МИНИСТЕРСТВО ОБЩЕГО И ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Кафедра функционального анализа и теории функций

НЕКОТОРЫЕ ГЛАВЫ ТЕОРИИ МЕРЫ.I

Методические указания к спецкурсу
для студентов 3-4 курсов специализации "Функциональный анализ"

Издательство "Самарский университет"
1998

Печатается по решению Редакционно-издательского совета Самарского государственного университета

В методических указаниях приведены некоторые классические результаты теории меры, знание которых необходимо студентам, специализирующимся по кафедре функционального анализа и теории функций. Подробно изучены свойства векторной меры, ее супремации, вариации и полувариации, доказано разложение Хана и Жордана, рассмотрена абсолютная непрерывность мер и теорема Лебега о разложении.

Составитель канд.физ.-мат.наук М.Г.Свистула
Рецензент профессор В.М.Климкин

Редактор Н.А.Волынкина
Компьютерная верстка, макет М.Г.Лобова

ЛР № 020316 от 04.12.96. Подписано в печать 17.12.98.
Формат 60x84/16. Бумага офсетная. Объем 1,16 усл.печ.л., 1,25 уч.-изд.л.
Тираж 100 экз. Заказ № 123
Издательство «Самарский университет», 443011,
г.Самара, ул.Акад.Павлова, 1.

УОП СамГУ. ПЛД № 67-43 от 19.02.98.

Цель данных методических указаний – доказать некоторые фундаментальные результаты теории меры, необходимые для дальнейшей работы по этой тематике. Основное содержание отражено в названиях параграфов. Лучше освоить материал поможет самостоятельная работа над упражнениями. Предполагается, что читатель знаком с мерой Лебега на прямой и плоскости и интегралом Лебега. Этот материал можно найти в книге [3].

Нумерация двойная: так, 1.7 – это сообщение 7 из параграфа 1.

§1. σ – алгебры

В дальнейшем T – некоторое непустое множество, Σ – некоторый непустой класс его подмножеств.

Определение 1.1. Последовательность попарно не пересекающихся множеств $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$, где $E_n \subset T$, будем называть *спектром.*

Определение 1.2. Пусть $E \subset T$. Введем обозначение $E \cap \Sigma = \{EF,\ F \in \Sigma\}$.

Определение 1.3. Класс множеств Σ называется σ – *алгеброй*, если он удовлетворяет следующим условиям:

1) если $E \in \Sigma$, то $T \setminus E \in \Sigma$ (замкнутость класса Σ относительно образования дополнений);

2) если $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \Sigma$, то $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n \in \Sigma$ (замкнутость класса Σ относительно образования счетных объединений).

Упражнение 1.4. Пусть Σ – σ – алгебра. Доказать:

1) $\emptyset \in \Sigma$, $T \in \Sigma$;

2) если $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \Sigma$, то $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n \in \Sigma$;

3) пусть $E \subset T$, тогда $E \cap \Sigma$ – σ – алгебра подмножеств E.

Упражнение 1.5. Класс множеств Σ является σ – алгеброй тогда и только тогда, когда он замкнут относительно образования дополнений и счетных пересечений.

Приведем некоторые примеры σ – алгебр:

Пусть $M \subset T$, $\Sigma = \{E \subset T : M \subset E$ или $ME = \emptyset\}$. Легко доказать, что Σ – σ – алгебра. Если $M = T$, то $\Sigma = \{\emptyset, T\}$. Если $M = \emptyset$, то Σ является множеством всех подмножеств T.

Упражнение 1.6. Пусть $T = N$ – множество натуральных чисел. Будет ли σ – алгеброй класс множеств $\Sigma = \{E \subset N : E$ – конечное или $N \setminus E$ – конечное$\}$? Здесь пустое множество считаем конечным.

Определение 1.7. Пусть $\mathcal{E}$ - некоторый класс подмножеств T.

Класс множеств Σ называется *σ – алгеброй, порожденной $\mathcal{E}$*, обозначается $\sigma(\mathcal{E})$, если выполняются следующие условия:

1) $\mathcal{E} \subset \Sigma$;

2) Σ – σ – алгебра;

3) если Σ' – некоторая σ – алгебра подмножеств T и $\mathcal{E} \subset \Sigma'$, то $\Sigma \subset \Sigma'$.

Другими словами, $\sigma(\mathcal{E})$ есть наименьшая σ – алгебра, содержащая $\mathcal{E}$. Из определения 1.7. очевидно, что если $\sigma(\mathcal{E})$ существует, то она единственна.

Теперь докажем существование $\sigma(\mathcal{E})$. Заметим, что найдется хотя бы одна σ – алгебра, содержащая $\mathcal{E}$, например, σ – алгебра всех подмножеств T. Рассмотрим пересечение всех σ – алгебр, содержащих $\mathcal{E}$. В качестве упражнения предлагаем читателю доказать, что этот класс множеств есть $\sigma(\mathcal{E})$.

Пример 1.8. Пусть $T = R$ – множество действительных чисел, $\mathcal{E} = \{(a, b), \text{где } -\infty < a < b < +\infty\}$. Тогда $\sigma(\mathcal{E})$ называют *борелевской σ – алгеброй на прямой.*

Множество $A \subset R$ назовем *ноль – множеством*, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такая последовательность интервалов $\{(a_n, b_n)\}_{n=1}^{\infty}$, что $A \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n)$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n) < \varepsilon$.

Пусть $\Sigma = \{E \subset T : E = F\Delta A, \text{ где } F \text{ – борелевское, } A \text{ – ноль – множество}\}$. Предоставляем читателю проверить, что Σ – σ – алгебра. Её называют *σ – алгеброй измеримых по Лебегу подмножеств прямой.*

§2. Меры. Основные свойства

Всюду в дальнейшем класс множеств Σ является σ – алгеброй, под X понимается либо линейное нормированное пространство над R (сокращённо лнп), либо $(-\infty, +\infty]$.

Определение 2.1. Функция множества $\mu : \Sigma \to X$ называется *конечно-аддитивной*, если для любых множеств E, $F \in \Sigma$, где $EF = \emptyset$, выполняется

$$\mu(E \cup F) = \mu(E) + \mu(F).$$

Определение 2.2. Функция множества $\mu : \Sigma \to X$ называется *мерой*, если она счетно–аддитивна, то есть для любого спектра $\{E_n\} \subset \Sigma$ выполняется

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

Мера со значениями в $(-\infty, +\infty]$ называется *скалярной.* Заметим, что $-\infty$ исключена из множества значений, чтобы избежать ситуации $(-\infty) + (+\infty)$. Будем предполагать, что *скалярная мера принимает хотя бы одно конечное значение.* Скалярная мера $\mu : \Sigma \to [0, +\infty]$ называется *положительной.*

Примером положительной меры является мера Лебега $\lambda : \Sigma \to [0, +\infty]$, где Σ – σ – алгебра измеримых по Лебегу подмножеств прямой.

Пример 2.3. Пусть $\lambda : \Sigma \to [0, +\infty]$ – мера Лебега на прямой $f : (-\infty, +\infty) \to [-\infty, +\infty]$ – интегрируемая по Лебегу функция. Известно, что неопределенный интеграл $\mu(E) = \int\limits_E f\, d\lambda$, $E \in \Sigma$, является мерой $\mu : \Sigma \to (-\infty, +\infty)$.

Упражнение 2.4. Пусть $\{E_n\} \subset \Sigma$ - спектр, $\mu : \Sigma \to X$ – мера, причем в скалярном случае $\mu(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n) \neq \infty$. Тогда:

а) для любого $\varepsilon > 0$ существует конечное множество $I \subset N$ такое, что если $I \subset J \subset N$, то

$$\|\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) - \sum_{n \in J} \mu(E_n)\| < \varepsilon;$$

б) в скалярном случае ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$ сходится абсолютно.

Определение 2.5. Говорят, что функция множества $\mu : \Sigma \to X$ *исчерпывается*, если из того, что $\{E_n\}$ – спектр из Σ и $\mu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n\right) \neq \infty$, следует

$$\lim_{n \to \infty} \mu(E_n) = 0.$$

Определение 2.6. Говорят, что μ *непрерывна снизу*, если из того, что $\{E_n\}$ – возрастающая последовательность из Σ, следует

$$\lim_{n \to \infty} \mu(E_n) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n).$$

Определение 2.7. Говорят, что μ *непрерывна сверху*, если из того, что $\{E_n\}$ – убывающая последовательность из Σ и, в случае скалярной меры, существует $n_0 \in N$, для которого $\mu(E_{n_0}) \neq \infty$, следует

$$\lim_{n \to \infty} \mu(E_n) = \mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n).$$

Определение 2.8. Говорят, что μ *непрерывна сверху на пустом множестве*, если из того, что $\{E_n\}$ убывающая последовательность из Σ, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n = \emptyset$ и, в случае скалярной меры, существует $n_0 \in N$, для которого $\mu(E_{n_0}) \neq \infty$, следует

$$\lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = 0.$$

Теорема 2.9. Мера $\mu : \Sigma \to X$ обладает свойствами:

1) $\mu(\emptyset) = 0$;

2) μ конечно-аддитивна;

3) μ исчерпывается;

4) μ непрерывна снизу;

5) μ непрерывна сверху;

6) положительная мера является *монотонной*, то есть если $E, F \in \Sigma$, $E \subset F$, то $\mu(E) \leq \mu(F)$;

7) положительная мера *счетно-полуаддитивна*, то есть для любой последовательности $\{E_n\} \subset \Sigma$ имеем $\mu(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$.

Доказательство.

1) Докажем п.1 для скалярной меры. По определению существует $E \in \Sigma$ такое, что $\mu(E) \neq \infty$. В силу счетной аддитивности $\mu(E) = \mu(E) + \mu(\emptyset) + \mu(\emptyset) + \ldots$. Так как ряд справа сходится, то его общий член стремится к нулю. Следовательно, $\mu(\emptyset) = 0$.

2) Из п.1 и счетной аддитивности μ следует п.2.

3) Пусть $\{E_n\}$ – спектр из Σ и, в скалярном случае, $\mu(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n) \neq \infty$. Тогда $\mu(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$. Так как ряд справа сходится, то $\mu(E_n) \to 0$ при $n \to \infty$.

4) Пусть $\{E_n\} \subset \Sigma$ – возрастающая последовательность. Положим $F_n = E_n \setminus E_{n-1}$, $n \in N$, $E_0 = \emptyset$. Тогда $\{F_n\}$ – спектр в Σ, $\bigcup\limits_{n=1}^{m} F_n = E_m$, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} E_m$. Имеем $\mu(\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} E_m) = \mu(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n) = \lim\limits_{m\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{m} \mu(F_n) = \lim\limits_{m\to\infty} \mu(\bigcup\limits_{n=1}^{m} F_n) = \lim\limits_{m\to\infty} \mu(E_m)$.

5) Пусть $\{E_n\} \subset \Sigma$ – убывающая последовательность. В скалярном случае будем считать $\mu(E_1) \neq \infty$. Тогда на σ – алгебре $E_1 \cap \Sigma$ мера μ принимает конечные значения. Обозначим $F_n = E_1 \setminus E_n$, $n \in N$. $\{F_n\}$ – возрастающая последовательность из Σ . Очевидно, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n = E_1 \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$. Тогда $\mu(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n) = \mu(E_1) - \mu(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n) = \mu(E_1) - \lim\limits_{n\to\infty} \mu(F_n) = \lim\limits_{n\to\infty} [\mu(E_1) - \mu(F_n)] = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(E_1 \setminus F_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(E_n)$.

6) Пусть $E, F \in \Sigma$, $E \subset F$. Тогда $F = E \cup (F \setminus E)$. Имеем $\mu(F) = \mu(E) + \mu(F \setminus E)$. Так как $\mu(F \setminus E) \geq 0$, то $\mu(E) \leq \mu(F)$.

7) Пусть $\{E_n\} \subset \Sigma$. Положим $F_n = E_n \setminus \bigcup\limits_{i=0}^{n-1} E_i$, $n \in N$, $E_0 = \emptyset$. Тогда $\{F_n\}$ – спектр из Σ, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$, $\mu(F_n) \leq \mu(E_n)$. Получаем $\mu(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n) = \mu(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(F_n) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$.

Замечание. Как показывает следующий пример, без условия конечности в определениях исчерпываемости и непрерывности сверху п.3 и п.5 не справедливы.

Пусть $\lambda : \Sigma \to [0, +\infty]$ – мера Лебега на прямой. Рассмотрим спектр $\{E_n\} \subset \Sigma$, где $E_n = (n, n+1]$, и убывающую последовательность $\{F_n\} \subset \Sigma$, где $F_n = [n, +\infty)$. Очевидно $\lambda(E_n) = 1 \not\to 0$, $n \to \infty$, $\lambda(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n) = \lambda(\emptyset) = 0$, в то время как $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda(F_n) = +\infty$.

Упражнение 2.10. Пусть Σ – σ – алгебра измеримых по Лебегу подмножеств отрезка $[0,1]$, X – банахово пространство действительных ограниченных на отрезке $[0,1]$ функций с нормой $\|x\| = \sup\{|x(t)|, t \in [0,1]\}$. Определим $\mu : \Sigma \to X$, положив $\mu(E) = \mathcal{X}_E$, $E \in \Sigma$. Здесь $\mathcal{X}_E$ – характеристическая функция множества E. Проверить, что μ конечно – аддитивна. Будет ли μ мерой ?

Теорема 2.11. Пусть $\mu : \Sigma \to X$ – конечно - аддитивная функция множества, X – лнп. Следующие условия эквивалентны:

1) μ счетно – аддитивна;

2) μ непрерывна снизу;

3) μ непрерывна сверху;

4) μ непрерывна сверху на пустом множестве.

Доказательство. Импликации 1) $\Rightarrow$ 2), 2) $\Rightarrow$ 3) доказаны в теореме 2.9. Очевидно, 3) $\Rightarrow$ 4). Докажем, что 4) $\Rightarrow$ 1). Пусть $\{E_n\}$ – спектр из Σ. Положим $F_m = \bigcup\limits_{n=m+1}^{\infty} E_n$ $m \in N$. $\{F_m\}$ – убывающая последовательность из Σ. $\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} F_m = \emptyset$. $\mu(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n) = \mu(\bigcup\limits_{n=1}^{m} E_n) + \mu(F_m)$.

Имеем $\sum\limits_{n=1}^{m} \mu(E_n) = \mu(\bigcup\limits_{n=1}^{m} E_n) = \mu(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n) - \mu(F_m)$. Так как $\mu(F_m) \to 0$ при $m \to \infty$, то $\lim\limits_{m\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{m}(E_n) = \mu(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n)$.

Замечание. Пусть $\Sigma - \sigma$ – алгебра всех подмножеств N. Для $E \in \Sigma$ положим

$$\mu(E) = \begin{cases} 0, & \text{если } E \text{ конечно} \\ +\infty, & \text{если } E \text{ бесконечно} \end{cases}$$

μ конечно – аддитивна, непрерывна сверху на пустом множестве, но не является счетно – аддитивной. Следовательно, импликация 4) $\Rightarrow$ 1) не верна, когда для μ допускаются бесконечные значения.

Пример 2.12. Пусть $\mu : \Sigma \to L_p[0,1]$, $1 \leq p < +\infty$, где Σ – σ – алгебра измеримых по Лебегу подмножеств [0,1], $\mu(E) = \mathcal{X}_E$, $E \in \Sigma$. Покажем, что μ является мерой. Конечная аддитивность μ очевидна: если $E, F \in \Sigma$, $EF = \emptyset$, то $\mu(E \cup F) = \mathcal{X}_{E \cup F} = \mathcal{X}_F + \mathcal{X}_F = \mu(E) + \mu(F)$. Для любого $E \in \Sigma$ имеем $\|\mu(E)\| = (\int \mathcal{X}_E d\lambda)^{\frac{1}{p}} = [\lambda(E)]^{\frac{1}{p}}$, где λ – мера Лебега на Σ. Пусть теперь $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ – убывающая последовательность множеств из Σ и $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n = \emptyset$. Так как $\|\mu(E_n)\| = [\lambda(E_n)]^{\frac{1}{p}}$ и $\lambda(E_n) \to 0$ при $n \to \infty$, то $\mu(E_n) \to 0$ при $n \to \infty$. Значит, μ непрерывная сверху на пустом множестве. В силу теоремы 2.11 μ счетно - аддитивна.

Упражнение 2.13. Пусть $\mu : \Sigma \to X$ – мера, $B : X \to Y$ – линейный непрерывный оператор, X, Y – лнп. Доказать, что $\varphi(E) = B(\mu(E))$, $E \in \Sigma$, является мерой.

Теорема 2.14. Пусть $\mu : \Sigma \to X$ – мера, X – лнп. Тогда ее образ $\mu(\Sigma)$ является ограниченным подмножеством X.

Доказательство. Предположим, что $\mu(\Sigma)$ не ограничено. Обозначим $T_1 = T$. Существует $E_1 \in T_1 \cap \Sigma$ такое, что $\|\mu(E_1)\| \geq \|\mu(T_1)\| + 1$. Обозначим $F_1 = T_1 \setminus E_1$. Так как $\|\mu(E_1)\| \leq \|\mu(T_1)\| + \|\mu(F_1)\|$, то $\|\mu(F_1)\| \geq 1$. Итак, $\|\mu(E_1)\| \geq 1$, $\|\mu(F_1)\| \geq 1$. При этом хотя бы одно из множеств $\mu(E_1 \cap \Sigma)$, $\mu(F_1 \cap \Sigma)$ не ограничено, в противном случае было бы ограничено множество $\mu(T_1 \cap \Sigma)$. Обозначим через T_2 то из множеств E_1, F_1, для которого $\mu(T_2 \cap \Sigma)$ не ограничено, а другое – через A_1.

Получим, что $\|\mu(A_1)\| \geq 1$ и $\mu(T_2 \cap \Sigma)$ не ограничено. Рассмотрим T_2 вместо T_1 и т.д. Продолжив процесс до бесконечности, получим спектр $\{A_n\} \subset \Sigma$, для которого $\|\mu(A_n)\| \geq 1$, $n \in N$, что противоречит исчерпываемости μ.

§3. Супремация, вариация и полувариация меры

Определение 3.1. Пусть $\mu : \Sigma \to X$ – некоторая функция множества. Функцию множества $\bar{\mu} : \Sigma \to [0, +\infty]$, где

$$\bar{\mu}(E) = \sup\{\|\mu(F)\|, F \in E \cap \Sigma\}, \ E \in \Sigma,$$

называют *супремацией* функции μ.

Теорема 3.2. Пусть $\mu : \Sigma \to X$ – мера. Ее супремация $\bar{\mu}$ обладает свойствами:

1) $0 \leq \|\mu(E)\| \leq \tilde{\mu}(E) \leq +\infty$, $E \in \Sigma$.

2) Если μ – положительная мера, то $\mu = \tilde{\mu}$.

3) $\tilde{\mu}(\emptyset) = 0$.

4) Пусть $E \in \Sigma$, $\tilde{\mu}(E) = 0$ тогда и только тогда, когда $\mu(F) = 0$ для любого $F \in E \cap \Sigma$.

5) Если X – лнп, то $\tilde{\mu}$ принимает только конечные значения. В случае скалярной меры $\tilde{\mu}$ принимает конечные значения на множествах конечной меры.

6) $\tilde{\mu}$ монотонна.

7) $\tilde{\mu}$ счетно-полуаддитивна.

8) $\tilde{\mu}$ исчерпывается.

9) Если X – лнп, то для любой монотонной последовательности $\{E_n\} \subset \Sigma$ имеем $\tilde{\mu}(E_n \triangle E_m) \to 0$, $n, m \to \infty$.

10) $\tilde{\mu}$ непрерывна сверху на пустом множестве.

11) $\tilde{\mu}$ непрерывна сверху и снизу.

Доказательство. П.5. Пусть $E \in \Sigma$ и, в случае скалярной меры, $\mu(E) \neq \infty$. По теореме 2.14 мера μ ограничена на σ – алгебре $E \cap \Sigma$. Значит, $\sup\{\|\mu(F)\|, F \in E \cap \Sigma\} < \infty$.

П.7. Пусть $\{E_n\}$ – спектр из Σ. Положим $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$. Возьмем $F \in E \cap \Sigma$. Тогда $F = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} FE_n$. Имеем $\|\mu(F)\| = \|\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(FE_n)\| \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \|\mu(FE_n)\| \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \tilde{\mu}(E_n)$. Перейдем в левой части к sup по всем $F \in E \cap \Sigma$. Получим $\tilde{\mu}(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \tilde{\mu}(E_n)$. Пусть теперь $\{E_n\}$ – произвольная последовательность из Σ. Рассмотрим спектр $F_n = E_n \setminus (\bigcup\limits_{i=0}^{n-1} E_i)$, $n \in N$, $E_0 = \emptyset$. Очевидно, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$, $F_n \subset E_n$. Тогда

$$\tilde{\mu}(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \tilde{\mu}(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\mu}(F_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\mu}(E_n).$$

П.8. В скалярном случае, без ограничения общности, можно считать $\mu(T) \neq \infty$. Предположим, что $\tilde{\mu}$ не исчерпывается. Тогда существуют $\varepsilon > 0$ и спектр $\{E_n\} \subset \Sigma$ такие, что $\tilde{\mu}(E_n) > \varepsilon$, $n \in N$. По определению супремации для любого $n \in N$ существует $F_n \in E_n \cap \Sigma$ такое, что $\mu(F_n) > \varepsilon$. Для спектра $\{F_n\}$ из Σ имеем $\mu(F_n) \not\to 0$, $n \to \infty$, что противоречит исчерпываемости μ.

П.9. Пусть $\{E_n\}$ – убывающая последовательность из Σ. Предположим, что $\tilde{\mu}(E_n \triangle E_m) \not\to 0$, $n, m \to \infty$. Тогда существуют $\varepsilon > 0$ и последовательность номеров $\{n_k\}$ такие, что $\tilde{\mu}(E_{n_k} \setminus E_{n_{k-1}}) > \varepsilon$, $k \in N$.

Получаем спектр $\{E_{n_k} \setminus E_{n_{k+1}}\}_{k=1}^{\infty} \subset \Sigma$, для которого $\tilde{\mu}(E_{n_k} \setminus E_{n_{k+1}}) \not\to 0$, $k \to \infty$, что противоречит исчерпываемости $\tilde{\mu}$.

П.10. Пусть $\{E_n\}$ – убывающая последовательность из Σ, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n = \emptyset$, в скалярном случае, без ограничения общности, можно считать $\mu(E_1) \neq \infty$. Возьмем $\varepsilon > 0$. По предыдущему пункту существует номер n_0 такой, что $\tilde{\mu}(E_n \setminus E_m) < \varepsilon$ при $m \geq n \geq n_0$. Пусть $n \geq n_0$, $E \in E_n \cap \Sigma$. Последовательность $\{EE_k\}_{k=n}^{\infty}$ убывает к пустому множеству. Так как μ непрерывна, то $\mu(EE_k) \to 0$, $k \to \infty$. Тогда существует номер k_0 такой, что $\|\mu(EE_{k_0})\| < \varepsilon$.

Имеем,

$$\|\mu(E)\| \leq \|\mu(E \setminus E_{k_0})\| + \|\mu(EE_{k_0})\| \leq \tilde{\mu}(E_n \setminus E_{k_0}) + \|\mu(EE_{k_0})\| \leq 2\varepsilon.$$

Перейдем в левой части к sup по $E \in E_n \cap \Sigma$. Получим $\tilde{\mu}(E_n) < 2\varepsilon$, $n \geq n_0$.

П.11. Пусть $\{E_n\}$ – убывающая последовательность из Σ, в скалярном случае будем считать $\mu(E_1) \neq \infty$. Обозначим $E = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n$. В силу монотонности $\tilde{\mu}(E) \leq \tilde{\mu}(E_n)$, $n \in N$. Тогда $\tilde{\mu}(E) \leq \lim\limits_{n\to\infty} \tilde{\mu}(E_n)$. Положим $F_n = E_n \setminus E$. Тогда $\{F_n\}$ – убывающая к пустому множеству последовательность из Σ (в скалярном случае $\mu(F_1) \neq \infty$). Так как $\tilde{\mu}$ непрерывна сверху на пустом множестве, то $\tilde{\mu}(F_n) \to 0$, $n \to \infty$. Имеем $\tilde{\mu}(E_n) \leq \tilde{\mu}(F_n) + \tilde{\mu}(E)$, $n \in N$. Перейдя к пределу, получим $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{\mu}(E_n) \leq \tilde{\mu}(E)$.

Итак,

$$\tilde{\mu}(E) = \lim \tilde{\mu}(E_n).$$

Пусть теперь $\{E_n\}$ – возрастающая последовательность из Σ, $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$. В силу монотонности $\tilde{\mu}(E) \geq \tilde{\mu}(E_n)$, $n \in N$. Тогда $\tilde{\mu}(E) \geq \lim\limits_{n\to\infty} \tilde{\mu}(E_n)$. Возьмем $F \in E \cap \Sigma$. Так как μ непрерывна снизу, то $\|\mu(F)\| = \lim\limits_{n\to\infty} \|\mu(FE_n)\| \leq \lim\limits_{n\to\infty} \tilde{\mu}(E_n)$. Тогда $\tilde{\mu}(E) \leq \lim\limits_{n\to\infty} \tilde{\mu}(E_n)$. В итоге, $\tilde{\mu}(E) = \lim\limits_{n\to\infty} \tilde{\mu}(E_n)$.

Упражнение 3.3. Обратимся к примеру 2.3. Положим $A = \{x \in R : f(x) \geq 0\}$, $B = \{x \in R : f(x) < 0\}$. Доказать, что $\tilde{\mu}(E) = \max[\mu(EA), -\mu(EB)]$.

Определение 3.4. Пусть $\mu : \Sigma \to X$ – некоторая функция множества. Для любого $E \in \Sigma$ положим

$$\overline{\mu}(E) = \sup \sum_{i=1}^{n} \|\mu(E_i)\|,$$

где sup берется по всевозможным разбиениям $\{E_i\}_{i=1}^{n}$ множества E, n – любое натуральное число. Функция $\overline{\mu} : \Sigma \to [0, +\infty]$ называется *вариацией* функции μ.

Замечание. Пусть $E \in \Sigma$. Разбиением множества E называем любой конечный набор множеств $\{E_i\}_{i=1}^{n} \subset \Sigma$, для которого $E_iE_j = \emptyset$ при $i \neq j$, $\bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i = E$.

Теорема 3.5. Пусть $\mu : \Sigma \to X$ – мера. Ее вариация $\overline{\mu}$ обладает свойствами:

1) $\tilde{\mu}(E) \leq \overline{\mu}(E)$, $E \in \Sigma$.

2) Если μ – скалярная мера, то

$$\tilde{\mu}(E) \leq \overline{\mu}(E) \leq 2\tilde{\mu}(E), \; E \in \Sigma.$$

Отсюда следует, что на множествах конечной меры $\overline{\mu}$ вместе с $\tilde{\mu}$ принимает конечные значения.

3) Если μ – положительная мера, то $\mu = \overline{\mu}$.

4) $\overline{\mu}(\emptyset) = 0$.

5) $\overline{\mu}$ монотонна.

6) $\overline{\mu}$ счетно-аддитивна.

Доказательство. П.2. Докажем неравенство $\overline{\mu}(E) \leq 2\tilde{\mu}(E)$. Пусть $\{E_i\}_{i=1}^{n}$ – разбиение E. Обозначим $I = \{i \in \overline{1,n} : \mu(E_i) \geq 0\}$, $J = \{i \in \overline{1,n} : \mu(E_i) < 0\}$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} |\mu(E_i)| = \sum_{i \in I} |\mu(E_i)| + \sum_{i \in J} |\mu(E_i)| = \sum_{i \in I} \mu(E_i) - \sum_{i \in J} \mu(E_i) =$$

$$= \mu(\bigcup_{i \in I} E_i) - \mu(\bigcup_{i \in J} E_i) = |\mu(\bigcup_{i \in I} E_i)| + |\mu(\bigcup_{i \in J} E_i)| \leq 2\tilde{\mu}(E).$$

П.6. Пусть $\{F_n\}$ – спектр из Σ. Положим $F = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$. Пусть $\{E_i\}_{i=1}^{n}$ – разбиение F. Тогда

$$\sum_{i=1}^{k} \|\mu(E_i)\| = \sum_{i=1}^{k} \|\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_iF_n)\| \leq \sum_{i=1}^{k} \sum_{n=1}^{\infty} \|\mu(E_iF_n)\| =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{k} \|\mu(E_iF_n)\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\mu}(F_n).$$

Итак, $\sum\limits_{i=1}^{n} \|\mu(E_i)\| \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \overline{\mu}(F_n)$. Перейдя в левой части неравенства к sup по всем разбиениям F, получим $\overline{\mu}(F) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \overline{\mu}(F_n)$. Докажем противоположное неравенство. Если $\overline{\mu}(F) = \infty$, то оно очевидно. Пусть

$\overline{\mu}(F) \neq \infty$. Тогда в силу монотонности вариации $\overline{\mu}(F_n) \neq \infty$, $n \in N$. Зафиксируем $k \in N$. Возьмем $\varepsilon > 0$. Для любого $n \in \overline{1,k}$ существует разбиение $\{E_{n_i}\}_{i=1}^{P_n}$ множества F_n такое, что $\sum\limits_{i=1}^{P_n} \|\mu(E_{n_i})\| > \overline{\mu}(F_n) - \frac{\varepsilon}{k}$. Справедливы неравенства $\sum\limits_{n=1}^{k} \overline{\mu}(F_n) - \varepsilon \leq \sum\limits_{n=1}^{k} \sum\limits_{i=1}^{P_n} \|\mu(E_{n_i})\| \leq \overline{\mu}(\bigcup\limits_{n=1}^{k} F_n) \leq \overline{\mu}(F)$.

Итак, для любого $k \in N$ и для любого $\varepsilon > 0$ $\sum\limits_{n=1}^{k} \overline{\mu}(F_n) - \varepsilon \leq \overline{\mu}(F)$. Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \overline{\mu}(F_n) \leq \overline{\mu}(F)$.

Пример 3.6. Обратимся к примеру 2.12 при условии, что $1 < p < +\infty$. Пусть $\mu : \Sigma \to L_p[0,1]$, Σ – σ – алгебра измеримых по Лебегу подмножеств $[0,1]$, λ– мера Лебега на Σ, $\mu(E) = \mathcal{X}_E$, $E \in \Sigma$. Ранее доказано, что μ является мерой. Вычислим её вариацию.

Пусть $E \in \Sigma$, $\lambda(E) > 0$. Зафиксируем $n \in N$. По свойствам меры Лебега существует разбиение $\{E_i\}_{i=1}^{n}$ множества E такое, что $\lambda(E_i) = \frac{\lambda(E)}{n}$, $i \in \overline{1,n}$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} \|\mu(E_i)\| = \sum_{i=1}^{n} [\lambda(E_i)]^{\frac{1}{p}} = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\lambda(E)}{n}\right]^{\frac{1}{p}} = n^{1-\frac{1}{p}} \lambda(E)^{\frac{1}{p}}.$$

Так как $n^{1-\frac{1}{p}} \to \infty$ при $n \to \infty$, то $\overline{\mu}(E) = \infty$.

Определение 3.7. Пусть $\mu : \Sigma \to X$ – некоторая функция множества, X – лнп (заметим, что здесь случай $X = (-\infty, +\infty]$ не рассматривается). Для любого $E \in \Sigma$ положим

$$\|\mu\|(E) = \sup \|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(E_i)\|,$$

где sup берется по всевозможным разбиениям $\{E_i\}_{i=1}^{n}$ множества E и наборам чисел $\{\alpha_i\}_{i=1}^{n}$, где $|\alpha_i| \leq 1$. Функция множества $\|\mu\|$ называется *полувариацией* μ.

Теорема 3.8. Пусть $\mu : \Sigma \to X$ – мера. Ее полувариация $\|\mu\|$ обладает свойствами:

1) $\|\mu\|(\emptyset) = 0$.

2) $\|\mu\|$ монотонна.

3) $\tilde{\mu} \leq \|\mu\| \leq \overline{\mu}$.

4) Если μ – скалярная мера, то $\|\mu\| = \overline{\mu}$; если μ – положительная мера, то $\mu = \tilde{\mu} = \|\mu\| = \overline{\mu}$.

5) $\|\mu\|(E) = \sup\limits_{f \in X^* : \|f\| \leq 1} \overline{f\mu}(E)$, $E \in \Sigma$, где X^* – пространство линейных непрерывных функционалов на X, $\overline{f\mu}$ – вариация скалярной меры $f\mu$.

6) $\tilde{\mu} \le \|\mu\| \le 2\tilde{\mu}$.

7) $\|\mu\|$ принимает конечные значения.

8) $\|\mu\|$ счетно-полуаддитивна.

9) $\|\mu\|$ исчерпывается, непрерывна сверху и снизу.

Доказательство. П.2. Пусть $E, F \in \Sigma$, $E \subset F$. Возьмем $\{E_i\}_{i=1}^n$ – разбиение E, $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ – набор чисел, где $|\alpha_i| \le 1$.

$$\|\sum_{i=1}^n \alpha_i\mu(E_i)\| = \|\sum_{i=1}^n \alpha_i\mu(E_i) + 0\cdot\mu(F\setminus\bigcup_{i=1}^n E_i)\| \le \|\mu\|(F).$$

Перейдя слева к sup по всем разбиениям множества E и наборам чисел $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$, где $|\alpha_i| \le 1$, получим $\|\mu\|(E) \le \|\mu\|(F)$.

П.3. Покажем, что $\tilde{\mu} \le \|\mu\|$. Пусть $E \in \Sigma$. Возьмем $F \in E\cap\Sigma$. Тогда $\|\mu(F)\| = \|\mu(F) + 0\cdot\mu(E\setminus F)\| \le \|\mu\|(E)$. Перейдем слева к sup по всем $F \in E\cap\Sigma$.

Покажем, что $\|\mu\| \le \overline{\mu}$. Возьмем $\{E_i\}_{i=1}^n$ – разбиение E, $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ – набор чисел, где $|\alpha_i| \le 1$.

$$\|\sum_{i=1}^n \alpha_i\mu(E_i)\| \le \sum_{i=1}^n |\alpha_i|\cdot\|\mu(E_i)\| \le \sum_{i=1}^n \|\mu(E_i)\| \le \overline{\mu}(E).$$

Перейдя слева к sup , получим $\|\mu\|(E) \le \overline{\mu}(E)$.

П.4. Пусть $E \in \Sigma$, $\{E_i\}_{i=1}^n$ – разбиение E. Обозначим $I_1 = \{i : \mu(E_i) \ge 0\}$, $I_2 = \{i : \mu(E_i) < 0\}$.

$$\sum_{i=1}^n |\mu(E_i)| = \sum_{i\in I_1} |\mu(E_i)| + \sum_{i\in I_2} |\mu(E_i)| = \sum_{i\in I_1} \mu(E_i) - \sum_{i\in I_2} \mu(E_i) \le \|\mu\|(E).$$

Перейдем слева к sup по всем разбиениям E , получим $\overline{\mu}(E) \le \|\mu\|(E)$. Учитывая п.3, для скалярной меры получим $\overline{\mu} = \|\mu\|$.

П.5. Напомним, что для любого элемента x, принадлежащего лнп X, $\|x\| = \sup\{|f(x)| : f \in X^*, \|f\| \le 1\}$. Возьмем $\{E_i\}_{i=1}^n$ – разбиение множества E, $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ – набор чисел, где $|\alpha_i| \le 1$. Имеем

$$\|\sum_{i=1}^n \alpha_i\mu(E_i)\| = \sup\{\|f\sum_{i=1}^n \alpha_i\mu(E_i)\| : f \in X^*, \|f\| \le 1\} =$$

$$\sup\{\|\sum_{i=1}^n \alpha_i f(\mu(E_i))\| : f \in X^*, \|f\| \le 1\} \le$$

$$\sup\{\sum_{i=1}^n \|f(\mu(E_i))\| : f \in X^*, \|f\| \le 1\} \le$$

$$\sup\{\overline{f\mu}(E) : f \in X^*, \|f\| \le 1\}.$$

Перейдя слева к sup по всем разбиениям E и наборам чисел $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$, $|\alpha_i| \leq 1$, получим

$$\|\mu\|(E) \leq \sup\{\overline{f\mu}(E) : f \in X^*, \|f\| \leq 1\}.$$

Пусть $\{E_i\}_{i=1}^n$ – разбиение E, $f \in X^*$, $\|f\| \leq 1$. Обозначим $I_1 = \{i : f\mu(E_i) \geq 0\}$, $I_2 = \{i : f\mu(E_i) < 0\}$. Имеем

$$\sum_{i=1}^n |f\mu(E_i)| = \sum_{i\in I_1} f\mu(E_i) - \sum_{i\in I_2} f\mu(E_i) =$$

$$f(\sum_{i\in I_1} \mu(E_i) - \sum_{i\in I_2} \mu(E_i)) \leq \|f\| \cdot \|\sum_{i\in I_1} \mu(E_i) - \sum_{i\in I_2} \mu(E_i)\| \leq \|\mu\|(E).$$

Перейдя слева к sup по всем разбиениям E, получим $\overline{f\mu}(E) \leq \|\mu\|(E)$. Тогда

$$\sup\{\overline{f\mu}(E) : f \in X^*, \|f\| \leq 1\} \leq \|\mu\|(E).$$

П.6. Пусть $f \in X^*$, $\|f\| \leq 1$.Известно, что $\overline{f\mu}(E) \leq 2\widetilde{f\mu}(E)$. Легко показать, что $\widetilde{f\mu}(E) \leq \tilde{\mu}(E)$. Поэтому $\overline{f\mu} \leq 2\tilde{\mu}(E)$. Перейдя слева к sup по всем $f \in X^*$, $\|f\| \leq 1$, получим $\|\mu\|(E) \leq 2\tilde{\mu}(E)$.

П.7. Так как $\tilde{\mu}(E) \neq \infty$, то $\|\mu\|(E) \neq \infty$, $E \in \Sigma$.

П.8. Пусть $\{E_i\}_{i=1}^\infty \subset \Sigma$, $f \in X^*$, $\|f\| \leq 1$. Так как $\overline{f\mu}$ счетно-полуаддитивна, то $\overline{f\mu}(\bigcup\limits_{i=1}^\infty E_i) \leq \sum\limits_{i=1}^\infty \overline{f\mu}(E_i)$. Так как $\overline{f\mu}(E_i) \leq \|\mu\|(E_i)$, $i \in N$, то $\overline{f\mu}(\bigcup\limits_{i=1}^\infty E_i) \leq \sum\limits_{i=1}^\infty \|\mu\|(E_i)$. Перейдя слева к sup по всем $f \in X^*$, $\|f\| \leq 1$, получим

$$\|\mu\|(\bigcup_{i=1}^\infty E_i) \leq \sum_{i=1}^\infty \|\mu\|(E_i).$$

П.9. Так как $\|\mu\| \leq 2\tilde{\mu}$, $\tilde{\mu}$ исчерпывается и непрерывна сверху на пустом множестве, то $\|\mu\|$ также обладает этими свойствами. Непрерывность сверху и снизу для $\|\mu\|$ доказывается так же, как для супремации $\tilde{\mu}$ (см.теорему 3.2, пункт 11).

Пример 3.9. Обратимся к примеру 2.12. Возьмем $E \in \Sigma$, $\{E_i\}_{i=1}^n$ – разбиение E, $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ – набор чисел, где $|\alpha_i| \leq 1$. Имеем $\|\sum\limits_{i=1}^n \alpha_i\mu(E_i)\|^p = \int\limits_0^1 |\sum\limits_{i=1}^n \alpha_i \mathcal{X}_{E_i}(t)|^p d\lambda \leq \int\limits_0^1 \mathcal{X}_E d\lambda = \lambda(E)$.

Итак,

$$\|\sum_{i=1}^n \alpha_i\mu(E_i)\| \leq [\lambda(E)]^{\frac{1}{p}}.$$

Тогда $\|\mu\|(E) \le [\lambda(E)]^{\frac{1}{p}}$. С другой стороны, $\|\mu(E)\| = [\lambda(E)]^{\frac{1}{p}}$. Значит,

$$\|\mu\|(E) = \tilde{\mu}(E) = \|\mu(E)\| = [\lambda(E)]^{\frac{1}{p}}.$$

§4 Разложение Хана и Жордана

Определение 4.1. Пусть $\mu : \Sigma \to (-\infty, +\infty]$ – мера. Множество $E \in \Sigma$ называется положительным (отрицательным) относительно μ, если для любого $F \in E \cap \Sigma$ имеем $\mu(F) \ge 0$ ($\mu(F) \le 0$).

Теорема 4.2. Пусть $\mu : \Sigma \to (-\infty, +\infty]$ – мера. Существуют положительное относительно μ множество $A \in \Sigma$ и отрицательное $B \in \Sigma$ такие, что $AB = \emptyset$, $A \cup B = T$. Это разложение множества T называется *разложением Хана* относительно μ.

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{P}$ класс отрицательных множеств из Σ. Покажем, что $\mathcal{P}$ обладает следующими свойствами:

1) если $E \in \Sigma$, $F \in \mathcal{P}$, $E \subset F$, то $E \in \mathcal{P}$;

2) если $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}$, то $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{P}$.

Первое очевидно. Докажем второе. Обозначим $F_n = E_n \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{n-1} E_i$, $n = 2, 3, \ldots$, $F_1 = E_1$. Получим спектр $\{F_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}$, где $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$. Пусть $E \in \Sigma$, $E \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$. Тогда $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} EF_n$, где $EF_n \in \mathcal{P}$. Получаем $\mu(E) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(EF_n) \le 0$. Это означает, что $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{P}$.

Положим $\alpha = inf\{\mu(E),\ E \in \mathcal{P}\}$. Существует последовательность $\{E_n\} \subset \mathcal{P}$ такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(E_n) = \alpha$. Обозначим $B = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$. Так как $B \in \mathcal{P}$, то $\mu(B) \ge \alpha$. С другой стороны, $-\mu|_{B\cap\Sigma}$ является положительной мерой. Поэтому в силу монотонности $-\mu(B) \ge -\mu(E_n)$, $n \in N$. Тогда $\mu(B) \le \mu(E_n)$, $n \in N$. Переходя к пределу, получаем $\mu(B) \le \lim\limits_{n\to\infty} \mu(E_n) = \alpha$. Значит, $\mu(B) = \alpha$. Отсюда, в частности, следует, что $\alpha \ne -\infty$.

Обозначим $A = T \setminus B$. Покажем, что множество A положительное. Предположим противное. Тогда существует $C_1 \in A \cap \Sigma$ такое, что $\mu(C_1) < 0$. Заметим, что $C_1 \notin \mathcal{P}$. Иначе было бы $B \cup C_1 \in \mathcal{P}$ и $\mu(B \cup C_1) = \mu(B) + \mu(C_1) = \alpha + \mu(C_1) < \alpha$, что противоречит определению α. Таким образом, C_1 содержит множества из Σ, на которых μ принимает положительные значения. Обозначим через k_1 наименьшее натуральное число, обладающее тем свойством, что существует $E_1 \in C_1 \cap \Sigma$, для которого $\mu(E_1) \ge \frac{1}{k_1}$.

Положим $C_2 = C_1 \setminus E_1$. Имеем

$$\mu(C_2) = \mu(C_1) - \mu(E_1) \le \mu(C_1) - \frac{1}{k_1} < 0.$$

Вместо C_1 рассмотрим C_2. Повторим аналогичные рассуждения. Обозначим через k_2 наименьшее натуральное число, обладающее тем свойством, что существует $E_2 \in C_2 \cap \Sigma$, для которого $\mu(E_2) \ge \frac{1}{k_2}$.

Продолжив процесс до бесконечности, получим спектр $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \Sigma$, для которого $\mu(E_n) \ge \frac{1}{k_n}$, $n \in N$. Заметим, что $\mu(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n) \ne \infty$, так как $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n \subset C_1$, где $\mu(C_1) \ne \infty$. В силу исчерпываемости $\mu(E_n) \to 0$, $n \to \infty$. Тогда $\frac{1}{k_n} \to 0$ и $k_n \to \infty$ при $n \to \infty$.

Положим $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$. Имеем $\mu(E) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) > 0$. Тогда $\mu(C_1 \setminus E) < 0$. Существует $F \in (C_1 \setminus E) \cap \Sigma$ такое, что $\mu(F) > 0$. С другой стороны, $\mu(F) < \frac{1}{k_n - 1}$ для достаточно больших чисел n (чтобы $k_n > 1$), так как $F \subset C_n$, $n \in N$. Поскольку $k_n \to \infty$, то $\mu(F) \le 0$. Полученное противоречие показывает, что предположение не верно. Значит, множество A положительное.

Замечание. Пусть $\mu : \Sigma \to X$, $E \in \Sigma$. $\mu|_{E \cap \Sigma}$ означает сужение меры μ на σ – алгебру $E \cap \Sigma$.

Упражнение 4.3. Пусть $\mu : \Sigma \to (-\infty, +\infty]$ – мера, множества A_i, $B_i \in \Sigma$ задают разложение Хана множества T относительно μ, где A_i – положительное, B_i – отрицательное, $i = 1, 2$. Тогда $\bar{\mu}(A_1 \Delta A_2) = \bar{\mu}(B_1 \Delta B_2) = 0$.

Упражнение 4.4. Пусть $\mu : \Sigma \to (-\infty, +\infty]$ – мера, множества $A, B \in \Sigma$ задают разложение Хана, где A – положительное, B – отрицательное.

Положим $\mu^+(E) = \mu(EA)$, $\mu^-(E) = -\mu(EB)$, $E \in \Sigma$. Тогда выполняется следующее:

1) $\mu^+ : \Sigma \to [0, +\infty]$, $\mu^- : \Sigma \to [0, +\infty)$ – меры; если μ принимает только конечные значения, то μ^+ и μ^- ограничены;

2) $\mu^+(E) = sup\{\mu(F),\ F \in E \cap \Sigma\}$,

$\mu^-(E) = -\inf\{\mu(F),\ F \in E \cap \Sigma\}$;

3) $\mu = \mu^+ - \mu^-$, $\overline{\mu} = \mu^+ + \mu^-$.

4) если $\varphi : \Sigma \to [0, +\infty]$ – мера, для которой $\varphi(E) \le \mu^+(E)$ и $\varphi(E) \le \mu^-(E)$, $E \in \Sigma$, то $\varphi(E) = 0$.

Упражнение 4.5. Пусть $\mu : \Sigma \to (-\infty, +\infty)$ – мера, множества $A, B \in \Sigma$ задают разложение Хана, где A – положительное, B – отрицательное.

Если $\mu_1, \mu_2 : \Sigma \to [0, +\infty)$ – меры, для которых $\mu = \mu_1 - \mu_2$, $\mu_1 \le \mu^+$, $\mu_2 \le \mu^-$, то $\mu_1 = \mu^+$ и $\mu_2 = \mu^-$. Таким образом, разложение $\mu = \mu^+ - \mu^-$ является "минимальным" в указанном смысле. Такое разложение μ называется *разложением Жордана.*

Доказательство. Имеем $\mu = \mu_1 - \mu_2$, $\mu = \mu^+ - \mu^-$. Тогда $\mu^+ - \mu_1 = \mu^- - \mu_2 = \varphi$ – положительная мера, для которой $\varphi \le \mu^+$, $\varphi \le \mu^-$. По упражнению 4.4. $\varphi = 0$.

§5. Абсолютная непрерывность, эквивалентность, сингулярность мер

Определение 5.1. Пусть $\mu : \Sigma \to X$, $\nu : \Sigma \to Y$ – меры. Здесь каждое из множеств X, Y либо линейное нормированное пространство, либо $(-\infty, +\infty]$. Будем говорить, что мера μ *абсолютно непрерывна относительно* ν, обозначается $\mu \ll \nu$, если из того, что $E \in \Sigma$ и $\tilde{\nu}(E) = 0$, следует $\tilde{\mu}(E) = 0$.

Замечание 5.2. Для доказательства $\mu \ll \nu$, очевидно, достаточно показать, что если $E \in \Sigma$ и $\tilde{\nu}(E) = 0$, то $\mu(E) = 0$.

Определение 5.3. Будем говорить, что меры μ *и* ν *эквивалентны*, обозначается $\mu \sim \nu$, если одновременно $\mu \ll \nu$ и $\nu \ll \mu$.

Упражнение 5.4. Пусть Σ – σ – алгебра измеримых по Лебегу подмножеств отрезка $[0,1]$, $\nu : \Sigma \to [0,1]$ – мера Лебега, x_0 – некоторая фиксированная точка. Положим $\mu(E) = \mathcal{X}_E(x_0)$, $E \in \Sigma$. Проверить, что μ – мера. Будет ли $\mu \ll \nu$ или $\nu \ll \mu$?

Упражнение 5.5. Пусть Σ – σ – алгебра измеримых по Лебегу подмножеств квадрата $[0,1] \times [0,1]$, $\nu : \Sigma \to [0,1]$ – мера Лебега.

Пусть $E \subset R^2$. Зафиксируем $x_0 \in R$. Обозначим $E_{x_0} = \{y \in R : (x_0, y) \in E\}$. Множество $E_{x_0} \subset R$ называют x_0 – сечением множества E.

Известно, что если $E \in \Sigma$, $x \in [0,1]$, то E_x является измеримым по Лебегу подмножеством $[0,1]$.

Пусть $x_0 \in [0,1]$. Для любого $E \in \Sigma$ положим $\mu(E) = \lambda(E_{x_0})$, где λ – мера Лебега на $[0,1]$. Проверить, что μ – мера. Будет ли $\mu \ll \nu$ или $\nu \ll \mu$?

Упражнение 5.6. Пусть Σ, ν, λ из предыдущего упражнения. Известно, что для любого множества $E \in \Sigma$ функция $f_E(x) = \lambda(E_x)$, $x \in$

$[0,1]$, является интегрируемой по Лебегу и $\nu(E) = \int\limits_{[0,1]} f_E d\lambda$. Положим $\mu(E) = f_E$, $E \in \Sigma$. Доказать, что $\mu : \Sigma \to L_1[0,1]$ – мера и $\mu \sim \nu$.

Теорема 5.7. Пусть $\mu : \Sigma \to X$, $\nu : \Sigma \to Y$ – меры, X – лнп, Y – либо лнп, либо $(-\infty, +\infty]$. Для того, чтобы $\mu \ll \nu$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало $\delta > 0$ такое, что если $E \in \Sigma$ и $\tilde{\nu}(E) < \delta$, то $\tilde{\mu}(E) < \varepsilon$.

Доказательство. Заметим, что в силу теоремы 2.14 имеем $\tilde{\mu}(T) \neq \infty$. Достаточность очевидна. Докажем необходимость. Предположим противное. Тогда существуют $\varepsilon > 0$ и последовательность $\{E_n\} \subset \Sigma$ такие, что $\tilde{\nu}(E_n) < \frac{1}{2^n}$ и $\tilde{\mu}(E_n) \geq \varepsilon$, $n \in N$.

Положим $F_k = \bigcup\limits_{n=k}^{\infty} E_n$, $F = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} F_k$. В силу монотонности и счетной полуаддитивности супремации получаем

$$\tilde{\nu}(F) \leq \tilde{\nu}(F_k) \leq \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{k-1}},\ k \in N.$$

Тогда $\tilde{\nu}(F) = 0$. Так как супремация непрерывна сверху и $\tilde{\mu}(T) \neq +\infty$, то $\tilde{\mu}(F) = \lim\limits_{k \to +\infty} \tilde{\mu}(F_k)$. В силу монотонности супремации $\tilde{\mu}(F_k) \geq \tilde{\mu}(E_k) \geq \varepsilon$, $k \in N$. Тогда $\tilde{\mu}(F) \geq \varepsilon$.

Итак, существует $F \in \Sigma$, для которого $\tilde{\nu}(F) = 0$ и $\tilde{\mu}(F) > 0$. Это противоречит тому, что $\mu \ll \nu$.

Следующий пример показывает, что условие ограниченности меры μ является существенным для справедливости необходимости в предыдущей теореме.

Пример 5.8. Пусть Σ – σ – алгебра всех подмножеств множества натуральных чисел. Для $E \in \Sigma$ положим $\mu(E) = \sum\limits_{n \in E} 2^n$, $\nu(E) = \sum\limits_{n \in E} \frac{1}{2^n}$, причем $\mu(\emptyset) = \nu(\emptyset) = 0$. Очевидно μ и ν – положительные меры, причем $\mu(E) = +\infty$, если E – бесконечное множество, и выполняется $\mu \ll \nu$. Возьмем произвольное $\delta > 0$. Существует номер $n_\delta \in N$ такой, что $\frac{1}{2^{n_\delta - 1}} < \delta$. Рассмотрим множество $E = \{n_\delta, n_\delta{+}1, n_\delta{+}2, \ldots\}$. Имеем $\nu(E) = \sum\limits_{n=n_\delta}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n_\delta - 1}} < \delta$ и $\mu(E) = +\infty$.

Докажем известную *теорему Лебега о разложении.*

Теорема 5.9. Пусть $\mu : \Sigma \to X$, $\nu : \Sigma \to Y$ – меры, где X – лнп, Y либо лнп, либо $(-\infty, +\infty]$. Тогда существуют множества E, $F \in \Sigma$ такие, что $EF = \emptyset$, $E \cup F = T$, $\tilde{\nu}(E) = 0$ и $\mu|_{F \cap \Sigma} \ll \nu|_{F \cap \Sigma}$.

Доказательство. Обозначим $\mathcal{P}_1 = \{A \in \Sigma : \tilde{\nu}(A) = 0 и \mu(A) \neq 0\}$. Заметим, что есть такие множества $A \in \Sigma$, для которых $\tilde{\nu}(A) = 0$, например, $A = \emptyset$.

Если класс $\mathcal{P}_1$ пуст, то получим $E = \emptyset$, $F = T$. Доказательство закончено.

Иначе обозначим через k_1 наименьшее натуральное число, для которого существует множество $E_1 \in \mathcal{P}_1$ такое, что $\|\mu(E_1)\| \geq \frac{1}{k_1}$.

Обозначим $\mathcal{P}_2 = \{A \in (T \setminus E_1) \cap \Sigma : \tilde{\nu}(A) = 0 \text{ и } \mu(A) \neq 0\}$. Если класс $\mathcal{P}_2$ пуст, то полагаем $E = E_1$, $F = T \setminus E$. Доказательство закончено.

Иначе обозначим через k_2 наименьшее натуральное число, для которого существует множество $E_2 \in \mathcal{P}_2$ такое, что $\|\mu(E_2)\| \geq \frac{1}{k_2}$.

Обозначим $\mathcal{P}_3 = \{A \in (T \setminus (E_1 \cup E_2)) \cap \Sigma : \tilde{\nu}(A) = 0 \text{ и } \mu(A) \neq 0\}$ и т.д.

Если на некотором n – шаге класс $\mathcal{P}_n$ окажется пустым, то положим $E = E_1 \cup ... \cup E_{n-1}$, $F = T \setminus E$. Тогда $0 \leq \tilde{\nu}(E) \leq \sum\limits_{i=1}^{n-1} \tilde{\nu}(E_i) = 0$. то есть $\tilde{\nu}(E) = 0$. Пустота класса $\mathcal{P}_n$ означает, что $\mu|_{F\cap\Sigma} \ll \nu|_{F\cap\Sigma}$. Доказательство закончено.

Иначе получим последовательность классов $\{\mathcal{P}_n\}_{n=1}^{\infty}$, спектр $\{E_n\}$, последовательность натуральных чисел $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ такие, что $E_n \in \mathcal{P}_n$, $\|\mu(E_n)\| \geq \frac{1}{k_n}$, k_n является наименьшим натуральным числом, для которого существуют множества $A \in \mathcal{P}_n$, удовлетворяющие условию $\|\mu(A)\| \geq \frac{1}{k_n}$.

В силу исчерпываемости μ имеем $\mu(E_n) \to 0$, $n \to \infty$. Тогда $k_n \to \infty$, $n \to \infty$.

Положим $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$, $F = T \setminus E$. В силу счетной полуаддитивности супремации имеем $0 \leq \tilde{\nu}(E) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \tilde{\nu}(E_n) = 0$, то есть $\tilde{\nu}(E) = 0$.

Пусть $A \in F \cap \Sigma$ и $\tilde{\nu}(A) = 0$. Предположим, что $\mu(A) \neq 0$. Тогда $A \in \mathcal{P}_n$ для любого $n \in N$. Заметим, что существует $n_0 \in N$ такое, что $k_n > 1$ для $n > n_0$. Тогда, в силу определения k_n, $\|\mu(A)\| < \frac{1}{k_n - 1}$ для $n > n_0$. Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем, что $\|\mu(A)\| = 0$, то есть $\mu(A) = 0$.

Значит, предположение было неверно. Теорема доказана.

Определение 5.10. Пусть $\mu : \Sigma \to X$, $\nu : \Sigma \to Y$ – меры. Будем говорить, что меры *μ и ν взаимно сингулярны*, обозначается $\mu \perp \nu$, если существуют множества $E, F \in \Sigma$ такие, что $EF = \emptyset$, $E \cup F = T$, $\tilde{\nu}(E) = 0$ и $\tilde{\mu}(F) = 0$.

Теорема 5.11. Пусть $\mu : \Sigma \to X$, $\nu : \Sigma \to Y$ – меры, где X, Y как в теореме 5.9. Тогда существуют меры $\mu_S : \Sigma \to X$, $\mu_a : \Sigma \to X$ такие, что

$$\mu = \mu_S + \mu_a, \; \mu_S \perp \nu \text{ и } \mu_a \ll \nu. \tag{1}$$

Причем разложение (1) единственно.

Доказательство. Утверждение теоремы сразу следует из теоремы 5.9, если положить

$$\mu_S(A) = \mu(AE),\ \mu_a(A) = \mu(AF).$$

Докажем единственность. Пусть φ_S, $\varphi_a : \Sigma \to X$ – меры такие, что

$$\mu = \varphi_S + \varphi_a,\ \varphi_S \perp \nu \text{ и } \varphi_a \ll \nu.$$

Так как $\varphi_S \perp \nu$, то существуют множества $E_1, F_1 \in \Sigma$ такие, что $E_1F_1 = \emptyset$, $E_1 \cup F_1 = T$, $\tilde{\nu}(E_1) = 0$ и $\tilde{\varphi}_S(F_1) = 0$. Положим $B = E \cup E_1$, $C = T \setminus (E \cup E_1) = FF_1$. На σ – алгебре $B \cap \Sigma$ имеем $\tilde{\nu} = 0$, поэтому $\mu_a = \varphi_a = 0$ и $\mu = \mu_S = \varphi_S$. На σ – алгебре $C \cap \Sigma$ имеем $\mu_S = \varphi_S = 0$, поэтому $\mu = \mu_a = \varphi_a$. Пусть $A \in \Sigma$. Тогда $A = AB \cup AC$.

$$\mu_a(A) = \underbrace{\mu_a(AB)}_{0} + \mu_a(AC) = \mu_a(AC),$$

$$\varphi_a(A) = \underbrace{\varphi_a(AB)}_{0} + \varphi_a(AC) = \varphi_a(AC).$$

Так как $\mu_a(AC) = \varphi_a(AC)$, то $\mu_a(A) = \varphi_a(A)$. Аналогично, $\mu_S(A) = \varphi_S(A)$ для любого $A \in \Sigma$. Теорема доказана.

Литература

[1] Diestel J., J. J. Uhl, Jr. Vector measures// Mathematical Surveys of the AMS. - Providence, R.I., 1977. - V.15.

[2] Климкин В. М. Введение в теорию функций множества - Саратов, 1988. - 230 с.

[3] Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.:Наука, 1976. – 544 с.

[4] Халмош П. Теория меры. – М.: ИЛ, 1953. – 291 с.