

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

*Е. В. БАРИНОВА, И. В. БЕЛОКОНОВ,
И. А. ТИМБАЙ*

ПРОЕКТИРОВАНИЕ УГЛОВОГО ДВИЖЕНИЯ МАЛОРАЗМЕРНЫХ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ СТАНДАРТА КУБСАТ НА НИЗКИХ ОРБИТАХ

Рекомендовано редакционно-издательским советом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева» в качестве учебного пособия для обучающихся по основным образовательным программам высшего образования по направлениям подготовки 24.04.01, 24.03.01 Ракетные комплексы и космонавтика

САМАРА
Издательство Самарского университета
2026

УДК 629.783(075)

ББК О643я7

Б249

Рецензенты: д-р техн. наук, проф. П. К. Кузнецов;
д-р физ.-мат. наук, доц. А. В. Дорошин

Баринаева, Елена Витальевна

Б249 Проектирование углового движения малоразмерного космического аппарата стандарта кубсат на низких орбитах: учебное пособие / Е. В. Баринаева, И. В. Белоконов, И. А. Тимбай. – Самара: Издательство Самарского университета, 2026. – 118 с.: ил.

ISBN 978-5-7883-2308-4

В пособии изучаются особенности углового движения малоразмерных космических аппаратов стандарта кубсат на низких орбитах, обусловленные их геометрическими размерами и массово-инерционными характеристиками.

Предназначено для студентов, обучающихся по направлениям подготовки 24.03.01, 24.04.01 Ракетные комплексы и космонавтика, а также аспирантов, осваивающих программы подготовки научных и научно-педагогических кадров по специальностям 2.5.16 Динамика, баллистика, управление движением летательных аппаратов и 2.5.13 Проектирование, конструкция, производство, испытания и эксплуатация летательных аппаратов.

Подготовлено на межвузовской кафедре космических исследований.

УДК 629.783(075)

ББК О643я7

ISBN 978-5-7883-2308-4

© Самарский университет, 2026

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	5
Глава 1. Математическая модель пассивного углового движения МКА на низких орбитах	7
1.1. Системы координат	7
1.2. Уравнения углового движения МКА.....	8
1.3. Модели моментов внешних сил, действующих на МКА	9
Глава 2. Исследование положений равновесия МКА стандарта кубсат при действии гравитационного и аэродинамического моментов.....	16
2.1. Необходимые условия положений равновесия	16
2.2. Определение положений равновесия динамически симметричного МКА	17
2.3. Определение положений равновесия динамически несимметричного МКА в частном случае	23
Глава 3. Исследование плоского углового движения МКА стандарта кубсат под действием гравитационного и аэродинамического моментов.....	27
3.1. Исследование плоского углового движения при продольном смещении центра масс	27
3.2. Исследование плоского углового движения при поперечном смещении центра масс.....	34
Глава 4. Проектирование пассивного углового движения низкоорбитального МКА	40
4.1. Классификация методов пассивной стабилизации	40
4.2. Выбор проектно-динамических параметров МКА для обеспечения одноосной аэродинамической стабилизация по вектору скорости	42
4.3. Выбор проектно-динамических параметров МКА для обеспечения трёхосной аэродинамически-гравитационной стабилизации.....	50

4.4. Выбор проектно-динамических параметров МКА для обеспечения одноосной гравитационной стабилизации по местной вертикали	56
4.5. Выбор проектно-динамических параметров МКА для обеспечения трёхосной гравитационной стабилизации	58
4.6. Выбор проектно-динамических параметров МКА для обеспечения трёхосной гравитационно-аэродинамической стабилизации.....	66
Глава 5. Исследование пространственного углового движения аэродинамически стабилизированного МКА стандарта кубсат	70
5.1. Модифицированная математическая модель движения аэродинамически стабилизированного МКА	71
5.2. Усреднённые уравнения для случая нерезонансного движения.....	73
Глава 6. Отличительные особенности углового движения МКА формата кубсат 6U	79
6.1. Особенности МКА формата кубсат 6U	79
6.2. Определение положений относительного равновесия под действием гравитационного и аэродинамического моментов	82
6.3. Особенности математической модели плоского углового движения	84
6.4. Выбор проектно-динамических параметров МКА.....	88
Глава 7. Технология проектирования пассивного углового движения низкоорбитального МКА	102
7.1. Этапы технологии проектирования пассивного углового движения МКА	102
7.2. Применение технологии проектирования углового движения при создании наноспутника СамСат-Ионосфера	105
Библиографический список	112

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время малоразмерные космические аппараты (МКА) продолжают набирать популярность. Наибольшей популярностью пользуется стандарт кубсат, который был разработан в 1999 г. Калифорнийским политехническим и Стэнфордским университетами. На 01 января 2026 года по данным сайта panosats.eu [1] запущено 2973 таких аппарата. При изучении их движения следует учитывать ряд особенностей, обусловленных комплексом факторов – геометрическими размерами, форм-фактором параллелепипеда, массово-инерционными характеристиками, типом орбит выведения (низкие орбиты, на которых влияние аэродинамических сил является значимым), условиями выведения на орбиту в рамках попутных запусков (возможно возникновение больших угловых скоростей после выхода из пускового контейнера). Традиционно стандарт кубсат ассоциируется с наноспутниками (НС) формата 1U-3U. Согласно общепринятой классификации [1] к наноспутникам относятся аппараты весом от 1 до 10 кг. В настоящее время МКА стандарта кубсат имеют размеры от 0,25U до 27U.

В данном пособии рассматривается движения МКА стандарта кубсат на высотах от 250 до 700 км, в связи с тем, что согласно норме, принятой Межагентским координационным комитетом по космическому мусору (IADC – Inter-Agency Space Debris Coordination Committee), закончившие активное функционирование низкоорбитальные объекты должны быть уведены на орбиту с расчётной продолжительностью пассивного баллистического существования не более 25 лет.

Данное пособие является продолжением учебного пособия «Движение наноспутника относительно центра масс на околоземных орбитах» авторов Белоконов И.В., Тимбай И.А., изданного в 2020 году [2].

Поскольку проведение большинства научных и прикладных исследований в космосе предполагает обеспечение определённой ориентации углового положения МКА в пространстве, часто используются пассивные или комбинированные (пассивные в сочетании с активными) системы стабилизации, которые не требуют совсем или требуют незначительного расхода рабочего тела и энергии, запасённых на борту. В данном пособии даны рекомендации по использованию того или иного способа пассивной ориентации в зависимости от конструктивных параметров МКА, а также орбиты выведения. К конструктивным параметрам МКА относятся такие параметры как, масса, геометрические размеры, положение центра масс относительно геометрического центра, тензор инерции. Для получения простых аналитических зависимостей рассматривается движение на круговых орбитах и вводится ряд других допущений, описанных ниже, при этом для проверки правильности полученных результатов используется полная модель движения, которая учитывает движение центра масс.

С 2014 года в Самарском университете ведутся разработки НС формата кубсат 3U. Первый из них – SamSat-218Д – был предназначен для отработки технологии создания замкнутого контура управления его пространственной ориентацией при наличии специально созданного большого запаса статической устойчивости [3]. Второй – SamSat-QB50 – был создан в рамках международного университетского проекта и предназначался для исследования тропосферы Земли в составе группировки наноспутников стандарта кубсат [4,5]. В рамках программы УниверСат 27 июня 2023 года был запущен НС SamSat-ION, а 5 ноября 2024 года НС СамСат-Ионосфера, целью которых является изучение ионосферы Земли [6,7]. В настоящее время завершено создание НС СамСат-Орион, запуск которого запланирован на 2026 год.

Глава 1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПАССИВНОГО УГЛОВОГО ДВИЖЕНИЯ МКА НА НИЗКИХ ОРБИТАХ

1.1. Системы координат

Введём системы координат (СК), которые будем использовать в дальнейшем. В данном пособии рассматривается движение МКА на круговой орбите, в связи с чем орбитальная система координат будет совпадать с траекторной. Более подробную информацию об используемых системах координат можно найти в [2].

На рис. 1.1 показана связь между траекторной системой координат $OX_kY_kZ_k$ и связанной с МКА СК Ox_uz , которая определяется с помощью углов Эйлера: угла прецессии $\psi \in [0, 2\pi]$, угла нутации – пространственного угла атаки $\alpha \in [0, \pi]$ и угла собственного вращения $\varphi \in [0, 2\pi]$. Промежуточные СК: $OX_aY_aZ_a$ – скоростная, $OX_nY_nZ_n$ – связанная с пространственным углом атаки.

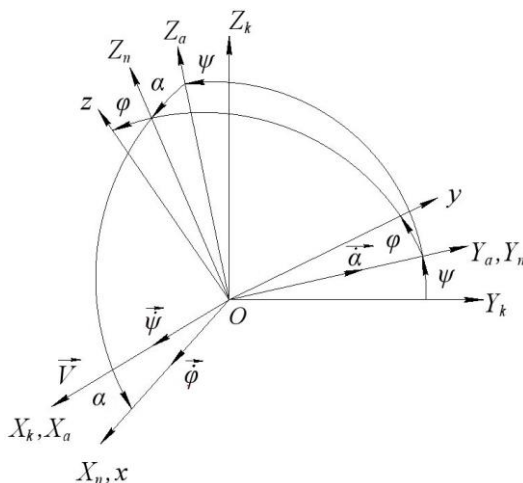


Рис. 1.1. Взаимная ориентация траекторной и связанной СК

Матрица перехода от траекторной СК $OX_kY_kZ_k$ к связанной СК $Oxyz$ определяется по формуле:

$$B = A \cdot A(\psi) = [b_{ij}],$$

$$\begin{aligned} \text{где } b_{11} &= \cos \alpha, b_{12} = \sin \alpha \sin \psi, b_{13} = -\sin \alpha \cos \psi, \\ b_{21} &= \sin \alpha \sin \varphi, b_{22} = \cos \varphi \cos \psi - \cos \alpha \sin \varphi \sin \psi, \\ b_{23} &= \cos \varphi \sin \psi + \cos \alpha \sin \varphi \cos \psi, \\ b_{31} &= \sin \alpha \cos \varphi, b_{32} = -\sin \varphi \cos \psi - \cos \alpha \cos \varphi \sin \psi, \\ b_{33} &= -\sin \varphi \sin \psi + \cos \alpha \cos \varphi \cos \psi. \end{aligned}$$

1.2. Уравнения углового движения МКА

Согласно теореме об изменении кинетического момента движение МКА относительно центра масс как твёрдого тела может быть описано векторным уравнением в инерциальной системе координат [8]:

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \vec{M}_O^e \quad (1.1)$$

или в связанной системе координат $Oxyz$

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{K}_O = \vec{M}_O^e, \quad (1.2)$$

где $\vec{\omega}$ – абсолютная угловая скорость, $\vec{K}_O = J\vec{\omega}$ – вектор кинетического момента, J – тензор инерции, $\vec{M}_O^e$ – главный момент внешних сил.

Пусть оси связанной СК $Oxyz$ являются главными центральными осями инерции МКА для точки O . Тогда векторное уравнение (1.2) в проекциях на данные оси запишется в виде:

$$\begin{aligned} J_x \dot{\omega}_x + (J_z - J_y) \omega_y \omega_z &= M_x, \\ J_y \dot{\omega}_y + (J_x - J_z) \omega_z \omega_x &= M_y, \\ J_z \dot{\omega}_z + (J_y - J_x) \omega_x \omega_y &= M_z, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где M_x, M_y, M_z – проекции главного момента внешних сил на оси СК $Oxyz$; $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ – проекции угловой скорости $\vec{\omega}$ на оси СК $Oxyz$; J_x, J_y, J_z – главные центральные моменты инерции МКА.

Дополним динамические уравнения Эйлера (1.3) тремя кинематическими уравнениями, связывающими первые производные по времени углов Эйлера ψ, φ, α с проекциями вектора абсолютной угловой скорости $\vec{\omega}$ на связанные оси ω_x, ω_y и ω_z .

Учитывая, что мгновенная угловая скорость равна сумме угловых скоростей составляющих вращений в случае круговой орбиты можно записать

$$\vec{\omega} = \vec{\dot{\psi}} + \vec{\dot{\varphi}} + \vec{\dot{\alpha}} + \overrightarrow{\omega_{\text{орб}}},$$

тогда кинематические соотношения имеют вид

$$\begin{aligned}\omega_x &= \dot{\psi} \cos \alpha + \dot{\varphi} + \omega_{\text{орб}} b_{12}, \\ \omega_y &= \dot{\psi} \sin \varphi \sin \alpha + \dot{\alpha} \cos \varphi + \omega_{\text{орб}} b_{22}, \\ \omega_z &= \dot{\psi} \cos \varphi \sin \alpha - \dot{\alpha} \sin \varphi + \omega_{\text{орб}} b_{32},\end{aligned}\tag{1.4}$$

где b_{12}, b_{22}, b_{32} – элементы матрицы перехода В, $\omega_{\text{орб}} = \sqrt{\frac{\mu}{r^3}}$ – орбитальная угловая скорость, $r = R_3 + H = \text{const}$, H – высота полёта, R_3 – радиус Земли.

Динамические уравнения Эйлера (1.3) и кинематические соотношения (1.4) составляют полную систему уравнений движения относительно центра масс МКА.

1.3. Модели моментов внешних сил, действующих на МКА

При орбитальном полёте на МКА действуют следующие возмущающие моменты: гравитационный момент; аэродинамический момент; момент от давления солнечных лучей; момент от ударов метеоро-

ритных частиц; магнитный момент; реактивный момент, возникающий в результате истечения газа из корпуса МКА; момент от внутренних движущихся масс и наличия гибких элементов конструкции.

В данной работе исследуется угловое движение МКА на круговых орбитах высотой 250–700 км, под действием гравитационного и аэродинамического моментов.

Гравитационный момент

При изучении движения космического аппарата относительно его центра масс поле притяжения рассматривается как центральное ньютоновское гравитационное поле. Гравитационный момент определяется в соответствии с [8]. Линейные размеры МКА полагаются намного меньшими расстояния от центра масс тела до притягивающего центра. Для круговой орбиты, когда оси Ox, Oy, Oz являются главными центральными осями инерции МКА выражения для проекций гравитационного момента на оси Ox, Oy и Oz связанной с телом системы координат имеют вид:

$$\begin{aligned} M_{gx} &= \frac{3\mu}{r^3} (J_z - J_y) b_{23} b_{33} , & M_{gy} &= \frac{3\mu}{r^3} (J_x - J_z) b_{33} b_{13} , & M_{gz} \\ &= \frac{3\mu}{r^3} (J_y - J_x) b_{13} b_{23} . \end{aligned} \quad (1.5)$$

Подробный вывод проекций гравитационного момента на оси связанной СК приводится в [2,8]. Отметим, что выражения (1.5) являются приближенными. В них отброшены величины порядка $(\rho_{dm}/r)^2$ и выше (ρ_{dm} – длина радиуса-вектора элемента dm в связанной СК), а также не учитывается отличие гравитационного поля Земли от центрального.

Аэродинамический момент

При моделировании аэродинамического момента был принят ряд допущений: не учитывалось увлечение атмосферы вращающейся Землёй, также не был учтён градиентный эффект, поскольку

размеры аппарата сравнительно малы, кроме того, можно пренебречь тепловыми скоростями молекул, так как они в среднем весьма малы по сравнению со скоростью движения КА по орбите. Будем полагать, что режим обтекания МКА газом является свободномолекулярным, т.е. длина свободного пробега молекул газа значительно больше характерных размеров аппарата. Тогда согласно [9], аэродинамическая сила лобового сопротивления приложена в геометрическом центре МКА и определяется площадью проекции аппарата на плоскость, перпендикулярную вектору скорости набегающего потока:

$$\vec{Q}_{xv} = -c_0 \tilde{S} q S_x \vec{e}_v, \quad (1.6)$$

где $c_0 = 2,2$ – коэффициент, который может принимать значения от 2 до 3 в зависимости от физических свойств газа и поверхности МКА (для проектных проработок принимается равным 2,2); $\tilde{S}$ – приведённая площадь поперечного сечения (площадь проекции МКА на плоскость перпендикулярную вектору скорости набегающего потока, отнесённая к характерной площади S_x); $q = q(H) = \rho(H)[V(H)]^2/2$ – скоростной напор, $V(H) = \sqrt{\mu/(R_3 + H)}$ – скорость полёта МКА, $\rho(H)$ – плотность атмосферы, $\vec{e}_v$ – единичный вектор по направлению вектора скорости центра масс $\vec{V}$ (рис. 1.2).

Для МКА формата кубсат 1–3U, имеющих форму прямоугольного параллелепипеда с квадратным поперечным сечением, величина $\tilde{S}$ определяется по формуле [10]:

$$\tilde{S} = |\cos \alpha| + k_s \sin \alpha \cdot (|\sin \varphi| + |\cos \varphi|), \quad (1.7)$$

где k_s – отношение площади одной из боковых поверхностей к характерной площади.

Следует отметить, что формула (1.7) справедлива и для МКА кубсат 12U, а также других аппаратов, имеющих форму прямоугольного параллелепипеда и квадратное поперечное сечение.

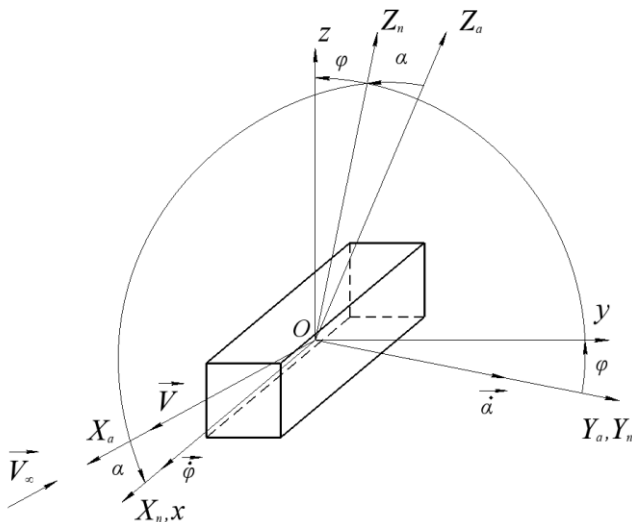


Рис. 1.2. Взаимная ориентация вектора набегающего потока и связанной с МКА системы координат $Oxyz$

На рис. 1.3 показана зависимость приведённой площади поперечного сечения от угла атаки при различных значениях угла собственного вращения для наноспутника формата кубсат 3U ($0,1 \times 0,1 \times 0,3 \text{ м}^3$). Из рисунка видно, что в зависимости от значений углов собственного вращения и атаки данная величина меняется более, чем в четыре раза.

Для МКА, имеющих форму отличную от прямоугольного параллелепипеда, например, за счёт раскрытия солнечных панелей, значения величины $\tilde{S}$ можно определить с использованием системы автоматического проектирования (САПР).

Определим положение центра давления (геометрического центра) МКА относительно центра масс в связанной с аппаратом СК $Oxyz$ радиусом-вектором

$$\vec{r}_d = x_d \vec{i} + y_d \vec{j} + z_d \vec{k}.$$

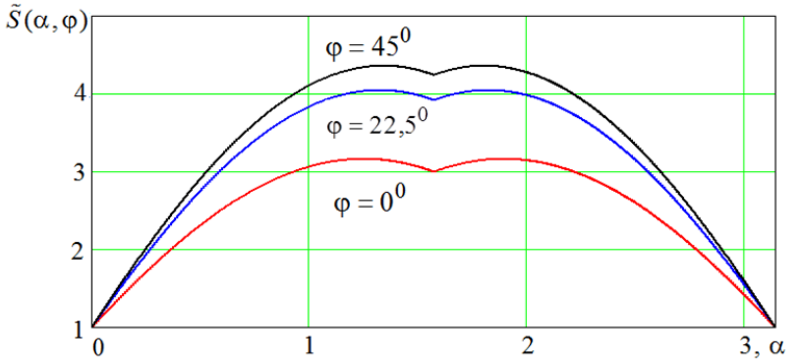


Рис. 1.3. Приведённая площадь поперечного сечения наноспутника формата кубсат 3U

Положение центра масс относительно геометрического центра МКА в СК, полученное параллельным переносом осей системы $Oxyz$ в геометрический центр, обозначим как

$$\vec{r}_g = \Delta x \vec{i} + \Delta y \vec{j} + \Delta z \vec{k}, \text{ при этом } \vec{r}_g = -\vec{r}_d.$$

Момент аэродинамической силы лобового сопротивления относительно центра масс определяется выражением:

$$\vec{M}_a = \vec{r}_d \times \vec{Q}_{xv} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_d & y_d & z_d \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix},$$

где проекции аэродинамической силы лобового сопротивления на оси связанной СК $Oxyz$, учитывая матрицу перехода от траекторной СК $OX_kY_kZ_k$ к связанной СК $Oxyz$, определяются выражениями:

$$Q_x = Q_{xv} \cos \alpha, Q_y = Q_{xv} \sin \alpha \sin \varphi, Q_z = Q_{xv} \sin \alpha \cos \varphi,$$

где $Q_{xv} = -c_0 \tilde{S} q S_x$.

Проекции момента аэродинамической силы лобового сопротивления относительно центра масс равны:

$$\begin{aligned}
M_{ax} &= Q_{xv} \sin \alpha \cos \varphi y_d - Q_{xv} \sin \alpha \sin \varphi z_d , \\
M_{ay} &= Q_{xv} \cos \alpha z_d - Q_{xv} \sin \alpha \cos \varphi x_d , \\
M_{az} &= Q_{xv} \sin \alpha \sin \varphi x_d - Q_{xv} \cos \alpha y_d .
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Рассмотрим случай, когда центр масс лежит на продольной оси МКА ($x_d \neq 0$, $y_d = 0$, $z_d = 0$). Тогда, проекции момента аэродинамической силы лобового сопротивления относительно центра масс на оси связанной СК $Oxyz$ равны:

$$\begin{aligned}
M_{ax} &= 0 , \\
M_{ay} &= -Q_{xv} \sin \alpha \cos \varphi x_d , \\
M_{az} &= Q_{xv} \sin \alpha \sin \varphi x_d .
\end{aligned}$$

Момент аэродинамической силы лобового сопротивления относительно центра масс, действующий в плоскости OX_nZ_n , можно записать в виде

$$\begin{aligned}
M_a &= -Q_{xv} x_d \sin \alpha = Q_{xv} \Delta x \sin \alpha = \\
&= -c_0 \tilde{S} \Delta \tilde{x} q S_x l \sin \alpha = m_\alpha(\alpha, \varphi) q S_x l,
\end{aligned} \tag{1.9}$$

где $\Delta \tilde{x} = \frac{\Delta x}{l}$, l – характерная длина МКА; коэффициент восстанавливающего аэродинамического момента $m_\alpha(\alpha, \varphi)$, вычисленный относительно центра масс, определяется по формуле:

$$\begin{aligned}
m_\alpha(\alpha, \varphi) &= -c_0[|\cos \alpha| + \\
&+ k_s \sin \alpha(|\sin \varphi| + |\cos \varphi|)] \Delta \tilde{x} \sin \alpha.
\end{aligned} \tag{1.10}$$

Считая, что угол наклона траектории МКА, движущегося по почти круговой орбите, мал и меняется медленно, изменение высоты по времени можно определить по приближённой формуле [11]

$$\dot{H} = -\frac{2\sigma_x q V}{g}, \tag{1.11}$$

где $g = g_3(R_3/(R_3 + H))^2$; g_3 – ускорение свободного падения на поверхности Земли; σ_x – баллистический коэффициент.

Для рассматриваемых МКА стандарта кубсат, имеющих форму прямоугольного параллелепипеда, баллистический коэффициент зависит от пространственного угла атаки и угла собственного вращения и определяется по формуле:

$$\sigma_x(\alpha, \varphi) = c_0(|\cos \alpha| + k_s \sin \alpha(|\sin \varphi| + |\cos \varphi|))S_x/m. \quad (1.12)$$

Исследовать движение МКА относительно центра масс можно по полной системе нелинейных дифференциальных уравнений (динамические уравнения Эйлера (1.3) и кинематические соотношения (1.4)) с учётом действия внешних моментов, описанных в данной главе. Однако получить общее решение указанной системы не представляется возможным. При численном же интегрировании уравнений движения остаются скрытыми причины, обуславливающие тот или иной характер движения. Поэтому важен поиск приближенных аналитических или численно-аналитических решений, позволяющих установить общие закономерности, свойственные движению МКА. Полную систему нелинейных дифференциальных уравнений целесообразно использовать для проверочных расчётов.

Глава 2. ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛОЖЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ МКА СТАНДАРТА КУБСАТ ПРИ ДЕЙСТВИИ ГРАВИТАЦИОННОГО И АЭРОДИНАМИЧЕСКОГО МОМЕНТОВ

При изучении неуправляемого движения важной задачей является определение положений равновесий МКА относительно центра масс. Знание положений равновесия и характера движения МКА в их окрестности позволяет использовать моменты внешних сил для обеспечения необходимой ориентации.

2.1. Необходимые условия положений равновесия

Положением равновесия называется такое положение тела, в котором аппарат будет находиться всё время, если в начальный момент времени он находился в этом положении и скорости всех его точек были равны нулю [12]. Из данного определения следует, что положение углового равновесия относительно орбитальной СК достигается, когда скорости изменения углов равны нулю ($\dot{\alpha} = 0$, $\dot{\psi} = 0$, $\dot{\phi} = 0$), при этом система кинематических соотношений (1.4) для круговой орбиты принимает вид:

$$\omega_x = \omega_{орб} b_{12}, \omega_y = \omega_{орб} b_{22}, \omega_z = \omega_{орб} b_{32}. \quad (2.1)$$

Подставляя проекции аэродинамического (1.8) и гравитационного (1.5) моментов в динамические уравнения Эйлера (1.3), учитывая (2.1), получим систему для определения положений равновесия [13]:

$$\begin{aligned} (J_z - J_y)\omega_{орб}^2(b_{22}b_{32} - 3b_{23}b_{33}) - Q_{xv}(y_d b_{31} - z_d b_{21}) &= 0, \\ (J_x - J_z)\omega_{орб}^2(b_{32}b_{12} - 3b_{33}b_{13}) - Q_{xv}(z_d b_{11} - x_d b_{31}) &= 0, \\ (J_y - J_x)\omega_{орб}^2(b_{12}b_{22} - 3b_{13}b_{23}) - Q_{xv}(x_d b_{21} - y_d b_{11}) &= 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Также для определения положений равновесия удобно использовать эквивалентную систему, которая получается проецированием уравнений (2.2) на оси орбитальной системы координат:

$$\begin{aligned}
 & J_x \omega_{\text{орб}}^2 b_{12} b_{13} + J_y \omega_{\text{орб}}^2 b_{22} b_{23} + J_z \omega_{\text{орб}}^2 b_{32} b_{33} = \\
 & = 0,3 (J_x \omega_{\text{орб}}^2 b_{13} b_{11} + J_y \omega_{\text{орб}}^2 b_{21} b_{23} + J_z \omega_{\text{орб}}^2 b_{31} b_{33}) + \\
 & \quad + Q_{xv} (x_d b_{13} + y_d b_{23} + z_d b_{33}) = 0, \\
 & J_x \omega_{\text{орб}}^2 b_{12} b_{11} + J_y \omega_{\text{орб}}^2 b_{22} b_{21} + J_z \omega_{\text{орб}}^2 b_{32} b_{31} - \\
 & \quad - Q_{xv} (x_d b_{12} + y_d b_{22} + z_d b_{32}) = 0.
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Эту систему можно решить, как систему трёх уравнений с неизвестными α , φ , ψ . Также систему (2.3) можно решить относительно направляющих косинусов при добавлении условий ортогональности:

$$\begin{aligned}
 & b_{11}^2 + b_{21}^2 + b_{31}^2 = 1, b_{12}^2 + b_{22}^2 + b_{32}^2 = 1, b_{13}^2 + b_{23}^2 + b_{33}^2 = 1, \\
 & b_{22} \cdot b_{23} + b_{32} \cdot b_{33} + b_{12} \cdot b_{13} = 0, b_{22} \cdot b_{21} + b_{32} \cdot b_{31} + b_{12} \cdot b_{11} = \\
 & = 0, b_{21} \cdot b_{23} + b_{33} \cdot b_{31} + b_{13} \cdot b_{11} = 0.
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Системы (2.3) и (2.4) образуют девять уравнений с неизвестными $b_{11}, b_{12}, b_{13}, b_{21}, b_{22}, b_{23}, b_{31}, b_{32}, b_{33}$.

Ввиду существенной нелинейности указанных систем уравнений получить их аналитическое решение в общем виде не представляется возможным. Аналитическое решение получено для двух частных случаев, описанных ниже.

2.2. Определение положений равновесия динамически симметричного МКА

Рассмотрим частный случай, когда МКА формата кубсат 1-3U (или 12U), то есть имеющий квадратное поперечное сечение, явля-

ется динамически симметричным, то есть $J_n = J_y = J_z, J_x \neq J_n$, при этом центр давления смещён относительно центра масс по трём координатам ($x_d \neq 0, y_d \neq 0, z_d \neq 0$) [13, 14].

В этом случае система (2.2) с учётом выражения для силы лобового сопротивления (1.6) примет вид [13]:

$$\begin{aligned} & (|b_{11}| + k_s(|b_{21}| + |b_{31}|))(y_d b_{31} - z_d b_{21}) = 0, (J_x - \\ & - J_n)\omega_{op\delta}^2(b_{32}b_{12} - 3b_{33}b_{13}) + c_0 q S_x(|b_{11}| + k_s(|b_{21}| + \\ & + |b_{31}|))(z_d b_{11} - x_d b_{31}) = 0, (J_x - J_n)\omega_{op\delta}^2(b_{12}b_{22} - 3b_{13}b_{23}) - \\ & - c_0 q S_x(|b_{11}| + k_s(|b_{21}| + |b_{31}|))(x_d b_{21} - y_d b_{11}) = 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Система (2.3) примет вид:

$$\begin{aligned} & (J_x - J_n)\omega_{op\delta}^2 b_{12} b_{13} = \\ & = 0, 3(J_x - J_n)\omega_{op\delta}^2 b_{13} b_{11} - c_0 q S_x(|b_{11}| + \\ & + k_s(|b_{21}| + |b_{31}|))(x_d b_{13} + \\ & + y_d b_{23} + z_d b_{33}) = 0, (J_x - J_n)\omega_{op\delta}^2 b_{12} b_{11} + c_0 q S_x(|b_{11}| + \\ & + k_s(|b_{21}| + |b_{31}|))(x_d b_{12} + y_d b_{22} + z_d b_{32}) = 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Система уравнений (2.6), записанная через направляющие косинусы, позволяет аналитически определить все положения относительного равновесия МКА на круговой орбите [13, 14]. Полученные сочетания угла прецессии, пространственного угла атаки и угла собственного вращения, соответствующие положениям равновесия, приведены в таблице 2.1. В таблице приняты следующие обозначения:

$$w = k_s(|y_d| + |z_d|), u = (\sqrt{w} + \sqrt{|x_d|})^2, \vartheta = \frac{\omega_{op\delta}^2(J_n - J_x)}{c_0 q S_x},$$

$$\varphi_1 = \begin{cases} \arctg \frac{y_d}{z_d}, z_d > 0, \\ \arctg \frac{y_d}{z_d} + \pi, z_d < 0, \end{cases} \quad \varphi_2 = \varphi_1 + \pi,$$

$$\alpha_i = \operatorname{arccctg} \left(\frac{-r_i \pm \sqrt{r_i^2 + 4x_d q_i w}}{2q_i \sqrt{y_d^2 + z_d^2}} \right),$$

$$r_i = q_i w + p_i \vartheta - x_d, \text{ при } i = 1, 2, 5, 6, 9, 10, 13, 14,$$

$$\alpha_i = \operatorname{arccctg} \left(\frac{-r_i \pm \sqrt{r_i^2 - 4x_d q_i w}}{-2q_i \sqrt{y_d^2 + z_d^2}} \right),$$

$$r_i = q_i w + p_i \vartheta + x_d, \text{ при } i = 3, 4, 7, 8, 11, 12, 15, 16,$$

где верхний знак перед квадратным корнем соответствует нечётному индексу α_i , соответственно нижний знак – чётному; $p_i = -3$, если $i = 1, 2, \dots, 8$; $p_i = 1$, если $i = 9, 10, \dots, 16$; $q_i = 1$, если $i = 1, \dots, 4$; $9, \dots, 12$; $q_i = -1$, если $i = 5, \dots, 8$; $13, \dots, 16$.

Таблица 2.1. Положения относительного равновесия
для случая $J_x \neq J_y = J_z$, $x_d \neq 0$, $y_d \neq 0$, $z_d \neq 0$

			$x_d < 0 / x_d > 0$		
			$ \vartheta < \frac{u}{3}$	$\frac{u}{3} < \vartheta < u$	$u < \vartheta $
$\psi_1 = 0$ $(\psi_3 = \pi)$	φ_1	$\vartheta > 0$	α_3/α_1	$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3/\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$	$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ $/\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$
		$\vartheta < 0$	α_3/α_1	α_3/α_1	α_3/α_1
	φ_2	$\vartheta > 0$	α_6 / α_8	α_6 / α_8	α_6 / α_8
		$\vartheta < 0$	α_6 / α_8	$\alpha_6, \alpha_7, \alpha_8 / \alpha_5, \alpha_6, \alpha_8$	$\alpha_6, \alpha_7, \alpha_8$ $/ \alpha_5, \alpha_6, \alpha_8$
$\psi_2 = \frac{\pi}{2}$ $\left(\psi_4 = \frac{3\pi}{2}\right)$	φ_1	$\vartheta > 0$	α_{11} / α_9	α_{11} / α_9	α_{11} / α_9
		$\vartheta < 0$	α_{11} / α_9	α_{11} / α_9	$\alpha_9, \alpha_{10}, \alpha_{11}$ $/ \alpha_9, \alpha_{11}, \alpha_{12}$
	φ_2	$\vartheta > 0$	$\alpha_{14} / \alpha_{16}$	$\alpha_{14} / \alpha_{16}$	$\alpha_{14}, \alpha_{15}, \alpha_{16}$ $/ \alpha_{13}, \alpha_{14}, \alpha_{16}$
		$\vartheta < 0$	$\alpha_{14} / \alpha_{16}$	$\alpha_{14} / \alpha_{16}$	$\alpha_{14} / \alpha_{16}$
Число положений равновесия			8	12	16

Из таблицы 2.1 можно сделать вывод, что в зависимости от соотношений параметров, определяющих влияние аэродинамического и гравитационного моментов, для случая динамически симметричного МКА стандарта кубсат возможно 8, 12 или 16 положений относительного равновесия.

Запишем условия, при которых изменяется число положений относительного равновесия:

- при $|\vartheta| < \frac{u}{3}$ – 8 положений относительного равновесия, что объясняется преобладанием аэродинамического момента над гравитационным;
- при $\frac{u}{3} < |\vartheta| < u$ – 12 положений относительного равновесия, когда гравитационный и аэродинамический моменты соизмеримы;
- при $u < |\vartheta|$ – 16 положений относительного равновесия, что объясняется преобладанием гравитационного момента над аэродинамическим.

Проиллюстрируем определение положений равновесия на примере МКА, со следующими параметрами:

$$m = 2,1 \text{ кг}; \quad l = 0,32 \text{ м}; \quad S_x = 0,01 \text{ м}^2; \quad k_s = 3,2;$$

$$J_x = 0,0051 \text{ кг} \cdot \text{м}^2; \quad J_y = J_z = J_n = 0,016 \text{ кг} \cdot \text{м}^2;$$

$$x_d = -0,061 \text{ м}; \quad y_d = -0,0013 \text{ м}; \quad z_d = -0,00053 \text{ м}.$$

Для примера была рассмотрена высота 560 км, где реализуется 16 положений равновесия. При расчётах использована стандартная плотность атмосферы согласно ГОСТ 4401-81 [15]. Для рассматриваемой высоты $w = 0,004575 \text{ м}$, $u = 0,09898 \text{ м}$, $\vartheta = \frac{\omega_{\text{об}}^2(J_n - J_x)}{c_0 q S_x} = 0,1006 \text{ м}$. Результаты расчёта приведены в таблице 2.2.

Таблица 2.2. Положения равновесия динамически симметричного МКА при движении по круговой орбите на высоте 560 км

№	ψ	φ	α	№	ψ	φ	α
1	0	247,5°	0,3°	9	180°	247,5°	0,3°
2	0	247,5°	50,2°	10	180°	247,5°	50,2°
3	0	247,5°	179,8°	11	180°	247,5°	179,8°
4	0	67,5°	51,5°	12	180°	67,5°	51,5°
5	90°	247,5°	165,7°	13	270°	247,5°	165,7°
6	90°	67,5°	0,5°	14	270°	67,5°	0,5°
7	90°	67,5°	173°	15	270°	67,5°	173°
8	90°	67,5°	176,7°	16	270°	67,5°	176,7°

Рассмотрим частный случай, когда центр давления смещён относительно центра масс только по оси Ox ($x_d \neq 0$ и $y_d = z_d = 0$). В этом случае при любом соотношении аэродинамического и гравитационного моментов имеют место положения равновесия по углу атаки $\alpha = 0$ и $\alpha = \pi$ (при значениях углов прецессии и собственного вращения, удовлетворяющих соотношениям $\varphi + \psi = \{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2\}$). Итого 8 положений равновесия. Кроме того, при уменьшении влияния аэродинамического момента, то есть при выполнении условий $|\vartheta| > |x_d|/3$ или $|\vartheta| > |x_d|$ появляются положения равновесия по углу атаки, зависящие от угла собственного вращения φ при фиксированных значениях угла прецессии ψ . Окончательный результат приведён в таблице 2.3, в которой приняты следующие обозначения:

$$\alpha_{1,2} = \arccctg \left(\frac{-x_d k_S (|\sin \varphi| + |\cos \varphi|)}{3\vartheta \pm x_d} \right),$$

$$\alpha_{3,4} = \arccctg \left(\frac{x_d k_S (|\sin \varphi| + |\cos \varphi|)}{\vartheta \mp x_d} \right).$$

Таблица 2.3 Положения равновесия для случая

$$J_x \neq J_y = J_z, x_d \neq 0, y_d = 0, z_d = 0$$

$\alpha = 0$ или $\alpha = \pi$ при любых значениях углов прецессии и собственного вращения						
	$(x_d > 0 \text{ и } \vartheta > 0)$ или $(x_d < 0 \text{ и } \vartheta < 0)$			$(x_d < 0 \text{ и } \vartheta > 0)$ или $(x_d > 0 \text{ и } \vartheta < 0)$		
	$\frac{ \vartheta }{3} < \frac{ x_d }{3}$	$\frac{ x_d }{3} < \vartheta $ $< x_d $	$ x_d < \vartheta $	$\frac{ \vartheta }{3} < \frac{ x_d }{3}$	$\frac{ x_d }{3} < \vartheta $ $< x_d $	$ x_d < \vartheta $
$\psi_1 = 0(\psi_3 = \pi)$	—	α_2	α_2	—	α_1	α_1
$\psi_2 = \pi/2(\psi_4 = 3\pi/2)$	—	—	α_3	—	—	α_4

2.3. Определение положений равновесия динамически несимметричного МКА в частном случае

Рассмотрим частный случай динамически несимметричного МКА, когда центр давления смещён относительно центра масс МКА только по оси Ox ($J_x \neq J_y \neq J_z, x_d \neq 0, y_d = 0, z_d = 0$) [16].

В этом случае система (2.2) с учётом выражения для силы лобового сопротивления (1.6) примет вид:

$$\begin{aligned}
 & (J_z - J_y)\omega_{op\bar{o}}^2(b_{22}b_{32} - 3b_{23}b_{33}) = \\
 & = 0, (J_x - J_z)\omega_{op\bar{o}}^2(b_{32}b_{12} - 3b_{33}b_{13}) - \\
 & - c_0 q S_x (|b_{11}| + k_s(|b_{21}| + |b_{31}|))x_d b_{31} = \\
 & = 0, (J_y - J_x)\omega_{op\bar{o}}^2(b_{12}b_{22} - 3b_{13}b_{23}) + \\
 & + c_0 q S_x (|b_{11}| + k_s(|b_{21}| + |b_{31}|))x_d b_{21} = 0.
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Система (2.3) примет вид:

$$\begin{aligned}
 & J_x \omega_{op\bar{o}}^2 b_{12} b_{13} + J_y \omega_{op\bar{o}}^2 b_{22} b_{23} + J_z \omega_{op\bar{o}}^2 b_{32} b_{33} = \\
 & = 0, 3(J_x \omega_{op\bar{o}}^2 b_{13} b_{11} + J_y \omega_{op\bar{o}}^2 b_{21} b_{23} + J_z \omega_{op\bar{o}}^2 b_{31} b_{33}) -
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned}
& -c_0 q S_x (|b_{11}| + k_s (|b_{21}| + |b_{31}|)) x_d b_{13} = \\
& = 0, J_x \omega_{opb}^2 b_{12} b_{11} + J_y \omega_{opb}^2 b_{22} b_{21} + J_z \omega_{opb}^2 b_{32} b_{13} + \\
& + c_0 q S_x (|b_{11}| + k_s (|b_{21}| + |b_{31}|)) x_d b_{12} = 0.
\end{aligned}$$

В работе [16] получено аналитическое решение этой системы. Введём следующие обозначения:

$$\vartheta_1 = \frac{\omega_{opb}^2 (J_y - J_x)}{c_0 q S_x}, \quad \vartheta_2 = \frac{\omega_{opb}^2 (J_z - J_x)}{c_0 q S_x}.$$

Тогда комбинации углов прецессии ψ , собственного вращения φ и атаки α , соответствующие положениям равновесия относительно центра масс, определяются по следующим формулам:

(1) $\alpha_1 = 0$ при $\varphi + \psi = \{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2\}$ – 4 положения равновесия при любых соотношениях x_d , ϑ_1 , ϑ_2 ;

(2) $\alpha_2 = \pi$ при $\varphi + \psi = \{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2\}$ – 4 положения равновесия при любых соотношениях x_d , ϑ_1 , ϑ_2 ;

(3) Если $\frac{|x_d|}{3} < |\vartheta_2|$: $\psi_1 = 0$, $(\psi_3 = \pi)$, $\varphi_1 = 0$, $(\varphi_3 = \pi)$,
 $\alpha_3 = \text{arcctg} \left(\frac{x_d k_s}{-3\vartheta_2 + \text{sign}(\vartheta_2)|x_d|} \right)$ – 4 положения равновесия;

(4) Если $|x_d| < |\vartheta_2|$: $\psi_2 = \frac{\pi}{2}$, $(\psi_4 = \frac{3\pi}{2})$, $\varphi_1 = 0$, $(\varphi_3 = \pi)$,
 $\alpha_4 = \text{arcctg} \left(\frac{x_d k_s}{\vartheta_2 - \text{sign}(\vartheta_2)|x_d|} \right)$ – 4 положения равновесия;

(5) Если $\frac{|x_d|}{3} < |\vartheta_1|$: $\psi_1 = 0$, $(\psi_3 = \pi)$, $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$, $(\varphi_4 = \frac{3\pi}{2})$,
 $\alpha_5 = \text{arcctg} \left(\frac{x_d k_s}{-3\vartheta_1 + \text{sign}(\vartheta_1)|x_d|} \right)$ – 4 положения равновесия;

(6) Если $|x_d| < |\vartheta_1|$: $\psi_2 = \frac{\pi}{2}$, $(\psi_4 = \frac{3\pi}{2})$, $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$, $(\varphi_4 = \frac{3\pi}{2})$,
 $\alpha_6 = \text{arcctg} \left(\frac{x_d k_s}{\vartheta_1 - \text{sign}(\vartheta_1)|x_d|} \right)$ – 4 положения равновесия.

Окончательный результат приведён в таблице 2.4, в которой в зависимости от соотношения параметров $x_d, \vartheta_1, \vartheta_2$ показано число положений равновесия, а в скобках указаны соответствующие номера комбинаций углов прецессии, собственного вращения и атаки.

Таблица 2.4. Число положений равновесия
(в скобках указаны номера комбинаций углов,
соответствующие положениям равновесия)

	$0 < \vartheta_2 < \frac{ x_d }{3}$	$\frac{ x_d }{3} < \vartheta_2 < x_d $	$ x_d < \vartheta_2 $
$0 < \vartheta_1 < \frac{ x_d }{3}$	8 (1,2)	12 (1,2,3)	16 (1,2,3,4)
$\frac{ x_d }{3} < \vartheta_1 < x_d $	12 (1,2,5)	16 (1,2,3,5)	20 (1,2,3,4,5)
$ x_d < \vartheta_1 $	16 (1,2,5,6)	20 (1,2,3,5,6)	24 (1,2,3,4,5,6)

Из таблицы 2.4 видно, что число положения равновесия не может быть меньше 8 и больше 24. При преобладании аэродинамического момента, то есть на сравнительно низких высотах, где атмосфера оказывает заметное влияние, возможно всего 8 положений равновесия. Тогда как при преобладании гравитационного момента, то есть на высотах с менее плотной атмосферой, возможно 24 положения равновесия [16].

Проиллюстрируем определение положений равновесия на примере МКА со следующими параметрами:

$$m = 1,8 \text{ кг}; \quad l = 0,328 \text{ м};$$

$$S_x = 0,01 \text{ м}^2; \quad k_s = 3,28; \quad x_d = -0,061 \text{ м};$$

$$J_x = 0,00405 \text{ кг} \cdot \text{м}^2; \quad J_y = 0,01424 \text{ кг} \cdot \text{м}^2;$$

$$J_z = 0,01456 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Для примера была рассмотрена высота 480 км, где реализуется 16 положений равновесия. Результаты расчёта приведены в таблице 2.5. На рис. 2.1 показана зависимость числа положений равновесия от высоты полёта для стандартной модели атмосферы.

Таблица 2.5. Положения равновесия
динамически несимметричного МКА
при движении по круговой орбите на высоте 480 км

№	ψ	φ	α	№	ψ	φ	α
1	0	0	0	9	0	0	6,7°
2	0	90°	0	10	0	180°	6,7°
3	0	180°	0	11	180°	0	6,7°
4	0	270°	0	12	180°	180°	6,7°
5	0	0	180°	13	0	90°	5,9°
6	0	90°	180°	14	0	270°	5,9°
7	0	180°	180°	15	180°	90°	5,9°
8	0	270°	180°	16	180°	270°	5,9°



Рис. 2.1. Число положений относительного равновесия
в зависимости от высоты полёта

В общем случае система уравнений для определения положений равновесия МКА под действием аэродинамического и гравитационного моментов (2.3) может быть решена численными методами. Например, с помощью алгоритма численно-аналитического определения положений равновесия динамически несимметричного МКА стандарта кубсат при смещении его центра давления

относительно центра масс по трём осям связанной системы координат [17]. Данный алгоритм позволяет учитывать наличие центробежных моментов инерции в связанной системе координат, оси которой ориентированы по строительным осям МКА.

Поскольку важным этапом при проектировании систем пассивной стабилизации является определение устойчивых положений углового равновесия МКА, то найденные положения равновесия также необходимо исследовать на устойчивость. Для спутников, имеющих форму близкую к сферической, возможно исследование устойчивости для каждой равновесной ориентации с использованием в качестве функции Ляпунова обобщённого интеграла энергии [18]. В отличие от сферического спутника аэродинамический момент, действующий на МКА стандарта кубсат не является потенциальным, а значит составить и исследовать приведённую потенциальную энергию аппарата для определения устойчивости его положений равновесия не представляется возможным. Поэтому для исследования устойчивости положений равновесия следует использовать другие методы, например, численное интегрирование исходных систем дифференциальных уравнений с учётом возмущений [17, 19].

Глава 3. ИССЛЕДОВАНИЕ ПЛОСКОГО УГЛОВОГО ДВИЖЕНИЯ МКА СТАНДАРТА КУБСАТ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ГРАВИТАЦИОННОГО И АЭРОДИНАМИЧЕСКОГО МОМЕНТОВ

3.1. Исследование плоского углового движения при продольном смещении центра масс

Для проведения качественного анализа движения МКА относительно центра масс, используется упрощённая модель углового движения в плоскости круговой орбиты относительно траекторной системы координат, когда одна из главных центральных осей инерции перпендикулярна плоскости орбиты центра масс [2,8]. Модель описывает изменение угла атаки под действием гравитационного момента и аэродинамического восстанавливающего момента. Здесь угол атаки может принимать любые значения ($\alpha \in \mathbb{R}$). Данную модель можно получить из кинематических (1.4) и динамических уравнений Эйлера (1.3). Полагая в (1.4) $\dot{\theta}_m = 0, \varphi = 0, \dot{\phi} = 0, \psi = 0, \dot{\psi} = 0, \dot{\nu} = 0$ (поскольку рассматривается движение относительно траекторной СК) получим $\omega_x = 0, \omega_z = 0, \omega_y = \dot{\alpha}$.

Дифференцируя $\omega_y = \dot{\alpha}$ по времени и учитывая второе уравнение системы (1.3), получим

$$\ddot{\alpha} = M_y/J_y.$$

При этом гравитационный момент определяется по формуле:

$$M_{gy} = -\frac{3\mu}{2r^3}(J_x - J_z) \sin 2.$$

Аэродинамический момент соответственно по формуле:

$$M_{ay} = -c_0 q S_x (|\cos \alpha| + k_s |\sin \alpha|) (\cos \alpha z_d - \sin \alpha x_d).$$

Сначала рассмотрим случай, когда центр масс лежит на продольной оси МКА, то есть $x_d \neq 0$, $y_d = 0$, $z_d = 0$. Тогда аэродинамический момент примет вид

$$M_{ay} = c_0 q S_x x_d (|\cos \alpha| + k_s |\sin \alpha|) \sin \alpha,$$

или $M_{ay} = -c_0 \Delta \bar{x} q S_x l (|\cos \alpha| + k_s |\sin \alpha|) \sin \alpha$.

При этом коэффициент восстанавливающего аэродинамического момента (1.10) при $\varphi = 0$, можно аппроксимировать синусоидальной зависимостью по углу атаки [20]:

$$m_\alpha(\alpha) = a_0 \sin \alpha, \quad (3.1)$$

где $a_0 = -c_0 \Delta \bar{x} m_{nk}$; $m_{nk} = \frac{4+8k_s}{3\pi}$ — первый член разложения выражения $(|\cos \alpha| + k_s |\sin \alpha|) \sin \alpha$ в ряд Фурье по синусам.

На рис. 3.1 показано сравнение выражений $(|\cos \alpha| + k_s |\sin \alpha|) \sin \alpha$ и $m_{nk} \sin \alpha$, при различных значениях k_s на промежутке $\alpha \in [0, \pi]$. Как видно из рисунка, синусоидальная аппроксимация (3.1) отражает основной характер изменения $m_\alpha(\alpha)$.

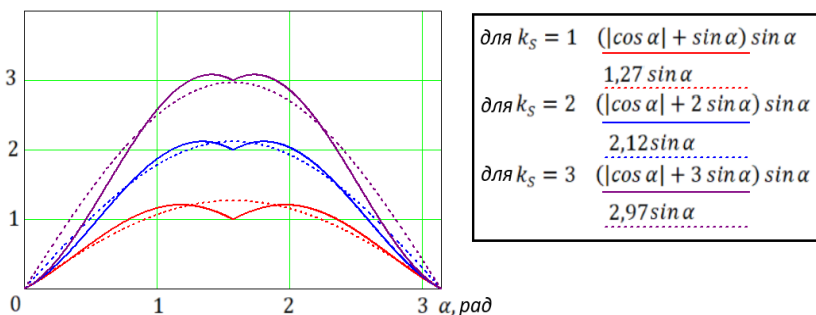


Рис. 3.1. Сравнение величины $(|\cos \alpha| + k_s |\sin \alpha|) \sin \alpha$ (сплошная линия) и её аппроксимации синусоидальной зависимостью $m_{nk} \sin \alpha$ (пунктирная линия)

Для проведения анализа углового движения динамически симметричного МКА ($J_y = J_z = J_n$), для случая, когда угловая скорость собственного вращения небольшая и близка к постоянной, зависимость коэффициента восстанавливающего аэродинамического момента вычисленного относительно центра масс (1.10), можно усреднить по углу собственного вращения φ :

$$m_\alpha(\alpha) = -c_0 \Delta \bar{x} \left(|\cos \alpha| + \frac{4}{\pi} k_s |\sin \alpha| \right) \sin \alpha. \quad (3.2)$$

Здесь $\frac{4}{\pi}$ – нулевой член разложения в ряд Фурье выражения $(|\sin \varphi| + |\cos \varphi|)$.

В этом случае аппроксимация коэффициента восстанавливающего аэродинамического момента (1.10), будет иметь вид (3.1) с тем отличием, что коэффициент m_{nk} необходимо вычислять по формуле $m_{nk} = \frac{4\pi + 32k_s}{3\pi^2}$ (первый член разложения выражения $(|\cos \alpha| + \frac{4}{\pi} k_s |\sin \alpha|) \sin \alpha$ в ряд Фурье по синусам).

С использованием аппроксимации аэродинамического момента синусоидальной зависимостью упрощённая модель углового движения динамически симметричного МКА в плоскости круговой орбиты относительно траекторной системы координат, описывающая изменение угла атаки под действием гравитационного момента и аэродинамического восстанавливающего момента, имеет вид:

$$\ddot{\alpha} - a(H) \sin \alpha - c(H) \sin 2\alpha = 0. \quad (3.3)$$

где $a = a(H) = a_0 S_x l q(H) / J_n$ и $c = c(H) = 3(J_n - J_x)(\omega_{\text{орб}}(H))^2 / (2J_n)$ – коэффициенты, обусловленные аэродинамическим восстанавливающим и гравитационным моментом соответственно.

С учётом выражения (1.12) для случая плоского движения, когда $\varphi = 0$, баллистический коэффициент имеет вид

$$\sigma_x(\alpha) = c_0 (|\cos \alpha| + k_s |\sin \alpha|) S_x / m. \quad (3.4)$$

Для случая, когда угловая скорость собственного вращения не-
большая и близка к постоянной, выражение для баллистического
коэффициента также можно усреднить по углу собственного вра-
щения:

$$\sigma_x(\alpha) = c_0 \left(|\cos \alpha| + \frac{4}{\pi} k_s |\sin \alpha| \right) S_x / m. \quad (3.5)$$

Изменение высоты круговой орбиты вследствие сопротивле-
ния атмосферы происходит очень медленно, и при рассмотрении уг-
лового движения МКА на одном или нескольких витках можно при-
нять $H = \text{const}$. В этом случае для системы (3.3) имеет место инте-
грал энергии:

$$\frac{\dot{\alpha}^2}{2} + a \cos \alpha + c \cos^2 \alpha = E_0, \quad (3.6)$$

где $E_0 = a \cos \alpha_0 + c \cos^2 \alpha_0 + \frac{\dot{\alpha}_0^2}{2}$ – определяется через начальные
условия углового движения.

При отделении МКА от транспортно-пускового устройства ре-
ализация величины максимального угла атаки носит случайный ха-
рактер. В [2] приводится вывод законов распределения максималь-
ного угла атаки.

Помимо величин аэродинамического и гравитационного мо-
ментов, максимальный угол атаки определяется начальным значе-
нием угла атаки α_0 и начальным значением угловой скорости $\dot{\alpha}_0$.
Его величину можно определить из интеграла энергии (3.6) при
 $\dot{\alpha} = 0$:

$$\cos \alpha_{\max} = -\frac{a}{2c} - \sqrt{\left(\frac{-a}{2c}\right)^2 + \frac{a}{c} \cos \alpha_0 + \cos^2 \alpha_0 + \frac{\dot{\alpha}_0^2}{2c}}. \quad (3.7)$$

Полагается, что из величин, входящих в (3.7), наибольший раз-
брос значений имеет величина угловой скорости $\dot{\alpha}_0$, что подтвер-
ждается практикой выведения МКА на орбиту, разбросами других
величин пренебрегается.

Если величина $\dot{\alpha}_0$ имеет распределение Рэлея

$$f(\dot{\alpha}_0) = \frac{\dot{\alpha}_0}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{\dot{\alpha}_0^2}{2\sigma^2}\right), \quad (3.8)$$

где $\sigma > 0$ – масштабный параметр распределения.

Тогда, вычисляя распределение функции α_{max} (3.7) по распределению аргумента $\dot{\alpha}_0$ (3.8) в соответствии с [21], получим аналитические выражения для плотности распределения и функции распределения максимального угла атаки [22]:

$$\begin{aligned} f(\alpha_{max}) &= \frac{-a \sin \alpha_{max} - c \sin 2 \alpha_{max}}{\sigma^2} \times \\ &\times \exp\left(\frac{-a(\cos \alpha_{max} - \cos \alpha_0) - c(\cos^2 \alpha_{max} - \cos^2 \alpha_0)}{\sigma^2}\right), \\ F(\alpha_{max}) &= 1 - \exp\left(\frac{-a(\cos \alpha_{max} - \cos \alpha_0) - c(\cos^2 \alpha_{max} - \cos^2 \alpha_0)}{\sigma^2}\right). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Закон Рэлея рассматривается вследствие принятия допущения о нормальности распределений перпендикулярных составляющих величины начальной поперечной угловой скорости $\dot{\alpha}_0$. Однако в технических приложениях, если отсутствует обоснование выбора принимаемых для статистического анализа законов распределения, используется равномерное распределение, отражающее отсутствие каких-либо приоритетов и позволяющее получить гарантирующие оценки параметров. Если величина $\dot{\alpha}_0$ распределена по равномерному закону в диапазоне $[0, \dot{\alpha}_{0max}]$:

$$f(\dot{\alpha}_0) = \begin{cases} \frac{1}{\dot{\alpha}_{0max}}, & \dot{\alpha}_0 \in [0, \dot{\alpha}_{0max}] \\ 0, & \dot{\alpha}_0 \notin [0, \dot{\alpha}_{0max}] \end{cases}. \quad (3.10)$$

Тогда, вычисляя распределение функции α_{max} (3.7) по распределению аргумента $\dot{\alpha}_0$ (3.10) получим аналитические выражения для плотности распределения и функции распределения максимального угла атаки:

$$f(\alpha_{max}) = \frac{-a \sin \alpha_{max} - c \sin 2 \alpha_{max}}{\dot{\alpha}_{0max} \sqrt{2a(\cos \alpha_{max} - \cos \alpha_0) + 2c(\cos^2 \alpha_{max} - \cos^2 \alpha_0)}},$$

$$F(\alpha_{max}) = \frac{\sqrt{2a(\cos\alpha_{max} - \cos\alpha_0) + 2c(\cos^2\alpha_{max} - \cos^2\alpha_0)}}{\dot{\alpha}_{0max}}. \quad (3.11)$$

На рис. 3.2 и 3.3 приведены графики плотности распределения (рис. 3.2) и функции распределения (рис. 3.3) максимального угла атаки МКА формата кубсат 3U ($S_x = 0,01 \text{ м}^2$, $l = 0,3 \text{ м}$, $J_x = 0,005 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, $J_n = 0,025 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, $\Delta x = 0,055 \text{ м}$) при полёте на высоте $H = 380 \text{ км}$ (атмосфера стандартная [15], выполняется условие $|a| \geq 2|c|$), произведено усреднение по углу собственного вращения согласно формуле (3.2)) и начальном значением угла атаки $\alpha_0 = 10^0$ для случая, когда величина начальной угловой скорости имеет распределение Рэлея.

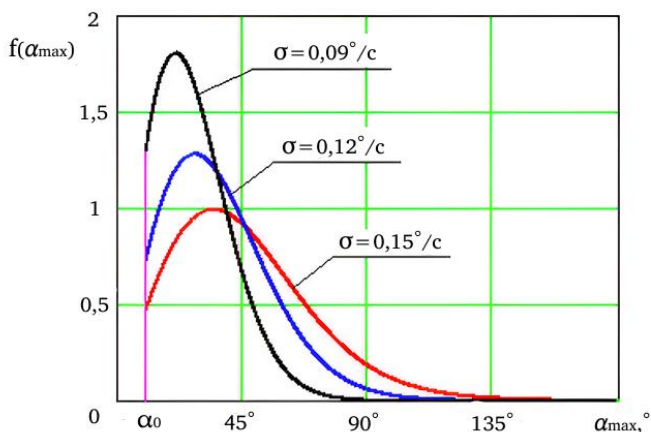


Рис. 3.2. Плотность распределения максимального угла атаки, когда величина начальной угловой скорости имеет распределение Рэлея

На рис. 3.4 и 3.10 приведены графики плотности распределения (рис. 3.4) и функции распределения (рис. 3.10) максимального угла атаки МКА формата кубсат 3U при полёте на высоте $H = 380 \text{ км}$ (атмосфера стандартная [15], выполняется условие $|a| \geq 2|c|$) и начальном значением угла атаки $\alpha_0 = 10^0$ для случая, когда вели-

чина начальной угловой скорости распределена по равномерному закону.

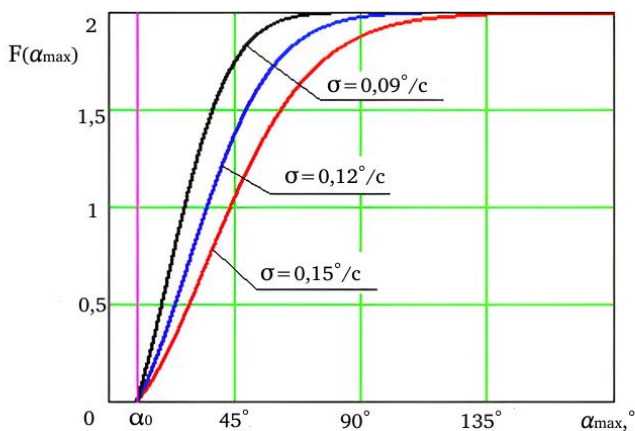


Рис. 3.3. Функция распределения максимального угла атаки, когда величина начальной угловой скорости имеет распределение Рэлея

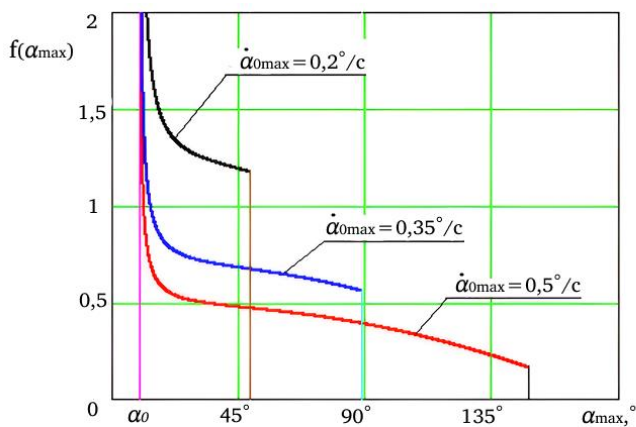


Рис. 3.4. Плотность распределения максимального угла атаки, когда величина начальной угловой скорости распределена по равномерному закону

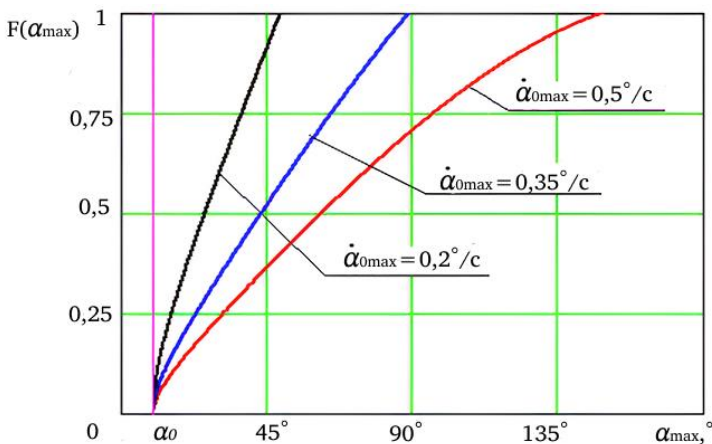


Рис. 3.5. Функция распределения максимального угла атаки, когда величина начальной угловой скорости распределена по равномерному закону

3.2. Исследование плоского углового движения при поперечном смещении центра масс

Рассмотрим модель плоского движения, когда центр давления смещён относительно центра масс по двум координатам ($x_d \neq 0$, $y_d = 0$, $z_d \neq 0$) и движение происходит в плоскости орбиты, то есть $\psi = \varphi = 0$. Тогда угловое движение МКА в плоскости круговой орбиты относительно траекторной системы координат под действием гравитационного и аэродинамического моментов описывается уравнением:

$$\ddot{\alpha} - (a_x(H) \sin \alpha + a_z(H) \cos \alpha)(|\cos \alpha| + k_s |\sin \alpha|) - c_1(H) \sin 2\alpha = 0. \quad (3.12)$$

Здесь $a_z(H) = a_z = \frac{\Delta \bar{z} c_0 S_x l q(H)}{J_y}$ коэффициент, обусловленный составляющей аэродинамического момента, вызванной смещением

центра масс вдоль оси с промежуточным значением момента инерции J_z , $\Delta \bar{z} = \frac{\Delta z}{l}$ – относительный запас статической устойчивости по оси Oz , J_y – наибольший момент инерции; $a_x(H) = a_x = -\frac{\Delta \bar{x} c_0 S_x l q(H)}{J_y}$ – коэффициент, обусловленный составляющей аэродинамического момента, вызванной смещением центра масс вдоль продольной оси; $c_1(H) = c_1 = 3(J_z - J_x)(\omega_{\text{орб}}(H))^2 / (2J_y)$ – коэффициент, обусловленный действием гравитационного момента, J_x – наименьший момент инерции.

Из (3.12) получим следующее уравнение для определения положений равновесия в случае плоского движения [23]:

$$(a_x \sin \alpha + a_z \cos \alpha)(|\cos \alpha| + k_s |\sin \alpha|) + c_1(H) \sin 2\alpha = 0$$

или

$$a_z \cos \alpha |\cos \alpha| + 2c_1 \cos \alpha \sin \alpha + k_s a_z \cos \alpha |\sin \alpha| + a_x \sin \alpha |\cos \alpha| + k_s a_x \sin \alpha |\sin \alpha| = 0. \quad (3.13)$$

Разрешая полученное выражение относительно угла α , получим выражение для определения положений равновесия в плоском случае:

$$\alpha^* = \text{arccctg} \left(\frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4a_z \text{sign}(\cos \alpha) k_s a_x \text{sign}(\sin \alpha)}}{2a_z \text{sign}(\cos \alpha)} \right).$$

Здесь $B = c_1 + k_s a_z \text{sign}(\sin \alpha) + a_x \text{sign}(\cos \alpha)$.

С учётом значения функций $\text{sign}(\sin \alpha)$ и $\text{sign}(\cos \alpha)$ для каждой четверти, получены формулы определения положений равновесия по углу α [23]:

$$\alpha_{1,2}^* = \text{arccctg} \left(\frac{-a_x - k_s a_z - 2c_1 \pm \sqrt{(a_x + k_s a_z + 2c_1)^2 - 4k_s a_x a_z}}{2a_z} \right),$$

$$\alpha_{3,4}^* = \text{arccctg} \left(\frac{-a_x + k_s a_z + 2c_1 \mp \sqrt{(-a_x + k_s a_z + 2c_1)^2 + 4k_s a_x a_z}}{2a_z} \right),$$

$$\alpha_{5,6}^* = \text{arcctg} \left(\frac{-a_x - k_s a_z + 2c_1 \mp \sqrt{(-a_x - k_s a_z + 2c_1)^2 - 4k_s a_x a_z}}{2a_z} \right) - \pi,$$

$$\alpha_{7,8}^* = \text{arcctg} \left(\frac{-a_x + k_s a_z - 2c_1 \pm \sqrt{(a_x - k_s a_z + 2c_1)^2 + 4k_s a_x a_z}}{2a_z} \right) - \pi.$$

Возможные комбинации этих положений, в зависимости от смещения центра масс относительно геометрического центра (x_d, z_d) и величины $|c_1|$ представлены в таблице 3.1.

Таблица 3.1. Положения равновесия
в случае плоского движения

	$x_d > 0, z_d > 0$	$x_d < 0, z_d < 0$	$x_d < 0, z_d > 0$	$x_d > 0, z_d < 0$
$ c_1 < 0,5a_1$	α_2^*, α_5^*	α_1^*, α_6^*	α_4^*, α_7^*	α_3^*, α_8^*
$ c_1 > 0,5a_1$	$\alpha_2^*, \alpha_3^*, \alpha_4^*, \alpha_5^*$	$\alpha_1^*, \alpha_6^*, \alpha_7^*, \alpha_8^*$	$\alpha_1^*, \alpha_2^*, \alpha_4^*, \alpha_7^*$	$\alpha_3^*, \alpha_5^*, \alpha_6^*, \alpha_8^*$

Здесь $a_1 = (\sqrt{|a_x|} + \sqrt{|k_s a_z|})^2$.

Из таблицы 3.1 можно сделать вывод, что вне зависимости от значения $|c_1|$ существует 2 положения равновесия, при соблюдении условия $|c_1| > 0,5a_1$ их количество увеличивается до 4.

Для случая $x_d \neq 0, z_d = 0$ данными результатами воспользоваться нельзя, так как тогда $a_z = 0$. Запишем уравнение (3.13) для этого случая

$$(a_x(H)|\cos \alpha| + k_s a_x(H)|\sin \alpha| + 2c_1(H) \cos \alpha) \sin \alpha = 0.$$

Тогда при любом соотношении аэродинамического и гравитационного моментов реализуются положения равновесия $\alpha_1^* = 0$ и $\alpha_2^* = \pi$. При соблюдении условия $|c_1| > 0,5|a_x|$ имеют место дополнительные положения равновесия:

$$\alpha_{3,4}^* = \text{arcctg} \left(\frac{-k_s a_x}{2c_1 \pm a_x} \right), \alpha_{5,6}^* = \text{arcctg} \left(\frac{k_s a_x}{2c_1 \mp a_x} \right) - \pi.$$

Если знаки величин a_x и c_1 совпадают, то положения равновесия следует вычислять по формулам для α_4^* и α_5^* . Если знаки величин a_x и c_1 противоположны, то есть $a_x < 0$ и $c_1 > 0$ или $a_x > 0$ и $c_1 < 0$, то положения равновесия следует вычислять по формулам для α_3^* и α_6^* .

Для случая $x_d = 0, z_d \neq 0$ уравнение (3.13) примет вид

$$(a_z(H)|\cos \alpha| + k_s a_z(H)|\sin \alpha| + 2c_1(H) \sin \alpha) \cos \alpha = 0.$$

Тогда при любом соотношении аэродинамического и гравитационного моментов реализуются положения равновесия $\alpha_1^* = \frac{\pi}{2}$ и $\alpha_2^* = -\frac{\pi}{2}$. И имеют место дополнительные положения равновесия при выполнении условия $|c_1| > 0,5|k_s a_z|$.

Если знаки величин a_z и c_1 совпадают, то есть $a_z > 0$ и $c_1 > 0$ или $a_z < 0$ и $c_1 < 0$, то положения равновесия следует вычислять по формулам:

$$\alpha_{3,4}^* = \text{arcctg} \left(\frac{2c_1 - k_s a_z}{\pm a_z} \right).$$

Если знаки величин a_z и c_1 противоположны, то есть $a_z < 0$ и $c_1 > 0$ или $a_z > 0$ и $c_1 < 0$, то положения равновесия следует вычислять по формулам:

$$\alpha_{5,6}^* = \text{arcctg} \left(\frac{2c_1 + k_s a_z}{\mp a_z} \right) - \pi.$$

При сохранении допущения $H = \text{const}$ для системы (3.12) может быть записан интеграл энергии:

$$\frac{\dot{\alpha}^2}{2} + a_x u(\alpha) - a_z v(\alpha) + c_1 \cos^2 \alpha = E_0. \quad (3.14)$$

Здесь u и v – функции от α :

$$u(\alpha) = \frac{1}{2} \text{sign}(\cos(\alpha)) \cos^2 \alpha + \\ + \frac{k_s}{2} \text{sign}(\sin(\alpha)) \left(\frac{\sin 2\alpha}{2} - \alpha + 2\pi \cdot \left\lfloor \frac{\alpha + \pi}{2\pi} \right\rfloor \right), \quad (3.15)$$

$$v(\alpha) = \frac{1}{2} \text{sign}(\cos(\alpha)) \left(\frac{\sin 2\alpha}{2} + \alpha - \frac{\pi}{2} - 2\pi \cdot \left\lfloor \frac{\alpha + \frac{\pi}{2}}{2\pi} \right\rfloor \right) + \frac{k_S}{2} \text{sign}(\sin(\alpha)) \sin^2 \alpha, \quad (3.16)$$

$[x]$ – антье x (наибольшее целое число, не превосходящее x),
 $E_0 = a_x u(\alpha_0) - a_z v(\alpha_0) + c_1 \cos^2 \alpha_0 + \frac{\dot{\alpha}_0^2}{2}$ – определяется через начальные условия углового движения.

По аналогии с ранее выполненными исследованиями величина максимального угла атаки α_{max} МКА при колебаниях определяется из интеграла энергии (3.14) при $\dot{\alpha} = 0$. Из величин, входящих в выражение для α_{max} , наибольший разброс значений имеет величина угловой скорости $\dot{\alpha}_0$. Тогда, пренебрегая разбросами других величин, получим аналитические выражения для функции распределения величины максимального угла атаки α_{max} :

– если модуль величины начальной угловой скорости $\dot{\alpha}_0$ имеет распределение Рэлея, то функция распределения максимального угла атаки определяется по формуле:

$$F(\alpha_{max}) = 1 - e^{-\frac{a_z(v(\alpha_{max}) - v(\alpha_0)) - a_x(u(\alpha_{max}) - u(\alpha_0)) - c_1(\cos^2 \alpha_{max} - \cos^2 \alpha_0)}{\sigma^2}}. \quad (3.17)$$

– если модуль величины $\dot{\alpha}_0$ распределён по равномерному закону в диапазоне $[0, \dot{\alpha}_{0max}]$, то функция распределения максимального угла атаки определяется по формуле:

$$F(\alpha_{max}) = [-2a_z(v(\alpha_{max}) - v(\alpha_0)) + 2a_x(u(\alpha_{max}) - u(\alpha_0)) + 2c_1(\cos^2 \alpha_{max} - \cos^2 \alpha_0)]^{1/2} / \dot{\alpha}_{0max}. \quad (3.18)$$

На рис. 3.6 и 3.7 приведены графики функции распределения максимального угла атаки МКА кубсат 3U (параметры $S_x = 0,01\text{м}^2$, $l = 0,3\text{м}$, $J_x = 0,005\text{кг} \cdot \text{м}^2$, $J_n = 0,025\text{кг} \cdot \text{м}^2$, $\Delta x = 0,055\text{м}$, $\Delta z = 0,005\text{м}$) при полёте на высоте $H = 380\text{ км}$ (атмосфера стандартная [15], выполняется условие $|a| \geq 2|c|$) и начальном значе-

нием угла атаки $\alpha_0 = 10^\circ$ для случая, когда величина начальной угловой скорости имеет распределение Рэлея (рис. 3.6) и когда величина начальной угловой скорости распределена по равномерному закону (рис. 3.7).

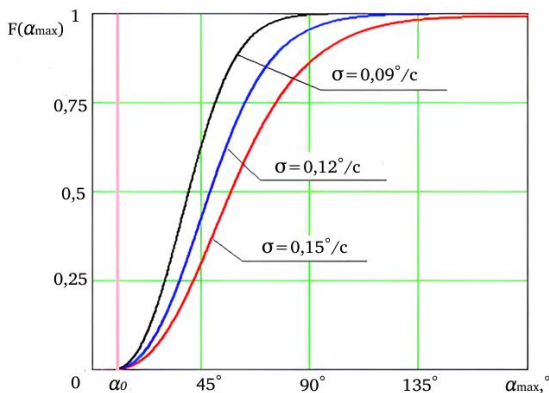


Рис. 3.6. Функция распределения максимального угла атаки, когда величина начальной угловой скорости имеет распределение Рэлея

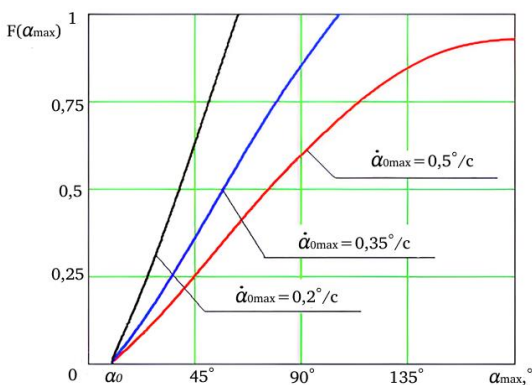


Рис. 3.7. Функция распределения максимального угла атаки, когда величина начальной угловой скорости распределена по равномерному закону

Глава 4. ПРОЕКТИРОВАНИЕ ПАССИВНОГО УГЛОВОГО ДВИЖЕНИЯ НИЗКООРБИТАЛЬНОГО МКА

4.1. Классификация методов пассивной стабилизации

Анализ внешних моментов, создаваемых окружающей средой, показывает, что путём выбора формы, размеров и распределения масс внутри МКА можно создать условия, когда внешние моменты будут оказывать стабилизирующее влияние на угловое движение аппарата. В этом случае стабилизация осей МКА в требуемом положении осуществляется под действием указанных моментов без использования специальных управляющих устройств, применение которых связано с неизбежными затратами энергии, запасённой на борту МКА в том или ином виде.

Поскольку большинство МКА запускается на низкие круговые орбиты, то для решения задачи стабилизации углового положения МКА предлагается использовать гравитационный и аэродинамический моменты. В данной работе задача обеспечения определённой ориентации МКА в пространстве рассматривается в вероятностной постановке, учитывая, что существующие коммерческие пусковые устройства отделения могут порождать большие величины начальной угловой скорости.

Введём классификацию методов пассивной стабилизации для МКА стандарта кубсат, совершающих полёт по круговой орбите [24]: аэродинамическая, аэродинамически-гравитационная, гравитационная и гравитационно-аэродинамическая, которые можно использовать применительно к диапазону высот доминирования определённого момента внешних сил и виду стабилизации (одноосная и трёхосная).

Необходимость такой классификации методов стабилизации МКА стандарта кубсат обусловлена тем, что величина углового ускорения МКА, порождаемого аэродинамическим моментом, на два порядка выше, чем для классических аппаратов с большей массой и размерами (при одинаковых значениях относительного запаса статической устойчивости и объёмной плотности) [25]. Это позволяет расширить диапазон высот, на которых аэродинамический момент является значимым и его можно использовать совместно с гравитационным моментом для стабилизации углового положения.

На рис. 4.1 для МКА формата кубсат 3U ($0,1 \times 0,1 \times 0,3 \text{ м}^3$) выделены области высот H и относительного запаса статической устойчивости $\Delta\bar{x}$ для различных методов пассивной стабилизации: 1 – одноосная аэродинамическая стабилизация по вектору скорости и 2 – трёхосная аэродинамически-гравитационная стабилизация (область, где аэродинамический момент преобладает над гравитационным $M_a > M_g$); 3 – одноосная и трёхосная гравитационная стабилизация по местной вертикали (область, где гравитационный момент преобладает над аэродинамическим $M_g > M_a$); 4 – трёхосная гравитационно-аэродинамическая стабилизация применима при любом отношении аэродинамического и гравитационного моментов, так как она осуществляется путём смещения центра масс от центра давления (геометрического центра) на определённую величину по оси с промежуточным значением момента инерции МКА, при этом относительный запас статической устойчивости по продольной оси ($\Delta\bar{x}$) необходимо делать минимальным. Расчёты проводились для стандартной атмосферы [15]. Следует отметить, что при использовании ГОСТ-25645.101-83 [26], где плотность атмосферы приводится с учётом времени суток и солнечной активности, размеры областей могут изменяться.

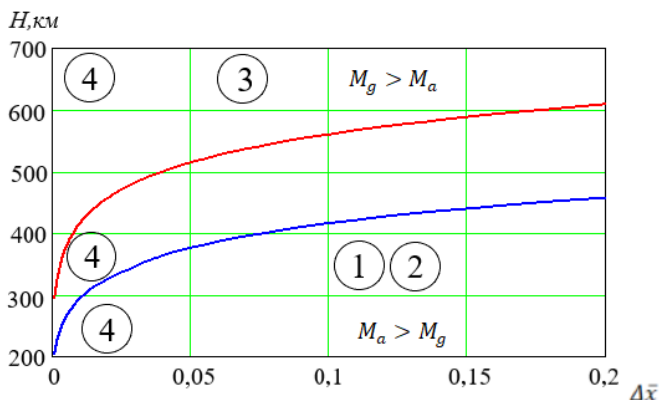


Рис. 4.1. Области предпочтительного применения метода пассивной стабилизации МКА кубсат 3U в зависимости от значений высот H и относительного запаса статической устойчивости $\Delta \bar{x}$

4.2. Выбор проектно-динамических параметров МКА для обеспечения одноосной аэродинамической стабилизация по вектору скорости

Рассмотрим вариант выбора проектных параметров динамически симметричного МКА стандарта кубсат для обеспечения аэродинамической пассивной стабилизации его продольной оси вдоль вектора скорости центра масс (область 1 на рис. 4.1).

Аэродинамическую пассивную стабилизацию продольной оси МКА вдоль вектора скорости центра масс целесообразно использовать на сравнительно низких высотах, где аэродинамический момент является преобладающим. При этом необходимо минимизировать смещение центра масс от продольной оси ($\Delta y, \Delta z$), так как при наличии такого смещения, возникает дополнительный балансирующий угол атаки, величина которого зависит от соотношений $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ (как было показано в разделе 2). Кроме того, даже при малом

смещении центра масс от продольной оси увеличивается вероятность возникновения резонансных режимов движения, которые проявляются в резком увеличении угла атаки и могут привести к невыполнению целевой задачи полёта [20,25], что будет показано в следующем разделе.

Рассмотрим исходную модель плоского движения динамически симметричного МКА ($J_y = J_z = J_n$), когда центр масс смещён вдоль продольной оси ($x_d \neq 0$, $y_d = z_d = 0$). Если угловая скорость собственного вращения небольшая и близка к постоянной, зависимость коэффициента восстанавливающего аэродинамического момента, вычисленного относительно центра масс (1.10), можно усреднить по углу собственного вращения (3.2). Тогда угловое движение МКА по углу атаки под действием гравитационного момента и аэродинамического момента в случае усреднения по углу собственного вращения описывается уравнением:

$$\ddot{\alpha} - a_x(H) \sin \alpha \left(|\cos \alpha| + \frac{4}{\pi} k_s |\sin \alpha| \right) - c(H) \sin 2\alpha = 0. \quad (4.1)$$

Здесь $a_x(H) = a_x = -\Delta \tilde{x}_0 S_x l q(H) / J_n$ – коэффициент, обусловленный составляющей аэродинамического момента, вызванной смещением центра масс вдоль продольной оси; $c(H) = 3(J_n - J_x)(\omega_{\text{орб}}(H))^2 / (2J_n)$ – коэффициент, обусловленный действием гравитационного момента.

Данное уравнение аналогично уравнению (3.12) с тем отличием, что в уравнении (4.1) $a_z(H) = 0$ и произведено усреднение по углу собственного вращения, тогда как в уравнении (3.12) $a_z(H) \neq 0$ и угол собственного вращения принят равным нулю.

При сохранении допущения $H = \text{const}$ для системы (4.1) может быть записан интеграл энергии:

$$\dot{\alpha}^2 / 2 + a_x u_1(\alpha) + c \cos^2 \alpha = E_0, \quad (4.2)$$

где

$$u_1(\alpha) = \frac{1}{2} \text{sign}(\cos(\alpha)) \cos^2 \alpha + \frac{2k_S}{\pi} \text{sign}(\sin(\alpha)) \left(\frac{\sin 2\alpha}{2} - \alpha + 2\pi \cdot \left\lfloor \frac{\alpha + \pi}{2\pi} \right\rfloor \right), \quad (4.3)$$

$[x]$ – антье x (наибольшее целое число, не превосходящее x),

$E_0 = a_x u(\alpha_0) + c \cos^2 \alpha_0 + \frac{\dot{\alpha}_0^2}{2}$ – определяется через начальные условия углового движения.

По аналогии с ранее выполненными исследованиями в разделе 3 величина максимального угла атаки α_{max} МКА при колебаниях определяется из интеграла энергии (4.2) при $\dot{\alpha} = 0$. Из величин, входящих в выражение для α_{max} , наибольший разброс значений имеет величина угловой скорости $\dot{\alpha}_0$. Тогда, пренебрегая разбросами других величин, получим аналитические выражения для функции распределения величины максимального угла атаки α_{max} :

– если модуль величины начальной угловой скорости $\dot{\alpha}_0$ имеет распределение Рэлея, то функция распределения максимального угла атаки определяется по формуле:

$$F(\alpha_{max}) = 1 - e^{\frac{-a_x(u(\alpha_{max}) - u(\alpha_0)) - c(\cos^2 \alpha_{max} - \cos^2 \alpha_0)}{\sigma^2}}; \quad (4.4)$$

– если модуль величины $\dot{\alpha}_0$ распределен по равномерному закону в диапазоне $[0, \dot{\alpha}_{0max}]$, то функция распределения максимального угла атаки определяется по формуле:

$$F(\alpha_{max}) = \frac{\sqrt{2a_x(u(\alpha_{max}) - u(\alpha_0)) + 2c(\cos^2 \alpha_{max} - \cos^2 \alpha_0)}}{\dot{\alpha}_{0max}}. \quad (4.5)$$

Полученные аналитические выражения для функции распределения максимального угла атаки положим в основу получения формул для выбора проектно-баллистических параметров (запаса статической устойчивости, геометрических размеров, поперечного момента инерции) аэродинамически стабилизированного МКА. Подставляя выражение для коэффициента $a_x(H)$, обусловленного

аэродинамическим восстанавливающим моментом в (4.4) и (4.5), пренебрегая величиной коэффициента c , обусловленного действием гравитационного момента, разрешая (4.4) и (4.5), относительно проектных параметров, объединённых в конструктивный параметр $d = \frac{\Delta x}{J_n}$, можно сформировать требование к его величине.

Для того, чтобы максимальный угол атаки МКА α_{max} был меньше допустимого значения α_{max}^* с вероятностью не меньшей чем p^* , необходимо выполнение следующего условия:

– в случае, если начальная угловая скорость $\dot{\alpha}_0$ имеет распределение Рэлея

$$d = \frac{\Delta x}{J_n} \geq \frac{\ln(1-p^*)\sigma^2}{[c_0 S_x q(H)(u(\alpha_{max}^*) - u(\alpha_0))]}; \quad (4.6)$$

– в случае распределения начальной угловой скорости $\dot{\alpha}_0$ по равномерному закону в диапазоне $[0, \dot{\alpha}_{0max}]$

$$d = \frac{\Delta x}{J_n} \geq \frac{(\dot{\alpha}_{0max} p^*)^2}{2[c_0 S_x q(H)(u(\alpha_0) - u(\alpha_{max}^*))]}. \quad (4.7)$$

Также для предварительных проработок можно использовать аппроксимацию синусом

$$a_0 \approx m_\alpha(\pi/2) = -c_0 \Delta \bar{x} \frac{4k_s}{\pi}$$

и соответствующие упрощённые выражения (3.9) и (3.11). Разрешая их относительно проектных параметров, объединённых в конструктивный параметр $d = \frac{\Delta x}{J_n}$, получим требование к его величине. Для того чтобы максимальный угол атаки МКА стандарта кубсат α_{max} был меньше допустимого значения с вероятностью не меньшей чем p^* , необходимо выполнение следующего условия для конструктивного параметра МКА [25]:

– если величина начальной угловой скорости $\dot{\alpha}_0$ отвечает распределению Рэлея

$$d = \frac{\Delta x}{J_n} \geq \frac{\pi \sigma^2 \ln(1 - p^*)}{4c_0 S_x k_S (\cos \alpha_{max}^* - \cos \alpha_0) q(H)};$$

– при распределении начальной угловой скорости $\dot{\alpha}_0$ по равномерному закону в диапазоне $[0, \dot{\alpha}_{0max}]$

$$d = \frac{\Delta x}{J_n} \geq \frac{\pi (\dot{\alpha}_{0max} p^*)^2}{8c_0 S_x k_S (\cos \alpha_0 - \cos \alpha_{max}^*) q(H)}.$$

Используя (4.6) и (4.7), можно построить номограммы для оценки возможности обеспечения требуемого значения конструктивного параметра. Например, на рис. 4.2 справа приведены зависимости требуемого конструктивного параметра МКА от высоты орбиты H и от величины параметра $\dot{\alpha}_{0max}$ (начальная поперечная угловая скорость имеет равномерное распределение) для значений максимального угла атаки $\alpha_{max}^* = 20^\circ$, вероятности $p^* = 0,95$ и начального угла атаки $\alpha_0 = 0^\circ$, слева приведены значения конструктивного параметра МКА формата кубсат 3U с различными значениями поперечного момента инерции в зависимости от запаса статической устойчивости Δx . В частности, на рис. 4.2 отражена последовательность выбора параметров МКА для высоты орбиты $H = 360$ км при заданных ограничениях $\alpha_{max}^* = 20^\circ$, $p^* = 0,95$, $\alpha_0 = 0$, $\dot{\alpha}_{0max} = 0,05^\circ/\text{с}$ на условия движения относительно центра масс, формируемых целевой задачей полёта. Можно сделать вывод, что значение конструктивного параметра МКА для обеспечения заданного движения должно отвечать условию $d \geq 3,27 \frac{1}{\text{кг}\cdot\text{м}}$ (правая часть рисунка, при этом значения проектных параметров выбираются с учётом левой части рисунка). Расчёты проводились для стандартной плотности атмосферы Земли [15]. Данные номограммы можно использовать как для выбора проектных параметров МКА,

так и для задания требований к разбросу начальной продольной угловой скорости.

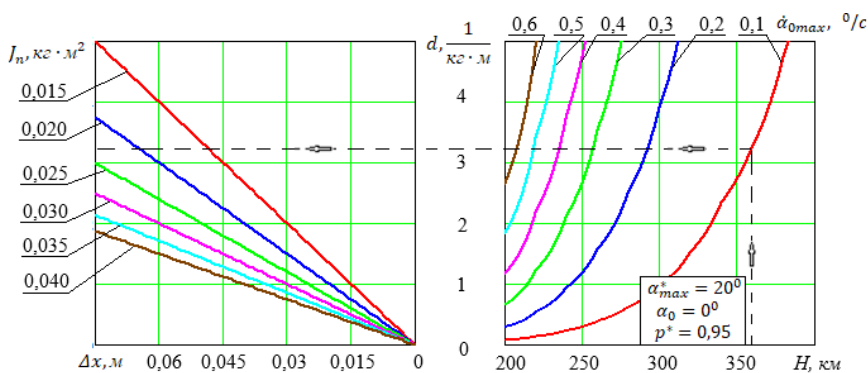


Рис. 4.2. Пример номограммы для выбора конструктивного параметра МКА с аэродинамической одноосной стабилизацией

Если аэродинамический момент незначительно больше гравитационного, то по формулам (4.4), (4.5) можно провести переоценку вероятности выполнения требований к максимальному углу атаки или задать новые ограничения на величины угловых скоростей, порождаемых системой отделения, а при использовании комбинированной системы стабилизации – на момент окончания работы активной системы предварительного успокоения.

Если модуль величины $\dot{\alpha}_0$ имеет распределение Рэлея, то ограничение на масштабный параметр распределения σ определяется по формуле:

$$\sigma \leq \sqrt{\frac{-a_x(u(\alpha_{max})-u(\alpha_0))-c(\cos^2 \alpha_{max}-\cos^2 \alpha_0)}{\ln(1-p^*)}}. \quad (4.8)$$

Если модуль величины $\dot{\alpha}_0$ распределён по равномерному закону в диапазоне $[0, \dot{\alpha}_{0max}]$, то ограничение на величину $\dot{\alpha}_{0max}$ определяется по формуле:

$$\dot{\alpha}_{0max} \leq \frac{\sqrt{2a_x(u(\alpha_{max})-u(\alpha_0))+2c(\cos^2 \alpha_{max}-\cos^2 \alpha_0)}}{p^*}. \quad (4.9)$$

На предлагаемый вероятностный подход к выбору проектных параметров аэродинамически стабилизируемого МКА класса кубсат получен Евразийский патент [27]. В основу изобретения поставлена задача расширения функционально-эксплуатационных возможностей МКА стандарта кубсат с использованием аэродинамической стабилизации с заданной вероятностью при использовании унифицированных систем отделения от носителя.

Эта задача решается тем, что после отделения МКА стандарта кубсат от транспортно-пускового контейнера в направлении вектора скорости, происходит создание дополнительных аэродинамических поверхностей МКА путём продольного удлинения конструкции. Величина продольного удлинения конструкции выбирается таким образом, чтобы при колебаниях максимальный угол атаки был меньше допустимого с заданной вероятностью на заданной высоте полёта.

Данный подход был реализован при проектировании НС SamSat-QB50, который был создан в рамках международного университетского проекта и предназначался для исследования тропосферы Земли в составе группировки наноспутников стандарта кубсат [4],[5]. Масса спутника составляет $m = 1,95$ кг; $S_x = 0,01$ м².

В транспортной конфигурации НС имеет длину $l = 0,22$ м и смещение центра масс вдоль продольной оси $\Delta x = 0,00885$ м, моменты инерции $J_x = 0,0044$ кг · м²; $J_y = J_z = J_n = 0,011$ кг · м². Величина относительного запаса статической устойчивости $\Delta \bar{x} = 0,04$. После вывода на орбиту происходит трансформация спутника, которая заключается в выдвижении стабилизатора, состоящего из полого 1U-блока (рис. 4.3). Это приводит к увеличению характерной длины $l = 0,301$ м и большему смещению его центра масс

относительно центра давления $\Delta x = 0,05485$ м, моменты инерции $J_x = 0,0044$ кг · м² $J_y = J_z = J_n = 0,016$ кг · м². Величина относительного запаса статической устойчивости $\Delta \bar{x} = 0,182$. При таком значении согласно рис. 4.1 для стандартной модели плотности атмосферы аэродинамическую стабилизацию можно использовать до высот 450 км. Данное значение увеличилось в 4,7 раза по сравнению с транспортной конфигурацией. Следует отметить, что увеличение длины НС приводит также к изменению соотношений моментов инерции, а, следовательно, и влияния гравитационного момента. В данном случае угловое ускорение, обусловленное гравитационным моментом, увеличилось незначительно (примерно в 1,1 раз).

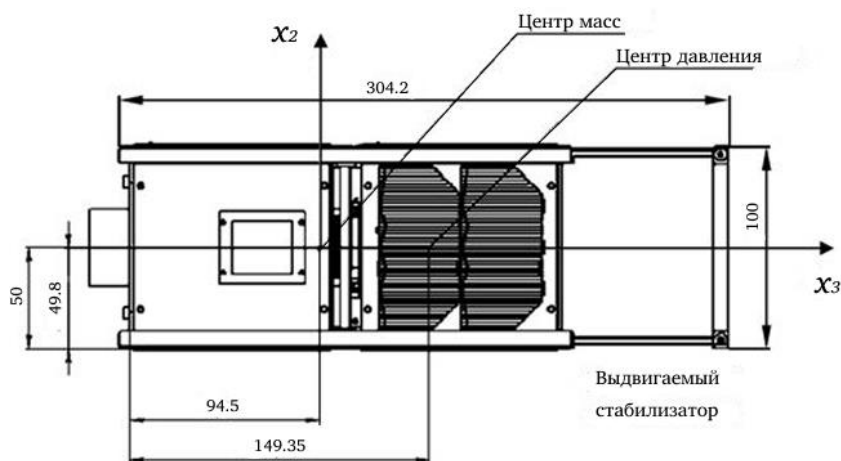


Рис. 4.3. Чертёж аппарата SamSat-QB50

На рисунке 4.4 для НС SamSat-QB50 приведены ограничения на начальную поперечную угловую скорость $\dot{\alpha}_{0max}$ (распределена по равномерному закону) от величины начального угла атаки α_0 и величины ограничения для максимального угла атаки α_{max}^* с вероятностью $p^* = 0,95$ для высоты орбиты $H = 400$ км до

(рис. 4.4а) и после трансформации (рис. 4.4б). Расчёт производился по формуле (4.9).

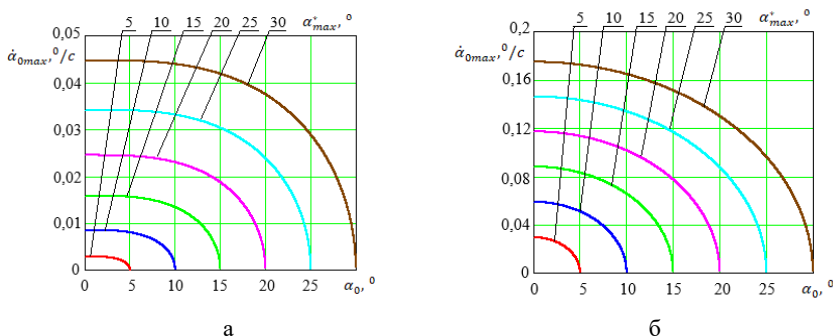


Рис. 4.4. Пример номограммы для выбора начальных условий неуправляемого движения НС SamSat-QB50:
а – до трансформации; б – после трансформации

Можно заключить, что использование аэродинамического стабилизатора даёт существенное ослабление ограничений на величину начальной поперечной угловой скорости.

4.3. Выбор проектно-динамических параметров МКА для обеспечения трёхосной аэродинамически-гравитационной стабилизации

На рис. 4.1 показана область возможной реализации аэродинамически-гравитационной трёхосной стабилизации (область 1) МКА на низких круговых орбитах для случая, когда определяющим движением аппарата относительно центра масс является аэродинамический момент, который и обеспечивает стабилизацию продольной оси МКА. При этом стабилизация поперечных осей МКА осуществляется за счёт гравитационного момента.

Стабилизация продольной оси МКА по вектору скорости, как было показано выше, может быть обеспечена за счёт выбора проектных параметров: запаса статической устойчивости, геометрических размеров, поперечного момента инерции. В то же время возможность стабилизации поперечных осей МКА может быть достигнута за счёт гравитационного момента, вызванного созданием определённой разности значений главных центральных моментов инерции относительно поперечных осей. При этом гравитационный момент стремится ориентировать поперечную ось Oy – ось наибольшего момента инерции (J_y) МКА так, чтобы она совпала с перпендикуляром к плоскости орбиты.

В предыдущем разделе рассматривался случай одноосной аэродинамической стабилизации динамически симметричного МКА, который совершает вращение по углу собственного вращения. Для обеспечения трёхосной стабилизации необходимо, чтобы МКА был динамически несимметричным ($J_y \neq J_z$) и центр давления был смещён относительно центра масс по продольной оси ($x_d \neq 0$, $y_d = z_d = 0$). При этом он будет совершать небольшие колебания в окрестности устойчивого положения равновесия. Поэтому при рассмотрении движения по углу атаки следует использовать модель (3.12), в которой $a_z(H) = 0$. Для неё справедлив интеграл энергии (3.14) и формулы (3.17), (3.18) для функции распределения величины максимального угла атаки α_{max} .

Для выбора проектно-баллистических параметров можно воспользоваться формулами (4.6), (4.7) с учётом того, что выражение для $u(\alpha)$ следует определять по формуле (3.15), а в качестве поперечного момента инерции J_n следует использовать наибольший момент инерции J_y .

Перейдём к рассмотрению стабилизации поперечных осей МКА за счёт гравитационного момента, полагая, что его продольная ось стабилизирована относительно вектора скорости центра

масс (угол атаки мал). Тогда, колебания поперечных осей в плоскости, перпендикулярной вектору скорости центра масс, приближённо можно описать уравнением вида [24,28]:

$$\ddot{\delta} - \frac{2\mu}{(R_3+H)^3} \left(\frac{J_z - J_y}{J_x} \right) \sin 2\delta = 0, \quad (4.10)$$

где δ угол крена (угол отклонения поперечной оси Oz от плоскости полёта, для которой момент инерции J_z принимает промежуточное значение между J_x и J_y , то есть удовлетворяет условию $J_x < J_z < J_y$).

Изменение высоты круговой орбиты вследствие сопротивления атмосферы происходит очень медленно, и при рассмотрении углового движения МКА на одном или нескольких витках можно принять допущение о постоянстве высоты полёта $H = const$. В этом случае для системы (4.10) справедлив интеграл энергии, записанный в виде:

$$\delta^2/2 + d_0 \cos 2\delta = E_0, \quad (4.11)$$

где $E_0 = d_0 \cos 2\delta_0 + \frac{\omega_{x0}^2}{2}$ определяется через начальные условия углового движения; $\omega_{x0} = \dot{\delta}_0$ – начальная продольная угловая скорость; $d_0 = \frac{\mu}{(R_3+H)^3} \left(\frac{J_z - J_y}{J_x} \right)$.

Тогда величину максимального угла крена δ при колебаниях в диапазоне $[0, \pi/2]$ можно найти из интеграла энергии (4.11) при $\dot{\delta} = 0$:

$$\delta_{max} = \frac{1}{2} \arccos \left(\frac{E_0}{d_0} \right). \quad (4.12)$$

Из величин, входящих в (4.12), наибольший разброс значений имеет величина продольной угловой скорости ω_{x0} . Тогда, пренебрегая разбросами других величин, вычисляя распределение функции δ_{max} по распределению аргумента ω_{x0} в соответствии с [21], получим аналитические выражения для функции распределения величины максимального угла крена δ_{max} для двух вариантов законов распределения модуля величины ω_{x0} .

Если величина ω_{x0} имеет нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и среднеквадратичным отклонением, тогда функция распределения модуля величины ω_{x0} определяется выражением:

$$F(\omega_{x0}) = 2\Phi_0\left(\frac{\omega_{x0}}{\sigma}\right),$$

а функция распределения величины максимального угла крена δ_{max} :

$$F(\delta_{max}) = 2\Phi_0\left(\frac{\sqrt{2d_0(\cos 2\delta_{max} - \cos 2\delta_0)}}{\sigma}\right), \quad (4.13)$$

где $\Phi_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-t^2/2} dt$ – функция Лапласа.

Если модуль величины ω_{x0} распределён по равномерному закону в диапазоне $[0, \omega_{x0max}]$:

$$F(\omega_{x0}) = \begin{cases} \frac{1}{\omega_{x0max}}, & \omega_{x0} \in [0, \omega_{x0max}] \\ 0, & \omega_{x0} \notin [0, \omega_{x0max}], \end{cases}$$

тогда функция распределения величины максимального угла крена δ_{max} определяется выражением:

$$F(\delta_{max}) = \frac{\sqrt{2d_0(\cos 2\delta_{max} - \cos 2\delta_0)}}{\omega_{x0max}}. \quad (4.14)$$

Задавая значение вероятности p^* реализации допустимого значения максимального угла крена δ_{max} , разрешая выражения (4.13) и (4.14) относительно проектных параметров, объединённых в конструктивный параметр МКА $d_k = \frac{J_y - J_z}{J_x}$, можно получить требование к его величине. Для того, чтобы максимальный угол крена δ_{max} был меньше допустимого значения δ_{max}^* с вероятностью, не меньшей чем p^* , при заданных разбросах продольной угловой скорости, порождаемых системой отделения (а при комбинированной системе стабилизации на момент окончания работы активной системы

предварительного успокоения), необходимо выполнение следующего условия для конструктивного параметра МКА d_k :

– в случае, если величина ω_{x0} имеет нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и среднеквадратичным отклонением σ :

$$d_k = \frac{J_y - J_z}{J_x} \geq \frac{(R_3 + H)^3}{2\mu} \frac{\sigma^2(t^*)^2}{(\cos 2\delta_0 - \cos 2\delta_{max}^*)}, \quad (4.15)$$

где t^* – аргумент функции Лапласа по заданной вероятности: $\Phi_0(t^*) = p^*/2$;

– в случае распределения модуля начальной продольной угловой скорости ω_{x0} по равномерному закону в диапазоне $[0, \omega_{x0max}]$:

$$d_k = \frac{J_y - J_z}{J_x} \geq \frac{(R_3 + H)^3}{2\mu} \frac{(\omega_{x0max} p^*)^2}{(\cos 2\delta_0 - \cos 2\delta_{max}^*)}. \quad (4.16)$$

Используя полученные выражения (4.15) и (4.16), можно построить номограммы для оценки возможности обеспечения требуемого значения конструктивного параметра d_k .

Так, например, на рис. 4.5 справа приведены зависимости требуемого конструктивного параметра МКА d_k от значения допустимого угла крена δ_{max}^* и от значения ω_{x0max} (начальная продольная угловая скорость распределена по равномерному закону). Номограммы рассчитаны для начального угла крена $\delta_0 = 0$, вероятности $p^* = 0,95$ и высоты полёта $H = 380$ км. В левой части рисунка отражены зависимости значения конструктивного параметра МКА d_k от значений моментов инерции J_z и J_x , для выбранного ранее значения наибольшего момента инерции, равного $J_y = 0,025$ кг · м².

Номограммы можно использовать как для выбора проектных параметров МКА, так и для задания требований к разбросу начальной продольной угловой скорости. На рис. 4.6б приведена номограмма для выбора начальных условий движения (начального угла крена δ_0 и максимального значения начальной продольной угловой

скорости ω_{x0max}) НС СамСат-Ионосфера для случая равномерного распределения при вероятности $p^* = 0,95$ на высоте полёта $H = 380$ км.

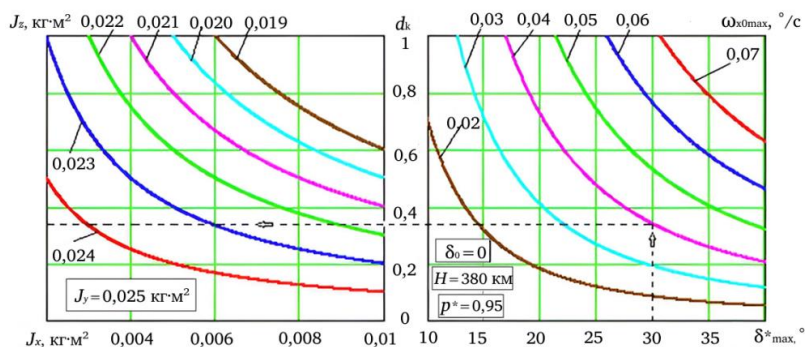


Рис. 4.5. Пример номограммы для выбора конструктивного параметра МКА с аэродинамически-гравитационной стабилизацией

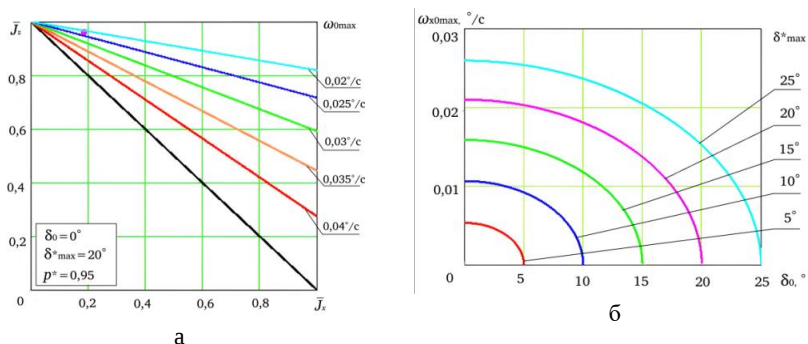


Рис. 4.6. Пример номограммы:

а – для выбора соотношений моментов инерции при различных значениях модуля начальной продольной угловой скорости ω_{x0max} ; б – для задания ограничений на величину начальной продольной угловой скорости ω_{x0max} при рассмотрении движения по углу крена δ

4.4. Выбор проектно-динамических параметров МКА для обеспечения одноосной гравитационной стабилизации по местной вертикали

Рассмотрим вариант выбора проектных параметров динамически симметричного МКА стандарта кубсат ($J_y = J_z = J_n$) для обеспечения гравитационной пассивной стабилизации его продольной оси вдоль местной вертикали (область 3 на рис. 4.1).

Этот метод пассивной одноосной стабилизации динамически симметричного МКА применим для диапазона орбит, на которых гравитационный момент играет доминирующую роль и стремится сориентировать аппарат таким образом, чтобы ось наименьшего момента инерции совпадала с местной вертикалью [29].

Подставляя выражение для коэффициента c , обусловленного гравитационным моментом в (3.9) и (3.11), пренебрегая величиной коэффициента a , обусловленного действием аэродинамического момента, и разрешая их относительно проектных параметров (моментов инерции), объединённых в конструктивный параметр $d_g = \frac{J_x}{J_n}$, получим требование к его величине. Для того чтобы максимальный угол отклонения продольной оси МКА от гравитационной вертикали β_{max} ($\beta_{max} = \alpha_{max} - \pi/2$) был меньше допустимого значения β_{max}^* с вероятностью не меньшей чем p^* , необходимо выполнение следующего условия для конструктивного параметра МКА d_g [24,30]:

– в случае если начальная угловая скорость $\dot{\beta}_0$ имеет распределение Рэлея

$$d_g = \frac{J_x}{J_n} \leq 1 - \frac{4(R_3+H)^3}{3\mu} \frac{\sigma^2 \ln(1-p^*)}{(\cos 2\beta_{max}^* - \cos 2\beta_0)}; \quad (4.17)$$

– в случае распределения начальной угловой скорости по равномерному закону в диапазоне $[0, \dot{\beta}_{0max}]$

$$d_g = \frac{J_x}{J_n} \leq 1 - \frac{4(R_3+H)^3}{3\mu} \frac{(\dot{\beta}_{0max} p^*)^2}{-2(\cos 2\beta_{max}^* - \cos 2\beta_0)}, \quad (4.18)$$

где β_0 начальное значение отклонения продольной оси МКА от гравитационной вертикали.

Используя полученные выражения (4.17) и (4.18), можно построить номограммы для оценки возможности обеспечения требуемого значения конструктивного параметра d_g . Так, например, на рис. 4.7 справа приведены зависимости требуемого конструктивного параметра гравитационно-стабилизированного МКА от допустимого значения максимального угла отклонения продольной оси МКА от вертикали β_{max}^* и от значения $\dot{\beta}_{0max}$ (начальная поперечная угловая скорость распределена по равномерному закону) для вероятности $p^* = 0,95$, при $\beta_0 = 0^0$, $H_0 = 500$ км, слева приведены значения конструктивного параметра гравитационно-стабилизированного МКА с различными значениями поперечного и продольного моментов инерции.

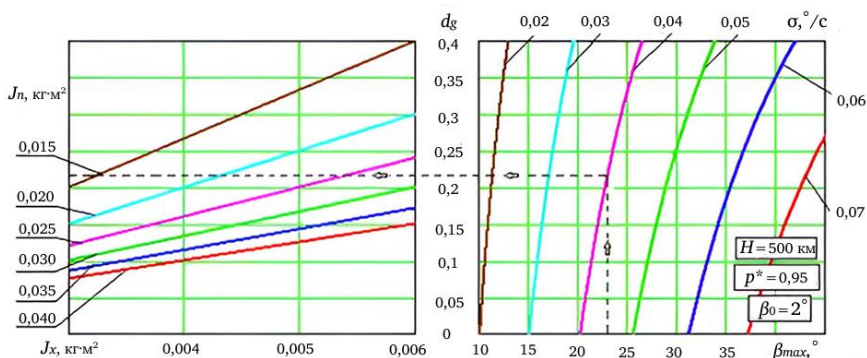


Рис. 4.7. Пример номограммы для выбора конструктивного параметра МКА с гравитационной стабилизацией

4.5. Выбор проектно-динамических параметров МКА для обеспечения трёхосной гравитационной стабилизации

Гравитационная трёхосная стабилизация возможна только для динамически несимметричного аппарата ($J_y \neq J_z$), она отмечена на рис. 4.1 как область 3. Известно, что гравитационный момент стремится ориентировать МКА так, чтобы ось наименьшего главного центрального момента инерции (продольная ось) совпала с местной вертикалью, ось наибольшего главного центрального момента инерции – с перпендикуляром к плоскости орбиты и ось главного центрального момента инерции с промежуточным значением – с направлением движения [29].

В данной работе задача обеспечения трёхосной гравитационной ориентации МКА в пространстве рассматривается в вероятностной постановке применительно к угловому движению аппарата.

Стабилизацию продольной оси МКА в первом приближении можно обеспечить путём выбора проектных параметров (наименьшего момента инерции J_x и поперечного момента инерции J_n) по формулам и номограммам, приведённым выше для одноосной гравитационной стабилизации, принимая за величину наибольшего момента инерции J_y величину поперечного момента инерции J_n .

Для решения задачи стабилизации продольной оси динамически несимметричного МКА с заданной вероятностью использовалась приближённая модель углового движения, которая описывает изменение угла β ($\beta = \alpha - \pi/2$)[24]:

$$\ddot{\beta} + \frac{3\mu}{2(R_3+H)^3} \left(\frac{J_z - J_x}{J_y} \right) \sin 2\beta = 0.$$

Если модуль величины начальной поперечной скорости ω_{n0} имеет распределение Рэлея, с масштабным параметром распределе-

ния σ , то функция распределения максимального угла β_{max} определяется по формуле:

$$F(\beta_{max}) = 1 - e^{\frac{\frac{-3\mu}{2(R_3+H)^3} \left(\frac{J_z - J_x}{J_y} \right) (\sin^2 \beta_{max} - \sin^2 \beta_0)}{\sigma^2}}. \quad (4.19)$$

где β_0 начальное значение угла β .

Если модуль величины ω_{n0} распределен по равномерному закону в диапазоне $[0, \omega_{n0max}]$, то функция распределения максимального угла β_{max} определяется по формуле:

$$F(\beta_{max}) = \frac{\sqrt{\frac{3\mu}{(R_3+H)^3} \left(\frac{J_z - J_x}{J_y} \right) (\sin^2 \beta_{max} - \sin^2 \beta_0)}}{\omega_{n0max}}. \quad (4.20)$$

Для решения задачи обеспечения стабилизации поперечных осей использовались следующие упрощённые модели углового движения (при получении которых, полагалось, что пространственный угол атаки близок к 90^0 , соответственно угол β близок к 0^0).

Для получения аналитических законов распределения угла прецессии ψ использовалась модель [24]:

$$\ddot{\psi} + \frac{2\mu}{(R_3+H)^3} \left(\frac{J_y - J_x}{J_z} \right) \sin 2\psi = 0.$$

Если модуль величины начальной поперечной скорости ω_{n0} имеет распределение Рэля, то функция распределения максимального угла прецессии ψ_{max} определяется по формуле:

$$F(\psi_{max}) = 1 - e^{\frac{\frac{-2\mu}{(R_3+H)^3} \left(\frac{J_y - J_x}{J_z} \right) (\sin^2 \psi_{max} - \sin^2 \psi_0)}{\sigma^2}}, \quad (4.21)$$

где ψ_0 начальное значение угла прецессии.

Если модуль величины ω_{n0} распределен по равномерному закону в диапазоне $[0, \omega_{n0max}]$, то функция распределения максимального угла прецессии ψ_{max} определяется по формуле:

$$F(\psi_{max}) = \frac{\sqrt{\frac{4\mu}{(R_3+H)^3} \left(\frac{J_y - J_x}{J_z} \right) (\sin^2 \psi_{max} - \sin^2 \psi_0)}}{\omega_{n0max}}. \quad (4.22)$$

Для получения аналитических законов распределения угла собственного вращения φ (угол между плоскостью пространственного угла атаки и осью Oz) использовалась модель:

$$\ddot{\varphi} - \frac{\mu}{2(R_3+H)^3} \left(\frac{J_z - J_y}{J_x} \right) \sin 2\varphi = 0. \quad (4.23)$$

Если величина начальной продольной скорости ω_{x0} имеет нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием, и среднеквадратичным отклонением σ , то функция распределения максимального угла собственного вращения φ_{max} определяется по формуле:

$$F(\varphi_{max}) = 2\Phi_0 \left(\frac{\sqrt{\frac{\mu}{2(R_3+H)^3} \left(\frac{J_z - J_y}{J_x} \right) (\cos 2\varphi_{max} - \cos 2\varphi_0)}}{\sigma} \right), \quad (4.24)$$

где φ_0 начальное значение угла собственного вращения.

Если модуль величины ω_{x0} распределён по равномерному закону в диапазоне $[0, \omega_{x0max}]$, то функция распределения величины максимального угла φ_{max} определяется выражением:

$$F(\varphi_{max}) = \frac{\sqrt{\frac{\mu}{2(R_3+H)^3} \left(\frac{J_z - J_y}{J_x} \right) (\cos 2\varphi_{max} - \cos 2\varphi_0)}}{\omega_{x0max}}. \quad (4.25)$$

Рассмотрим задачу выбора проектных параметров при использовании трёхосной гравитационной стабилизации при заданных высоте полёта, максимальных начальных углах и угловых скоростях, и ограничениях на величины максимальных отклонений по углам. Тогда согласно (4.19) – (4.22), (4.24), (4.25), можно записать следующие выражения для требуемых соотношений моментов инерции.

Если модуль величины поперечной угловой скорости ω_{n0} имеет распределение Рэлея с масштабным параметром распределе-

ния σ , то ограничения на соотношения моментов инерции определяются по формулам:

– при рассмотрении движения по углу β

$$\frac{J_z - J_x}{J_y} \geq \frac{-2(R_3 + H)^3}{3\mu} \frac{\sigma^2 \ln(1-p^*)}{(\sin^2 \beta_{max}^* - \sin^2 \beta_0)} ; \quad (4.26)$$

– при рассмотрении движения по углу ψ

$$\frac{J_y - J_x}{J_z} \geq \frac{-(R_3 + H)^3}{2\mu} \frac{\sigma^2 \ln(1-p^*)}{(\sin^2 \psi_{max}^* - \sin^2 \psi_0)} . \quad (4.27)$$

Отметим, что при задании одинаковой вероятности p^* и одинаковых начальных и максимальных значений углов β и ψ условие (4.26) включает выполнение условия (4.27).

Если величина начальной продольной угловой скорости ω_{x0} имеет нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием, и среднеквадратичным отклонением σ , то для стабилизации осей по углу φ ограничение на соотношения моментов инерции имеет вид:

$$\frac{J_y - J_z}{J_x} \geq \frac{(R_3 + H)^3}{2\mu} \frac{\sigma^2 (t^*)^2}{(\cos 2\varphi_0 - \cos 2\varphi_{max}^*)} , \quad (4.28)$$

где t^* – аргумент функции Лапласа по заданной вероятности: $\Phi_0(t^*) = p^*/2$; $\Phi_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-t^2/2} dt$ – функция Лапласа.

Если модуль величины ω_{n0} распределен по равномерному закону в диапазоне $[0, \omega_{n0max}]$, то ограничения на соотношения моментов инерции имеют вид:

– при рассмотрении движения по углу β

$$\frac{J_z - J_x}{J_y} \geq \frac{(R_3 + H)^3}{3\mu} \frac{(\omega_{n0max} p^*)^2}{(\sin^2 \beta_{max}^* - \sin^2 \beta_0)} ; \quad (4.29)$$

– при рассмотрении движения по углу ψ

$$\frac{J_y - J_x}{J_z} \geq \frac{(R_3 + H)^3}{4\mu} \frac{(\omega_{n0max} p^*)^2}{(\sin^2 \psi_{max}^* - \sin^2 \psi_0)} . \quad (4.30)$$

Отметим, что при задании одинаковой вероятности p^* и одинаковых начальных и максимальных значений углов β и ψ условие (4.29) включает выполнение условия (4.30).

При распределении модуля начальной продольной угловой скорости ω_{x0} по равномерному закону в диапазоне $[0, \omega_{x0max}]$ для стабилизации осей по углу φ требуется выполнение следующего ограничения на соотношения моментов инерции:

$$\frac{J_y - J_z}{J_x} \geq \frac{(R_3 + H)^3}{\mu} \frac{(\omega_{x0max} p^*)^2}{(\sin^2 \varphi_{max}^* - \sin^2 \varphi_0)}. \quad (4.31)$$

С использованием формул (4.26)–(4.28) или (4.29)–(4.31) можно построить области ограничений на соотношения моментов инерции при заданных высоте полёта, максимальных начальных углах и угловых скоростях, и ограничениях на величины максимальных отклонений по углам. Например, на рис. 4.8а приведена область соотношений моментов инерции $\bar{J}_x, \bar{J}_z$, выделенная жёлтым цветом, где выполняются условия стабилизации МКА на высоте $H = 600$ км при следующих ограничениях и начальных условиях: $\beta_{max}^* = \psi_{max}^* = \varphi_{max}^* = 20^\circ$, $\beta_0 = \psi_0 = \varphi_0 = 0$, $\omega_{n0max} = \frac{0,02^0}{c}$, $\omega_{x0max} = \frac{0,01^0}{c}$ в случае равномерного распределения угловых скоростей с вероятностью $p^* = 0,95$. Синяя прямая отвечает уравнению (4.29), голубая – (4.30), красная – (4.31). На рис. 4.8б приведена область соотношений моментов инерции $\bar{J}_x, \bar{J}_z$ при тех же параметрах для следующих начальных угловых скоростей $\omega_{n0max} = \frac{0,03^0}{c}$, $\omega_{x0max} = \frac{0,015^0}{c}$. Фиолетовой точкой на рисунках обозначены соотношения главных моментов инерции для МКА с параметрами $J_y = 0,054 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, $J_z = 0,052 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ и $J_x = 0,01 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$. Из рисунка 4.8б видно, что для МКА с такими параметрами при указанных начальных угловых скоростях не выполняется ограничения по максимальному углу $\varphi_{max}^* = 20^\circ$.

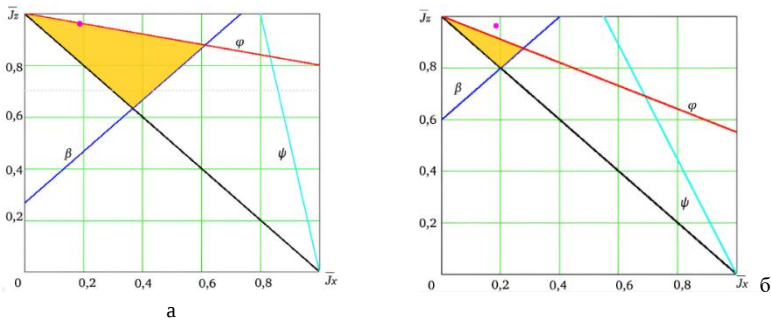


Рис. 4.8. Ограничения на соотношения моментов инерции для обеспечения гравитационной трёхосной стабилизации:

а – при $\omega_{n0max} = 0,02^0/c$, $\omega_{x0max} = 0,01^0/c$;

б – при $\omega_{n0max} = 0,03^0/c$, $\omega_{x0max} = 0,015^0/c$

Для МКА с известными параметрами задавая значение вероятности p^* реализации допустимых значений максимальных углов β_{max}^* , ψ_{max}^* и φ_{max}^* , используя формулы (4.26) – (4.31), можно задать ограничения на величины угловых скоростей, порождаемых системой отделения, а при использовании комбинированной системы стабилизации – на момент окончания работы активной системы предварительного успокоения.

Если модуль величины ω_{n0} имеет распределение Рэлея, то ограничение на масштабный параметр распределения σ определяется по формуле:

– при рассмотрении движения по углу β

$$\sigma \leq \sqrt{\frac{-3\mu}{2(R_3+H)^3} \left(\frac{I_z - I_x}{J_y} \right) (\sin^2 \beta_{max}^* - \sin^2 \beta_0)}; \quad (4.32)$$

– при рассмотрении движения по углу ψ

$$\sigma \leq \sqrt{\frac{-2\mu}{(R_3+H)^3} \left(\frac{J_y - J_x}{J_z} \right) (\sin^2 \psi_{max}^* - \sin^2 \psi_0)}. \quad (4.33)$$

Следует отметить, что при задании одинаковой вероятности p^* и одинаковых начальных и максимальных значений углов β и ψ условие (4.32) включает выполнение условия (4.33).

Если модуль величины ω_{n0} распределен по равномерному закону в диапазоне $[0, \omega_{n0max}]$, то ограничение на величину ω_{n0max} определяется по формуле:

– при рассмотрении движения по углу β

$$\omega_{n0max} \leq \frac{\sqrt{\frac{3\mu}{(R_3+H)^3} \left(\frac{J_z - J_x}{J_y} \right) (\sin^2 \beta_{max}^* - \sin^2 \beta_0)}}{p^*}; \quad (4.34)$$

– при рассмотрении движения по углу ψ

$$\omega_{n0max} \leq \frac{\sqrt{\frac{4\mu}{(R_3+H)^3} \left(\frac{J_y - J_x}{J_z} \right) (\sin^2 \psi_{max}^* - \sin^2 \psi_0)}}{p^*}. \quad (4.35)$$

Следует отметить, что при задании одинаковой вероятности p^* и одинаковых начальных и максимальных значений углов β и ψ условие (4.34) включает выполнение условия (4.35).

Если величина начальной продольной угловой скорости ω_{x0} имеет нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием, и среднеквадратичным отклонением σ , то требуется выполнение ограничения на его величину

$$\sigma \leq \frac{\sqrt{\frac{\mu}{2(R_3+H)^3} \left(\frac{J_z - J_y}{J_x} \right) (\cos 2\varphi_{max}^* - \cos 2\varphi_0)}}{t^*}. \quad (4.36)$$

В случае распределения модуля начальной продольной угловой скорости ω_{x0} по равномерному закону в диапазоне $[0, \omega_{n0max}]$ требуется выполнение ограничения на величину ω_{n0max}

$$\omega_{n0max} \leq \frac{\sqrt{\frac{\mu}{2(R_3+H)^3} \left(\frac{J_z - J_y}{J_x} \right) (\cos 2\varphi_{max}^* - \cos 2\varphi_0)}}{p^*}. \quad (4.37)$$

Используя полученные выражения (4.31)–(4.37), можно построить номограммы для задания ограничений на величины начальных угловых скоростей.

Так, например, для НС СамСат-Ионосфера с параметрами, приведёнными выше, на рис. 4.9а (при рассмотрении движения по углу β) и рис. 4.9б (при рассмотрении движения по углу ψ) показаны номограммы для определения ограничений на величину начальной поперечной угловой скорости (из двух значений выбирается минимальное) в зависимости от начальных значений углов β_0 , ψ_0 и их допустимых максимальных значений β_{max}^* , ψ_{max}^* . На рис. 4.9в показана номограмма для определения ограничений на величину начальной продольной угловой скорости в зависимости от

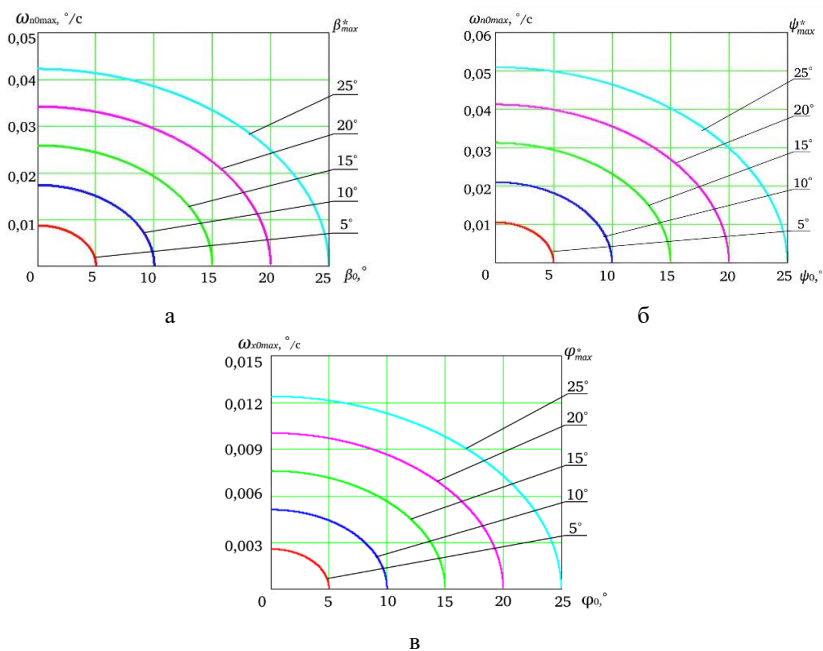


Рис. 4.9. Пример номограммы задания ограничений:

а – на величину начальной поперечной угловой скорости ω_{n0max} при рассмотрении движения по углу β ; б – на величину начальной продольной угловой скорости ω_{n0max} при рассмотрении движения по углу ψ ; в – на величину начальной продольной угловой скорости ω_{x0max} при рассмотрении движения по углу ϕ

начального значения угла φ_0 и его допустимого максимального значения φ_{max}^* . Номограммы рассчитаны для вероятности $p^* = 0,95$ и высоты полёта $H = 600$ км, рассматривается равномерный закон распределения продольной и поперечной угловых скоростей.

4.6. Выбор проектно-динамических параметров МКА для обеспечения трёхосной гравитационно-аэродинамической стабилизации

Как было сказано ранее гравитационно-аэродинамическая трёхосная стабилизация применима при любом соотношении аэродинамического и гравитационного моментов (область 4 на рис. 4.1). Данная стабилизация осуществляется путём смещения центра масс от центра давления на определённую величину по оси с промежуточным значением момента инерции МКА. В этом случае для стабилизации углового положения используются два момента: гравитационный и аэродинамический [24,31].

По аналогии с ранее выполненными исследованиями величина максимального угла атаки α_{max} МКА при колебаниях определяется из интеграла энергии (3.14) при $\dot{\alpha} = 0$. Из величин, входящих в выражение для α_{max} , наибольший разброс значений имеет величина угловой скорости $\dot{\alpha}_0$. Аналитические выражения для функции распределения величины максимального угла атаки α_{max} (3.17), (3.18) приведены в разделе 3.6.

Для получения аналитических законов распределения угла собственного вращения φ используется расширенная модель по сравнению с (4.23), которая учитывает действие аэродинамического момента:

$$\ddot{\varphi} = \frac{\mu}{2(R_3+H)^3} \left(\frac{J_z - J_y}{J_x} \right) \sin 2\varphi - \frac{k_S \Delta z c_0 S l q(H)}{J_x} \sin \varphi.$$

Законы распределения величины максимального угла φ_{max} при этом будут следующими.

Если величина начальной продольной скорости ω_{x0} имеет нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием, и среднеквадратичным отклонением σ , то функция распределения максимального угла собственного вращения φ_{max} определяется по формуле:

$$F(\varphi_{max}) = 2\Phi_0 \left(\frac{\sqrt{\frac{-2k_S \Delta z c_0 S l q(H)}{J_x} (\cos \varphi_{max} - \cos \varphi_0) + \frac{\mu}{(R_3 + H)^3} \left(\frac{J_z - J_y}{J_x} \right) (\cos^2 \varphi_{max} - \cos^2 \varphi_0)}}{\sigma} \right) \quad (4.38)$$

Если модуль величины ω_{x0} распределён по равномерному закону в диапазоне $[0, \omega_{x0max}]$. Тогда функция распределения величины максимального угла φ_{max} определяется выражением:

$$F(\varphi_{max}) = \frac{\sqrt{\frac{-2k_S \Delta z c_0 S l q(H)}{J_x} (\cos \varphi_{max} - \cos \varphi_0) + \frac{\mu}{(R_3 + H)^3} \left(\frac{J_z - J_y}{J_x} \right) (\cos^2 \varphi_{max} - \cos^2 \varphi_0)}}{\omega_{x0max}} \quad (4.39)$$

Предлагается следующий алгоритм решения задачи обеспечения гравитационно-аэродинамической трёхосной стабилизации МКА:

1. Величины Δx , Δy необходимо сделать минимально возможными.

2. Выбрать проектные параметры, удовлетворяющие заданным ограничениям по углу прецессии ψ , с помощью формул (4.26) или (4.29) в зависимости от выбранного закона распределения.

3. Для выбранных соотношений моментов инерции выбрать запас статической устойчивости по оси Oz (Δz), при этом ограничение на величину начальной поперечной угловой скорости берётся такое же, как и при рассмотрении движения по углу прецессии ψ . Требование к величине запаса статической устойчивости Δz нахо-

дится, разрешая функции (3.17) и (3.18) относительно Δz , задавая p^* – вероятность реализации β_{max}^* – допустимого значения максимального угла отклонения продольной оси от положения, определяемого условием $\beta_{max}^* = \alpha_{max}^* - \pi/2$

– в случае, если начальная угловая скорость имеет распределение Рэлея

$$\Delta z \geq J_y [\ln(1 - p^*) \sigma^2 + c_1 (\cos^2 \alpha_{max}^* - \cos^2 \alpha_0) + a_x (u(\alpha_{max}^*) - u(\alpha_0))] / [c_0 S q(H) (v(\alpha_{max}^*) - v(\alpha_0))]; \quad (4.40)$$

– в случае распределения начальной угловой скорости по равномерному закону в диапазоне $[0, \dot{\alpha}_{0max}]$

$$\Delta z \geq J_y [(\dot{\alpha}_{0max} p^*)^2 - 2c_1 (\cos^2 \alpha_{max}^* - \cos^2 \alpha_0) - 2a_x (u(\alpha_{max}^*) - u(\alpha_0))] / [-2c_0 S q(H) (v(\alpha_{max}^*) - v(\alpha_0))]. \quad (4.41)$$

4. Определить ограничение на величину начальной продольной угловой скорости МКА ω_{x0} с помощью выражений, полученных из (4.38) и (4.39).

Если величина начальной продольной скорости ω_{x0} имеет нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием, и среднеквадратичным отклонением σ , то ограничение на σ определяется по формуле:

$$\sigma = \sqrt{\frac{-2k_S \Delta z c_0 S l q(H)}{J_x} (\cos \varphi_{max} - \cos \varphi_0) + \frac{\mu}{(R_3 + H)^3} \left(\frac{J_z - J_y}{J_x} \right) (\cos^2 \varphi_{max} - \cos^2 \varphi_0)}_{t^*}, \quad (4.42)$$

где t^* – аргумент функции Лапласа по заданной вероятности.

Если модуль величины ω_{x0} распределён по равномерному закону в диапазоне $[0, \omega_{x0max}]$, то ограничение на величину ω_{x0max} определяется по формуле:

$$\omega_{x0max} = \sqrt{\frac{-2k_S \Delta z c_0 S l q(H)}{J_x} (\cos \varphi_{max} - \cos \varphi_0) + \frac{\mu}{(R_3 + H)^3} \left(\frac{J_z - J_y}{J_x} \right) (\cos^2 \varphi_{max} - \cos^2 \varphi_0)}_{p^*}. \quad (4.43)$$

Используя полученные выражения (4.40) и (4.41), можно построить номограммы для задания требования к величине запаса статической устойчивости Δz . Так, например, для НС СамСат-Ионосфера ($J_y = 0,054 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, $J_z = 0,052 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ и $J_x = 0,01 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$) на рис. 4.10а приведены зависимости величины запаса статической устойчивости Δz от высоты полёта H и от величины $\dot{\alpha}_{0max} = \omega_{n0max}$ (начальная поперечная угловая скорость распределена по равномерному закону) для значений $\beta_{max}^* = 20^\circ$, вероятности $p^* = 0,95$, начального угла атаки $\beta_0 = 5^\circ$, смещения центра масс вдоль продольной оси $\Delta x = 0,0002 \text{ м}$. Расчёты проводились для стандартной плотности атмосферы в соответствии с ГОСТ 4401-81[15]. На рис. 4.10б показана номограмма для определения ограничений на величину начальной продольной угловой скорости в зависимости от начального значения угла φ_0 и его допустимого максимального значения φ_{max}^* . Номограмма рассчитана для вероятности $p^* = 0,95$ и высоты полёта $H = 600 \text{ км}$.

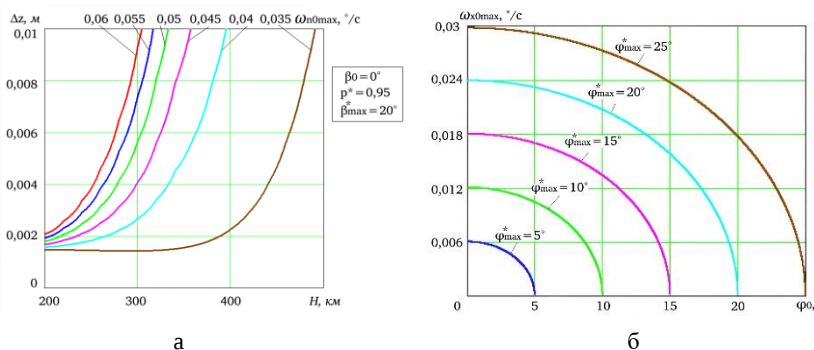


Рис. 4.10. Пример номограммы для задания требования:

а – к величине запаса статической устойчивости Δz ;

б – на величину начальной продольной угловой скорости ω_{x0max} при рассмотрении движения по углу φ

Глава 5. ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОГО УГЛОВОГО ДВИЖЕНИЯ АЭРОДИНАМИЧЕСКИ СТАБИЛИЗИРОВАННОГО МКА СТАНДАРТА КУБСАТ

Рассмотрим пространственное движение относительно центра масс динамически симметричного МКА формата кубсат 1U – 3U на низких круговых орбитах, где аэродинамический момент является преобладающим. Его влияние на движение относительно центра масс проявляется в следующем. Аэродинамический момент стремится совместить продольную ось МКА с направлением набегающего потока. Однако этому движению противодействуют гироскопические силы, вызывающие вынужденную прецессию вектора кинетического момента относительно вектора скорости центра масс. Вектор кинетического момента отклоняется в ту сторону, куда направлен вектор аэродинамического момента. Прецессию продольной оси спутника относительно вектора скорости центра масс $\vec{V}$ на промежутке времени, равном периоду полного оборота, противоположную по направлению данному вектору принято называть “обратной” прецессией, а совпадающую с направлением вектора скорости центра масс $\vec{V}$ – “прямой” прецессией [32] (рис. 5.1).

Следует отметить возможность возникновения резонансных режимов движения у МКА, совершающих полёт на низких орбитах. Для МКА стандарта кубсат, имеющих форму прямоугольного параллелепипеда, аэродинамический момент зависит от пространственного угла атаки и угла собственного вращения (1.8), а это создаёт предпосылки возникновения резонанса, который проявляется в резком изменении амплитуды колебаний по углу атаки, когда целочисленная комбинация частоты колебаний пространственного угла атаки и средней частоты собственного вращения оказывается близкой к нулю [20,25].

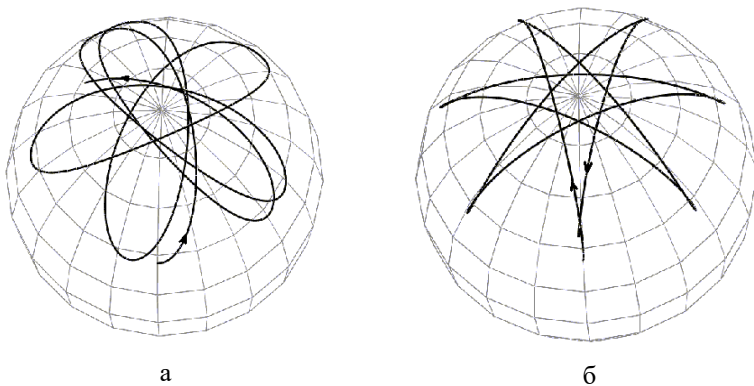


Рис. 5.1. Годограф продольной оси МКА на единичной сфере:
а – «прямая» прецессия; б – «обратная» прецессия

5.1. Модифицированная математическая модель движения аэродинамически стабилизированного МКА

Аэродинамическое угловое ускорение в плоскости угла атаки с учётом смещения центра масс от продольной оси можно записать в виде

$$M_{\alpha}(\alpha, \varphi, H) = m_1(H) \left(|\cos \alpha| + k_s \sin \alpha (|\sin \varphi| + |\cos \varphi|) \right) \cdot (\Delta x \sin \alpha - (\Delta y \sin \varphi + \Delta z \cos \varphi) \cos \alpha), \quad (5.1)$$

где $m_1(H) = -c_0 S_x q(H) / J_n$.

Для проведения анализа углового движения МКА аппроксимируем в выражении (5.1) сумму $|\sin \varphi| + |\cos \varphi|$, используя разложение в ряд Фурье:

$$|\sin \varphi| + |\cos \varphi| \approx \frac{4}{\pi} - \frac{8}{15\pi} \cos 4\varphi. \quad (5.2)$$

Тогда можно представить выражение (5.1) в виде двух слагаемых, одному из которых в силу его малости припишем малый параметр ε [20, 33]:

$$M_\alpha(\alpha, \varphi, H) = M_\alpha(\alpha, H) + \varepsilon \Phi_\alpha(\alpha, \varphi, H) \quad (5.3)$$

$$\text{где } M_\alpha(\alpha, H) = m_0(H) \left(|\cos \alpha| + \frac{4}{\pi} k_s \sin \alpha \right) \sin \alpha, \\ m_0(H) = m_1(H) \cdot \Delta x, \quad (5.4)$$

$$\varepsilon \Phi_\alpha(\alpha, \varphi, H) = -\frac{8}{15\pi} m_0(H) k_s \sin^2 \alpha \cos 4\varphi - \\ -m_1(H) (|\cos \alpha| + k_s \sin \alpha (|\sin \varphi| + |\cos \varphi|)) \cdot \\ \cdot (\Delta y \sin \varphi + \Delta z \cos \varphi) \cos \alpha. \quad (5.5)$$

С использованием подхода В.А. Ярошевского [34], учитывая представление аэродинамического углового ускорения в виде (5.3), угловое движение динамически симметричного МКА на низких круговых орбитах относительно траекторной системы координат, пренебрегая орбитальной угловой скоростью и гравитационным моментом, можно описать уравнениями в форме

$$\ddot{\alpha} + F(\alpha, H, R) = \varepsilon \Phi_\alpha(\alpha, \varphi, H), \\ \dot{\varphi} = R/\bar{J}_x - (G - R \cos \alpha) \cos \alpha / \sin^2 \alpha = \Phi_\varphi(\alpha, H, R), \\ \dot{\psi} = \frac{G - R \cos \alpha}{\sin^2 \alpha}, \\ \dot{H} = -2\sigma_x(\alpha, \varphi) q(H) V(H) / g(H) = \varepsilon \Phi_H(\alpha, \varphi, H), \quad (5.6) \\ \dot{R} = m_1(H) (|\cos \alpha| + k_s \sin \alpha (|\sin \varphi| + |\cos \varphi|)) \cdot \\ (\Delta y \sin \varphi + \Delta z \cos \varphi) \cos \alpha = \varepsilon \Phi_R(\alpha, \varphi, H),$$

$$F(\alpha, H, R) = \frac{(G - R \cos \alpha)(R - G \cos \alpha)}{\sin^3 \alpha} - M_\alpha(\alpha, H),$$

где $\bar{J}_x = J_x/J_n$; J_x – продольный момент инерции; J_n – поперечный момент инерции; ε – малый параметр; $R = \bar{J}_x \omega_x = \text{const}$ и $G = R \cos \alpha + (\omega_y \sin \varphi + \omega_z \cos \varphi) \sin \alpha = \text{const}$ – проекции вектора кинетического момента на продольную ось МКА и на направление скорости центра масс, отнесённые к поперечному

моменту инерции, соответственно; $\sigma_x(\alpha, \varphi) = c_0(|\cos \alpha| + k_s \sin \alpha (|\sin \varphi| + |\cos \varphi|))S_x/m$ – баллистический коэффициент; m – масса МКА; $g = g_3(R_3/(R_3 + H))^2$, g_3 – ускорение свободного падения на поверхности Земли.

При выполнении условия $R > G$ реализуется «обратная» прецессия, при $G > R$ – «прямая» прецессия (рис. 5.1).

Рассмотрим два случая пространственного движения относительно центра масс аэродинамически стабилизированного МКА. Первый – нерезонансный случай движения, второй – резонансный случай движения, когда условия возникновения резонансного движения выполняются.

5.2. Усреднённые уравнения для случая нерезонансного движения

В данном разделе рассмотрим угловое движение МКА стандарта кубсат на продолжительных нерезонансных участках. Движение аэродинамически стабилизированного МКА при снижении высоты круговой орбиты описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений (5.6) с быстро осциллирующими функциями, общее решение которой получить не представляется возможным. Кроме того, входящие в систему уравнений величины носят случайный характер, а это вызывает необходимость применения статистических методов расчёта. При численном же интегрировании уравнений движения для установления закономерностей движения требуется значительное число расчётов, а это даже с использованием современных быстродействующих ЭВМ приводит к большим затратам времени. Поэтому возникает задача получения усреднённых уравнений движения, позволяющих существенно ускорить процесс расчёта.

Применению усреднённых уравнений для определения параметров движения космических аппаратов, посвящено большое количество работ отечественных и зарубежных авторов. Отметим наиболее близкие работы. В [35] разработан ускоренный метод расчёта траекторий снижения в атмосфере осесимметричных космических аппаратов с малой асимметрией. В основу метода положен принцип асимптотического разделения системы уравнений движения аппарата относительно центра масс на две подсистемы, описывающие медленную и быструю составляющие решения. В [36] построены усреднённые уравнения возмущённого движения осесимметричного космического аппарата с полигармонической зависимостью восстанавливающего момента от угла атаки в интегро-дифференциальной форме без введения ограничений, накладываемых на характер движения.

Рассмотрим динамически симметричный МКА, у которого центр масс смещён от геометрического центра вдоль продольной оси ($\Delta y = \Delta z = 0$). Тогда усреднённое аэродинамическое угловое ускорение будет иметь вид (5.4) и уравнения упрощённой модели пространственного движения МКА по углу атаки в нерезонансном случае примут вид [37]:

$$\begin{aligned}\ddot{\alpha} + F(\alpha, H) &= 0 \\ \dot{H} &= -\frac{2\sigma_x(\alpha)q(H)V(H)}{g} = \varepsilon\Phi_H(\alpha, H), \\ F(\alpha, H) &= \frac{(G - R \cos \alpha)(R - G \cos \alpha)}{\sin^3 \alpha} - M_\alpha(\alpha, H),\end{aligned}\tag{5.7}$$

где $\sigma_x(\alpha) = c_0(|\cos \alpha| + k_s \frac{4}{\pi} \sin \alpha)S_x/m$ – баллистический коэффициент, ε – малый параметр.

Уравнения для пространственного угла атаки и высоты (5.7) описывают пространственное движение МКА стандарта кубсат и представляют собой одночастотную возмущённую систему с мед-

ленно меняющимся параметром H , причём колебания происходят в пределах $\alpha_{min} \leq \alpha \leq \alpha_{max}$.

При $\varepsilon = 0$ и $H = const$ первое уравнение системы (5.7) сводится к уравнению

$$\ddot{\alpha} + F(\alpha) = 0. \quad (5.8)$$

Общее решение невозмущённой системы (5.8) в явном виде найти не представляется возможным. Имеет место только первый интеграл невозмущённой системы

$$\frac{\dot{\alpha}^2}{2} + W(\alpha) = E, \quad (5.9)$$

где

$$W(\alpha) = \int F(\alpha) d\alpha = \frac{(R^2 + G^2 - 2RG \cos \alpha)}{2 \sin^2 \alpha} + m_0(H) \left(\frac{1}{2} \text{sign}(\cos \alpha) \cos^2(\alpha) + \frac{2k_S}{\pi} \left(\frac{\sin 2\alpha}{2} - \alpha \right) \right), \quad (5.10)$$

причём $E = W(\alpha_{min}) = W(\alpha_{max})$, так как α_{min} и α_{max} – экстремумы, при достижении которых $\dot{\alpha} = 0$.

Проведём усреднение по методу Волосова для случая, когда общее решение уравнения невозмущённого движения неизвестно [38]. Из уравнения (5.9) получим

$$\dot{\alpha} = \pm \sqrt{2(W(\alpha_{max}) - W(\alpha))}. \quad (5.11)$$

В предположении, что движение является периодическим, период колебаний найдём из интеграла

$$T = 2 \int_{\alpha_{min}}^{\alpha_{max}} \frac{d\alpha}{\sqrt{2(W(\alpha_{max}) - W(\alpha))}}. \quad (5.12)$$

Тогда усреднённое уравнение для максимального угла атаки примет вид

$$= \frac{\varepsilon}{F(\alpha_{max})} \left\{ \frac{2}{T} \int_{\alpha_{min}}^{\alpha_{max}} \frac{\partial W(\alpha)}{\partial H} \frac{\Phi_H(\alpha, H) d\alpha}{\sqrt{2(W(\alpha_{max}) - W(\alpha))}} - \frac{\partial W(\alpha_{max})}{\partial H} \bar{\Phi}_H \right\}. \quad (5.13)$$

Здесь

$$\frac{\partial W(\alpha)}{\partial H} = \frac{\partial m_0(H)}{\partial H} \left(\frac{1}{2} \text{sign}(\cos \alpha) \cos^2(\alpha) + \frac{2k}{\pi} \left(\frac{\sin 2\alpha}{2} - \alpha \right) \right), \quad (5.14)$$

$$\dot{H} = \frac{2\varepsilon}{T} \int_{\alpha_{min}}^{\alpha_{max}} \frac{\Phi_H(\alpha, H) d\alpha}{\sqrt{2(W(\alpha_{max}) - W(\alpha))}} = \bar{\Phi}_H. \quad (5.15)$$

Уравнения (5.12)–(5.15) записаны в явном виде с помощью известных функций $\Phi_H(\alpha, H)$ и $W(\alpha)$. Для построения этих уравнений не требуется общего решения порождающего уравнения (5.8). Определённые интегралы в правых частях уравнений (5.12), (5.12), (5.15) зависят от тригонометрических функций так называемой «быстрой» переменной, поэтому целесообразно ввести замену

$$u = \cos \alpha, x = \cos \alpha_{max}, x_1 = \cos \alpha_{min}. \quad (5.16)$$

Тогда уравнения (5.12), (5.13), (5.15) примут вид [37]:

$$T = 2 \int_x^{x_1} \frac{du}{\sqrt{2(1-u^2)(W(x) - W(u))}},$$

$$x = -\frac{\varepsilon(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{F(x)} \times$$

$$\times \left(\frac{2}{T} \int_x^{x_1} \frac{\partial W(u)}{\partial H} \frac{\Phi_H(u, H) du}{\sqrt{2(1-u^2)(W(x) - W(u))}} - \frac{\partial W(x)}{\partial H} \bar{\Phi}_H \right), \quad (5.17)$$

$$\dot{H} = \frac{2}{T} \int_x^{x_1} \frac{\Phi_H(u, H) du}{\sqrt{2(1-u^2)(W(x) - W(u))}} = \bar{\Phi}_H.$$

Данные усреднённые уравнения движения получены для нерезонансных участков траектории движения аэродинамически стабилизированного МКА без введения дополнительных ограничений на параметры движения относительно центра масс [37].

Численное интегрирование усреднённых уравнений даёт существенное сокращение времени определения параметров движения по сравнению с исходными уравнениями, что позволяет, например, эффективно решать задачу прогнозирования падения высоты орбиты МКА стандарта кубсат в стохастической постановке.

Для примера проведём сравнение результатов моделирования с использованием усреднённых уравнений (5.17) и результатов, полученных по полной модели пространственного движения (1.3), (1.4), в которой учитывается влияние гравитационного момента и орбитальной угловой скорости.

Для примера был рассмотрен МКА формата кубсат 3U с параметрами: $m = 3$ кг, $S = 0,01$ м², $k_S = 3$, $J_x = 0,005$ кг · м², $J_n = 0,025$ кг · м², $\Delta x = 0,05$ м, при следующих начальных условиях движения: угол атаки $\alpha_0 = 50^\circ$, компоненты угловой скорости относительно орбитальной системы координат $\omega_{x0} = 0,8^\circ/\text{с}$, $\omega_{y0} = 0,02^\circ/\text{с}$, $\omega_{z0} = 0,02^\circ/\text{с}$. Рассмотрены два случая начальной высоты 350 км и 300 км (таблицы 5.1, 5.2).

Следует отметить, что для изменения высоты орбиты результаты, полученные по модели (5.7) и модели (5.17) совпадают с точностью до нескольких метров. Как видно из таблиц 5.1, 5.2 относительная ошибка оценки снижения высоты не превосходит 1%.

Таблица 5.1. Сравнительные данные расчётов высоты по полным и усреднённым уравнениям движения (начальная высота 350 км)

t , дни	Полная модель движения, H , м	Усреднённая модель движения, H , м	Относительная ошибка, %
1	349351	349356	0,8
2	348698	348706	0,6
3	348036	348050	0,7
4	347372	347388	0,6
5	346695	346720	0,8
6	346022	346045	0,6
7	345330	345364	0,7
8	344645	344677	0,6
9	343940	343983	0,7
10	343242	343283	0,6

Таблица 5.2. Сравнительные данные расчётов высоты по полным и усреднённым уравнениям движения (начальная высота 300 км)

t , дни	Полная модель движения, H , м	Усреднённая модель движения, H , м	Относительная ошибка, %
1	298203	298217	0,8
2	296331	296356	0,7
3	294381	294414	0,6
4	292351	292387	0,5
5	290235	290272	0,4
6	288026	288066	0,3
7	285725	285766	0,3
8	283323	283368	0,3
9	280821	280868	0,2
10	278195	278247	0,2

Полученные усреднённые уравнения движения позволяют с высокой точностью прогнозировать падение высоты орбиты с минимальными затратами вычислительных мощностей, что позволяет провести оценку времени существования МКА на орбите.

Глава 6. ОТЛИЧИТЕЛЬНЫЕ ОСОБЕННОСТИ УГЛОВОГО ДВИЖЕНИЯ МКА ФОРМАТА КУБСАТ 6U

В данной главе в краткой форме проведём аналогичное исследование для МКА, имеющих форму прямоугольного параллелепипеда с прямоугольной (неквадратной) площадью поперечного сечения. Для примера будем рассматривать МКА формата кубсат 6U.

6.1. Особенности МКА формата кубсат 6U

В отличие от МКА формата кубсат 1U-3U, у МКА кубсат 6U различаются все три линейных размера (пусть $l_x > l_z > l_y$), а следовательно, отличается и выражение для площади проекции МКА на плоскость, перпендикулярную вектору скорости набегающего потока (рис. 6.1):

$$S = S_x \left(|\cos\alpha| + \sin\alpha \left(\frac{l_x}{l_z} |\sin\varphi| + \frac{l_x}{l_y} |\cos\varphi| \right) \right), \quad (6.1)$$

где $S_x = l_y l_z$ – характерная площадь МКА, в данном случае площадь наименьшей грани.

Площадь проекции МКА на плоскость перпендикулярную вектору скорости набегающего потока, отнесённая к характерной площади имеет вид:

$$\tilde{S} = |\cos\alpha| + \sin\alpha \left(\frac{l_x}{l_z} |\sin\varphi| + \frac{l_x}{l_y} |\cos\varphi| \right). \quad (6.2)$$

На рис. 6.2 показана зависимость приведённой площади поперечного сечения от угла атаки при различных значениях угла собственного вращения для МКА формата кубсат 6U ($l_x = 0,3$ м,

$l_y = 0,1 \text{ м}, l_z = 0,2 \text{ м}$). Из рисунка видно, что в зависимости от значений углов атаки и собственного вращения данная величина меняется примерно в три с половиной раза.

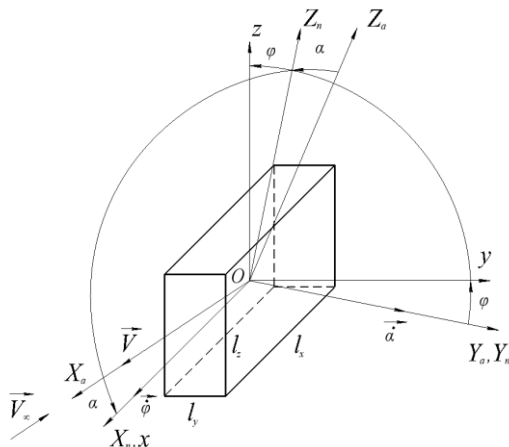


Рис. 6.1. Взаимная ориентация вектора набегающего потока и связанной с МКА $Oxyz$ системы координат

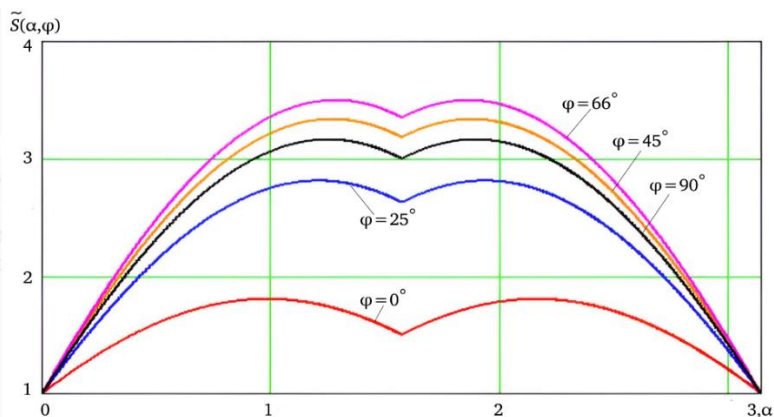


Рис. 6.2. Приведённая площадь поперечного сечения МКА формата кубсат 6U

С учётом (6.2) проекции момента аэродинамической силы лобового сопротивления относительно центра масс на оси связанной СК равны:

$$\begin{aligned} M_{ax} &= c_0 \tilde{S}_x q (\sin \alpha \cos \varphi y_d - \sin \alpha \sin \varphi z_d), \\ M_{ay} &= c_0 \tilde{S}_x q (\cos \alpha z_d - \sin \alpha \cos \varphi x_d), \\ M_{az} &= c_0 \tilde{S}_x q (\sin \alpha \sin \varphi x_d - \cos \alpha y_d). \end{aligned} \quad (6.3)$$

Для случая, когда центр масс лежит на продольной оси МКА ($x_d \neq 0$, $y_d = 0$, $z_d = 0$) проекции момента аэродинамической силы лобового сопротивления относительно центра масс на оси связанной СК $Oxyz$ имеют вид:

$$\begin{aligned} M_{ax} &= 0, \\ M_{ay} &= -c_0 \tilde{S}_x q \sin \alpha \cos \varphi x_d, \\ M_{az} &= c_0 \tilde{S}_x q \sin \alpha \sin \varphi x_d. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Момент аэродинамической силы лобового сопротивления относительно центра масс, действующий в плоскости $OX_n Z_n$, можно записать в виде

$$M_a = -c_0 \tilde{S} \Delta \bar{x} q S_x l \sin \alpha = m_\alpha(\alpha, \varphi) q S_x l, \quad (6.5)$$

где $\Delta \bar{x} = \frac{\Delta x}{l_x}$, l_x – характерная длина МКА; коэффициент восстанавливающего аэродинамического момента $m_\alpha(\alpha, \varphi)$, вычисленный относительно центра масс, определяется по формуле:

$$\begin{aligned} m_\alpha(\alpha, \varphi) &= -c_0 [| \cos \alpha | + \\ &+ \sin \alpha \left(\frac{l_x}{l_z} |\sin \varphi| + \frac{l_x}{l_y} |\cos \varphi| \right)] \Delta \bar{x} \sin \alpha, \end{aligned} \quad (6.6)$$

Баллистический коэффициент МКА формата кубсат 6U определяется по формуле:

$$\sigma_x(\alpha, \varphi) = c_0 \left(| \cos \alpha | + \sin \alpha \left(\frac{l_x}{l_z} |\sin \varphi| + \frac{l_x}{l_y} |\cos \varphi| \right) \right) S_x / m. \quad (6.7)$$

Следует также отметить, что в большинстве своём МКА формата кубсат 6U являются динамически несимметричными, тогда как МКА формата кубсат 1U-3U часто изготавливают практически динамически симметричными. При выбранном расположении осей связанной с МКА системы координат выполняются следующие неравенства для моментов инерции $J_x < J_z < J_y$ (в случае равномерного или близкого к нему распределения массы МКА).

6.2. Определение положений относительного равновесия под действием гравитационного и аэродинамического моментов

Система для определения положений относительного равновесия под действием гравитационного и аэродинамического моментов с учётом отличий, обусловленных особенностями аэродинамического момента МКА формата кубсат 6U, у которого центробежные моменты инерции равны нулю, будет иметь вид [39]:

$$\begin{aligned}
 & (J_z - J_y)\omega_{\text{орб}}^2(b_{22}b_{32} - 3b_{23}b_{33}) + c_0qS_x(y_d b_{31} - \\
 & - z_d b_{21}) \left(|b_{11}| + \frac{l_x}{l_y} |b_{21}| + \frac{l_x}{l_z} |b_{31}| \right) = \\
 & = 0, (J_x - J_z)\omega_{\text{орб}}^2(b_{32}b_{12} - 3b_{33}b_{13}) + c_0qS_x(z_d b_{11} - \\
 & - x_d b_{31}) \left(|b_{11}| + \frac{l_x}{l_y} |b_{21}| + \frac{l_x}{l_z} |b_{31}| \right) = \\
 & = 0, (J_y - J_x)\omega_{\text{орб}}^2(b_{12}b_{22} - 3b_{13}b_{23}) + c_0qS_x(x_d b_{21} - \\
 & - y_d b_{11}) \left(|b_{11}| + \frac{l_x}{l_y} |b_{21}| + \frac{l_x}{l_z} |b_{31}| \right) = 0.
 \end{aligned} \tag{6.8}$$

Для частного случая, когда центр давления смещён относительно центра масс МКА только по оси Ox ($J_x \neq J_y \neq J_z$, $x_d \neq 0$, $y_d = 0$, $z_d = 0$) система уравнений (6.8) примет вид:

$$\begin{aligned}
& (J_z - J_y)\omega_{op\bar{o}}^2(b_{22}b_{32} - 3b_{23}b_{33}) = \\
& = 0, (J_x - J_z)\omega_{op\bar{o}}^2(b_{32}b_{12} - 3b_{33}b_{13}) - \\
& - c_0 q S_x \left(|b_{11}| + \frac{l_x}{l_y} |b_{21}| + \frac{l_x}{l_z} |b_{31}| \right) x_d b_{31} = \\
& = 0, (J_y - J_x)\omega_{op\bar{o}}^2(b_{12}b_{22} - 3b_{13}b_{23}) + \\
& + c_0 q S_x \left(|b_{11}| + \frac{l_x}{l_y} |b_{21}| + \frac{l_x}{l_z} |b_{31}| \right) x_d b_{21} = 0.
\end{aligned}$$

В этом случае можно найти аналитическое решение. Введём следующие обозначения:

$$\vartheta_1 = \frac{\omega_{op\bar{o}}^2(J_y - J_x)}{c_0 q S_x}, \vartheta_2 = \frac{\omega_{op\bar{o}}^2(J_z - J_x)}{c_0 q S_x}.$$

Тогда комбинации углов прецессии ψ , собственного вращения φ и атаки α_n , соответствующие положениям равновесия относительно центра масс, определяются по следующим формулам [39]:

(1) $\alpha_1 = 0$ при $\varphi + \psi = \{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2\}$ – 4 положения равновесия при любых соотношениях x_d , ϑ_1 , ϑ_2 ;

(2) $\alpha_2 = \pi$ при $\varphi + \psi = \{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2\}$ – 4 положения равновесия при любых соотношениях x_d , ϑ_1 , ϑ_2 ;

(3) Если $\frac{|x_d|}{3} < |\vartheta_2|$: $\psi_1 = 0$, $(\psi_3 = \pi)$, $\varphi_1 = 0$, $(\varphi_3 = \pi)$,
 $\alpha_3 = \text{arcctg} \left(\frac{x_d l_x}{(-3\vartheta_2 + \text{sign}(\vartheta_2)|x_d|)l_z} \right)$ – 4 положения равновесия;

(4) Если $|x_d| < |\vartheta_2|$: $\psi_2 = \frac{\pi}{2}$, $(\psi_4 = \frac{3\pi}{2})$, $\varphi_1 = 0$, $(\varphi_3 = \pi)$,
 $\alpha_4 = \text{arcctg} \left(\frac{x_d l_x}{(\vartheta_2 - \text{sign}(\vartheta_2)|x_d|)l_z} \right)$ – 4 положения равновесия;

(5) Если $\frac{|x_d|}{3} < |\vartheta_1|$: $\psi_1 = 0$, $(\psi_3 = \pi)$, $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$, $(\varphi_4 = \frac{3\pi}{2})$,
 $\alpha_5 = \text{arcctg} \left(\frac{x_d l_x}{(-3\vartheta_1 + \text{sign}(\vartheta_1)|x_d|)l_y} \right)$ – 4 положения равновесия;

(6) Если $|x_d| < |\vartheta_1|$: $\psi_2 = \frac{\pi}{2}$, $(\psi_4 = \frac{3\pi}{2})$, $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$, $(\varphi_4 = \frac{3\pi}{2})$,
 $\alpha_6 = \arccctg\left(\frac{x_d l_x}{(\vartheta_1 - \text{sign}(\vartheta_1)|x_d|)l_y}\right) - 4$ положения равновесия.

Окончательный результат приведён в таблице 6.1, в которой в зависимости от соотношения параметров показано число положений равновесия, а в скобках указаны соответствующие номера комбинаций углов прецессии, собственного вращения и атаки.

Таблица 6.1 Число положений равновесия
(в скобках указаны номера комбинаций углов,
соответствующие положениям равновесия)

	$0 < \vartheta_2 < \frac{ x_d }{3}$	$\frac{ x_d }{3} < \vartheta_2 < x_d $	$ x_d < \vartheta_2 $
$0 < \vartheta_1 < \frac{ x_d }{3}$	8 (1,2)	12 (1,2,3)	16 (1,2,3,4)
$\frac{ x_d }{3} < \vartheta_1 < x_d $	12 (1,2,5)	16 (1,2,3,5)	20 (1,2,3,4,5)
$ x_d < \vartheta_1 $	16 (1,2,5,6)	20 (1,2,3,5,6)	24 (1,2,3,4,5,6)

6.3. Особенности математической модели плоского углового движения

Аналогично исследованию, проведённому в 3 главе, в данном разделе рассмотрим особенности математической модели плоского углового движения МКА формата кубсат 6U.

Зависимость коэффициента восстанавливающего аэродинамического момента, вычисленного относительно центра масс, усреднённая по углу собственного вращения φ имеет вид

$$m_\alpha(\alpha) = -c_0 \left(|\cos \alpha| + \frac{2}{\pi} \left(\frac{l_x}{l_y} + \frac{l_x}{l_z} \right) |\sin \alpha| \right) \Delta \bar{x} \sin \alpha. \quad (6.9)$$

Здесь $\frac{2}{\pi} \left(\frac{l_x}{l_y} + \frac{l_x}{l_z} \right)$ – нулевой член разложения в ряд Фурье выражения $\frac{l_x}{l_y} |\sin \varphi| + \frac{l_x}{l_z} |\cos \varphi|$.

Аппроксимация коэффициента восстанавливающего аэродинамического момента (6.9) синусоидальной зависимостью имеет вид

$$m_\alpha(\alpha) = a_0 \sin(\alpha).$$

Здесь $a_0 = -c_0 \Delta \bar{x} m_{nk}$; $m_{nk} = \frac{4}{3\pi} \left(1 + \frac{4}{\pi} \left(\frac{l_x}{l_y} + \frac{l_x}{l_z} \right) \right) + \frac{24}{\pi^2}$ — первый член разложения выражения $\left(|\cos \alpha| + \frac{2}{\pi} \left(\frac{l_x}{l_y} + \frac{l_x}{l_z} \right) |\sin \alpha| \right) \sin \alpha$ в ряд Фурье по синусам.

Модель углового движения в плоскости круговой орбиты ($\psi = \varphi = 0$) относительно траекторной системы координат для МКА формата кубсат 6U имеет вид:

$$\ddot{\alpha} - (a_x \sin \alpha + a_z \cos \alpha) \left(|\cos \alpha| + \frac{l_x}{l_z} |\sin \alpha| \right) - c_1 \sin 2\alpha = 0, \quad (6.10)$$

где $a_x = a_x(H) = -\frac{\Delta \bar{x} c_0 S_x l_x q(H)}{J_y}$, $a_z = a_z(H) = \frac{\Delta \bar{z} c_0 S_x l_x q(H)}{J_y}$ – коэффициенты, обусловленные аэродинамическим восстанавливающим моментом.

Для этого случая интеграл энергии можно записать в следующем виде

$$\frac{\dot{\alpha}^2}{2} + a_x u(\alpha) - a_z v(\alpha) + c_1 \cos^2 \alpha = E_0.$$

$$\begin{aligned} \text{Здесь} \quad u(\alpha) = & \frac{1}{2} \operatorname{sign}(\cos \alpha) \cos^2 \alpha + \\ & + \frac{l_x}{2l_z} \operatorname{sign}(\sin \alpha) \left(\frac{\sin 2\alpha}{2} - \alpha + 2\pi \left\lfloor \frac{\alpha + \pi}{2} \right\rfloor \right); \end{aligned} \quad (6.11)$$

$$v(\alpha) = \frac{1}{2} \text{sign}(\cos(\alpha)) \left(\frac{\sin 2\alpha}{2} + \alpha - \frac{\pi}{2} - 2\pi \cdot \left\lfloor \frac{\alpha + \frac{\pi}{2}}{2\pi} \right\rfloor \right) + \\ + \frac{l_x}{2l_z} \text{sign}(\sin(\alpha)) \sin^2 \alpha.$$

С учётом того, что из величин, входящих в выражение для α_{max} , наибольший разброс значений имеет величина угловой скорости $\dot{\alpha}_0$, получим аналитические выражения для функции распределения величины максимального угла атаки α_{max} :

– если модуль величины начальной угловой скорости $\dot{\alpha}_0$ имеет распределение Рэлея, то функция распределения максимального угла атаки определяется по формуле:

$$F(\alpha_{max}) = \\ = 1 - e^{\frac{a_z(v(\alpha_{max}) - v(\alpha_0)) - a_x(u(\alpha_{max}) - u(\alpha_0)) - c_1(\cos^2 \alpha_{max} - \cos^2 \alpha_0)}{\sigma^2}}; \quad (6.12)$$

– если модуль величины $\dot{\alpha}_0$ распределён по равномерному закону в диапазоне $[0, \dot{\alpha}_{0max}]$, то функция распределения максимального угла атаки определяется по формуле:

$$F(\alpha_{max}) = [-2a_z(v(\alpha_{max}) - v(\alpha_0)) + 2a_x(u(\alpha_{max}) - u(\alpha_0)) + \\ + 2c_1(\cos^2 \alpha_{max} - \cos^2 \alpha_0)]^{1/2} / \dot{\alpha}_{0max}. \quad (6.13)$$

На рисунках 6.3 и 6.4 приведены графики функции распределения максимального угла атаки МКА кубсат 6U ($l_x = 0,3$ м, $l_y = 0,1$ м, $l_z = 0,2$ м, $J_x = 0,025 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, $J_y = 0,065 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, $J_z = 0,05 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, $\Delta x = 0,06$ м, $\Delta z = 0,006$ м) при полёте на высоте $H = 380$ км (использовалась стандартная плотность атмосферы [15]) и начальном значении угла атаки $\alpha_0 = 5^\circ$ для случая, когда величина начальной угловой скорости имеет распределение Рэлея (рис. 6.3) и когда величина начальной угловой скорости распределена по равномерному закону (рис. 6.4).

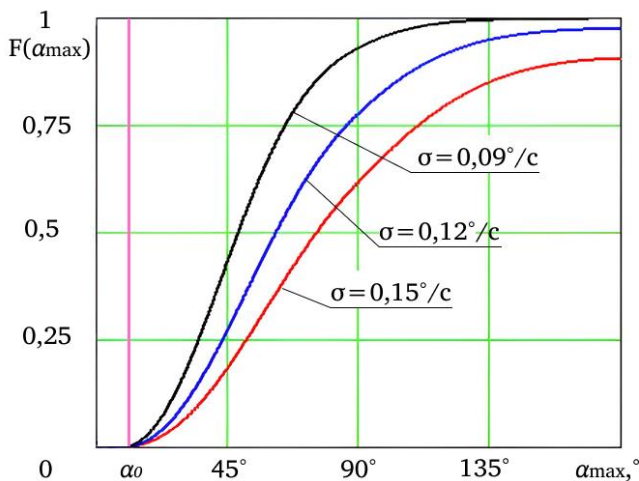


Рис. 6.3 Функция распределения максимального угла атаки, когда величина начальной угловой скорости имеет распределение Рэлея

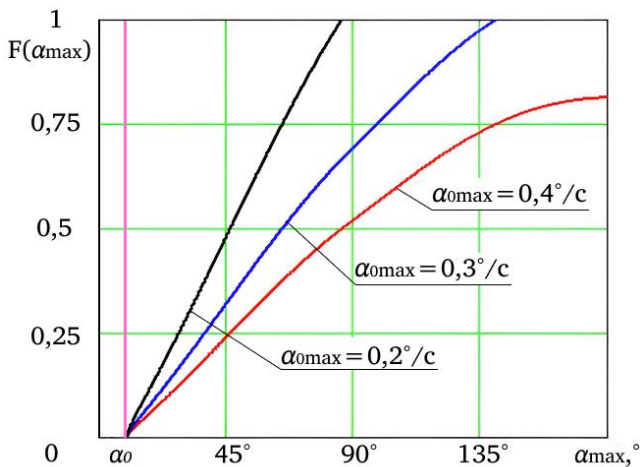


Рис. 6.4. Функция распределения максимального угла атаки, когда величина начальной угловой скорости распределена по равномерному закону

6.4. Выбор проектно-динамических параметров МКА

Рассмотрим задачу выбора проектных параметров МКА формата кубсат 6U, аналогично исследованию, проведённому в главе 4 для МКА формата кубсат 1U-3U [40,41].

На рис. 6.5 для МКА кубсат 6U ($0,1 \times 0,2 \times 0,3 \text{ м}^3$) показаны области высот H и относительного запаса статической устойчивости $\Delta\tilde{x}$ для различных методов пассивной стабилизации: 1 – одноосная аэродинамическая стабилизация по вектору скорости и 2 – трёхосная аэродинамически-гравитационная стабилизация (область, где аэродинамический момент преобладает над гравитационным $M_a > M_g$); 3 – одноосная и трёхосная гравитационная стабилизация по местной вертикали (область, где гравитационный момент преобладает над аэродинамическим $M_g > M_a$); 4 – трёхосная гравитационно-аэродинамическая стабилизация применима при любом отношении аэродинамического и гравитационного моментов, так как она осуществляется путём смещения центра масс от центра давления (геометрического центра) на определённую величину по оси с промежуточным значением момента инерции МКА, при этом $\Delta\tilde{x}$ необходимо делать минимальным. Расчёты проводились для стандартной плотности атмосферы Земли в соответствии с ГОСТ 4401-81 [15].

В отличие от МКА кубсат 1U-3U, большинство из которых являются динамически симметричными или имеют малые различия в величинах поперечных моментов инерции, МКА кубсат 6U, как правило, динамически несимметричные, что, безусловно, является благоприятным фактором, при использовании трёхосной стабилизации.

В качестве примера в этом разделе будем рассматривать МКА формата кубсат-6U массой 6 кг со следующими параметрами:

$$l_x = 0,3 \text{ м}, l_y = 0,1 \text{ м}, l_z = 0,2 \text{ м}, J_y = 0,065 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \\ J_z = 0,05 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, J_x = 0,025 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

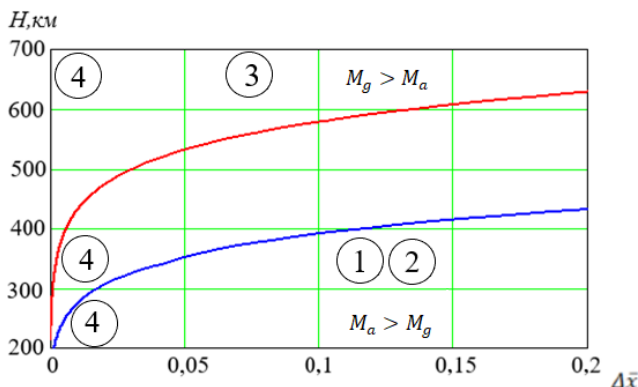


Рис. 6.5. Области предпочтительного применения метода пассивной стабилизации МКА кубсат 6U в зависимости от значений высот H и относительного запаса статической устойчивости $\Delta\bar{x}$

Аэродинамическая стабилизация по вектору скорости

Сначала рассмотрим аэродинамическую пассивную стабилизацию продольной оси МКА вдоль вектора скорости центра масс (область 1 рис. 6.5). Аналогично исследованию, проведённому в разделе 4.2 с помощью функций распределения (6.12), (6.13) с учётом соответствующих выражений (6.11) можно сформировать требования к величине конструктивного параметра $d = \frac{4x}{J_y}$. Для того, чтобы максимальный угол атаки МКА α_{max} был меньше допустимого значения α_{max}^* с вероятностью не меньшей чем p^* , необходимо выполнение следующего условия:

– в случае, если начальная угловая скорость $\dot{\alpha}_0$ имеет распределение Рэлея

$$d = \frac{\Delta x}{J_n} \geq \frac{\ln(1-p^*)\sigma^2}{[c_0 S_x q(H)(u(\alpha_{max}^*) - u(\alpha_0))]}; \quad (6.14)$$

– в случае распределения начальной угловой скорости $\dot{\alpha}_0$ по равномерному закону в диапазоне $[0, \dot{\alpha}_{0max}]$

$$d = \frac{\Delta x}{J_n} \geq \frac{(\dot{\alpha}_{0max} p^*)^2}{2[c_0 S_x q(H)(u(\alpha_0) - u(\alpha_{max}^*))]}. \quad (6.15)$$

Используя (6.14), (6.15), можно построить номограммы для оценки возможности обеспечения требуемого значения конструктивного параметра. Для примера на рис. 6.6 справа приведены зависимости требуемого конструктивного параметра МКА от высоты орбиты H и от величины параметра $\dot{\alpha}_{0max}$ (начальная поперечная угловая скорость имеет равномерное распределение) для значений максимально угла атаки $\alpha_{max}^* = 20^\circ$, вероятности $p^* = 0,95$ и начального угла атаки $\alpha_0 = 0^\circ$, слева приведены значения конструктивного параметра МКА кубсат 6У с различными значениями поперечного момента инерции в зависимости от запаса статической устойчивости Δx . Расчёты проводились для стандартной плотности атмосферы Земли [15].

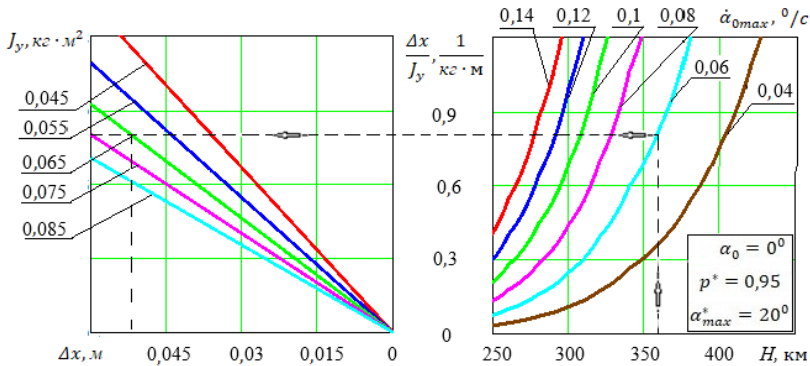


Рис. 6.6. Примеры номограмм для выбора конструктивного параметра МКА формата кубсат 6У с аэродинамической системой стабилизации

На рис. 6.6 показана последовательность выбора параметров МКА для высоты орбиты $H = 360$ км при заданных ограничениях $\alpha_{max}^* = 20^0$, $p^* = 0,95$, $\alpha_0 = 0$, $\sigma = 0,06^0/\text{с}$ на условия движения относительно центра масс, формируемых целевой задачей полёта. Можно сделать вывод, что значение конструктивного параметра МКА для обеспечения заданного движения должно отвечать условию $d \geq 0,82 \frac{1}{\text{кг}\cdot\text{м}}$ (правая часть рисунка, значения проектных параметров выбираются с учётом левой части рисунка).

Если аэродинамический момент незначительно больше гравитационного, то можно по формулам (6.12) и (6.13) провести переоценку вероятности выполнения требований к максимальному углу атаки. Можно также задать новые ограничения на величины угловых скоростей, порождаемых системой отделения, разрешая выражения (6.12) и (6.13) относительно величин σ и $\dot{\alpha}_{0max}$.

Аэродинамически-гравитационная трёхосная стабилизация

Область возможной реализации аэродинамически-гравитационной трёхосной стабилизации МКА формата кубсат 6U показана на рисунке 6.5, как область 2. Поскольку стабилизация поперечных осей осуществляется с помощью гравитационного момента, за счёт разности значений главных центральных моментов инерции относительно поперечных осей и не зависит от формы аппарата, то можно использовать результаты, полученные в разделе 4.3.

Для того, чтобы максимальный угол крена δ_{max} был меньше допустимого значения δ_{max}^* с вероятностью, не меньшей чем p^* , при заданных разбросах продольной угловой скорости, порождаемых системой отделения (а при комбинированной системе стабилизации на момент окончания работы активной системы предварительного успокоения), необходимо выполнение следующего условия для конструктивного параметра МКА d_k :

– в случае, если величина ω_{x0} имеет нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и среднеквадратичным отклонением σ :

$$d_k = \frac{J_y - J_z}{J_x} \geq \frac{(R_3 + H)^3}{2\mu} \frac{\sigma^2(t^*)^2}{(\cos 2\delta_0 - \cos 2\delta_{max}^*)}, \quad (6.16)$$

где t^* – аргумент функции Лапласа по заданной вероятности: $\Phi_0(t^*) = p^*/2$;

– в случае распределения модуля начальной продольной угловой скорости ω_{x0} по равномерному закону в диапазоне $[0, \omega_{x0max}]$:

$$d_k = \frac{J_y - J_z}{J_x} \geq \frac{(R_3 + H)^3}{2\mu} \frac{(\omega_{x0max} p^*)^2}{(\cos 2\delta_0 - \cos 2\delta_{max}^*)}. \quad (6.17)$$

Следует отметить, что в случае МКА формата кубсат 6U значительно легче обеспечить необходимое соотношение моментов инерции по сравнению с форматом кубсат 1U – 3U, для которых обычно разность $J_y - J_z$ невелика.

На рис. 6.7а номограмма для выбора соотношений моментов инерции $\bar{J}_x = \frac{J_x}{J_y}$, $\bar{J}_z = \frac{J_z}{J_y}$ для заданного значения допустимого угла крена $\delta_{max}^* = 20^\circ$, начального угла крена $\delta_0 = 0$ при различных значениях модуля начальной продольной угловой скорости ω_{x0max} для случая равномерного распределения при вероятности $p^* = 0,95$. Высота полёта $H = 380$ км. Соотношения моментов инерции, при которых выполняются указанные требования, расположены между соответствующей цветной линией и чёрной линией (предельная граница физической реализуемости соотношений моментов инерции). Фиолетовой точкой на рисунке обозначены соотношения для НС кубсат-6U с параметрами, приведёнными выше. Из рисунка видно, что для такого МКА значение начальной продольной угловой скорости ω_{x0max} не должно превышать $0,036^\circ/\text{с}$ для выполнения указанных ограничения на максимальный угол отклонения $\delta_{max}^* = 20^\circ$. На рис. 6.7б приведена номограмма для выбора

начальных условий движения (начального угла крена δ_0 и максимального значения начальной продольной угловой скорости ω_{x0max}) для случая равномерного распределения при вероятности $p^* = 0,95$ на высоте полёта $H = 380$ км.

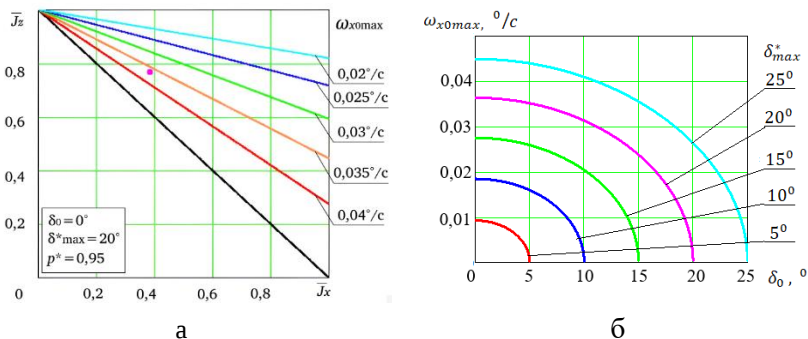


Рис. 6.7. Примеры номограмм:

- а – для выбора соотношений моментов инерции при различных значениях модуля начальной продольной угловой скорости ω_{x0max} ;
- б – для задания ограничений на величину начальной продольной угловой скорости ω_{x0max} при рассмотрении движения по углу крена δ

Гравитационная трёхосная стабилизация

Гравитационная трёхосная стабилизация отмечена на рис. 6.5 как область 3. При использовании данного метода стабилизации форма аппарата не оказывает существенного влияния, так как на рассматриваемых высотах преобладающим является гравитационный момент и аэродинамическим моментом можно пренебречь. Поэтому выражения для распределения максимальных углов и ограничения на параметры будут иметь такой же вид, что и для МКА куб-сат 1U-3U (раздел 4.5).

Если модуль величины поперечной угловой скорости ω_{n0} имеет распределение Рэля с масштабным параметром распределе-

ния σ , то ограничения на соотношения моментов инерции определяются по формулам:

– при рассмотрении движения по углу β

$$\frac{J_z - J_x}{J_y} \geq \frac{-2(R_3 + H)^3}{3\mu} \frac{\sigma^2 \ln(1 - p^*)}{(\sin^2 \beta_{max}^* - \sin^2 \beta_0)} ; \quad (6.18)$$

– при рассмотрении движения по углу ψ

$$\frac{J_y - J_x}{J_z} \geq \frac{-(R_3 + H)^3}{2\mu} \frac{\sigma^2 \ln(1 - p^*)}{(\sin^2 \psi_{max}^* - \sin^2 \psi_0)} . \quad (6.19)$$

Отметим, что при задании одинаковой вероятности p^* и одинаковых начальных и максимальных значений углов β и ψ условие (6.18) включает выполнение условия (6.19).

Если величина начальной продольной угловой скорости ω_{x0} имеет нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием, и среднеквадратичным отклонением σ , то для стабилизации осей по углу φ ограничение на соотношения моментов инерции имеет вид:

$$\frac{J_y - J_z}{J_x} \geq \frac{(R_3 + H)^3}{2\mu} \frac{\sigma^2 (t^*)^2}{(\cos 2\varphi_0 - \cos 2\varphi_{max}^*)}, \quad (6.20)$$

где t^* – аргумент функции Лапласа по заданной вероятности: $\Phi_0(t^*) = p^*/2$; $\Phi_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-t^2/2} dt$ – функция Лапласа.

Если модуль величины ω_{n0} распределен по равномерному закону в диапазоне $[0, \omega_{n0max}]$, то ограничения на соотношения моментов инерции имеют вид:

– при рассмотрении движения по углу β

$$\frac{J_z - J_x}{J_y} \geq \frac{(R_3 + H)^3}{3\mu} \frac{(\omega_{n0max} p^*)^2}{(\sin^2 \beta_{max}^* - \sin^2 \beta_0)}; \quad (6.21)$$

– при рассмотрении движения по углу ψ

$$\frac{J_y - J_x}{J_z} \geq \frac{(R_3 + H)^3}{4\mu} \frac{(\omega_{n0max} p^*)^2}{(\sin^2 \psi_{max}^* - \sin^2 \psi_0)}. \quad (6.22)$$

Отметим, что при задании одинаковой вероятности p^* и одинаковых начальных и максимальных значений углов β и ψ условие (6.21) включает выполнение условия (6.22).

При распределении модуля начальной продольной угловой скорости ω_{x0} по равномерному закону в диапазоне $[0, \omega_{x0max}]$ для стабилизации осей по углу φ требуется выполнение следующего ограничения на соотношения моментов инерции:

$$\frac{J_y - J_z}{J_x} \geq \frac{(R_3 + H)^3}{\mu} \frac{(\omega_{x0max} p^*)^2}{(\sin^2 \varphi_{max}^* - \sin^2 \varphi_0)}. \quad (6.23)$$

Ограничения на величины угловых скоростей, порождаемых системой отделения, а при использовании комбинированной системы стабилизации – на момент окончания работы активной системы предварительного успокоения имеют следующий вид.

Если модуль величины ω_{n0} имеет распределение Рэлея, то ограничение на масштабный параметр распределения σ определяется по формуле:

- при рассмотрении движения по углу β

$$\sigma \leq \sqrt{\frac{\frac{-3\mu}{2(R_3+H)^3} \left(\frac{J_z - J_x}{J_y} \right) (\sin^2 \beta_{max}^* - \sin^2 \beta_0)}{\ln(1-p^*)}}; \quad (6.24)$$

- при рассмотрении движения по углу ψ

$$\sigma \leq \sqrt{\frac{\frac{-2\mu}{(R_3+H)^3} \left(\frac{J_y - J_x}{J_z} \right) (\sin^2 \psi_{max}^* - \sin^2 \psi_0)}{\ln(1-p^*)}}. \quad (6.25)$$

Следует отметить, что при задании одинаковой вероятности p^* и одинаковых начальных и максимальных значений углов β и ψ условие (6.24) включает выполнение условия (6.25).

Если модуль величины ω_{n0} распределен по равномерному закону в диапазоне $[0, \omega_{n0max}]$, то ограничение на величину ω_{n0max} определяется по формуле:

– при рассмотрении движения по углу β

$$\omega_{n0max} \leq \sqrt{\frac{\frac{3\mu}{(R_3+H)^3} \left(\frac{J_z - J_x}{J_y} \right) (\sin^2 \beta_{max}^* - \sin^2 \beta_0)}{p^*}}; \quad (6.26)$$

- при рассмотрении движения по углу ψ

$$\omega_{n0max} \leq \sqrt{\frac{\frac{4\mu}{(R_3+H)^3} \left(\frac{J_y - J_x}{J_z} \right) (\sin^2 \psi_{max}^* - \sin^2 \psi_0)}{p^*}}. \quad (6.27)$$

Следует отметить, что при задании одинаковой вероятности p^* и одинаковых начальных и максимальных значений углов β и ψ условие (6.26) включает выполнение условия (6.27).

Если величина начальной продольной угловой скорости ω_{x0} имеет нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием, и среднеквадратичным отклонением σ , то требуется выполнение ограничения на его величину

$$\sigma \leq \frac{\sqrt{\frac{\mu}{2(R_3+H)^3} \left(\frac{J_z - J_y}{J_x} \right) (\cos 2\varphi_{max}^* - \cos 2\varphi_0)}}{t^*}. \quad (6.28)$$

В случае распределения модуля начальной продольной угловой скорости ω_{x0} по равномерному закону в диапазоне $[0, \omega_{n0max}]$ требуется выполнение ограничения на величину ω_{n0max}

$$\omega_{n0max} \leq \sqrt{\frac{\frac{\mu}{2(R_3+H)^3} \left(\frac{J_z - J_y}{J_x} \right) (\cos 2\varphi_{max}^* - \cos 2\varphi_0)}{p^*}}. \quad (6.29)$$

С использованием формул (6.21)–(6.23) на рис. 6.8 построена область соотношений моментов инерции $\bar{J}_x, \bar{J}_z$ (выделена жёлтым цветом), где выполняются условия стабилизации МКА на высоте $H = 500$ км при следующих ограничениях и начальных условиях:

$\beta_{max}^* = \psi_{max}^* = \varphi_{max}^* = 20^\circ$, $\beta_0 = \psi_0 = \varphi_0 = 0$, $\omega_{n0max} = 0,02^\circ/c$, $\omega_{x0max} = 0,01^\circ/c$ в случае равномерного распределения угловых скоростей с вероятностью $p^* = 0,95$ (рис. 6.8а) и для следующих начальных угловых скоростей $\omega_{n0max} = 0,03^\circ/c$, $\omega_{x0max} = 0,015^\circ/c$ (рис. 6.8б). Синяя прямая отвечает уравнению (6.21), голубая – (6.22), красная – (6.23). Фиолетовой точкой обозначены соотношения для МКА кубсат-6U с указанными ранее параметрами. Сравнивая рисунки 4.8 ($H = 600$ км) и 6.8 ($H = 500$ км), можно сделать вывод, что влияние гравитационного момента слабо изменяется с высотой и положение линий меняется незначительно для этих высот. Из рисунка 6.8б видно, что для МКА кубсат-6U для данных начальных угловых скоростей не будет выполняться условие $\beta_{max}^* \leq 20^\circ$.

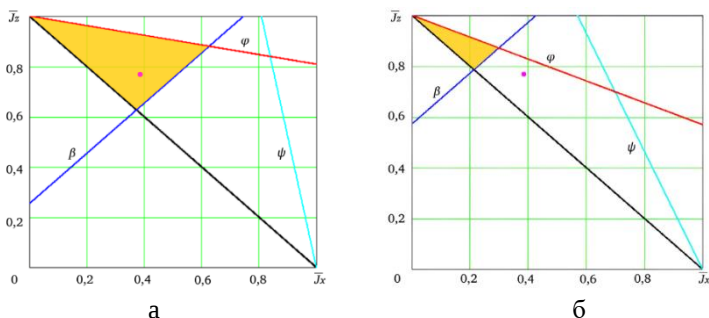


Рис. 6.8. Ограничения на соотношения моментов инерции для обеспечения гравитационной трёхосной стабилизации:

а – при $\omega_{n0max} = 0,02^\circ/c$, $\omega_{x0max} = 0,01^\circ/c$;

б – при $\omega_{n0max} = 0,03^\circ/c$, $\omega_{x0max} = 0,015^\circ/c$

С помощью выражений (6.24) – (6.29) можно построить номограммы для задания ограничений на величины начальных угловых скоростей при выбранных соотношениях моментов инерции. Так, например, для рассматриваемого МКА кубсат-6U на рис. 6.9а при

рассмотрении движения по углу β , показаны номограммы для определения ограничений на величину начальной поперечной угловой скорости зависимости от начального значения угла β_0 и его допустимого максимального значения β_{max}^* . Выполняя аналогичные действия для угла ψ можно получить ограничения на величину начальной поперечной угловой скорости. Как было отмечено в разделе 4.5, при одинаковых начальных и максимальных углах β и ψ при выполнении ограничений по углу β эти ограничения будут выполнены также и по углу ψ (рис. 6.9б). На рис. 6.9в показана номограмма для

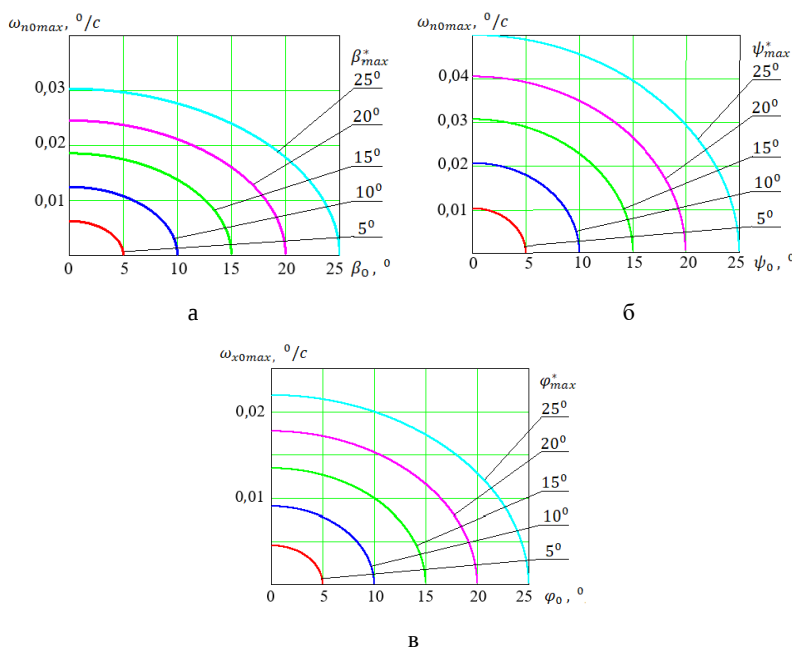


Рис. 6.9. Пример номограммы задания ограничений:
а – на величину начальной поперечной угловой скорости ω_{n0max} при рассмотрении движения по углу β ; б – на величину начальной продольной угловой скорости ω_{n0max} при рассмотрении движения по углу ψ ; в – на величину начальной продольной угловой скорости ω_{x0max} при рассмотрении движения по углу φ

определения ограничений на величину начальной продольной угловой скорости в зависимости от начального значения угла φ_0 и его допустимого максимального значения φ_{max}^* . Номограммы рассчитаны для вероятности $p^* = 0,95$ и высоты полёта $H = 500$ км.

Гравитационно-аэродинамическая трёхосная стабилизация

Гравитационно-аэродинамическая трёхосная стабилизация применима для любых соотношений гравитационного и аэродинамического моментов, так как используются оба момента (область 4 на рис. 6.5).

Для обеспечения трёхосной гравитационно-аэродинамической стабилизации можно использовать алгоритм, приведённый в разделе 4.6.

1. Смещение центра масс относительно геометрического центра МКА вдоль осей Ox и Oy (величины Δx , Δy) необходимо сделать минимально возможными.

2. Выбрать проектные параметры, удовлетворяющие заданным ограничениям по углу прецессии ψ , с помощью формул (6.19) или (6.22) в зависимости от выбранного закона распределения.

3. Для выбранных соотношений моментов инерции выбрать запас статической устойчивости по оси Oz (Δz), при этом ограничение на величину начальной поперечной угловой скорости берётся такое же, как и при рассмотрении движения по углу прецессии ψ . Требование к величине запаса статической устойчивости Δz находится по следующим формулам:

– в случае, если начальная угловая скорость имеет распределение Рэлея

$$\Delta z \geq J_y [\ln(1 - p^*) \sigma^2 + c_1 (\cos^2 \alpha_{max}^* - \cos^2 \alpha_0) + a_x (u(\alpha_{max}^*) - u(\alpha_0))] / [c_0 S q(H) (v(\alpha_{max}^*) - v(\alpha_0))]; \quad (6.30)$$

– в случае распределения начальной угловой скорости по равномерному закону в диапазоне $[0, \dot{\alpha}_{0max}]$

$$\Delta z \geq J_y [(\dot{\alpha}_{0max} p^*)^2 - 2c_1(\cos^2 \alpha_{max}^* - \cos^2 \alpha_0) - 2a_x(u(\alpha_{max}^*) - u(\alpha_0))] / [-2c_0 Sq(H)(v(\alpha_{max}^*) - v(\alpha_0))]. \quad (6.31)$$

4. Определить ограничение на величину начальной продольной угловой скорости МКА ω_{x0} .

Если величина начальной продольной скорости ω_{x0} имеет нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием, и среднеквадратичным отклонением σ , то ограничение на σ определяется по формуле:

$$\sigma = \sqrt{\frac{-2k_S \Delta \bar{z} c_0 S l q(H)}{J_x} (\cos \varphi_{max} - \cos \varphi_0) + \frac{\mu}{(R_3 + H)^3} \left(\frac{J_z - J_y}{J_x} \right) (\cos^2 \varphi_{max} - \cos^2 \varphi_0)}_{t^*}, \quad (6.32)$$

где t^* – аргумент функции Лапласа по заданной вероятности.

Если модуль величины ω_{x0} распределён по равномерному закону в диапазоне $[0, \omega_{x0max}]$, то ограничение на величину ω_{x0max} определяется по формуле:

$$\omega_{x0max} = \sqrt{\frac{-2k_S \Delta \bar{z} c_0 S l q(H)}{J_x} (\cos \varphi_{max} - \cos \varphi_0) + \frac{\mu}{(R_3 + H)^3} \left(\frac{J_z - J_y}{J_x} \right) (\cos^2 \varphi_{max} - \cos^2 \varphi_0)}_{p^*}. \quad (6.33)$$

С помощью выражений (6.30)–(6.31), можно построить номограммы для задания требования к величине запаса статической устойчивости Δz . Так в примере из предыдущего раздела при соотношениях угловых скоростей $\omega_{n0max} = \frac{0,03^0}{c}$, $\omega_{x0max} = 0,015^0/c$ не выполняется условие по углу $\beta_{max}^* = 20^0$ для указанного МКА кубсат-6U. Тогда по формуле (6.31) можно подобрать величину запаса статической устойчивости по оси z, позволяющую выполнить данное ограничение. В данном примере она будет составлять 4 см. Это

обусловлено очень низкой плотностью атмосферы на рассматриваемой высоте. При движении на более низких высотах использование аэродинамического момента совместно с гравитационным оказывается более эффективным, что можно увидеть из рис. 6.10а, где приведены зависимости величины запаса статической устойчивости Δz от высоты полёта H и от величины $\dot{\alpha}_{0max} = \omega_{n0max}$ (начальная поперечная угловая скорость распределена по равномерному закону) для значений $\beta_{max}^* = 20^\circ$, $\beta_0 = 0^\circ$, вероятности $p^* = 0,95$, смещения центра масс вдоль продольной оси $\Delta x = 0,0005$ м. Расчёты проводились для стандартной плотности атмосферы Земли [15]. На рис. 6.10б показана номограмма для определения ограничений на величину начальной продольной угловой скорости в зависимости от начального значения угла φ_0 и его допустимого максимального значения φ_{max}^* . Номограмма рассчитана для вероятности $p^* = 0,95$ и высоты полёта $H = 500$ км. Можно сделать вывод, что по сравнению с использованием трёхосной гравитационной стабилизации (см. рис. 6.9в) при добавлении смещения центра масс по оси z достигается ослабление ограничений на величину начальной продольной угловой скорости ω_{x0max} даже на высоте 500 км.

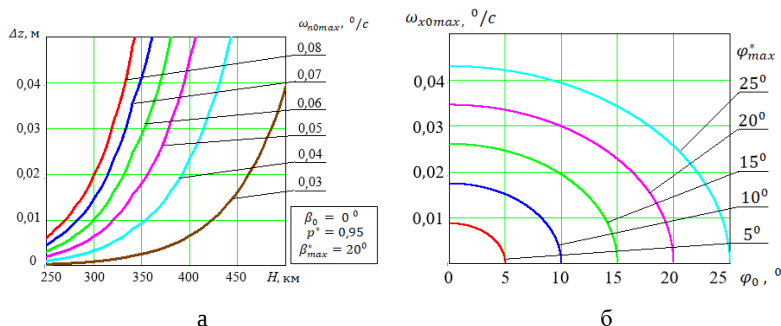


Рис. 6.10. Пример номограммы для задания требования:

- а – к величине запаса статической устойчивости Δz ;
- б – на величину начальной продольной угловой скорости ω_{x0max} при рассмотрении движения по углу φ

Глава 7. ТЕХНОЛОГИЯ ПРОЕКТИРОВАНИЯ ПАССИВНОГО УГЛОВОГО ДВИЖЕНИЯ НИЗКООРБИТАЛЬНОГО МКА

Опираясь на полученные результаты, была разработана технология проектирования движения относительно центра масс МКА с пассивной гравитационной и/или аэродинамической системой стабилизации на основе приведённых математических моделей [42]. Под ней понимается комплексный подход к совместному выбору проектных параметров (тензор инерции, смещение центра давления относительно центра масс), а также задание требований к начальным условиям углового движения после работы системы управления, которая обеспечивает перевод МКА после отделения от транспортно-пускового контейнера в положение равновесия, соответствующее целям и задачам космической миссии.

7.1. Этапы технологии проектирования пассивного углового движения МКА

Предлагаемая технология состоит из следующих этапов.

1. Согласно техническому заданию анализируется миссия МКА, рассматриваются цели и задачи, характеристики научной аппаратуры, параметры орбиты выведения с учётом формата аппарата и возможного наличия выносных конструкций.

На основе проведённого анализа выбирается метод пассивной системы стабилизации из описанных выше, а кроме того, решается вопрос, нужно ли задействовать предварительную систему активного успокоения, например, магнитные катушки.

2. Затем в соответствии с задачами миссии и характеристиками научной аппаратуры определяются ограничения на максимальные углы отклонений от нужных направлений, возникающих во время работы аппарата. По аналитическим выражениям, полученным в разделах 4, 6 при помощи выбранного закона распределения начальных угловых скоростей движения строятся номограммы. На их основе определяются предварительные значения проектных параметров МКА, таких как геометрические размеры, запас статической устойчивости, моменты инерции для обеспечения выбранного метода стабилизации.

3. После этого МКА разрабатывается в САПР. На основе выбранного метода стабилизации определяется взаимное расположение основных компонентов МКА таким образом, чтобы удовлетворить требованиям, предъявляемым к проектным параметрам, включая техническую функциональность каждого элемента, с учётом ограничений, связанным с физическими характеристиками и объёмом аппарата.

Затем в САПР определяются предварительные массо-центровочные и инерционные характеристики (МЦИХ) МКА.

4. Далее выполняются детальные расчёты по полной модели движения аппарата относительно его центра масс. При этом используется уточнённая модель аэродинамических характеристик, которая всецело учитывает внешнюю геометрию МКА, в том числе и наличие выносных конструкций. Вычисления производятся при различных начальных условиях углового движения, чтобы обеспечить требуемое угловое движение МКА в пространстве.

На этом этапе при необходимости вносятся коррективы в проект, например, меняется компоновка МКА для соответствия заданным параметрам движения относительно центра масс, устанавливаются балансировочные грузики.

После того как с помощью расчётов подтверждается, что угловое движение отвечает требуемым условиям, согласовывается окончательный проектный облик МКА и начинается его изготовление.

5. На специализированном стенде проводятся испытания для определения МЦИХ изготовленного МКА. Полученные характеристики сравниваются с рассчитанными в САПР, и при необходимости принимается решение об установке дополнительных балансировочных грузов, масса и оптимальное расположение которых также выбираются в САПР с учётом имеющихся ограничений. После установки грузов МЦИХ МКА вычисляются повторно.

6. Далее с использованием экспериментально полученных МЦИХ моделируется движение МКА, при этом учитывается погрешность определения параметров при различных начальных условиях движения в окрестности устойчивых положений равновесия.

7. В заключение формулируются требования к углам и угловым скоростям для транспортно-пускового контейнера или для системы предварительного активного успокоения, предназначенной для перевода МКА в сформированную область положения равновесия.

На рис. 7.1 приведена краткая схема проектирования углового движения МКА с пассивной системой стабилизации.

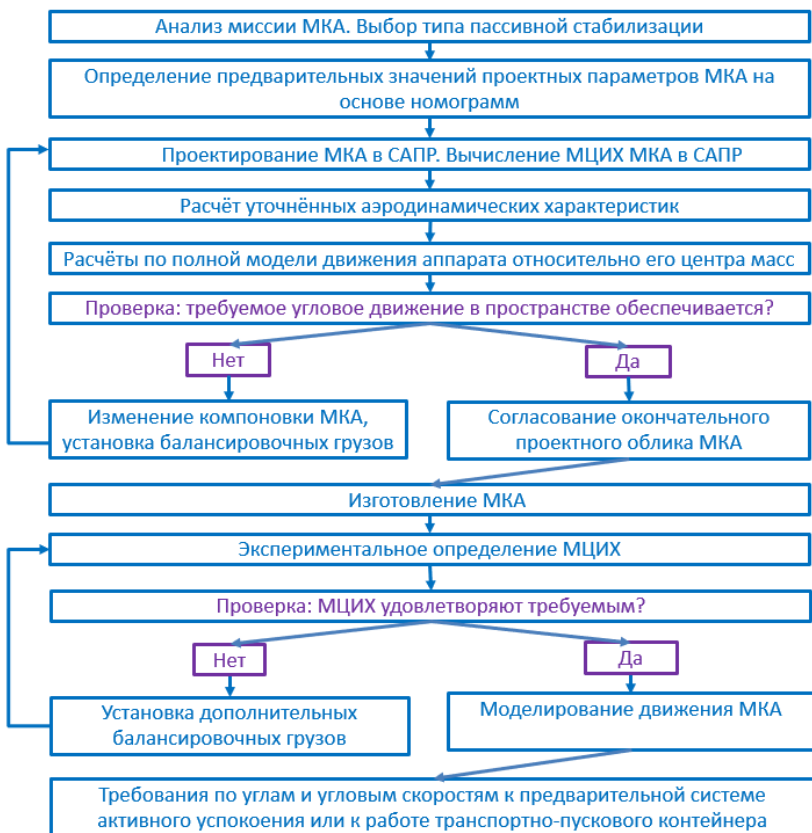


Рис. 7.1. Схема проектирования углового движения МКА с пассивной системой стабилизации

7.2. Применение технологии проектирования углового движения при создании наноспутника СамСат-Ионосфера

Технология проектирования углового движения используется при создании научно-образовательных МКА в Самарском университете. Рассмотрим предлагаемый подход на примере наноспутника

СамСат-Ионосфера (рис. 7.2), запуск которого состоялся 5 ноября 2024 г. Аппарат предназначен для исследования параметров верхней ионосферы, состояния плазмы и магнитного поля Земли на орбите высотой 500 км.

Согласно предложенной технологии с учётом высоты полёта и научных задач миссии параметры аппарата выбирались таким образом, чтобы обеспечить пассивную гравитационно-аэродинамическую систему стабилизации для ориентации чувствительного элемента датчика параметров плазмы перпендикулярно вектору набегающего потока.

После выбора гравитационно-аэродинамической системы стабилизации на основе серии номограмм были установлены области проектных параметров НС СамСат-Ионосфера. Сначала были построены номограммы, позволившие определить соотношения главных моментов инерции, при которых обеспечивается трёхосная гравитационная стабилизация, исходя из ограничений на максимально допустимые отклонения углов от заданных направлений для различных начальных угловых скоростей движения. Посредством других номограмм выбиралось смещение центра масс по поперечной оси при учёте действия аэродинамического момента.

В процессе проектирования СамСат-Ионосфера в САПР (для расчётов использовался Solid Works 2020) основная сложность состояла в том, чтобы максимально увеличить разницу между поперечными осевыми моментами инерции: так как МКА имеет формат ЗУ, довольно затруднительно изготовить его динамически несимметричным. В связи с этим было предложено установить балансировочный груз в виде цилиндра на одну из антенн, что позволило увеличить требуемую разницу поперечных моментов инерции и сдвинуть центр масс в нужную сторону.

Наноспутник СамСат-Ионосфера имеет выносные конструкции: четыре открывающиеся телеметрические антенны, магнитометр, располагающийся на выносной штанге, и датчик параметров плазмы с откидным механизмом (рис. 7.2). Ввиду этого его аэродинамические характеристики отличаются от характеристик аппарата без выносных конструкций.

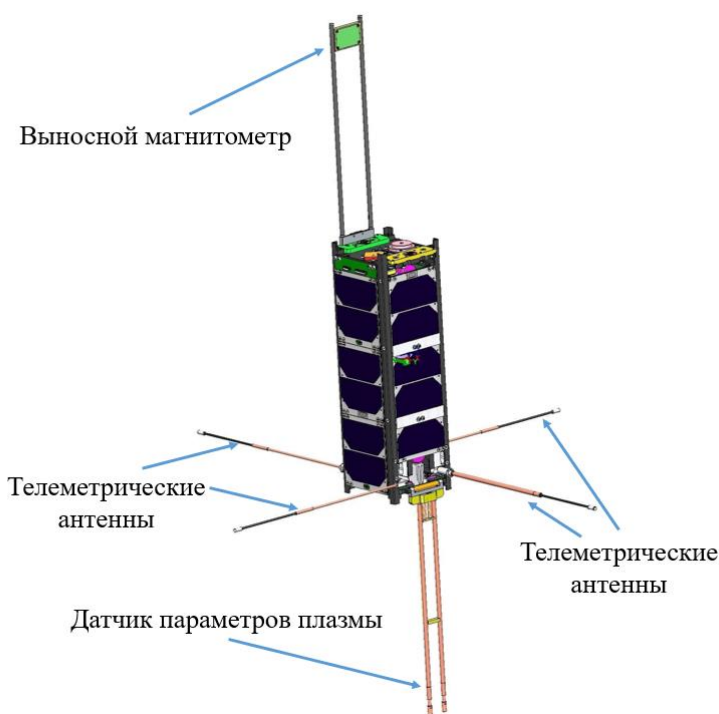


Рис. 7.2. Наноспутник СамСат-Ионосфера в лётной конфигурации

С использованием САПР были рассчитаны зависимости площади проекции НС СамСат-Ионосфера на плоскость, перпендикулярную набегающему потоку, а также положение центра давления (ΔY_a и ΔZ_a) в скоростной системе координат в зависимости от углов

ориентации. На рис. 7.3 приведена зависимость площади проекции НС СамСат-Ионосфера на плоскость, перпендикулярную вектору скорости набегающего потока, от углов ориентации.

На основании этих зависимостей была сформирована модель аэродинамического момента, которая применялась при моделировании движения относительно центра масс.

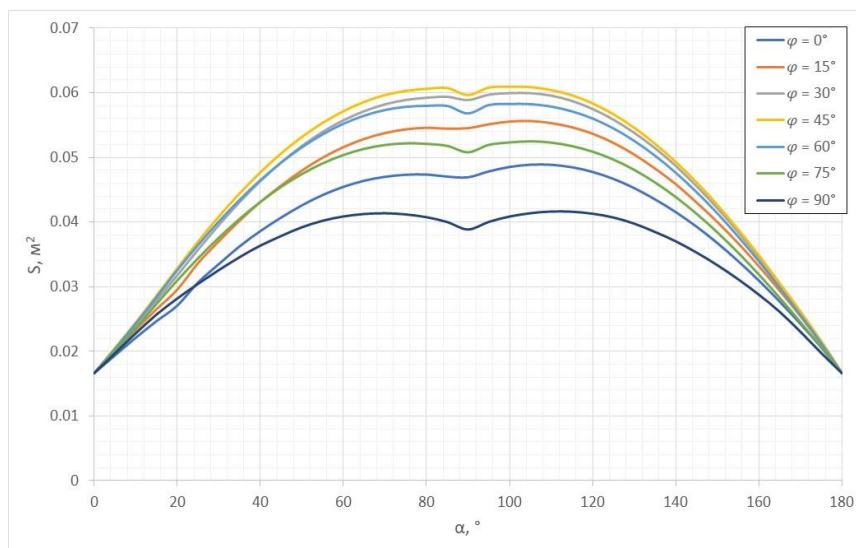


Рис. 7.3. Площадь проекции НС СамСат-Ионосфера на плоскость, перпендикулярную вектору скорости набегающего потока

Расчёты движения относительно центра масс, произведённые с помощью вычисленных в САПР МЦИХ, и уточнённые аэродинамические характеристики позволили окончательно согласовать компоновку МКА.

После изготовления аппарата, на специализированном стенде, разработанном и изготовленном в Самарском университете, была проведена серия экспериментов по определению

МЦИХ МКА в транспортной конфигурации. Данный стенд обеспечивает определение координат центра масс с погрешностью не более 0,5 мм и осевых моментов инерции с погрешностью не более 1,5% [43,44].

Поскольку оснастка стенда позволяет найти МЦИХ МКА только для транспортной конфигурации, то есть при сложенных трансформируемых конструкциях, то по методике, описанной в [45], был произведён их пересчёт для лётной конфигурации.

Полученные характеристики с учётом погрешности их определения удовлетворили требованиям к проектным параметрам, потому устанавливать дополнительные балансировочные грузы не потребовалось. В таблице 7.1 приведены экспериментально определённые МЦИХ лётного образца НС СамСат-Ионосфера.

Таблица 7.1. МЦИХ НС СамСат-Ионосфера
в лётной конфигурации

Характеристики	Значения
Масса m , г	$3547 \pm 0,4$
Координата x_c ЦМ, мм	$174,5 \pm 0,5$
Координата y_c ЦМ, мм	$50,6 \pm 0,5$
Координата z_c ЦМ, мм	$54,6 \pm 0,5$
Осевой момент инерции J_x , кг·м ²	$0,00988 \pm 0,00013$
Осевой момент инерции J_y , кг·м ²	$0,05366 \pm 0,00013$
Осевой момент инерции J_z , кг·м ²	$0,05223 \pm 0,00013$
Центробежный момент инерции J_{xy} , кг·м ²	$-0,00010 \pm 0,00020$
Центробежный момент инерции J_{xz} , кг·м ²	$-0,00283 \pm 0,00020$
Центробежный момент инерции J_{yz} , кг·м ²	$0,00008 \pm 0,00020$

Наличие центробежных моментов инерции приводит к тому, что главные оси инерции повёрнуты на некоторые углы относительно системы координат, оси которой параллельны рёбрам МКА.

Поскольку характеристики МКА известны с некоторой погрешностью, для оценки перекоса осей рассматривались предельные случаи.

Далее были произведены многочисленные расчёты по полной модели, которая учитывает также движение центра масс, с использованием экспериментально определённых МЦИХ и сформированной модели аэродинамического момента, учитывающей наличие выносных конструкций. Моделирование проводилось для различных параметров НС СамСат-Ионосфера в пределах погрешности определения МЦИХ. При расчётах использовалась стандартная модель плотности атмосферы Земли в соответствии с ГОСТ 4401-81 [15] и ГОСТ 25645.101-83 [26], где плотность атмосферы приводится с учётом времени суток и солнечной активности.

На рис. 7.4 в качестве примера показаны результаты моделирования по полной модели движения для номинальных параметров наноспутника при нулевых начальных угловых скоростях относительно орбитальной системы координат и следующих начальных углов: $\alpha_0 = 90^\circ$, $\psi_0 = 0^\circ$, $\varphi_0 = 0^\circ$. Расчёты выполнялись для стандартной плотности атмосферы Земли в соответствии с ГОСТ 4401-81 [15]. Из рисунка можно видеть, что наноспутник совершает колебания относительно балансировочных значений углов $\alpha = 86^\circ$, $\psi = -0,1^\circ$, $\varphi = 5^\circ$.

Многократное моделирование пространственного движения для сформированной области положений равновесия по углам и угловым скоростям при действии аэродинамического и гравитационного моментов показало, что даже при максимальных погрешностях определения МЦИХ НС СамСат-Ионосфера, обеспечивается трёхосная гравитационно-аэродинамическая стабилизация.

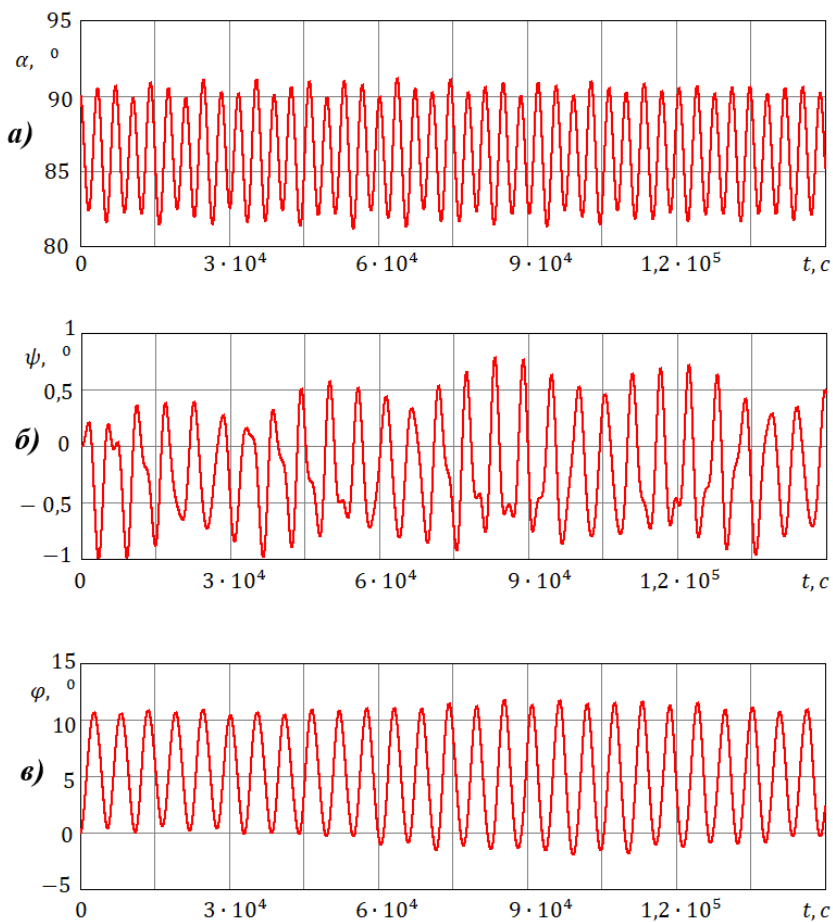


Рис. 7.4. Результаты численного моделирования:
а – угол атаки; б – угол прецессии; в – угол собственного вращения

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Nanosats Database [Электронный ресурс]. – URL: <https://www.nanosats.eu/cubesat> (дата обращения: 15.01.2026).
2. Белоконов И.В., Тимбай И.А. Движение наноспутника относительно центра масс на околоземных орбитах. – Самара: Издательство Самарского ун-та, 2020. – 128 с.
3. Kirillin A. et al. SSAU Nanosatellite Project for the Navigation and Control Technologies Demonstration // *Procedia Engineering*. Elsevier Ltd. – 2015. – Vol. 104. – P. 97–106.
4. Shakhmatov E. et al. SSAU Project of the Nanosatellite SamSat-QB50 for Monitoring the Earth's Thermosphere Parameters // *Procedia Eng.* – 2015. – Vol. 104. – P. 139–146.
5. QB-50 [Электронный ресурс]. – URL: <https://www.qb50.eu/> (дата обращения: 21.11.2025).
6. Новости Роскосмос Универсат [Электронный ресурс]. – URL: <http://www.roscosmos.ru/39352/> (дата обращения: 21.11.2025).
7. Новости Роскосмос Универсат [Электронный ресурс]. – URL: <https://www.roscosmos.ru/41024/> (дата обращения: 21.11.2025).
8. Маркеев А.П. Теоретическая механика. – М.: Наука, 1990. – 784 с.
9. Белецкий В.В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. – М.: Наука, 1965. – 416 с.
10. Тимбай И.А., Белоконов И.В., Крамлих А.В. [и др.]. Проблемы спутниковой радионавигации и связи для наноспутников, запускаемых с орбитальных ступеней ракет-носителей // XXI Санкт-Петербургская междунар. конф. по интегрированным навигационным системам: сб. материалов. – СПб., 2014. – С. 14–17.
11. Балк М.Б. Элементы динамики космического полета. – М.: Наука, 1965. – 340 с.
12. Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической механике. – М.: Наука, 1966. – 300 с.

13. Баринаева Е.В., Тимбай И.А. Положения относительного равновесия динамически симметричного наноспутника формата CubeSat под действием гравитационного и аэродинамического моментов // Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение. – 2019. – Т. 18, № 2. – С. 21–32.

14. Баринаева Е.В., Тимбай И.А. Исследование положений относительного равновесия динамически симметричного наноспутника формата CubeSat под действием гравитационного и аэродинамического моментов // XXVI Санкт-Петербургская междунар. конф. по интегрированным навигационным системам: сб. материалов. – СПб., 2019. – С. 123–126.

15. ГОСТ 4401-81. Атмосфера стандартная. Параметры. Введ. 27.02.81. – М.: Изд-во стандартов, 1981. – 181 с.

16. Баринаева Е.В., Тимбай И.А. Определение положений равновесия наноспутника формата CubeSat под действием гравитационного и аэродинамического моментов // XXVII Санкт-Петербургская междунар. конф. по интегрированным навигационным системам: сб. материалов. – СПб., 2020. – С. 148–151.

17. Баринаева Е.В., Тимбай И.А., Миронов Е. Численное исследование устойчивости положений равновесия наноспутника стандарта CubeSat под действием аэродинамического и гравитационного моментов // Математическое моделирование и численные методы. – 2025. – Т. 46, № 2. – С. 82–101.

18. Сарычев В.А., Гутник С.А. Исследование устойчивости положений равновесия спутника под действием гравитационного и аэродинамического моментов // Общий случай: препринт ИПМ РАН. – 2015. – № 33. – 25 с.

19. Баринаева Е.В., Миронов Е. Определение устойчивых положений равновесия наноспутника стандарта CubeSat под действием аэродинамического и гравитационного моментов: пат. 2025662150. Россия, 2025.

20.Баринова Е.В., Белоконов И.В., Тимбай И.А. Предотвращение возможности возникновения резонансных режимов движения для низковысотных спутников класса CubeSat // Гироскопия и навигация. – 2021. – Т. 29, № 4. – С. 1–19.

21.Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1969. – 576 с.

22. Belokonov I.V., Kramlikh A.V., Timbai I.A. Low-orbital transformable nanosatellite: Research of the dynamics and possibilities of navigational and communication problems solving for passive aerodynamic stabilization // Advances in the Astronautical Sciences. – 2015. – P. 383–397.

23. Баринова Е.В., Тимбай И.А., Миронов Е. Исследование плоского углового движения наноспутника стандарта CubeSat с помощью фазовых портретов // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2025. – Т. 68, № 1. – С. 28–40.

24. Белоконов И.В., Тимбай И.А., Баринова Е.В. Выбор проектных параметров наноспутника формата CubeSat с пассивной системой стабилизации // Гироскопия и навигация. – 2020. – Т. 28, № 1. – С. 81–100.

25. Белоконов И.В., Тимбай И.А., Николаев П.Н. Анализ и синтез движения аэродинамически стабилизированных космических аппаратов нанокласса формата CubeSat // Гироскопия и навигация. – 2018. – Т. 26, № 3 (102). – С. 69–91.

26. ГОСТ 25645.101-83. Атмосфера Земли верхняя. Модель плотности для проектных баллистических расчетов искусственных спутников Земли. – М.: Изд-во стандартов, 1983. – 24 с.

27. Белоконов И.В., Тимбай И.А., Устюгов Е.В. Способ аэродинамической стабилизации наноспутника класса CubeSat и устройство его осуществления (варианты): пат. 201400132 А1. США, 2015.

28. Тимбай И.А., Белоконов И.В., Давыдов Д.Д. Исследование возможности реализации пассивной трёхосной стабилизации нано-

спутника на низких орбитах // Юбилейная XXV Санкт-Петербургская междунар. конф. по интегрированным навигационным системам: сб. материалов. – СПб., 2018. – С. 369–372.

29. Белецкий В.В. Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. – М.: Наука, 1975. – 312 с.

30. Белоконов И.В., Тимбай И.А., Давыдов Д.Д. Пассивные системы стабилизации наноспутников формата CubeSat: общие принципы и особенности построения // XXVI Санкт-Петербургская междунар. конф. по интегрированным навигационным системам: сб. материалов. – СПб., 2019. – С. 98–104.

31. Белоконов И.В., Тимбай И.А., Курманбеков М.С. Пассивная гравитационно-аэродинамическая стабилизация наноспутника // XXIV Санкт-Петербургская междунар. конф. по интегрированным навигационным системам: сб. материалов. – СПб., 2017. – С. 412–415.

32. Platus D.H. Dispersion of spinning missiles due to lift nonaveraging // AIAA J. – 1977. – Vol. 15, no. 7. – Pp. 909–915.

33. Баринаева Е.В., Белоконов И.В., Тимбай И.А. Исследование резонансных режимов движения наноспутника под действием аэродинамического момента // XXVII Санкт-Петербургская междунар. конф. по интегрированным навигационным системам: сб. материалов. – СПб., 2020. – С. 135–138.

34. Ярошевский В.А. Движение неуправляемого тела в атмосфере. – М.: Машиностроение, 1978. – 168 с.

35. Белоконов В.М., Белоконов И.В., Заболотнов Ю.М. Ускоренный расчет траекторий снижения в атмосфере неуправляемых КА с учетом их движения относительно центра масс // Космические исследования. – 1983. – Т. 21, № 4. – С. 512–521.

36. Асланов В.С., Тимбай И.А., Бойко В.В. Пространственные колебания осесимметричного аппарата на произвольных углах атаки при снижении в атмосфере планеты // Космические исследования. – 1981. – Т. 19, № 5. – С. 680–687.

37. Баринаева Е.В., Белоконов И.В., Тимбай И.А. К вопросу прогнозирования падения высоты орбиты наноспутника формата CubeSat с учетом его движения относительно центра масс // XXX Юбилейная Санкт-Петербургская междунар. конф. по интегрированным навигационным системам: сб. материалов. – СПб., 2023. – С. 354–357.

38. Волосов В.М., Моргунов Б.И. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. – М.: МГУ, 1971. – 508 с.

39. Баринаева Е.В., Белоконов И.В., Тимбай И.А. Исследование неуправляемого движения относительно центра масс наноспутников формата CubeSat 6U под действием аэродинамического и гравитационного моментов // Инженерный журнал: наука и инновации. – 2025. – Т. 157, № 1.

40. Баринаева Е.В., Белоконов И.В., Тимбай И.А. Выбор проектных параметров наноспутников формата CubeSat 6U для обеспечения пассивной трёхосной стабилизации // Космическая техника и технологии. – 2024. – Т. 45, № 2. – С. 20–36.

41. Barinova E.V., Belokonov I.V., Timbay I.A. Choice of Design Parameters of a CubeSat 6U for Providing Three-axis Passive Stabilization // Proc. Int. Astronaut. Congr. IAC, 2022. – Vol. 2022-September.

42. Баринаева Е.В., Белоконов И.В., Тимбай И.А. Технология проектирования углового движения малоразмерного космического аппарата стандарта CUBESAT с пассивной системой стабилизации // Гироскопия и навигация. – 2024. – Т. 45, № 2. – С. 20–36.

43. Васин П.В., Баринаева Е.В. Методика определения погрешности стенда измерения масс-центровочных и инерционных характеристик наноспутников с помощью эталонных объектов // Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение. – 2022. – Т. 21, № 3. – С. 112–125.

44. Белоконов И.В. [и др.]. Технология и способ экспериментального определения масс-центровочных и инерционных характеристик наноспутников формата CUBESAT // Космическая техника и технологии. – 2021. – Т. 34, № 3. – С. 83–95.

45. Васин П.В., Барина Е.В. Алгоритм определения масс-центровочных и инерционных характеристик опытного образца наноспутника SamSat-ION в лётной конфигурации // Труды ФГУП «НПЦАП». Системы и приборы управления. – 2023. – № 2. – С. 26–34.

Учебное издание

*Баринова Елена Витальевна,
Белоконов Игорь Витальевич,
Тимбай Иван Александрович*

**ПРОЕКТИРОВАНИЕ УГЛОВОГО ДВИЖЕНИЯ
МАЛОРАЗМЕРНЫХ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ
СТАНДАРТА КУБСАТ НА НИЗКИХ ОРБИТАХ**

Учебное пособие

Редакционно-издательская обработка
издательства Самарского университета

Подписано в печать 22.06.2026. Формат 60х84 1/16.

Бумага офсетная. Печ. л. 7,375.

Тираж 120 экз. (1-й з-д 1-27). Заказ № . Арт. – 13(УП)/2026.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)
443086, Самара, Московское шоссе, 34.

Издательство Самарского университета.
443086, Самара, Московское шоссе, 34.