

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»  
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

В. А. АЛЯКИН, Р. Ф. УЗБЕКОВ

# МАТЕМАТИКА ДЛЯ ХИМИКОВ. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Рекомендовано редакционно-издательским советом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева» в качестве практикума для обучающихся по основной образовательной программе высшего образования по специальности 04.05.01 Фундаментальная и прикладная химия

© Самарский университет, 2026

ISBN 978-5-7883-2287-2

САМАРА  
Издательство Самарского университета  
2026

УДК 517.1(075)

ББК 22.161я7

А604

Рецензенты: канд. физ.-мат. наук, доц. М. Е. Ф е д и н а,  
канд. физ.-мат. наук, доц. Е. Н. О г о р о д н и к о в

*Алякин, Владимир Алексеевич*

А604 **Математика для химиков. Математический анализ:** практикум /  
*В. А. Алякин, Р. Ф. Узбеков*; Министерство науки и высшего образования  
Российской Федерации, Самарский университет. – Самара: Издательство  
Самарского университета, 2026. – 1 CD-ROM (1,5 Мб). – Загл. с титул.  
экрана. – Текст: электронный.

**ISBN 978-5-7883-2287-2**

Состоит из краткой теории и упражнений по курсу «Математика». На занятиях по этой дисциплине обучающиеся актуализируют знания из школьной математики и основным разделам математического анализа: теории множеств, теории пределов, дифференциального и интегрального исчисления, числовым рядам. Каждая глава соответствует одному-двум занятиям. В начале каждой главы имеется теоретическая часть и большое количество примеров с решениями. Практическая часть содержит задания разного уровня сложности, полностью соответствующие учебной программе данной дисциплины.

Предназначен для обучающихся первого курса специальности 04.05.01  
Фундаментальная и прикладная химия.

Подготовлен на кафедре функционального анализа и теории функций.

УДК 517.1(075)

ББК 22.161я7

### **Минимальные системные требования:**

PC, процессор Pentium, 160 МГц;

Microsoft Windows XP и выше; мышь;

дисковод CD-ROM; Adobe Acrobat Reader

© Самарский университет, 2026

Редакционно-издательская обработка  
издательства Самарского университета

Подписано для тиражирования 17.04.2026.

Объем издания 1,5 Мб.

Тираж 11 дисков.

Количество носителей 1 диск.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»  
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)  
443086, Самара, Московское шоссе, 34.

---

Издательство Самарского университета.  
443086, Самара, Московское шоссе, 34.

# Оглавление

|                                             |    |
|---------------------------------------------|----|
| Введение .....                              | 5  |
| Входное тестирование .....                  | 6  |
| 1. Теория множеств. Предел функции.         |    |
| Производная функции .....                   | 21 |
| 2. Интегрирование функции одной переменной. |    |
| Числовые ряды .....                         | 49 |
| Литература .....                            | 86 |

# Введение

В корпусе учебной литературы для обучающихся-химиков имеется пробел - существующие практикумы и задачки по математическому анализу не в полной мере отвечают рабочей программе дисциплины "Математика" и являются сложными. Данный практикум, призванный восполнить этот пробел, предназначен для проведения практических занятий по дисциплине "Математика" для обучающихся 1 курса специальности "Фундаментальная и прикладная химия".

Практикум состоит из двух глав. Первая глава посвящена теории множеств, пределам функции и дифференциальному исчислению, вторая - интегралам от функции одной переменной и числовым рядам. Таким образом, практикум охватывает все основные темы математического анализа в рамках данной дисциплины. В каждой главе выделяется две части. Теоретическая часть содержит необходимые определения, формулировки основных теорем и большое количество примеров с решениями. Практическая часть содержит задания разного уровня сложности, полностью соответствующие рабочей программе дисциплины "Математика".

Кроме того, практикум содержит 4 теста для входного тестирования. Тесты предназначены для быстрой оценки начального уровня знаний обучающихся и состоят из 20 задач по элементарной математике.

Практикум может быть использован как для самостоятельной работы обучающихся, так и для текущего контроля при освоении конкретной темы.

Практикум предназначен для обучающихся первого курса специальности 04.05.01 Фундаментальная и прикладная химия.

Подготовлен на кафедре функционального анализа и теории функций.

## Входное тестирование.

Данный тест определяет уровень остаточных знаний обучающихся и содержит 20 несложных заданий по базовой математике. Расчётное время выполнения теста 45 минут. Разберём решения нескольких задач, традиционно вызывающих наибольшие затруднения у обучающихся.

**Пример 1.** После увеличения длины радиуса круга на  $p\%$  площадь круга стала больше на  $96\%$ . Найдите  $p$ . Выберите правильный вариант ответа.

а. 20 б. 30 в. 40 г. 45

*Решение.* Пусть  $R$  - радиус круга до его увеличения. После увеличения на  $p\%$  радиус стал равен  $(1 + \frac{p}{100})R$ . По условию, справедливо равенство

$$\pi(1 + \frac{p}{100})^2 = 1,96\pi R^2.$$

Получаем уравнение

$$(1 + \frac{p}{100})^2 = 1,96 = (1,4)^2,$$

откуда следует, что  $1 + \frac{p}{100} = 1,4$  или  $1 + \frac{p}{100} = -1,4$ . Второе равенство невозможно, так как  $p$  не может быть отрицательным. Из первого равенства получаем, что  $p = 40\%$ .

Ответ: в.

**Пример 2.** Морская вода содержит  $5\%$  соли по массе. Сколько килограмм пресной воды нужно добавить к 3 тоннам морской воды, чтобы концентрация соли составляла  $1,5\%$  ?

а. 7000 кг б. 6500 кг в. 6000 г. 5000

*Решение.* Пусть добавили  $x$  кг пресной воды. Получаем уравнение

$$\frac{3000}{100} \cdot 5 = \frac{3000 + x}{100} \cdot 1,5$$

Тогда

$$3000 \cdot 5 = (3000 + x) \cdot 1,5,$$

$$15000 = 4500 + 1,5x,$$

$$1,5x = 10500,$$

$$x = 7000.$$

Ответ: а.

**Пример 3.** Найти двузначное число, частное от деления которого на произведение его цифр равно  $\frac{8}{3}$ , а разность между искомым числом и числом, записанным теми же цифрами, но в обратном порядке, равна 18.

а. 61 б. 54 в. 84 г. 64

*Решение.* Пусть  $x$  - цифра десятков, а  $y$  - цифра единиц искомого числа. Тогда число равно  $10x + y$ , а число, записанное теми же цифрами в обратном порядке равно  $10y + x$ . По условию, числа  $x, y$  удовлетворяют уравнениям:

$$10x + y = \frac{8}{3}xy, \quad (10x + y) - (10y + x) = 18.$$

Из второго уравнения получаем:

$$9(x - y) = 18, \quad x - y = 2, \quad x = y + 2.$$

Тогда первое уравнение принимает вид:

$$3(10(y + 2) + y) = 8y(y + 2).$$

Далее имеем:

$$3(11y + 20) = 8y^2 + 16y,$$

$$8y^2 - 17y - 60 = 0.$$

Находим дискриминант квадратного уравнения:  $D = 2209 = (47)^2$ . Тогда  $y = \frac{17+47}{16} = 4$ ,  $x = 4 + 2 = 6$ . Второй корень не

подходит, так как меньше нуля.

Ответ: г.

### Тест 1.

В перечисленных ниже заданиях выберите правильный вариант ответа.

1. Вычислите  $\frac{(101-64)(41+37)}{87-48}$ .

а. 75 б. 74 в. 47 г. 77

2. Вычислите  $\frac{10^2+11^2+12^2+13^2+14^2}{365}$ .

а. 2 б. 3 в. 2,5 г. 3,5

3. Решите уравнение  $2 - 0,7(x - 2) = 1,5 + 0,5(x - 1)$ .

а. 2 б. 2,1 в. 3 г. 1,8

4. Вставьте пропущенное слово. "... параллелограмма в точке пересечения делятся пополам".

5. Найдите наибольшее натуральное число, которое является как делителем числа 96, так и числа 240.

а. 12 б. 8 в. 48 г. 24

6. Найдите среднее арифметическое натуральных чисел от 1 до 100.

а. 49,5 б. 49 в. 50,5 г. 50

7. Упростите выражение:  $(a + b)^3 + (a - b)^3$ .

а. 0 б.  $a^3 + b^3$  в.  $2a(a^2 + b^2)$  г.  $2a(a^2 + 3b^2)$

8. Папа, мама и дочка разделили пиццу в отношении 5:2:1. Сколько процентов от всей пиццы получила мама?

а. 20 б. 15 в. 50 г. 25

9. Цена товара увеличилась на 25%. На сколько процентов нужно уменьшить новую цену, чтобы получить старую?

а. 20 б. 25 в. 30 г. 15

10. Собрали 140 кг. грибов, влажность которых составляла 98%. После подсушивания их влажность снизилась до 93%. Какова стала масса грибов после подсушивания?

а. 30 кг б. 40 кг в. 50 кг г. 35 кг

11. Первая труба пропускает на 16 литров воды в минуту меньше, чем вторая труба. Сколько литров в минуту пропускает первая труба, если резервуар объёмом 105 литров она заполняет на 4 минуты дольше, чем вторая труба?

а. 14л б. 16л в. 20л г. 8л

12. Поезд, двигаясь равномерно со скоростью 183 км/ч, проезжает мимо пешехода, идущего в том же направлении параллельно путям по платформе со скоростью 3 км/ч, за 13 секунд. Найдите длину поезда в метрах.

а. 500м б. 450м в. 600м г. 650м

13. Решите неравенство:  $\frac{2}{x} > 1$ .

а.  $x < 2$  б.  $x > 0,5$  в.  $0 < x < 2$  г.  $0 < x < 0,5$

14. Решите уравнение:  $\lg(35 - x^3) = 3 \lg(5 - x)$ .

а. 2 б. 3 в. 2;3 г. 2;4

15. Найдите гипотенузу прямоугольного треугольника с катетами  $8 \cdot 10^4$  и  $1,5 \cdot 10^5$  см.

а.  $17 \cdot 10^4$  б.  $17 \cdot 10^3$  в. 1700 г.  $17 \cdot 10^5$

16. Найдите наименьшее возможное значение  $y$ , удовлетворяющее системе уравнений

$$x^2 + y^2 = 20, \quad xy = 8.$$

а. 4 б. 2 в. -2 г. -4

17. Какое из следующих утверждений верно?

а. Средняя линия трапеции равна сумме её оснований.

б. Если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

в. Две окружности пересекаются, если радиус одной окружности больше радиуса другой окружности.

18. Установите соответствие между функциями и названиями их графиков.

а.  $y = \frac{k}{x}$ ,  $k \neq 0$  б.  $y = ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$  в.  $y = kx + b$

1. парабола 2. гипербола 3. прямая

19. Чему равна величина  $\arcsin \frac{1}{2}$  в градусах и радианах?

а. 30,  $\frac{\pi}{3}$  б. 60,  $\frac{\pi}{6}$  в. 30,  $\frac{\pi}{6}$  г. 30,  $\frac{\pi}{4}$

20. Катеты прямоугольного треугольника равны 5 см и 12 см. Найдите высоту, опущенную на гипотенузу.

а.  $\frac{60}{13}$  б. 5 в.  $\frac{75}{13}$  г. 6

## Тест 2.

В перечисленных ниже заданиях выберите правильный вариант ответа.

1. Вычислите  $\frac{(32-47)(125-48)}{53-18}$ .

а. 32 б. -31 в. -33 г. -35

2. Вычислите  $3, 56 \cdot 55, 5 - 3, 56 \cdot 5, 5 + 7, 44 \cdot 55, 5 - 7, 44 \cdot 5, 5$ .

а. 55 б. 110 в. -55 г. 550

3. Найдите сумму  $2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + 512$ .

а. 998 б. 1022 в. 1020 г. 1000

4. Вычислите:  $\frac{1}{2} + 2 + \frac{1}{3} - \frac{5}{6}$ .

5. Выполните деление:  $4,35 : (-3,625)$ .

а. -1,2 б. -1,1 в. -1,3 г. -1,4

6. Упростите выражение:  $(2x + 1)^2 + (2x - 1)^2$ .

а.  $8x^2$  б.  $2x^2$  в.  $8x^2 + 2$  г.  $4x^2 + 2$

7. Какое из следующих утверждений верно?

а. Объём шара радиуса  $R$  равен  $4\pi R^3$ .

б. Площадь поверхности шара радиуса  $R$  равна  $2\pi R^2$

в. Объём конуса, радиус основания которого равен  $R$ , а высота  $H$ , равен  $\pi R^2 \frac{H}{3}$ .

8. Вставьте пропущенное слово "... угол треугольника равен сумме внутренних углов треугольника, не смежных с ним. "

9. Установите соответствие между числом корней квадратного уравнения  $ax^2 + bx + c = 0$  и знаком дискриминанта  $D = b^2 - 4ac$ .

Число корней а. корней нет б. один корень в. два корня

Знак дискриминанта 1.  $D=0$  2.  $D>0$  3.  $D<0$

10. Найдите площадь поверхности прямоугольного параллелепипеда, ширина, длина и высота которого равны 10см, 20 см и 30см соответственно.

а. 2000 кв.см б. 1800 кв.см в. 2400 кв.см г. 2200 кв.см

11. Зарплату повысили на  $p\%$ . Затем новую зарплату повысили на  $2p\%$ . В результате двух повышений зарплата увеличилась в 1,32 раза. На сколько процентов зарплата была повышена во второй раз?

а. 20 б. 15 в. 25 г. 30

12. Дрессировщик может вымыть слона за 40 минут, а его сын - за 2 часа. За сколько времени они вымоют трёх слонов, работая вдвоём?

а. 2 часа б. 3 часа в. 1,5 часа г. 2,5 часа

13. Смешали 4 кг 10% - процентного раствора кислоты с 6 кг 20% - процентного раствора. Каков процент кислоты в смеси?

а. 20 б. 15 в. 18 г. 16

14. Какие две цифры нужно приписать справа к числу 2026, чтобы получилось число, делящееся на 45?.

а. 80 или 45 б. 80 или 35 в. 90 или 35 г. 70 или 45

15. Решите уравнение:  $5^x + 5^{x+2} + 5^{x+4} = 651$ .

а. 0 б. 1 в. 0; 1 г. 2

16. У Петра было 1000 рублей. Он потратил  $\frac{3}{5}$  всей суммы и 10% остатка. Сколько денег осталось у Петра?

а. 360 руб б. 350 руб в. 400 руб г. 280 руб

17. Найдите наименьшее целое отрицательное число, являющееся решением неравенства  $x^2 + 5x + 4 < 0$ .

а. -2 б. -4 в. -3 г. -1

18. Решите систему уравнений:  $2x + 3y = 7$ ,  $3x - 2y = 4$ .

а. (2;1) б. (2;2) в. (1;2) г. (1;3)

19. Сколько целых решений имеет неравенство  $|y| < 72$ ?

а. 141 б. 156 в. 143 г. 144

20. Решите уравнение:  $(x + 1)^4 - 8(x + 1)^2 + 16 = 0$ .

а. 3;1 б. -3;1 в. -3;2 г. 2;1

### Тест 3.

В перечисленных ниже заданиях выберите правильный вариант ответа.

1. Вычислите  $\frac{123-256}{50}$ .

а. -3,6 б. 3,6 в. -3,66 г. -2,66

2. Упростите выражение  $3,5 \cdot x - \frac{x}{6} + \frac{x}{3}$  и найдите его значение при  $x = 1,5$ .

а. 5,5 б. 4,5 в. 3,5 г. 6,5

3. Найдите наибольшее натуральное число, которое является делителем как числа 56, так и числа 42.

а. 7 б. 8 в. 14 г. 6

4. Упростите выражение:  $(2 - 3x)^2 + 24x$ .

а.  $(2 + 3x)^2$  б.  $4 + 9x^2$  в.  $-12x$  г.  $4 + 6x + 9x^2$

5. Найдите число, 48% которого равны 1008.

а. 2150 б. 2200 в. 2400 г. 2100

6. Билет на трамвай стоит 30 рублей. Ожидается повышение цены на 10%. Какое наибольшее количество билетов можно будет купить на 400 рублей?

а. 12 б. 11 в. 13 г. 10

7. Скорость света равна  $3 \cdot 10^5$  км/с. Какой путь пройдёт свет за 365 дней?

а.  $96608 \cdot 10^7$  км б.  $95608 \cdot 10^7$  км в.  $94608 \cdot 10^8$  км г.  $93608 \cdot 10^8$  км

8. На первом катере в 2 раза больше людей, чем на втором. Когда на ближайшей пристани с первого катера сошли 72 человека, а со второго 15 человек, то на обоих катерах людей стало поровну. Сколько человек было на первом катере изначально?

а. 107 б. 128 в. 104 г. 114

9. Свежие фрукты содержат 95% воды, а высушенные - 22%. Сколько сухих фруктов получится из 858 кг свежих фруктов?

а. 65 кг б. 55 кг в. 75 кг г. 85 кг

10. Установите соответствие между свойствами параболы, графика функции  $ax^2 + bx + c = y$  и знаками коэффициентов  $a, c$ .

Свойства

- а. ветви параболы направлены вверх, парабола пересекает ось  $OY$  в точке с положительной ординатой
- б. ветви параболы направлены вверх, парабола пересекает ось  $OY$  в точке с отрицательной ординатой
- в. ветви параболы направлены вниз, парабола пересекает ось  $OY$  в точке с положительной ординатой

Знаки 1.  $a > 0, c < 0$  2.  $a < 0, c > 0$  3.  $a > 0, c > 0$

11. Найдите диагональ прямоугольного параллелепипеда, три измерения которого (ширина, длина и высота) равны соответственно 6, 8 и 24 см.

а. 24 б. 26 в. 28 г. 30

12. Вычислите:  $\lg 500 + \lg 20$ .

а. 2 б. 3 в. 4 г. 5

13. Какое утверждение верное?

- а. Медиана треугольника делит площадь треугольника пополам.
- б. Биссектриса треугольника делит противоположную сторону пополам.
- в. Высоты треугольника пересекаются в точке, лежащей внутри данного треугольника.

14. Вставьте пропущенное слово: "развёрткой боковой поверхности цилиндра является ...".

15. Решите систему уравнений:  $x + y = 4, x^2 + y^2 = 8$ .

а. (2;2) б. (2;3) в. (3;1) г. (6;-2)

16. Из пунктов А и Б одновременно выехали два автомобиля. Скорость одного из них равна 75км/ч, что на 15км/ч больше скорости второго. Найдите расстояние между пунктами А и Б, если в пункт Б первая машина приехала на 1 ч. 12 мин. раньше.

а. 380 км б. 360 км в. 400 км г. 420 км

17. Найдите наибольшее целое положительное число, являющееся решением неравенства  $\lg x < 2$ .

а. 99 б. 100 в. 101 г. 102

18. Вычислите сумму:  $\arcsin 0,5 + \arccos 0,5$ . Ответ запишите в градусах.

а. 180 б. 120 в. 45 г. 90

19. Высота АН ромба ABCD делит сторону CD на отрезки  $DH = 20$ ,  $CH = 5$ . Найдите высоту ромба.

а. 15 б. 18 в. 20 г. 25

20. Во сколько раз увеличится объём шара, если его радиус увеличится в 3 раза?

а. 9 б. 18 в. 27 г. 36

#### Тест 4.

В перечисленных ниже заданиях выберите правильный вариант ответа.

1. Вычислите  $\frac{2026}{25}$ .

а. 80,04 б. 81,04 в. 91,4 г. 90,04

2. Между какими целыми числами заключено число  $\frac{172}{15}$ .

а. 9 и 10 б. 10 и 11 в. 11 и 12 г. 12 и 13

3. Найдите наибольший корень уравнения  $3x^2 + 5x - 8 = 0$ .

а. 1 б. 2 в. 3 г. 4

4. Запишите число  $\frac{9}{5}$  в виде десятичной дроби.

а. 1,5 б. 1,75 в. 1,8 г. 1,9

5. Установите соответствие между свойствами параболы, графика функции  $ax^2 + bx + c = y$  и знаками коэффициентов  $a, c$ .

Свойства

а. ветви параболы направлены вверх, парабола пересекает ось ОУ в точке с положительной ординатой

б. ветви параболы направлены вверх, парабола пересекает ось ОУ в точке с отрицательной ординатой

в. ветви параболы направлены вниз, парабола пересекает ось ОУ в точке с положительной ординатой

Знаки 1.  $a > 0, c < 0$  2.  $a < 0, c > 0$  3.  $a > 0, c > 0$

6. Вставьте пропущенное слово: "... , опущенная из вершины равнобедренного треугольника, является высотой и медианой".

7. В 45 кг бронзы (сплава олова и меди) содержится 6,75 кг олова. Определите процентное содержание меди в сплаве.

а. 35 б. 45 в. 15 г. 25

8.  $\frac{4}{5}$  от 30% числа  $N$  равны 4,92. Найдите число  $N$ .

а. 20,5 б. 21 в. 25 г. 35

9. Найдите меньший корень уравнения  $(x+3)^2 - 2(x+3) - 3 = 0$ .

а. -2 б. -4 в. 0 г. 2

10. На выполнение домашнего задания по химии, математике и истории Витя потратил 1 час 40 минут. На химию у него ушло 40% этого времени, на математику - 45% остального. Сколько времени Витя потратил на задания по истории ?

а. 30 мин б. 35 мин в. 42 мин г. 33 мин

11. Вычислите:  $\lg 5000 - \lg 50$  .

а. 4 б. 3 в. 2 г. 1

12. Решите систему уравнений:  $2x + 3y = -1$ ,  $3x - 2y = -8$ .

а. (-2;1) б. (-2;2) в. (1;2) г. (3;1)

13. Решите уравнение  $\sin 2x = \frac{1}{2}$ . В ответе укажите наименьший положительный корень в градусах.

14. Настя выше Кати на 3 см. Катя выше Ани на 2 см,

а Аня ниже Оли на 6 см. Кто из девочек выше всех?

а. Катя б. Настя в. Аня г. Оля

15. Найдите площадь треугольника со сторонами 6 см, 8 см и 10 см.

а. 20 кв.см б. 24 кв.см в. 48 кв.см г. 60 кв.см

16. Упростите выражение:  $(x - 2)^3 - (x + 2)^3$ .

а.  $-12x^2$  б.  $-12x^2 - 16$  в.  $-12x$  г.  $-16$

17. Найдите синусы острых углов прямоугольного треугольника с катетами 3 и 4.

а. 0,4 и 0,5 б. 0,4 и 0,6 в. 0,2 и 0,8 г. 0,6 и 0,8

18. Какое утверждение неверно?

а. Если две стороны и угол одного треугольника равны двум сторонам и углу другого треугольника, то эти треугольники равны.

б. Если две диагонали параллелограмма равны, то этот параллелограмм является прямоугольником.

в. Два диаметра окружности пересекаются в ее центре.

19. Чему равна площадь круга радиуса 5? Число  $\pi$  округлите до сотых.

а. 78,5 б. 88,5 в. 98,5 г. 102,5

20. Решите неравенство:  $|2x - 1| < 5$ .

а.  $(-2;1)$  б.  $(-2;3)$  в.  $(-3;2)$  г.  $(-4;3)$

## Глава 1. Теория множеств. Предел функции. Производная функции.

Эта глава содержит задачи по элементам теории множеств, основным понятиям теории пределов функций, начальным понятиям дифференциального исчисления функций одной переменной (производным). Приведём решения некоторых типовых задач.

**Определение 1.** Два множества называются равномошными, если между ними можно установить взаимно - однозначное соответствие (биекцию).

**Определение 2.** Множество называется счётным, если оно равномощно множеству натуральных чисел.

**Пример 1.** Множество рациональных чисел счётно.

*Решение.* Назовём высотой рационального числа  $\frac{m}{n}$ , где  $m$  - целое число, а  $n$  - натуральное число, число  $|m| + n$ . Из возможных записей нуля, выберем одну, например,  $\frac{0}{1}$ . Тогда все рациональные числа можно расположить в одну последовательность в порядке возрастания высоты, а числа с одинаковой высотой - в порядке возрастания числителя:

$$\begin{aligned} 0, -1, 1, -2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2, -3, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 3, \\ -4, -\frac{3}{2}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, 4, \dots \end{aligned} \quad (1)$$

Так как чисел данной высоты  $p$  лишь конечное число, то нумеруя числа последовательности (1) по порядку натуральными числами, мы занумеруем все рациональные числа, что и требуется.

**Определение 3.** Числовая функция  $f$ , определённая на всей числовой прямой, называется чётной (нечётной),

если для любого  $x$  выполняется равенство

$$f(-x) = f(x) \quad (f(-x) = -f(x)).$$

График чётной функции симметричен относительно оси ординат. График нечётной функции симметричен относительно начала координат.

**Пример 2.** Функции  $y = |x|$ ,  $y = x^2$ ,  $y = x^4$ ,  $y = \cos x$  являются чётными.

**Пример 3.** Функции  $y = x$ ,  $y = x^3$ ,  $y = \sin(x)$ ,  $y = \operatorname{tg} x$ ,  $y = \arcsin x$ ,  $y = \operatorname{arctg} x$  являются нечётными.

**Пример 4.** Функции  $y = \arccos x$ ,  $y = \operatorname{arccot} x$  не являются ни чётными, ни нечётными.

**Пример 5.** Найдите предел функции  $y = \frac{2x-1}{x+1}$  при  $x$ , стремящимся к  $\infty$ .

*Решение.* Так как  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ , то

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = 2. \quad (2)$$

Равенство (2) означает, что прямая  $y = 2$  является горизонтальной асимптотой графика функции  $y = \frac{2x-1}{x+1}$  при  $x \rightarrow \pm\infty$ .

**Пример 6.** Найдите односторонние пределы функции  $y = \frac{2x-1}{x+1}$  в точке  $x = -1$ .

*Решение.* Найдём для начала правый предел функции. Положим  $x = -1 + \varepsilon$ , где  $\varepsilon > 0$ . Тогда функция  $y = \frac{2x-1}{x+1}$  принимает вид:

$$y = \frac{2(-1 + \varepsilon) - 1}{-1 + \varepsilon + 1} = \frac{2\varepsilon - 3}{\varepsilon} = 2 - \frac{3}{\varepsilon}.$$

Так как

$$\lim_{x \rightarrow -1+0} 2 - \frac{3}{\varepsilon} = -\infty, \quad (3)$$

то правый предел функции равен  $-\infty$ .

Найдём левый предел данной функции. Положим  $x = -1 - \varepsilon$ , где  $\varepsilon > 0$ . Тогда функция  $y = \frac{2x-1}{x+1}$  принимает вид:

$$y = \frac{2(-1 - \varepsilon) - 1}{-1 - \varepsilon + 1} = \frac{-2\varepsilon - 3}{\varepsilon} = 2 + \frac{3}{\varepsilon}.$$

Так как

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} 2 + \frac{3}{\varepsilon} = +\infty, \quad (4)$$

то левый предел функции равен  $= \infty$ .

Равенства (3) и (4) означают, что прямая  $x = -1$  является вертикальной асимптотой графика функции  $y = \frac{2x-1}{x+1}$ , причём при приближении справа к значению  $x = -1$  точки графика функции неограниченно приближаются к прямой  $x = -1$ , уходя в  $-\infty$ , а при приближении слева - в  $+\infty$ .

**Пример 7.** Найдите производную функции

$$y = 3x \cdot \sin(2x).$$

*Решение.* По правилам дифференцирования произведения функций имеем:

$$y' = (3x)' \sin(2x) + 3x(\sin(2x))' = 3 \sin(2x) + 3x(\sin(2x))'.$$

Далее применяем правило дифференцирования сложной функции:

$$y' = 3 \sin(2x) + 3x \cos(2x) \cdot (2x)'$$

Следовательно,

$$y' = 3 \sin(2x) + 6 \cos(2x).$$

**Пример 8.** Определите размеры открытого бассейна с квадратным дном объёмом 32 кубических метра так, чтобы

на облицовку его стен и дна пошло наименьшее количество материалов.

*Решение.* Пусть сторона основания равна  $x$  метров. Тогда высота равна  $\frac{32}{x^2}$ , следовательно, площадь облицовываемой поверхности равна

$$S = x^2 + 4x \cdot \frac{32}{x^2} = x^2 + \frac{128}{x},$$

где  $x > 0$ . Исследуем полученную функцию на минимум:

$$S' = 2x - \frac{128}{x^2}, \quad 2x - \frac{128}{x^2} = 0, \quad x = 4.$$

При  $x = 4$  функция, очевидно, достигает своего наименьшего значения (наибольшего значения у неё нет). Получаем, что бассейн должен иметь размеры  $4 \times 4 \times 2$  м.

**Пример 9.** Найдите приближённое значение  $\cos 31^\circ$ .

*Решение.* Воспользуемся тем, что если приращение аргумента мало по абсолютной величине, то имеет место приближённая формула  $\Delta f \approx df$ :

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) dx.$$

В нашем случае,  $f(x) = \cos x$ ,  $f'(x) = -\sin x$ ,  $x = \frac{\pi}{6}$ ,  $dx = \Delta x = \frac{\pi}{180}$ . Следовательно,

$$\cos 31^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \frac{\pi}{180} \approx 0,851.$$

**Пример 10.** Докажите, что функция

$$y = \frac{1 - 2x}{3x + 1}$$

является убывающей на каждом из промежутков  $(-\infty; -\frac{1}{3})$ ,  $(-\frac{1}{3}; +\infty)$ , но не является убывающей на их объединении.

*Решение.* По правилу дифференцирования частного двух функций имеем:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(1-2x)'(3x+1) - (1-2x)(3x+1)'}{(3x+1)^2} = \\ &= \frac{-2(3x+1) - 3(1-2x)}{(3x+1)^2}. \end{aligned}$$

Следовательно,  $y' = \frac{-5}{(3x+1)^2}$ . Так как  $y' < 0$  при любом  $x \neq -\frac{1}{3}$ , то функция является убывающей на промежутках  $(-\infty; -\frac{1}{3})$ ,  $(-\frac{1}{3}; +\infty)$ .

На объединении этих промежутков, то есть на всей числовой прямой, кроме точки  $x = -\frac{1}{3}$ , функция не является убывающей. Действительно, пусть, например  $a = -1$ ,  $b = 0$ . Имеем:  $a < b$ , но  $y(a) = -\frac{3}{2} < y(b) = 1$ .

## Вариант 1.

1. Выберите верное утверждение.

Два множества  $X$  и  $Y$  считаются равными, если

- а)  $X \subset Y$  и  $Y \supset X$ ;
- б)  $X \subset Y$  и  $Y \subset X$ ;
- в)  $X \subset Y$ ;
- г) нет верного варианта.

2. Заполните таблицу.

- а) Коммутативность объединения;
- б) Ассоциативность пересечения;
- в) Дистрибутивность пересечения относительно объединения.

- 1)  $A \cup B = B \cup A$ ;
- 2)  $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ ;
- 3)  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ;
- 4)  $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ ;
- 5)  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ .

|   |   |   |
|---|---|---|
| а | б | в |
|   |   |   |

3. Вставьте пропущенное слово.

Если некоторому элементу  $a \in X$  ставится в соответствие единственный элемент  $b \in Y$ , то говорят, что на множестве  $X$  задана ...  $f : X \longrightarrow Y$  или  $y = f(x)$ .

4. Какое утверждение является верным?

Функция является взаимнооднозначным соответствием (биекцией), если ...

- а) она инъекция, но не является сюръекцией;

- б) она одновременно и инъекция и сюръекция;
- в) она сюръекция, но не является инъекцией;
- г) она не является инъекцией и не является сюръекцией.

5. Заполните пропуск.

Образом множества  $A \subset X$  при отображении  $f : X \rightarrow Y$  называется множество  $f(A) = \{f(x) \in Y | x \in A\}$ . Выберите правильное утверждение.

- а. Отображение  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2$ , множество  $A = \{-1, 0, 2\}$ ,  $f(A) = \{1, 0, 4\}$ ;
- б. Отображение  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^{1/2}$ , множество  $A = \{-4, 0, 9\}$ ,  $f(A) = \{-2, 0, 3\}$ .

6. Заполните таблицу.

- а) Функция  $f$  называется ... на промежутке  $X$ , если для любых  $x_1 < x_2$  из  $X$  верно неравенство  $f(x_1) < f(x_2)$ ;
- б) Функция  $f$  называется ... на промежутке  $X$ , если для любых  $x_1 < x_2$  из  $X$  верно неравенство  $f(x_1) > f(x_2)$ .

- 1) убывающей;
- 2) возрастающей;
- 3) невозрастающей;
- 4) неубывающей.

|   |   |
|---|---|
| a | b |
|   |   |

7. Согласны ли вы с утверждениями?

- 1) Линейная функция  $y = -3x$  является убывающей на промежутке  $(-\infty; +\infty)$ ;
- 2) Квадратичная функция  $y = x^2$  является убывающей на

промежутке  $[-\infty; 0]$ .

- а) верно только 1);
- б) оба не являются верными;
- в) верно только 2);
- г) оба верны.

8. Вставьте пропущенное слово.

Если график функции  $y = f(x)$  симметричен относительно оси ординат, то  $y = f(x)$  — ... функция.

9. Выберите верные утверждения.

- 1) функция  $y = f(x)$ ,  $x \in X$  называется четной, если для любого значения  $x$  из множества  $X$  выполняется равенство  $f(-x) = f(x)$ ;
- 2)  $y = x^2$  — пример чётной функции;
- 3) функция  $y = f(x)$ ,  $x \in X$  называется нечетной, если для любого значения  $x$  из множества  $X$  выполняется равенство  $f(-x) = -f(x)$ ;
- 4)  $y = x^3$  — пример нечётной функции.

10. Вычислите. В ответе укажите сумму получившихся чисел.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^2 - 4x + 3}{x + 1}$$
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^3 - 3x + 5}{1 + x}$$

11. В ответ запишите номера только тех пределов, которые равны нулю.

- 1)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}$ ; 2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$ ; 3)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2}{x^3}$ ; 4)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 - x)$ ;

12. Неопределённость какого вида возникает при вычислении данного предела  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - x - 6}{x + 2}$ ?

- 1)  $[\frac{\infty}{\infty}]$ ; 2)  $[0 \times \infty]$ ; 3)  $[\frac{0}{0}]$ ; 4)  $[\infty - \infty]$ .

13. В ответе запишите номер неправильного равенства.

- 1)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{2}{3})^x = 0$ ;  
2)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{3}{2})^x = \infty$ ;  
3)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{4}{5})^x = 0$ ;  
4)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{5}{4})^x = 0$ ;

14. Заполните таблицу.

- a.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ;  
b.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$ ;  
c.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ .

1. Второй замечательный предел;  
2. Первый замечательный предел.

| a | b | c |
|---|---|---|
|   |   |   |

15. Вычислите предел функции.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x - 21}{1 + x + 5x^2}.$$

16. Вычислите производные функций в точке. В ответе запишите меньшее значение.

$$f(x) = x^2 + 3x - 5 \text{ в точке } x = 1;$$

$$f(x) = x^2(x + 1) \text{ в точке } x = 2;$$

$$f(x) = \frac{x}{x+1} \text{ в точке } x = 0.$$

17. Допущены ли ошибки? Выберите правильный(ые) ответ(ы).

а)  $(x^n)' = nx^{n-1}$ ;

б)  $(\sin x)' = \cos x$ ;

в)  $(\cos x)' = -\sin x$ ;

г)  $(\sqrt{x})' = 2\sqrt{x}$ .

а) да, в 1) и 2);

б) да, в 3);

в) нет ошибок;

г) да, в 4).

18. Вычислите производную функции  $y = x^3 \arcsin x$ .  
Укажите верный ответ.

1)  $3x^2 \arcsin x$  ;

2)  $\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}$ ;

3)  $3x^2 \arcsin x + \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}$ ;

4)  $3x^2 \arcsin x - \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}$ .

19. Найдите производную сложной функции. В ответе укажите номер неверного выражения.

1)  $y = \sin(21x - 8), y' = 21 \cos(21x - 8)$ ;

2)  $y = \cos(3x - 7), y' = -3 \sin(3x - 7)$ ;

3)  $y = \tan(1 - 5x), y' = \frac{-5}{\cos^2(1-5x)}$ ;

4)  $y = \cot(7x - 4), y' = \frac{7}{\sin^2(7x-4)}$ .

20. Согласны ли вы с утверждением?

Геометрический смысл производной таков:

значение производной функции  $y = f(x)$  в точке  $x_0$  равно  
угловому

коэффициенту касательной к графику функции  $y = f(x)$  в  
точке  $(x_0; f(x_0))$ ,

$$k = f'(x_0) = \tan \alpha;$$

а) нет, так как это физический смысл производной;

б) утверждение верное;

в) нет, так как  $k = f'(x_0) = \cot \alpha$ ;

г) ответы а) и в) являются верными.

## Вариант 2.

1. В каком из свойств операций над множествами допущена ошибка? Выберите ответ, содержащий ошибку.

1.  $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ ;

2.  $A \cap B = B \cap A$ ;

3.  $C(A \cup B) = CA \cup CB$ , где  $CA$  - дополнение множества  $A$  до универсального множества;

4.  $A \cap A = A \cup A = A$ .

2. Какой из аксиом множества вещественных чисел соответствует это описание : "Каковы бы ни были положительные числа  $x$  и  $y$ , существует такое натуральное число, что  $n * x > y$ "?

1. Аксиомы поля;

2. Аксиома Архимеда;

3. Аксиомы порядка;

4. Аксиома Кантора о вложенных отрезках.

3. Установите соответствие между понятиями и их определениями. Заполните таблицу.

а) Инъекция; б) Сюръекция; в) Биекция.

1. Отображение множества  $X$  во множество  $Y$ , при котором разные элементы  $X$  переводятся в разные элементы  $Y$ .
2. Взаимно-однозначное отображение, т.е. каждому элементу  $X$  соответствует ровно один элемент из  $Y$ .
3. Отображение множества  $X$  на множество  $Y$ , при котором каждый элемент множества  $Y$  является образом хотя бы одного элемента из  $X$ .

|   |   |   |
|---|---|---|
| a | b | c |
|   |   |   |

4. Найти образ множества  $A$  при отображении  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2$ ,  $A = [-2, 3]$ .

5. Установите соответствие между функцией и монотонностью. Заполните таблицу.

1. Возрастающая;    а)  $y = x^2$  при  $x \in [0; +\infty)$ ;  
                                       б)  $y = x^3 - 3x$  при  $x \in (-1; 1)$ ;
2. Убывающая.        в)  $y = \frac{1}{x}$  при  $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ ;  
                                       д)  $y = \frac{x^4 + 16}{x^2}$  при  $x \in [-2; 0) \cup [2; +\infty)$ .

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| a | b | c | d |
|   |   |   |   |

6. Продолжите предложение.

Функция называется нечетной на множестве  $X$ , если...

1.  $f(-x) = -f(x); x \in X$ ;
2.  $f(-x) = f(x); x \in X$ ;
3.  $f(x) = f(x); x \in X$ ;
4.  $f(-x) = f(-x); x \in X$ .

7. Напишите определение предела  $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$  на языке " $\varepsilon - \delta$ ".

8. Определить точные верхнюю ( $\sup$ ) и нижнюю ( $\inf$ ) грани функции

$$f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

на интервале  $(0; +\infty)$ .

1.  $\inf f(x) = 0, \sup f(x) = 1$ ;
2.  $\inf f(x) = 1, \sup f(x) = 3$ ;
3.  $\inf f(x) = -1, \sup f(x) = 0$ ;
4.  $\inf f(x) = 2, \sup f(x) = 0$ .

9. Найти значение предела:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x) - 1}{x}.$$

10. Установите соответствие между пределами функций и типом неопределенности. Заполните таблицу.

- a.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+x^4}{x^5+x^6}$ ; b.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x^2-3x}$ ; c.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{5x})^x$ ;  
d.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+6x} - x)$ .

1.  $[\frac{0}{0}]$ ; 2.  $[\frac{\infty}{\infty}]$ ; 3.  $[1^\infty]$  4.  $[\infty - \infty]$ .

| a | b | c | d |
|---|---|---|---|
|   |   |   |   |

11. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Определите характер точек разрыва функции, если они существуют.

12. Продолжите предложение.

"Производной функции называется предел отношения..."

1. функции к аргументу;
2. приращения функции к соответствующему приращению аргумента;
3. приращения функции к аргументу;
4. приращения аргумента к приращению функции.

13. Чему равна производная функции  $y'(x)$ , если  $y = 2x^5 - x^3 + 2x + 7$ ?

1.  $5x^4 - 3x^2 + 2$ ;
2.  $10x^4 - 3x^2 + 2$ ;
3.  $10x^4 - 3x^2 + 2x$ ;
4.  $2x^4 - 3x^2 + 9$ .

14. Исследовать на монотонность функцию :

$$f(x) = x^3 - 4x^2 - 16x + 17.$$

15. Укажите верные равенства.

1.  $(x^n)' = nx^{n+1}$ ;
2.  $(\cos x)' = \sin x$ ;
3.  $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ ;
4.  $(\sin x)' = \cos x$ .

16. Чему равна производная второго порядка функции  $y = x^3 - 5x^2 + 3$ ?

1.  $3x^2 - 10x$ ;

2.  $6x - 10$ ;

3.  $6x - 5$ ;

4.  $6x$ .

17. Выберите верное утверждение:

Физический смысл производной заключается в том, что:

1. Если провести касательную к графику функции в некоторой точке, то производная в этой точке будет равна тангенсу угла ее наклона;

2. Мгновенная скорость движения  $V(t)$  в момент времени  $t$  есть производная пути по времени, т.е.  $V(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = S'(t)$  ;

3. Производная характеризует среднее значение функции на промежутке;

4. Производная определяет площадь под графиком непрерывной функции на заданном отрезке.

18. Найти производную сложной функции:

$$y = \frac{1}{4} \ln \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}.$$

19. Чему равен угловой коэффициент касательной  $k$ , проведенной к графику

$$f(x) = 5 + 2x - 3x^2$$

в точке  $x_0 = -2$  ?

20. Найти промежутки выпуклости вверх/вниз и точки перегиба следующей функции:

$$y = x + \sin x.$$

### Вариант 3.

1. Выберите равные множества.

1)  $A$  - множество букв слова МАТЕМАТИКА

и  $B = \{M, A, T, E, I, K\}$ ;

2)  $A = \{1, 2, 9\}$  и  $B = \{2, 1, 9\}$ ;

3)  $A = \{(1, 7)\}$  и  $B = \{(7, 1)\}$ ;

4)  $A = \{6, 8\}$  и  $B = \{\{6\}, 8\}$ .

2. Определите правильную последовательность включений числовых множеств.

1)  $\mathbb{R} \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{C}$ ;

2)  $\mathbb{N} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{C}$ ;

3)  $\mathbb{N} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ ;

4)  $\mathbb{N} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{C}$ .

3. Установите соответствия между инъективной, сюръективной и биективной функциями. Заполните таблицу.

|                         |                                                    |
|-------------------------|----------------------------------------------------|
| 1) Инъективная функция  | а) $f(x) = \sin x, \mathbb{R} \rightarrow [-1; 1]$ |
| 2) Сюръективная функция | б) $f(x) = x^3, \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ |
| 3) Биективная функция   | в) $f(x) = x^2, x \geq 0$                          |

|   |  |
|---|--|
| 1 |  |
| 2 |  |
| 3 |  |

4. Выберите верные утверждения и укажите в ответе правильные номера.

Функции  $f(x)$  и  $g(x)$  возрастают на  $X \subseteq \mathbb{R}$ , тогда:

- 1)  $(f + g)(x)$  возрастает на  $X$ ;
- 2)  $f^2(x)$  возрастает на  $X$ ;
- 3)  $f(x) \cdot g(x)$  возрастает на  $X$ .

5. Исследуйте функцию на чётность/нечётность:  $f(x) = (10 - 11x)^3 + (10 + 11x)^3$  и выберите правильный вариант ответа.

- а) чётная;
- б) ни чётная, ни нечётная;
- в) нечётная.

6. Установите соответствия между функциями и их производными. Заполните таблицу.

| $f(x)$                   | $f'(x)$                      |
|--------------------------|------------------------------|
| 1) $\operatorname{tg} x$ | а) $\frac{1}{x}$             |
| 2) $\arccos x$           | б) $\frac{1}{\cos^2 x}$      |
| 3) $\ln x$               | в) $\frac{1}{x \ln a}$       |
| 4) $\log_a x$            | г) $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |

|   |  |
|---|--|
| 1 |  |
| 2 |  |
| 3 |  |
| 4 |  |

7. Найдите производную функции  $f(x) = (2\sqrt{x} + 3)x^3$ .

8. Вычислите

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x + 4)^{20}(7x - 1)^{40}}{(15x - 11)^{60}}.$$

9. Найдите точку экстремума функции  $f(x) = 2x^4 - \frac{1}{4}x^2$  на интервале  $(-\infty; \frac{1}{4})$ .

10. Запишите уравнение касательной к параболе  $f(x) = x^2 + 25$  в точке  $x_0 = -1$ .

11. Найдите образ множества  $A$  при отображении  $f$ , заданного следующим образом:

$$f(x) = x + 2,$$

если

$$A = \{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x \leq 1\}.$$

12. Вставьте пропущенное слово.

Теорема Ферма: если  $f(x) : (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$  \_\_\_\_\_ в каждой точке из  $(a; b)$ , а в точке  $x_0 \in (a; b)$  функция принимает наибольшее или наименьшее значение, то  $f'(x_0) = 0$ .

13. Дана функция  $f(x) = \sqrt{2x - 4}$ ,  $x \in [2; +\infty)$ . Найдите обратную к ней функцию  $x = f^{-1}(y)$  и укажите область её определения.

14. Найдите промежутки убывания функции  $f(x) = x^3 - 3x$ .

15. Решите задачу.

На первом курсе математического факультета 30 студентов. Известно, что 18 студентов любят математический анализ, 14 студентов любят дифференциальную геометрию, а 5 студентов не любят ни математический анализ, ни дифференциальную геометрию. Сколько студентов любят только математический анализ?

16. Определите правильную последовательность пропущенных математических символов в свойствах операций над множествами.

$$A \cap (B \cup C) = (A \text{ --- } B) \text{ --- } (A \text{ --- } C);$$

$$C(A \cup B) = CA \_ CB;$$

$$A \cup B = B \_ A.$$

$$1) \cup \cap \cup \cap \cup;$$

$$2) \cup \cup \cup \cup \cup;$$

$$3) \cap \cup \cap \cup \cap;$$

$$4) \cap \cup \cap \cap \cup.$$

17. Чему равна производная второго порядка функции

$$f(x) = x^6 + 5x^2 - 1?$$

$$1) 30x^4 + 10;$$

$$2) 30x^4 + 10 - x;$$

$$3) x^8 + 5x^4;$$

$$4) 6x^4.$$

18. Вставьте пропущенное слово.

Для  $\_$  функции в точке  $x_0 \in [a; b]$  необходимо и достаточно выполнение условия:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

19. Решите задачу. Объект движется по прямой. Его положение в момент времени  $t$  задаётся функцией:  $s(t) = t^2 + 3t, t \geq 0$ . Определите, с какой скоростью движется объект в момент времени  $t=2$ сек.

20. Найдите предел

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1},$$

используя правило Лопиталя.

#### Вариант 4.

1. Какое из приведённых ниже множеств тождественно равно  $\overline{A \cap B}$ , согласно закону де Моргана?

1.  $\overline{A \cup B}$ ; 2.  $A \cup \overline{B}$ ; 3.  $\overline{A} \cap \overline{B}$ ; 4.  $\overline{A \cup B}$ ; 5.  $A \cap B$ .

2. Даны три множества:  $A = \{1, 2, 3, 5, 7\}$ ,  $B = \{2, 4, 5, 6, 8\}$ ,  $C = \{3, 5, 6, 9\}$ . Найдите множество:

$$(A \cap B) \cup (C \setminus A).$$

Запишите ответ в виде множества, перечислив его элементы в порядке возрастания.

4. Даны множества:

$$A = \{x \mid x \text{—четное число}, 1 \leq x \leq 10\},$$

$$B = \{x \mid x \text{—простое число}, 1 \leq x \leq 10\}.$$

Чему равно  $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$ ?

5. Выберите правильный вариант ответа.

Какой функцией будет произведение двух нечетных функций ?

1. чётной; 2. нечётной; 3. ни чётная, ни нечётная.

6. Выберите все счётные множества из перечисленных ниже.

- a. Множество всех целых чисел  $\mathbb{Z}$ ;
- b. Множество всех действительных чисел  $\mathbb{R}$ ;
- c. Множество всех рациональных чисел  $\mathbb{Q}$ ;
- d. Множество всех простых чисел;
- e. Множество всех иррациональных чисел.

7. Продолжите фразу и выберите правильный вариант ответа. Функция  $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$  является ...

1. Ограниченной сверху. 2. Ограниченной снизу. 3. Ограниченной. 4. Неограниченной.

8. Дайте определение сюръективной функции и приведите пример сюръективной функции  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

9. Какое из утверждений верно для счётных множеств?

- a. Объединение двух несчётных множеств всегда счётно.
- b. Любое бесконечное подмножество счётного множества несчётно.
- c. Декартово произведение двух счётных множеств счётно.
- d. Множество всех функций  $f : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$  счётно.

10. Впишите пропущенные слова.

Функция  $f : A \rightarrow B$  называется биекцией, если она одновременно является        и        .

11. Чему равен предел  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$ ?

- a. 0; b. 1 ; c. 3; d. не существует.

12. Если  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$  и  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$ , то чему равен  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)]$  ?

- a.  $A + B$ ; b.  $A \cdot B$ ; c.  $\frac{A}{B}$ ; d.  $A - B$ .

13. Какой из пределов не является следствием второго замечательного предела?

$$\begin{aligned} & a. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}; \quad b. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + 1}{x}; \\ & c. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x; \quad d. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}. \end{aligned}$$

14. Исследуйте функцию  $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$  на монотонность. Найдите промежутки возрастания и убывания, а также экстремумы.

15. Дайте определение производной функции в точке. Что она характеризует?

16. Найдите  $y'$ , если  $y = \sin(3x^2 + 5)$ .

17. Чему будет равен предел

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+3}{x+1} \right)^{2x-5} ?$$

a.  $e^4$ ; b. 1; c.  $e^3$ ; d.  $\infty$ .

18. Найдите производную функции:  $y = \ln(\sin(\sqrt{x^2 + 1}))$ .

19. Найдите  $y'(2)$ , если  $y = e^x(x^2 - 3x + 5)$ .

20. Запишите первый замечательный предел.

### Вариант 5.

1. Установите соответствие между свойствами операций над множествами и их названиями.

| Название свойства                                        | Свойство                                                                                                           |
|----------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| а. Коммутативность пересечения                           | 1. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$                                                                |
| б. Ассоциативность объединения                           | 2. $A \cap B = B \cap A$                                                                                           |
| в. Дистрибутивность пересечения относительно объединения | 3. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ и $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ |
| г. Законы де Моргана                                     | 4. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$                                                                         |

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| а | б | в | г |
|   |   |   |   |

2. Найдите чему равно  $P \cap Q$ , если

$$P = \{x \mid x \text{ — простое число, } x < 10\}, \quad Q = \{1, 2, 3, 5\}.$$

3. Какие из следующих утверждений всегда верны для любых множеств  $A$  и  $B$ :

а.  $A \cap (A \cup B) = A$ ;

б.  $A \cup (A \cap B) = B$ ;

в.  $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = A \Delta B$ .

4. Задайте перечислением элементов множество, заданное характеристическим свойством:

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, |x| \leq 3\}.$$

5. Установите соответствие между типом функции и определением.

| Функция      | Определение                                                                                            |
|--------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| а. Инъекция  | 1. $f : X \rightarrow Y, \quad \forall x_1 \neq x_2, \quad x_1, x_2 \in X \implies f(x_1) \neq f(x_2)$ |
| б. Сюръекция | 2. Взаимно однозначное отображение                                                                     |
| в. Биекция   | 3. $f : X \rightarrow Y, \quad \forall x \in X : \exists y = f(x) \in Y$                               |

|   |   |   |
|---|---|---|
| а | б | в |
|   |   |   |

6. Исследуйте функцию на монотонность

$$y = 2x^3 + 3x^2 + 1.$$

7. Какие из заданных функций являются инъекцией для отображения  $f : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ :

а.  $f(x) = \sqrt{x}$ ;

б.  $f(x) = \sqrt{x+1}$ ;

в.  $f(x) = \frac{1}{x+2}$ .

8. Вставьте пропущенное слово в определении.

Функция  $f(x)$  называется \_\_\_\_\_, если  $\forall x \in D(f)$  выполняется равенство  $f(x) = f(-x)$ .

9. Определите является ли функция чётной, нечётной или общего вида.

$$f(x) = \frac{x^3 + x}{x^2 + 1}.$$

10. Исследуйте данные функции на монотонность, сопоставьте ваши результаты в таблице.

| Монотонность    | Функция                                              |
|-----------------|------------------------------------------------------|
| а. Убывающая    | 1. $f(x) = \sqrt{x}, \quad x \in (0, +\infty)$       |
|                 | 2. $f(x) = e^{-x} \cdot x, \quad x \in (1, +\infty)$ |
| б. Возрастающая | 3. $f(x) = \ln x, \quad x \in (\pi, +\infty)$        |
|                 | 4. $f(x) = \frac{1}{x}, \quad x \in (0, +\infty)$    |

|   |   |
|---|---|
| а | б |
|   |   |

11. Завершите утверждение, выбрав корректный вариант ответа.

Предел произведения конечного числа функций, каждая из которых имеет конечный предел в указанной точке ...

- а) равен сумме пределов каждой функции в отдельности;

- б) равен произведению значений пределов каждой функции в отдельности;
- в) равен сумме значений производных этих функций;
- г) не существует.

12. В каком из перечисленных пределов возникает неопределённость вида  $[\frac{\infty}{\infty}]$ ?

а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - 5}{x + 5};$

б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x};$

в)  $\lim_{x \rightarrow 2} \operatorname{tg} \frac{\pi x}{4} \cdot (2 - x);$

г)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 8x + 12}.$

13. Вычислите предел функции

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2}.$$

14. Установите соответствие между пределами и их определениями на «эпсилон-дельта» языке. Заполните таблицу.

| Предел                                         | Определение                                                                                                                                    |
|------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| а. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ | 1. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) \forall x \in X \mid  x  > \frac{1}{\delta} \implies  f(x) - b  < \varepsilon$         |
| б. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$      | 2. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) \forall x \in X \mid 0 <  x - a  < \delta \implies  f(x) - b  < \frac{1}{\varepsilon}$ |
| в. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$           | 3. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) \forall x \in X \mid 0 <  x - a  < \delta \implies  f(x) - b  < \varepsilon$           |

|                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| а                        | б                        | в                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

15. Вычислите предел функции

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x^2}.$$

16. Выберите корректное продолжение утверждения.

Если знак производной дифференцируемой функции  $f(x)$  положительный на интервале  $(a, b)$ , то функция на этом интервале:

- а) убывающая;
- б) возрастающая;
- в) постоянная.

17. Вычислите значение выражения  $y'(2)$  для заданной функции

$$y = \frac{3}{x} + \sqrt{2x} + 3x.$$

18. Восстановите пропущенное слово в определении.

Геометрический смысл производной. Производная функции в точке равна \_\_\_\_\_ угла наклона касательной, проведённой к графику функции в этой точке.

19. Установите соответствие между функциями и их производными:

$$\text{а) } y = a^x; \quad 1) -\frac{1}{\sin^2 x};$$

$$\text{б) } y = \operatorname{ctg} x; \quad 2) \frac{1}{x \ln a};$$

$$\text{в) } y = \operatorname{sh} x; \quad 3) a^x \ln a;$$

$$\text{г) } y = \log_a x; \quad 4) -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$\text{д) } y = \arccos x. \quad 5) \operatorname{ch} x.$$

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| а | б | в | г | д |
|   |   |   |   |   |

20. Вычислите производную второго порядка заданной функции

$$y = \ln \sqrt[5]{\frac{2-x}{x+2}}.$$

## Раздел 2. Интегрирование функции одной переменной. Числовые ряды.

Эта глава посвящена основным понятиям интегрального исчисления функций одной переменной и теории числовых рядов.

**Определение 1.** Первообразной функции  $f(x)$  называется функция  $F(x)$ , производная которой равна  $f(x)$ , то есть

$$F'(x) = f(x).$$

Пусть  $F(x)$  — какая-нибудь первообразная функции  $f(x)$ . Тогда функция  $F(x) + C$ , где  $C$  — произвольная константа, также является первообразной функции  $f(x)$ . Более того, любая первообразная функции  $f(x)$  имеет вид  $F(x) + C$ .

**Определение 2.** Неопределённым интегралом функции  $f(x)$  называется множество всех первообразных функции  $f(x)$ . Неопределённый интеграл функции  $f(x)$  обозначается символом  $\int f(x) dx$ . В итоге, получаем

$$\int f(x) dx = F(x) + C.$$

**Пример 1.** Докажите, что первообразной функции  $f(x) = 4 \sin 5x - 3x^2 + 1$  является функция  $F(x) = -\frac{4}{5} \cos 5x - x^3 + x$ .

*Решение.* Проверим, что  $F'(x) = f(x)$ . Имеем:

$$F'(x) = -\frac{4}{5}(-\sin 5x) \cdot 5 - 3x^2 + 1 = 4 \sin(5x) - 3x^2 + 1 = f(x).$$

**Пример 2.** Найдите неопределённый интеграл функции  $f(x) = 3 \sin x - 4 \cos x - 5$ .

*Решение.* По правилам интегрирования имеем:

$$\int f(x) dx = 3 \int \sin x dx - 4 \int \cos x dx - 5 \int dx =$$

$$= -3 \cos x - 4 \sin x - 5x + C.$$

**Пример 3.** Вычислите интеграл

$$\int x\sqrt{x-5} \, dx.$$

*Решение.* Сделаем замену переменной:  $\sqrt{x-5} = t$ . Тогда  $x-5 = t^2$ ,  $x = t^2 + 5$ ,  $dx = 2t \, dt$ . Подставив в интеграл, получим

$$\int x\sqrt{x-5} \, dx = \int (t^2 + 5)2t^2 \, dt = \frac{2}{5}t^5 + \frac{10}{3}t^3 + C.$$

Остаётся вернуться к переменной  $x$ .

**Пример 4.** Вычислите интеграл

$$\int x \cos x \, dx.$$

*Решение.* Применим формулу интегрирования по частям, полагая  $u(x) = x$ ,  $dv(x) = \cos x \, dx$ . Тогда

$$\int x \cos x \, dx = x \sin x - \int \sin x \, dx = x \sin x + \cos x + C.$$

**Определение 3.** Определённый интеграл  $\int_a^b f(x) \, dx$  функции  $f(x)$  на отрезке  $[a; b]$  - это число, равное пределу интегральных сумм. С геометрической точки зрения определённый интеграл  $\int_a^b f(x) \, dx$ , где  $f(x) \geq 0$  при  $x \geq 0$ , выражает площадь криволинейной трапеции - фигуры, ограниченной графиком функции  $f(x)$ , прямыми  $x = a$ ,  $x = b$  и осью ОХ.

Имеет место формула вычисления определенного интеграла (формула Ньютона - Лейбница):

$$\int_a^b f(x) dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a),$$

где  $F(x)$  - какая-нибудь первообразная функции  $f(x)$ .

**Пример 5.** Вычислите определённый интеграл

$$\int_0^1 (2x - 1) dx.$$

*Решение.* Ввиду линейности определённого интеграла имеем

$$\begin{aligned} \int_0^1 (2x - 1) dx &= 2 \int_0^1 x dx - \int_0^1 dx = \\ &= x^2|_0^1 - 1 = 1 - 1 = 0. \end{aligned}$$

**Пример 6.** Найдите площадь фигуры, лежащей в первой четверти, ограниченной линиями  $y = x + 1$ ,  $y = \cos x$  и осью ОУ.

*Решение.* Имеем

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^0 (x + 1) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \\ &= \frac{1}{2}(x + 1)^2|_{-1}^0 + \sin x|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

**Определение 4.** Числовой ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  называется сходящимся, если последовательность его частичных сумм  $S_n =$

$\sum_{k=1}^n a_k$  сходится. Значение предела этой последовательности называют суммой ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ . Если же предел не существует, либо равен бесконечности, то говорят что числовой ряд расходится.

**Пример 7.** Докажите, что числовой положительный ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

сходится и найдите его сумму.

*Решение.* По формуле суммы первых  $n$  членов геометрической прогрессии имеем:

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right).$$

Предел этой последовательности равен 2. Следовательно, ряд сходится и его сумма равна 2.

**Пример 8.** Докажите, что числовой положительный ряд

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots$$

сходится и найдите его сумму.

*Решение.* Так как  $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ , то

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Следовательно, последовательность сходится и её предел равен 1. Получаем, что данный числовой ряд является сходящимся и его сумма равна 1.

**Пример 9.** Исследуйте на сходимость положительный числовой ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+0,000000000001}$ , используя признаки сравнения.

*Решение.* Так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n}{n^3+0,000000000001}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{n^3 + 0,000000000001} = 1,$$

то данный ряд сходится, поскольку сходящимся является обобщённый гармонический ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ .

**Пример 10.** Исследуйте на сходимость положительный числовой ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{100^n}{n!}$ .

*Решение.* Для исследования сходимости данного ряда применим признак Д'Аламбера. Имеем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{100^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{100^n}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{100}{n+1} = 0.$$

Так как предел получился равен нулю, меньше 1, то данный ряд сходится.

## Вариант 6.

1. Какое из выражений задаёт  $\int f(x)dx$  ?

- 1)  $\int_a^b f(x)dx, x \in [a; b];$
- 2)  $F(x) + C$ , где  $F'(x) = f(x);$
- 3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i)(x_i - x_{i-1});$
- 4)  $\frac{d}{dx} f(x).$

2. Укажите формулу для вычисления площади криволинейной трапеции  $T = \{a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$ , где  $f(x)$  непрерывная функция на  $[a; b]$ .

- 1)  $\int_a^b f(x)dx;$
- 2)  $\int_a^b |f(x)| dx;$
- 3)  $\int_a^b (f(x))^2 dx;$
- 4)  $\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$

3. Вычислите неопределённый интеграл  $\int \cos 3x dx$ .

4. Сопоставьте функции с их первообразными и заполните таблицу:

| Функции                         | Первообразные                |
|---------------------------------|------------------------------|
| 1) $\frac{1}{x \ln x};$         | A) $\ln  \ln x ;$            |
| 2) $\frac{\cos x}{1 + \sin x};$ | B) $\operatorname{arctg} x;$ |
| 3) $\frac{1}{1 + x^2};$         | C) $\ln  1 + \sin x .$       |

|   |   |   |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
|   |   |   |

5. Вычислите интеграл методом интегрирования по частям  $\int_0^\pi x \sin x dx$ .

6. Вставьте пропущенное слово в предложение.  
 "Если функция  $f(x)$  R-интегрируема на отрезке  $[a; b]$ , то она ... на данном отрезке".

7. Установите соответствие между столбцами (свойства R-интеграла и неравенство/равенство) и заполните таблицу:

- 1) Линейность;
- 2) Аддитивность;
- 3) R-интегрируемость модуля.

A)  $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|;$

B)  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx, c \in [a; b];$

C)  $\int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx, \alpha \in \mathbb{R}.$

|   |   |   |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
|   |   |   |

8. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = x^2$  и  $y = 2x$ .

9. Какие условия присутствуют в определении несобственного интеграла первого рода  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  ?

- 1) Функция  $f(x)$  ограничена на промежутке  $[a; +\infty)$ ;
- 2) Функция  $f(x)$  интегрируема на любом отрезке  $[a; b], b \in [a; +\infty)$ ;
- 3) Функция  $f(x)$  монотонно возрастает на  $[a; +\infty)$ ;
- 4) Функция  $f(x)$  определена для всех  $x \geq a$ .

10. Продолжите фразу:  
 Если предел  $\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_a^\beta f(x) dx$  \_\_\_\_\_, то несобственный интеграл называют сходящимся.

11. Вычислите интеграл  $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^2} (a > 0)$ .

12. Исследуйте несобственный интеграл на сходимость  $\int_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt{x}} - 1}$ .

13. Исследуйте интеграл на сходимость по определению  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 6x + 10}$ .

14. Сформулируйте необходимый признак сходимости числового ряда.

15. Соотнесите достаточный признак сходимости положительного числового ряда  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$  с фамилией ученого, который доказал данный признак, заполните таблицу.

1) Если  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$ , то ряд сходится при  $q < 1$ . При  $q > 1$  расходится;

2) Если  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ , то ряд сходится при  $q < 1$ . Иначе расходится;

3) Если величина  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \cdot \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = q$ , то ряд сходится при  $q > 1$ . Иначе расходится;

А) Д'Аламбер; В) Коши; С) Лейбниц; D) Раабе.

|   |   |   |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
|   |   |   |

16. Найдите сумму ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{5^n}$ .

17. Выберите верный вариант ответа.

Что можно сказать о характере сходимости обобщенного гармонического ряда  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ ?

- 1) Сходится при  $\alpha > 1$ , расходится при  $\alpha \leq 1$ ;
- 2) Сходится при  $\alpha \geq 1$ , расходится при  $\alpha < 1$ ;
- 3) Сходится при  $\alpha \leq 1$ , расходится при  $\alpha > 1$ ;
- 4) Сходится при  $\alpha < 1$ , расходится при  $\alpha \geq 1$ .

18. Исследуйте ряд на сходимость  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$ .

19. Верны ли следующие суждения?

А. По признаку Лейбница можно судить лишь об условной сходимости ряда;

Б. По признаку Лейбница можно судить об абсолютной сходимости ряда;

- 1) Верно только А;
- 2) Верно только Б;
- 3) Оба суждения верны;
- 4) Оба суждения неверны.

20. Сходится ли ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n+1}$  ?

### Вариант 7.

В заданиях 1-5 выберите правильный вариант ответа.

1. Неопределенный интеграл функции  $f(x) = 3x^2$  равен:

- а)  $x^3 + C$ ;
- б)  $6x + C$ ;
- в)  $3x^3 + C$ ;
- г)  $\frac{x^3}{3} + C$ .

2. Определенный интеграл  $\int_0^1 (2x + 1) dx$  равен:
- а) 1;
  - б) 2;
  - в) 3;
  - г) 4.
3. Площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = x^2$  и  $y = 0$  на отрезке  $[0, 2]$ , вычисляется с помощью интеграла...
- а)  $\int_0^2 x^2 dx$ ;
  - б)  $\int_0^2 x dx$ ;
  - в)  $\int_0^2 (2 - x^2) dx$ ;
  - г)  $\int_0^2 (x^2 - 2) dx$ .
4. Что можно сказать о несобственном интеграле  $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$ ?
- а) расходится;
  - б) равен 1;
  - в) равен 0;
  - г) равен  $+\infty$ .
5. Что можно сказать о числовом ряде  $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$ ?
- а) расходится;
  - б) сходится к 1;
  - в) сходится к  $\frac{\pi^2}{6}$ ;
  - г) сходится к 0.

В заданиях 6-8 соотнесите элементы двух столбцов и заполните таблицу.

6. Сопоставьте интегралы с их значениями:

| Интеграл                 | Значение         |
|--------------------------|------------------|
| 1) $\int e^x dx$         | а) $\ln  x  + C$ |
| 2) $\int \frac{1}{x} dx$ | б) $e^x + C$     |
| 3) $\int \cos x dx$      | в) $\sin x + C$  |

|   |   |   |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
|   |   |   |

7. Сопоставьте ряды с их поведением:

| Ряд                     | Сходимость    |
|-------------------------|---------------|
| 1) $\sum \frac{1}{n}$   | а) сходится   |
| 2) $\sum \frac{1}{n^2}$ | б) расходится |
| 3) $\sum \frac{1}{n^3}$ |               |

|   |   |   |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
|   |   |   |

8. Сопоставьте признаки сходимости с их формулировками:

| Признак                |
|------------------------|
| 1) Признак Даламбера   |
| 2) Признак Коши        |
| 3) Необходимый признак |

| Формулировка                                          |
|-------------------------------------------------------|
| а) Если $\lim \sqrt[n]{a_n} < 1$ , ряд сходится       |
| б) Если $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ , ряд сходится |
| в) Если $\lim a_n \neq 0$ , ряд расходится            |

|   |   |   |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
|   |   |   |

В заданиях 9-18 напишите ответ.

9. Найдите  $\int (4x^3 + 2x) dx$ .

10. Вычислите  $\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$ .

11. Найдите площадь под прямой  $y = 2x + 1$ , если  $x$  меняется от 0 до 2 .
12. Вычислите несобственный интеграл  $\int_0^{\infty} e^{-x} dx$ .
13. Исследуйте сходимость ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^3+5n}$ .
14. Исследуйте сходимость числового ряда с помощью признака Даламбера  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^n}$ .
15. Исследуйте сходимость числового ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ .
16. Вычислите определённый интеграл  $\int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos x} dx$ .
17. Исследуйте сходимость несобственного интеграла  $\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx$ .
18. Исследуйте сходимость числового ряда, используя признак Коши  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ .

Закончите предложения в задачах 19-20.

19. Формула Ньютона-Лейбница для определенного интеграла записывается следующим образом:

$$\int_a^b f(x) dx = \underline{\hspace{2cm}}$$

20. Необходимый признак сходимости числового положительного ряда гласит: если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится, то  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

**Вариант 8.**

1. Какие из следующих утверждений верны?
  1. Определенный интеграл можно вычислить только для непрерывных функций;
  2. определенный интеграл не зависит от выбранных пределов интегрирования;
  3. определенный интеграл представляет собой площадь под графиком функции.
2. Чему равно значение несобственного интеграла  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$  ?
  1. 0;
  2. 1;
  3.  $\infty$ .
3. Какой из следующих интегралов является несобственным?
  1.  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ ;
  2.  $\int_0^1 x^3 dx$ ;
  3.  $\int_1^2 \frac{x^2+1}{x} dx$ .
4. Чему равен неопределенный интеграл  $\int (3x^2 + 2) dx$ ?
  1.  $x^3 + 2x + C$ ;
  2.  $6x + C$ ;
  3.  $3x^2 + 2x$ ;

4.  $x^3 + 2x$ .

5. Выберите условие достаточного признака Коши сходимости положительного числового ряда  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ .

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ ;

2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ;

3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot a_n > 1$ ;

4.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$ .

6. Вычислите неопределенный интеграл

$$\int (4\sqrt[3]{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} + \sqrt[4]{x^5}).$$

7. Вычислите несобственный интеграл или докажите его расходимость

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3}.$$

8. Вычислите определенный интеграл

$$\int_{-2}^1 x(x+3)(2x-1)dx + \int_1^5 x(x+3)(2x-1)dx.$$

9. Установите сходимость или расходимость несобственного интеграла

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx.$$

10. Если заданный ряд сходится, найдите его сумму

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

11. Исследуйте сходимость ряда с помощью признака Д'Аламбера

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^n}.$$

12. Исследуйте сходимость ряда с помощью признака Коши

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n}{2n+1} \right)^n.$$

13. Вычислите неопределенный интеграл

$$\int \left( \frac{3-x}{\sqrt[3]{x}} - \frac{x+5}{\sqrt{x}} \right) dx.$$

14. Вычислите определенный интеграл

$$\int_1^3 2e^{2x} dx - \int_3^1 4e^{2x} dx.$$

15. Исследуйте сходимость ряда, применив необходимый признак

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}.$$

16. Дополните фразу.

Если начиная с некоторого номера  $0 \leq a_n \leq b_n$ , то из сходимости ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  следует \_\_\_\_\_ ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , а

из расходимости  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  следует \_\_\_\_\_ ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ .

17. Дополните фразу.

Мощность множества всех первообразных для заданной функции равна \_\_\_\_\_.

18. Заполните таблицу, сопоставив интегралы и их значения.

1.  $\int_0^1 x \, dx;$  **A.** 1;

2.  $\int_1^e \frac{dx}{x};$  **B.**  $\frac{1}{2};$

3.  $\int_0^{\pi} \cos x \, dx.$  **C.** 0.

|   |   |   |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
|   |   |   |

19. Заполните таблицу, сопоставив методы интегрирования неопределенного интеграла с их записями.

1. Интегрирование по частям; **A.**  $\int u \, dv = uv - \int v \, du;$

2. Замена переменной. **B.**  $\int f(x) \, dx = \int f(\phi(t)) \phi'(t) \, dt.$

|   |   |
|---|---|
| 1 | 2 |
|   |   |

20. Заполните таблицу, сопоставив признаки сходимости числового ряда с их формулировками.

- |                         |                                                                                          |
|-------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. Необходимый признак; | <b>A.</b> Если $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L < 1$ , ряд сходится; |
| 2. Признак Д'Аламбера;  | <b>B.</b> Если $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L < 1$ , ряд сходится;       |
| 3. Признак Коши.        | <b>C.</b> $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .                                        |

|   |   |   |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
|   |   |   |

### Вариант 9.

Выберите правильный вариант ответа в заданиях 1-5.

- Что согласно определению, представляет собой неопределенный интеграл  $\int f(x)dx$ ?
  - Производная функции  $f(x)$ ;
  - Множество всех первообразных функции  $f(x)$ ;
  - Площадь криволинейной трапеции;
  - Предел интегральной суммы.
- Какой из интегралов является несобственным?
  - $\int_0^1 x^2 dx$ ;
  - $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$ ;
  - $\int_{-1}^1 \sin x dx$ ;
  - $\int_0^2 e^x dx$ .
- С помощью какого признака можно доказать сходимость числового ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ ?
  - Признак Даламбера;
  - Признак Коши;
  - Необходимый признак сходимости;
  - Признак сравнения.

4. Какую величину можно вычислить с помощью интеграла  $\int_a^b f(x) dx$ ?
- Производную функции  $f(x)$ ;
  - Площадь криволинейной трапеции  $\{a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$ ;
  - Объем тела вращения вокруг оси  $Oy$ ;
  - Площадь поверхности вращения вокруг оси  $Oy$ .

5. Какой из числовых рядов сходится?

- $\sum_{n=1}^{\infty} n$ ;
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ;
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ;
- $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n$ .

6. Установите соответствие между интегралами и их значениями:

| №  | Интеграл                           | Ответ (цифра) |
|----|------------------------------------|---------------|
| а) | $\int_0^1 x dx$                    |               |
| б) | $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$ |               |
| в) | $\int_0^{\pi} \sin x dx$           |               |

Варианты: 1) 1;    2) 2;    3)  $\frac{1}{2}$ .

7. Установите соответствие между рядами и их сходимостью:

| №  | Ряд                                      | Ответ (цифра) |
|----|------------------------------------------|---------------|
| а) | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$        |               |
| б) | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$      |               |
| в) | $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ |               |

Варианты: 1) Сходится абсолютно;    2) Сходится условно;    3) Расходится.

8. Установите соответствие между свойствами функции на отрезке  $[a; b]$  и их формулировками

| Свойство функции                         | Формулировка                                                                          |
|------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
| а) Функция $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$ | 1) $\exists M > 0 :  f(x)  \leq M \forall x \in [a, b];$                              |
| б) Функция $f(x)$ ограничена на $[a; b]$ | 2) $\forall x_0 \in [a, b] \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0);$                   |
| в) Функция $f(x)$ липшицева на $[a; b]$  | 3) $\exists L > 0 : \forall x_1, x_2 \in [a, b]  f(x_1) - f(x_2)  \leq L x_1 - x_2 .$ |

9. Вычислите  $\int (3x^2 + 2x + 1) dx$ .
10. Функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[0, 3]$ . Известно, что:
- $$\int_0^1 f(x) dx = 5,$$
- $$\int_1^2 f(x) dx = -3,$$
- $$\int_2^3 f(x) dx = 4.$$
- Вычислите:  $\int_0^3 (f(x) + 2) dx$ ?
11. Функция  $F(x)$  является первообразной для  $f(x) = \frac{1}{x}$  на интервале  $(0, +\infty)$ . Известно, что  $F(1) = 0$ . Вычислите:  $F(2) + F\left(\frac{1}{2}\right)$ ?
12. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = x^2$ ,  $y = 0$ ,  $x = 1$ .
13. Функция  $f(x)$  имеет вторую производную  $f''(x) = 12x^2 - 4$ . Известно, что график  $f(x)$  проходит через точки  $(0, 3)$  и  $(1, 7)$ . Какое наименьшее значение принимает  $f(x)$  на отрезке  $[-1, 2]$ ?

14. Исследуйте сходимость ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$ .
15. Не проводя вычислений, определите, значение какого из следующих двух интегралов больше:  $\int_0^1 x \, dx$  или  $\int_0^1 \sqrt{x} \, dx$ .
16. Даны две функции:  $f(x) = \arccos\left(\frac{\cos x}{1+2\cos x}\right)$  и  $g(x) = \arccos\left(\frac{\cos x}{1+2\cos x}\right) + 1$ . Чему будет равна разность площадей под графиками этих функций на отрезке  $[a; b]$ ?
17. Найдите сумму ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ .
18. Дана последовательность интегралов:  $I_n = \int_0^1 x^n \, dx$ .  
Чему равен предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$ ?
- Закончите предложения в заданиях 19-20.
19. Формула Ньютона-Лейбница для вычисления  $\int_a^b f(x) \, dx$  имеет вид: \_\_\_\_\_.
20. Числовой ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  сходится при \_\_\_\_\_.

### Вариант 10.

1. Из перечисленных вариантов выберите правильный ответ.
- Пусть  $\Pi: a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$  - разбиение отрезка  $[a; b]$ ,  $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $\lambda(\Pi) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - x_{i-1}|$ ,  $\omega_i(f) = M_i - m_i$  - колебание функции на частичном отрезке.

Что, согласно определению, называется интегралом Римана  $\int_a^b f(x) dx$ ?

$$1) \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1});$$

$$2) \lim_{\lambda(\Pi) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1});$$

$$3) \sum_{i=1}^n \omega_i(f)(x_i - x_{i-1});$$

$$4) \lim_{\lambda(\Pi) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

2. Дополните фразу.

Для того, чтобы функция  $f(x)$ , определенная на отрезке  $[a; b]$ , была интегрируема по Риману ( $R$ -интегрируема) на нём, необходимо, чтобы она была ... на этом отрезке.

3. Вычислите интеграл  $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx$  и выберите правильный ответ:

$$1) 8 - 2 \ln 5;$$

$$2) \ln 5 - \ln 3;$$

$$3) 4 - 2 \ln 3;$$

$$4) 10 e^x.$$

4. Установите соответствие между определениями и их формулами, заполните таблицу:

| Определение                                | Формула |
|--------------------------------------------|---------|
| 1) Формула Ньютона-Лейбница                |         |
| 2) Первообразная $F(x)$ для функции $f(x)$ |         |
| 3) Интегральная сумма                      |         |

$$a) \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1});$$

b)  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ ;

c)  $F'(x) = f(x)$ ;

d)  $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx$ .

5. Вычислите интеграл:  $\int_{-\frac{1}{2}}^4 \frac{x}{\sqrt{1+2x}} dx$ .

6. Вычислите интеграл:  $\int \frac{x^{-2} \sqrt[3]{x^7} + 1 - x^{-2} e^{2x}}{x^{-2}} dx$ .

7. Вычислите интеграл:  $\int (3x - 3) \sin 3x dx$ .

8. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$x = \sqrt{y}, \quad x = \frac{1}{y}, \quad y = 1, \quad y = 3.$$

9. Запишите, чему равен несобственный интеграл  $\int_a^b f(x) dx$  по определению, если точка  $b$  - является особой точкой функции  $f(x)$ .

10. Укажите особые точки для каждой из функций:

| Функция                       | Точка |
|-------------------------------|-------|
| 1) $f(x) = \frac{1}{(5-x)^3}$ |       |
| 2) $f(x) = (\ln x)^{-2}$      |       |
| 3) $f(x) = \frac{1}{e^x - 1}$ |       |

a) 5 ;

b) 0 ;

c) 1 .

11. Вычислите несобственный интеграл:  $\int_{-\infty}^0 e^{2x} x dx$ .

12. Исследуйте несобственный интеграл  $\int_{-1}^0 \frac{2x+1}{x+1} dx$  на схо-

димостью, по определению.

13. Исследуйте несобственный интеграл  $\int_0^{+\infty} \sqrt[3]{x^{-2}} dx$  на сходимость, используя признаки сравнения.

14. Укажите сходящийся ряд:

1)  $\sum_{i=1}^n \sin nx$ ;

2)  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{n}$ ;

3)  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^3}}$ ;

4)  $\sum_{i=1}^n (n^2 + 1)$ .

15. Какой вывод можно сделать о сходимости ряда, если необходимое условие не выполнено ?

1) Ряд сходится условно.

2) Ряд сходится абсолютно.

3) Ряд сходится в среднеквадратичном.

4) Ряд расходится.

16. Установите соответствие между признаками сходимости и их условиями, заполните таблицу:

| Признак сходимости          | Условие |
|-----------------------------|---------|
| 1) Первый признак сравнения |         |
| 2) Второй признак сравнения |         |
| 3) Признак Д'Аламбера       |         |
| 3) Признак Коши             |         |

Пусть  $\sum_{i=1}^n a_n, \sum_{i=1}^n b_n$  - положительные числовые ряды.

а) Конечный предел  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = k$  существует.

При  $k < 1$  - ряд сходится, при  $k > 1$  - ряд расходится.

б) Конечный предел  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = k$ , существует.

При  $k < 1$  - ряд сходится, при  $k > 1$  - ряд расходится.

с) Конечный и отличный от нуля предел  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n}$ , суще-

ствует. Тогда ряды  $\sum_{i=1}^n a_n$  и  $\sum_{i=1}^n b_n$  сходятся или расходятся одновременно.

д) Если сходится больший ряд, то сходится меньший ряд. Если расходится меньший ряд, то расходится больший ряд.

17. Найдите  $n$ -ый член ряда  $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots$  и исследуйте ряд на сходимость, используя признаки сравнения.

18. Исследуйте сходимость ряда:  $\sum_{i=1}^n \frac{2n}{(5n)!}$ .

19. Исследуйте сходимость ряда:  $\sum_{i=1}^n \frac{2^n}{(3n+1)^{2n}}$ .

20. Дополните фразу.

Если ряд из модулей  $\sum_{i=1}^n |a_n|$  - сходится, тогда числовой

ряд  $\sum_{i=1}^n a_n$  сходится ...

### Вариант 11.

1. Вычислите интеграл, используя метод подстановки:

$$\int e^{2x} \sqrt{e^x + 1} dx.$$

2. Выберите правильное утверждение.

Пусть  $\Pi : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  — разбиение отрезка  $[a; b]$ ,  $\lambda(\Pi)$  — его мелкость,  $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$  — отмеченные точки.

Интеграл Римана функции  $f(x)$  на  $[a; b]$  определяется как предел:

$$(a) \lim_{\lambda(\Pi) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i;$$

$$(b) \lim_{\lambda(\Pi) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i;$$

$$(c) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i;$$

$$(d) \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i.$$

3. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = 2x - x^2, y = -x, x = 0, x = 2.$$

4. Для каждой функции укажите её особую точку.

| Функция                          | Особые точки |
|----------------------------------|--------------|
| 1) $f(x) = \frac{1}{x^2-4}$      |              |
| 2) $f(x) = \ln(x-1)$             |              |
| 3) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$ |              |

5. Исследуйте сходимость числового ряда, используя признак Д'Аламбера:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n}.$$

6. Дополните определение.

Функция  $F(x)$  называется \_\_\_\_\_ для функции  $f(x)$  на некотором промежутке, если в каждой точке этого промежутка выполняется равенство

$$F'(x) = f(x).$$

7. Исследуйте на сходимость несобственный интеграл:

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx.$$

8. Вычислите интеграл и выберите правильный ответ:

$$\int_0^1 \frac{x+3}{x^2+6x+8} dx.$$

- (a)  $\ln \frac{3}{2}$ ;
- (b)  $\frac{1}{2} \ln 4$ ;
- (c)  $\frac{1}{2} \ln \frac{15}{8}$ ;
- (d)  $\operatorname{arctg} 2$ .

9. Вычислите несобственный интеграл или установите его расходимость:

$$\int_2^\infty \frac{x+1}{x^3+x} dx.$$

10. Установите соответствие между понятиями и формулами:

| Понятие                                   | Формула |
|-------------------------------------------|---------|
| 1) Интеграл с переменным верхним пределом |         |
| 2) Формула Ньютона-Лейбница               |         |
| 3) Формула интегрирования по частям       |         |
| 4) Формула замены переменной              |         |

- (a)  $\int u dv = uv - \int v du;$
- (b)  $F(x) = \int_a^x f(t) dt;$
- (c)  $\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du;$
- (d)  $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$

11. Что следует из нарушения достаточного условия сходимости числового ряда?

- (a) Ряд сходится условно.
- (b) Ряд сходится абсолютно.
- (c) Ряд расходится.
- (d) Требуется дополнительное исследование.

12. Вычислите интеграл, предварительно упростив выражение:

$$\int \frac{x^{5/2} + 3x^{-1/2} - 2x^{-3/2}}{x^{-1/2}} dx.$$

13. Исследуйте сходимость ряда, используя признак Коши:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n}{2n+1} \right)^n.$$

14. Исследуйте сходимость ряда, используя признак Лейбница:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

15. Вычислите интеграл:  $\int_1^4 \frac{\sqrt{x}+1}{x+2\sqrt{x}} dx.$

16. Дайте определение несобственного интеграла 2-го рода  $\int_a^b f(x)dx$ , если функция  $f(x)$  неограничена в окрестности точки  $a$ .

17. Выберите сходящийся числовой ряд:

(a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2};$

(b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}};$

(c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}};$

(d)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}.$

18. Дополните фразу.

Если числовой ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  расходится, а исходный ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится, то его называют \_\_\_\_\_ сходящимся.

19. Исследуйте на сходимость интеграл, используя признак сравнения:

$$\int_1^{\infty} \frac{x+\sin x}{x^3+5} dx.$$

20. Установите соответствие между признаками сходимости числовых рядов и их формулировками:

| Признак                         | Формулировка |
|---------------------------------|--------------|
| 1) Признак Лейбница             |              |
| 2) Предельный признак сравнения |              |
| 3) Интегральный признак Коши    |              |
| 4) Признак Раабе                |              |

- (a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} < 1$ ;
- (b) Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = C > 0$ , то ряды  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  ведут себя одинаково.
- (c) Для знакопередающегося числового ряда модули членов монотонно убывают и стремятся к нулю.
- (d) Если функция  $y = f(x)$  непрерывна, положительна и убывает, то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$  и интеграл  $\int_1^{+\infty} f(x) dx$  сходятся или расходятся одновременно.
- (e) Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) > 1$ , то ряд сходится; если же предел меньше 1, то ряд расходится; если равен 1 — признак не даёт ответа на вопрос сходимости данного ряда.

## Вариант 12.

1. Вставьте пропущенное словосочетание.

Числовым рядом называется \_\_\_\_\_, состоящая из членов числовой последовательности.

2. Дополните фразу.

Числовой ряд называется сходящимся, если последовательность его частичных сумм \_\_\_\_\_ конечный предел.

В заданиях 3-7 решите неопределенные интегралы, используя различные методы вычисления.

3.

$$\int \sin^2 \frac{x}{2} dx.$$

4.

$$\int \frac{1 + 2x^2}{x^2(1 + x^2)} dx.$$

5.

$$\int (x - 10)^{10} dx.$$

6.

$$\int e^{6x-3} dx.$$

7.

$$\int x^2 e^x dx.$$

В заданиях 8-9 исследуйте несобственные интегралы на сходимость.

8.

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{4 + x^2}.$$

9.

$$\int_{-\infty}^0 \frac{x dx}{9 + x^2}.$$

10. Исследуйте на сходимость числовой ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2}{2n-2}$ .
11. Выясните при каких значениях  $p$  несобственный интеграл сходится

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}.$$

12. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми  $y = x^2 - 3x - 3$ ,  $y = x$ .

13. Сопоставьте элементы столбцов и заполните таблицу

- |                                                                |                       |
|----------------------------------------------------------------|-----------------------|
| 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(2n)!};$                    | <b>A.</b> сходится;   |
| 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{3^n+n^2};$                    | <b>B.</b> расходится; |
| 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^5 n}.$                  |                       |
| 4. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln n+1}{n+1}.$                  |                       |
| 5. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n-3}{5n+1}\right)^{n^2}.$ |                       |

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|   |   |   |   |   |

14. Сопоставьте кривые с их длинами.

- |                                                                                                                                    |                         |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------|
| <b>A.</b> $y = 1 - \ln \sin x, \frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{2};$                                                           | 1. $3\pi^2;$            |
| <b>B.</b> $\begin{cases} x = 6(\cos t + t \sin t) \\ y = 6(\sin t - t \cos t) \end{cases}$                                         | 2. $\frac{1}{2} \ln 3;$ |
| <b>C.</b> $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \cos t - \frac{1}{4} \cos 2t \\ y = \frac{1}{2} \sin t - \frac{1}{4} \sin 2t \end{cases}$ | 3. $\sqrt{2} - 1.$      |

|   |   |   |
|---|---|---|
| A | B | C |
|   |   |   |

15. Сопоставьте кривые с площадями фигур, ограниченных этими кривыми.

**A.**  $x = \sqrt{4 - y^2}$

$y=0$

$y=1$

$x=0$ ;

**B.**  $y = \frac{8}{4+x^2}$

$y = \frac{x^2}{4}$

**C.**  $x = 4 - y^2$ ,

$x = y^2 - 2y$

1.  $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ ;

2. 9;

3.  $2\pi - \frac{4}{3}$ .

|   |   |   |
|---|---|---|
| A | B | C |
|   |   |   |

16. Чему равен объём тела, ограниченного поверхностями  $z = 2x^2 + 18y^2$ ,  $z=6$ ? Выберите правильный вариант ответа.

1.  $\pi$ ;

2.  $2\pi$ ;

3.  $3\pi$ ;

4.  $4\pi$ .

17. Вычислите определенный интеграл  $\int_0^1 x^2 e^{3x} dx$ .

18. Выберите верное утверждение

1. Полярная система координат - двумерная система координат, в которой каждая точка на плоскости однозначно определяется полярным углом.
2. Цилиндрическая система координат имеет вид:

$$\begin{cases} x = \rho \sin \theta \cos \theta, \\ y = \rho \sin \theta \sin \theta, \\ z = \rho. \end{cases}$$

3. Сферическая система координат имеет вид:

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi, \\ y = r \sin \theta \sin \phi, \\ z = r \cos \theta. \end{cases}$$

19. Вставьте пропущенные слова в формулировке признака Дирихле сходимости числового ряда вида  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ .

Пусть частичные суммы ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  \_\_\_\_\_, а последовательность  $\{a_n\}$  монотонна и  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n =$ \_\_\_\_\_.

Тогда ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ \_\_\_\_\_.

20. Вычислите длину дуги кривой  $\rho = 4e^{\frac{4\phi}{9}} - 1$  и выберите верный вариант ответа.

1.  $e^{\frac{4\pi}{9}} - 1$ ;
2. 5;
3.  $5e^{\frac{\pi}{9}}$ ;
4.  $5(e^{\frac{4\pi}{9}} - 1)$ .

### Вариант 13.

1. Закончите предложение и выберите правильный вариант ответа.

Неопределенный интеграл  $\int f(x)dx$  — это

а) площадь криволинейной трапеции  $0 \leq y \leq f(x)$ ,  $x \in [a, b]$ ,  $f(x)$  непрерывна на  $[a, b]$ ;

б) совокупность всех первообразных функции  $f(x)$ ;

в) предел интегральной суммы, при неограниченном измельчении отрезка;

г) дифференциал функции  $f(x)$ .

2. Какое из следующих свойств интеграла Римана является верным?

а) если функция  $f$  интегрируема по Риману  $[a, b]$ , то она дифференцируема на этом отрезке;

б) если  $f(x)$  и  $g(x)$  интегрируемы по Риману на  $[a, b]$ , то их произведение  $f(x) \cdot g(x)$  также интегрируемая функция на  $[a, b]$ ;

в) интеграл Римана не обладает свойством линейности;

г) если функция  $f(x)$  разрывна в конечном числе точек отрезка  $[a, b]$ , то она интегрируема по Риману.

3. Какое из условий является необходимым для сходимости числового ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ?

а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ;

б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ ;

в)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ ;

г)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$ .

4. Исследуйте несобственный интеграл  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$  на сходимость и выберите правильный вариант ответа.

- а) расходится;
- б) равен 2;
- в) равен 1;
- г) сходится и равен 0.

5. Для установления сходимости каких числовых рядов можно применить признак Даламбера?

- а) ряд с отрицательными членами;
- б) ряд с произвольными членами;
- в) ряд с положительными членами;
- г) знакопеременный ряд.

6. Найдите  $\int (3x^2 + 2x - 5)dx$ .

7. Вычислите  $\int_0^{\pi} \sin x dx$ .

8. Определите, сходится ли интеграл  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3}$ ? Если да, то найдите его значение.

9. Исследуйте сходимость ряда  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3n^2+5}$ .

10. Вычислите  $\int_1^e \ln x dx$ .

11. Найдите сумму ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ .

12. Исследуйте сходимость несобственного интеграла

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sin \sqrt[3]{x}}.$$

13. Сходится ли числовой ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ ?

14. Найдите  $\int \frac{dx}{x \ln x}$ .

15. Вычислите  $\int_{-2}^3 |x| dx$ .

16. Продолжи равенство, используя свойство аддитивности интеграла Римана:

$$\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx =$$

(для любых чисел  $a, b, c$ , где  $a < c < b$ ).

17. Вставьте пропущенное слово.

Если функция интегрируема по Риману на отрезке  $[a; b]$ , то она ... на этом отрезке.

18. Сопоставьте ряд и признак, с помощью которого возможно исследовать его на сходимость и заполните таблицу.

1)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{3n}$ ;

2)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ ;

3)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ ;

4)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3}$ ;

а) Признак Д'Аламбера;

б) Признак Коши;

в) Признак Лейбница;

г) Интегральный признак Коши.

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
|   |   |   |   |

19. Продолжите предложение, выбрав правильный вариант ответа. Ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$  сходится при...

а)  $p > 1$

б)  $p \leq 1$

в) любом вещественном  $p$ .

20. Какой из перечисленных признаков применим для исследования сходимости знакопеременных и знакопостоянных числовых рядов?

а) признак Коши;

б) необходимый признак сходимости;

в) признак Лейбница.

## Литература

1. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу / Б. П. Демидович. - М.: Наука, 1977. - 528 с.
2. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г. Н. Берман. - М.: Наука, 1975. - 416 с.
3. Виноградова И. А. Задачи и упражнения по математическому анализу / И. А. Виноградова, С. Н. Олехник, В. А. Садовничий. - М.: Дрофа, 2001. - Ч.2: Ряды, несобственные интегралы, ряды Фурье, Преобразование Фурье. - 712 с.
4. Сборник задач по математическому анализу: Интегралы. Ряды / Л. Д. Кудрявцев, А. Д. Кутасов, В. И. Чехлов, М. И. Шабунин. - М.: Наука, 1986. - 528 с.
5. Л. Д. Кудрявцев, А. Д. Кутасов, В. И. Чехлов, М. И. Шабунин Сборник задач по математическому анализу. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость / Под ред. Л. Д. Кудрявцева. - М.: Наука, 1984.
6. Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа. Т. 1, 2. - М.: Физматлит, 2002.
7. Тер-Крикоров А. М., Шабунин М. И. Курс математического анализа - 2-е изд., переработанное, - М.: Изд-во МФТИ, 2000.