

Н. Н. Огородников

УНИВЕРСАЛЬНЫЙ ЗАКОН ОХЛАЖДЕНИЯ ТЕПЛОВЫХ СИСТЕМ С МАЛЫМ ЗНАЧЕНИЕМ КРИТЕРИЯ БИО

В теории регулярного теплового режима процесс охлаждения тела, при скачкообразном изменении температуры среды на $\nu^{\circ}\text{C}$, делится на три стадии [1]:

1. Иррегулярный режим;
2. Регулярный режим;
3. Состояние теплового равновесия.

Выводы теории распространяются на тепловые системы с любыми значениями критерия Био.

Для тепловых систем с малым значением критерия Био ($B_i \rightarrow 0$) иррегулярный режим, как некоторая стадия общего процесса охлаждения, исчезает, т. к. распределение температур по объему равномерно в течение всего процесса (внешняя задача).

В этом случае имеют место только вторая и третья стадии.

Центральным свойством системы в стадии регулярного режима является существование линейной зависимости для логарифма избыточной температуры (ϑ) во времени.

$$\ln \vartheta = -m\tau + \text{const.} \quad (1)$$

При малых значениях критерия Био выражение (1) может быть записано в форме:

$$\frac{\vartheta}{\vartheta_0} = e^{-m\tau} \quad (2)$$

где ϑ и ϑ_0 — текущее и начальное значение избыточных температур. В общем виде признак регулярности можно определить как утверждение о том, что отношение текущей избыточной температуры к начальной избыточной температуре в процессе остывания выражается экспоненциальным законом.

В условиях внешней задачи этот вывод известен уже давно (закон Ньютона). Профессор Г. М. Кондратьев этот частный слу-

чай именуется законом простого охлаждения [1]. Задачей статьи является доказательство, что для указанных систем ($Bi \rightarrow 0$), при любых законах изменения температуры среды во времени, процесс теплового взаимодействия системы со средой всегда выражается универсальной закономерностью вида:

$$\frac{\Theta}{\Theta_0} = e^{-m\tau}, \quad (2)$$

где Θ и Θ_0 также имеют смысл текущей и начальной избыточной температуры тела, аналогично выражению (2). Различие ϑ и Θ связано только с выбором начала отсчета температур. Для частного случая: скачкообразное изменение температуры среды, выражение (3) автоматически переходит в выражение (2).

Для установления общей закономерности напомним дифференциальное уравнение теплового взаимодействия системы и среды [2].

$$\frac{dt}{d\tau} + m(t - t_c) = 0, \quad (4)$$

здесь $t = t(\tau)$, $t_c = t_c(\tau)$ — текущие значения температур тела и среды;

τ — время,

$$m = \frac{\sigma F}{\gamma C_p V} \text{ — темп охлаждения тела (в условиях } Bi \rightarrow 0; \psi \rightarrow 1).$$

Принимается, что $\alpha, \gamma, C_p = \text{const}$. В указанных предположениях уравнение (4) имеет общее решение:

$$t(\tau) = e^{-m\tau} \left[C + \int m \cdot t_c(\tau) \cdot e^{m\tau} d\tau \right]. \quad (5)$$

Используя формулу интегрирования по частям, интеграл в квадратных скобках можно преобразовать и в результате выражение (5) запишется в новой форме:

$$\vartheta(\tau) = t(\tau) - t_c(\tau) = e^{-m\tau} \left[C - \int t_c'(\tau) e^{m\tau} d\tau \right]. \quad (6)$$

Значение постоянной C определится из начальных условий:

$$\tau = 0; \quad \vartheta(0) = \vartheta_0 \quad \text{либо} \quad t(0) = t_0.$$

Из выражения (6) следует, что

$$C = \vartheta_0 + \left[\int t_c'(\tau) e^{m\tau} d\tau \right]_{\tau=0}. \quad (7)$$

При возрастании ($\tau \rightarrow \infty$) решение (6) принимает вид:

$$\vartheta(\infty) = -e^{-m\tau} \int t_c'(\tau) e^{m\tau} d\tau, \quad (8)$$

(т. к. $e^{-m\tau} \cdot C \rightarrow 0$).

Последним выражением определяется поведение текущей разности температур в промежутки времени от начала процесса, ког-

да начальные условия (ϑ_0) перестает оказывать влияние на текущую картину теплового взаимодействия системы и среды. Эту стадию принято именовать квазистационарным режимом.

Для краткости введем обозначение:

$$\vartheta_{\infty} = \vartheta_{\infty}. \quad (9)$$

Из сравнения (8) и (7) следует, что выражение в квадратных скобках в составе (7) может быть определено как ϑ_{∞} в момент времени $\tau=0$. В соответствии с (9) для квадратных скобок введено обозначение $\vartheta_{\infty\tau=0}$.

С учетом (7) и принятых обозначений решение (6) можно переписать в виде:

$$\vartheta(\tau) = e^{-m\tau} (\vartheta_0 - \vartheta_{\infty\tau=0}) + \vartheta_{\infty}. \quad (10)$$

Преобразуя (10), получаем в окончательной форме

$$\frac{\vartheta(\tau) - \vartheta_{\infty}}{\vartheta_0 - \vartheta_{\infty\tau=0}} = e^{-m\tau}. \quad (11)$$

Последнее выражение получено вне связи с каким-либо частным законом $t_c(\tau)$ а поэтому может рассматриваться как универсальный закон поведения тепловых систем с малыми значениями критерия Био, справедливый при любых законах изменения температуры среды во времени. Из выражения (11) следует, что процесс взаимодействия системы и среды во времени может быть разделен на две стадии.

Первоначальная стадия определяется выражением (11) и может быть охарактеризована как обобщенный регулярный режим, потому что (11) по форме совпадает с выражением (2), вытекающим из классической теории регулярного режима. При этом величина m , определяющая частные особенности системы и ее условия взаимодействия со средой, имеет и в том и в другом случае одинаковую структуру и одинаковый смысл. Сравнивая (11) и (3), получим, что

$$\begin{aligned} \Theta &= \vartheta(\tau) - \vartheta_{\infty}, \\ \Theta_0 &= \vartheta_0 - \vartheta_{\infty\tau=0} \end{aligned}$$

Вторая стадия, квазистационарный режим, наступает в момент времени, когда правая часть $-e^{-m\tau}$ практически равна нулю. В этой стадии

$$\vartheta(\tau) = \vartheta_{\infty} \quad (12)$$

Правая часть (12) раскрывается с помощью выражения (8). Только в частном случае — скачковое изменение температуры среды ($t_c = \text{const}$) — система и среда переходят в состояние термодинамического равновесия. В случае переменной температуры среды ($t_c = t_c(\tau)$) этого равновесия принципиально не может быть [1], если только температура среды в своем временном изменении

не стремится к постоянному значению. Квазистационарный режим не зависит от начальных условий и поэтому может рассматриваться как самостоятельный процесс. Начальные условия оказывают влияние только на длительность времени, по истечении которого заканчивается первая стадия. В частном случае, когда $\vartheta_0 = \vartheta_{\tau=0}$, первая стадия исчезает полностью, и с момента времени $\tau=0$ имеется только квазистационарный режим. Если заведомо ограничиться относительной точностью в 1%, то время наступления квазистационарного режима может быть определено из условия

$$m\tau = 4,6 \quad (13)$$

Рассмотрим отдельный случай для частных законов изменения температуры среды с начальным условием $\tau=0$; $\vartheta = \vartheta_0$.

Закон простого охлаждения.

1. $t_c(\tau) = \text{const}$.

$$\vartheta_\infty = 0; \quad \frac{\vartheta}{\vartheta_0} = e^{-m\tau} \quad (14)$$

2. Температура среды меняется по линейному закону — $t_c(\tau) = t_{c0} \pm k\tau$,

$$\vartheta_\infty = \mp \frac{k}{m}; \quad \frac{\vartheta \pm \frac{k}{m}}{\vartheta_0 \pm \frac{k}{m}} = e^{-m\tau} \quad (15)$$

С возрастанием времени между системой и средой устанавливается постоянная разность температур $= \frac{k}{m}$.

3. Температура среды меняется по гармоническому закону:

$$t_c(\tau) = \bar{t}_c \pm S \cdot \cos k\tau,$$

где $\bar{t}_c$ — средняя температура среды;

S — амплитуда колебаний температуры;

$k = 2\pi\nu$ — круговая частота;

$\vartheta = \frac{1}{T}$; T — частота и период колебания температуры.

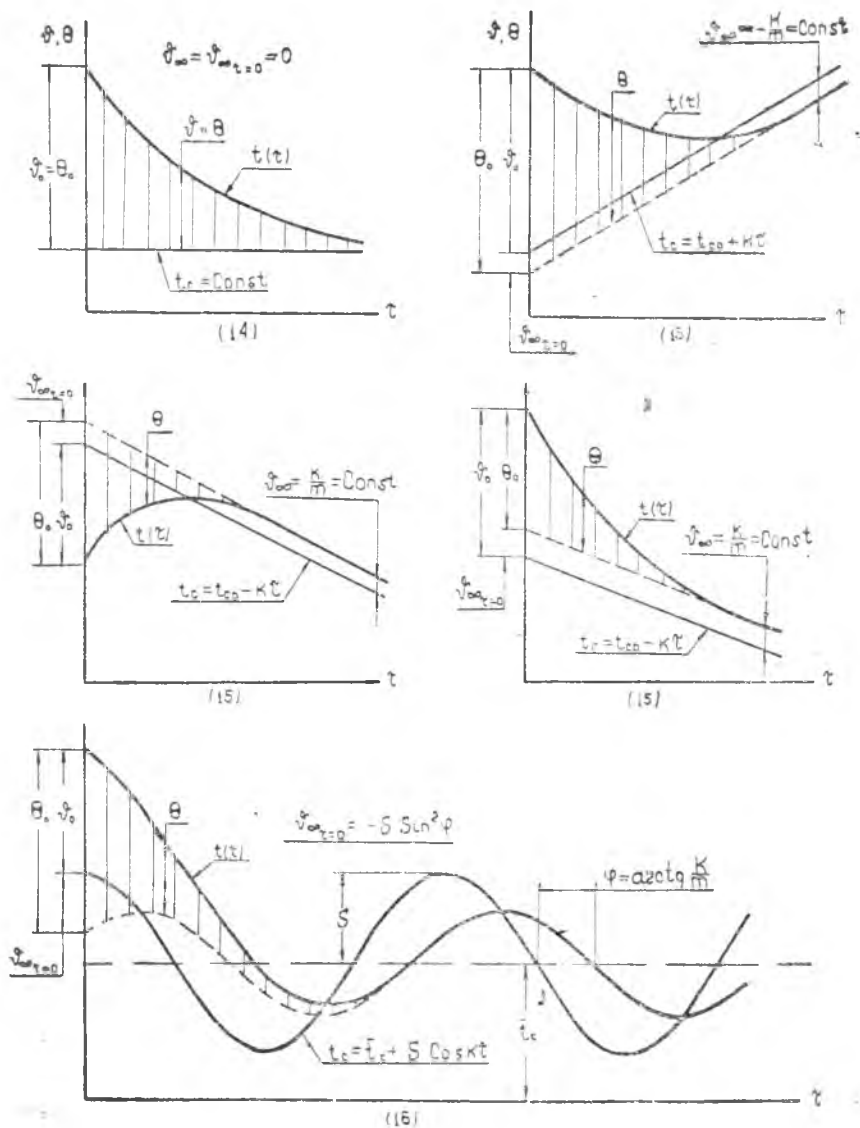
$$[\vartheta_\infty = \pm S \cdot \sin \varphi \cdot \sin (k\tau - \varphi); \varphi = \arctg \frac{k}{m};$$

$$\frac{\vartheta \mp S \cdot \sin \varphi \cdot \sin (k\tau - \varphi)}{\vartheta_0 \pm S \cdot \sin^2 \varphi} = e^{-m\tau} \quad (16)$$

В квазистационарном режиме текущая разность температур системы и среды подчиняется гармоническому закону с уменьшением амплитуды в $\sin \varphi$ раз и сдвигом по фазе на величину φ ;

4. Температура среды — произвольная периодическая функция времени, которая может быть разложена в гармонический ряд:

$$t_c(\tau) = \bar{t}_c \pm \sum_1^n S_l \cdot \cos k_l \tau;$$



Фиг. 1. Заштрихованная область соответствует стадии обобщенного регулярного режима — $\frac{\Theta}{\Theta_0} = e^{-m\tau} (0 \leq m\tau \leq 4,6)$.
 $t(\tau)$ — температура системы; t_c — температура среды.

$$\vartheta_{\infty} = \pm \sum_1^n S_i \cdot \sin \varphi_i \cdot \sin (k_i \tau - \varphi_i);$$

$\nu_1, \nu_2, \nu_3, \dots$ — частоты отдельных гармоник.

$$\frac{\vartheta \mp \sum_1^n S_i \cdot \sin \varphi_i \cdot \sin (k_i \tau - \varphi_i)}{\vartheta_0 \pm \sum_1^n S_i \cdot \sin^2 \varphi_i} = e^{-m\tau}. \quad (17)$$

5. Температура среды меняется по экспоненциальному закону:

$$t_c(\tau) = t_{c0} e^{-\kappa\tau};$$

$$\vartheta_{\infty} = t_{c0} \frac{k}{m-k} e^{-\kappa\tau}; \quad \frac{\vartheta - t_{c0} \frac{k}{m-k} e^{-\kappa\tau}}{\vartheta_0 - t_{c0} \frac{k}{m-k}} = e^{-m\tau} \quad (18)$$

Увеличивать количество рассматриваемых примеров нет надобности. Уравнение (8) принципиально может быть раскрыто в любых случаях. Графическое изображение (14), (15) и (16) представлено на фиг. 1. Общее решение (11) и его частные случаи (14—18) имеют простое истолкование. Его смысл состоит в том, что если для отсчета избыточных температур системы принять ее температурный режим в квазистационарной стадии, которая рассматривается с момента времени $\tau=0$, то процесс температурного сближения системы от начального состояния до наступления квазистационарного режима всегда протекает по экспоненциальному закону. Экспоненциальный закон простого охлаждения является частным случаем этого универсального закона.

ВЫВОДЫ

Полученные результаты могут быть использованы при рассмотрении вопросов термической инерционности проволочных термодатчиков, а также при исследовании теплоотдачи методом регулярного режима с помощью металлических моделей в условиях переменной температуры среды.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. М. Кондратьев Регулярный тепловой режим. Техтеоретиздаг, 1954.
2. Н. Н. Огородников. Кандидатская диссертация «Измерение переменных температур методом двух термометров», КуАИ, 1962.