МИНИСТЕРСТВО ОБЩЕГО И ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Кафедра функционального анализа и теории функций

НЕКОТОРЫЕ ГЛАВЫ ТЕОРИИ МЕРЫ.II

Методические указания к спецкурсу
для студентов 3-4 курсов специализации "Функциональный анализ"

Издательство "Самарский университет"
1998

Печатается по решению Редакционно-издательского совета Самарского государственного университета

В методических указаниях рассмотрены вопросы, связанные с наличием у меры атомов. Доказаны теоремы о разложении векторной меры в сумму неатомической и чисто атомической мер, о компактности образа чисто атомической меры, теорема А.А.Ляпунова о выпуклости и компактности образа неатомической меры со значениями в R^n.

Составитель канд.физ.-мат.наук М.Г.Свистула
Рецензент профессор В.М.Климкин

Редактор Н.А.Волынкина
Компьютерная верстка, макет М.Г.Лобова

ЛР № 020316 от 04.12.96. Подписано в печать 17.12.98.
Формат 60x84/16. Бумага офсетная. Объем 1,16 усл.печ.л., 1,25 уч.-изд.л.
Тираж 100 экз. Заказ № 124
Издательство «Самарский университет», 443011,
г.Самара, ул.Акад.Павлова, 1.

УОП СамГУ, ПЛД № 67-43 от 19.02.98.

В методических указаниях рассмотрены вопросы, связанные с наличием атомов меры. Доказана известная теорема А.А.Ляпунова о том, что образ неатомической меры со значениями в R^n является выпуклым и компактным множеством. Предлагаемое доказательство отлично от обычно приводимого в литературе доказательства Линденштраусса [5] и опирается в основном на классические факты теории меры, изложенные в работе [6]. Доказательство теоремы 2.7. взято из статьи Армстронга и Прикри [1], теоремы 3.4 – из статьи А.А.Ляпунова [4].

§1. Атомы меры

Всюду в дальнейшем X – линейное нормированное пространство над R, сокращенно лнп, Σ – некоторая σ - алгебра подмножеств непустого множества T, $\mu : \Sigma \to X$ – мера (заметим, что скалярная мера будет принимать только конечные значения).

Используемые в данной работе обозначения, определения и теоремы из теории меры можно найти в [6]. Напомним некоторые из них.

Последовательность попарно не пересекающихся множеств $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$, где $E_n \subset T$, называется *спектром.*

Пусть $E \in \Sigma$. Используем обозначение

$$E \cap \Sigma = \{EF,\ F \in \Sigma\}.$$

Так как Σ – σ – алгебра, то $E \cap \Sigma$ тоже будет σ – алгеброй.

Разбиением множества $E \in \Sigma$ называем любой конечный набор множеств $\{E_n\}_{n=1}^{k} \subset \Sigma$, где $E_n E_m = \emptyset$ при $n \neq m$, $\bigcup\limits_{n=1}^{k} E_n = E$.

Мера $\mu : \Sigma \to X$ – это счетно-аддитивная функция множества, то есть для любого спектра $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \Sigma$ выполняется

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

Мера $\mu : \Sigma \to X$ обладает следующими свойствами:

исчерпывается, то есть для любого спектра $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \Sigma$

$$\lim_{n \to \infty} \mu(E_n) = 0;$$

непрерывна сверху, то есть для любой убывающей последовательности $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \Sigma$

$$\lim_{n \to \infty} \mu(E_n) = \mu\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\Big);$$

непрерывна сверху на пустом множестве, то есть для любой убывающей последовательности $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \Sigma$, для которой $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n = \emptyset$,

$$\lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = 0;$$

непрерывна снизу, то есть для любой возрастающей последовательности $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \Sigma$

$$\lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n).$$

Для произвольного $E \in \Sigma$ определим

$$\tilde{\mu}(E) = \sup\{\|\mu(F)\|,\ F \in E \cap \Sigma\}.$$

Функция множества $\tilde{\mu}$ называется *супремацией* меры μ и обладает следующими свойствами: $\tilde{\mu} : \Sigma \to [0, \infty)$, $\tilde{\mu}(\emptyset) = 0$, $\tilde{\mu}$ монотонна, исчерпывается, непрерывна сверху и снизу, счетно-полуаддитивна, то есть для любой последовательности $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \Sigma$ выполняется

$$\tilde{\mu}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) \le \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\mu}(E_n).$$

Для произвольного $E \in \Sigma$ определим

$$\overline{\mu}(E) = \sup \sum_{i=1}^{n} \|\mu(E_i)\|,$$

где sup берется по всевозможным разбиениям множества E. Функция множества $\overline{\mu}$ называется *вариацией* меры μ и сама является положительной мерой, которая, вообще говоря, может принимать значение $+\infty$.

Если μ – скалярная мера, принимающая только конечные значения, то $\overline{\mu}$ тоже принимает только конечные значения. В этом случае справедливо неравенство

$$\tilde{\mu}(E) \le \overline{\mu}(E) \le 2\tilde{\mu}(E),\ E \in \Sigma.$$

Пусть $\mu : \Sigma \to X$, $\nu : \Sigma \to Y$, где X, Y – лнп, μ, ν – меры. Говорят, что μ *абсолютно непрерывна относительно* ν, обозначается $\mu \ll \nu$, если из того, что $E \in \Sigma$ и $\tilde{\nu}(E) = 0$, следует $\tilde{\mu}(E) = 0$.

Говорят, что μ *эквивалентна* ν, обозначается $\mu \sim \nu$, если для $E \in \Sigma$ $\tilde{\mu}(E) = 0$ тогда и только тогда, когда $\tilde{\nu}(E) = 0$.

Для образа меры μ используем обозначение

$$\mu(\Sigma) = \{\mu(E),\ E \in \Sigma\}.$$

Пусть $E \in \Sigma$. Через $\mu|_{E\cap\Sigma}$ обозначаем сужение меры μ на σ - алгебру $E \cap \Sigma$.

Определение 1.1. Множество $E \in \Sigma$ называется атомом меры μ, если $\mu(E) \neq 0$ и для любого $F \in E \cap \Sigma$ либо $\mu(F) = 0$, либо $\mu(E \setminus F) = 0$.

Упражнение 1.2. Пусть $E \in \Sigma$, $\mu(E) \neq 0$. Множество E является атомом меры μ тогда и только тогда, когда для любого $F \in E \cap \Sigma$ либо $\mu(F) = 0$, либо $\mu(F) = \mu(E)$.

Определение 1.3. Мера $\mu : \Sigma \to X$, не имеющая атомов, называется неатомической. Таким образом, неатомичность μ означает, что для любого множества $E \in \Sigma$, для которого $\mu(E) \neq 0$, существует подмножество $F \in E \cap \Sigma$ такое, что $\mu(F) \neq 0$ и $\mu(F) \neq \mu(E)$.

Определение 1.4. Мера $\mu : \Sigma \to X$ называется чисто атомической, если существует спектр атомов $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ меры μ (может быть, конечный), для которого $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = T$.

Пример 1.5. Пусть Σ – некоторая σ - алгебра подмножеств множества T, x_0 – некоторая фиксированная точка в T. Положим $\mu(E) = \mathcal{X}_E(x_0)$, $E \in \Sigma$. Очевидно, $\mu(E) = 0$, если $x_0 \notin E$, $\mu(E) = 1$, если $x_0 \in E$. Таким образом, любое множество $E \in \Sigma$, содержащее x_0, является атомом.

Пример 1.6. Пусть Σ – σ – алгебра всех подмножеств множества натуральных чисел. Положим $\mu(E) = \sum\limits_{n\in E} \frac{1}{2^n}$, $E \in \Sigma$. (В дальнейшем будем полагать по определению $\sum\limits_{n\in\emptyset} x_n = 0$.) Очевидно, $\mu : \Sigma \to [0,1]$ – мера, любое одноточечное множество $\{n\}$ является атомом, все остальные множества из Σ не являются атомами.

В примерах 1.5 и 1.6 были рассмотрены чисто атомические меры. Приведем примеры неатомических мер.

Пример 1.7. Пусть Σ – σ – алгебра измеримых по Лебегу подмножеств отрезка [0,1]. Мера Лебега $\mu : \Sigma \to [0,1]$ является неатомической. Действительно, пусть $E \in \Sigma$ и $\mu(E) > 0$. Возьмем $n \in N$ такое, что $\frac{1}{n} < \mu(E)$. Разобъем отрезок [0,1] на n равных частей точками $0 = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n = 1$. Очевидно, $E = \bigcup\limits_{i=1}^{n} E \cap [a_{i-1}, a_i]$. Так как $\mu(E) > 0$, то существует $i_0 \in \overline{1,n}$ такое, что $\mu(E \cap [a_{i_0-1}, a_{i_0}]) > 0$. С другой стороны, $\mu(E \cap [a_{i_0-1}, a_{i_0}]) \le \frac{1}{n} < \mu(E)$.

Пример 1.8. Пусть Σ – σ – алгебра измеримых по Лебегу подмножеств отрезка $[0,1]$, $\lambda : \Sigma \to [0,1]$ – мера Лебега. Определим меру $\mu : \Sigma \to L_1[0,1]$, полагая $\mu(E) = \check{\mathcal{X}}_E$, $E \in \Sigma$, где $\check{\mathcal{X}}_E$ означает класс функций эквивалентных относительно меры Лебега функции $\mathcal{X}_E$.

Докажем неатомичность μ. Пусть $E \in \Sigma$ и $\mu(E) \neq 0$, то есть $\check{\mathcal{X}}_E \neq 0$, что эквивалентно тому, что $\lambda(E) \neq 0$. В силу неатомичности меры Лебега существует множество $F \in E \cap \Sigma$ такое, что $0 < \lambda(F) < \lambda(E)$. Тогда $0 \neq \check{\mathcal{X}}_F \neq \check{\mathcal{X}}_E$.

Пример 1.9. Пусть $\Sigma - \sigma$ – алгебра измеримых по Лебегу подмножеств отрезка $[0,1]$, $\mu_1 : \Sigma \to [0,1]$ – мера Лебега, $x_0 \in [0,1]$, $\mu_2(E) = \mathcal{X}_E(x_0)$, $E \in \Sigma$. Положим $\mu = \mu_1 + \mu_2$. Очевидно, атомом меры μ является любое множество $E \in \Sigma$, для которого $x_0 \in E$ и $\mu_1(E) = 0$, все остальные множества из Σ не являются атомами. Мера μ не является ни чисто атомической, ни неатомической.

Упражнение 1.10. Пусть $\mu : \Sigma \to X$ – мера.

1) Пусть $E \in \Sigma$ – атом, $F \in E \cap \Sigma$. Если $\mu(F) = 0$, то $\tilde{\mu}(F) = 0$. Если $\mu(F) \neq 0$, то $\mu(F) = \mu(E)$ и F – атом.

2) Пусть $E, F \in \Sigma$ – атомы. Если $\mu(E) \neq \mu(F)$, то $\tilde{\mu}(E \cap F) = 0$. Если $\mu(E) = \mu(F)$, то либо $\tilde{\mu}(E \cap F) = 0$, либо $\mu(E \cap F) = \mu(E) = \mu(F)$ и $E \cap F$ – атом.

Доказательство. Докажем п.1. Пусть $\mu(F) = 0$. Возьмем $A \in F \cap \Sigma$. Предположим, что $\mu(A) \neq 0$. Тогда $\mu(A) = \mu(E)$. С другой стороны, $\mu(F \setminus A) = -\mu(A) \neq 0$. Тогда $\mu(F \setminus A) = \mu(E)$. Итак, $\mu(A) = -\mu(A) = \mu(E)$. Отсюда $2\mu(A) = 0$. Тогда $\mu(A) = 0$, противоречие. Итак, $\tilde{\mu}(F) = \sup\{\|\mu(A)\|, A \in F \cap \Sigma\} = 0$. Остальные утверждения следуют непосредственно из определения атома.

Пусть $\mu : \Sigma \to X$. На Σ введем отношение эквивалентности: будем говорить, что множество $E \in \Sigma$ эквивалентно множеству $F \in \Sigma$ относительно меры μ, обозначается $E \sim F$, если $\tilde{\mu}(E \Delta F) = 0$

Предлагаем читателю проверить выполнение аксиом рефлексивности, симметричности и транзитивности (см. [2], с.19). Обозначим класс множеств, эквивалентных множеству E, через $\check{E}$. Легко показать, что если $E, F \in \Sigma$ и $E \sim F$, то $\check{E} = \check{F}$, если же E и F не эквивалентны, то $\check{E} \cap \check{F} = \emptyset$. Таким образом, Σ разбивается на классы эквивалентности. Обозначим множество всех классов эквивалентности через $\check{\Sigma}$, множество классов эквивалентности атомов – через $\check{A}$. Очевидно, $\check{A} \subset \check{\Sigma}$.

Упражнение 1.11. Пусть $\mu : \Sigma \to X$ – мера.

1) Если E – атом, $F \in \check{E}$, то F тоже атом.

2) Пусть $E, F \in \Sigma$ – атомы. $E \sim F$ тогда и только тогда, когда $\mu(E \cap F) \neq 0$. При этом $E \cap F$ будет атомом и $\mu(E \cap F) = \mu(E) = \mu(F)$.

Теорема 1.12. Пусть $\mu : \Sigma \to X$ – мера. Множество классов эквивалентности атомов $\check{A}$ не более, чем счетно.

Доказательство. Обозначим $\check{A}_n = \{\check{E} \in \check{A} : \|\mu(E)\| > \frac{1}{n}\}$, $n \in N$. Предположим, что семейство $\check{A}_n$ является бесконечным. Пусть $\{\check{E}_k\}_{k=1}^{\infty}$ – последовательность попарно различных классов эквивалентности из $\check{A}_n$. Тогда $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ – последовательность атомов из Σ, где $\bar{\mu}(E_i E_j) = 0, \ i \neq j$. Положим $F_1 = E_1, ..., F_k = E_k \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{k-1} E_i, ...$. Тогда $\{F_k\}_{k=1}^{\infty}$ – спектр атомов из Σ, где $F_k \sim E_k$ и $\mu(F_k) = \mu(E_k)$. Получаем, что $\|\mu(F_k)\| > \frac{1}{n}, \ k \in N$, что противоречит исчерпываемости меры μ. Значит, семейство $\check{A}_n$ не более, чем конечное. Очевидно, $\check{A} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \check{A}_n$. Таким образом, множество $\check{A}$ не более, чем счетное.

Вместо определения неатомичности 1.3 часто удобнее пользоваться другим, эквивалентным ему определением.

Определение 1.13. Говорят, что мера $\mu : \Sigma \to X$ обладает свойством Сакса, если для любого $\varepsilon > 0$ существует разбиение $\{E_n\}_{n=1}^{k}$ множества T такое, что $\bar{\mu}(E_n) < \varepsilon, \ n = 1, ..., k$. Отсюда следует, что для любого множества $F \in \Sigma$ существует разбиение $\{F_n\}_{n=1}^{m}$ множества F такое, что $\bar{\mu}(F_n) < \varepsilon, \ n = 1, ..., m$.

Лемма 1.14. Пусть $\mu : \Sigma \to X$ – неатомическая мера, $E \in \Sigma$, $\bar{\mu}(E) \neq 0$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует множество $F \in E \cap \Sigma$ такое, что $0 < \bar{\mu}(F) < \varepsilon$.

Доказательство. Так как $\bar{\mu}(E) \neq 0$, то существует множество $E_1 \in E \cap \Sigma$, для которого $\mu(E_1) \neq 0$. Поскольку E_1 не атом, то существует $F_1 \in E_1 \cap \Sigma$ такое, что $0 \neq \mu(F_1) \neq \mu(E_1)$. Положим $E_2 = E_1 \setminus F_1$. Имеем $\mu(E_2) \neq 0$. Поскольку E_2 не атом, то существует $F_2 \in E_2 \cap \Sigma$ такое, что $0 \neq \mu(F_2) \neq \mu(E_2)$. Продолжив процесс неограниченно, получим спектр $\{F_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E \cap \Sigma$, для которого $\mu(F_n) \neq 0, \ n \in N$.

В силу исчерпываемости супремации существует номер n_0 такой, что $\bar{\mu}(F_{n_0}) < \varepsilon$. Положим $F = F_{n_0}$.

Теорема 1.15. Для меры $\mu : \Sigma \to X$ свойства неатомичности и Сакса эквивалентны.

Доказательство. Покажем, что неатомичность влечет свойство Сакса. Возьмем произвольное $0 < \varepsilon < 1$. По лемме существует множество $F \in \Sigma$, для которого $0 < \bar{\mu}(F) < \varepsilon$. Обозначим через n_1 наименьшее натуральное число, для которого существует множество $F \in \Sigma$ такое, что $\frac{1}{n_1} < \bar{\mu}(F) < \varepsilon$. (Очевидно, $n_1 > 1$). Пусть $F_1 \in \Sigma$

таково, что $\frac{1}{n_1} < \tilde{\mu}(F_1) < \varepsilon$.

Если $\tilde{\mu}(T \setminus F_1) < \varepsilon$, то доказательство закончено.

Если $\tilde{\mu}(T \setminus F_1) \geq \varepsilon$, то по лемме 1.14 существует множество $F \in (T \setminus F_1) \cap \Sigma$, для которого $0 < \tilde{\mu}(F) < \varepsilon$. Обозначим через n_2 наименьшее натуральное число, для которого существует множество $F \in (T \setminus F_1) \cap \Sigma$ такое, что $\frac{1}{n_2} < \tilde{\mu}(F) < \varepsilon$. Пусть $F_2 \in (T \setminus F_1) \cap \Sigma$ таково, что $\frac{1}{n_2} < \tilde{\mu}(F_2) < \varepsilon$. Если $\tilde{\mu}(T \setminus (F_1 \cup F_2)) < \varepsilon$, то доказательство закончено. Иначе продолжаем построение.

Либо на некотором k -ом шаге получим $\tilde{\mu}(T \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{k} F_n) < \varepsilon$, тогда доказательство закончено, искомое разбиение $\{F_1, ..., F_k, T \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{k} F_n\}$.

Либо процесс продолжается до бесконечности. Тогда получим спектр $\{F_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \Sigma$ и последовательность натуральных чисел $\{n_k\}$ такие, что

$$\tilde{\mu}(F_k) > \frac{1}{n_k}, \tag{1}$$

и для любого $F \in (T \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{k} F_n) \cap \Sigma$, для которого $\tilde{\mu}(F) < \varepsilon$, будет выполняться

$$\tilde{\mu}(F) \leq \frac{1}{n_k - 1}, \ k \in N. \tag{2}$$

Так как μ исчерпывается, то $\tilde{\mu}(F_k) \to 0, \ k \to \infty$. Тогда из (1) следует, что $n_k \to \infty$ при $k \to \infty$.

Обозначим $E = T \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_k$. Предположим, что $\tilde{\mu}(E) > 0$. Тогда по лемме 1.14 существует множество $F \in E \cap \Sigma$ такое, что $0 < \widetilde{<}\varepsilon$. Из (2) следует, что $\tilde{\mu}(F) \leq \frac{1}{n_k - 1}$ для любого $k \in N$. Так как $n_k \to \infty$ при $k \to \infty$, то $\tilde{\mu}(F) = 0$. Противоречие. Значит, $\tilde{\mu}(E) = 0$.

В силу непрерывности $\tilde{\mu}$ сверху на пустом множестве существует $k_0 \in N$ такое, что $\tilde{\mu}(\bigcup\limits_{k=k_0+1}^{\infty} F_k) < \varepsilon$. Итак, в качестве искомого разбиения множества T можно взять разбиение $\{E_1, ..., E_{k_0}, \bigcup\limits_{k=k_0+1}^{\infty} F_k, E\}$.

Покажем, что свойство Сакса влечёт неатомичность. Пусть $E \in \Sigma$ и $\mu(E) \neq 0$. Возьмем $0 < \varepsilon < \|\mu(E)\|$. Существует разбиение $\{E_n\}_{n=1}^{k}$ множества E такое, что $\tilde{\mu}(E_n) < \varepsilon, n = 1, ..., k$. Существует $n_0 \in \overline{1, k}$ такое, что $\tilde{\mu}(E_{n_0}) > 0$. Иначе в силу полуаддитивности $\tilde{\mu}$ имели бы $\tilde{\mu}(E) = 0$, что противоречит условию $\mu(E) \neq 0$. Итак, $0 < \tilde{\mu}(E_{n_0}) < \varepsilon$. Тогда существует $F \in E_{n_0} \cap \Sigma$ такое, что $0 < \|\mu(F)\| < \varepsilon < \|\mu(E)\|$. Значит, $0 \neq \mu(F) \neq \mu(E)$. Теорема доказана.

Упражнение 1.16. Пусть $\mu : \Sigma \to X$, $\nu : \Sigma \to Y$, X, Y - лнп, μ, ν – меры, $\mu << \nu$.

1) Если множество $A \in \Sigma$ - атом меры ν, то либо $\bar{\mu}(A) = 0$, либо A - атом меры μ.

2) Если мера ν чисто атомическая, то мера μ либо нулевая, либо чисто атомическая.

3) Если ν неатомическая, то μ тоже неатомическая.

Доказательство. Докажем п.3. Так как $\mu << \nu$, то по теореме 5.7 из [6] для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что если $E \in \Sigma$ и $\tilde{\nu}(E) < \delta$, то $\bar{\mu}(E) < \varepsilon$.

В силу неатомичности ν существует разбиение $\{E_n\}_{n=1}^{k}$ множества T такое, что $\tilde{\nu}(E_n) < \delta$, $n \in \overline{1,k}$.

Тогда $\bar{\mu}(E_n) < \varepsilon$, $n \in \overline{1,k}$. Это означает неатомичность μ.

Упражнение 1.17. Пусть $\mu : \Sigma \to X$, $\nu : \Sigma \to Y$, μ, ν - меры, $\mu \sim \nu$.

1) Пусть $E \in \Sigma$. E - атом μ тогда и только тогда, когда E - атом ν.

2) μ чисто атомическая (неатомическая) тогда и только тогда, когда ν чисто атомическая (соответственно, неатомическая).

Упражнение 1.18. Пусть $\mu : \Sigma \to X$ – неатомическая мера, $B : X \to Y$ – линейный непрерывный оператор. Тогда мера $\nu = B\mu$ тоже является неатомической.

Упражнение 1.19. Пусть $\mu, \nu : \Sigma \to X$ – меры.

1) Если мера μ неатомическая (чисто атомическая), $\alpha \neq 0$ – некоторое действительное число, то мера $\alpha\mu$ тоже неатомическая (чисто атомическая).

2) Если мера μ и ν неатомические, то мера $\mu + \nu$ тоже неатомическая.

3) Если меры μ и ν чисто атомические, то мера $\mu + \nu$ либо нулевая, либо чисто атомическая.

Доказательство. Докажем п.2. Возьмем $\varepsilon > 0$. В силу неатомичности μ существует разбиение $\{E_i\}_{i=1}^{n}$ множества T такое, что $\bar{\mu}(E_i) < \frac{\varepsilon}{2}$, $i \in \overline{1,n}$. В силу неатомичности ν существует разбиение $\{F_j\}_{j=1}^{k}$ множества T такое, что $\tilde{\nu}(F_j) < \frac{\varepsilon}{2}$, $j = \overline{1,k}$.

Рассмотрим разбиение $\{E_iF_j\}_{i\in\overline{1,n},\, j\in\overline{1,k}}$ множества T. Легко показать, что $(\overline{\mu + \nu})(E_iF_j) \leq \bar{\mu}(E_iF_j) + \bar{\nu}(E_iF_j) < \varepsilon$, $i \in \overline{1,n}$, $j \in \overline{1,k}$. Отсюда следует неатомичность меры $\mu + \nu$.

Упражнение 1.20. Пусть $\mu : \Sigma \to R$ – скалярная мера. Напомним, что в [6] (упражнение 4.4) рассматривались меры μ^+, μ^-, которые можно представить как $\mu^+ = \frac{1}{2}(\bar{\mu} + \mu)$, $\mu^- = \frac{1}{2}(\bar{\mu} - \mu)$.

Следующие утверждения эквивалентны:

1) μ – неатомическая;

2) $\bar{\mu}$ – неатомическая;

3) μ^+, μ^- – неатомические.

Упражнение 1.21. Пусть $\mu_1, ..., \mu_n : \Sigma \to R$ – скалярные меры. Мера $\mu : \Sigma \to R^n$, где $\mu(E) = (\mu_1(E), ..., \mu_n(E))$, $E \in \Sigma$, является неатомической тогда и только тогда, когда каждая из мер $\mu_1, ..., \mu_n$ неатомическая. Здесь R^n – действительное n - мерное арифметическое пространство с нормой $\|x\| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}$, где $x = (x_1, ..., x_n)$.

Доказательство. Справедливы следующие оценки. Пусть $E \in \Sigma$. Возьмем $F \in E \cap \Sigma$. Тогда

$$\|\mu(F)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}[\mu_i(F)]^2} \le \sum_{i=1}^{n} |\mu_i(F)| \le \sum_{i=1}^{n} \bar{\mu}_i(E) \le \sum_{i=1}^{n} \bar{\mu}_i(E).$$

Отсюда $\bar{\mu}(E) \le \sum\limits_{i=1}^{n} \bar{\mu}_i(E)$. С помощью этого неравенства легко показать, что из неатомичности мер $\mu_1, ..., \mu_n$ следует неатомичность меры μ.

Зафиксируем $k \in \overline{1, n}$. Имеем

$$|\mu_k(F)| \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n}[\mu_i(F)]^2} = \|\mu(F)\| \le \bar{\mu}(E).$$

Отсюда $\bar{\mu}_k(E) \le \bar{\mu}(E)$. Очевидно, из неатомичности μ следует неатомичность μ_k, $k \in \overline{1, n}$.

Теорема 1.22. Пусть $\mu : \Sigma \to X$ – мера, имеющая атомы. Тогда существуют множества $A, B \in \Sigma$, $AB = \emptyset$, $A \cup B = T$, где A не содержит атомов, а B есть объединение не более, чем счетного числа попарно не пересекающихся атомов меры μ.

Доказательство. Согласно теореме 1.12 множество классов эквивалентности атомов $\check{A}$ не более, чем счетно. Пусть $\check{A} = \{\check{E}_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность попарно различных классов эквивалентности атомов. Положим $F_1 = E_1, ..., F_n = E_n \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{n-1} E_i, ...$. Тогда $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ – спектр атомов и $F_n \sim E_n$, $n \in N$. Положим $B = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$, $A = T \setminus B$. Покажем, что множество A не содержит атомов. Пусть $E \in A \cap \Sigma$ и $\mu(E) \neq 0$. Если бы E было атомом, то $\check{E} \in \check{A}$ и существовал бы номер n_0 такой, что $\check{E} = \check{E}_{n_0}$. Тогда $E \sim E_{n_0}$. Так как $E_{n_0} \sim F_{n_0}$, то $E \sim F_{n_0}$. Тогда $\mu(EF_{n_0}) = \mu(F_{n_0}) = \mu(E_{n_0}) \neq 0$ (см. упражнение 1.11).

Значит, $EF_{n_0} \neq \emptyset$, что противоречит выбору E. Итак, множество A не содержит атомов.

Следствие 1.23. Пусть $\mu : \Sigma \to X$ – мера, имеюшая атомы. Тогда справедливо разложение $\mu = \mu_1 + \mu_2$, где $\mu_1, \mu_2 : \Sigma \to X$ – меры, μ_1 – неатомическая, μ_2 – чисто атомическая, причем такое разложение единственно.

Доказательство. Пусть множества $A, B \in \Sigma$ те, о которых говорится в теореме. Положим

$$\mu_1(E) = \mu(EA),\ \mu_2(E) = \mu(EB),\ E \in \Sigma.$$

Очевидно, μ_1 – неатомическая мера, μ_2 – чисто атомическая мера и $\mu = \mu_1 + \mu_2$.

Докажем единственность. Предположим, что $\mu = \nu_1 + \nu_2$, где $\nu_1, \nu_2 : \Sigma \to X$ – меры, ν_1 – неатомическая, ν_2 – чисто атомическая. Тогда $\mu_1 - \nu_1 = \nu_2 - \mu_2$. Предположим, что мера $\nu_2 - \mu_2$ не является нулевой, тогда она чисто атомическая (см.упражнение 1.19), значит, у неё есть атомы. С другой стороны, мера $\nu_2 - \mu_2$ является неатомической как разность неатомических мер $\mu_1 - \nu_1$. Значит, $\nu_2 - \mu_2 = 0$. Тогда $\mu_1 - \nu_1 = 0$. Отсюда $\mu_1 = \nu_1$, $\mu_2 = \nu_2$.

Теорема 1.24. Пусть $\mu : \Sigma \to X$ – чисто атомическая мера. Тогда её образ $\mu(\Sigma)$ является компактным множеством.

Доказательство. Расмотрим канторово множество

$$K = \{a \in [0,1] : a = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n},\ \text{где } a_n \text{ равно } 0 \text{ или } 2\}.$$

Как известно, указанное представление числа единственно и K является компактным множеством (подробнее см. [2], с.63).

Пусть $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ – спектр атомов меры μ, для которого $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = T$.

Определим функцию $f : K \to X$ следующим образом. Пусть $a = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$, где a_n равно 0 или 2. Обозначим $I(a) = \{n \in N : a_n = 2\}$. Положим

$$f(a) = \sum_{n \in I(a)} \mu(A_n).$$

Очевидно,

$$f(K) = \{\sum_{n \in I} \mu(A_n),\ \text{где } I \subset N\}.$$

Легко показать, что множество сумм есть $\mu(\Sigma)$. Его включение в $\mu(\Sigma)$ следует из того, что $\sum\limits_{n \in I} \mu(A_n) = \mu(\bigcup\limits_{n \in I} A_n) \in \mu(\Sigma)$. Теперь пусть

$x \in \mu(\Sigma)$. Тогда существует множество $E \in \Sigma$ такое, что $x = \mu(E)$. Представим $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} EA_n$. Тогда $\mu(E) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mu(EA_n)$. Так как A_n – атом, то $\mu(EA_n)$ равно 0 или $\mu(A_n)$. Поэтому $\mu(E) = \sum\limits_{n:\mu(EA_n)\neq 0} \mu(A_n)$. Если же для любого $n \in N$ $\mu(EA_n) = 0$, то $\mu(E) = 0$.

Итак, $f(K) = \mu(\Sigma)$. Известно, что образ компактного множества при непрерывном отображении является компактным множеством ([2], с.101). Для завершения доказательства осталось проверить непрерывность f.

Заметим следующее. Пусть $a, b \in K$, то есть $a = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}$, $b = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2^n}$, где каждое из a_n, b_n равно 0 или 2. Пусть номер k такой, что $a_n = b_n$, $n = 1, ..., k-1$, $a_k \neq b_k$. Тогда

$$|a - b| = \left|\frac{a_k - b_k}{3^k} + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{a_n - b_n}{3^n}\right| \geq \frac{|a_k - b_k|}{3^k} - \left|\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{a_n - b_n}{3^n}\right| \geq$$

$$\geq \frac{2}{3^n} - \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{|a_n - b_n|}{3^n} \geq \frac{2}{3^k} - \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{2}{3^n} = \frac{1}{3^k}.$$

Возьмем $\varepsilon > 0$. В силу непрерывности $\tilde{\mu}$ сверху на пустом множестве существует номер $n_0 \in N$ такой, что $\tilde{\mu}(\bigcup\limits_{n=n_0+1}^{\infty} E_n) < \varepsilon$. Положим $\delta = \frac{1}{3^{n_0}}$. Пусть $a, b \in K$ и $|a - b| < \delta$. Тогда $a_n = b_n$, $n = 1, ..., n_0$. В противном случае существовал бы номер $k \in \overline{1, n_0}$ такой, что $a_n = b_n$, $n = 1, ..., k-1$, $a_k \neq b_k$. Согласно замечанию выше, было бы $|a - b| \geq \frac{1}{3^k} \geq \frac{1}{3^{n_0}} = \delta$, что противоречит выбору чисел a и b.

Обозначим $I_1 = \{n \in I(a) : n \geq n_0 + 1\}$, $I_2 = \{n \in I(b) : n \geq n_0 + 1\}$. Получаем

$$\|f(a) - f(b)\| = \|\sum_{n\in I_1} \mu(A_n) - \sum_{n\in I_2} \mu(A_n)\| \leq$$

$$\leq \|\sum_{n\in I_1} \mu(A_n)\| + \|\sum_{n\in I_2} \mu(A_n)\| \leq 2\tilde{\mu}(\bigcup_{n=n_0+1}^{\infty} A_n) < 2\varepsilon.$$

Значит, функция f непрерывна. Теорема доказана.

§2. О выпуклости образа меры со значениями в R^n

Напомним, что образ меры $\mu : \Sigma \to X$, где Σ – σ – алгебра, X – лнп, является ограниченным подмножеством X ([6], теорема 2.14).

Если $X = R^n$, то справедливы замечательные результаты о выпуклости и замкнутости образа меры, которые будут доказаны в §2 и §3.

Определение 2.1. Подмножество $M \subset X$ называется выпуклым, если из того, что $x, y \in M$, $\lambda \in [0, 1]$, следует $\lambda x + (1 - \lambda)y \in M$.

Легко показать, что выпуклыми множествами в R являются промежутки $< a, b >$, и только они. Выпуклым множеством в лнп X является, например, любой шар $B[x_0, r] = \{x \in X : \|x - x_0\} \leq r\}$. Подробнее о выпуклых множествах см. [2], с.128.

Определение 2.2. Говорят, что мера $\mu : \Sigma \to X$ обладает свойством Дарбу, если для любого множества $E \in \Sigma$ и для любого числа $\lambda \in [0, 1]$ существует множество $F \in E \cap \Sigma$ такое, что $\mu(F) = \lambda\mu(E)$.

Теорема 2.3 (Дарбу). Неатомическая мера $\mu : \Sigma \to [0, +\infty)$ обладает свойством Дарбу.

Доказательство. Пусть $E \in \Sigma$, $0 < \lambda < 1$. Обозначим $t = \lambda\mu(E)$. Возьмем $0 < \varepsilon_1 < \min(t, 1)$. Так как мера μ неатомическая, то она обладает свойством Сакса. Поэтому существует разбиение $\{E_1^1, ..., E_{n_1}^1\}$ множества E такое, что $\mu(E_i^1) < \varepsilon_1$, $i \in \overline{1, n_1}$. Найдется $k_1 \in \overline{1, n_1 - 1}$ такое, что

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{k_1} E_i^1) < t \text{ и } \mu(\bigcup_{i=1}^{k_1+1} E_i^1) \geq t.$$

Обозначим $F_1 = \bigcup\limits_{i=1}^{k_1} E_i^1$. Тогда

$$\mu(F_1) < t \leq \mu(F_1 \cup E_{k_1+1}^1) = \mu(F_1) + \mu(E_{k_1+1}^1) < \mu(F_1) + \varepsilon_1.$$

Сделаем следующий шаг. Возьмем $0 < \varepsilon_2 < \min(t - \mu(F_1), \frac{1}{2})$ Существует разбиение $\{E_1^2, ..., E_{n_2}^2\}$ множества $E_{k_1+1}^1$ такое, что $\mu(E_i^2) < \varepsilon_2$, $i \in \overline{1, n_2}$. Найдется $k_2 \in \overline{1, n_2 - 1}$ такое, что

$$\mu(F_1 \cup \bigcup_{i=1}^{k_2} E_i^2) < t \text{ и } \mu(F_1 \cup \bigcup_{i=1}^{k_2+1} E_i^2) \geq t.$$

Обозначим $F_2 = \bigcup\limits_{i=1}^{k_2} E_i^2$. Имеем

$$\mu(F_1 \cup F_2) < t < \mu(F_1 \cup F_2) + \varepsilon_2.$$

Продолжив процесс до бесконечности, получим спектр $\{F_n\}_{n=1}^\infty \subset E \cap \Sigma$ и последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^\infty$; $\varepsilon_n \to 0$

при $n \to \infty$, для которых

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{m} F_n\Big) < t < \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{m} F_n\Big) + \varepsilon_m, \ m \in N. \tag{1}$$

Положим $F = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$. В силу непрерывности μ имеем $\mu(F) = \lim\limits_{m\to\infty} \mu\Big(\bigcup\limits_{n=1}^{m} F_n\Big)$. Переходя к пределу в неравенстве (1) при $m \to \infty$, получаем $\mu(F) \leq t \leq \mu(F)$. Итак, $F \in E \cap \Sigma$, $\mu(F) = t$. Теорема доказана.

Лемма 2.4. Пусть мера $\mu : \Sigma \to X$ обладает свойством Дарбу. Тогда её образ $\mu(\Sigma)$ является выпуклым множеством.

Доказательство. Пусть $E, F \in \Sigma$, $\lambda \in [0, 1]$. Так как μ обладает свойством Дарбу, то существуют множества $B \in (E \setminus F) \cap \Sigma$, $C \in (F \setminus E) \cap \Sigma$ такие, что $\mu(B) = \lambda\mu(E \setminus F)$, $\mu(C) = (1 - \lambda)\mu(F \setminus E)$. Тогда $\mu(B \cup EF \cup C) = \lambda\mu(E) + (1 - \lambda)\mu(F)$.

Определение 2.5. Говорят, что мера $\mu : \Sigma \to X$ обладает свойством половины, если для любого множества $E \in \Sigma$ существует множество $F \in E \cap \Sigma$ такое, что $\mu(F) = \frac{1}{2}\mu(E)$.

Лемма 2.6. Пусть $\mu : \Sigma \to X$ – мера, обладающая свойством половины. Тогда для любого множества $E \in \Sigma$ существует семейство множеств $\{E_\lambda, \lambda \in [0, 1]\} \subset E \cap \Sigma$, удовлетворяющее условиям:

1) $E_0 = \emptyset$, $E_1 = E$,

2) $E_\lambda \subset E_{\lambda'}$, если $\lambda \leq \lambda'$,

3) $\mu(E_\lambda) = \lambda\mu(E)$.

Доказательство. Пусть $E \in \Sigma$. По свойству половины существует множество $F \in E \cap \Sigma$ такое, что $\mu(F) = \frac{1}{2}\mu(E)$. Положим $E_{0,\frac{1}{2}} = F$, $E_{\frac{1}{2},1} = E \setminus F$. Очевидно, мера μ на каждом из этих множеств равна $\frac{1}{2}\mu(E)$.

По свойству половины существуют множества $F_1 \in E_{0,\frac{1}{2}} \cap \Sigma$, $F_2 \in E_{\frac{1}{2},1} \cap \Sigma$ такие, что $\mu(F_1) = \frac{1}{2^2}\mu(E)$, $\mu(F_2) = \frac{1}{2^2}\mu(E)$. Положим $E_{0,\frac{1}{2^2}} = F_1$, $E_{\frac{1}{2^2},\frac{2}{2^2}} = E_{0,\frac{1}{2}} \setminus F_1$, $E_{\frac{2}{2^2},\frac{3}{2^2}} = F_2$, $E_{\frac{3}{2^2},1} = E_{\frac{1}{2},1} \setminus F_2$. Очевидно, мера μ на каждом из этих множеств равна $\frac{1}{2^2}\mu(E)$.

Продолжим процесс до бесконечности. На n - ом шаге будем иметь разбиение множества E на 2^n попарно непересекающихся множеств $\{E_{\frac{i}{2^n},\frac{i+1}{2^n}}\}_{i=0}^{2^n-1}$ из Σ с одинаковой мерой μ на каждом из них, равной $\frac{1}{2^n}\mu(E)$.

Положим $A_0 = \emptyset$, $A_{\frac{i}{2^n}} = E_{0,\frac{1}{2^n}} \cup \ldots \cup E_{\frac{i-1}{2^n},\frac{i}{2^n}}$, $i \in \overline{1, 2^n}$. Очевидно, $\mu(A_{\frac{i}{2^n}}) = \frac{i}{2^n}\mu(E)$. Легко показать, что если $\frac{i}{2^n} \leq \frac{j}{2^m}$, то $A_{\frac{i}{2^n}} \subset A_{\frac{j}{2^m}}$.

Пусть $\lambda \in [0,1]$. Определим $E_\lambda = \bigcup_{\frac{i}{2^n} \le \lambda} A_{\frac{i}{2^n}}$. Заметим, что $E_\lambda \in \Sigma$ как объединение счетного числа множеств из Σ.

Очевидно, условия 1 и 2 выполнены. Покажем, что $\mu(E_\lambda) = \lambda\mu(E)$. Если $\lambda = \frac{i}{2^n}$, то это утверждение очевидно. Пусть $\lambda \ne \frac{i}{2^n}$. Тогда существует возрастающая последовательность чисел $\left\{\frac{i_k}{2^{n_k}}\right\}_{k=1}^{\infty}$ такая, что $\frac{i_k}{2^{n_k}} < \lambda$, $k \in N$, $\frac{i_k}{2^{n_k}} \to \lambda$ при $k \to \infty$.

Легко показать, что $\{A_{\frac{i_k}{2^{n_k}}}\}_{k=1}^{\infty}$ – возрастающая последовательность множеств из Σ и $E_\lambda = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{\frac{i_k}{2^{n_k}}}$. В силу непрерывности меры μ получаем

$$\mu(E_\lambda) = \lim_{k\to\infty} \mu\Big(A_{\frac{i_k}{2^{n_k}}}\Big) = \lim_{k\to\infty} \frac{i_k}{2^{n_k}}\mu(E) = \lambda\mu(E).$$

Лемма доказана.

Прежде, чем перейти к теореме, напомним, что мера $\mu : \Sigma \to R^n$ определяется набором скалярных мер $\mu_1, ..., \mu_n : \Sigma \to R$, где $\mu(E) = (\mu_1(E), ..., \mu_n(E))$, $E \in \Sigma$.

Меру μ будем называть положительной, если $\mu_i : \Sigma \to [0,\infty)$, $i \in \overline{1,n}$.

Теорема 2.7. Неатомическая мера, определенная на σ – алгебре и принимающая значения в R^n, обладает свойством Дарбу.

Доказательство. Часть I. Сначала докажем теорему для положительной неатомической меры. Доказательство проводим индукцией по n.

При $n = 1$ справедливость следует из теоремы Дарбу. Предположим, что теорема верна для $m \in \overline{1,n}$, докажем её для $n+1$.

Пусть $\mu : \Sigma \to R^{n+1}$ – положительная неатомическая мера, Σ – σ – алгебра, $\mu = (\mu_1, ..., \mu_n, \mu_{n+1})$. Тогда $\mu' : \Sigma \to R^n$, $\mu' = (\mu_1, ..., \mu_n)$ – тоже положительная неатомическая мера (см. упражнение 1.21). Сначала предположим, что

$$\mu_{n+1} << \mu'. \tag{1}$$

Пусть $A \in \Sigma$. Так как по предположению μ' обладает свойством Дарбу, то существует множество $E \in A \cap \Sigma$ такое, что $\mu'(E) = \frac{1}{2}\mu'(A)$. Положим $F = A \setminus E$. Тогда $\mu'(F) = \frac{1}{2}\mu'(A)$.

Пусть $\{E_\lambda, \lambda \in [0,1]\}$ и $\{F_\lambda, \lambda \in [0,1]\}$ – семейства множеств, построенные для μ' и множеств E и F в соответствии с леммой 2.6.

Положим $C_\lambda = E_\lambda \cup F_{1-\lambda}$, $\lambda \in [0,1]$. Имеем

$$\mu'(C_\lambda) = \mu'(E_\lambda) + \mu'(F_{1-\lambda}) = \lambda\mu'(E) + (1-\lambda)\mu'(F) = \frac{1}{2}\mu'(A).$$

Определим функцию $g(\lambda) = \mu_{n+1}(C_\lambda)$, $\lambda \in [0,1]$. Докажем непрерывность g. Пусть $\lambda, \gamma \in [0,1]$.

Легко показать, что $|g(\lambda) - g(\gamma)| \leq \mu_{n+1}(C_\lambda \Delta C_\gamma)$.

Имеем $\mu'(C_\lambda \Delta\, C_\gamma) = \mu'(E_\lambda \setminus E_\gamma) + \mu'(F_{1-\gamma} \setminus F_{1-\lambda}) = (\lambda - \gamma)\mu'(A)$, если $\lambda \geq \gamma$. Так как мера μ' положительная, то её супремация $\widetilde{\mu}'(P) = \|\mu(P)\|$, $P \in \Sigma$. Тогда $\widetilde{\mu}'(C_\lambda \Delta C_\gamma) = |\lambda - \gamma|\, \|\mu'(A)\|$.

Если $|\lambda - \gamma| \to 0$, то $\widetilde{\mu}'(C_\lambda \Delta C_\gamma) \to 0$. Так как $\mu_{n+1} << \mu'$, то по теореме 5.7 работы [6] $\mu_{n+1}(C_\lambda \Delta C_\gamma) \to 0$. Тогда $|g(\lambda) - g(\gamma)| \to 0$. Непрерывность g доказана.

Заметим, что $g(0) = \mu_{n+1}(F)$ и $g(1) = \mu_{n+1}(E)$. Имеем $\mu_{n+1}(A) = \mu_{n+1}(E) + \mu_{n+1}(F)$. Если $\mu_{n+1}(E) \geq \frac{1}{2}\mu_{n+1}(A)$, то $\mu_{n+1}(F) \leq \frac{1}{2}\mu_{n+1}(A)$ и $g(0) \leq \frac{1}{2}\mu_{n+1}(A) \leq g(1)$. Если $\mu_{n+1}(E) \leq \frac{1}{2}\mu_{n+1}(A)$, то $\mu_{n+1}(F) \geq \frac{1}{2}\mu_{n+1}(A)$ и $g(1) \leq \frac{1}{2}\mu_{n+1}(A) \leq g(0)$.

В любом случае в силу свойств непрерывной функции на отрезке существует число $\lambda_0 \in [0,1]$ такое, что $g(\lambda_0) = \frac{1}{2}\mu_{n+1}(A)$.

Учитывая, что $\mu'(C_{\lambda_0}) = \frac{1}{2}\mu'(A)$, получаем $\mu(C_{\lambda_0}) = \frac{1}{2}\mu(A)$.

Теперь снимем предположение (1). Рассмотрим меру $\nu = (\mu_1 + \mu_{n+1}, ..., \mu_n + \mu_{n+1}, \mu_{n+1})$. Мера ν положительная неатомическая, для которой $\nu_{n+1} << \nu'$.

Пусть $A \in \Sigma$. По доказанному выше существует множество $C \in A \cap \Sigma$ такое, что $\nu(C) = \frac{1}{2}\nu(A)$. Тогда

$$\mu_1(C) + \mu_{n+1}(C) = \frac{1}{2}[\mu_1(A) + \mu_{n+1}(A)],$$

$$\mu_n(C) + \mu_{n+1}(C) = \frac{1}{2}[\mu_n(A) + \mu_{n+1}(A)],$$

$$\mu_{n+1}(C) = \frac{1}{2}\mu_{n+1}(A).$$

Отсюда $\mu(C) = \frac{1}{2}\mu(A)$.

По лемме 2.6 мера μ обладает свойством Дарбу.

Часть II. Пусть $\mu : \Sigma \to R^n$, $\mu = (\mu_1, ..., \mu_n)$ – неатомическая мера. Воспользуемся разложением $\mu_i = \mu_i^+ - \mu_i^-$, $i \in \overline{1,n}$, где μ_i^+, μ_i^- будут положительными неатомическими мерами (см. упражнения 1.20, 1.21). Тогда $\nu = (\mu_1^+, \mu_1^-, ..., \mu_n^+, \mu_n^-)$ – положительная неатомическая мера, $\nu : \Sigma \to R^{2n}$. Согласно части I мера ν обладает свойством Дарбу.

Пусть $A \in \Sigma$, $\lambda \in [0,1]$. Существует $C \in A \cap \Sigma$ такое, что $\nu(C) = \lambda\nu(A)$. Для любого $i \in \overline{1,n}$

$$\mu_i^+(C) = \lambda\mu_i^+(A),\ \mu_i^-(C) = \lambda\mu_i^-(A).$$

Тогда $\mu_i(C) = \mu_i^+(C) - \mu_i^-(C) = \lambda\mu_i(A)$.

Итак, $\mu(C) = \lambda\mu(A)$.

Теорема доказана.

Из теоремы 2.7 и леммы 2.4 получаем

Следствие 2.8. Пусть $\mu : \Sigma \to R^n$ – неатомическая мера. Тогда её образ $\mu(\Sigma)$ является выпуклым подмножеством R.

§3. О замкнутости образа меры со значениями в R^n

Лемма 3.1. Пусть $\mu : \Sigma \to R$ – мера, $p = \inf\mu(\Sigma)$, $q = \sup\mu(\Sigma)$. Тогда $p, q \in \mu(\Sigma)$. Если мера μ является неатомической, то $\mu(\Sigma) = [p,q]$.

Доказательство. Заметим, что $p, q \neq \infty$, так как образ меры – ограниченное множество.

Пусть множества $A, B \in \Sigma$ задают разложение Хана множества T (см. [6], теорема 4.2), A – положительное, B – отрицательное множество относительно меры μ. Так как на σ – алгебре $A \cap \Sigma$ мера μ положительная и принимает наибольшее значение $\mu(A)$, на σ – алгебре $B \cap \Sigma$ мера μ отрицательная и принимает наименьшее значение $\mu(B)$, для любого $E \in \Sigma$

$$\mu(B) \leq \mu(E) = \mu(EA) + \mu(EB) \leq \mu(A).$$

Таким образом, $\mu(B) = p$, $\mu(A) = q$.

Итак, $\mu(\Sigma) \subset [p,q]$, $p, q \in \mu(\Sigma)$.

Если μ – неатомическая мера, то $\mu(\Sigma)$ – выпуклое множество (следствие 2.8). Тогда $[p,q] = \mu(\Sigma)$.

Лемма 3.2. Пусть $\mu : \Sigma \to R$ – мера, число $\lambda \in R$ таково, что $\mu(E) \leq \lambda$ для любого $E \in \Sigma$ и $\mu(F) = \lambda$ для некоторого множества $F \in \Sigma$.

Если $\{F_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \Sigma$ и $\mu(F_k) \to \lambda$, то $\bar{\mu}(F_k \Delta F) \to 0,\ k \to \infty$.

Доказательство. В силу полуаддитивности $\bar{\mu}$ достаточно показать, что $\bar{\mu}(F_k \setminus F) \to 0$ и $\bar{\mu}(F \setminus F_k) \to 0$, $k \to \infty$.

Предположим, что $\bar{\mu}(F_k \setminus F) \not\to 0$, $k \to \infty$. Тогда существуют число $\varepsilon > 0$, подпоследовательность $\{k_i\} \subset N$ и последовательность $\{E_i\} \subset \Sigma$ такие, что $E_i \subset F_{k_i} \setminus F$ и $|\mu(E_i)| > \varepsilon$, $i \in N$.

Так как $\mu(F_k) \to \lambda$, $k \to \infty$, то найдется номер i_0 такой, что $\lambda - \frac{\varepsilon}{2} < \mu(F_{k_{i_0}}) < \lambda + \frac{\varepsilon}{2}$.

Если $\mu(E_{i_0}) > 0$, то

$$\mu(E_{i_0} \cup F) = \mu(E_{i_0}) + \mu(F) > \lambda.$$

Если же $\mu(E_{i_0}) < 0$, то $-\mu(E_{i_0}) > \varepsilon$. Тогда

$$\mu(F_{k_{i_0}} \setminus E_{i_0}) = \mu(F_{k_{i_0}}) - \mu(E_{i_0}) > \lambda.$$

В любом случае получаем противоречие условию. Значит, $\tilde{\mu}(F_k \setminus F) \to 0$, $k \to \infty$. Аналогично, $\tilde{\mu}(F \setminus F_k) \to 0$, $k \to \infty$. Лемма доказана.

Из теории конечномерных пространств известно, что линейный функционал $f : R^n \to R$ является непрерывным; существует единственный вектор $(\alpha_1, ..., \alpha_n) \in R^n$ такой, что $f(x) = \alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n$ для любого $x = (x_1, ..., x_n) \in R^n$; ядро $Ker f = \{x \in R^n : f(x) = 0\}$ в случае ненулевого линейного функционала f является линейным подпространством R^n размерности меньше n. Без доказательства приведем следующую важную теорему ([3], с.25, теорема 3.2).

Лемма 3.3. Пусть $M \subset R^n$ – выпуклое множество, точка $a \in R^n$ принадлежит границе множества M. Тогда существуют ненулевой линейный функционал $f : R^n \to R$ и число $\lambda \in R$ такие, что $f(a) = \lambda$ и $f(x) \leq \lambda$ для любого $x \in M$.

Теорема 3.4. Образ меры, определенной на σ – алгебре и принимающей значения в R^n, является замкнутым подмножеством R^n.

Доказательство. Часть I. Сначала докажем теорему для неатомической меры. Доказательство проводим индукцией по n. При $n = 1$ справедливость следует из леммы 3.1. Предположив, что теорема верна для всех $m \in \overline{1, n-1}$, докажем её для n.

Пусть $\{E_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \Sigma$, $a \in R^n$ и $\|\mu(E_k) - a\| \to 0$ при $k \to \infty$. Покажем, что $a \in \mu(\Sigma)$.

Справедливо хотя бы одно из двух утверждений:

1) $a \in \mu(\Sigma)$; 2) a принадлежит границе множества $\mu(\Sigma)$. В первом случае доказательство завершено. Рассмотрим второй случай.

Заметим, что множество $\mu(\Sigma)$ выпуклое (следствие 2.8). По лемме 3.3 существуют ненулевой линейный функционал $f : R^n \to R$ и число $\lambda \in R$ такие, что $f(a) = \lambda$ и $f(x) \leq \lambda$, если $x \in \mu(\Sigma)$.

Рассмотрим меру $\nu(E) = f(\mu(E))$, $\nu : \Sigma \to R$. В силу непрерывности f получаем $\nu(E_k) \to \lambda$, $k \to \infty$. Таким образом, $\lambda = \sup \nu(\Sigma)$. По лемме 3.1 существует множество $F \in \Sigma$ такое, что $\nu(F) = \lambda$.

По теореме Лебега о разложении ([6] , теорема 5.9) существуют множества P и Q из Σ такие, что $PQ = \emptyset$, $P \cup Q = T$,

$$\tilde{\nu}(P) = 0, \tag{1}$$

$$\mu|_{Q\cap\Sigma} << \nu|_{Q\cap\Sigma}. \tag{2}$$

Имеем $\mu(E_k) = \mu(E_kP) + \mu(E_kQ)$, $k \in N$. Так как $\mu(\Sigma)$ – ограниченное подмножество R^n, то из любой его последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Поэтому без ограничения общности можно считать последовательности $\{\mu(E_kP)\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{\mu(E_kQ)\}_{k=1}^{\infty}$ сходящимися.
Обозначим $b = \lim\limits_{k\to\infty} \mu(E_kP)$, $c = \lim\limits_{k\to\infty} \mu(E_kQ)$. Тогда $a = b + c$.

В силу (1) для любого $E \in P \cap \Sigma$ имеем $f(\mu(E)) = 0$. Таким образом, мера $\mu|_{P\cap\Sigma}$ принимает значения из ядра f, которое является линейным пространством размерности меньше n. По предположению множество $\mu(P\cap\Sigma)$ – замкнутое подмножество ядра f. Тогда существует множество $B \in P \cap \Sigma$ такое, что $\mu(B) = b$.

Рассмотрим меру $\nu|_{Q\cap\Sigma}$. Заметим, что для любого $E \in \Sigma$ имеем $\nu(E) = \nu(EP) + \nu(EQ)$. Так как $\nu(EP) = 0$, то $\nu(E) = \nu(EQ)$.

Таким образом, $\nu(FQ) = \lambda$, $\nu(E) \leq \lambda$ для любого $E \in Q \cap \Sigma$, $\nu(E_kQ) \to \lambda$ при $k \to \infty$. Переобозначим $F' = FQ$, $E'_k = E_kQ$. По лемме 3.2 $\tilde{\nu}(E'_k \Delta F') \to 0$, $k \to \infty$. Тогда в силу (2) $\mu(E'_k \Delta F') \to 0$, $k \to \infty$.

Имеем $\mu(F') = \mu(F' \setminus E'_k) + \mu(E'_k) - \mu(E'_k \setminus F')$, $k \in N$. Устремив $k \to \infty$, получаем

$$\mu(F') = \lim_{k\to\infty} \mu(E'_k) = C.$$

Итак,

$$\mu(B \cup F') = \mu(B) + \mu(F') = b + c = a.$$

Часть II. Пусть $\mu : \Sigma \to R^n$ – мера. Согласно теореме 1.22 существуют множества $T_1, T_2 \in \Sigma$, $T_1, T_2 = \emptyset$, $T_1 \cup T_2 = T$, где T_1 не содержит атомов, а T_2 есть объединение не более, чем счетного числа попарно не пересекающихся атомов меры μ.

Тогда мера $\mu|_{T_1\cap\Sigma}$ неатомическая, её образ – замкнутое множество по части I; мера $\mu|_{T_2\cap\Sigma}$ чисто атомическая, её образ – замкнутое множество по теореме 1.24.

Обозначим через M, M_1, M_2 образы мер μ, $\mu|_{T_1\cap\Sigma}$, $\mu|_{T_2\cap\Sigma}$ соответственно. Очевидно $M = M_1 + M_2$, где M_1, M_2 – замкнутые ограниченные подмножества R^n. Легко показать, что M – тоже замкнутое ограниченное множество (представляем это читателю в качестве упражнения). Теорема доказана.

Теоремой А.А.Ляпунова обычно называется

Теорема 3.5. Образ неатомической меры, определенной на σ – алгебре и принимающей значения в R^n, является выпуклым ограниченным замкнутым подмножеством R^n.

Литература

[1] Armstrong T.E., Prikry K. Liapounoff's theorem for nonatomic, finitely-additive, bounded, finite - dimensional, vector-valued measures// Trans.Amer.Soc.- 1981.-V.266. -N2. -P.499-514.

[2] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.:Наука, 1976. – 544 с.

[3] Лейхтвейс К. Выпуклые множества. -М.:Наука, 1985.- 335 с.

[4] Ляпунов А.А. О вполне аддитивных вектор-функциях// Изв.АН СССР. Сер.матем. -1940. -N6. -С.465-478.

[5] Lindenstrauss J. A short proof of Liapounoff's convexity theorem// J.Math. Mech. -1966. -N15.-P.971-972.

[6] Свистула М.Г. Некоторые главы теории меры.I: Методические указания к спецкурсу. Самара: Изд-во "Самарский университет", 1998. -21 с.