

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

*К. А. ПОЛЯКОВ, В. Н. КАЛАБУХОВ,
Ю. Н. БАХАРЕВА*

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СВОБОДНО КОНВЕКЦИОННЫХ ТЕЧЕНИЙ ОКОЛО ВЕРТИКАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Рекомендовано редакционно-издательским советом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева» в качестве учебного пособия для обучающихся по основным образовательным программам высшего образования по направлениям подготовки 01.04.03, 01.03.03 Механика и математическое моделирование и специальности 01.05.01 Фундаментальная математика и механика

САМАРА

Издательство Самарского университета

2026

УДК 532.5(075)

ББК В253.3я7

П542

Рецензенты: канд. техн. наук, доц. П. Е. Кичаев;
канд. физ.-мат. наук, доц. М. Е. Федина

Поляков, Константин Анатольевич

П542 Математические модели свободно конвекционных течений около вертикальных поверхностей: учебное пособие / *К. А. Поляков, В. Н. Калабухов, Ю. Н. Бахарева.* – Самара: Издательство Самарского университета, 2026. – 78 с.: ил.

ISBN 978-5-7883-2300-8

Рассмотрены основные соотношения для конвекционных течений при различных числах Прандтля. Изложены математические модели течений около вертикальной стенки. Приведена методика применения пакета ANSYS для определения параметров конвекционного течения.

Пособие предназначено для обучающихся по направлениям подготовки 01.03.03 Механика и математическое моделирование, 01.04.03 Механика и математическое моделирование и специальности 01.05.01 Фундаментальные математика и механика.

Подготовлено на кафедре математического моделирования в механике.

УДК 532.5(075)

ББК В253.3я7

ISBN 978-5-7883-2300-8

© Самарский университет, 2026

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	5
Глава 1. Основные соотношения для процессов конвекции	7
1.1. Постановка гидродинамической и тепловой задачи для установившейся естественной конвекции около вертикальной стенки	8
1.2. Связь между толщинами гидродинамического и теплового пограничного слоя.....	10
1.3. Интегральные уравнения для естественной конвекции	13
Глава 2. Моделирование естественной конвекции около нагретой плоской вертикальной стенки с заданной температурой поверхности.....	16
2.1. Моделирование естественной конвекции для $Pr < 1$, $T_w = \text{const}$	16
2.2. Моделирование естественной конвекции для $Pr = 1$, $T_w = \text{const}$	22
2.3. Моделирование естественной конвекции для $Pr > 1$, $T_w = \text{const}$	26
Глава 3. Моделирование естественной конвекции около нагретой, плоской вертикальной стенки с известным тепловым потоком	33
3.1. Моделирование естественной конвекции для случая $Pr < 1$, $q_w = \text{const}$	33
3.2. Моделирование естественной конвекции для случая $Pr = 1$, $q_w = \text{const}$	39
3.3. Моделирование естественной конвекции для случая $Pr > 1$, $q_w = \text{const}$	44
Глава 4. Моделирование естественной конвекции в Ansys/CFX	52
4.1. Начало работы с ANSYS Workbench.....	52

4.2. Создание геометрической модели	54
4.3. Наложение конечно-элементной сетки.	57
4.4. Задание физических свойств и граничных условий.....	59
4.5. Проведение расчетов и анализ результатов	65
Заключение	75
Библиографический список	77

ВВЕДЕНИЕ

Конвективные течения достаточно часто встречаются в процессах, связанных с изменением температуры. Например, при подготовке космической ракеты к старту необходимо поддерживать постоянную температуру криогенного топлива, которая много ниже, чем температура окружающей среды. Авиационный двигатель после полета наоборот имеет достаточно высокую температуру и при остывании передает тепло окружающему воздуху формируя конвекционное течение, которое переносит тепло на крыло (если двигатель расположен под ним). Термические потоки заметно усложняют полеты малой и сверхмалой авиации. Так же конвекционные течения характерны при нагреве, как отдельных радиодеталей, так и комплексных микросхем, поскольку размеры источников тепла зачастую много меньше области движения воздуха. Конвекционные течения напрямую связаны с переносом тепла [1]. Наличие на поверхности обтекаемого тела водяной пленки существенно влияет на скорость отдачи тепла, за счет движения жидкости в пленке [3, 5, 7] и испарения жидкости при пленочном течении [4]. При обычных условиях тепло и массоперенос происходит в сравнительно тонком пограничном слое около стенки [6]. Если движение жидкости около стенки происходит только под действием перепада плотности, то такая конвекция называется свободной или естественной. Если же к разности температур между жидкостью и стенкой добавляется сила от перепада давления, то говорят о вынужденной конвекции [9], которая более эффективна с точки зрения теплообмена, но требует дополнительной энергии на перемещение жидкости вдоль стенки. При перегреве охлаждающей

жидкости возникает явление кипения, при котором жидкость переходит в пар, что существенно меняет картину конвекционного теплообмена [10].

В данной работе рассматривается моделирование процессов свободной конвекции при отсутствии фазовых переходов для базовых границ течения теплопереносящей среды – плоская стенка и цилиндрическая поверхность. Рассматриваются решения задач с заданной температурой стенки или заданным тепловым потоком. Для решения задач конвекции в данном пособии используются интегральные методы. Интегральные методы являются приближенными методами решения задач гидродинамики и теплообмена. Они хорошо развиты в теории пограничного слоя и дают приемлемые, с точки зрения точности, результаты. Привлекательность интегральных методов заключается в том, что при интегрировании слагаемых дифференциального уравнения, в некоторой фиксированной области, количество переменных задачи уменьшается на единицу. Развитие численных методов решения определяющих уравнений и появление специализированных пакетов прикладных программ значительно сокращает трудоемкость вычислительного процесса и открывает новые возможности в практическом применении интегральных методов. В качестве примера применения пакетов прикладных программ рассматривается задача о конвекционном обтекании турбореактивного авиационного двигателя.

Глава 1. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ПРОЦЕССОВ КОНВЕКЦИИ

Естественно-конвекционное течение возникает из-за разности температур между нагретой стенкой и окружающей средой. Соприкасаясь со стенкой, воздух нагревается и расширяется, его плотность уменьшается и начинается восходящее течение. Рассмотрим процесс естественной конвекции около нагретой вертикальной плоской стенки. У стенки возникают гидродинамический δ и тепловой Δ пограничные слои [6] (рис. 1.1–1.2).

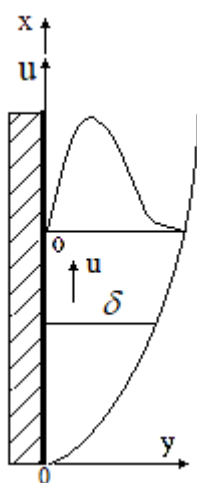


Рис. 1.1. Профиль продольной скорости

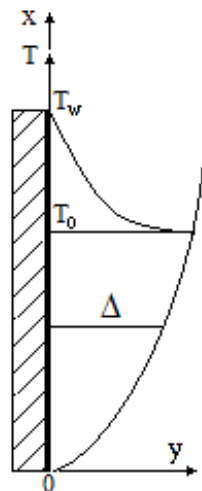


Рис. 1.2. Профиль температуры

Обозначения на рисунках: x, y – координаты, u – продольная скорость, T – температура, индекс 0 – окружающая среда, w – стенка, δ – толщина гидродинамического пограничного слоя, Δ – толщина теплового пограничного слоя.

Гидродинамическим пограничным слоем при естественной конвекции называется тонкий слой жидкости около стенки, где продольная компонента скорости изменяется от нуля на стенке до нуля на внешней границе пограничного слоя. Соответственно, тепловым пограничным слоем называется тонкий слой около стенки, где температура изменяется от температуры стенки до температуры окружающей среды на внешней границе пограничного слоя.

1.1. Постановка гидродинамической и тепловой задачи для установившейся естественной конвекции около вертикальной стенки

Запишем уравнение движения пограничного слоя [1] (движение идет вдоль оси x)

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\rho g - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (1.1)$$

где u – продольная скорость, v – поперечная скорость, ρ – плотность, ν – кинематическая вязкость, g – ускорение свободного падения, p – давление.

Градиент давления определяется весом столба невозмущенной жидкости

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\rho_0 g h}{h} = -\rho_0 g, \quad (1.2)$$

где h – высота столба жидкости. Подставим (1.2) в уравнение (1.1)

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = g(\rho_0 - \rho) + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (1.3)$$

Введем в рассмотрение коэффициент объемного расширения и запишем его в конечных разностях

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial T} = -\frac{1}{\rho} \frac{\rho - \rho_0}{T - T_0} = \frac{\rho_0 - \rho}{\rho \vartheta}, \quad (1.4)$$

где $\vartheta = (T - T_0)$ – избыточная температура. Объединяя (1.4) с (1.3), получим уравнение движения для естественной конвекции около нагретой вертикальной стенки

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\nu}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g\beta\vartheta, \quad (1.5)$$

где первое слагаемое в правой части уравнения характеризует силы трения, а второе слагаемое определяет подъемную силу, возникающую из-за разности температур стенки и окружающей среды. Добавим уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (1.6)$$

и граничные условия задачи. На стенке запишем условие прилипания

$$y = 0, \quad u = v = 0, \quad (1.7)$$

на внешней границе пограничного слоя задается нулевая скорость и нулевая производная продольной скорости по поперечной координате

$$y = \delta, \quad u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \quad (1.8)$$

Математическая постановка тепловой задачи имеет следующий вид [2]

$$u \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + v \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = a \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2}, \quad (1.9)$$

граничное условие на стенке

$$y = 0, \quad T = T_w \text{ или } q_w = -\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial y}. \quad (1.10)$$

На внешней границе теплового пограничного слоя задается нулевая избыточная температура и нулевая производная температуры по поперечной координате

$$y = \Delta, \quad \vartheta = 0, \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = 0, \quad (1.11)$$

где a – коэффициент температуропроводности, λ – коэффициент теплопроводности, q_w – тепловой поток на стенке.

1.2. Связь между толщинами гидродинамического и теплового пограничного слоя

Найдем связь между толщинами гидродинамического и теплового пограничных слоев, для чего введем безразмерные переменные [8]

$$\bar{x} = \frac{x}{L}, \quad \bar{y} = \frac{y}{\delta_0}, \quad \bar{u} = \frac{u}{u_0}, \quad \bar{v} = \frac{v}{v_0}, \quad \bar{\vartheta} = \frac{\vartheta}{\vartheta_w}, \quad (1.12)$$

где характерные величины $\delta_0, u_0, v_0, \vartheta_w$ подлежат определению. Из уравнения неразрывности (1.6) найдем

$$\frac{u_0}{L} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{v_0}{\delta_0} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0,$$

и получим уравнение связи

$$u_0 = \frac{u_0 \delta_0}{L}. \quad (1.13)$$

Определяющую температуру найдем из выражения для теплового потока (1.10)

$$q_w = -\lambda \frac{g_w \partial \bar{g}}{\delta_0 \partial y},$$

откуда получим выражение для избыточной температуры на стенке

$$g_w = \frac{q_w \delta_0}{\lambda}. \quad (1.14)$$

Приравняем подъемную силу силам трения в уравнении (1.1) и запишем для стенки

$$g \beta g_w \bar{g} = \frac{\nu u_0 \partial^2 \bar{u}}{\delta_0^2 \partial y^2}.$$

Выразим масштаб продольной скорости из последней формулы

$$u_0 = \frac{g \delta_0^2 \beta g_w}{\nu}. \quad (1.15)$$

Из теории пограничного слоя известно, что

$$\delta_0 = \sqrt{\nu \tau} = \sqrt{\frac{\nu L}{u_0}}. \quad (1.16)$$

Таким образом, имеем 4 уравнения (1.13) – (1.16) для определения неизвестных масштабов. Выполним безразмерные преобразования с уравнением (1.5), используя формулы (1.13) и (1.15). Тогда

$$\frac{u_0^2}{L} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\nu_0 u_0}{\delta_0} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{\nu u_0}{\delta_0^2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + g \beta g_w \bar{g},$$

или

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{\nu L}{\delta_0^2 u_0} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \bar{g} \right). \quad (1.17)$$

Порядок величин в левой и правой части уравнения (1.17) должен быть одинаков, тогда получим

$$1 = \frac{\nu L}{\delta_0^2 u_0}.$$

Введем число Рейнольдса $Re = \frac{u_0 L}{\nu}$ и перепишем последнее выражение в виде

$$1 = \left(\frac{L}{\delta_0} \right)^2 \frac{1}{Re}. \quad (1.18)$$

Выполним преобразование уравнения энергии (1.9), учитывая, что характерная толщина теплового слоя Δ_0 и безразмерная координата $\bar{y} = \frac{y}{\Delta_0}$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} = \frac{a L}{\Delta_0^2 u_0} \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial y^2}, \quad (1.19)$$

Приравнявая размерные компоненты в левой и правой частях уравнения (1.19), запишем

$$1 = \frac{a L}{\Delta_0^2 u_0}, \quad (1.20)$$

Воспользуемся определением чисел Рейнольдса

$$\text{Re} = \frac{u_0 L}{\nu}$$

и Прандтля

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{a}$$

и перепишем (1.20)

$$1 = \left(\frac{L}{\Delta_0} \right)^2 \frac{1}{\text{Re} \cdot \text{Pr}}. \quad (1.21)$$

Объединив (1.18) и (1.21), получим оценку толщин для гидродинамического и теплового пограничных слоев

$$\frac{\delta_0}{\Delta_0} = \sqrt{\text{Pr}}, \quad (1.22)$$

где число Прандтля рассматривается, как мера отношения молекулярного переноса количества движения к переносу теплоты теплопроводностью, а число Рейнольдса, как мера отношения сил инерции к силам вязкости. Из (1.22) следует, что если $\text{Pr} > 1$, то толщина гидродинамического пограничного слоя больше толщины теплового пограничного слоя ($\delta > \Delta$). И наоборот, если $\text{Pr} < 1$, то толщина гидродинамического пограничного слоя меньше толщины теплового пограничного слоя ($\delta < \Delta$).

1.3. Интегральные уравнения для естественной конвекции

Объединяя уравнение движения (1.5) и уравнение неразрывности (1.6), получим

$$\frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g\beta\vartheta. \quad (1.23)$$

Проинтегрируем (1.23) по толщине гидродинамического пограничного слоя, используя формулу Лейбница, предварительно выписав выражения

$$\int_0^{\delta} \frac{\partial u^2}{\partial x} dy = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} u^2 dy - u^2(\delta) \frac{\partial \delta}{\partial x},$$

$$\int_0^{\delta} \frac{\partial(uv)}{\partial y} dy = (uv)_0^{\delta} = 0,$$

$$\nu \int_0^{\delta} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy = \nu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_0^{\delta} = -\nu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}.$$

Тогда получим интегральное уравнение движения

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} u^2 dy = -\nu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} + g \beta \int_0^{\Lambda} \vartheta dy, \quad (1.24)$$

уравнение энергии имеет вид

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x} u + \frac{\partial \vartheta}{\partial y} v = a \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2}, \quad (1.25)$$

где $\vartheta = T - T_0$.

Для получения интегрального уравнения энергии рассмотрим следующие выражения

$$\frac{\partial}{\partial x} (u\vartheta) = \frac{\partial u}{\partial x} \vartheta + \frac{\partial \vartheta}{\partial x} u, \quad (1.26)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (v\vartheta) = \frac{\partial v}{\partial y} \vartheta + \frac{\partial \vartheta}{\partial y} v. \quad (1.27)$$

Складывая (1.26) и (1.27), найдем

$$\frac{\partial}{\partial x}(u\vartheta) + \frac{\partial}{\partial y}(\nu\vartheta) = \frac{\partial \vartheta}{\partial x}u + \frac{\partial \vartheta}{\partial y}\nu. \quad (1.28)$$

Подставим (1.28) в уравнение (1.25) и получим

$$\frac{\partial}{\partial x}(u\vartheta) + \frac{\partial}{\partial y}(\nu\vartheta) = a \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2}. \quad (1.29)$$

Проинтегрируем (1.29) по толщине теплового пограничного слоя (предполагая $\Delta < \delta$, что имеет место для $\text{Pr} > 1$), используя формулу Лейбница

$$\int_0^\Delta \frac{\partial}{\partial x}(u\vartheta) dy + \int_0^\Delta \frac{\partial}{\partial y}(\nu\vartheta) dy = a \int_0^\Delta \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} dy, \quad (1.30)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^\Delta (u\vartheta) dy - u(\Delta)\vartheta(\Delta) \frac{\partial \Delta}{\partial x} + (\nu\vartheta)_0^\Delta = a \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right)_0^\Delta,$$

Поскольку $\vartheta(\Delta) = 0$, $\nu(0) = 0$, то

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^\Delta (u\vartheta) dy = -a \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right)_{y=0}. \quad (1.31)$$

Уравнение (1.31) представляет собой интегральное уравнение Кружилина.

Глава 2. МОДЕЛИРОВАНИЕ ЕСТЕСТВЕННОЙ КОНВЕКЦИИ ОКОЛО НАГРЕТОЙ ПЛОСКОЙ ВЕРТИКАЛЬНОЙ СТЕНКИ С ЗАДАННОЙ ТЕМПЕРАТУРОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Граничными условиями первого рода предусматривается задание температуры стенки. Решение задач естественной конвекции в различных средах зависит от чисел Прандтля. Как было показано, если число Прандтля $Pr = 1$, то толщины пограничных слоев одинаковы. Если $Pr \neq 1$, то толщины пограничных слоев различаются, что отражается на решении задачи.

2.1. Моделирование естественной конвекции для $Pr < 1$, $T_w = \text{const}$

Рассмотрим установившееся конвективное течение жидкости около нагретой вертикальной стенки. Толщина гидродинамического пограничного слоя меньше толщины теплового слоя, температура стенки постоянна. Для решения задачи запишем интегральные уравнения движения и энергии (1.24) и (1.31)

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta} u^2 dy = -\nu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} + g\beta \int_0^{\Delta} \vartheta dy, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} (u\vartheta) dy = -a \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right)_{y=0}, \quad (2.2)$$

граничные условия задачи

$$y = 0, u = 0, \vartheta = \vartheta_w, y = \delta, u = 0, \frac{\partial u}{\partial y} = 0, y = \Delta, \vartheta = 0, \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = 0. \quad (2.3)$$

Профили продольной скорости и температуры задаются в виде, удовлетворяющем граничным условиям (2.3)

$$u(x, y) = u_1(x) \frac{y}{\delta} \left(1 - \frac{y}{\delta}\right)^2, \quad \vartheta(x, y) = \vartheta_w \left(1 - \frac{y}{\Delta}\right)^2. \quad (2.4)$$

Обратимся к уравнению (2.1), предварительно выписав выражения

$$u = u_1 \left(\frac{y}{\delta} - \frac{2y^2}{\delta^2} + \frac{y^3}{\delta^3} \right), \quad u^2 = u_1^2 \left(\frac{y^2}{\delta^2} - \frac{3y^3}{\delta^3} + \frac{6y^4}{\delta^4} - \frac{4y^5}{\delta^5} + \frac{y^6}{\delta^6} \right),$$

$$\int_0^\delta u^2 dy = \frac{u_1^2 \delta}{105},$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta u^2 dy = \frac{1}{105} \frac{\partial}{\partial x} (u_1^2 \delta), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = u_1 \left(\frac{1}{\delta} - \frac{4y}{\delta^2} + \frac{3y^2}{\delta^3} \right), \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{u_1}{\delta},$$

$$g\beta \int_0^\Delta \vartheta dy = \frac{g\beta \vartheta_w \Delta}{3}, \quad -\nu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = -\frac{\nu u_1}{\delta}. \quad (2.5)$$

Подставляя (2.5) в уравнение движения (2.1), получим

$$\frac{1}{105} \frac{d}{dx} (u_1^2 \delta) = -\frac{\nu u_1}{\delta} + \frac{g\beta \vartheta_w \Delta}{3}. \quad (2.6)$$

Воспользуемся формулами (2.4) и найдем

$$\vartheta u = \vartheta_w u_1 \left(\frac{y}{\delta} - \frac{2y^2}{\delta^2} + \frac{y^3}{\delta^3} - \frac{2y^2}{\delta \Delta} + \frac{4y^3}{\delta^2 \Delta} - \frac{2y^4}{\delta^3 \Delta} + \frac{y^3}{\delta \Delta^2} - \frac{2y^4}{\delta^2 \Delta^2} + \frac{y^5}{\delta^3 \Delta^2} \right),$$

$$\int_0^{\delta} \mathcal{G} u dy = \mathcal{G}_w u_1 \delta \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{15} \frac{\delta}{\Delta} + \frac{1}{60} \frac{\delta^2}{\Delta^2} \right), \quad \left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y} \right)_{y=0} = -\frac{2\mathcal{G}_w}{\Delta}. \quad (2.7)$$

Для $\text{Pr} < 1$, $\frac{\delta}{\Delta} < 1$ и третьим слагаемым, по сравнению с первым слагаемым можно пренебречь, тогда

$$\int_0^{\delta} \mathcal{G} u dy = \mathcal{G}_w u_1 \delta \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{15} \frac{\delta}{\Delta} \right). \quad (2.8)$$

Подставляя (2.4) и (2.8) в (2.2), получим уравнение энергии

$$\mathcal{G}_w \left[\left(\frac{1}{12} - \frac{1}{15} \frac{\delta}{\Delta} \right) \left(\delta \frac{du_1}{dx} + u_1 \frac{d\delta}{dx} \right) - \frac{u_1 \delta}{15\Delta^2} \left(\delta \frac{d\Delta}{dx} - \Delta \frac{d\delta}{dx} \right) \right] = 2a \frac{\mathcal{G}_w}{\Delta}, \quad (2.9)$$

воспользуемся условием $\mathcal{G}_w = \text{const}$

$$\left(\frac{1}{12} - \frac{1}{15} \frac{\delta}{\Delta} \right) \left(\delta \frac{du_1}{dx} + u_1 \frac{d\delta}{dx} \right) - \frac{u_1 \delta}{15\Delta^2} \left(\delta \frac{d\Delta}{dx} - \Delta \frac{d\delta}{dx} \right) = \frac{2a}{\Delta}. \quad (2.10)$$

Уравнения (8.12) и (8.16) включают в себя три неизвестные величины: δ , Δ , u_1 . Следовательно, для замыкания системы необходимо добавить дополнительное уравнение. Будем считать, что подъемная сила уравновешивается силами трения, тогда на стенке будем иметь

$$-\nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{y=0} = g\beta \mathcal{G}_w. \quad (2.11)$$

Вычислим выражения

$$\frac{\partial u}{\partial y} = u_1 \left(\frac{1}{\delta} - \frac{4y}{\delta^2} + \frac{3y^2}{\delta^3} \right), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u_1 \left(-\frac{4}{\delta^2} + \frac{6y}{\delta^3} \right)_{y=0} = -u_1 \frac{4}{\delta^2}, \quad (2.12)$$

и подставляя (2.12) в (2.11) получим уравнение связи

$$u_1 = \frac{g \beta \vartheta_w \delta^2}{4\nu} . \quad (2.13)$$

Возьмем производную по x от (2.13)

$$\frac{du_1}{dx} = \frac{g \beta \vartheta_w \delta}{2\nu} \frac{d\delta}{dx} , \quad (2.14)$$

добавим начальные условия задачи

$$x = 0, \delta = 0, \Delta = 0, u_1 = 0 . \quad (2.15)$$

Таким образом, имеем задачу Коши (2.6), (2.10), (2.14) и (2.15). Приведем систему к стандартному виду для численного решения задачи

$$\frac{d\delta}{dx} = \frac{336\nu^2}{g \beta \vartheta_w \delta^4} \left(-\frac{\delta}{4} + \frac{\Delta}{3} \right) , \quad (2.16)$$

$$\frac{d\Delta}{dx} = \frac{15\Delta^2}{u_1 \delta^2} \left[\frac{2a}{\Delta} - \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{15} \frac{\delta}{\Delta} \right) \left(\delta \frac{du_1}{dx} + u_1 \frac{d\delta}{dx} \right) + \frac{u_1 \delta}{15\Delta} \frac{d\delta}{dx} \right] , \quad (2.17)$$

$$\frac{du_1}{dx} = \frac{g \beta \vartheta_w \delta}{2\nu} \frac{d\delta}{dx} . \quad (2.18)$$

Выполним численное решение поставленной задачи. Исходные данные: среда – воздух при температуре $T_0 = 20^\circ C$, температура стенки $T_w = 80^\circ C$, $T_w = 60^\circ C$, длина пластины $L = 1$ м. Результаты решения в размерном виде представлены на рис. 2.1–2.2. Как и предполагалось, толщина гидродинамического пограничного слоя меньше толщины теплового слоя. Увеличение температуры стенки приводит к уменьшению толщин пограничных слоев.

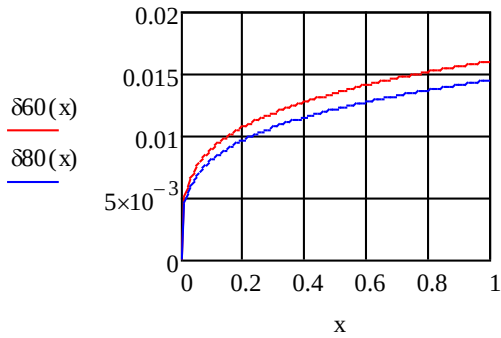


Рис. 2.1. Толщина гидродинамического пограничного слоя:

$\delta_{60}(x)$ – при температуре стенки $T_w = 60^\circ \text{C}$;

$\delta_{80}(x)$ – при температуре стенки $T_w = 80^\circ \text{C}$

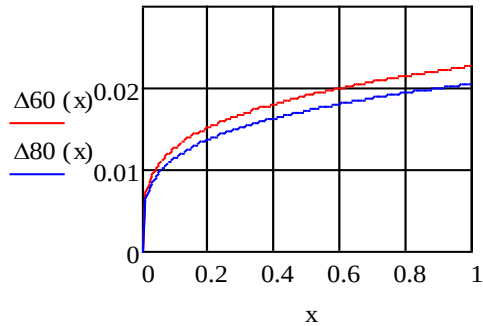


Рис. 2.2. Толщина теплового пограничного слоя:

$\Delta_{60}(x)$ – при температуре стенки $T_w = 60^\circ \text{C}$;

$\Delta_{80}(x)$ – при температуре стенки $T_w = 80^\circ \text{C}$

Коэффициент теплоотдачи определим из равенства тепловых потоков

$$q_w = \alpha(T - T_0) = \alpha \vartheta_w, \quad q_w = -\lambda \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{2\lambda \vartheta_w}{\Delta},$$

приравнивая выражения, найдем

$$\alpha(x) = \frac{2\lambda}{\Delta(x)}. \quad (2.19)$$

На рис. 2.3–2.4 показаны коэффициент теплоотдачи и масштаб скорости.

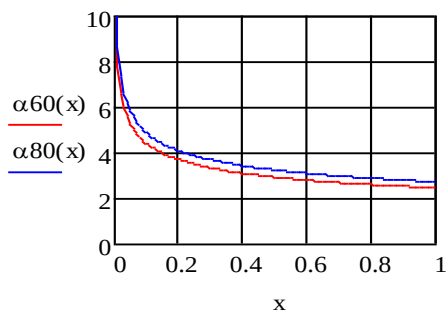


Рис. 2.3. Коэффициенты теплоотдачи:
 $\delta_{60}(x)$ – при температуре стенки $T_w = 60^\circ C$;
 $\delta_{80}(x)$ – при температуре стенки $T_w = 80^\circ C$

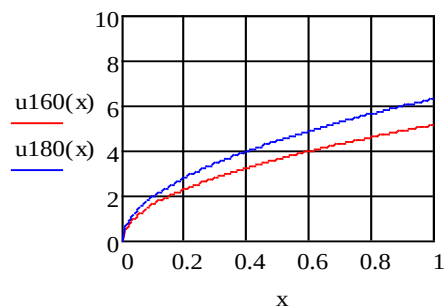


Рис. 2.4. Масштаб скорости:
 $u_{160}(x)$ – при температуре стенки $T_w = 60^\circ C$;
 $u_{180}(x)$ – при температуре стенки $T_w = 80^\circ C$

Откуда следует, что увеличение температуры стенки приводит к повышению интенсивности теплообмена и увеличению масштаба скорости. Выполним сравнение полученных результатов для $T_w = 80^0 C$ по коэффициентам теплоотдачи с опытными данными, которые аппроксимируются критериальным уравнением [12]

$$Nu_x = 0.359 Gr_x^{0.25}, \quad (2.20)$$

где $Nu = \frac{\alpha x}{\lambda}$ – число Нуссельта.

Распределение коэффициентов теплоотдачи представлено на рис. 2.5.

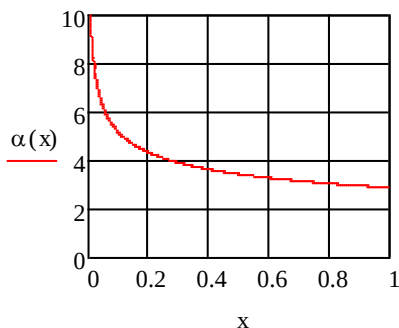


Рис. 2.5. Коэффициенты теплоотдачи (по формуле (2.20))

Сопоставление рис. 2.3 и рис. 2.5 показывает, что различие по среднему коэффициенту теплоотдачи составляет 6.7 %.

2.2. Моделирование естественной конвекции для $Pr = 1$, $T_w = \text{const}$

Рассмотрим установившееся конвективное течение жидкости около нагретой вертикальной стенки. Толщины слоев одинаковы,

температура стенки постоянна. Математическая постановка задачи включает в себя интегральные уравнения движения и энергии

$$\frac{d}{dx} \int_0^\delta u^2 dy = -\nu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} + g\beta \int_0^\delta \vartheta dy, \quad (2.21)$$

$$\frac{d}{dx} \int_0^\delta (u\vartheta) dy = -a \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right)_{y=0}, \quad (2.22)$$

с граничными условиями (2.3). Профили продольной скорости и температуры, по-прежнему, задаются в виде

$$u(x, y) = u_1(x) \frac{y}{\delta} \left(1 - \frac{y}{\delta} \right)^2, \quad \vartheta(x, y) = \vartheta_w \left(1 - \frac{y}{\delta} \right)^2. \quad (2.23)$$

Обратимся к уравнению (2.21), предварительно выписав выражения

$$u = u_1 \left(\frac{y}{\delta} - \frac{2y^2}{\delta^2} + \frac{y^3}{\delta^3} \right), \quad u^2 = u_1^2 \left(\frac{y^2}{\delta^2} - \frac{3y^3}{\delta^3} + \frac{6y^4}{\delta^4} - \frac{4y^5}{\delta^5} + \frac{y^6}{\delta^6} \right),$$

$$\int_0^\delta u^2 dy = \frac{u_1^2 \delta}{105},$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta u^2 dy = \frac{1}{105} \frac{\partial}{\partial x} (u_1^2 \delta), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = u_1 \left(\frac{1}{\delta} - \frac{4y}{\delta^2} + \frac{3y^2}{\delta^3} \right), \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{u_1}{\delta},$$

$$g\beta \int_0^\delta \vartheta dy = \frac{g\beta \vartheta_w \delta}{3}, \quad -\nu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = -\frac{\nu u_1}{\delta}. \quad (2.24)$$

Тогда получим уравнение движения

$$\frac{1}{105} \frac{d}{dx} (u_1^2 \delta) = -\frac{\nu u_1}{\delta} + \frac{g\beta \vartheta_w \delta}{3}. \quad (2.25)$$

Подставим профили (2.23) в уравнение (2.22), для чего найдем

$$\mathcal{G}u = \mathcal{G}_w u_1 \left(\frac{y}{\delta} - \frac{4y^2}{\delta^2} + \frac{6y^3}{\delta^3} - \frac{4y^4}{\delta^4} + \frac{y^5}{\delta^5} \right), \quad \int_0^\delta \mathcal{G}u dy = \frac{1}{30} \mathcal{G}_w u_1 \delta,$$

$$\left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y} \right)_{y=0} = -\frac{2\mathcal{G}_w}{\delta}.$$

Тогда запишем

$$\frac{1}{30} \frac{d}{dx} (\mathcal{G}_w u_1 \delta) = 2a \frac{\mathcal{G}_w}{\delta}. \quad (2.26)$$

Воспользуемся условием $\mathcal{G}_w = \text{const}$, тогда

$$\frac{1}{30} \frac{d}{dx} (u_1 \delta) = \frac{2a}{\delta}, \quad (2.27)$$

начальные условия задачи

$$x = 0, \delta = 0, u_1 = 0. \quad (2.28)$$

Таким образом, имеем задачу Коши (2.25), (2.27) и (2.28). Приведем систему к стандартному виду для численного решения задачи

$$\frac{d\delta}{dx} = \frac{1}{3u_1^2} \left(105 \left(\frac{\nu u_1}{\delta} - \frac{g\beta \mathcal{G}_w \delta}{3} \right) + \frac{120a u_1}{\delta} \right), \quad (2.29)$$

$$\frac{du_1}{dx} = \frac{1}{\delta^2} \left(60a - 2\delta u_1 \frac{\partial \delta}{\partial x} \right). \quad (2.30)$$

Для расчета воспользуемся воздухом. Тогда входные данные задачи: температура среды $T_0 = 20^\circ \text{C}$, температура стенки $T_w = 80^\circ \text{C}$. Результаты решения в размерном виде представлены на рис. 2.6–2.8.

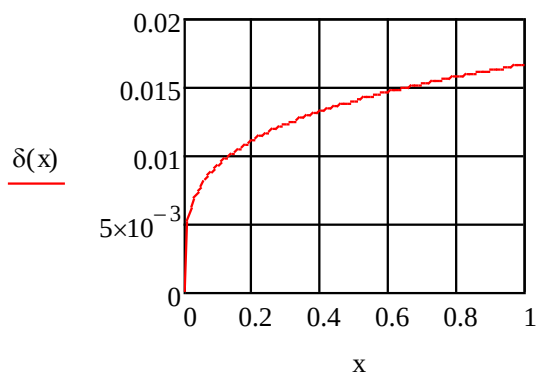


Рис. 2.6. Толщина пограничного слоя

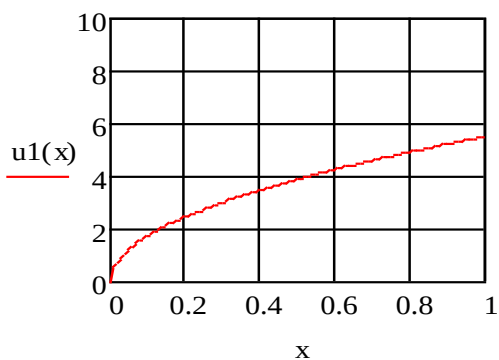


Рис. 2.7. Масштаб скорости

Изменение коэффициента теплоотдачи показано на рис. 2.8. Сравнение характеристик с предыдущим режимом конвективного теплообмена ($Pr < 1$) показано на рис. 2.9, откуда следует, что увеличение числа Прандтля приводит к увеличению интенсивности теплообмена.

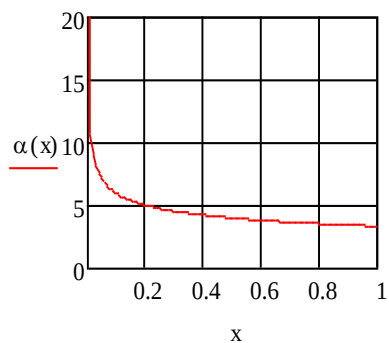


Рис. 2.8. Коэффициент теплоотдачи

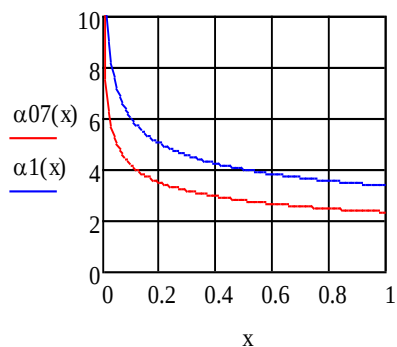


Рис. 2.9. Коэффициенты теплоотдачи:

$\alpha_{07}(x)$ – коэффициент теплоотдачи для случая $Pr < 1$;

$\alpha_1(x)$ – коэффициент теплоотдачи для случая $Pr = 1$

2.3. Моделирование естественной конвекции для $Pr > 1$, $T_w = \text{const}$

Рассмотрим установившееся конвективное течение жидкости около нагретой плоской вертикальной стенки. Температура стенки

есть величина постоянная. Поскольку число Прандтля больше единицы, то толщина гидродинамического пограничного слоя больше толщины теплового слоя ($\delta > \Delta$). Математическая постановка задачи по-прежнему включает в себя интегральное уравнение движения

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta} u^2 dy = -\nu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} + g\beta \int_0^{\Delta} g dy, \quad (2.31)$$

и интегральное уравнение Кружилина

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\Delta} (u g) dy = -a \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right)_{y=0}, \quad (2.32)$$

с граничными условиями (2.3).

Зададим профили продольной скорости и температуры в прежнем виде

$$u(x, y) = u_1(x) \frac{y}{\delta} \left(1 - \frac{y}{\delta} \right)^2, \\ g(x, y) = g_w \left(1 - \frac{y}{\Delta} \right)^2. \quad (2.33)$$

Уравнение движения не изменилось и имеет вид (2.16)

$$\frac{d\delta}{dx} = \frac{336\nu^2}{g\beta g_w \delta^4} \left(-\frac{\delta}{4} + \frac{\Delta}{3} \right). \quad (2.34)$$

Для преобразования уравнения энергии (2.32) воспользуемся уравнениями (2.33) и выпишем выражения

$$\int_0^{\Delta} g dy = g_w \left(y - \frac{2y^2}{2\Delta} + \frac{y^3}{3\Delta^2} \right)_0^{\Delta} = \frac{g_w \Delta}{3}, \quad g\beta \int_0^{\Delta} g dy = \frac{g\beta g_w \Delta}{3},$$

$$\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_{y=0} = -\frac{2g_w}{\Delta},$$

$$\int_0^{\Delta} g u dy = g_w u_1 \Delta \left(\frac{1}{12} \frac{\Delta}{\delta} - \frac{1}{15} \frac{\Delta^2}{\delta^2} + \frac{1}{60} \frac{\Delta^3}{\delta^3} \right). \quad (2.35)$$

Для больших чисел Прандтля $\frac{\Delta}{\delta} \ll 1$. Следовательно, вторым и третьим слагаемыми в (2.35) можно пренебречь, по сравнению с первым слагаемым. Тогда уравнение Кружилина (2.32) примет вид

$$\frac{1}{12} \frac{d}{dx} \left(\frac{\Delta}{\delta} u_1 \Delta \right) = \frac{2a}{\Delta}. \quad (2.36)$$

Известно, что профили теплового и гидродинамического пограничных слоев подобны, т.е. $\frac{\Delta}{\delta} = \text{const}$. Тогда (2.36) переписывается

$$\frac{1}{12} \frac{\Delta}{\delta} \frac{d}{dx} (u_1 \Delta) = \frac{2a}{\Delta},$$

или

$$\Delta \frac{du_1}{dx} + u_1 \frac{d\Delta}{dx} = \frac{24a\delta}{\Delta^2}. \quad (2.37)$$

Уравнения (2.34) и (2.37) включают в себя три неизвестные величины δ , Δ , u_1 , следовательно, для замыкания системы уравнений необходимо добавить дополнительное условие. Будем считать, что подъемная сила уравновешивается силами трения, тогда на стенке будем иметь

$$-v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{y=0} = g \beta g_w. \quad (2.38)$$

Вычислим выражения

$$\frac{\partial u}{\partial y} = u_1 \left(\frac{1}{\delta} - \frac{4y}{\delta^2} + \frac{3y^2}{\delta^3} \right), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u_1 \left(-\frac{4}{\delta^2} + \frac{6y}{\delta^3} \right)_{y=0} = -u_1 \frac{4}{\delta^2}. \quad (2.39)$$

Подставляя (2.39) в (2.38), получим дополнительное уравнение связи

$$u_1 = \frac{g \beta g_w \delta^2}{4\nu}. \quad (2.40)$$

Далее возьмем производную по координате x от u_1 из (2.40)

$$\frac{du_1}{dx} = \frac{g \beta g_w \delta}{2\nu} \frac{d\delta}{dx} \quad (2.41)$$

и добавим начальные условия задачи

$$x = 0, \delta = 0, \Delta = 0, u_1 = 0. \quad (2.42)$$

Таким образом, имеем задачу Коши (2.34), (2.37), (2.41) и (2.42).

Выполним численное решение задачи. Входные данные задачи: среда – вода при температуре $T_0 = 20^\circ C$, температура стенки $T_w = 60^\circ C$ и $T_w = 80^\circ C$, $L = 1 м$. Численное решение в размерном виде представлено на рис. 2.10–2.13.

Из графиков видно, что толщина гидродинамического пограничного слоя больше толщины теплового пограничного слоя. При увеличении температуры стенки толщины пограничных слоев уменьшаются. Коэффициенты теплоотдачи определяются по формуле (2.19). На рис. 2.12 и рис. 2.13 представлены масштаб скорости и коэффициенты теплоотдачи по высоте пластины. Откуда видно, что при увеличении температуры стенки

происходит увеличение масштаба скорости и интенсивности теплообмена.

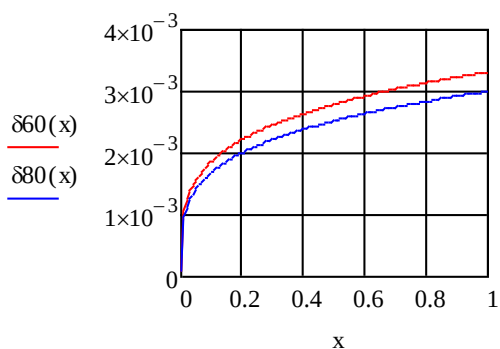


Рис. 2.10. Толщина гидродинамического пограничного слоя:

$\delta_{60}(x)$ – при температуре стенки $T_w = 60^\circ \text{C}$;

$\delta_{80}(x)$ – при температуре стенки $T_w = 80^\circ \text{C}$

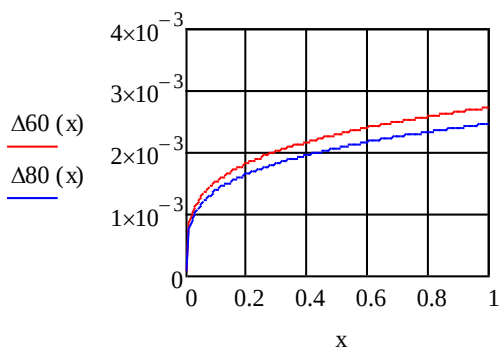


Рис. 2.11. Толщина теплового пограничного слоя:

$\Delta_{60}(x)$ – при температуре стенки $T_w = 60^\circ \text{C}$;

$\Delta_{80}(x)$ – при температуре стенки $T_w = 80^\circ \text{C}$

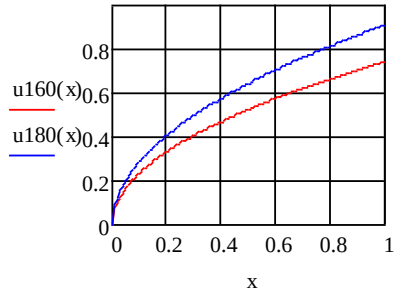


Рис. 2.12. Масштаб скорости:
 $u_{160}(x)$ – при температуре $T_w = 60^\circ C$;
 $u_{180}(x)$ – при температуре стенки $T_w = 80^\circ C$

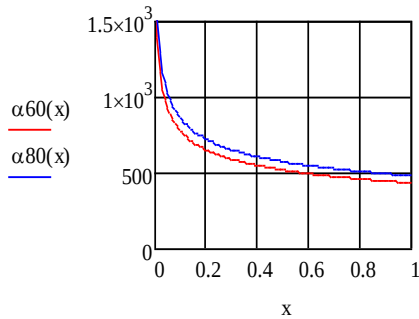


Рис. 2.13. Коэффициенты теплоотдачи:
 $\alpha_{60}(x)$ – при температуре стенки $T_w = 60^\circ C$;
 $\alpha_{80}(x)$ – при температуре стенки $T_w = 80^\circ C$

Выполним сравнение полученных результатов по среднему коэффициенту теплоотдачи с опытными данными, которые аппроксимируются критериальным уравнением [11]

$$Nu = 0.0674 \left(Gr Pr^{1.29} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (2.43)$$

Сравнение с полученным результатом (рис. 2.13) дает отличие в 7,6%. Для обобщения полученных результатов построим безразмерный график зависимости локального числа Нуссельта $Nu = \frac{\alpha x}{\lambda}$ от высоты плоской стенки для разных чисел Прандтля.

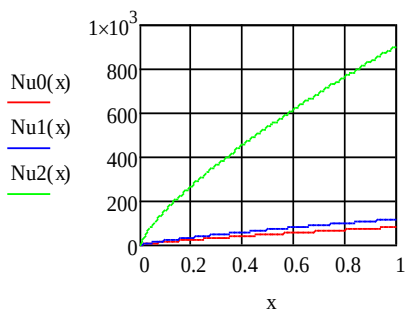


Рис. 2.14. Изменение числа Нуссельта:
 $Nu_0(x)$ для чисел $Pr > 1$; $Nu_1(x)$ для чисел $Pr = 1$;
 $Nu_2(x)$ для чисел $Pr < 1$

Откуда видно, что интенсивности теплоотдачи с ростом числа Прандтля увеличивается.

Глава 3. МОДЕЛИРОВАНИЕ ЕСТЕСТВЕННОЙ КОНВЕКЦИИ ОКОЛО НАГРЕТОЙ, ПЛОСКОЙ ВЕРТИКАЛЬНОЙ СТЕНКИ С ИЗВЕСТНЫМ ТЕПЛОВЫМ ПОТОКОМ

Граничными условиями второго рода предусматривается задание теплового потока q_w на стенке пластины. Отметим, что при заданном тепловом потоке на стенке пластины температура на стенке есть функция координаты x , т.е. $\vartheta_w = \vartheta_w(x)$.

3.1. Моделирование естественной конвекции для случая $Pr < 1$, $q_w = \text{const}$

Рассмотрим установившееся конвективное течение жидкости около нагретой вертикальной стенки. Нагрев стенки осуществляется постоянным тепловым потоком. Толщина гидродинамического пограничного слоя меньше толщины теплового слоя. Для решения задачи по-прежнему используются интегральные уравнения движения и энергии

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta} u^2 dy = -\nu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} + g\beta \int_0^{\Delta} \vartheta dy \quad (3.1)$$

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta} (u\vartheta) dy = -a \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right)_{y=0}. \quad (3.2)$$

Граничные условия задачи на стенке будут иметь вид

$$y = 0, u = v = 0, y = 0, q_w = -\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = \text{const}, \quad (3.3)$$

на внешней границе теплового пограничного слоя задается нулевая избыточная температура и нулевая производная температуры по поперечной координате

$$y = \delta, u = 0, \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \vartheta = 0, \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = 0. \quad (3.4)$$

Профили продольной скорости и температуры задаются в виде, удовлетворяющем граничным условиям (3.3) и (3.4)

$$u(x, y) = u_1(x) \frac{y}{\delta} \left(1 - \frac{y}{\delta}\right)^2, \quad \vartheta(x, y) = \vartheta_w(x) \left(1 - \frac{y}{\delta}\right)^2. \quad (3.5)$$

Подставим профиль скорости (3.5) в уравнение (3.1), используя выражения (2.24). Тогда получим уравнение движения

$$\frac{1}{105} \frac{d}{dx} (u_1^2 \delta) = -\frac{\nu u_1}{\delta} + \frac{g\beta \vartheta_w \Delta}{3}. \quad (3.6)$$

При подстановке профилей (3.5) в уравнение (3.2) воспользуемся формулой (2.8). Тогда уравнение энергии примет вид

$$\frac{d}{dx} \left[\vartheta_w u_1 \delta \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{15} \frac{\delta}{\Delta} \right) \right] = 2a \frac{\vartheta_w}{\Delta}. \quad (3.7)$$

Выполняя преобразования в (3.7) найдем

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{15} \frac{\delta}{\Delta} \right) \left(u_1 \delta \frac{d\vartheta_w}{dx} + \vartheta_w \delta \frac{du_1}{dx} + \vartheta_w u_1 \frac{d\delta}{dx} \right) - \\ & \frac{\vartheta_w u_1 \delta}{15\Delta} \frac{d\delta}{dx} + \frac{\vartheta_w u_1 \delta^2}{15\Delta^2} \frac{d\Delta}{dx} = \frac{2a\vartheta_w}{\Delta}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Приравнивая подъемную силу и вязкостную силу у плоской стенки, запишем

$$u_1 = \frac{g \beta \vartheta_w \delta^2}{4\nu}. \quad (3.9)$$

Возьмем производную по продольной координате, тогда получим третье дифференциальное уравнение

$$\frac{du_1}{dx} = \frac{g \beta}{2\nu} \left(2\delta \vartheta_w \frac{d\delta}{dx} + \delta^2 \frac{d\vartheta_w}{dx} \right). \quad (3.10)$$

Для замыкания системы необходимо добавить четвертое уравнение. Воспользуемся определением теплового потока и запишем закон Фурье

$$q_w = -\lambda \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{2\lambda \vartheta_w}{\Delta},$$

откуда будем иметь

$$\vartheta_w = \frac{q_w \Delta}{2\lambda}. \quad (3.11)$$

Возьмем производную по координате x от (3.11) и найдем четвертое дифференциальное уравнение

$$\frac{d\vartheta_w}{dx} = \frac{q_w}{2\lambda} \frac{d\Delta}{dx}. \quad (3.12)$$

Начальные условия задачи

$$x = 0, \delta = 0, \Delta = 0, u_1 = 0, \vartheta_w = 0. \quad (3.13)$$

В результате получим задачу Коши (3.6), (3.8), (3.10), (3.12) и (3.13). Приведем систему к стандартному виду для численного решения задачи

$$\frac{d\delta}{dx} = \frac{336\nu^2}{g\beta g_w \delta^4} \left(-\frac{\delta}{4} + \frac{\Delta}{3} \right), \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta}{dx} = \frac{15\Delta^2}{g_w u_1 \delta^2} & \left[\frac{2a g_w}{\Delta} - \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{15} \frac{\delta}{\Delta} \right) \times \right. \\ & \left. \times \left(u_1 \delta \frac{d g_w}{dx} + g_w \delta \frac{d u_1}{dx} + g_w u_1 \frac{d \delta}{dx} \right) + \frac{g_w u_1 \delta}{15\Delta} \frac{d \delta}{dx} \right], \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\frac{d u_1}{dx} = \frac{g\beta}{2\nu} \left(2\delta g_w \frac{d\delta}{dx} + \delta^2 \frac{d g_w}{dx} \right), \quad (3.16)$$

$$\frac{d g_w}{dx} = \frac{q_w}{2\lambda} \frac{d\Delta}{dx}. \quad (3.17)$$

Выполним численное решение задачи. Исходные данные: среда – воздух при температуре $T_0 = 20^\circ \text{C}$, $q_w = 0.5 \cdot 10^2 \text{ Вт/м}^2$, $L = 1 \text{ м}$. Результаты решения в размерном виде представлены на рис. 3.1–3.6. Величины, отмеченные индексом «0» соответствуют тепловому потоку $q_w = 0.5 \cdot 10^2 \text{ Вт/м}^2$. Величины с индексом «2» соответствуют тепловому потоку $q_w = 2 \cdot 10^2 \text{ Вт/м}^2$.

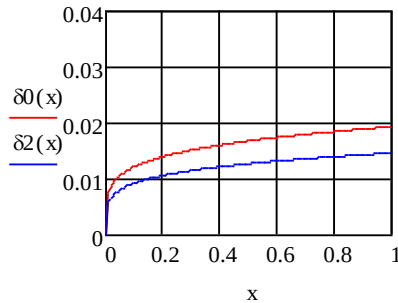


Рис. 3.1. Толщина гидродинамического пограничного слоя

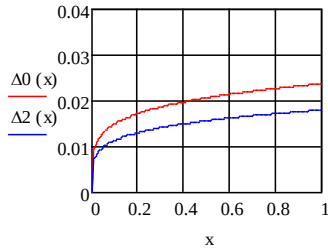


Рис. 3.2. Толщина теплового пограничного слоя

Из графиков видно, что толщина гидродинамического пограничного слоя меньше толщины теплового пограничного слоя. Увеличение теплового потока приводит к уменьшению толщин пограничного слоя. На рис. 3.3 и рис. 3.4 представлены графики масштабов скорости и избыточной температуры стенки.

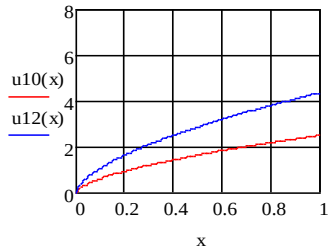


Рис. 3.3. Масштаб скорости

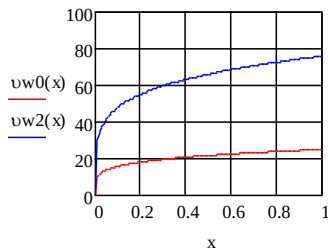


Рис. 3.4. Масштаб температуры

На рис. 3.5–3.6 показано изменение температура стенки и распределение коэффициента теплоотдачи.

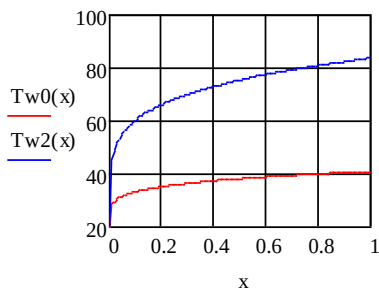


Рис. 3.5. Температура стенки

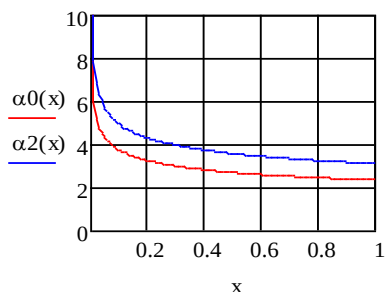


Рис. 3.6. Коэффициенты теплоотдачи

Температура стенки по высоте возрастает, что связано с ухудшением теплоотдачи из-за возрастания толщины пограничного слоя. Увеличение теплового потока приводит к возрастанию интенсивности теплообмена.

Выполним сравнение с опытными данными по коэффициенту теплоотдачи, используя критериальное уравнение [11] для $q_w = 2 \cdot 10^2 \text{ Вт/м}^2$

$$Nu_x = 0.616 \left(\frac{Pr}{Pr + 0.8} \right)^{0.2} (Gr_x^* Pr)^{0.2}, \quad (3.18)$$

где число Грасгофа $Gr_x^* = \frac{g \beta q_w x^4}{\nu^2 \lambda}$.

Сопоставление опытных данных (рис. 3.7) с полученными результатами (рис. 3.6) показывает различие по среднему коэффициенту теплоотдачи 6.74 %.

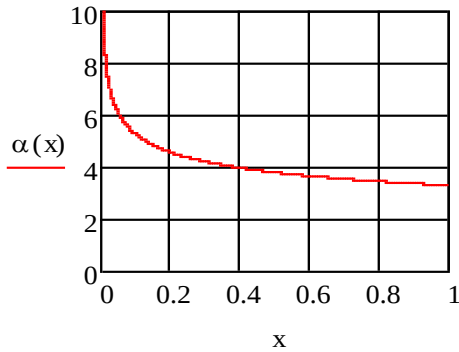


Рис. 3.7. Коэффициент теплоотдачи (по формуле (3.18))

3.2. Моделирование естественной конвекции для случая $Pr = 1$, $q_w = \text{const}$

Рассмотрим установившееся конвективное течение жидкости около нагретой вертикальной стенки. Нагрев стенки осуществляется постоянным тепловым потоком. Толщины пограничных слоев считаем одинаковыми. Для решения задачи воспользуемся интегральными уравнениями движения и энергии

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta} u^2 dy = -\nu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} + g\beta \int_0^{\delta} \vartheta dy, \quad (3.19)$$

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta} (u\vartheta) dy = -a \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right)_{y=0}. \quad (3.20)$$

Граничные условия задачи на стенке будут иметь вид

$$y = 0, u = v = 0, q_w = -\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = \text{const}. \quad (3.21)$$

На внешней границе пограничного слоя

$$y = \delta, \quad u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \vartheta = 0, \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = 0. \quad (3.22)$$

Зададим профили продольной скорости и температуры в виде

$$u(x, y) = u_1(x) \frac{y}{\delta} \left(1 - \frac{y}{\delta}\right)^2, \quad \vartheta(x, y) = \vartheta_w(x) \left(1 - \frac{y}{\delta}\right)^2. \quad (3.23)$$

Обратимся к уравнению (3.19), предварительно выписав выражения

$$\begin{aligned} u &= u_1 \left(\frac{y}{\delta} - \frac{2y^2}{\delta^2} + \frac{y^3}{\delta^3} \right), \quad \int_0^\delta u^2 dy = \frac{u_1^2 \delta}{105}, \\ u^2 &= u_1^2 \left(\frac{y^2}{\delta^2} - \frac{3y^3}{\delta^3} + \frac{6y^4}{\delta^4} - \frac{4y^5}{\delta^5} + \frac{y^6}{\delta^6} \right), \\ \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta u^2 dy &= \frac{1}{105} \frac{\partial}{\partial x} (u_1^2 \delta), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = u_1 \left(\frac{1}{\delta} - \frac{4y}{\delta^2} + \frac{3y^2}{\delta^3} \right), \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{u_1}{\delta}, \\ g\beta \int_0^\delta \vartheta dy &= \frac{g\beta \vartheta_w \delta}{3}, \quad -\nu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = -\frac{\nu u_1}{\delta}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Тогда получим

$$\frac{1}{105} \frac{d}{dx} (u_1^2 \delta) = -\frac{\nu u_1}{\delta} + \frac{g\beta \vartheta_w \delta}{3}. \quad (3.25)$$

Подставим профили (3.23) в уравнение (3.20), для чего найдем

$$\begin{aligned} \vartheta u &= \vartheta_w u_1 \left(\frac{y}{\delta} - \frac{4y^2}{\delta^2} + \frac{6y^3}{\delta^3} - \frac{4y^4}{\delta^4} + \frac{y^5}{\delta^5} \right), \quad \int_0^\delta \vartheta u dy = \frac{1}{30} \vartheta_w u_1 \delta, \\ \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right)_{y=0} &= -\frac{2\vartheta_w}{\delta}. \end{aligned}$$

Уравнение (3.23) примет вид

$$\frac{1}{30} \frac{d}{dx} (\mathcal{G}_w u_1 \delta) = 2a \frac{\mathcal{G}_w}{\delta}. \quad (3.26)$$

В нашем случае $\mathcal{G}_w = \mathcal{G}_w(x)$, следовательно, уравнения (3.25) и (3.26) содержат три неизвестных величины $\mathcal{G}_w$, δ , u_1 , и для замыкания системы необходимо добавить третье уравнение. При заданном тепловом потоке на стенке запишем закон Фурье

$$q_w = -\lambda \left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{2\lambda \mathcal{G}_w}{\delta},$$

откуда

$$\mathcal{G}_w = \frac{q_w \delta}{2\lambda}. \quad (3.27)$$

Возьмем производную по координате x от (3.27) и получим третье дифференциальное уравнение связи

$$\frac{d\mathcal{G}_w}{dx} = \frac{q_w}{2\lambda} \frac{d\delta}{dx}. \quad (3.28)$$

Начальные условия задачи

$$x = 0, \delta = 0, u_1 = 0, \mathcal{G}_w = 0. \quad (3.29)$$

Таким образом, имеем задачу Коши (3.25), (3.26), (3.28) и (3.29). Приведем систему к стандартному для численного решения виду

$$\frac{d\delta}{dx} = \frac{1}{u_1^2} \left(35 \left(\frac{\nu u_1}{\delta} - \frac{g\beta q_w \delta^2}{6\lambda} \right) + \frac{40a u_1}{\delta} \right), \quad (3.30)$$

$$\frac{du_1}{dx} = \frac{60a}{\delta^2} - \frac{2u_1}{\delta} \frac{d\delta}{dx}, \quad (3.31)$$

$$\frac{d\vartheta_w}{dx} = \frac{q_w}{2\lambda} \frac{d\delta}{dx}. \quad (3.32)$$

Выполним численное решение задачи. Исходные данные: среда-воздух при температуре $T_0 = 20^\circ\text{C}$, $L = 1$ м, $q_w = 10^3$ Вт/м². Результаты решения задачи представлены на рис. 3.8–3.12.

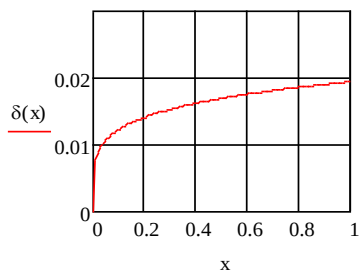


Рис. 3.8 Толщина пограничного слоя

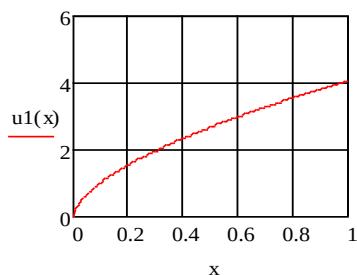


Рис. 3.9. Масштаб скорости

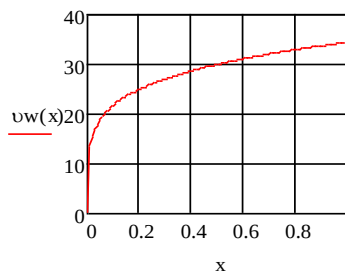


Рис. 3.10. Избыточная температура

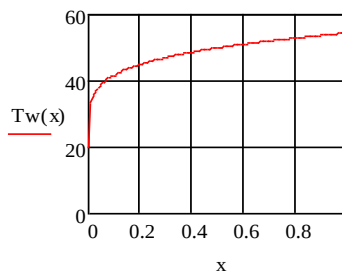


Рис. 3.11. Температура стенки

Сравнение с опытными данными выполним по коэффициенту теплоотдачи, используя критериальное уравнение (3.18). Полученные результаты (рис. 3.12) и опытные данные (рис. 3.13), практически, совпадают.

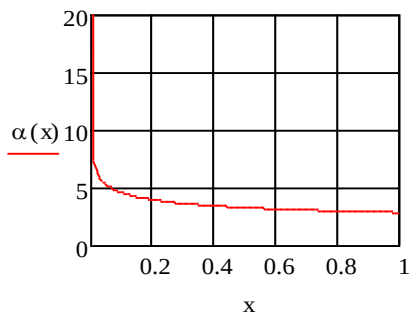


Рис. 3.12. Коэффициенты теплоотдачи

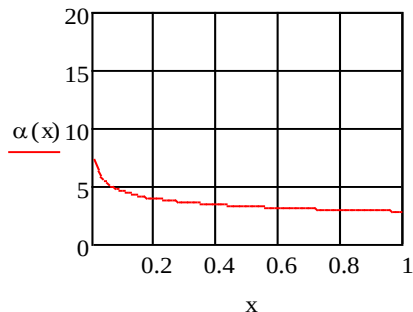


Рис. 3.13. Коэффициенты теплоотдачи (по формуле (9.22))

Сравнение характеристик с предыдущим режимом конвективного теплообмена ($Pr < 1$) показано на рис. 3.14-3.15. Величины, отмеченные индексом «0» соответствуют расчету с числом $Pr < 1$, величины, отмеченные индексом «1» соответствуют расчету с числом $Pr = 1$.

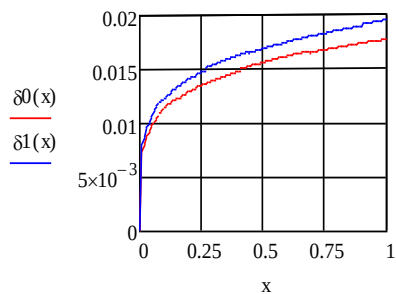


Рис. 3.14. Толщина пограничного слоя

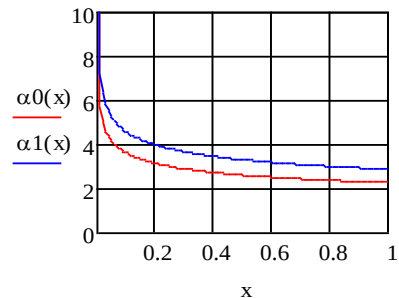


Рис. 3.15. Коэффициенты теплоотдачи

Откуда следует, что увеличение числа Прандтля приводит к увеличению толщины пограничного слоя и возрастанию коэффициентов теплоотдачи.

3.3. Моделирование естественной конвекции для случая $Pr > 1$, $q_w = \text{const}$

Рассмотрим установившееся конвективное течение жидкости около нагретой вертикальной плоской стенки. На стенке задан постоянный тепловой поток. Толщина гидродинамического пограничного слоя больше толщины теплового слоя. Математическая постановка задачи включает в себя интегральное уравнение движения

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta} u^2 dy = -\nu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} + g\beta \int_0^{\Delta} \vartheta dy, \quad (3.33)$$

интегральное уравнение Кружилина

$$u(x, y) = u_1(x) \frac{y}{\delta} \left(1 - \frac{y}{\delta} \right)^2, \quad \frac{d}{dx} \int_0^{\Delta} (u\vartheta) dy = -a \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right)_{y=0}, \quad (3.34)$$

с граничными условиями (3.21) и (3.22). При постоянном тепловом потоке на стенке температура стенки есть величина переменная, следовательно $\vartheta_w = \vartheta_w(x)$. Зададим профили продольной скорости и температуры

$$\vartheta(x, y) = \vartheta_w(x) \left(1 - \frac{y}{\Delta} \right)^2. \quad (3.35)$$

Обратимся к уравнению (3.33), предварительно выписав выражения

$$u = u_1 \left(\frac{y}{\delta} - \frac{2y^2}{\delta^2} + \frac{y^3}{\delta^3} \right), \quad u^2 = u_1^2 \left(\frac{y^2}{\delta^2} - \frac{3y^3}{\delta^3} + \frac{6y^4}{\delta^4} - \frac{4y^5}{\delta^5} + \frac{y^6}{\delta^6} \right), \quad \int_0^{\delta} u^2 dy = \frac{u_1^2 \delta}{105},$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} u^2 dy = \frac{1}{105} \frac{\partial}{\partial x} (u_1 \delta), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = u_1 \left(\frac{1}{\delta} - \frac{4y}{\delta^2} + \frac{3y^2}{\delta^3} \right), \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{u_1}{\delta},$$

$$\int_0^{\Delta} g dy = g_w \left(y - \frac{2y^2}{2\Delta} + \frac{y^3}{3\Delta^2} \right)_0^{\Delta} = \frac{g_w \Delta}{3},$$

$$g\beta \int_0^{\Delta} g dy = \frac{g\beta g_w \Delta}{3}, -\nu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = -\frac{\nu u_1}{\delta}, \quad (3.36)$$

Подставляя (3.6) в уравнение (3.33), получим уравнение движения

$$\frac{1}{105} \frac{d}{dx} (u_1^2 \delta) = -\frac{\nu u_1}{\delta} + \frac{g\beta g_w \Delta}{3}. \quad (3.37)$$

Подставим профили (3.35) в уравнение (3.34), для чего найдем

$$\int_0^{\delta_i} g u dy = g_w u_1 \Delta \left(\frac{1}{12} \frac{\Delta}{\delta} - \frac{1}{15} \frac{\Delta^2}{\delta^2} + \frac{1}{60} \frac{\Delta^3}{\delta^3} \right), \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right)_{y=0} = -\frac{2g_w}{\Delta}. \quad (3.38)$$

Известно, что $\frac{\Delta}{\delta} = const$. Кроме того, для больших чисел

Прандтля $\frac{\Delta}{\delta} \ll 1$. Следовательно, вторым и третьим слагаемыми

можно пренебречь, по сравнению, с первым слагаемым. Тогда

$$\int_0^{\Delta} g u dy = g_w u_1 \Delta \left(\frac{1}{12} \frac{\Delta}{\delta} \right),$$

и уравнение Кружилина (4.34) примет вид

$$\frac{1}{12} \frac{\Delta}{\delta} \frac{d}{dx} (g_w u_1 \Delta) = \frac{2a g_w}{\Delta}. \quad (3.39)$$

При заданном тепловом потоке на стенке запишем закон Фурье

$$q_w = -\lambda \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{2\lambda g_w}{\Delta}.$$

откуда

$$\mathcal{G}_w = \frac{q_w \Delta}{2\lambda}. \quad (3.40)$$

Будем считать, что подъемная сила уравновешивается силами трения, тогда на стенке будем иметь

$$-\nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{y=0} = g \beta \mathcal{G}_w. \quad (3.41)$$

Выпишем выражения

$$\frac{\partial u}{\partial y} = u_1 \left(\frac{1}{\delta} - \frac{4y}{\delta^2} + \frac{3y^2}{\delta^3} \right), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u_1 \left(-\frac{4}{\delta^2} + \frac{6y}{\delta^3} \right)_{y=0} = -u_1 \frac{4}{\delta^2},$$

и перепишем (3.41) в виде

$$\frac{4\nu u_1}{\delta^2} = g \beta \mathcal{G}_w. \quad (3.42)$$

Добавим начальные условия задачи

$$x = 0, \quad \delta = 0, \quad u_1 = 0, \quad \mathcal{G}_w = 0, \quad \Delta = 0, \quad (3.43)$$

и будем иметь систему уравнений (3.37), (3.39), (3.40) и (3.43) для определения неизвестных величин $u_1(x)$, $\delta(x)$, $\mathcal{G}_w(x)$, $\Delta(x)$.

Приведем систему к стандартному для численного решения виду

$$\frac{d\delta}{dx} = \frac{1}{5\delta^4 \Delta^2} \left(\frac{3360\nu^2 \lambda}{g\beta q_w} \left(-\frac{\delta \Delta}{4} + \frac{\Delta^2}{3} \right) - 2\Delta \delta^5 \frac{\partial \Delta}{\partial x} \right), \quad (3.44)$$

$$\frac{d\Delta}{dx} = \frac{1}{11\delta^2 \Delta^2 g\beta q_w} \left(\frac{192a\delta}{\Delta} - \frac{1344\nu \Delta^2}{\delta^3} \left(-\frac{\delta}{4} + \frac{\Delta}{3} \right) \right), \quad (3.45)$$

$$\frac{du_1}{dx} = \frac{g\beta}{4\nu} \left(2\delta \vartheta_w \frac{d\delta}{dx} + \delta^2 \frac{d\vartheta_w}{dx} \right), \quad (3.46)$$

$$\frac{d\vartheta_w}{dx} = \frac{q_w}{2\lambda} \frac{d\Delta}{dx}. \quad (3.47)$$

Выполним численное решение задачи. Исходные данные: среда – вода при температуре $T_0 = 20^\circ\text{C}$, $q_w = 10^3 \text{ Вт/м}^2$ и $q_w = 2 \cdot 10^3 \text{ Вт/м}^2$. Для заданных характеристик число Релея $Ra = 7.8 \cdot 10^{13}$, следовательно, в пограничном слое наблюдается турбулентный режим течения. Результаты решения по жесткой схеме в размерном виде представлены на рис. 3.16–3.19. Величины, отмеченные индексом «1» соответствуют тепловому потоку $q_w = 0,5 \cdot 10^2 \text{ Вт/м}^2$. Величины с индексом «2» соответствуют тепловому потоку $q_w = 2 \cdot 10^2 \text{ Вт/м}^2$.

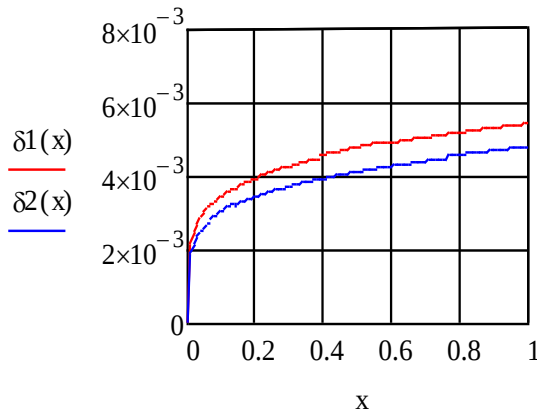


Рис. 3.16. Толщина гидродинамического пограничного слоя

Из графиков видно, что толщина гидродинамического пограничного слоя больше толщины теплового пограничного слоя. При

увеличении теплового потока толщины пограничных слоев уменьшаются. На рис. 3.18–3.19 представлены графики изменения масштабов скорости и температуры.

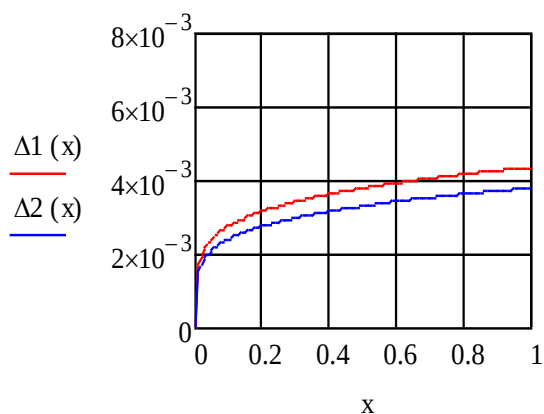


Рис. 3.17. Толщина теплового пограничного слоя

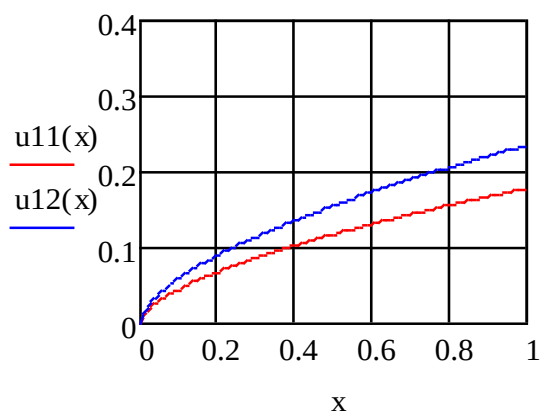


Рис. 3.18. Масштаб скорости

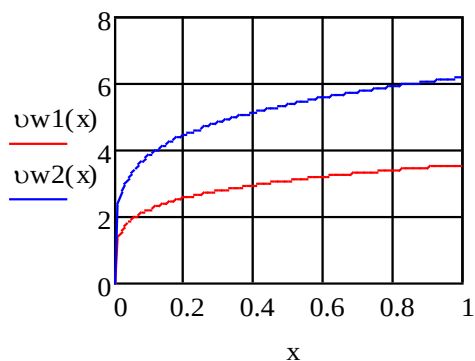


Рис. 3.19. Масштаб температуры

Откуда видно увеличение масштабов. На рис. 3.20–3.21 показаны температура поверхности стенки и коэффициенты теплоотдачи.

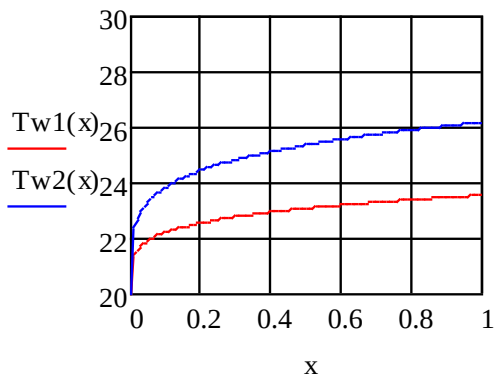


Рис. 3.20. Температура стенки

Из графиков (рис. 3.20–3.21) следует, что при увеличении теплового потока температура стенки и интенсивность теплоотдачи возрастают.

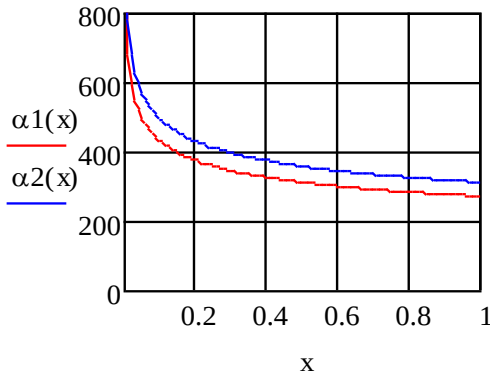


Рис. 3.21. Коэффициенты теплоотдачи

Сопоставим результат, полученный с использованием интегрального метода, с известными результатами для $q_w = 10^3 \text{ Вт/м}^2$. Воспользуемся критериальным уравнением теплообмена для естественной конвекции около плоской вертикальной стенки с постоянным тепловым потоком на стенке [11]

$$Nu_x = 0.944 (Gr_x^*)^{0.2}, \quad (3.48)$$

где $Nu_x = \frac{\alpha x}{\lambda}$ – число Нуссельта, $Gr_x^* = \frac{g \beta q_w x^4}{\nu^2 \lambda}$ – модифицированное число Грасгофа.

График зависимости коэффициента теплоотдачи от высоты пластины представлен на рис. 3.22.

Сравнивая результаты рис.3.21–3.22 по среднему коэффициенту теплоотдачи, видим различие около 7 %. Построим безразмерный график зависимости локального числа Нуссельта ($Nu = \frac{\alpha x}{\lambda}$) от высоты плоской стенки для разных чисел Прандтля.

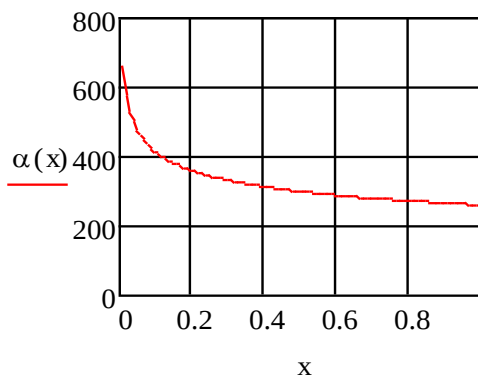


Рис. 3.22. Коэффициенты теплоотдачи (формула (3.48))

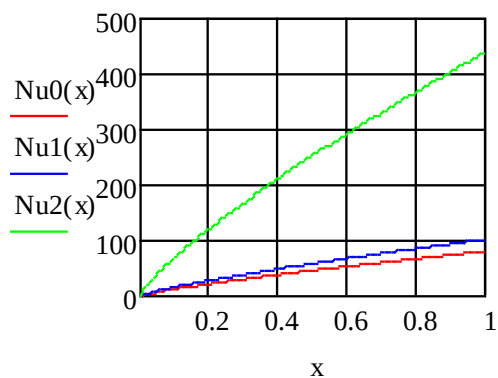


Рис. 3.23. Изменение числа Нуссельта:

$Nu_0(x)$ для чисел $Pr > 1$; $Nu_1(x)$ для чисел $Pr = 1$; $Nu_2(x)$ для чисел $Pr < 1$

Из графиков зависимости числа Нуссельта видно, что с ростом числа Прандтля происходит увеличение интенсивности теплоотдачи.

Глава 4. МОДЕЛИРОВАНИЕ ЕСТЕСТВЕННОЙ КОНВЕКЦИИ В ANSYS/CFX

Решим задачу о естественной конвекции около плоской вертикальной стенки, рассмотренную в главе 2. Покажем совпадение результатов решения упрощенных дифференциальных уравнений и полного конечно-элементного решения. При описании использования ANSYS предполагается, что читатель имеет навыки работы с используемым пакетом. Методы работы с Ansys/CFX описаны, например, в [12]. Рассматривается течение воздуха вблизи нагретой вертикальной стенки с постоянной температурой либо с постоянным тепловым потоком от поверхности. В качестве исследуемых параметров будем рассматривать изменение температуры и вертикальной скорости по нормали к стенке, а также изменение толщин динамического и теплового пограничного слоев вдоль стенки.

4.1. Начало работы с ANSYS Workbench

После запуска **ANSYS/Workbench** пользователю доступны панель **Toolbox** со списками доступных решателей, и отдельных компонент проектов, окно схемы проекта (**ProjectSchematic**), а также окно сообщений **Messages**. Для создания нового проекта необходимо в окне **Toolbox** на вкладке **AnalysisSystem** выбрать компонент **FluidFlow (CFX)** и левой кнопкой мыши перетащить его в окно **ProjectSchematic** (рис. 4.1).

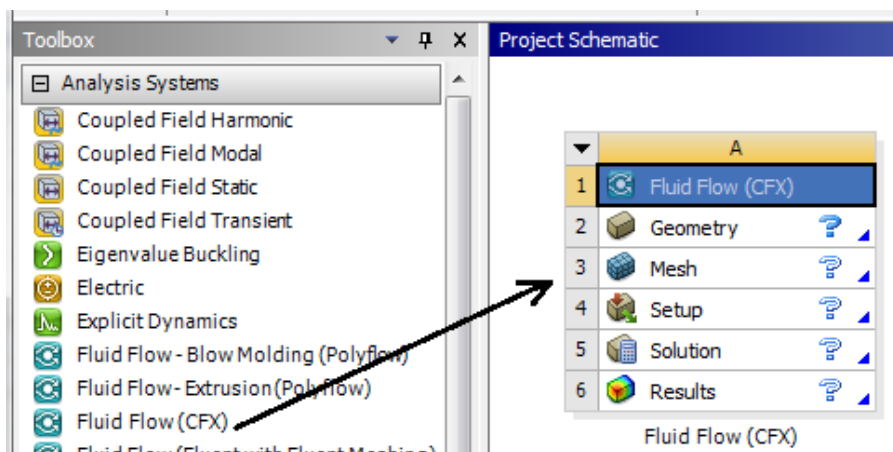


Рис. 4.1

Созданный проект нужно переименовать для лучшей идентификации. Для этого нужно нажать правую кнопку мыши в строке **1 FluidFlow (CFX)** и в контекстном меню выбрать команду **Rename** (рис. 4.2). Новое название проекта – **HeatTube**.

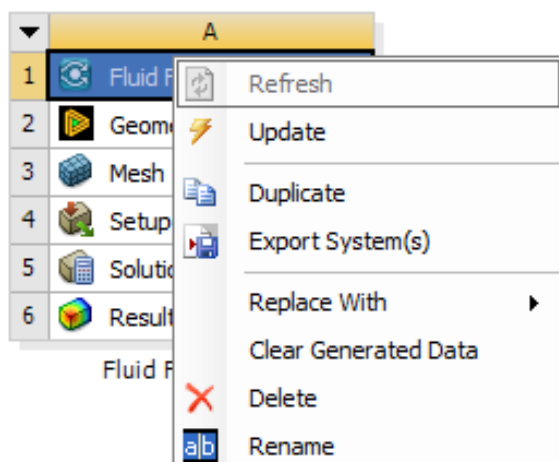


Рис. 4.2

Знаки вопроса, расположенные справа от этапов проекта на рис. 5 показывают, что действия, соответствующие этим этапам еще не выполнены. Кроме знаков вопроса могут быть и другие знаки, показывающие текущий статус данного этапа. Знаки могут быть следующие:

- ✓ данный модуль полностью выполнен и корректен.
- ✓ данные или результаты корректны, но предыдущий модуль был изменен.
- ⚡ значения и структура данных текущего модуля были изменены, требуется команды «Обновить».
- ↻ значения данных необходимо обновить вследствие изменения предыдущего модуля.

4.2. Создание геометрической модели

Создание геометрии области течения происходит в модуле **DesignModeler (DM)**, который запускается нажатием правой кнопки мыши строке **Geometry** (рис. 4.3).

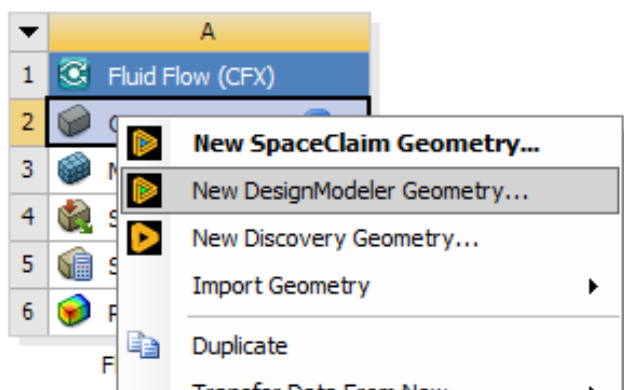


Рис. 4.3

Окно **DesignModeler** следующие основные рабочие элементы:

Graphics – окно проектирования, в котором происходит непосредственное создание модели.

TreeOutline – окно структуры модели. В нем отображаются все операции геометрического построения. В ходе создания модели любую операцию можно удалить или временно отключить, что приведет к автоматическому изменению всех частей модели, зависящих от этой операции. Это окно может иметь два режима работы.

Sketching – в этом режиме отображаются команды создания контуров геометрических фигур (двумерные эскизы).

Modelling – в этом режиме на основе имеющихся эскизов создаются трехмерные фигуры или поверхности.

Details – окно, в котором можно указать геометрические характеристики и другие параметры создаваемых объектов.

Система координат – позволяет изменять режим просмотра модели. Щелчок мыши по любой из координатных осей приводит к тому, что эта ось становится перпендикулярной экрану, щелчок мыши на сфере, приводит к изометрическому виду модели.

В начале решения задачи необходимо выбрать систему единиц. Командой верхнего меню Units – Meter необходимо выбрать режим, когда все расстояния будут отображаться в метрах. В данной задаче областью решения будет являться параллелепипед размерами 1м x 1м и толщиной 0.1. Для создания параллелепипеда необходимо выполнить команды верхнего меню **Create – Primitives – Box** и в окне **DetailsView** задать значения, показанные на рисунке 4.4. После задания всех данных необходимо нажать кнопку Generate и созданная фигура отобразится на экране. Далее необходимо задать названия граням, поскольку они будут использоваться в качестве граничных условий, которые будут использоваться в качестве граничных условий. Названия граней параллелепипеда показаны на рисунке 4.5. Грань 1 (левая

вертикальная) имеет название Heat_Wall, она представляет собой область с постоянной заданной температурой. Нижняя горизонтальная грань 2 имеет название Ground. Она определяет тепло-изолированную твердую стенку. Правая вертикальная грань 3 имеет название Opening. Она представляет собой область притока воздуха. Верхняя горизонтальная грань 4 называется Outlet и определяет собой область выхода воздуха из области решения. Передняя и задняя вертикальные грани 5 и 6 являются областями симметрии и называются front_symmetry и rear_symmetry соответственно.

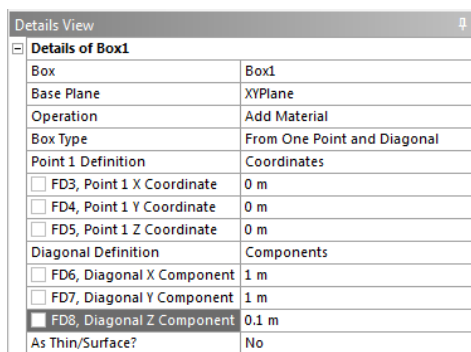


Рис. 4.4

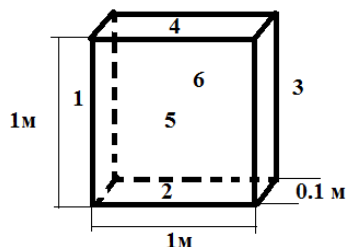


Рис. 4.5

Для создания именованной области необходимо выполнить команду верхнего меню Tools – NamedSelection, указать необходимую грань, например, переднюю область симметрии, в окне DetailsView нажать кнопку Apply и изменить название NamedSel1 на Front_Symmetry (рис. 4.6). После этого нажать кнопку Generate. Аналогичным образом создаются остальные именованные грани. Порядок создания именованных граней неважен. После создания все созданные названия появятся в дереве модели рис. 4.7. После этого модуль DesignModeler можно закрыть.

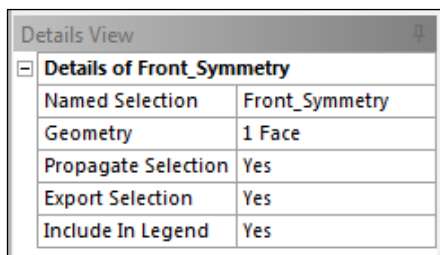


Рис. 4.6

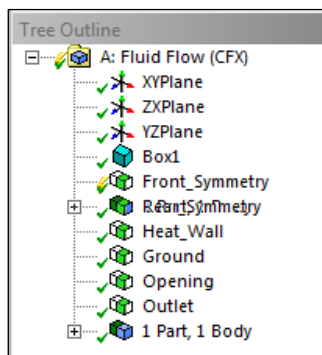


Рис. 4.7

4.3. Наложение конечно-элементной сетки

Для запуска сеткогенератора необходимо запустить модуль Mesh в окне проекта. В модуле сеткогенератора необходимо вызвать контекстное меню для пункта Mesh и раскрыть меню выбрать пункты Insert – Method (рис. 4.8).

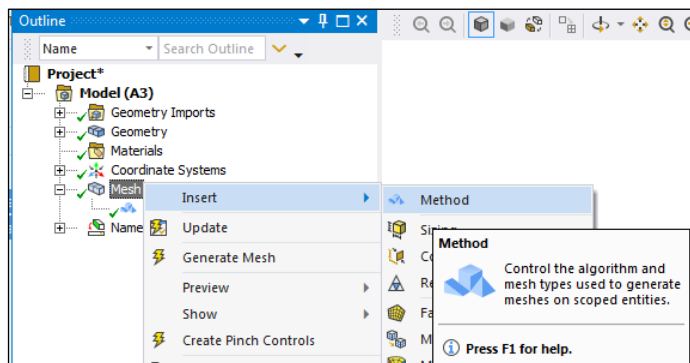


Рис. 4.8

После выполнения этой команды в пункте Mesh появится новый элемент Method, детали которого будут отображены в окне

DetailsView. Эти детали нужно изменить согласно рисунку 4.9. В качестве параметра Source нужно указать грань HeatWall, а в качестве параметра Target указать грань Opening. В решаемой задаче особый интерес представляет область решения, расположенная вблизи нагретой стенки, поскольку в этой области формируются пограничные слои и поперечные градиенты продольной скорости и температуры максимальны. В связи с этим около нагретой стенки поперечный размер элементов сетки должен быть меньше среднего значения. Сформируем сетку таким образом, что бы у стенки толщина элементов сетки была минимальной и постепенно увеличивалась по мере удаления по нормали от стенки. Для этого будем использовать метод Sweep с переменным шагом. Параметры, обеспечивающие данный подход показаны на рисунке 4.9. После задания всех характеристик метода Sweep необходимо сгенерировать сетку нажав кнопку  на панели инструментов. Вид сетки полученный в результате генерации показан на рисунке 4.10.

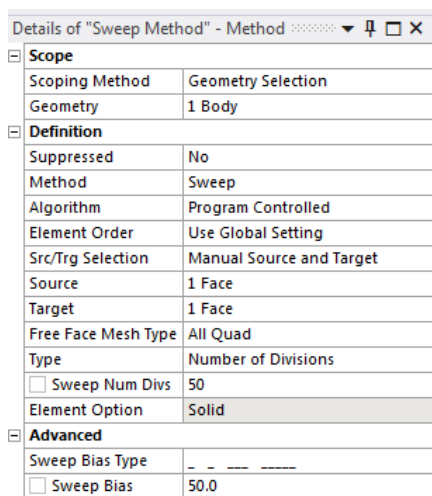


Рис. 4.9

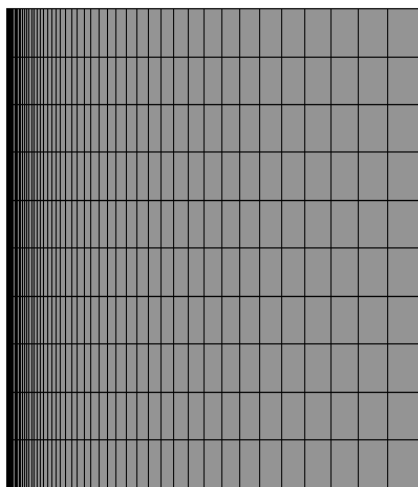


Рис. 4.10

После генерации конечно элементной сетки модуль сеткогенератора можно закрыть, а проект сохранить.

4.4. Задание физических свойств и граничных условий

Физические свойства моделируемого процесса и граничные условия задаются в модуле Setup, который необходимо запустить для дальнейшей работы. В дереве модели пункта Setup нужно убедиться, что значение параметра Analysis type установлено в значение Steady (стационарный анализ). Работа с модулем Setup состоит из следующих этапов:

- задание свойств среды и ее движения в области решения;
- задание граничных условий;
- настройка параметров расчета.

Для задания свойств среды необходимо в дереве модели вызвать контекстное меню и выполнить команду Edit для пункта DefaultDomain. В раскрывшемся окне необходимо выполнить следующие действия:

1. Вкладка BasicSettings

- в области Fluid and Particle Definitions убедиться, что в области течения задана только одна подвижная среда Fluid_1, свойства которой берутся из библиотеки Ansys и которая имеет физические свойства воздуха при температуре 25 градусов Цельсия (рис. 4.11).
- в области Domain Models указать характерное значение давления Reference Pressure 0 Pa. В этом случае Ansys будет вычислять избыточное или недостаточное давление относительно атмосферного. Задать режим учета сил плавучести Buoyancy Models и указать величину гравитационного ускорения и его направление в отрицательном направлении оси Y, указать характерное (начальное) значение температуры воздуха в области решения 273 K, что соответствует 0 °C (рис. 4.12).

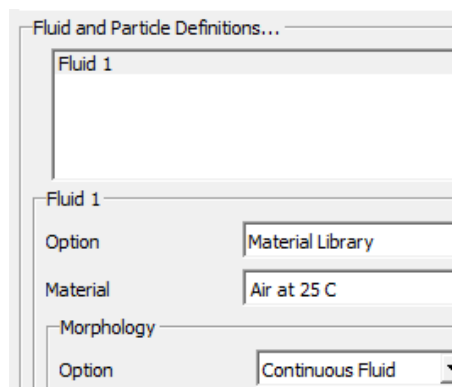


Рис. 4.11

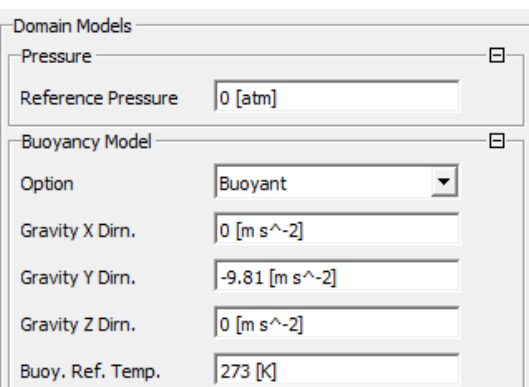


Рис. 4.12

2. Вкладка Fluid Models

- в области HeatTransfer выбрать значение ThermalEnergy
- в области Turbulence выбрать значение None (Laminar)

Значение ThermalEnergy определяет, что решается упрощенное уравнение энергии, где генерация тепла за счет перепада давления не учитывается. Пункт Laminar означает, нет потери энергии на перемешивание слоев жидкости, т.е. течение ламинарное (рис. 4.13).

После задания всех пунктов нажать кнопку Ok.

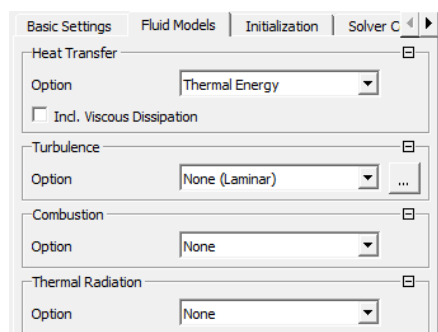


Рис. 4.13

Граничные условия задаются последовательно. Для задания граничного условия необходимо нажать кнопку  на панели инструментов, в появившемся окне InsertBoundary задать название граничного условия, затем в раскрывшемся окне заполнить вкладки BasicSettings и BoundaryDetails. На вкладке BasicSettings необходимо указать тип границы и область, которая ей соответствует. Окно InsertBoundary для граничного условия на горячей стенке показано на рисунке 18. Названия остальных граничных условий совпадают с названиями именованных поверхностей, созданных ранее в DesignModeler. Вид вкладок BasicSettings и BoundaryDetails для различных граничных условий показаны на рисунках 4.14–4.24.

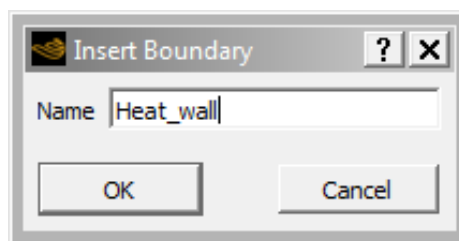


Рис. 4.14

На рисунках 4.15–20 показаны параметры граничного условия HeatWall. Граничное условие имеет тип Wall, расположено в именованной области Heat_Wall. Оно является стенкой к которой прилипает воздух при движении (NoSlipWall) и имеет температуру 80.

На рисунках 4.17, 4.18 показаны параметры для граничного условия ground. Это условие представляет собой непроницаемую стенку, расположенную на грани Ground. Воздух скользит вдоль этой стенки (условие FreeSlipWall) и эта стенка не передает тепло (условие Adiabatic).

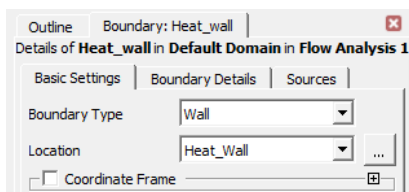


Рис. 4.15

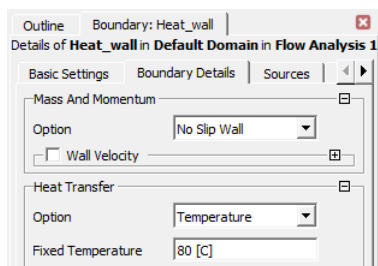


Рис. 4.16

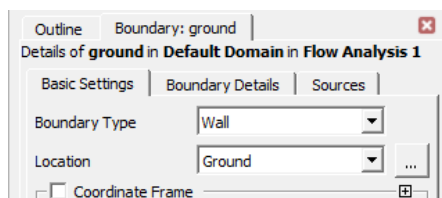


Рис. 4.17

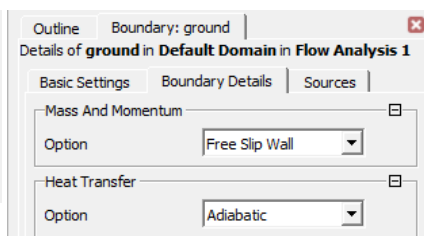


Рис. 4.18

На рисунках 4.19–4.20 показаны параметры для граничного условия Opening. Это условие представляет собой поверхность через которую воздух может перетекать в любую сторону, но в строго заданном направлении. В данном случае граница расположена на грани с названием Opening, в ней реализуется дозвуковое течение (Subsonic), на этой поверхности давление постоянно и равно нулю (ноль соответствует атмосферному давлению). Воздух может пересекать границу только по нормали. Температура воздуха за границей во внешней части равна 293 К.

На рисунках 4.21, 4.22 показаны параметры для граничного условия Outlet. Это область вытекания воздуха из области решения, она расположена на грани Outlet, имеет параметры сходные с областью Opening, с тем отличием, что движение воздуха внутрь области решения через эту область вызывает ошибку решателя.

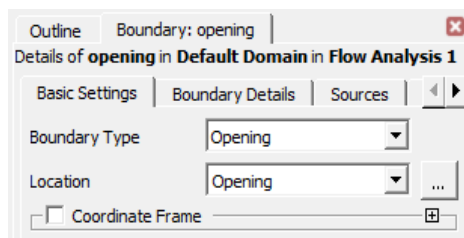


Рис. 4.19

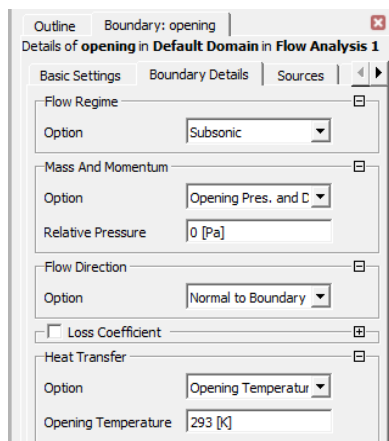


Рис. 4.20

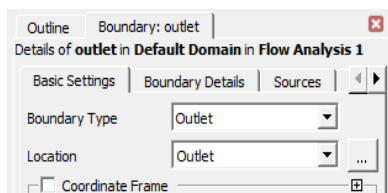


Рис. 4.21

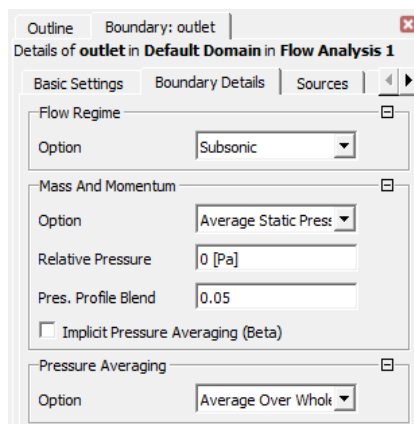


Рис. 4.22

На рисунках 4.23, 4.24 показаны характеристики для областей симметрии. Эти области не характеризуются только положением, дополнительных параметров у них нет. На поверхности симметрии становятся равными нулю градиенты всех параметров.

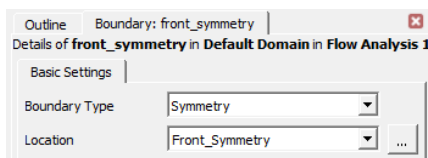


Рис. 4.23

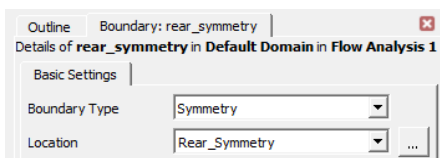


Рис. 4.24

Настройка параметров расчета включает в себя выбор максимального числа итераций и условия завершения расчета по сходимости решения. Для настройки параметров расчета необходимо в дереве модели раскрыть пункт Simulation – Solver – SolverControl. В раскрывшемся окне необходимо указать максимальное количество итераций, которое сделает решатель, пункт Max. Iterations. В качестве условия окончания расчетов по сходимости будем использовать среднеквадратичную разность (RMS) между параметрами текущего и предыдущего решения, пункты ConvergenceCriteria – ResidualType – RMS. В качестве контрольного значения ResidualTarget необходимо указать величину $1e-6$ (рис. 4.25).

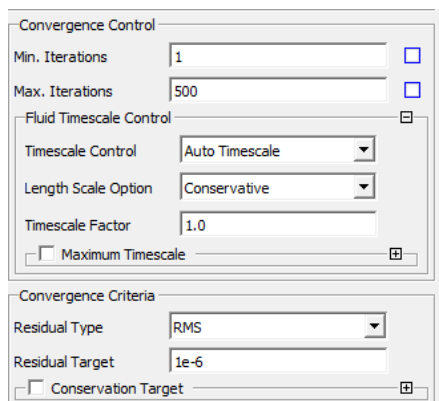


Рис. 4.25

После этого модуль Setup можно закрыть.

4.5. Проведение расчетов и анализ результатов

Для запуска расчетов необходимо открыть пункт Solution. Открывается окно DefineRun, в котором нужно указать, что вычисления проводятся с двойной точностью, параметр DoublePrecision, указать тип запуска SubmissionType – DirectStart. Если необходимо задать режим параллельных вычислений RunMode – IntelMPILocalParallel и указать число используемых ядер процессора (Partition), Рис. 4.26. Дополнительно на вкладке InitialValues необходимо указать, что начальные значения параметров при вычислениях программа будет получать из начальных условий заданных пользователем InitializationOption – InitialCondition. После указания всех данных необходимо нажать кнопку StartRun.

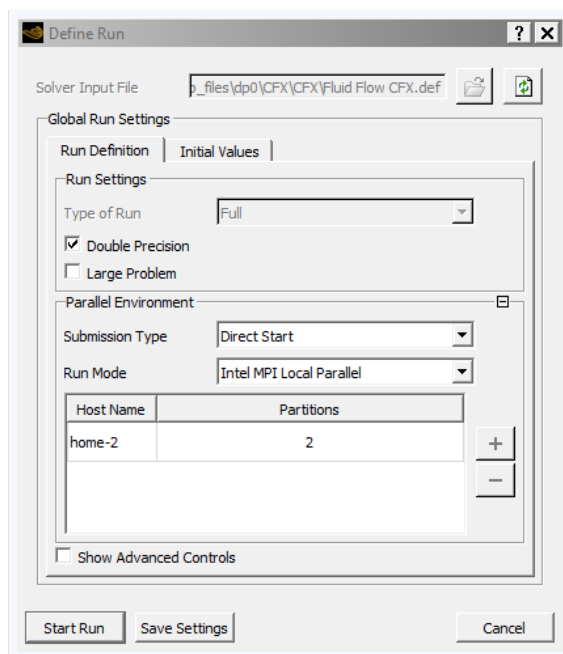


Рис. 4.26

Во время проведения расчетов на экране будут отображаться разности между значениями параметров текущего и предыдущего решений, а так же протокол вычислений (рис. 4.27).

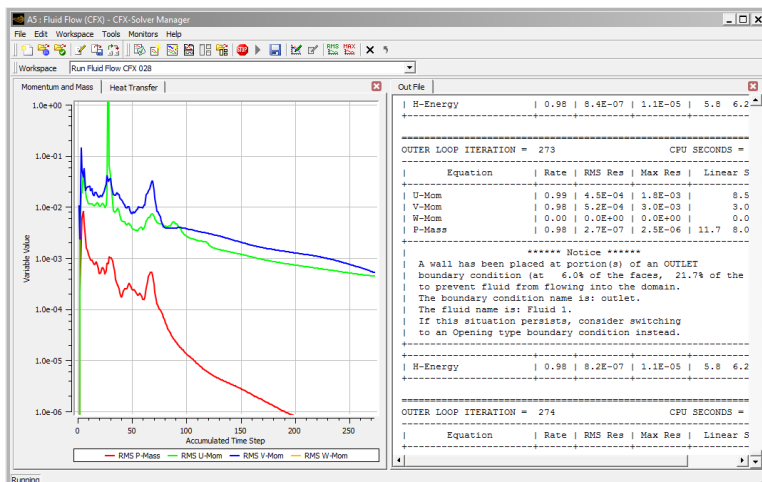


Рис. 4.27

Если необходимо, то вычисления можно приостановить при помощи кнопки STOP, а затем продолжить при необходимости. По окончании вычислений будет выдано сообщение об их успешном или неуспешном завершении.

Для обработки полученных результатов необходимо запустить модуль Results в окне проекта. Построим распределение температуры и скорости по нормали к стенке и сравним его с рисунками 1.1 и 1.2. Найдем изменение толщин пограничных слоев с расстоянием и сравним их с графиками на рисунках 2.1 и 2.2.

Для построения распределения скорости и температуры по нормали к стенке необходимо построить линию, с которой будут браться данные. Для построения линии необходимо выполнить команды Location – Line на панели инструментов (рис. 4.28).

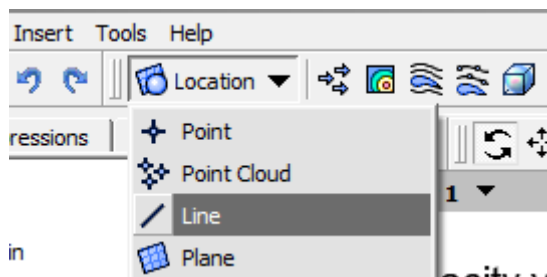


Рис. 4.28

После этого раскроется окно, в котором необходимо будет указать координаты крайних точек линии (рис. 4.29). Возьмем ординату линии равную 0.8, чтобы с одной стороны иметь в этом месте сформировавшийся пограничный слой, с другой стороны находиться на удалении от края во избежание не учитываемых краевых эффектов. Количество точек на линии необходимо задать 500, так как наиболее важная область вблизи стенки намного короче самой линии и этой области плотность точек должна быть высокой.

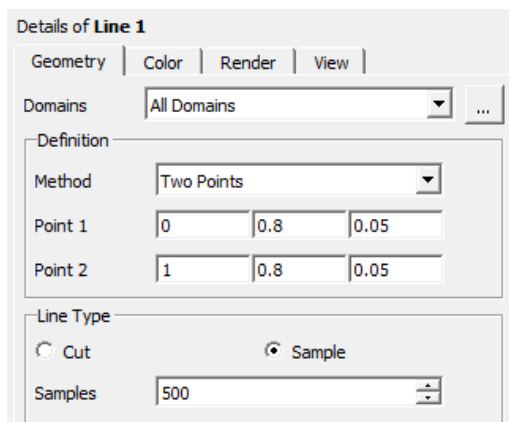


Рис. 4.29

После задания всех параметров и нажатия кнопки Apply линия отобразится в области решения.

Для построения графика (Chart) необходимо нажать кнопку  на панели инструментов, раскроется окно настроек графика в котором нужно указать источник данных для графика (линия 1), данные по осям X и Y, а так же диапазон изменения данных на осях.

Правильно заполненные данные графика для вкладок DataSeries, XAxis, YAxis показаны на рисунке 4.30–4.32.

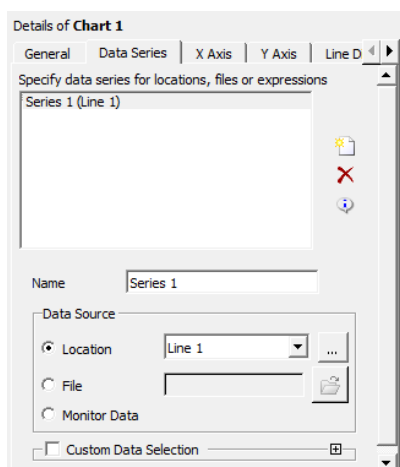


Рис. 4.30

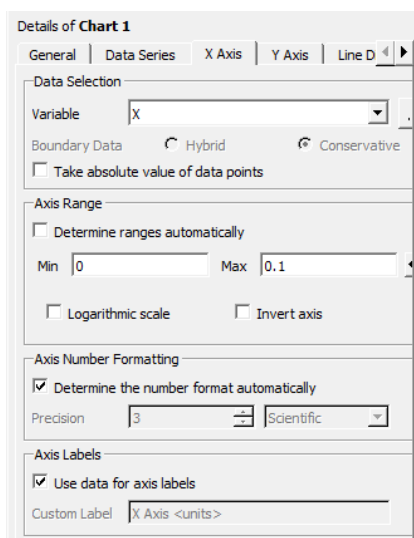


Рис. 4.31

После заполнения всех вкладок и нажатия кнопки Apply на экране отобразится созданный график (рис. 4.33). Если этого не происходит необходимо выполнить двойной Click на пункте Chart1 дерева модели.

General | Data Series | X Axis | Y Axis | Line D |

Data Selection

Variable: Total Temperature

Boundary Data: ☐ Hybrid ☒ Conservative

☐ Take absolute value of data points

Axis Range

☒ Determine ranges automatically

Min: -1.0 Max: 1.0

☐ Logarithmic scale ☐ Invert axis

Axis Number Formatting

☒ Determine the number format automatically

Precision: 3 Scientific

Axis Labels

☒ Use data for axis labels

Custom Label: Y Axis <units>

Рис. 4.32

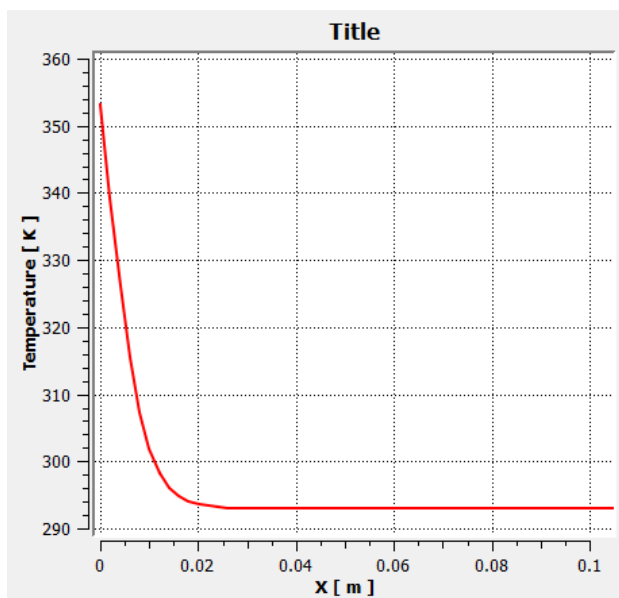


Рис. 4.33

Сравнивая рисунки 1.2 и 4.33 можно видеть, что качественно графики совпадают. Более того, выравнивание температуры происходит на расстоянии порядка 0.02 м от стенки. Эта величина является толщиной температурного пограничного слоя для данной высоты. Сравнивая толщину температурного пограничного слоя на рисунках 1.2 и 4.33 видно, что они близки друг к другу. Аналогичным образом нужно построить второй график, только на вкладке Y axis теперь нужно выбрать параметр Velocity v (рисунок 4.34).

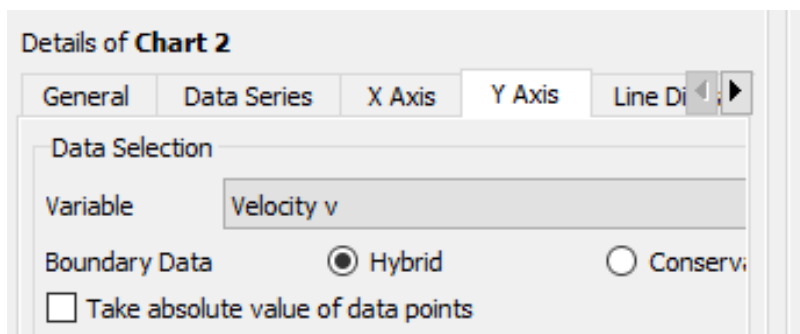


Рисунок 4.34

Распределение скорости на рисунке 4.35 качественно совпадает с распределением скорости на рисунке 1.1, сравнивая толщину гидродинамического пограничного слоя на рисунке 4.35 с аналогичной величиной на рисунке 1.1 видно, что эти величины близки. Имеющаяся разница объясняется упрощениями при дифференциальном решении и погрешностями при конечно-элементном решении.

Для построения толщин гидродинамического и температурного пограничных слоев будем использовать изоповерхности, на которых некоторый параметр сохраняет постоянное значение. Для

создания изоповерхности необходимо на панели инструментов нажать кнопку Location – Isosurface (рис. 4.36).

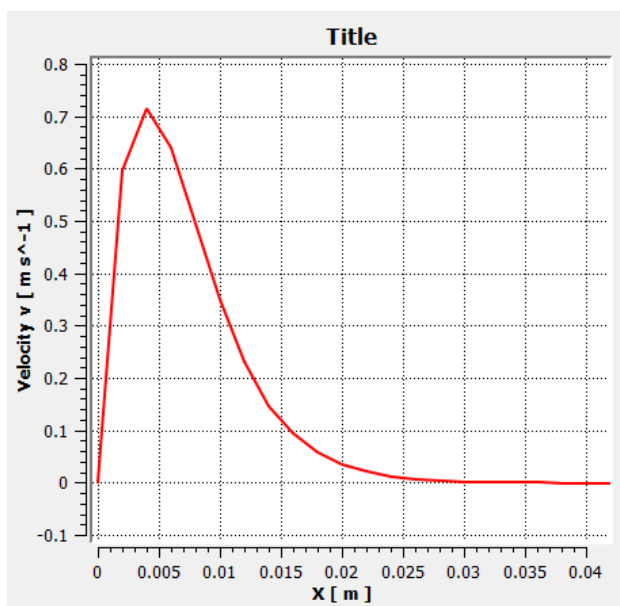


Рис. 4.35

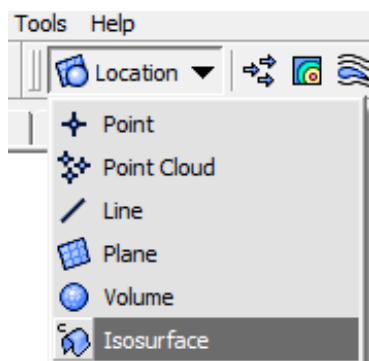


Рис. 4.36

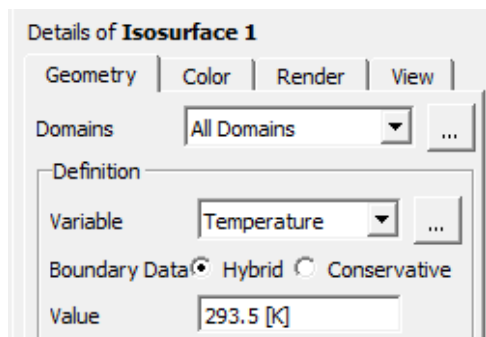


Рис. 4.37

В окне настроек поверхности необходимо указать исследуемую величину (Temperature) и значение величины для которой строится поверхность (рис. 4.37). После нажатия кнопки Apply изоповерхность отобразится на экране. Для лучшего обзора изображение необходимо повернуть вокруг вертикальной оси (рис. 4.38).

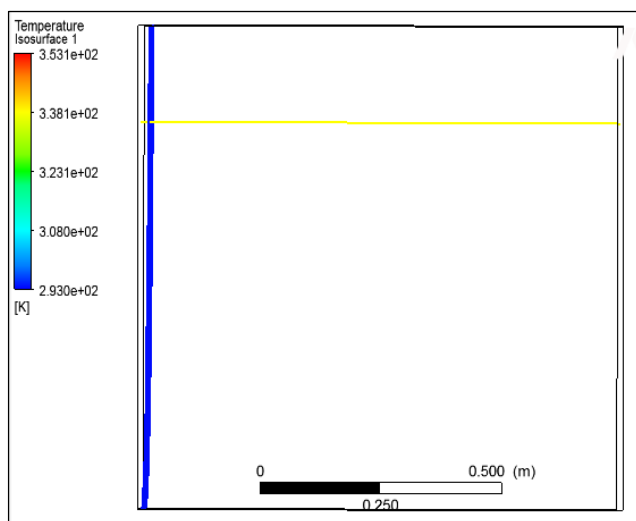


Рис. 4.38

На рисунке 4.38 видно, что толщина пограничного слоя возрастает по мере продвижения вдоль стенки так же как и на рисунке 2.2. Аналогичным образом строится изоповерхность для вертикальной скорости. Контрольное значение необходимо выбрать 0.01 м/с (рис. 4.39). После нажатия кнопки Apply изоповерхность для скорости отобразится на экране (рис. 4.40). На рисунке 4.40 видно, что изоповерхность состоит из двух частей, одна идет непосредственно у стенки, вторая отстоит от стенки на расстояние равное толщине гидродинамического пограничного слоя. Так же как и толщина температурного пограничного слоя, толщина гидродинамического пограничного слоя увеличивается по мере продвижения вдоль стенки аналогично рисунку 2.1.

Таким образом, можно заключить, что конечно-элементный подход дает результаты схожие с решением обыкновенных дифференциальных уравнений, но при этом позволяет решать задачи со значительно более сложной геометрией и физическими условиями.

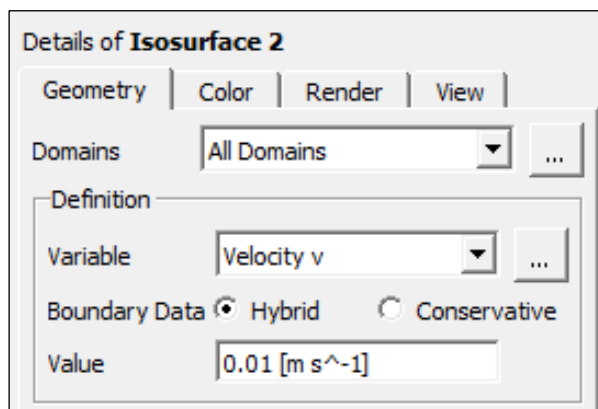


Рис. 4.39

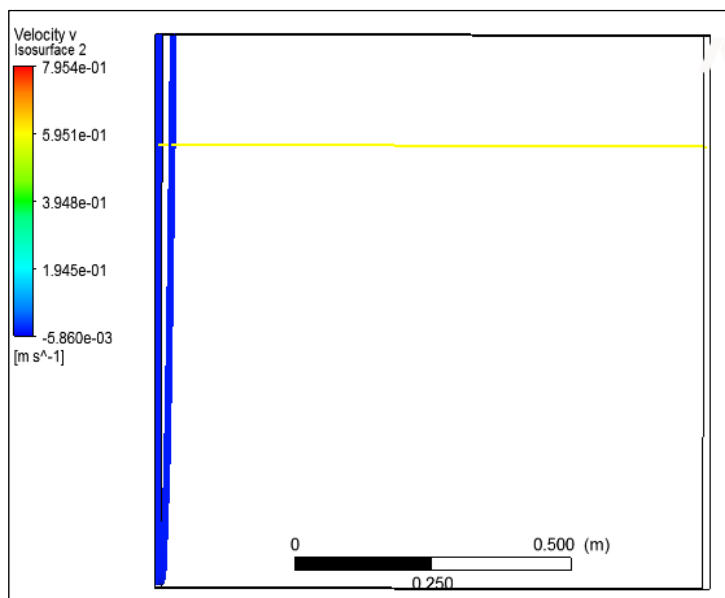


Рис. 4.40

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе проведено исследование процессов естественной конвекции около вертикальных протяженных поверхностей, таких как плоская стенка. Основное внимание уделено анализу гидродинамических и тепловых пограничных слоев, возникающих при естественной конвекции, и их влиянию на теплообмен.

Использование интегральных методов позволило получить приближённые решения для задач естественной конвекции. Показано, что толщина гидродинамического и теплового пограничных слоёв зависит от числа Прандтля (Pr), температуры стенки и теплового потока. Для жидкостей с $Pr < 1$ толщина гидродинамического слоя меньше теплового, а для жидкостей с $Pr > 1$ наблюдается обратная зависимость. При $Pr = 1$ толщины слоёв равны. Полученные профили скорости и температуры, а также локальные коэффициенты теплоотдачи хорошо согласуются с известными критериальными зависимостями (отклонение не превышает 7–8 %), что подтверждает адекватность использованных интегральных моделей.

В качестве иллюстрации возможностей современных вычислительных пакетов для моделирования естественной конвекции около вертикальных протяженных поверхностей решена задача о конвекционном движении в конечно-элементном пакете Ansys. Показано качественное и количественное совпадение конечно-элементного решения с аналитическим решением, полученным на основе дифференциальных уравнений. Это позволяет рекомендовать описанную методику для практических инженерных

расчётов теплообмена, в том числе для тел сложной геометрии, где аналитические методы затруднены.

Таким образом, данное пособие объединяет классические аналитические методы теории пограничного слоя с современными инструментами компьютерного инжиниринга, что позволяет обучающимся глубже понять физику свободно-конвективных течений и приобрести практические навыки их моделирования.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Мартыненко, О.Г. Свободно-конвективный теплообмен на вертикальной поверхности (граничные условия II рода) / О.Г. Мартыненко, Ю.А. Соковишин; под ред. чл.-кор. АН БССР В.Б. Нестеренко. – Минск: Наука и техника, 1977. – 214 с.

2. Гинсбург, И.П. Теория сопротивления и теплопередачи / И.П. Гинсбург. – Ленинград: Издательство Ленинградского университета, 1970. – 374 с.

3. Клюев, Н.И. Течение вязкой жидкости в тонком слое на поверхности плоской пластины / Н.И. Клюев, В.И. Никитин, О.Г. Лагно, Е.А. Ендуткина // Научное обозрение. – 2013. – № 9. – С. 289-292.

4. Дульнев, Г.Н. Теория тепло – и массообмена: учеб. пособие / Г.Н. Дульнев – СПб.: НИУ ИТМО, 2012. – 195 с.

5. Клюев, Н.И. Пленочное течение жидкости на полуплоскости / Н.И. Клюев, Д.В. Благих // Сборник трудов XX Всероссийского семинара по управлению движением и навигации летательных аппаратов. – Ч.1. Самара, Изд-во СамНЦ РАН, 2018. – С. 146 – 150.

6. Шахов, В.Г. Основы теории пограничного слоя: учебное пособие / В.Г. Шахов; Федеральное агентство по образованию, Гос. образовательное учреждение высш. проф. образования «Самарский гос. аэрокосмический ун-т им. акад. С.П. Королева». – Самара: Изд-во СГАУ, 2009. – 167 с. ил.; 21. – ISBN 978-5-7883-0684-1.

7. Клюев, Н.И. Течение вязкой жидкости в тонком слое на полуплоскости / Н.И. Клюев, Е.И. Бакулин // IV ВНТК «Актуальные проблемы ракетно-космической техники». АО РКЦ Прогресс. – Т. II. – Самара, 2015. – С.129-131.

8. Леонтьев, А.И. Теория тепломассообмена / С.И. Исаев [и др.]; под общ. редакцией А.И. Леонтьева. – М.: Высшая школа, 1979. – 495 с.

9. Нащокин, В.В. Техническая термодинамика и теплопередача / В.В. Нащокин. – М.: Высшая школа, 1975. – 329 с.

10. Михеев, М.А. Основы теплопередачи. 2-е изд. / М.А. Михеев. – М.: Энергия, 1977. – 344 с.

11. Поляков, К.А. Компьютерные модели процессов механики жидкости и газа: учебное пособие / К.А. Поляков – Самара: Издательство Самарского университета, 2023. – 99 с.

12. Matsson, J.E. An Introduction to Ansys Fluent 2025. – 7th ed. – SDC Publications, 2025. – 900 p. – ISBN 978-1-63057-763-6.

Учебное издание

*Поляков Константин Анатольевич
Калабухов Вадим Николаевич
Бахарева Юлия Николаевна*

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ
СВОБОДНО КОНВЕКЦИОННЫХ ТЕЧЕНИЙ
ОКОЛО ВЕРТИКАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ**

Учебное пособие

Редакционно-издательская обработка
издательства Самарского университета

Подписано в печать 27.05.2026. Формат 60х84 1/16.

Бумага офсетная. Печ. л. 5,0.

Тираж 27 экз. Заказ № . Арт. – 8(УП)/2026.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)
443086, Самара, Московское шоссе, 34.

Издательство Самарского университета.
443086, Самара, Московское шоссе, 34.

