

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С. П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Е. А. ЩЕПАКИНА

БИФУРКАЦИЯ ОСОБЫХ ТОЧЕК НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Рекомендовано редакционно-издательским советом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С. П. Королева» в качестве учебного пособия для обучающихся по основным образовательным программам высшего образования по направлениям подготовки 02.03.01 Математика и компьютерные науки и 01.04.01 Математика и специальности 01.05.01 Фундаментальные математика и механика

С А М А Р А
Издательство Самарского университета
2026

УДК 517.9(075)

ББК В161я7

Щ550

Рецензенты: канд. физ.-мат. наук, доц. Е. А. А л а ш е в а,

д-р физ.-мат. наук, проф. С. Я. Н о в и к о в

Щепакина, Елена Анатольевна

Щ550 **Бифуркация особых точек нелинейных динамических систем:**

учебное пособие / Е. А. Щепакина. – Самара: Издательство Самарского университета, 2026. – 68 с.

ISBN 978-5-7883-2290-2

Пособие написано на основе многолетнего опыта чтения лекций и ведения семинарских занятий. Охватывает часть материала курсов «Методы математического моделирования», «Математическое и компьютерное моделирование», «Математическое моделирование». Предназначено для обучающихся по основным образовательным программам высшего образования по направлениям подготовки 02.03.01 Математика и компьютерные науки и 01.04.01 Математика и специальности 01.05.01 Фундаментальная математика и механика. Может пригодиться аспирантам и научным работникам, интересующимся проблемами математического моделирования и нелинейной динамики.

УДК 517.9(075)

ББК В161я7

ISBN 978-5-7883-2290-2

© Самарский университет, 2026

Учебное издание

Щепакина Елена Анатольевна

**БИФУРКАЦИЯ ОСОБЫХ ТОЧЕК
НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

Учебное пособие

Редакционно-издательская обработка
издательства Самарского университета

Подписано в печать 21.04.2026. Формат 60х84 1/16.

Бумага офсетная. Печ. л. 4,25.

Тираж 27 экз. Заказ . Арт. – 1(УП)/2026.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)
443086, САМАРА, МОСКОВСКОЕ ШОССЕ, 34.

Издательство Самарского университета.
443086, Самара, Московское шоссе, 34.

Оглавление

1	Динамические системы	4
1.1	Понятие динамической системы	4
1.2	Автономные динамические системы	6
1.3	Предельные множества динамических систем . . .	7
2	Элементы теории устойчивости	9
2.1	Основные понятия и определения	9
2.2	Устойчивость линейных систем с постоянными ко- эффициентами	13
2.3	Метод функций Ляпунова	15
2.4	Устойчивость по первому приближению	19
2.5	Фазовые портреты линейных автономных систем на плоскости	22
2.5.1	Случай единственной особой точки	22
2.5.2	Вырожденный случай	31
2.6	Особые точки нелинейных автономных систем на плоскости	33
2.7	Особые точки многомерных систем	36
3	Структурная устойчивость и бифуркации положе- ний равновесия динамических систем	44

3.1	Понятие структурной устойчивости динамической системы	45
3.2	Классификация бифуркаций	46
3.3	Понятие мягкой (суперкритической) и жесткой (субкритической) бифуркаций	48
3.4	Бифуркации особых точек	49
3.4.1	Транскритическая бифуркация	50
3.4.2	Седло–узловая бифуркация	53
3.4.3	Бифуркация типа вилки	56
3.4.4	Бифуркация рождения (или гибели) предельного цикла	58
	Литература	65

Глава 1

Динамические системы

1.1 Понятие динамической системы

Динамическая система является одним из центральных понятий в математическом моделировании.

Определение 1 *Под динамической системой понимают любой объект или процесс, для которого известен некоторый набор характеристик (величин), однозначно определяющий состояние данного объекта или процесса в данный момент времени, а также известен закон, описывающий эволюцию начального состояния с течением времени.*

Понятие динамической системы является очень широким, поэтому примеры динамических систем можно найти практически во всех областях естествознания. К динамическим системам относятся химические, биологические, физические и механические объекты, экономические процессы, процессы преобразования информации, вычислительные процессы и т.д., другими словами, любые процессы, изменяющиеся во времени.

Описание динамических систем для задания закона эволюции также разнообразно: это может быть сделано с помо-

щью теории графов, дифференциальных уравнений, дискретных отображений, теории марковских цепей и др. В результате такого описания возникает *математическая модель* динамической системы. Обычно не делают различие между динамической системой и ее математической моделью [2, 19].

Можно по-разному классифицировать динамические системы в зависимости от принципа, лежащего в основе той или иной классификации.

Например, динамические системы можно поделить на *консервативные* (гамильтоновы) и *неконсервативные* (диссипативные). В консервативных динамических системах полная энергия системы сохраняется. Примерами консервативных динамических систем являются системы, описывающие гармонические колебания. Неконсервативные динамические системы характеризуются потерей энергии. Примером такой системы является маятник с затухающими колебаниями.

По виду оператора, описывающего закон эволюции, динамические системы можно поделить на

- линейные и нелинейные;
- сосредоточенные и распределенные;
- автономные и неавтономные.

В данном пособии рассматриваются динамические системы, для которых закон эволюции начального состояния системы описываются дифференциальными уравнениями с параметрами:

$$\dot{x} = f(t, x, \mu), \quad (1.1)$$

где $x \in R^n$ — неизвестная векторная функция, компонентами которой являются характеристики $x_1(t), \dots, x_n(t)$ динамической системы; t — независимая переменная (время); f — достаточно гладкая n -мерная векторная функция; μ — вектор параметров.

Определение 2 Компоненты $x_1, \dots, x_n$ векторной функции x называются *фазовыми переменными*. Пространство фазовых

переменных $x_1, \dots, x_n$ системы (1.1) называется фазовым пространством. График решения системы (1.1) в фазовом пространстве называется фазовой траекторией (или траекторией).

Определение 3 Пространство переменных $t, x_1, \dots, x_n$ системы (1.1) называется расширенным фазовым пространством, а график решения системы (1.1) в нем называется интегральной кривой.

Очевидно, что каждая фазовая траектория является проекцией вдоль оси t соответствующей интегральной кривой системы на фазовое пространство.

Определение 4 Совокупность всех траекторий динамической системы в фазовом пространстве называется ее фазовым портретом.

Фазовый портрет динамической системы дает наглядное представление о ее поведении с течением времени.

1.2 Автономные динамические системы

Определение 5 Автономной называется любая дифференциальная система, правая часть которой не зависит явным образом от t :

$$\dot{x} = f(x). \quad (1.2)$$

Обозначим через $x(t, x_0)$ решения (1.2), траектории которых берут свое начало в точке x_0 фазового пространства.

Решения автономной системы обладают рядом существенных свойств [19], вытекающих из теоремы существования и единственности решений начальной задачи для (1.2), см., например, [12–17]:

- непрерывность по совокупности переменных;
- $x(t_0, x_0) = x_0$;
- $x(t_2, x(t_1, x_0)) = x(t_1 + t_2, x_0)$.

Решение $x(t, x_0)$ автономной системы (1.2) может быть только одного из следующих трех типов:

- непериодическое, для которого $x(t_1, x_0) \neq x(t_2, x_0)$ при $t_1 \neq t_2$. Траектория такого решения представляет собой незамкнутую кривую в фазовом пространстве;
- периодическое, для которого найдется такое число $T > 0$, что $x(t + T, x_0) = x(t, x_0)$, а

$$x(t_1, x_0) \neq x(t_2, x_0) \text{ при } 0 \leq t_1 < t_2 < T.$$

Траектория такого решения представляет собой замкнутую кривую или *цикл*;

- постоянное, для которого $x(t, x_0) \equiv x_0$. Траектория такого решения представляет собой точку, которая называется *особой точкой* (точкой покоя, стационаром, положением равновесия) [8, 15, 17].

Подробнее об особых точках будет изложено в разделах 2.5–2.7.

Следует отметить, что любую неавтономную систему (1.1) можно привести к автономному виду за счет увеличения размерности, введя новую фазовую переменную $x_{n+1} = t$.

1.3 Предельные множества динамических систем

Определение 6 Точка x^* называется предельной точкой решения системы (1.1) при $t \rightarrow +\infty$, если существует последовательность моментов времени $t_k \rightarrow +\infty$, такая, что $x(t_k, x_0) \rightarrow x^*$.

Определение 7 Совокупность всех предельных точек называется предельным множеством при $t \rightarrow +\infty$.

Предельное множество особой точки состоит из самой этой точки. Предельным множеством цикла является сам цикл.

Отметим свойства предельных множеств [12].

- Предельное множество замкнуто (в смысле замкнутости множества в R^n).
- Предельное множество состоит из целых траекторий. Другими словами, предельное множество является инвариантным относительно преобразования $0 \rightarrow x(t, x_0)$, определяемом системой (1.2).
- Для того чтобы предельное множество было пустым, необходимо и достаточно, чтобы траектория решения уходила в бесконечность при $t \rightarrow +\infty$.
- Для того чтобы предельное множество состояло из единственной точки, необходимо и достаточно, чтобы траектория системы входила в эту точку при $t \rightarrow +\infty$.

Предельные точки и предельные циклы относятся к так называемым *регулярным аттракторам* [10].

Предельные точки и множества незамкнутых траекторий представляют наибольший интерес, так как позволяют определить характер поведения траектории при больших t .

Для изучения сложного поведения динамических систем вида (1.1) применяются качественные (аналитические) и численные методы. Качественное исследование динамической системы подразумевает определение типа ее траекторий, построение фазового портрета, анализ устойчивости ее решений, а также возможные изменения структуры фазового портрета при изменении параметров системы. Все эти вопросы изучают теория устойчивости и теория бифуркаций, элементы которых изложены в данном пособии.

Глава 2

Элементы теории устойчивости

Как было отмечено выше, теория устойчивости является эффективным инструментом качественного исследования динамических систем, позволяющая получить информацию о сложном поведении ее решений без нахождения самих решений системы. Отметим, что нахождение точных решений нелинейных динамических систем как правило невозможно. Необходимые для подобного исследования сведения из теории устойчивости приводятся в этой главе.

2.1 Основные понятия и определения

Рассмотрим систему уравнений

$$\dot{x} = f(t, x), \tag{2.1}$$

где t — независимая переменная, x — вектор размерности n , f — векторная функция, определенная и непрерывная по совокупности переменных при $t \in [t_0, \infty]$, $x \in D \subset R^n$.

Определение 8 Решение $x = \varphi(t)$, удовлетворяющее начальному условию $\varphi(t_0) = x^0$ и определенное при $\forall t \geq t_0$ называется устойчивым (устойчивым по Ляпунову) если для $\forall t_0$ и $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta = \delta(\varepsilon, t_0)$ такое, что для любого решения $x = x(t)$ системы (2.1), удовлетворяющего условию $\|x(t_0) - \varphi(t_0)\| < \delta$ выполняется:

1) $x(t)$ определено при всех $t \geq t_0$,

2) $\|x(t) - \varphi(t)\| < \varepsilon \quad \forall t \geq t_0$.

Если выбор δ не зависит от t_0 , а определяется лишь ε , то устойчивость называется равномерной.

Определение 9 Решение $x = \psi(t)$ системы (2.1) называется неустойчивым, если $\exists t_0$ и $\exists \varepsilon > 0$ такие, что $\forall \delta$ существует такое решение $x = x(t)$ системы (2.1), что

$$\|x(t_0) - \psi(t_0)\| < \delta$$

и существует такое $t^* > t_0$, что $x(t^*)$ либо не определено, либо $\|x(t^*) - \psi(t^*)\| \geq \varepsilon$.

Поведение траекторий в ε -окрестности устойчивого и неустойчивого решения $x = \varphi(t)$ продемонстрировано на рисунках 2.1 и 2.2, соответственно.

Определение 10 Решение $x = \varphi(t)$ называется асимптотически устойчивым (по Ляпунову), если оно является устойчивым, и δ в определении устойчивости может быть выбрано таким, что

$$\|x(t) - \varphi(t)\| \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty.$$

Поведение траекторий в ε -окрестности асимптотически устойчивого решения $x = \varphi(t)$ продемонстрировано на рисунке 2.3.

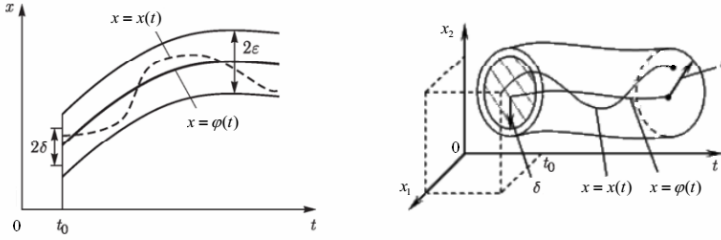


Рис. 2.1: Иллюстрация к определению 8 в случае $\dim x = 1$ (слева) и $\dim x = 2$ (справа)

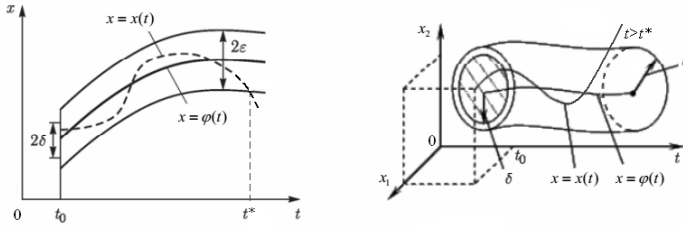


Рис. 2.2: Иллюстрация к определению 9

Пример 1 Исследуем на устойчивость решение $x = \varphi(t)$ уравнения

$$\dot{x} = ax,$$

удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0) = 1$.

Общее решение этого уравнения имеет вид $x(t) = x_0 e^{at}$, где $x_0 = x(0)$. Тогда $\varphi(t) = e^{at}$.

Запишем определение устойчивости решения $x = \varphi(t)$:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) : \forall x(t) = x_0 e^{at} : \|x_0 - 1\| < \delta \Rightarrow$$

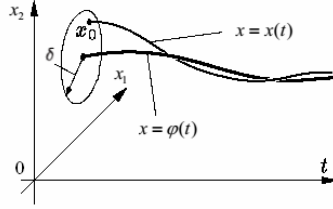


Рис. 2.3: Иллюстрация к определению 10

$$\Rightarrow \|\varphi(t) - x(t)\| = |x_0 e^{at} - e^{at}| = |x_0 - 1| e^{at} < \delta e^{at}.$$

Отсюда следует, что

при $a = 0$ решение $\varphi(t)$ устойчиво и $\delta = \varepsilon$;

при $a > 0$ — неустойчиво,

при $a < 0$ — асимптотически устойчиво ($\delta = \varepsilon$).

Исследование на устойчивость решения $x = \varphi(t)$ системы (2.1) можно свести к исследованию на устойчивость тривиального, то есть тождественно равного нулю решения некоторой другой системы. Действительно, с помощью замены $x = \varphi(t) + y$ из системы (2.1) получаем

$$\dot{y} = F(t, y), \quad (2.2)$$

где $F(t, y) = f(t, y + \varphi(t)) - f(t, \varphi(t))$. Очевидно, что решению $x = \varphi(t)$ соответствует решение $y \equiv 0$ системы (2.2).

Приведем определения устойчивости для тривиального решения.

Определение 11 *Тривиальное решение системы (2.2) называется устойчивым (устойчивым по Ляпунову), если $\forall t_0$ и $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon, t_0)$ такое, что для любого решения $y(t)$ системы (2.2), удовлетворяющего условию $\|y(t_0)\| < \delta$ выполняется:*

- 1) $y(t)$ определено при всех $t \geq t_0$,
- 2) $\|y(t)\| < \varepsilon \quad \forall t \geq t_0$.

Определение 12 Тривиальное решение системы (2.2) называется неустойчивым, если $\exists t_0$ и $\exists \varepsilon > 0$ такие, что $\forall \delta$ существует такое решение $y(t)$ системы (2.2), что $\|y(t_0)\| < \delta$ и $\exists t = t^* : y(t^*)$ либо неопределена, либо $\|y(t^*)\| \geq \varepsilon$.

Определение 13 Тривиальное решение системы (2.2) называется асимптотически устойчивым (по Ляпунову), если оно является устойчивым, и δ в определении устойчивости может быть выбрано таким, что $\|y(t)\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Пример 2 Исследуем на устойчивость тривиальное решение уравнения

$$\dot{x} = x^2.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$x(t) = -\frac{1}{t - x_0^{-1}},$$

где $x_0 = x(0)$.

Отметим, что при $x_0 > 0$ в точке $t = x_0^{-1}$ решение $x(t)$ не определено, то есть первое условие в определении устойчивости нарушено. Следовательно, решение $x \equiv 0$ уравнения неустойчиво.

2.2 Устойчивость линейных систем с постоянными коэффициентами

Рассмотрим простейшую автономную динамическую систему:

$$\dot{x} = Ax, \tag{2.3}$$

где $x \in R^n$ — векторная функция, A — постоянная $n \times n$ -матрица. Система (2.3) является линейной однородной системой с постоянными коэффициентами.

Приведем без доказательства следующую теорему (доказательство теоремы читатели могут найти, например, в [15, 17]).

Теорема 1 *(об устойчивости линейных систем с постоянными коэффициентами)*

I. Если все собственные числа матрицы A имеют отрицательную вещественную часть, то нулевое решение системы (2.3) устойчиво, причем асимптотически.

II. Если хотя бы одно собственное число матрицы A имеет положительную вещественную часть, то нулевое решение системы неустойчиво.

III. Пусть среди собственных чисел матрицы A имеются числа с нулевой вещественной частью, а у остальных собственных чисел вещественные части отрицательны. Если все собственные числа с нулевой вещественной частью являются простыми и полупростыми, т. е. их геометрическая кратность (число соответствующих линейно независимых собственных векторов) совпадает с их алгебраической кратностью (кратностью собственного корня), то нулевое решение системы устойчиво. В противном случае нулевое решение этой системы неустойчиво.

Следует отметить, что все решения линейной однородной системы (необязательно с постоянными коэффициентами) являются либо устойчивыми, либо асимптотически устойчивыми, либо неустойчивыми одновременно. В этом смысле только для систем вида

$$\dot{x} = A(t)x, \quad (2.4)$$

с $n \times n$ -матрицей $A(t)$ непрерывных коэффициентов, можно говорить об устойчивости ни отдельного ее решения, а всей системы в целом.

Действительно, если сводить задачу исследования на устойчивость решения $x = \varphi(t)$ системы (2.4) к задаче исследования на устойчивость тривиального решения другой системы, то с помощью замены $x = \varphi(t) + y$ получаем, что система (2.2) имеет вид:

$$\dot{y} = A(t)y. \quad (2.5)$$

Очевидно, что системы (2.4) и (2.5) эквивалентны. Следовательно, устойчивость или неустойчивость решения $x = \varphi(t)$ влечет устойчивость или неустойчивость всех других решений системы (2.4).

2.3 Метод функций Ляпунова

Рассмотрим непрерывную функцию $V = V(x)$, определенную в некоторой окрестности начала координат фазового пространства $U_0 = \{\|x\| < h\}$. Введем основные определения знакопостоянных и знакоопределенных функций.

Определение 14 *Функция $V(x)$ называется знакопостоянной (знакоположительной или знакоотрицательной) в U_0 , если*

$$V(x) \geq 0 \quad (V(x) \leq 0) \quad \forall x \in U_0.$$

Определение 15 *Функция $V(x)$ называется положительно определенной в U_0 , если*

$$V(x) > 0 \quad \forall x \in U_0 \setminus 0, \quad V(0) = 0.$$

Определение 16 *Функция $V(x)$ называется отрицательно определенной в U_0 , если*

$$V(x) < 0 \quad \forall x \in U_0 \setminus 0, \quad V(0) = 0.$$

Определение 17 Функция $V(x)$ называется *знакопеременной*, если она не является *знакопостоянной*, т. е. в любой окрестности нуля она принимает значения разных знаков.

Пример 3 $V(x, y) = x^2 + y^2$ — положительно определенная функция.

Пример 4 $V(x, y) = x^2$ — знакоположительная функция.

Пример 5 $V(x) = x^2$ — положительно определенная функция.

Пример 6 $V(x, y) = x^2 + y^2 - y^3$ — положительно определенная функция.

Пример 7 $V(x, y) = x^2 + y$ — знакопеременная функция.

Пример 8 $V(x) = x$ — знакопеременная функция.

Пример 9 $V(x, y) = x^2 + y^2 + 2xy$ — знакоположительная функция.

Рассмотрим автономную динамическую систему

$$\dot{x} = f(x), \quad (2.6)$$

где $x \in R^n$, $f(x)$ — непрерывная n -мерная векторная функция.

Пусть $f(0) = 0$, что означает, что система (2.6) имеет тривиальное решение.

Пусть функция $V(x)$ определена и непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности U_0 начала координат. Продифференцируем $V(x)$ по t , считая, что x — решение системы (2.6):

$$\begin{aligned} \frac{dV(x)}{dt} &= \frac{dV}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dV}{dx} \cdot f(x) = \dot{V}(x), \\ \dot{V}(x) &= (\text{grad } V, f) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Определение 18 Функция $\dot{V}(x)$, определенная (2.7), называется полной производной функции $V(x)$ по времени, вычисленной в силу системы (2.6).

Пример 10 Полная производная функции $V(x, y) = x^2 + y^2$ по времени, вычисленная в силу системы

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x \end{cases}$$

равна

$$\dot{V} = 2x\dot{x} + 2y\dot{y} = 2xy - 2yx = 0.$$

Пример 11 Полная производная функции $V = x^2 + y^2 + xz$ по времени, вычисленная в силу системы

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y + z, \\ \dot{y} = z^2, \\ \dot{z} = -5y \end{cases}$$

равна

$$\dot{V} = (2x + z)(x + y + z) + 2yz^2 - 5xy.$$

Ниже приводятся теоремы, позволяющие сделать вывод об устойчивости (асимптотической устойчивости или неустойчивости) тривиального решения автономной динамической системы при помощи некоторой функции $V(x)$, называемой *функцией Ляпунова*. Доказательства этих теорем читатели могут найти, например, в [15, 17].

Теорема 2 (*Ляпунова об устойчивости*)

Если для системы (2.6) существует положительно определенная функция $V(x)$, полная производная которой по времени вычисленная в силу данной системы является знакоотрицательной функцией, то нулевое решение системы устойчиво.

Теорема 3 (*Ляпунова об асимптотической устойчивости*)

Пусть для системы (2.6) существует положительно определенная функция $V(x)$, полная производная которой по времени, вычисленная в силу данной системы есть отрицательно определенная функция. Тогда нулевое решение системы асимптотически устойчиво.

Теорема 4 (*Ляпунова о неустойчивости*)

Пусть для системы (2.6) существует $V(x)$, полная производная которой по времени вычисленная в силу системы является положительно определенной функцией, и в любой окрестности начала координат существуют точки, в которой функция принимает положительные значения:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists x_0 : \|x_0\| < \varepsilon : V(x_0) > 0.$$

Тогда нулевое решение данной системы неустойчиво.

Пример 12 Применим теоремы Ляпунова к системе

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \alpha x^3, \\ \dot{y} = -x + \alpha y^3. \end{cases}$$

Рассмотрим положительно определенную функцию $V = x^2 + y^2$. Так как

$$\dot{V} = 2\alpha(x^4 + y^4),$$

то при $\alpha = 0$ нулевое решение системы устойчиво, при $\alpha < 0$ — асимптотически устойчиво, а при $\alpha > 0$ — неустойчиво.

В заключении раздела рассмотрим еще одну теорему.

Рассмотрим шар S_h с центром в начале координат и радиусом h . Пусть U — некоторое множество, примыкающее к началу координат. Через Γ обозначим ту часть границы множества U , которая лежит внутри шара S_h , см. рисунок 2.4.

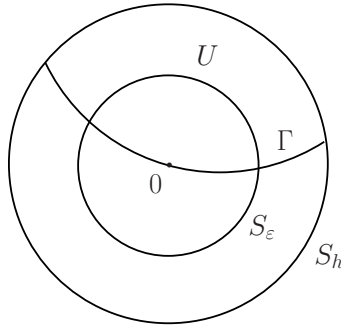


Рис. 2.4: Иллюстрация к теореме Четаева

Теорема 5 (Четаева) Пусть для системы (2.6) существует функция $V(x)$, которая в области U принимает положительные значения и обращается в ноль на Γ , и полная производная этой функции по времени, вычисленная в силу данной системы $\dot{V}(x) > 0 \forall x \in U$. Тогда нулевое решение системы неустойчиво.

2.4 Устойчивость по первому приближению

Так как понятие устойчивости тривиального решения системы (2.6) связано с малой окрестностью начала координат в фазовом пространстве, то определяющими поведение решения системы будут главные члены разложения $f(x)$ по x в окрестности $x = 0$. Так как $f(0) = 0$, то главными будут линейные члены разложения f по x , т. е. члены первого приближения.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x), \quad f(x) = Ax + g(x), \quad (2.8)$$

где $\frac{\|g(x)\|}{\|x\|} \rightarrow 0$ при $\|x\| \rightarrow 0$. Система

$$\dot{x} = Ax \quad (2.9)$$

называется *системой первого приближения* для (2.8).

Рассмотрим сначала скалярный случай системы (2.6):

$$\dot{x} = f(x), \quad f(0) = 0.$$

Используя формулу Тейлора для функции $f(x)$ и соотношение $f(0) = 0$, получим

$$f(x) = f'(0)x + g(x),$$

где $g(x) = O(x^2)$ при $x \rightarrow 0$. Роль системы первого приближения играет уравнение

$$\dot{x} = ax,$$

где $a = f'(0)$.

В векторном случае роль системы первого приближения играет система

$$\dot{x} = Ax,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(0)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(0)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(0)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_2(0)}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n(0)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n(0)}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Пример 13 Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \alpha x^3, \\ \dot{y} = -x + \alpha y^3. \end{cases}$$

Отметим, что при $\alpha = 0$ тривиальное решение данной система устойчиво, при $\alpha < 0$ асимптотически устойчиво, а при $\alpha > 0$ неустойчиво.

Однако, нулевое решение соответствующей системы первого приближения

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x \end{cases}$$

всегда устойчиво.

Следовательно, не всегда анализ системы первого приближения дает верный ответ об устойчивости нулевого решения исходной системы.

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 6 (*Теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению*) Если все собственные числа матрицы A системы первого приближения имеют отрицательную вещественную часть, то нулевое решение системы (2.8) асимптотически устойчиво.

Теорема 7 (*Теорема Ляпунова о неустойчивости по первому приближению*) Если хотя бы одно собственное число матрицы A системы первого приближения имеет положительную вещественную часть, то нулевое решение системы (2.8) неустойчиво.

В вырожденном случае, когда среди собственных чисел матрицы A системы первого приближения имеются числа с нулевой вещественной частью, а у остальных собственных чисел вещественные части отрицательны, нельзя судить об устойчивости или неустойчивости нулевого решения исходной нелинейной системы (2.8) по первому приближению. В этом случае $\|g(x)\|$ не является величиной $o(\|x\|)$ при $\|x\| \rightarrow 0$, и влияние слагаемого $g(x)$ в правой части системы (2.8) становится существенным.

2.5 Фазовые портреты линейных автономных систем на плоскости

Часто возникает потребность, помимо исследования начала координат фазового пространства на устойчивость, выяснить также расположение траекторий в окрестности этой точки.

Определение 19 *Особыми точками (точками покоя, стационарами, положениями равновесия) автономной системы (2.6) называются точки $\bar{x}$, для которых правые части системы обращаются в нуль: $f(\bar{x}) = 0$.*

Особые точки, к которым можно применить теоремы 6 и 7, называются *гиперболическими*. Собственные значения линеаризованной системы в окрестности гиперболических точек имеют ненулевую вещественную часть.

Собственные значения линеаризованной в окрестности *негиперболической* особой точки системы имеют нулевую вещественную часть. Для выяснения характера устойчивости такой точки можно воспользоваться, например, методом функции Ляпунова.

Не ставя целью рассматривать этот вопрос во всей общности, ограничимся случаем $n = 2$ (фазовое пространство является плоскостью R^2) и линейной системой уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\dot{x} = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

2.5.1 Случай единственной особой точки

Будем предполагать, что матрица A заранее приведена к вещественной жордановой форме и $\det A \neq 0$. Отметим, что единственной особой точкой системы (2.10) в этом случае является точка $(0, 0)$ фазовой плоскости. Как будет показано, расположение траекторий в ее окрестности определяется, как и свойство

ее устойчивости или неустойчивости, характеристическими значениями матрицы A . Возможны следующие случаи.

I. Характеристические значения являются простыми, вещественными и одного знака. Тогда матрица A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 \lambda_2 > 0.$$

II. Характеристические значения являются вещественными полупростыми. Тогда матрица A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

III. Характеристические значения являются кратными. Тогда матрица A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

IV. Характеристические значения вещественны и разных знаков. Тогда матрица A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 \lambda_2 > 0.$$

V. Характеристические значения — чисто мнимые. Тогда матрица A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix}.$$

VI. Характеристические значения — комплексно-сопряженные. Тогда матрица A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Итак, рассмотрим все возможные случаи.

I. В этом случае система (2.10) принимает вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \lambda_1 x_1, \\ \dot{x}_2 = \lambda_2 x_2, \end{cases}$$

а ее решениями являются функции $x_1 = C_1 e^{\lambda_1 t}$ и $x_2 = C_2 e^{\lambda_2 t}$. Чтобы получить фазовый портрет системы, исключим независимую переменную t , разделив одно уравнение на другое:

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \cdot \frac{x_1}{x_2}.$$

Интегрируя это уравнение, получим $x_2 = C x_1^{\lambda_2/\lambda_1}$, где $C = C_2 C_1^{-\lambda_2/\lambda_1}$.

Траекториями системы в этом случае являются сама особая точка, ветви парабол и части осей, которые отвечают решениям при $C_1 = 0$ или $C_2 = 0$ и направлены вдоль собственных векторов матрицы A . Такой фазовый портрет называется *неправильным узлом* или просто *узлом*. Фазовый портрет для этого случая представлен на рис. 2.5.

Неправильный узел может быть устойчивым, если $\lambda_{1,2} < 0$ (рис. 2.5а) и неустойчивым, если $\lambda_{1,2} > 0$ (рис. 2.5б), что полностью соответствует теореме 1. Параболы касаются той оси, которая направлена вдоль собственного вектора, соответствующего меньшему по абсолютному значению собственному значению матрицы A .

II. В этом случае система (2.10) имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \lambda x_1, \\ \dot{x}_2 = \lambda x_2. \end{cases}$$

Ее решениями являются функции $x_1 = C_1 e^{\lambda t}$ и $x_2 = C_2 e^{\lambda t}$, откуда следует зависимость $x_2 = C x_1$. Фазовый портрет называется *правильным узлом*. Траекториями системы в этом случае являются сама особая точка, части прямых и части осей, которые отвечают решениям при $C_1 = 0$ или $C_2 = 0$ и направлены вдоль собственных векторов матрицы A , рис. 2.6. Как и в предыдущем

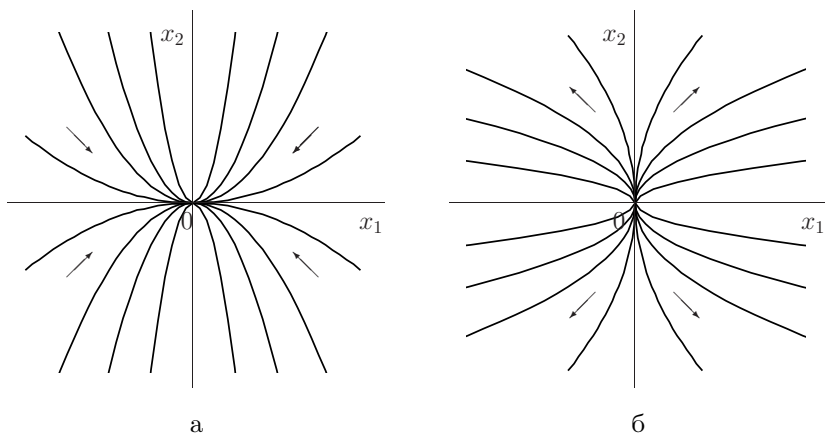


Рис. 2.5: Неправильный узел, стрелки указывают направление движения при возрастании времени: а) $\lambda_2/\lambda_1 > 1$, $\lambda_{1,2} < 0$; б) $\lambda_2/\lambda_1 < 1$, $\lambda_{1,2} > 0$

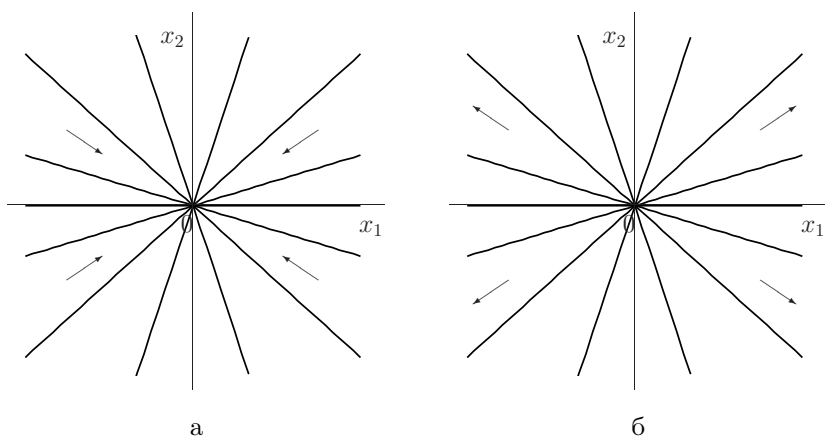


Рис. 2.6: Правильный узел, стрелки указывают направление движения при возрастании времени: а) $\lambda < 0$; б) $\lambda > 0$

случае, правильный узел может бы устойчивым, если $\lambda < 0$ (рис. 2.6а), и неустойчивым, если $\lambda > 0$ (рис. 2.6б).

III. В этом случае система (2.10) имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \lambda x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = \lambda x_2. \end{cases}$$

Ее решениями являются функции

$$x_1 = C_1 e^{\lambda t} + t C_2 e^{\lambda t}, \quad x_2 = C_2 e^{\lambda t},$$

откуда следует

$$x_1 = x_2 \left(\frac{C_1}{C_2} + \frac{1}{\lambda} \ln \left| \frac{x_2}{C_2} \right| \right).$$

Фазовый портрет — *вырожденный узел*. Траекториями системы в этом случае являются сама особая точка, части кривых и части оси $x_2 = 0$, которые отвечают случаю $C_2 = 0$ и направлены вдоль единственного собственного вектора матрицы A , рис. 2.7. Вырожденный узел может бы устойчивым, если $\lambda < 0$ (рис. 2.7а) и неустойчивым, если $\lambda > 0$ (рис. 2.7б).

IV. Решениями системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \lambda_1 x_1, \\ \dot{x}_2 = -\lambda_2 x_2 \end{cases}$$

являются функции $x_1 = C_1 e^{\lambda_1 t}$ и $x_2 = C_2 e^{-\lambda_2 t}$. Фазовый портрет системы — *седло*. Траекториями системы в этом случае являются сама особая точка, гиперболы $x_1 x_2^{\lambda_1/\lambda_2} = C$ и части осей, которые называются *сепаратрисами*. Сепаратрисы отвечают решениям при $C_1 = 0$ или $C_2 = 0$ и направлены вдоль собственных векторов матрицы A . Пара устойчивых сепаратрис (отвечающих отрицательному собственному значению матрицы A) и сама особая точка $(0, 0)$ образуют *устойчивое инвариантное многообразие*. Пара неустойчивых сепаратрис (отвечающих положительному собственному значению матрицы A) и сама особая точка $(0, 0)$ образуют *неустойчивое инвариантное многообразие*.

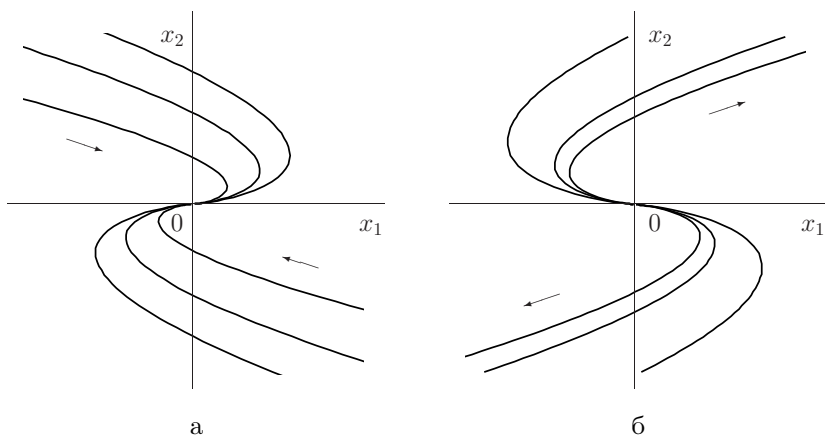


Рис. 2.7: Вырожденный узел: а) $\lambda < 0$; б) $\lambda > 0$

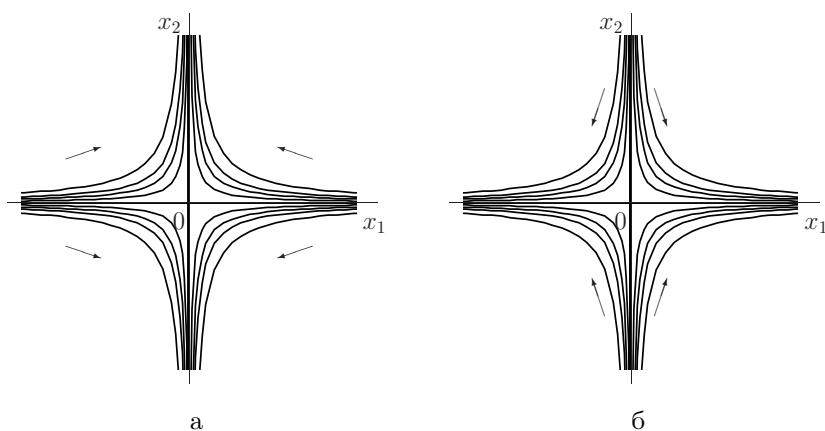


Рис. 2.8: Седло: а) $\lambda_{1,2} < 0$; б) $\lambda_{1,2} > 0$

Отметим, что особая точка в случае седла всегда неустойчива, что соответствует теореме 1. Фазовый портрет для случая седла представлен на рис. 2.8.

V. В этом случае имеем систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \beta x_2, \\ \dot{x}_2 = -\beta x_1. \end{cases}$$

Собственные значения $\lambda = \pm i\beta$ матрицы A определяют решения

$$x_1 = C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t, \quad x_2 = -C_1 \sin \beta t + C_2 \cos \beta t.$$

Чтобы получить зависимость между x_1 и x_2 , разделим первое уравнение системы на второе:

$$\frac{dx_1}{dx_2} = -\frac{x_1}{x_2}.$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$\frac{x_1^2}{2} = -\frac{x_2^2}{2} + C$$

или

$$x_1^2 + x_2^2 = C.$$

Так как выражение в левой части не может быть отрицательным, то можно положить $C = r^2$. Таким образом, траекториями системы в этом случае являются концентрические окружности и сама особая точка ($C = 0$), рис. 2.9. Такой фазовый портрет получил название *центр*. Центр всегда устойчив, что следует из теоремы 1. Чтобы выяснить, в каком направлении осуществляется движение по траектории — по часовой стрелке или против нее, — нужно построить *вектор скорости*, см. подробнее [8, 17].

VI. В этом случае собственные значения матрицы A системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha x_1 + \beta x_2, \\ \dot{x}_2 = -\beta x_1 + \alpha x_2 \end{cases}$$

имеют ненулевую вещественную часть:

$$\lambda = \alpha \pm i\beta,$$

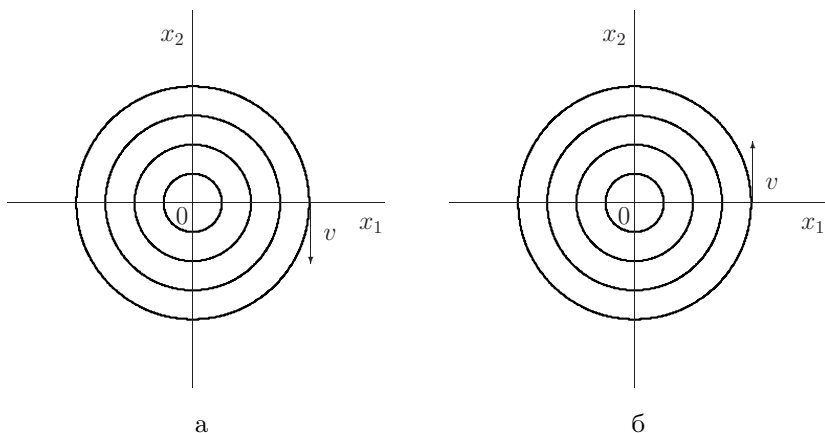


Рис. 2.9: Случай центра, вектор скорости v определяет направление движения при возрастании времени: а) $\beta > 0$; б) $\beta < 0$

а решениями системы являются функции

$$\begin{aligned} x_1 &= e^{\alpha t}(C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t), \\ x_2 &= e^{\alpha t}(-C_1 \sin \beta t + C_2 \cos \beta t). \end{aligned}$$

Траекториями системы являются спирали

$$x_1^2 + x_2^2 = (C_1^2 + C_2^2)e^{2\alpha t}$$

и сама особая точка. Название фазового портрета — *фокус*, см. рис 2.10.

Фокус может быть устойчивым (в этом случае спирали закручиваются при возрастании t), если $\alpha < 0$ (рис. 2.10а) и неустойчивым (в этом случае спирали раскручиваются при возрастании t), если $\alpha > 0$ (рис. 2.10б). Чтобы выяснить, в каком направлении закручиваются (раскручиваются) спирали — по часовой стрелке или против нее, — нужно построить вектор скорости [17].

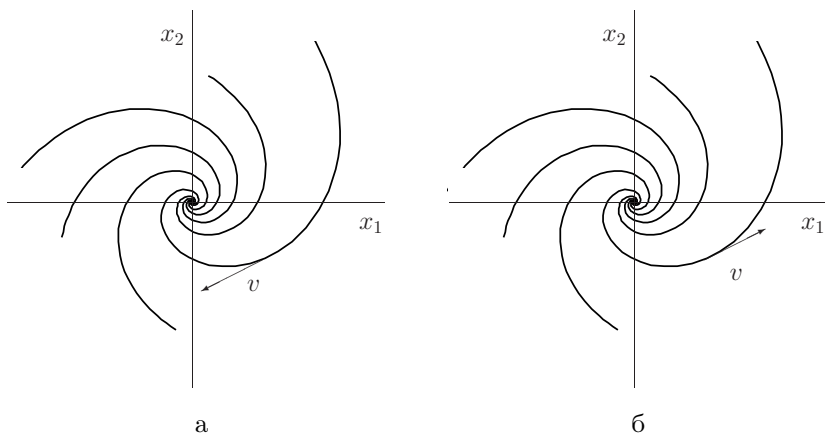


Рис. 2.10: Фокус: а) $\alpha < 0, \beta > 0$; б) $\alpha > 0, \beta < 0$

Если A не приведена к жордановой форме, то нужно воспользоваться заменой $x = Ty$. Тогда система (2.10) принимает вид

$$T\dot{y} = ATy$$

или

$$\dot{y} = \Lambda y, \quad (2.11)$$

где $\Lambda = T^{-1}AT$ — жорданова форма матрицы A . При этом фазовый портрет системы (2.10) получается из фазового портрета системы (2.11) такими преобразованиями как сжатие (растяжение), поворот вокруг начала координат [17]. При этом тип, устойчивость (неустойчивость) особой точки, направление обхода траекторий сохраняется. В случае узла и седла траектории, представляющие собой прямые линии, так же направлены вдоль собственных векторов (но если матрица A не является жордановой, то направления ее собственных векторов не совпадают с направлениями осей координат фазовой плоскости).

2.5.2 Вырожденный случай

Рассмотрим случай, когда $\det A = 0$. В этом случае особые точки системы (2.10) называются *вырожденными*.

Без ограничения общности будем считать, что матрица A — жорданова. Тогда возможны следующие случаи:

(i) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix};$

(ii) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$

(iii) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$

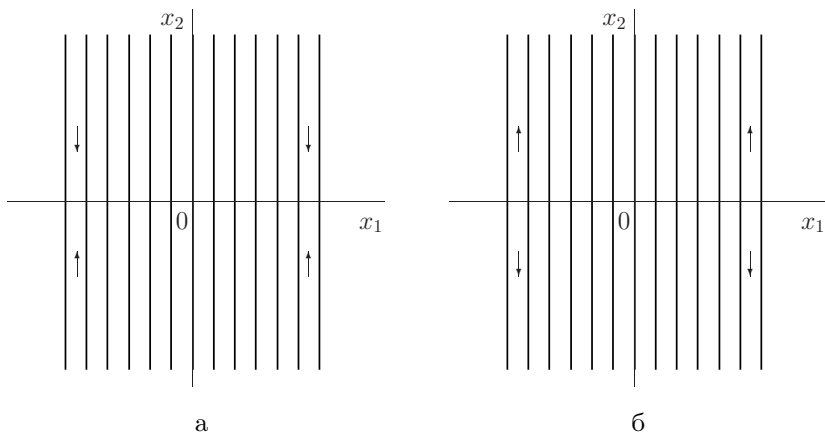


Рис. 2.11: Фазовый портрет системы (2.10) в случае (i): а) $\lambda < 0$; б) $\lambda > 0$

В случае (i) система (2.10) имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0, \\ \dot{x}_2 = \lambda x_2, \end{cases}$$

а ее решениями являются функции $x_1 = C_1$ и $x_2 = C_2 e^{\lambda t}$. Согласно определению, особые точки системы в этом случае пол-

ностью заполняют ось $0x_1$, которая направлена вдоль собственного вектора матрицы A . Остальные траектории системы — части прямых, параллельных оси $0x_2$, которая направлена вдоль второго собственного вектора. Каждая из особых точек является устойчивой (но не асимптотически) при $\lambda < 0$ (рис. 2.11а) и неустойчивой при $\lambda > 0$ (рис. 2.11б), что полностью соответствует теореме 1.

В случае (ii) система

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0, \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases}$$

имеет решения $x_1 = C_1$, $x_2 = C_2$, и любая точка фазовой плоскости является особой. Других траекторий нет. Каждая особая точка является устойчивой (но не асимптотически).

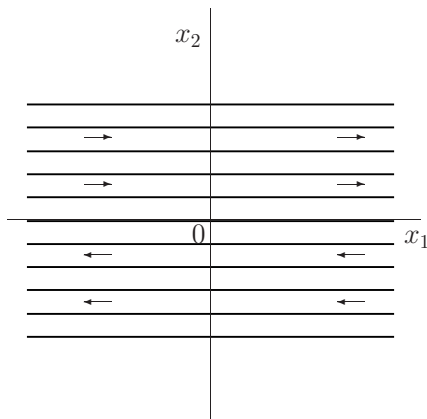


Рис. 2.12: Фазовый портрет системы (2.12). Ось $0x_1$ полностью состоит из особых точек системы

В случае (iii) система (2.10) принимает вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases} \quad (2.12)$$

имеет решения $x_1 = C_1 t + C_2$, $x_2 = C_2$, см. рис. 2.12. Особые точки системы, как и в случае (i), полностью заполняют ось $0x_1$, но остальные траектории системы — части прямых, параллельных оси $0x_1$, которая направлена вдоль единственного собственного вектора матрицы A . Каждая из особых точек является неустойчивой, что хорошо видно на фазовом портрете и соответствует теореме 1.

2.6 Особые точки нелинейных автономных систем на плоскости

Рассмотрим нелинейную автономную систему (2.6) при $n = 2$:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2). \end{cases} \quad (2.13)$$

Особые точки (2.13) удовлетворяют системе

$$f_i(x_1, x_2) = 0, \quad (i = 1, 2).$$

Соответствующей заменой переменных каждую особую точку можно перевести в начало координат. Пусть, например, $(\overline{x}_1, \overline{x}_2)$ — особая точка (2.13):

$$f_1(\overline{x}_1, \overline{x}_2) = 0, \quad f_2(\overline{x}_1, \overline{x}_2) = 0.$$

Тогда, если f_i ($i = 1, 2$) допускают разложения в ряд Тейлора

$$\begin{aligned} f_i(x_1, x_2) &= f_i(\overline{x}_1, \overline{x}_2) + \\ &+ \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\overline{x}_1, \overline{x}_2) + \frac{\partial f_i}{\partial x_2}(\overline{x}_1, \overline{x}_2) + g_i(x_1, x_2), \end{aligned}$$

где

$$g_i(x_1, x_2) = o(\|\Delta\|^2), \quad \text{при } \|\Delta\| \rightarrow 0, \quad \Delta = \begin{pmatrix} x_1 - \overline{x}_1 \\ x_2 - \overline{x}_2 \end{pmatrix},$$

то система первого приближения (2.9) для (2.13) совпадает с (2.10):

$$\dot{y} = Ay, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - \overline{x_1} \\ x_2 - \overline{x_2} \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

Здесь

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

$$a_{11} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\overline{x_1}, \overline{x_2}), \quad a_{12} = \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\overline{x_1}, \overline{x_2}),$$

$$a_{21} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\overline{x_1}, \overline{x_2}), \quad a_{22} = \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\overline{x_1}, \overline{x_2}).$$

Согласно теоремам 6, 7 в случае $\operatorname{Re} \lambda \neq 0$ устойчивость или неустойчивость гиперболической особой точки $(\overline{x_1}, \overline{x_2})$ системы (2.13) обеспечивается теми же требованиями на λ , которые обеспечивают устойчивость или неустойчивость точки $(0, 0)$ системы первого приближения (2.14). Что касается расположения траекторий, то точное исследование показывает (см., например, [13]), что при наличии узла, седла или фокуса качественный характер расположения траекторий системы (2.13) в достаточно малой окрестности особой точки будет тем же самым, что и для системы (2.14).

Если же особая точка системы первого приближения не является гиперболической, например, в случае центра или вырожденной особой точки, то без дополнительного исследования системы (2.13) о поведении ее траекторий ничего сказать нельзя.

С повышением размерности фазовая картина существенно усложняется, возникают новые явления, для изучения которых развиты многочисленные методы [4, 10].

Пример 14 Исследуем особые точки нелинейной автономной системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_1^2 - x_2^2, \\ \dot{x}_2 &= x_1 x_2 - 1. \end{cases} \quad (2.15)$$

Из системы уравнений

$$\begin{cases} x_1^2 - x_2^2 &= 0, \\ x_1 x_2 - 1 &= 0 \end{cases}$$

найдем особые точки $S_1(1, 1)$ и $S_2(-1, -1)$. Делая перенос начала системы координат в точку S_1 и вычисляя матрицу A :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

получим систему первого приближения

$$\begin{cases} x_1 &= 2x_1 - 2x_2, \\ x_2 &= x_1 + x_2. \end{cases}$$

Собственные числа матрицы A этой системы определяются уравнением

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & -2 \\ 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)(1 - \lambda) + 2 = \lambda^2 - 3\lambda + 4 = 0,$$

и

$$\lambda_{1,2} = (3 \pm \sqrt{7}i)/2.$$

Таким образом, точка S_1 — неустойчивый фокус.

Аналогично, для точки S_2 найдем матрицу A :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно система первого приближения имеет вид

$$\begin{cases} x_1 &= -2x_1 + 2x_2, \\ x_2 &= -x_1 - x_2. \end{cases}$$

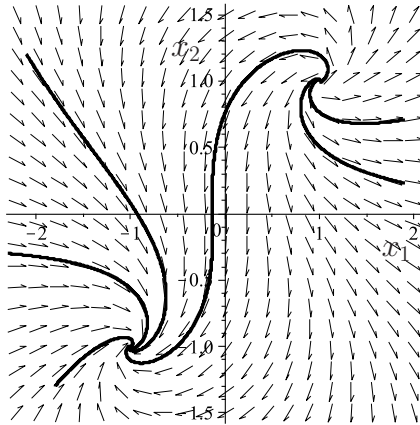


Рис. 2.13: Фазовый портрет системы (2.15)

Собственные числа матрицы A определяются уравнением

$$\begin{vmatrix} -2 - \lambda & 2 \\ -1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = (2 + \lambda)(1 + \lambda) + 2 = \\ = \lambda^2 + 3\lambda + 4 = 0$$

и

$$\lambda_{1,2} = (-3 \pm \sqrt{7}i)/2.$$

Таким образом, точка S_2 — устойчивый фокус, см. рис. 2.13.

Исследование фазового портрета динамической системы является одной из задач качественной теории динамических систем.

2.7 Особые точки многомерных систем

Если на вещественной плоскости невырожденная особая точка бывает одного из следующих четырех типов: седло, узел, фо-

кус, центр, — то в фазовых пространствах размерности 3 и выше существуют более сложные гиперболические особые точки, являющиеся комбинациями седла с узлом или фокусом [10, 20].

Рассмотрим фазовые портреты многомерных систем на примере линейной системы

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in R^3,$$

где A — жорданова матрица с постоянными коэффициентами.

Для невырожденной особой точки $(0, 0, 0)$ собственные числа матрицы A могут быть

- 1) вещественны и одного знака;
- 2) вещественны, причем два из них — одного знака, а третье — другого знака;
- 3) $\lambda_{1,2} = \pm i\beta$, $\lambda_3 \in R$;
- 4) $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, $\lambda_3 \in R$, причем $\alpha\lambda_3 > 0$ и $|\alpha| < |\lambda_3|$;
- 5) $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, $\lambda_3 \in R$, причем $\alpha\lambda_3 > 0$ и $|\alpha| > |\lambda_3|$;
- 6) $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, $\lambda_3 \in R$, причем $\alpha\lambda_3 < 0$.

Рассмотрим каждый из этих случаев. Фазовый портрет трехмерной системы можно восстановить по его проекциям на координатные плоскости x_1x_2 , x_2x_3 и x_1x_3 .

1) Применяя результаты, полученные в разделе 2.5, приходим к выводу, что для первого случая фазовые портреты в координатных плоскостях являются узлами. Очевидно, что траектория системы, проходящая через точку вне координатных плоскостей, является веткой параболы с вершиной в особой точке. Такой фазовый портрет трехмерной системы также называется *узлом*, см. рис. 2.14. Если все собственные числа матрицы A отрицательны, то узел будет устойчивым, а особая точка — асимптотически устойчивой. Если все собственные числа матрицы A положительны, то узел будет неустойчивым.

2) Пусть, для определенности, $\lambda_{1,2} < 0$, $\lambda_3 > 0$. Тогда на координатной плоскости x_1x_2 фазовый портрет является устойчивым узлом, а на плоскостях x_2x_3 и x_1x_3 фазовые портреты являются седлами, причем собственный вектор, направленный вдоль оси Ox_3 задает неустойчивое многообразие: фазовая точка

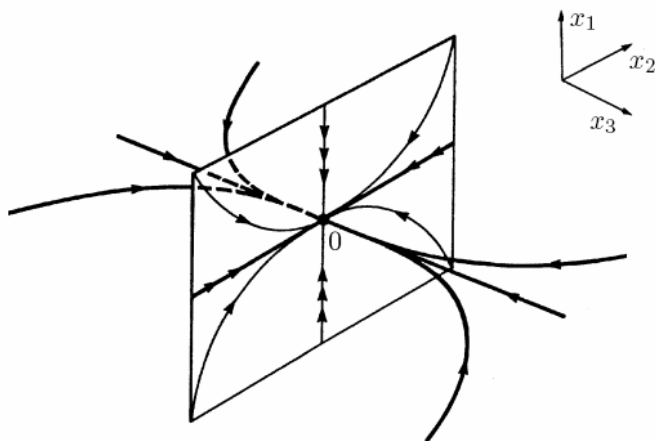


Рис. 2.14: Устойчивый узел в пространстве R^3

системы по оси Ox_3 удаляется от особой точки. Траектории системы, проходящие через точки вне координатных плоскостей, являются гиперболами. Такой фазовый портрет трехмерной системы называется *седло-узлом*, см. рис. 2.15а.

Для случая $\lambda_{1,2} > 0$, $\lambda_3 < 0$ ситуация аналогичная, но фазовый портрет на плоскости x_1x_2 будет неустойчивым узлом, а у седла на плоскостях x_2x_3 и x_1x_3 собственный вектор, направленный вдоль оси Ox_3 будет задавать устойчивое многообразие, см. рис. 2.15б.

Седло-узел всегда неустойчив, так как имеет неустойчивое многообразие (одномерное или двумерное), задаваемые собственными векторами, отвечающими $\lambda > 0$.

3) В этом случае траектории системы на плоскости x_1x_2 представляют собой концентрические окружности. Если $\lambda_3 > 0$, то ось x_3 является неустойчивым многообразием. Тогда любая траектория системы, выпущенная из точки, лежащей вне плоскости x_1x_2 , будет удаляться от нее, причем проекция этой траек-

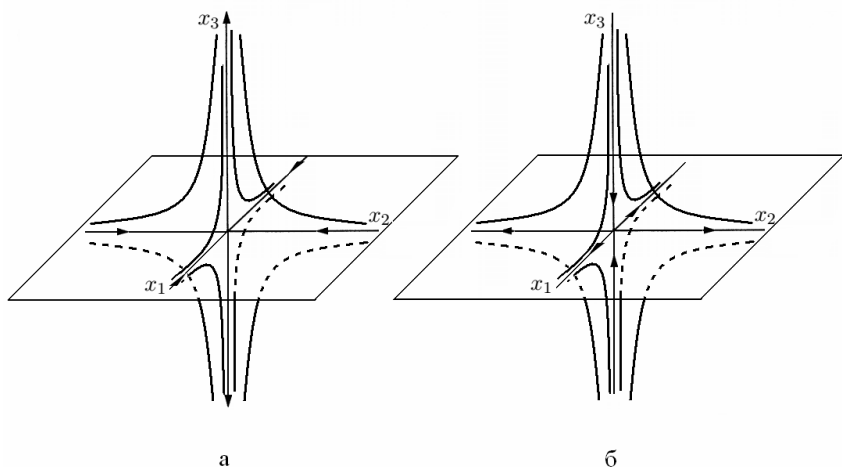


Рис. 2.15: Особая точка типа седло–узел

тории на плоскость x_1x_2 должна совпасть с одной из окружностей, назовем ее γ , фазового портрета на плоскости x_1x_2 . Очевидно, что эта траектория представляет собой спираль, лежащую на поверхности вертикального цилиндра, пересечение которого с плоскостью x_1x_2 есть окружность γ , см. рис. 2.16. Направление движения при $t \rightarrow \infty$ по траекториям вне горизонтальной плоскости совпадает с направлением движения по окружностям на плоскости x_1x_2 .

Если $\lambda_3 < 0$, то ось x_3 является устойчивым многообразием. Тогда любая траектория системы, выпущенная из точки, лежащей вне плоскости x_1x_2 , будет при $t \rightarrow +\infty$ по спирали стремиться к одной из окружностей фазового портрета на плоскости x_1x_2 .

4) Пусть, для определенности, $\alpha < 0$ и $\lambda_3 < 0$. Тогда на координатной плоскости x_1x_2 фазовый портрет является устойчивым фокусом, а собственный вектор, направленный вдоль оси Ox_3 , задает устойчивое многообразие. В этом случае любая тра-

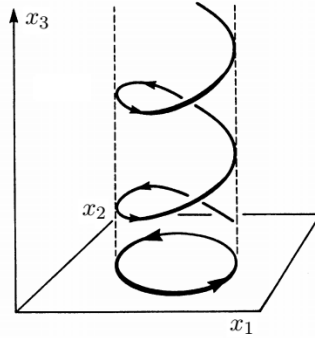


Рис. 2.16: Особая точка типа центр в R^3

ектория системы представляет собой спираль, стремящуюся к особой точке при $t \rightarrow +\infty$. Для определения направления движения, как и в случае центра, достаточно построить вектор скорости в плоскости x_1x_2 .

Спирали, берущие свое начало вне плоскости x_1x_2 , лежат на поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox_3 семейства парабол с вершиной в особой точке. При $|\alpha| < |\lambda_3|$ эти параболы касаются плоскости x_1x_2 , см. рис. 2.17. В этом случае фазовый портрет представляет собой *устойчивый фокус*.

В случае $\alpha > 0$ и $\lambda_3 > 0$ все траектории системы при $t \rightarrow +\infty$ удаляются от особой точки. Это случай неустойчивого фокуса.

5) Отличие данного случая от предыдущего заключается в том, что берущие свое начало вне плоскости x_1x_2 траектории лежат на поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox_3 семейства парабол с вершиной в особой точке и касающихся в этой точке оси Ox_3 , см. рис. 2.18. Такой фазовый портрет называют *узел-фокус* или просто *узел* [20]. В зависимости от знака вещественных частей узел-фокус может быть как устойчивым, так и неустойчивым.

6) Пусть, для определенности, $\alpha < 0$ и $\lambda_3 > 0$. Тогда на

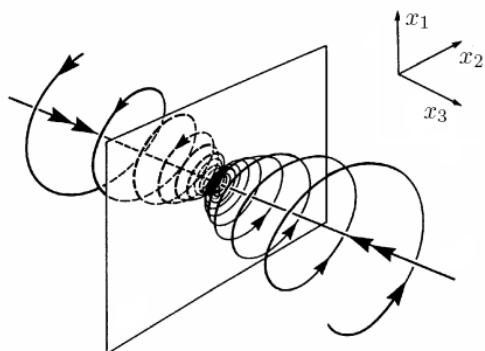


Рис. 2.17: Устойчивый фокус в R^3

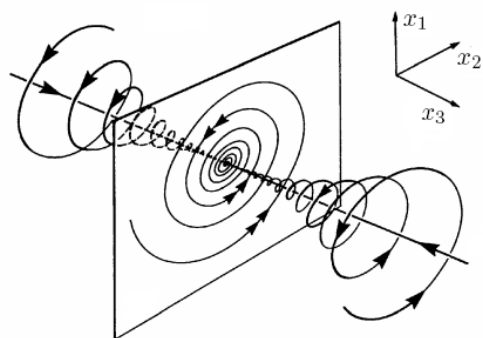


Рис. 2.18: Устойчивый узел-фокус

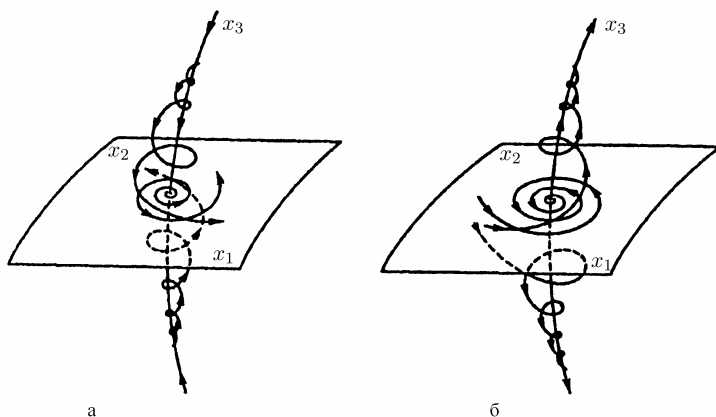


Рис. 2.19: Особая точка типа седло-фокус

координатной плоскости x_1x_2 фазовый портрет является устойчивым фокусом, а собственный вектор, направленный вдоль оси Ox_3 , задает неустойчивое многообразие. В этом случае все траектории системы с начальной точкой вне плоскости x_1x_2 представляют собой спирали, удаляющиеся от особой точки при $t \rightarrow +\infty$ и лежащие на поверхностях, образованных вращением вокруг оси Ox_3 семейства гипербол. Такой фазовый портрет называется *седло-фокусом*. Для нелинейной системы этот случай изображен на рис. 2.19а.

Для случая $\alpha > 0$ и $\lambda_3 < 0$ на координатной плоскости x_1x_2 фазовый портрет является неустойчивым фокусом, а собственный вектор, направленный вдоль оси Ox_3 , задает устойчивое многообразие: траектории системы с начальной точкой $x_3 \neq 0$ представляют собой постепенно раскручивающиеся спирали, стремящиеся при $t \rightarrow +\infty$ к плоскости x_1x_2 . Для нелинейной системы этот случай изображен на рис. 2.19б.

Седло-фокус, как и седло-узел, всегда неустойчив, так как имеет неустойчивое многообразие.

Обобщение рассмотренных фазовых портретов для случая

нежордановой матрицы A и на случай нелинейных трехмерных систем проводится аналогично тому, как это сделано для систем на плоскости.

Определение типа особой точки нелинейных динамических систем в пространствах более высокой размерности сводится к анализу собственных значений матрицы системы первого приближения:

- если все собственные значения матрицы системы первого приближения вещественны и одного знака, то особая точка — узел;
- если все собственные значения матрицы системы первого приближения вещественны и разного знака, то особая точка — седло–узел;
- если все собственные значения матрицы системы первого приближения являются комплексно–сопряженными с вещественной частью одного знака, то особая точка — фокус;
- есть кроме комплексно–сопряженных есть вещественные собственные значения, причем все собственные значения находятся по одну сторону от мнимой оси, и вещественное собственное значение является ближайшим к мнимой оси, то особая точка — узел–фокус;
- есть кроме комплексно–сопряженных есть вещественные собственные значения, причем все собственные значения находятся по одну сторону от мнимой оси, и комплексно–сопряженные собственные значения являются ближайшими к мнимой оси, то особая точка — фокус;
- есть кроме комплексно–сопряженных есть вещественные собственные значения, причем собственные значения находятся по разные стороны от мнимой оси, то особая точка — седло–фокус.

Глава 3

Структурная устойчивость и бифуркации положений равновесия динамических систем

Иногда при медленном и незначительном изменении одного или нескольких параметров в системе могут происходить качественные изменения в динамике ее решений. Изучение таких явлений в динамических системах представляет собой предмет теории бифуркаций [4, 9]. Основы теории бифуркаций заложены А. Пуанкаре и А. М. Ляпуновым в конце XIX века и начале XX века. Термин «бифуркация» происходит от лат. *bifurcus* – «раздвоенный». Толкования термина в различных областях знаний (география, биология, образование) рассматриваются, например, в [7].

В данной главе вводятся основные понятия теории бифур-

каций и рассматриваются основные бифуркации положений равновесия нелинейных динамических систем.

3.1 Понятие структурной устойчивости динамической системы

Рассмотрим автономную динамическую систему:

$$\dot{x} = f(x, \mu), \quad (3.1)$$

где $x \in R^n$ — неизвестная векторная функция; f — достаточно гладкая n -мерная векторная функция; μ — вектор параметров. Множество значений параметров μ называют *параметрическим пространством* динамической системы (3.1).

Определение 20 Два фазовых портрета являются качественно (топологически) эквивалентными, если существует взаимно однозначное отображение одного фазового портрета на другой, которое переводит траектории первого фазового портрета в траектории второго фазового портрета с сохранением направления их обхода.

Определение 21 Система (3.1) является структурно устойчивой при изменении параметра μ в некотором диапазоне, если ее фазовые портреты при этом остаются качественно эквивалентными.

Необходимые и достаточные условия структурной устойчивости двумерных автономных систем дифференциальных уравнений дает следующая теорема [6, 10].

Теорема 8 Динамическая система (3.1) структурно устойчива (глобально структурно устойчива) на двумерном компактном многообразии M тогда и только тогда, когда:

- 1) число особых точек конечно и все они являются гиперболическими;
- 2) число предельных циклов конечно и все они невырождены, т.е. нет предельных циклов с двумя нулевыми характеристическими показателями;
- 3) в M нет сепаратрис, идущих из седла в седло.

Если же рассматривать фазовые портреты системы (3.1) в окрестности негиперболических точек покоя, то при изменении значения одного параметра (или нескольких параметров) динамическая система может потерять структурную устойчивость, что приводит к качественному изменению фазового портрета. Примерами такого качественного изменения может быть изменение количества положений равновесия, смена устойчивости положения равновесия, смена типа особой точки и др.

Если при $\mu = \mu^*$ произошло качественное изменение фазового портрета, то говорят, что произошла *бифуркация*. Значение параметра $\mu = \mu^*$ называют *бифуркационным* или *точкой бифуркации*. В системе из примеров 12 и 13 бифуркация происходит при нулевом значении параметра α .

Под параметрическим портретом уравнения (3.1) понимают совокупность областей параметрического пространства, которые соответствуют всем возможным фазовым портретам. Параметрический портрет вместе с характерными для каждого множества параметров фазовыми портретами составляют *бифуркационную диаграмму*. Примеры бифуркационных диаграмм будут рассмотрены ниже.

3.2 Классификация бифуркаций

Бифуркации допускают различные классификации. Во-первых, это может быть классификация по минимальной величине размерности системы, для которой возможна данная бифуркация. Во-вторых, это может быть классификация по минимальному

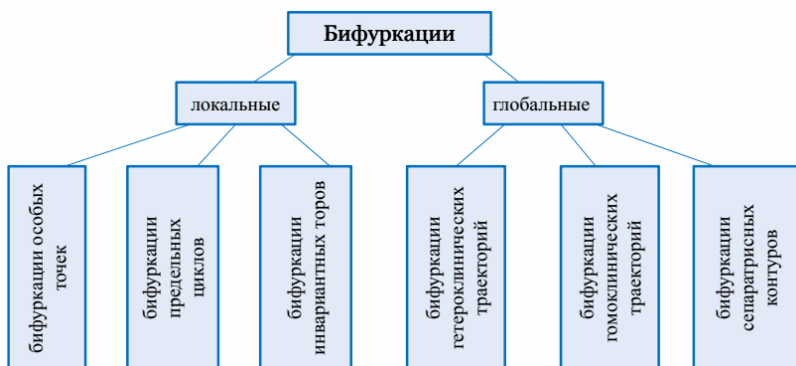


Рис. 3.1: Классификация бифуркаций

количеству параметров, необходимых для бифуркации данного типа: *однопараметрические* бифуркации, *двухпараметрические* бифуркации и т.д. В-третьих, по сценарию протекания бифуркации можно поделить на *мягкие* (*суперкритические*) и *жесткие* (*субкритические*), речь о них пойдет в следующем разделе.

В зависимости от того, затрагивает качественная перестройка фазового портрета системы все фазовое пространство или только отдельные его области, бифуркации можно поделить на *локальные* и *глобальные*. К локальным относятся бифуркации особых точек, предельных циклов и инвариантных торов, см. рис. 3.1. К глобальным относятся бифуркации гомоклинических и гетероклинических траекторий и сепаратрисных контуров. Кроме того, в системах размерности выше двух возможны нелокальные бифуркации различных нерегулярных аттракторов [4, 9, 10, 20].

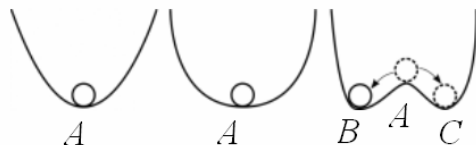


Рис. 3.2: Иллюстрация мягкой бифуркации

3.3 Понятие мягкой (суперкритической) и жесткой (субкритической) бифуркаций

Бифуркации условно можно разделить на мягкие и жесткие, что наглядно демонстрируется следующим примером. На рис. 3.2 и рис. 3.3 изображен перестраиваемый профиль с шариком. В результате изменения какого-либо параметра, исходный профиль изменяет свою конфигурацию таким образом, что устойчивое равновесное состояние A шарика исчезает, становится неустойчивым. При этом «рождаются» два новых устойчивых состояния равновесия — B и C , в один из которых и сваливается шарик. Вновь появившиеся состояния равновесия измененного профиля располагаются в непосредственной близости от начального состояния равновесия, которое потеряло устойчивость. Бифуркации такого типа называют *мягкими* или *суперкритическими*. Новый режим функционирования (B или C) как бы постепенно появляется из режима A , потерявшего устойчивость, и сосуществует в непосредственной близости с ним.

Характер изменения профиля при вариации бифуркационного параметра, изображенного на рис. 3.3, иной. Для значения параметра меньше критического шарик находится в устойчивом равновесном состоянии A . Одновременно существует еще одно потенциальное неустойчивое равновесное состояние B . При изменении параметра устойчивое и неустойчивое состояния постепенно сближаются на фоне изменения профиля. При бифуркационном значении параметра устойчивое (A) и неустойчивое (B)

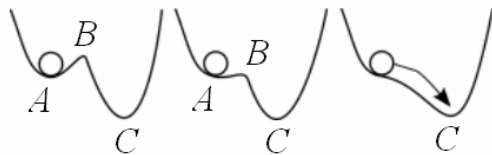


Рис. 3.3: Иллюстрация мягкой бифуркации

состояния сливаются в одно. Далее они оба исчезают, и система «скачком» выбирает новый режим (C), который существенно отличается от предыдущего и не находится в непосредственной близости от исходного режима. Бифуркации такого типа относятся к *жестким (субкритическим)*.

Жесткие бифуркации часто называют *кризисами аттракторов*. Мягкие бифуркации приводят к топологическим изменениям самих аттракторов, но не приводят к их исчезновению. Жесткие бифуркации приводят к исчезновению аттракторов [10]. Именно жесткие бифуркации в первую очередь являются предметом исследования теории катастроф [3].

3.4 Бифуркации особых точек

Бифуркации, связанные с потерей устойчивости особой точки системы (3.1), могут произойти при переходе параметра через значение, при котором особая точка является негиперболической. Рассмотрим два основных, наиболее часто встречающихся в приложениях случая: одно собственное значение матрицы A линеаризованной в окрестности особой точки системы равно нулю или два комплексно сопряженных собственных значения матрицы A лежат на мнимой оси, а все остальные ее собственные значения имеют отрицательные вещественные части. Можно показать [11], что бифуркации, приводящие к потере устойчивости особой точки (3.1), определяются исключительно теми

координатами линеаризованной в окрестности особой точки системы, которые соответствуют собственным значениям матрицы A , лежащим на мнимой оси. Систему уравнений, записанную в этих координатах, обычно называют *нормальной формой* системы (3.1) в окрестности особой точки.

Наиболее распространены следующие четыре типа бифуркаций в окрестности особой точки: транскритическая бифуркация, седло–узловая бифуркация, бифуркация типа вилки и бифуркация рождения или гибели предельного цикла.

3.4.1 Транскритическая бифуркация

Транскритическую бифуркацию еще называют *бифуркацией обмена устойчивостью*. Бифуркация имеет нормальную форму

$$\dot{x} = \mu x + x^2 \quad (3.2)$$

или

$$\dot{x} = \mu x - x^2.$$

Исследуем бифуркацию динамических систем с нормальной формой (3.2).

Рассмотрим случай скалярной фазовой переменной, то есть $x \in R$. Нетрудно видеть, что существуют два положения равновесия: $x = 0$ и $x = -\mu$. Исследование на устойчивость по первому приближению показывает, что при $\mu < 0$ неподвижное положение равновесия $x = 0$ является асимптотически устойчивым, а $x = -\mu$ — неустойчивым. По мере увеличения значения параметра μ неустойчивое положение равновесия приближается к устойчивому и при $\mu = 0$ происходит их слияние и обмен устойчивостью: при $\mu > 0$ подвижное положение равновесия становится асимптотически устойчивым, а нулевое положение равновесия — неустойчивым, см. рис. 3.4. Следует отметить, что при $\mu = 0$ кратная особая точка является *односторонне устойчивой*: траектории с начальной точкой меньше нуля асимптотически стремятся к ней при $t \rightarrow \infty$, в то время как траектории с начальной точкой больше нуля удаляются от нее.

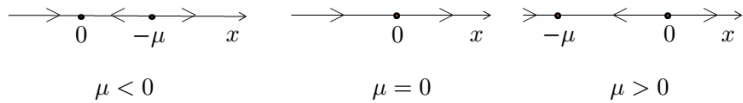


Рис. 3.4: Фазовые портреты уравнения (3.2)

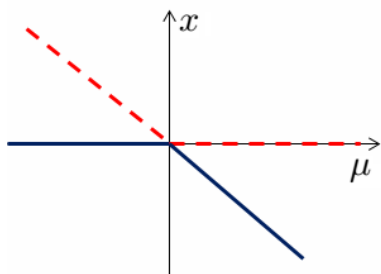


Рис. 3.5: Бифуркационная диаграмма транскритическую бифуркации с нормальной формой (3.2)

Таким образом, точкой бифуркации является значение $\mu = 0$. Бифуркация является мягкой, что легко установить по ее бифуркационной диаграмме, на которой изображена зависимость координаты особой точки от параметра μ (рис. 3.5). Пунктирная линия отвечает неустойчивым положениям равновесия, сплошная — асимптотически устойчивым.

Чтобы получить аналог транскритической бифуркации для систем с фазовым пространством большей размерности, необходимо к рассмотренному вещественному собственному значению матрицы линеаризации, отвечающему за бифуркацию, добавить соответствующее количество собственных значений с отрицательными вещественными частями. Так аналогом транскритической бифуркации для двумерных систем дифференциальных уравнений является бифуркация, при которой особая точка $O(0, 0)$ из устойчивого узла при возрастании μ становится седлом, а особая точка $P(-\mu, 0)$ из седла становится устойчивым узлом, см. рис. 3.6. Нормальная форма бифуркации в этом случае имеет вид

$$\dot{x}_1 = \mu x_1 + x_1^2, \quad \dot{x}_2 = -x_2. \quad (3.3)$$

Бифуркационная диаграмма для системы (3.3) та же, что и для (3.2), но вертикальная ось — абсцисса x_1 особых точек, так как при изменении параметра μ из двух координат особых точек меняется только x_1 .

В случае размерности пространства больше двух в результате рассмотренной бифуркации устойчивый узел или устойчивый фокус становятся седло–узлом или седло–фокусом, а седло–узел или седло–фокус — устойчивыми узлом или фокусом.

Задача 1 *Исследовать бифуркацию с нормальной формой*

$$\dot{x}_1 = \mu x_1 + x_1^2, \quad \dot{x}_2 = -x_2,$$

построить фазовые портреты, бифуркационную диаграмму и определить, является бифуркация мягкой или жесткой.

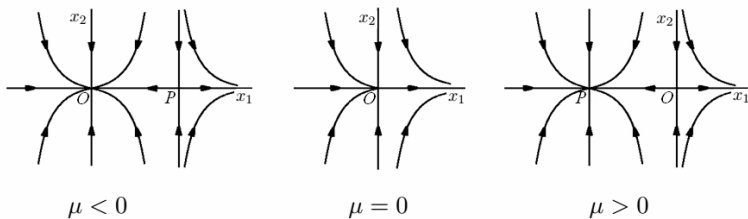


Рис. 3.6: Фазовые портреты динамической системы (3.3)

3.4.2 Седло–узловая бифуркация

Нормальная форма седло–узловой бифуркации имеет вид

$$\dot{x} = \mu + x^2. \quad (3.4)$$

Как и ранее, рассмотрим сначала случай скалярной фазовой переменной.

При $\mu < 0$ существуют две особые точки (3.4) с координатами $x = \pm\sqrt{|\mu|}$. Исследование на устойчивость по первому приближению показывает, что положение равновесия $x = -\sqrt{|\mu|}$ является асимптотически устойчивым, а $x = \sqrt{|\mu|}$ — неустойчивым. По мере увеличения значения параметра μ оба положения равновесия приближаются друг к другу по параболе $\mu + x^2 = 0$ и при $\mu = 0$ сливаются, см. рис. 3.7. При $\mu > 0$ уравнение (3.4) не имеет особых точек, и, следовательно, аттрактор исчезает. Таким образом, произошла бифуркация, причем она является жесткой (кризисом), см. рис. 3.8.

Для двумерных систем дифференциальных уравнений нормальная форма этой бифуркации является

$$\dot{x}_1 = \mu + x_1^2, \quad \dot{x}_2 = -x_2, \quad (3.5)$$

у которой при $\mu < 0$ есть две особые точки — устойчивый узел $Q(-\sqrt{|\mu|}, 0)$ и седло $P(\sqrt{|\mu|}, 0)$. Постепенно сближаясь при увеличении значения μ , эти точки сливаются при $\mu = 0$ в выро-

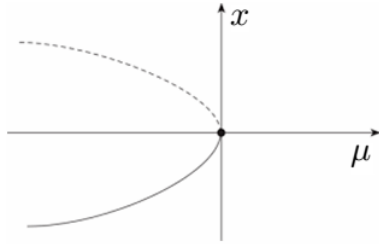


Рис. 3.7: Бифуркационная диаграмма седло–узловой бифуркации с нормальной формой (3.4)

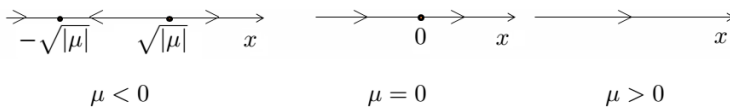


Рис. 3.8: Фазовые портреты уравнения (3.4)

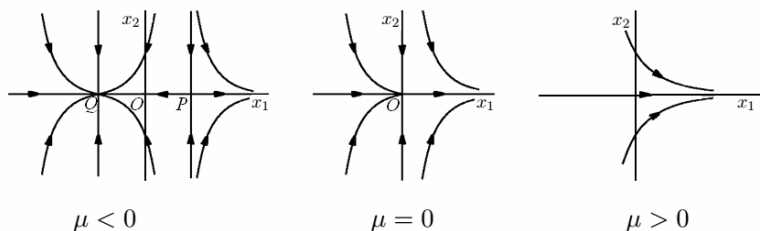


Рис. 3.9: Фазовые портреты динамической системы (3.5)

денную особую точку $O(0,0)$ — вырожденный седло–узел: траектории с начальной точкой в левой полуплоскости являются ветвями парабол и асимптотически стремятся к особой точке при $t \rightarrow \infty$, в то время как траектории с начальной точкой в правой полуплоскости являются гиперболами и удаляются от особой точки при $t \rightarrow \infty$. При $\mu > 0$ особых точек нет (рис. 3.9).

В случае размерности пространства больше двух в результате данной бифуркации устойчивый узел и невырожденный седло–узел сливаются при $\mu = 0$ в вырожденную особую точку, исчезающую при $\mu > 0$.

Существует еще обратная седло–узловая бифуркация с нормальной формой

$$\dot{x} = \mu - x^2,$$

при которой происходит одновременное рождение устойчивой и неустойчивой особых точек.

Задача 2 Исследовать бифуркацию с нормальной формой

$$\dot{x}_1 = \mu - x_1^2, \quad \dot{x}_2 = -x_2,$$

построить фазовые портреты, бифуркационную диаграмму и определить, является бифуркация мягкой или жесткой.



Рис. 3.10: Фазовые портреты уравнения (3.6)

3.4.3 Бифуркация типа вилки

Существуют два вида этой бифуркации: суперкритическая, имеющая нормальную форму

$$\dot{x} = \mu x - x^3, \quad (3.6)$$

и субкритическая, имеющая нормальную форму

$$\dot{x} = \mu x + x^3, \quad (3.7)$$

Рассмотрим случай скалярной фазовой переменной для (3.6). При любых значениях параметра μ существует нулевое положение равновесия (3.6), которое является асимптотически устойчивым при отрицательных значениях параметра и неустойчивым — при $\mu > 0$. Кроме $x = 0$ при $\mu > 0$ имеются еще два положения равновесия (3.6) с координатами $x = \pm\sqrt{|\mu|}$. Исследование на устойчивость по первому приближению показывает, что эти положения равновесия являются асимптотически устойчивыми (рис. 3.10).

Таким образом, при прохождении значения параметра μ через точку бифуркации $\mu = 0$ устойчивое положение равновесия, становясь неустойчивым, порождает два других устойчивых положения равновесия (рис. 3.11). Гибель аттрактора не происходит, происходит его модификация (раздвоение), поэтому бифуркация является мягкой (суперкритической).

Аналогом этой бифуркации для двумерных динамических систем является бифуркация с нормальной формой

$$\dot{x}_1 = \mu x_1 - x_1^3, \quad \dot{x}_2 = -x_2. \quad (3.8)$$

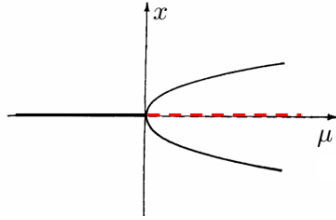


Рис. 3.11: Бифуркационная диаграмма бифуркации типа вилки с нормальной формой (3.6)

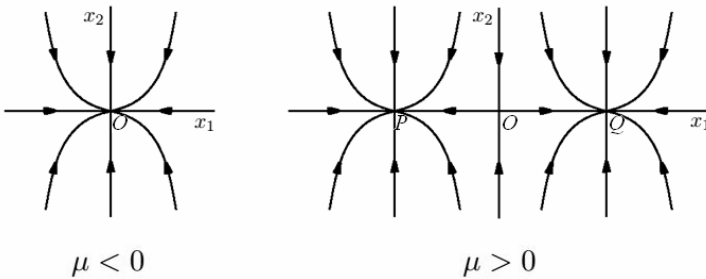


Рис. 3.12: Фазовые портреты динамической системы (3.8)

Система (3.8) при $\mu < 0$ имеет одну особую точку O — устойчивый узел с координатами $(0,0)$, которая при $\mu = 0$ теряет устойчивость и становится седлом, одновременно порождая симметрично расположенные в ее окрестности две новые особые точки P и Q — устойчивые узлы с координатами $(-\sqrt{\mu}, 0)$ и $(\sqrt{\mu}, 0)$, соответственно (рис. 3.12).

В случае размерности пространства больше двух в результате рассмотренной бифуркации устойчивый узел становится седло-узлом, а родившиеся в его окрестности устойчивые особые точки могут быть не только узлами, но и устойчивыми фокусами, так как наряду с одним отрицательным вещественным

собственным значением матрицы линеаризации могут существовать еще два комплексно сопряженных собственных значения с отрицательными вещественными частями.

Задача 3 Исследовать бифуркации с нормальной формой (3.7) и

$$\dot{x}_1 = \mu x_1 + x_1^3, \quad \dot{x}_2 = -x_2,$$

построить фазовые портреты и бифуркационную диаграмму.

В случае субкритической бифуркации в многомерных пространствах устойчивое положение равновесия (узел) становится неустойчивым (седлом, седло–узлом, седло–фокусом), а вместе с этим исчезают два других неустойчивых положения равновесия (седла, седло–узла, седло–фокуса). Так как происходит гибель аттрактора, то бифуркация является кризисом.

3.4.4 Бифуркация рождения (или гибели) предельного цикла

Рассмотрим еще один из основных типов бифуркации фазовых портретов в окрестности положений равновесия — бифуркацию рождения (или гибели) предельного цикла, которая так же известна как *бифуркация Андронова–Хопфа* или *Пуанкаре–Андронова–Хопфа*.

Рассмотренные выше три бифуркации соответствуют случаю, когда при возрастании значений параметра ровно одно вещественное собственное значение матрицы линеаризации переходит при $\mu = 0$ слева направо через мнимую ось плоскости комплексного переменного вдоль вещественной оси, а все остальные собственные значения матрицы имеют отрицательные вещественные части, то есть остаются в левой полуплоскости. Бифуркация Андронова–Хопфа соответствует случаю, когда при возрастании значений параметра μ два комплексно сопряженных собственных значения матрицы линеаризации переходят

при $\mu = 0$ слева направо через мнимую ось плоскости комплексного переменного, а все остальные собственные значения имеют при этом отрицательные вещественные части [1, 11].

Бифуркация рождения предельного цикла имеет нормальную форму:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \mu x_1 - x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2), \\ \dot{x}_2 &= x_1 + \mu x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2),\end{aligned}\tag{3.9}$$

что эквивалентно более компактной записи

$$\dot{y} = (\mu + i)y - y|y|^2$$

относительно комплексной переменной $y = x_1 + ix_2$.

Динамическая система (3.9) имеет положение равновесия в точке $(0, 0)$ при любых значения параметра μ . Исследуем ее на устойчивость по первому приближению. Матрица линеаризованной в точке $(0, 0)$ системы

$$\begin{pmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix}$$

имеет комплексные собственные значения

$$\lambda_{1,2} = \mu \pm i.$$

Значит, при $\mu < 0$ особая точка $(0, 0)$ представляет собой устойчивый фокус, а при $\mu > 0$ — неустойчивый фокус. При $\mu = 0$ собственные значения располагаются на мнимой оси, и об устойчивости положения равновесия нельзя судить по линеаризованной системе.

Для более детального исследования динамической системы (3.9) перепишем ее в полярных координатах, полагая

$$x_1 = r \cos \varphi, \quad x_2 = r \sin \varphi.\tag{3.10}$$

Продифференцируем теперь левые и правые части соотношений (3.10) по t , считая, что переменные r и φ — это функции, зависящие от времени. Тогда получим

$$\dot{x}_1 = \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi,$$

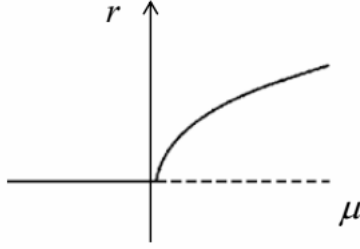


Рис. 3.13: Бифуркационная диаграмма для (3.11)

$$\dot{x}_2 = \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi.$$

Подставив эти выражения в систему (3.9), после преобразований получим

$$\dot{r} = r(\mu - r^2), \quad (3.11)$$

$$\dot{\varphi} = 1. \quad (3.12)$$

Из уравнения (3.12) ясно, что переменная φ играет роль времени, следовательно, существенная информация о динамике решений системы (3.11), (3.12) отражается лишь в уравнении (3.11). Положения равновесия (3.11) определяются уравнением

$$r(\mu - r^2) = 0,$$

где $r \geq 0$. Отсюда находим два положения равновесия: $r = 0$, которое существует при любых значениях параметра μ и является асимптотически устойчивым при $\mu < 0$ и неустойчивым при $\mu > 0$, и $r = \sqrt{\mu}$, которое существует лишь при $\mu > 0$ и является асимптотически устойчивым (рис. 3.13).

Из (3.10) следует, что положение равновесия $r = 0$ уравнения (3.11) отвечает положению равновесия $(0, 0)$ системы (3.9), а положение равновесия $r = \sqrt{\mu}$ уравнения (3.11) соответствует устойчивому предельному циклу системы (3.9), который имеет вид окружности радиуса $\sqrt{\mu}$. Таким образом, в результате такой бифуркации происходит смена устойчивости особой точки $(0, 0)$

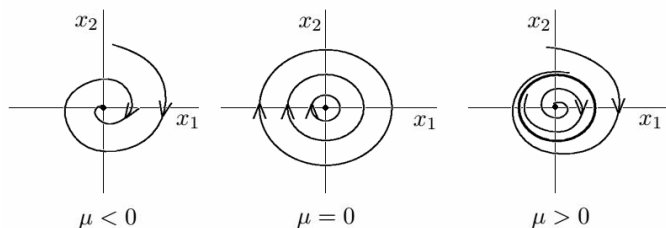


Рис. 3.14: Бифуркация рождения предельного цикла

системы (3.9), сопровождающаяся рождением из нее устойчивого предельного цикла (рис. 3.14). Это бифуркация с мягким сценарием, бифуркационная диаграмма представлена на рисунке 3.15.

Бифуркация Андронова–Хопфа устанавливает связь между потерей устойчивости стационаром и возникновением периодических решений в нелинейных динамических системах, амплитуда которых пропорциональна $\sqrt{\mu}$ (рис. 3.13), а период $\approx 2\pi/\varphi$ при $\mu \rightarrow 0$. Эта бифуркация играет важную роль в теории нелинейных динамических систем [1, 10]. В реальных системах бифуркация Андронова–Хопфа возникает довольно часто. В экспериментах при значениях параметра, близких к критическому, возникающее периодическое решение мало отличается от стационарного решения, поскольку его амплитуда очень мала и может теряться в экспериментальном шуме [18].

Заметим, что только условия на собственные значения матрицы линеаризации не обеспечивают наличия в системе суперкритической бифуркации Андронова–Хопфа. Достаточные условия возникновения бифуркации Андронова–Хопфа в однопараметрической динамической системе дифференциальных уравнений даются следующей теоремой, которая принадлежит в основном А.А. Андронову (1930) и Э. Хопфу (1942) и была намечена в работе А. Пуанкаре (1982) [11].

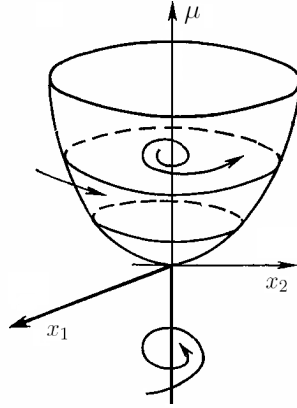


Рис. 3.15: Бифуркационная диаграмма, демонстрирующая рождение устойчивого предельного цикла в (3.9)

Теорема 9 Пусть X_μ — векторное поле класса C^k ($k \geq 4$) в пространстве R^2 и такое, что $X_\mu(0) = 0$ для всех μ , а поле $X = (X_\mu, 0)$ также класса C^k . Предположим, что $dX_\mu(0, 0)$ имеет два различных комплексно-сопряженных собственных значения $\lambda(\mu)$ и $\bar{\lambda}(\mu)$, причем $\operatorname{Re} \lambda(0) = 0$, $\operatorname{Re} \lambda(\mu) > 0$ при $\mu > 0$. Пусть также

$$\left. \frac{d(\operatorname{Re} \lambda(\mu))}{d\mu} \right|_{\mu=0} > 0.$$

Тогда

А) Существует C^{k-2} функция $\mu : (-\varepsilon, \varepsilon) \in R$, такая, что при $x_1 \neq 0$ точка $(x_1, 0, \mu(x_1))$ лежит на замкнутой орбите поля X периода $\approx 2\pi/|\lambda(0)|$, причем $\mu(0) = 0$.

В) Существует окрестность U точки $(0, 0, 0)$ в R^3 , такая, что любая замкнутая орбита, лежащая в U — это одна из орбит вышеуказанного семейства.

Кроме того, если точка 0 — слабый аттрактор поля X_0 , то

С) $\mu(x_1) > 0$ для всех $x_1 \neq 0$, замкнутые орбиты устойчивы, а радиус орбиты (при изменении μ) растет как $\sqrt{\mu}$.

Субкритическая (жесткая) бифуркация Андронова–Хопфа имеет нормальную форму

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \mu x_1 - x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2), \\ \dot{x}_2 &= x_1 + \mu x_2 + x_2(x_1^2 + x_2^2).\end{aligned}\tag{3.13}$$

Рассуждая аналогично, с помощью замены (3.10), исследование динамики решений системы (3.13) сводится к исследованию положений равновесия уравнения

$$\dot{r} = r(\mu + r^2).\tag{3.14}$$

Анализ особых точек (3.10) дает следующие результаты. При $\mu < 0$ система (3.13) имеет устойчивый фокус с координатами $(0, 0)$ и неустойчивый предельный цикл

$$x_1 = \sqrt{-\mu} \cos \varphi, \quad x_2 = \sqrt{-\mu} \sin \varphi.$$

При $\mu > 0$ предельный цикл втягивается в особую точку $(0, 0)$, которое при этом становится неустойчивым фокусом. При этом происходит исчезновение аттрактора, и, следовательно, бифуркация является жесткой (кризисом) (рис. 3.16, 3.17).

Задача 4 *Исследовать бифуркации с нормальной формой (3.13), построить бифуркационную диаграмму для (3.14). Сравнить полученные результаты с выводами, изложенными выше для субкритической бифуркации Андронова–Хопфа.*

Мягкая бифуркация Андронова–Хопфа имеет место и в общем случае любой размерности пространства $n > 2$ и даже в бесконечномерном случае [10]. В случае жесткой бифуркации следует говорить об исчезновении седлового предельного цикла.

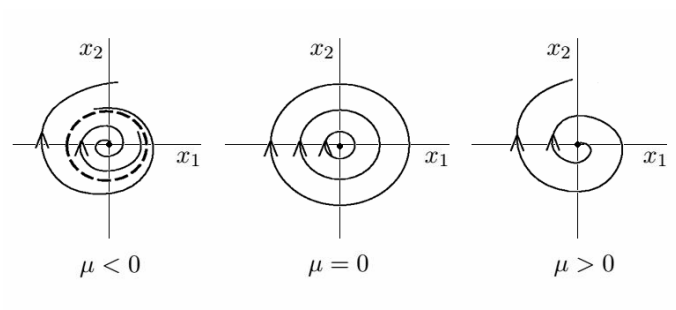


Рис. 3.16: Бифуркация гибели предельного цикла

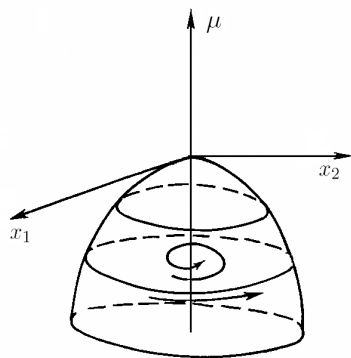


Рис. 3.17: Бифуркационная диаграмма, демонстрирующая гибель устойчивого предельного цикла в (3.13)

Литература

- [1] Андронов, А.А. Теория колебаний / Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. – 2-е изд., перераб. и испр. - М.: Наука, 1981. - 918 с.
- [2] Анищенко, В. С. Знакомство с нелинейной динамикой / В. С. Анищенко. – 3-е изд., перераб. и доп. — Москва : URSS, 2018. — 224 с.
- [3] Арнольд, В.И. Теория катастроф / В.И. Арнольд. - М.: Изд-во МГУ, 1983. - 127 с.
- [4] Арнольд, В.И. Теория бифуркаций / В. И. Арнольд, В. С. Афраимович, Ю. С. Ильяшенко, Л. П. Шильников// Динамические системы – 5, Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления, 5, ВИНТИ, М., 1986, 5–218
- [5] Базыкин А. Д. Нелинейная динамика взаимодействующих популяций. Москва-Ижевск.: Институт компьютерных исследований, 2003. 368 с.
- [6] Баутин, Н.Н. Методы и приёмы качественного исследования динамических систем на плоскости / Н.Н. Баутин, Е.А. Леонтович. - М.: Наука, 1976. - 488 с.
- [7] Безручко Б. П. Путь в синергетику. Экскурс в десяти лекциях. – М.: КомКнига, 2005. 304 с.

- [8] Демидович, Б. П. Лекции по математической теории устойчивости: учебное пособие / Б. П. Демидович. — СПб: Лань, 2008. — 480 с. — ISBN 978-5-8114-0891-7.
- [9] Йосс, Дж. Элементарная теория устойчивости и бифуркаций / Дж. Йосс, Д.Л. Джозеф. - М.: Мир, 1983. - 300 с.
- [10] Магницкий Н. А., Сидоров С. В. Новые методы хаотической динамики. М.: УРСС, 2004.
- [11] Марсден, Дж. Бифуркация рождения цикла и ее приложения / Дж. Марсден, М. Мак-Кракен. - М.: Мир, 1980.- 368 с.
- [12] Петровский, И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений: учебное пособие / И. Г. Петровский. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. — 206 с. — ISBN 978-5-9221-1144-7.
- [13] Понтрягин, Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения: учебник для вузов / Л. С. Понтрягин. — М.: URSS, 2018. — 208 с. — ISBN 978-5-354-01586-3.
- [14] Степанов, В. В. Курс дифференциальных уравнений: учебник для ун-тов / В. В. Степанов. — Изд. 11, испр., обновл. — М.: URSS, 2016.— 512 с.— ISBN 978-5-382-01622-1.
- [15] Соболев, В. А. Дифференциальные и разностные уравнения: учеб. пособие / В.А. Соболев, Е.А. Щепакينا. — Самара: Изд-во Самарского университета, 2021. — 222 с.
- [16] Тихонов, А. Н. Дифференциальные уравнения: учебник для вузов / А. Н. Тихонов, А. В. Васильева, А. Г. Свешников. М.: Физматлит, 2002. — 256 с. — ISBN 978-5-9221-0277-3.
- [17] Филиппов А. Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений: учебник для вузов / А. Ф. Филиппов. — М.: URSS, 2015. — 240 с. — ISBN 978-5-9710-2029-5.

- [18] М. Холодниок, Методы анализа нелинейных динамических моделей / М. Холодниок, А. Клич, М. Кубичек, М. Марек; Пер. с чеш. И. Е. Зино; Под ред. [и с предисл.] Э. Э. Шноля. — Москва : Мир, 1991. — 365 с. : ил. : 22 см.; ISBN 5-03-001849-2 (В пер.).
- [19] Чуличков А. И. Математические модели нелинейной динамики. М.: Физматлит, 2003.
- [20] Шильников, Л.П. Методы качественной теории в нелинейной динамике. Ч. 1 / Л.П. Шильников, А.Л. Шильников, Д.В. Тураев, Л. Чуа - Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. - 416 с.