

МИНИСТЕРСТВО ОБЩЕГО И ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО  
ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра оптики и спектроскопии

# Оптика проводящих сред

*Методические указания  
к курсу лекций "Физическая оптика"*

Издательство "Самарский университет"  
1999

Печатается по решению Редакционно-издательского совета Самарского государственного университета

Методические указания содержат материал соответствующего раздела курса лекций по дисциплине специализации “Физическая оптика”. В настоящих указаниях подробно рассмотрены особенности распространения электромагнитного излучения в изотропных средах с конечной проводимостью.

Указания предназначены для студентов 3-го курса физического факультета специализации “Оптика и спектроскопия”

**Составитель** канд. физ.-мат. наук, доцент Н.Н. Козлов

**Рецензент** канд. физ.-мат. наук, доцент А.В. Горохов

© Козлов Н.П.,  
составление, 1999

Волновое уравнение для проводящей среды.

Для того чтобы описать распространение электромагнитных волн в проводящей среде, необходимо конкретизировать уравнения Максвелла и материальные уравнения для подобной среды. Для большинства практически интересных задач полагают, что проводящая среда однородна и изотропна. Тогда в линейном приближении материальные уравнения для плотности тока  $\vec{j}$ , электрической -  $\vec{D}$  и магнитной -  $\vec{B}$  индукции можно записать следующим образом:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad \vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad \vec{B} = \mu \vec{H},$$

где  $\sigma$  - проводимость,  $\epsilon$  - диэлектрическая проницаемость и  $\mu$  - магнитная проницаемость являются скалярными константами. С учетом приведенных выше материальных уравнений система уравнений Максвелла выглядит следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot } \vec{H} - \frac{\epsilon}{c} \dot{\vec{E}} = \frac{4\pi}{c} \sigma \vec{E}; \\ \text{rot } \vec{E} + \frac{\mu}{c} \dot{\vec{H}} = 0; \\ \text{div } \vec{E} = \frac{4\pi}{\epsilon} \rho; \\ \text{div } \vec{H} = 0. \end{array} \right. \quad (1)$$

В оптическом диапазоне плотностью свободных зарядов  $\rho$  можно пренебречь. Для того чтобы это показать, возьмем дивергенцию от первого уравнения Максвелла

$$-\frac{\epsilon}{c} \text{div } \dot{\vec{E}} = \frac{4\pi}{c} \sigma \text{div } \vec{E}. \quad (2)$$

Используя третье уравнение Максвелла и его производную по времени, можно свести (2) к уравнению

$$\dot{\rho} + \frac{4\pi}{\epsilon} \sigma \rho = 0,$$

которое представляет собой уравнение релаксации. Решением данного уравнения является убывающая экспонента:

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Через  $\tau$  обозначено характерное время релаксации, которое равно  $\tau = \frac{\epsilon}{4\pi\sigma}$ . За время порядка времени релаксации объемная плотность зарядов становится практически равной нулю. Для значений проводимости, типичных для металлов, величина  $\tau \sim 10^{-19}$  с. В то же время частота электромагнитных колебаний оптического диапазона имеет порядок  $\nu \sim 10^{15}$  с<sup>-1</sup>. Иными словами, время "рассасывания" свободных зарядов намного меньше периода колебаний  $\tau \ll 1/\nu$ . Таким образом, третье уравнение Максвелла в системе (1) можно записать в виде

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0. \quad (3)$$

Для того чтобы получить волновое уравнение, применим операцию rot ко второму уравнению системы (1).

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} + \frac{\mu}{c} \operatorname{rot} \dot{\vec{H}} = 0.$$

Подставляя rot  $\vec{H}$  из первого уравнения системы (1), получим

$$-\nabla^2 \vec{E} + \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{E}) + \frac{\mu\epsilon}{c^2} \ddot{\vec{E}} + \frac{\mu}{c} \frac{4\pi}{c} \sigma \dot{\vec{E}} = 0.$$

Учитывая (3), получим волновое уравнение для напряженности электрического поля

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{\mu\epsilon}{c^2} \ddot{\vec{E}} + \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} \dot{\vec{E}}. \quad (4)$$

Полученное уравнение (4) отличается от соответствующего уравнения для диэлектриков наличием дополнительного слагаемого, пропорционального первой производной по времени от напряженности поля. Аналогично тому, как в уравнении для гармонического осциллятора слагаемое, пропорциональное первой производной, отвечает за процесс затухания колебаний, по-

явление в (4) слагаемого пропорционального  $\dot{\bar{E}}$ , приводит к затуханию волны.

Если ограничиться рассмотрением гармонических волн, то электрическое и магнитное поля можно представить в виде  $\bar{E} = \bar{E}(\bar{r})e^{-i\omega t}$  и  $\bar{H} = \bar{H}(\bar{r})e^{-i\omega t}$ . Операцию дифференцирования по времени в таком представлении полей можно свести к простому умножению:  $\frac{\partial}{\partial t} \equiv -i\omega$ . Тогда первая пара уравнений Максвелла для комплексных амплитуд поля запишется в виде:

$$\begin{cases} \text{rot } \bar{H} + \frac{i\omega}{c} \left( \epsilon + i \frac{4\pi\sigma}{\omega} \right) \bar{E} = 0; \\ \text{rot } \bar{E} - i \frac{\omega\mu}{c} \bar{H} = 0. \end{cases}$$

Как и ранее, взяв rot от второго уравнения и подставив значение rot  $\bar{H}$  из первого, получим уравнение

$$-\nabla^2 \bar{E} + i^2 \frac{\omega^2 \mu}{c^2} \left( \epsilon + i \frac{4\pi\sigma}{\omega} \right) \bar{E} = 0,$$

которое можно свести к уравнению типа уравнения Гельмгольца

$$(\nabla^2 + \bar{k}^2) \bar{E}(\bar{r}) = 0,$$

введя комплексное волновое число

$$\bar{k}^2 = \frac{\omega^2 \mu}{c^2} \left( \epsilon + i \frac{4\pi\sigma}{\omega} \right), \quad (5)$$

### Комплексный показатель преломления

Согласно полученным результатам, проводящая среда характеризуется комплексной диэлектрической проницаемостью

$$\bar{\epsilon} = \epsilon + i \frac{4\pi\sigma}{\omega}, \quad (6)$$

а распространяющаяся в такой среде гармоническая волна - комплексным волновым числом  $\bar{k}^2 = \frac{\omega^2 \mu}{c^2} \bar{\epsilon}$ .

С точки зрения оптических представлений, свойства среды описываются с помощью показателя преломления. Для определения показателя преломления используем связь последнего с волновым числом:

$$\bar{n} = \sqrt{\mu \bar{\epsilon}} = \frac{c}{\omega} \bar{k}. \quad (7)$$

Комплексный показатель преломления, как и любое комплексное число, имеет действительную и мнимую части, однако традиционно принято представлять его в следующем виде:

$$\bar{n} = n(1 + ik), \quad (8)$$

где  $n$  называется оптическим показателем преломления, а  $k$  - коэффициентом экстинкции.

Из (7), с учетом соотношения (6), можно получить выражение для квадрата комплексного показателя преломления

$$\bar{n}^2 = \frac{c^2}{\omega^2} \bar{k}^2 = \mu \epsilon + i \frac{4\pi \mu \sigma}{\omega}.$$

С другой стороны, согласно (8), имеем

$$\bar{n}^2 = n^2(1 + 2ik - k^2).$$

Приравняв соответственно действительные и мнимые части двух последних выражений, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} n^2(1 - k^2) = \mu \epsilon, \\ n^2 k = \frac{2\pi \mu \sigma}{\omega} = \frac{\mu \sigma}{\nu}. \end{cases}$$

Эту систему необходимо разрешить относительно  $n$  и  $k$ . Для этого выразим  $k$  из второго уравнения:  $k = \frac{\mu \sigma}{\nu n^2}$  и подставим это выражение в первое. В результате получим биквадратное уравнение относительно  $n$

$$n^4 - \mu\epsilon n^2 - \frac{\mu^2\sigma^2}{\nu^2} = 0,$$

решения которого можно записать в виде

$$n^2 = \frac{1}{2}\mu\epsilon \pm \sqrt{\frac{1}{4}\mu^2\epsilon^2 + \frac{\mu^2\sigma^2}{\nu^2}}.$$

В силу того, что  $n$  по определению является действительным, из двух решений нужно оставить только то, которое соответствует знаку плюс. Таким образом, окончательно получаем следующие выражения для действительной и мнимой части комплексного показателя преломления:

$$\begin{cases} n^2 = \frac{1}{2} \left( \sqrt{\mu^2\epsilon^2 + \frac{4\mu^2\sigma^2}{\nu^2}} + \mu\epsilon \right), \\ n^2 k^2 = \frac{1}{2} \left( \sqrt{\mu^2\epsilon^2 + \frac{4\mu^2\sigma^2}{\nu^2}} - \mu\epsilon \right). \end{cases} \quad (9)$$

Приведенные выше точные выражения существенно упрощаются при использовании так называемого длинноволнового приближения. Если длина волны электромагнитного излучения так велика, что соответствующая ей частота  $\nu$  оказывается намного меньше проводимости  $\sigma$ , то в этом случае наиболее сильно проявляются «металлические» особенности среды. Формально это условие можно выразить следующим соотношением:  $\frac{\mu\sigma}{\nu} = n^2 k \gg \mu\epsilon$ , согласно которому слагаемым  $\mu\epsilon$  в (9) можно пренебречь. Следовательно, в данном приближении

$$n \approx nk \approx \sqrt{\frac{\mu\sigma}{\nu}}. \quad (10)$$

В предельном случае, когда при фиксированной частоте  $\sigma \rightarrow \infty$  (идеальный проводник), согласно выражению (10), показатель преломления  $n \rightarrow \infty$ , а  $k \rightarrow 1$ . Эти предельные значения  $n$  и  $k$  соответствуют такому случаю, когда волна не проникает в проводящую среду, а полностью от нее отражается.

Рассмотрим более детально поведение плоской монохроматической волны в проводящей среде. Формально плоскую монохроматическую волну можно задать следующим выражением:

$$\bar{E} = \bar{E}_0 \exp\left(i\left[\bar{k}(\bar{r}\bar{N}) - \omega t\right]\right). \quad (11)$$

С учетом (5) заданное таким образом поле  $\bar{E}$  будет решением соответствующего волнового уравнения для проводящей среды. Подставим в (11) выражение для волнового числа  $\bar{k}$

$$\bar{k} = \frac{\omega n(1 + i\kappa)}{c}.$$

Тогда выражение для плоской волны можно привести к следующему виду:

$$\bar{E} = \bar{E}_0 \exp\left(-\frac{\omega n\kappa}{c}(\bar{r}\bar{N})\right) \exp\left(i\omega\left[\frac{n}{c}(\bar{r}\bar{N}) - t\right]\right).$$

Действительная экспонента с отрицательным показателем преломления описывает уменьшение амплитуды волны по мере ее распространения. Плотность энергии электромагнитной волны пропорциональна квадрату напряженности поля  $w \sim |E|^2$ . Поэтому ее можно представить в виде  $w = w_0 e^{-\chi(\bar{r}\bar{N})}$ , где  $\chi$  - коэффициент поглощения. Согласно полученным ранее соотношениям, коэффициент поглощения можно выразить через компоненты комплексного показателя преломления

$$\chi = \frac{2\omega n\kappa}{c} = \frac{4\pi\nu}{c} n\kappa = \frac{4\pi i}{\lambda_0} \kappa = \frac{4\pi}{\lambda} \kappa,$$

где  $\lambda_0$  - длина волны света в вакууме, а  $\lambda$  - длина волны в проводящей среде.

Для характеристики интенсивности поглощения в проводящей среде часто используют обратную  $\chi$  величину, называемую глубиной проникновения

$$d = \frac{1}{\chi} = \frac{\lambda}{4\pi\kappa}.$$

Величина  $d$  равна расстоянию, на котором энергия электромагнитной волны убывает в  $e$  раз. Для идеального металла ( $\sigma \rightarrow \infty$ ) глубина составляет величину порядка  $\lambda$ , при этом длина волны света в среде стремится к нулю, т. к.  $n \rightarrow \infty$ .

В случае конечного значения проводимости глубину проникновения можно оценить по следующей формуле:

$$d = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{c\lambda_0}{\mu\sigma}}$$

Практически для всех металлов, в силу большого значения  $\sigma$ , величина  $d$  существенно меньше  $\lambda_0$  не только в оптическом, но и в коротковолновом радиодиапазоне.

### Закон преломления

Рассмотрим процесс преломления плоской электромагнитной волны на поверхности раздела “диэлектрик-металл”. Пусть поверхность раздела представляет собой плоскость. Пусть на границу раздела из диэлектрика падает плоская волна, направление которой задано единичным вектором  $\vec{N}^{(i)}$ .

$$\vec{E}^{(i)} = \vec{E}_0^{(i)} \exp(i[k^{(i)}(\vec{r}\vec{N}^{(i)}) - \omega t]).$$

Выберем систему координат так, чтобы плоскость  $z = 0$  совпадала с поверхностью раздела, а ось  $y$  направим перпендикулярно плоскости падения. Тогда компоненты вектора  $\vec{N}^{(i)}$  можно выразить через угол падения  $\theta_i$ :

$$N_x^{(i)} = \sin\theta_i, \quad N_y^{(i)} = 0, \quad N_z^{(i)} = \cos\theta_i.$$

Полученные ранее уравнения для распространения электромагнитной волны в проводящей среде идентичны аналогичным уравнениям для диэлектрика с той лишь разницей, что вещественное значение  $k$  заменяется на комплексное  $\tilde{k}$ . Поэтому в качестве решения волнового уравнения для поля в проводящей среде возьмем плоскую волну  $\vec{E}^{(t)}$ , выражение для которой можно записать в виде аналогичном  $\vec{E}^{(i)}$ , с учетом того, что  $\tilde{k}^{(t)}$  и  $\vec{N}^{(t)}$  могут быть комплексными.

Для того чтобы, согласно граничным условиям для электромагнитного поля, тангенциальные составляющие напряженности поля были непрерывны, необходимо, чтобы аргументы функций, описывающих поле по разные стороны от границы раздела, изменялись одинаково, т.е.

$$k^{(i)}(x \cdot N_x^{(i)} + y \cdot N_y^{(i)} + z \cdot N_z^{(i)}) - \omega t = \tilde{k}^{(t)}(x \cdot N_x^{(t)} + y \cdot N_y^{(t)} + z \cdot N_z^{(t)}) - \omega t.$$

Это равенство должно выполняться в любой момент времени для любой точки границы раздела  $z = 0$ . Поэтому

$$N_y^{(i)} = N_y^{(r)} = 0 \quad \text{и} \quad N_x^{(i)} = \frac{\bar{k}^{(i)}}{k^{(i)}} N_x^{(r)}.$$

Так как  $\bar{N}^{(i)}$  - единичный по модулю вектор, то формально его проекции на выбранные нами координатные оси можно записать в виде

$$N_x^{(i)} = \sin\theta_i, \quad N_y^{(i)} = 0, \quad N_z^{(i)} = \cos\theta_i.$$

Угол  $\theta_i$  в этом выражении будет комплексным и ему нельзя придать наглядную физическую интерпретацию.

Если обозначить через  $\bar{n}$  относительный показатель преломления, т. е. отношение показателя преломления проводника к показателю преломления диэлектрика, то, согласно (7), закон преломления можно записать как

$$\sin\theta_i = \frac{1}{\bar{n}} \sin\theta_r. \quad (12)$$

Используя закон преломления, можно представить  $x$ -ю составляющую вектора  $\bar{N}^{(i)}$  следующим образом:

$$N_x^{(i)} = \frac{1}{n(1 + i\kappa)} \sin\theta_r = \frac{(1 - i\kappa)}{n(1 + \kappa^2)} \sin\theta_r.$$

Выразим из тригонометрических соотношений  $\cos\theta_i$  через  $\sin\theta_i$ . Тогда

$$N_z^{(i)} = \sqrt{1 - \sin^2\theta_i} = \sqrt{1 - \frac{1 - \kappa^2}{n^2(1 + \kappa^2)^2} \sin^2\theta_r + i \frac{2\kappa}{n^2(1 + \kappa^2)^2} \sin^2\theta_r}. \quad (13)$$

Представим комплексное значение  $N_z^{(i)}$  в следующем виде:

$$N_z^{(i)} = qe^{i\gamma},$$

где  $q$  - модуль  $N_z^{(i)}$ , а  $\gamma$  - его фаза. Если выраженную таким образом проекцию  $N_z^{(i)}$  подставить в (12), а затем возвести указанное выражение в квадрат и приравнять соответственно мнимую и действительную части получившегося уравнения, то получим следующие соотношения:

$$q^2 \cos 2\gamma = 1 - \frac{1 - \kappa^2}{n^2(1 + \kappa^2)^2} \sin^2 \theta,$$

$$q^2 \sin 2\gamma = \frac{2\kappa}{n^2(1 + \kappa^2)^2} \sin^2 \theta,$$

из которых можно однозначно выразить  $q$  и  $\gamma$  через компоненты показателя преломления и угол падения.

Выражение  $\bar{k}(\bar{r}\bar{N}^{(t)})$ , описывающее координатную зависимость волны в проводнике, можно, используя представление скалярного произведения в декартовой системе координат, записать в виде

$$\begin{aligned} \bar{k}(\bar{r}\bar{N}^{(t)}) &= \bar{k}(xN_x^{(t)} + zN_z^{(t)}) = \frac{\omega}{c}n(1 + i\kappa) \left( x \frac{1 - i\kappa}{n(1 + \kappa^2)} \sin^2 \theta + z(q \cos \gamma + iq \sin \gamma) \right) = \\ &= \frac{\omega}{c} (x \sin \theta + znq \cos \gamma - zn\kappa q \sin \gamma + iznq(\sin \gamma + \kappa \cos \gamma)). \end{aligned}$$

Если подставить полученное выражение для  $\bar{k}(\bar{r}\bar{N}^{(t)})$  в (11), то можно заметить, что мнимая его часть будет описывать пространственную зависимость амплитуды волны, а действительная - фазы. Очевидно, что в этом случае поверхности постоянной амплитуды не совпадают с поверхностями постоянной фазы. Иными словами после преломления волна становится неоднородной.

Поверхности постоянной амплитуды представляют собой плоскости, задаваемые уравнением  $z = \text{const}$ , т. е. параллельны поверхности раздела сред. Величина амплитуды волны экспоненциально убывает в направлении  $Z$ .

Поверхности постоянной фазы тоже будут представлять собой плоскости. Приведем уравнение этих плоскостей.

$$x \sin \theta + znq(\cos \gamma - \kappa \sin \gamma) = \text{const},$$

согласно которому плоскости постоянной фазы будут располагаться под некоторым углом к поверхности раздела. Угол  $\theta'_i$  между нормалью к поверхностям постоянной фазы и осью  $Z$  можно найти из уравнения

$$\sin \theta'_i = \frac{\sin \theta_i}{\sqrt{\sin^2 \theta_i + n^2 q^2 (\cos \gamma - \kappa \sin \gamma)^2}}. \quad (14)$$

На рисунке схематично показан процесс изменения структуры волны при преломлении на границе "диэлектрик-металл". Сплошными линиями по-

казаны поверхности постоянной фазы, а пунктирными - постоянной амплитуды.

Уравнение (14) связывает между собой направления нормалей к поверхностям постоянной фазы до и после преломления. Если ввести понятие эффективного показателя преломления

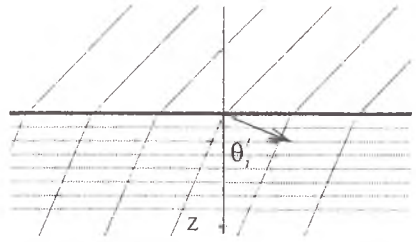


Рис.

$$n^{\prime}(\theta_i) = \sqrt{\sin^2 \theta_i + q^2 n^2 (\cos \gamma - \kappa \sin \gamma)^2},$$

то последнему соотношению можно придать смысл закона преломления для волновых нормалей, аналогичного закону для преломления на границе двух диэлектриков с той, однако, разницей, что в нашем случае показатель преломления будет зависеть не только от оптических характеристик граничащих сред, но и от угла падения.

### Отражение света от металлической поверхности

Из граничных условий, совершенно аналогично случаю отражения от границы раздела двух диэлектриков, следует, что угол отражения  $\theta_r$  и угол падения  $\theta_i$  связаны соотношением  $\theta_r = \pi - \theta_i$ . То есть направление отраженной волны такое же, как и в случае отражения от поверхности диэлектрика. Однако если интересоваться амплитудой отраженной волны, то здесь мы можем заметить существенное отличие.

Для определения амплитуды отраженной волны можно воспользоваться формулами Френеля

$$\begin{aligned} R_{\parallel} &= \frac{\bar{n} \cos \theta_i - \cos \theta_r}{\bar{n} \cos \theta_i + \cos \theta_r} A_{\parallel}, \\ R_{\perp} &= \frac{\cos \theta_i - \bar{n} \cos \theta_r}{\cos \theta_i + \bar{n} \cos \theta_r} A_{\perp}, \end{aligned} \tag{15}$$

где  $\bar{n}$  и  $\cos \theta_r$  принимают комплексные значения согласно (8) и (13). В приведенных формулах (15) через  $\bar{n}$  обозначен относительный показатель преломления, а индексы  $\perp$  и  $\parallel$  обозначают направления колебания светового поля перпендикулярные и параллельные плоскости падения.

Выражения, стоящие перед  $A_{\parallel}$  и  $A_{\perp}$  в общем случае принимают комплексные значения, поэтому разность фаз между параллельной  $R_{\parallel}$  и перпендикулярной  $R_{\perp}$  компонентой в отраженном свете будет отлична от соответствующей разности фаз в падающей волне. Следовательно, при отражении от проводящей поверхности, в отличие от диэлектрической, состояние поляризации света изменяется. В частности, линейно поляризованный свет после отражения от металла становится эллиптически поляризованным. Изменение состояния поляризации, согласно (15), зависит как от свойств металла, так и от угла падения света на поверхность.

Таким образом, измеряя изменение состояния поляризации света при отражении под различными углами от металлической поверхности можно определить оптические характеристики металла. В силу непрозрачности металлов это практически единственный способ получения информации об оптических константах таких материалов. Теорией и экспериментальными методами подобного рода измерений занимается раздел оптики, называемый эллипсометрией. Практическая реализация таких измерений достаточно сложна и требует специальной аппаратуры. В ряде случаев полезную информацию о свойствах металла можно получить непосредственно из измерений интенсивности отраженного света.

Компоненты комплексного показателя преломления, согласно (9), зависят от частоты излучения  $\nu$ . Поэтому, очевидно, что и оптические свойства металлов будут явным образом зависеть от частоты падающего на них излучения. Рассмотрим более детально эту зависимость на примере коэффициента отражения.

В случае нормального падения коэффициент отражения  $\mathfrak{R}$  не зависит от поляризации падающего света и выражается через амплитуды падающей  $A$  и отраженной  $R$  волны

$$\mathfrak{R} = \left| \frac{R_{\parallel}}{A_{\parallel}} \right|^2 = \left| \frac{R_{\perp}}{A_{\perp}} \right|^2.$$

Подставляя в формулы Френеля комплексный показатель преломления, получим

$$\mathfrak{R} = \left| \frac{\tilde{n} - 1}{\tilde{n} + 1} \right|^2 = \frac{n^2(1 + \kappa^2) + 1 - 2n}{n^2(1 + \kappa^2) + 1 + 2n}. \quad (16)$$

Как видно из представленной ниже таблицы, рассчитанное по формуле (16) теоретическое значение  $\mathfrak{R}_{\text{теор}}$  коэффициента отражения хорошо согласуется с экспериментально измеренным  $\mathfrak{R}_{\text{эксп}}$ . Приведенные в таблице значения соответствуют излучению желтой линии натрия ( $\lambda = 589.3$  нм).

Таблица

Металл	n	нк	$\mathfrak{R}_{\text{теор}}$	$\mathfrak{R}_{\text{эксп}}$
Ag	0,2	3,4	0,94	0,94
Al	1,4	5,2	0,82	0,83
Hg	1,6	4,8	0,79	0,77

Обратим внимание на использовавшиеся для расчетов экспериментальные значения n и nk. Для приведенных в таблице проводников  $n < nk$ , что, согласно (9), соответствует отрицательному значению  $\epsilon$ . Как будет показано далее, физическую интерпретацию этого факта можно дать, основываясь на электронной модели металла.

В длинноволновом приближении, когда точную зависимость n и nk от частоты можно заменить упрощенными формулами (10), коэффициент отражения (при  $\mu=1$ ) можно записать следующим образом:

$$\mathfrak{R} = \frac{2\frac{\sigma}{v} + 1 - 2\sqrt{\frac{\sigma}{v}}}{2\frac{\sigma}{v} + 1 + 2\sqrt{\frac{\sigma}{v}}}$$

Если отношение  $\frac{v}{\sigma}$  достаточно мало, то, разлагая приведенное выше выра-

жение в ряд по параметру малости  $\sqrt{\frac{v}{\sigma}}$ , получим следующую приближенную формулу:

$$\mathfrak{R} \approx 1 - 2\sqrt{\frac{v}{\sigma}}, \quad (17)$$

которая называется формулой Хагена - Рубенса. Эта формула достаточно точно описывает поведение коэффициента отражения в инфракрасной области спектра. Однако в видимой и ультрафиолетовой области экспериментальные значения  $\mathfrak{R}$  не вписываются в эту зависимость.

В инфракрасной области спектра формулу Хагена - Рубенса можно использовать для определения оптических констант по экспериментально измеренному коэффициенту отражения. Используя (17) и (10) при  $\mu=1$ , получаем

$$n \approx nk \approx \frac{2}{1 - \mathfrak{R}}$$

Так как значения коэффициента отражения в инфракрасной области близки к единице, то получающиеся (согласно приведенной выше формуле) оценки

для  $n$  и  $nk$  дают достаточно большие значения. В силу тех же причин относительная точность этих оценок будет достаточно низкой.

### Электронная модель проводящей среды

Рассмотрим вопрос о том, как можно объяснить оптические свойства проводников, основываясь на электронной теории строения металла. Согласно атомистическим представлениям металл можно рассматривать как систему, состоящую из остова неподвижных ядер, находящихся в узлах кристаллической решетки, и электронов, которые могут свободно перемещаться по всему объему металла, - электронного газа. Действие электромагнитного поля приводит к смещению свободных зарядов в проводнике и к соответствующей его поляризации. Очевидно, что в силу инертности носителей зарядов поляризация будет зависеть от частоты электромагнитного поля. Следовательно, оптические свойства проводников так же будут существенным образом зависеть от частоты электромагнитного излучения. Попробуем на основании простой механической модели конкретизировать эту зависимость.

Так как металл обладает конечным электрическим сопротивлением, то в отсутствие внешней вынуждающей силы движение электронов должно затухать. Следовательно, для правильного описания движения электрона в металле нужно ввести силу сопротивления, аналогичную силе вязкого трения в механике. Тогда, согласно 2-му закону Ньютона, движение электрона в металле под действием внешнего поля  $\vec{E}$  можно описать выражением:

$$m\ddot{\vec{r}} + m\beta\dot{\vec{r}} = e\vec{E}, \quad (18)$$

где  $\vec{r}$  - радиус-вектор, описывающий положение электрона,  $m$  - масса электрона,  $\beta$  - коэффициент сопротивления,  $e$  - заряд электрона.

Согласно теории линейных дифференциальных уравнений решение этого уравнения представляет собой сумму двух членов, один из которых описывает решение соответствующего однородного уравнения, а другой является частным решением неоднородного уравнения. Соответствующее (18) однородное уравнение описывает процесс релаксации, и поэтому, если нас интересует стационарное решение, нужно рассматривать только частное решение неоднородного уравнения.

Если напряженность внешнего поля будет меняться со временем по гармоническому закону

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(-i\omega t),$$

то решение уравнения (18) будет описываться выражением:

$$\vec{r} = -\frac{e}{m(\omega^2 + i\beta\omega)} \vec{E}.$$

Если в единице объема металла содержится  $N$  электронов, то их смещение будет обуславливать поляризацию

$$\vec{P} = Ne\vec{r} = -\frac{Ne^2}{m(\omega^2 + i\beta\omega)} \vec{E}.$$

Используя известное из электродинамики соотношение  $\bar{\epsilon}\vec{E} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}$ , получим формулу для комплексной диэлектрической проницаемости

$$\bar{\epsilon} = 1 - \frac{4\pi Ne^2}{m(\omega^2 + i\beta\omega)}. \quad (19)$$

Так как диэлектрическая проницаемость связана с показателем преломления зависимостью

$$\bar{\epsilon} = n^2(1 - \kappa^2) + 2in^2\kappa, \quad (20)$$

то, приравнявая отдельно действительные и мнимые части выражений (19) и (20), получим:

$$\epsilon = n^2(1 - \kappa^2) = 1 - \frac{4\pi Ne^2}{m(\omega^2 + \beta^2)}, \quad (21a)$$

$$\frac{\sigma}{v} = n^2\kappa = \frac{2\pi Ne^2\beta}{m\omega(\omega^2 + \beta^2)}. \quad (21b)$$

Если  $\beta$  невелико, то с изменением  $\omega$  величина  $\epsilon$  меняет знак. Для малых  $\omega$  второе слагаемое в (21a) превышает единицу. При увеличении  $\omega$  это слагаемое уменьшается и при некотором критическом значении  $\omega_c$  становится равным единице. При этом действительная часть диэлектрической проницаемости обращается в ноль. Дальнейшее увеличение  $\omega$  приводит к тому, что  $\epsilon$  становится положительной и стремится к единице.

Значение критической частоты определяется выражением:

$$\omega_c = \frac{4\pi Ne^2}{m} - \beta^2,$$

Используя  $\omega_c$ , уравнения (21а) и (21б) можно переписать в более симметричном виде.

$$\varepsilon = n^2(1 - \kappa^2) = 1 - \frac{\omega_c^2 + \beta^2}{\omega^2 + \beta^2}, \quad (22a)$$

$$\frac{\sigma}{\nu} = n^2\kappa = \frac{\beta(\omega_c^2 + \beta^2)}{2\omega(\omega^2 + \beta^2)}. \quad (22б)$$

Для металлов, обладающих высокой проводимостью, коэффициент затухания  $\beta$  мал по сравнению с  $\omega_c$ . С учетом этого для частот порядка критической и выше можно записать следующие упрощенные выражения:

$$\varepsilon = n^2(1 - \kappa^2) \approx 1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2, \quad (23a)$$

$$\frac{\sigma}{\nu} = n^2\kappa \approx \frac{\beta}{2\omega} \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2, \quad (23б)$$

Отрицательное значение  $\varepsilon$  имеет определенный физический смысл. Когда  $\omega < \omega_c$ , колебания электронов находятся в противофазе с возбуждающим полем. При этом, как видно из (22а), коэффициент  $\kappa > 1$  и отражательная способность, согласно (16), будет достаточно высока. Если же  $\omega > \omega_c$ , то  $\varepsilon$  становится положительной и  $\kappa$  не превышает единицы. Отражательная способность при этом падает, и среда становится довольно прозрачной, по своим свойствам похожей на диэлектрик. Этот теоретически предсказанный для проводников переход свойств от “металлических” к “диэлектрическим” можно наблюдать у ряда щелочных металлов. Например, натрий, обладающий высоким коэффициентом отражения в видимой области, в ультрафиолетовой области становится прозрачен.

Таким образом, рассмотренная нами простейшая электронная модель позволяет получить результаты, хорошо согласующиеся с экспериментально наблюдаемыми явлениями.

### Контрольные вопросы и задания

1. Как изменится уравнение Гельмгольца, если пренебречь действительной частью  $\bar{k}^2$  (т. е.  $\epsilon \ll \frac{\sigma}{\omega}$ )? Возможно ли при этом решение в виде волны?
2. На основании формул (9) качественно оцените как зависят  $n$  и  $nk$  от длины волны.
3. Пользуясь данными, приведенными в таблице, оцените глубину проникновения излучения для алюминия и ртути.
4. Получите аналитические выражения для констант  $q$  и  $\gamma$ , используемых в законе преломления.
5. Во сколько раз изменяется эффективный показатель преломления  $n'(\theta_i)$  при изменении угла падения от 0 до  $\frac{\pi}{4}$ ?
6. Оцените длину волны, для которой коэффициент отражения для алюминия, согласно формуле Хагена – Рубенса, равен 0,9. (Проводимость алюминия  $\sigma=4,5 \cdot 10^{17} \text{ с}^{-1}$ )
7. Пользуясь данными, приведенными в таблице, вычислите значения критической длины волны для серебра и алюминия. (Используйте упрощенные формулы для случая  $\beta \ll \omega$ ).

### Библиографический список

#### Основной

1. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Наука, 1973.
2. Дичберн Дж., Физическая оптика. М.: Наука, 1968.

#### Дополнительный

1. Сивухин Д.В. Курс общей физики. Т.3. М.:Наука, 1982.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.:Наука, 1982.
3. Соколов А.В. Оптические свойства металлов. М.: Физматгиз, 1961.
4. Гинзбург В.Л., Мотулевич Г.П. Оптические свойства металлов. УФН, Т. LV, вып.4, 1955.

Редактор Т.И.Кузнецова  
Компьютерная верстка, макет Н.П.Козлов

ЛР № 020316 от 4.12.96 г. Подписано в печать 29.04.99. Формат 60×84/16.  
Бумага офсетная. Усл.-печ. л. 1,16; уч.-изд. л. 1,25.  
Тираж 100 экз. Заказ № 177  
Издательство «Самарский университет», 443011, г.Самара, ул.Акад.Павлова,1.  
УОП Самарского госуниверситета. ПЛД. № 67-43 от 19.02.98.