{\partial \Theta_1}{\partial \eta} = \Theta - \Theta_1, \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial \Theta_2}{\partial \eta} = \sigma (\Theta - \Theta_2), \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \xi} + \Theta = \frac{1}{2} (\Theta_1 + \Theta_2). \quad (2.9)$$

Граничные условия в новых обозначениях запишутся в виде:

$$\Theta_1 = \Theta_2 = \Theta = 0 \quad \text{при} \quad \eta \leq 0; \quad \Theta_1 = \Theta_2 = \Theta = 1 \quad \text{при} \quad \eta = \infty; \quad (2.10)$$

$$\Theta = 1 \quad \text{при} \quad \xi = 0.$$

Применив преобразование Лапласа по переменной η , получим соответствующую систему для изображений:

$$p\bar{\Theta}_1 = \bar{\Theta}_1 - \bar{\Theta}_1, \quad (2.11)$$

$$p\bar{\Theta}_2 = \sigma (\bar{\Theta} - \bar{\Theta}_2), \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial \xi} + \bar{\Theta} = \frac{1}{2} (\bar{\Theta}_1 + \bar{\Theta}_2), \quad (2.13)$$

$$\bar{\Theta} = \frac{1}{p} \quad \text{при} \quad \xi = 0. \quad (2.14)$$

Из (2.11) и (2.12) выразим:

$$\bar{\Theta}_1 = \frac{\bar{\Theta}}{p+1}, \quad \bar{\Theta}_2 = \frac{\sigma \bar{\Theta}}{p+\sigma}. \quad (2.15)$$

Подставив $\bar{\Theta}_1, \bar{\Theta}_2$ в (2.13), получим уравнение:

$$\frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial \xi} + \bar{\Theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p+1} + \frac{\sigma}{p+\sigma} \right) \bar{\Theta}. \quad (2.16)$$

Его решением, удовлетворяющим условию (2.14), является функция

$$\bar{\Theta} = \frac{1}{p} \cdot e^{-\xi \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p+1} + \frac{\sigma}{p+\sigma} \right) \right]}$$

Подставим ее в (2.15), получим:

$$\bar{\Theta}_1 = \frac{e^{-\xi}}{p(p+1)} \cdot e^{\frac{1}{2} \xi \left(\frac{1}{p+1} + \frac{\sigma}{p+\sigma} \right)}, \quad (2.18)$$

$$\bar{\Theta}_2 = \frac{\sigma \cdot e^{-\xi}}{p(p+\sigma)} \cdot e^{\frac{1}{2} \xi \left(\frac{1}{p+1} + \frac{\sigma}{p+\sigma} \right)}. \quad (2.19)$$

Далее по этим изображениям нужно найти оригиналы. Используя очевидное равенство $\frac{1}{p} = \frac{1}{p+\sigma} + \frac{\sigma}{p(p+\sigma)}$, запишем (2.18) в виде произведения:

$$\bar{\Theta}_1 = e^{-\xi} \cdot \frac{1}{p+1} e^{\frac{1}{2} \frac{\xi}{p+1}} \cdot \left(\frac{1}{p+\sigma} + \frac{\sigma}{p(p+\sigma)} \right) e^{\frac{1}{2} \frac{\sigma \xi}{p+\sigma}}. \quad (2.20)$$

Оригиналы для сомножителей находятся из операционных соотношений типа (1.16):

$$\begin{aligned} \frac{1}{p+1} e^{\frac{1}{2} \frac{\xi}{p+1}} &\doteq e^{-\eta} I_0 \left(2 \sqrt{\frac{1}{2} \xi \eta} \right) = K' \left(\frac{1}{2} \xi, \eta \right); \\ \frac{1}{p+\sigma} e^{\frac{1}{2} \frac{\sigma \xi}{p+\sigma}} &\doteq e^{-\sigma \eta} I_0 \left(2 \sqrt{\frac{1}{2} \xi \sigma \eta} \right) = K' \left(\frac{1}{2} \xi \sigma \eta \right); \\ \frac{1}{p} \cdot \frac{\sigma}{p+\sigma} e^{\frac{1}{2} \frac{\sigma \xi}{p+\sigma}} &\doteq \sigma \int_0^{\eta} K' \left(\frac{1}{2} \xi \sigma u \right) du = K \left(\frac{1}{2} \xi, \sigma u \right). \end{aligned}$$

Применяя эти соотношения и теорему умножения изображений, определим оригинал для Θ_1 в виде свертки:

$$\Theta_1 = \int_0^{\eta} K' \left(\frac{1}{2} \xi, \eta - u \right) \left[K' \left(\frac{1}{2} \xi, \sigma u \right) + K \left(\frac{1}{2} \xi, \sigma u \right) \right] du. \quad (2.21)$$

Для получения температуры второй стенки достаточно в формуле (2.21) поменять местами M_1 и M_2 , что равносильно замене σ на $\frac{1}{\sigma}$ и η на $\sigma \eta$.

$$\Theta_2 = \int_0^{\sigma \eta} K' \left(\frac{1}{2} \xi, \sigma \eta - u \right) \left[K' \left(\frac{1}{2} \xi, \frac{u}{\sigma} \right) + K \left(\frac{1}{2} \xi, \frac{u}{\sigma} \right) \right] du. \quad (2.22)$$

Здесь $K'(\xi, \eta)$, $K(\xi, \eta)$ — те же самые функции, с помощью которых была решена ранее симметричная задача (§ 1). Имея таблицы значений этих функций (табл. 1, 2 приложения), можно приближенно вычислить интегралы (2.21) и (2.22), например, по формуле трапеций.

Тем самым определяется температура обеих стенок для любых заданных значений параметров ξ , η , σ .

Для расчетов, не требующих слишком высокой точности, целесообразно иметь более простые приближенные формулы. Построим такую формулу сначала для производной $\frac{\partial \Theta_1}{\partial \eta}$. Ее изображением

по Лапласу является функция $\frac{e^{-\xi}}{p+1} e^{\frac{1}{2}\xi\left(\frac{1}{p+1} + \frac{\sigma}{p+\sigma}\right)}$ получающаяся из (2.18) умножением на p . По этому изображению с помощью обратного преобразования Лапласа найдем оригинал:

$$\frac{\partial \Theta_1}{\partial \eta} = e^{-\xi} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{e^{p\xi}}{p+1} e^{\frac{1}{2}\xi\left(\frac{1}{p+1} + \frac{\sigma}{p+\sigma}\right)} dp. \quad (2.23)$$

Применяя известное разложение в ряд $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, представим (2.23) в виде ряда:

$$\frac{\partial \Theta_1}{\partial \eta} = e^{-\xi} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n}{n! 2^n} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{e^{p\xi}}{p+1} \left(\frac{1}{p+1} + \frac{\sigma}{p+\sigma}\right)^n dp. \quad (2.24)$$

или:

$$\frac{\partial \Theta_1}{\partial \eta} = e^{-\xi} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!} A_n'(\sigma, \eta), \quad (2.25)$$

где

$$A_n'(\sigma, \eta) = \frac{1}{2^n \cdot 2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{e^{p\xi}}{p+1} \left(\frac{1}{p+1} + \frac{\sigma}{p+\sigma}\right)^n dp. \quad (2.26)$$

Этот интеграл можно вычислить по вычетам в полюсах $p = -1$ и $p = -\sigma$.

$$A_n'(\sigma, \eta) = \frac{1}{2^n} \left\{ \text{res} \left[\frac{e^{p\xi}}{p+1} \left(\frac{\sigma}{p+\sigma} + \frac{1}{p+1}\right)^n \right]_{p=-1} + \right. \\ \left. + \text{res} \left[\frac{e^{p\xi}}{p+1} \left(\frac{1}{p+\sigma} + \frac{\sigma}{p+\sigma}\right)^n \right]_{p=-\sigma} \right\}. \quad (2.27)$$

Полюс $p = -1$ имеет кратность $n+1$, а полюс $p = -\sigma$ — кратность n . Применяя известную формулу вычетов в полюсах [3], получим:

$$A_0'(\sigma, \eta) = e^{-\eta};$$

$$A_n'(\sigma, \eta) = \frac{1}{2^n} \left\{ \frac{1}{n!} \cdot \frac{d^n}{dp^n} \left[e^{p\xi} \left(1 + \sigma \frac{p+1}{p+\sigma}\right)^n \right]_{p=-1} + \right. \\ \left. + \frac{1}{(n-1)!} \cdot \frac{d^{n-1}}{dp^{n-1}} \left[\frac{e^{p\xi}}{p+1} \left(\sigma + \frac{p+\sigma}{p+1}\right)^n \right]_{p=-\sigma} \right\}. \quad (2.28)$$

Эта формула позволяет определить коэффициенты $A_n'(\sigma, \eta)$ при любом $n = 0, 1, 2, \dots$ с помощью операций дифференцирования.

Проинтегрировав (2.25) по интервалу (η, ∞) , и учитывая, что $\Theta_1 = 1$ при $\eta = \infty$, получим:

$$\Theta_1 = 1 - e^{-\xi} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!} A_n(\sigma, \eta), \quad (2.29)$$

где

$$A_n(\sigma, \eta) = \int_{\eta}^{\infty} A_n'(\sigma, u) du. \quad (2.30)$$

При $\delta = 1$, т. е. в случае симметричной задачи, коэффициенты A_n' и A_n легко вычисляются:

$$\begin{aligned} A_n'(1, \eta) &= e^{-\eta} \cdot \frac{\eta^n}{n!}; \\ A_n(1, \eta) &= e^{-\eta} \left(1 + \frac{\eta}{1!} + \frac{\eta^2}{2!} + \dots + \frac{\eta^n}{n!} \right). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Для всех значений $\eta \geq 0$ они не превышают 1. Это свойство сохраняется также и для $\sigma \neq 1$.

При достаточно высокой скорости газового потока величина $\xi = m \frac{x}{W}$ является сравнительно малой. Практически, как правило, она не выходит из интервала $[0 \leq \xi \leq 0,5]$. Для таких значений ξ ряды (2.25) и (2.29) сходятся очень быстро. Удержав в них по 3 первых члена, получим искомые приближенные формулы:

$$\frac{\partial \Theta_1}{\partial \eta} = e^{-\xi} \left(A_0' + \xi \cdot A_1' + \frac{\xi^2}{2} A_2' \right), \quad (2.32)$$

$$\Theta_1 = 1 - e^{-\xi} \left(A_0 + \xi A_1 + \frac{\xi^2}{2} A_2 \right), \quad (2.33)$$

где коэффициенты A_n' и A_n вычисляются по формулам (2.28), (2.30). Выпишем их в явном виде:

$$A_0' = A_0 = e^{-\eta};$$

$$A_1' = \frac{1}{2} \left[\left(\eta + \frac{\sigma}{\sigma-1} \right) e^{-\eta} - \frac{\sigma}{\sigma-1} e^{-\sigma\eta} \right];$$

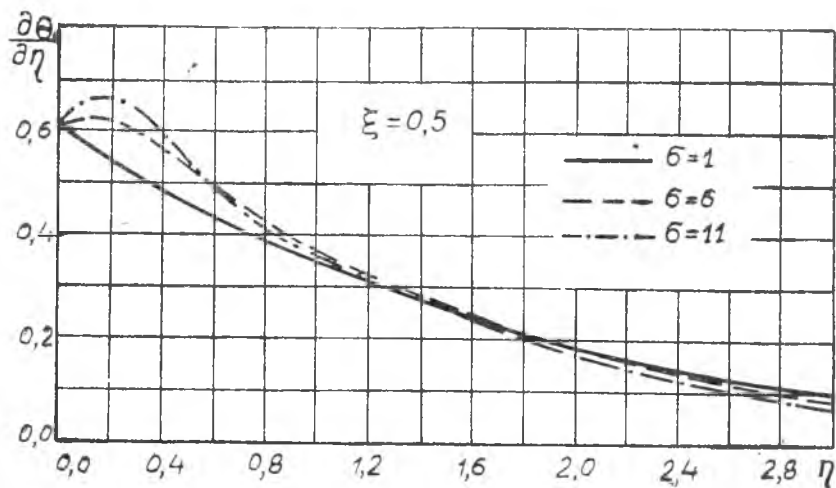
$$A_2 = \frac{1}{4} \left[\left(\frac{1}{2} \eta^2 + \frac{2\sigma}{\sigma-1} \eta + \frac{\sigma^2 - 2\sigma}{(\sigma-1)^2} \right) e^{-\eta} + \left(\frac{\sigma^2}{\sigma-1} \eta + \frac{\sigma^2 - 2\sigma}{(\sigma-1)^2} \right) e^{-\sigma\eta} \right];$$

$$A_1 = \frac{1}{2} \left[\left(\eta + 2 + \frac{1}{\sigma-1} \right) e^{-\eta} - \frac{1}{\sigma-1} e^{-\sigma\eta} \right];$$

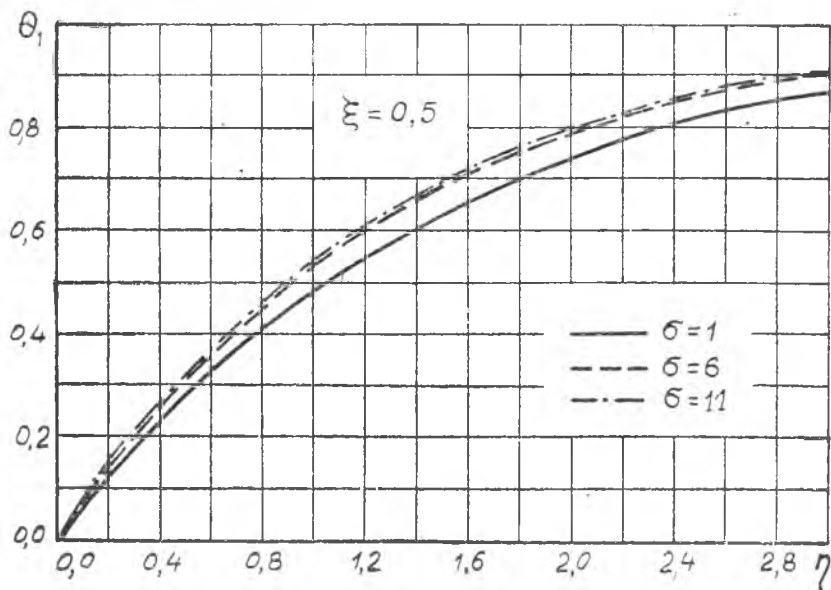
$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{1}{4} \left[\left(\frac{1}{2} \eta^2 + \frac{3\sigma-1}{\sigma-1} \eta + 4 + \frac{2\sigma-3}{(\sigma-1)^2} \right) e^{-\eta} - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{\sigma}{\sigma-1} \eta + \frac{2\sigma-1}{(\sigma-1)^2} \right) e^{-\sigma\eta} \right]. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Погрешность приближенных формул (2.34) и (2.35) есть величина порядка $\frac{\xi^3}{\xi!} \leq \frac{1}{48}$ для рассматриваемого интервала $[0 \leq \xi \leq 0,5]$.

Для получения температуры и скорости охлаждения второй стенки, как уже отмечалось выше, достаточно в полученных формулах для Θ_1 и $\frac{\partial \Theta_1}{\partial \eta}$ заменить σ на $\frac{1}{\sigma}$ и η на $\sigma \eta$.



Фиг. 3.



Фиг. 4

Функция $K'(\xi, \eta) = e^{-\xi-\eta} I_0(2\sqrt{\xi\eta})$

η	$\xi=0.0$	$\xi=0.1$	$\xi=0.2$	$\xi=0.3$	$\xi=0.4$	$\xi=0.5$
0,0	1,0000	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065
0,1	0,9048	8269	7556	6905	6310	5767
0,2	8187	7556	6974	6434	5936	5475
0,3	7408	6905	6434	5993	5578	5192
0,4	6703	6310	5936	5578	5241	4920
0,5	6065	5767	5475	5192	4920	4658
0,6	5488	5268	5047	4831	4617	4407
0,7	4966	4815	4655	4492	4328	4164
0,8	4493	4399	4292	4178	4057	3927
0,9	4066	4017	3955	3884	3798	3708
1,0	3679	3670	3645	3607	3554	3494
1,1	3329	3353	3358	3348	3325	3293
1,2	3012	3061	3095	3109	3111	3101
1,3	2725	2798	2850	2885	2908	2915
1,4	2466	2554	2625	2679	2715	2743
1,5	2231	2333	2418	2485	2539	2575
1,6	2019	2131	2226	2305	2368	2418
1,7	1827	1946	2038	2136	2212	2270
1,8	1653	1777	1886	1982	2063	2131
1,9	1496	1623	1736	1836	1924	1997
2,0	1353	1482	1597	1702	1790	1872
2,1	1225	1353	1470	1576	1671	1754
2,2	1108	1236	1352	1458	1555	1642
2,3	1003	1128	1244	1351	1448	1535
2,4	0907	1032	1145	1251	1348	1436
2,5	0821	0941	1052	1157	1254	1344
2,6	0743	0858	0968	1070	1168	1255
2,7	0672	0784	0889	0991	1084	1175
2,8	0608	0715	0818	0916	1010	1097
2,9	0550	0654	0752	0848	0938	1025

$$\text{Функция } K(\xi, \eta) = \int_0^{\eta} K'(\xi, u) du$$

η	$\xi=0.0$	$\xi=0.1$	$\xi=0.2$	$\xi=0.3$	$\xi=0.4$	$\xi=0.5$
0.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.1	0952	0866	0787	0716	0651	0592
0.2	1814	1657	1514	1383	1263	1154
0.3	2594	2380	2184	2004	1839	1687
0.4	3300	3041	2803	2583	2380	2193
0.5	3938	3645	3373	3121	2888	2672
0.6	4515	4197	3900	3622	3365	3125
0.7	5038	4701	4384	4089	3812	3553
0.8	5511	5162	4832	4522	4231	3958
0.9	5939	5582	5244	4925	4624	4340
1.0	6326	5967	5624	5300	4992	4700
1.1	6677	6318	5974	5647	5335	5039
1.2	6994	6639	6297	5970	5657	5359
1.3	7281	6932	6594	6270	5958	5660
1.4	7540	7199	6868	6548	6239	5943
1.5	7775	7444	7120	6806	6502	6209
1.6	7988	7667	7352	7046	6747	6458
1.7	8180	7871	7566	7268	6976	6693
1.8	8354	8057	7762	7474	7190	6913
1.9	8511	8227	7943	7665	7390	7119
2.0	8654	8382	8109	7842	7575	7313
2.1	8783	8524	8263	8006	7748	7494
2.2	8900	8753	8404	8157	7910	7664
2.3	9005	8771	8534	8298	8060	7823
2.4	9101	8879	8654	8428	8200	7972
2.5	9187	8978	8763	8549	8330	8111
2.6	9265	9068	8864	8660	8451	8241
2.7	9336	9150	8957	8763	8564	8362
2.8	9400	9225	9043	8858	8668	8476
2.9	9458	9293	9121	8946	8766	8582

Коэффициенты A_n'

$$A'_0 = A_0 = e^{-\tau},$$

$$A'_1 = \frac{1}{2} \left[\left(\gamma + \frac{\sigma}{\sigma-1} \right) e^{-\tau} - \frac{\sigma}{\sigma-1} e^{-\sigma\tau} \right],$$

$$A'_2 = \frac{1}{4} \left[\left(\frac{1}{2} \gamma^2 + \frac{2\sigma}{\sigma-1} \gamma + \frac{\sigma^2-2\sigma}{(\sigma-1)^2} \right) e^{-\tau} - \left(\frac{\sigma^2}{\sigma-1} \gamma + \frac{\sigma^2-2\sigma}{(\sigma-1)^2} \right) e^{-\sigma\tau} \right].$$

τ_i	$A_0' = A_0$	A_1'			A_2'		
		$\sigma=1$	$\sigma=6$	$\sigma=11$	$\sigma=1$	$\sigma=6$	$\sigma=11$
0,0	1,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,1	0,9048	0,0905	0,2588	0,3598	0,0047	0,0421	0,0819
0,2	8178	1637	3924	4712	0168	1182	1974
0,3	7408	2222	4564	4982	0334	1905	2687
0,4	6703	2681	4818	4960	0636	2506	3103
0,5	6065	3033	4855	4830	0758	2896	3282
0,6	5488	3293	4766	4657	0987	3180	3387
0,7	4966	3476	4628	4466	1217	3357	3434
0,8	4493	3594	4444	4268	1438	3457	3445
0,9	4066	3659	4242	4166	1647	3499	3429
1,0	3679	3679	4032	3863	1839	3499	3394
1,5	2231	3347	3007	2901	2509	2957	3021
2,0	1353	2706	2706	2097	2706	2625	2500
2,5	0821	2053	1847	1478	2565	2070	1974
3,0	0498	1497	1247	1022	2245	1579	1508

В случае симметричной задачи ($\sigma=1$) коэффициенты A_n' и A_n имеют более простой вид (2.31), и в этом случае приближенные формулы (2.32), (2.33) можно записать в развернутом виде:

$$\frac{\partial \Theta_1}{\partial \eta} = e^{-\xi-\tau} \left[1 + \xi\eta + \frac{(\eta)^2}{4} \right]; \quad (2.35)$$

$$\Theta_1 = 1 - e^{-\xi-\tau} \left[1 + \xi(1+\eta) + \frac{\xi^2}{2} \left(1 + \eta + \frac{\eta^2}{2} \right) \right]. \quad (2.36)$$

Для упрощения практических расчетов Θ_1 и $\frac{\partial \Theta_1}{\partial \eta}$ по формулам (2.34), (2.35) в приложении помещена таблица коэффициентов A_n' , A_n для значений $n=0, 1, 2$; $\sigma=1, 6, 11$; $0 \leq \tau \leq 3$ (табл. 3).

Выполненные с помощью этих таблиц вычисления показывают, что величины Θ_1 и $\frac{\partial \Theta_1}{\partial \eta}$ слабо зависят от σ (фиг. 3, 4).

Поэтому в тех случаях, когда асимметрия стенок канала не слишком велика, расчет их температур и скоростей охлаждения можно производить как в случае симметричной задачи, т. е. по формулам (2.35), (2.36).

Коэффициенты A_n $A_0 = A_0'$ (см. табл. № 3)

$$A_1 = \frac{1}{2} \left[\left(\eta + 2 + \frac{1}{\sigma - 1} \right) e^{-\eta} - \frac{1}{\sigma - 1} e^{-\sigma\eta} \right],$$

$$A_2 = \frac{1}{4} \left[\left(\frac{1}{2} \eta^2 + \frac{3\sigma - 1}{\sigma - 1} + 4 + \frac{2\sigma - 3}{(\sigma - 1)^2} \right) e^{-\eta} - \left(\frac{\sigma}{\sigma - 1} \eta + \frac{2\sigma - 3}{(\sigma - 1)^2} \right) e^{-\sigma\eta} \right].$$

η	A_1			A_2		
	$\sigma=1$	$\sigma=6$	$\sigma=11$	$\sigma=1$	$\sigma=6$	$\sigma=11$
0,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,1	0,9953	0,9856	0,9781	1,0000	0,9984	0,9959
0,2	9854	9523	9359	0,9988	9905	9814
0,3	9630	9095	8871	9964	9749	9573
0,4	9384	8623	8372	9920	9554	9306
0,5	9098	8138	7882	9856	9258	8960
0,6	8781	7657	7409	9759	8954	8627
0,7	8442	7186	6952	9659	8627	8286
0,8	8087	6731	6515	9525	8285	7941
0,9	7725	6298	6099	9372	7938	7598
1,0	7358	5884	5703	9197	7588	7257
1,5	5578	4128	4016	8087	5903	5642
2,0	4059	2841	2774	6765	4469	4258
2,5	2874	1930	1888	5439	3281	3153
3,0	1996	1297	1271	4241	2376	2291

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Лыков. Теория теплопроводности. Гостехиздат, М., 1952.
2. Г. И. Ватсон. Теория бесселевых функций, ч. 2. ИИЛ, М., 1949.
3. М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. Методы теории функций комплексного переменного. Физматгиз, М., 1958.