

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С. П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Е. А. ДЕНИСКИНА, О. Ю. СЕМЕНОВА, А. Г. ГЛУШКОВА

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Рекомендовано редакционно-издательским советом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С. П. Королева» в качестве практикума для обучающихся по основным профессиональным образовательным программам высшего образования по направлению подготовки 24.03.04 Авиастроение и по специальностям 24.05.07 Самолёто- и вертолётостроение, 24.05.01 Проектирование, производство и эксплуатация ракет и ракетно-космических комплексов

САМАРА
Издательство Самарского университета

2026

УДК 519.21

ББК 22.171

Д33

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук, доц. А. В. Д о р о ш и н;
канд. физ.-мат. наук, доц. С. Н. Б о г д а н о в

Денискина, Екатерина Александровна

Д33 **Элементы теории вероятностей:** практикум / *Е. А. Денискина, О. Ю. Семенова, А. Г. Глушкова.* — Самара: Издательство Самарского университета, 2026. — 100 с.

ISBN 978-5-7883-2286-5

Практикум содержит основные теоретические сведения, разбор типовых задач, а также задачи для практических занятий и самостоятельной работы обучающихся по одному из разделов высшей математики «Теория вероятностей». Все задачи снабжены ответами.

Практикум выполнен на кафедре высшей математики и предназначен для студентов второго курса, обучающихся по направлению подготовки 24.03.04 Авиационное и по специальностям 24.05.07 Самолётно- и вертолётостроение, 24.05.01 Проектирование, производство и эксплуатация ракет и ракетно-космических комплексов.

УДК 519.21

ББК 22.171

ISBN 978-5-7883-2286-5

© Самарский университет, 2026

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	4
1 Классическое определение вероятности	6
2 Геометрическое определение вероятности	18
3 Действия над вероятностями	24
4 Формула полной вероятности. Формула Байеса	37
5 Повторение опытов. Формула Бернулли. Формула Пуассона	47
6 Дискретные случайные величины	54
7 Непрерывные случайные величины	67
8 Основные законы распределения непрерывных случай- ных величин	81
Варианты для подготовки к контрольной работе	92
Библиографический список	98
Приложение 1	99

ВВЕДЕНИЕ

Теория вероятностей — раздел математики, в котором изучаются закономерности в явлениях и опытах, результаты которых неизвестны.

Исторически первым полем приложения теории вероятностей были азартные игры. Схемы азартных игр представляют собой первые чёткие модели случайных явлений.

В трудах Б.Паскаля, П.Ферма, Я.Бернулли в XVII веке изложены первые попытки проведения расчётов в азартных играх, поэтому именно игровые модели чрезвычайно популярны при изложении теории вероятностей.

В XVIII веке развитие теории вероятностей представлено в трудах К.Гаусса, П.Лапласа, С.Пуассона в связи с широкими возможностями математических методов анализа.

В XIX веке русские математики П.Л.Чебышев, А.А.Марков, А.М.Ляпунов провели обоснование вероятностного метода, доказав ряд предельных теорем. Окончательно теория вероятностей как математическая наука оформилась в 30-х годах XX века, когда А.Н.Колмогоровым было предложено аксиоматическое определение вероятности. А уже со второй половины XX века характерно проникновение теории вероятностей и статистических методов во все отрасли человеческих знаний. Это теоретическая физика, кибернетика, теория информации, теория массового обслуживания, теория надёжности и др. Сегодня теория вероятностей, как прикладная наука, стала одним из надёжных, точных и эффективных способов исследования и прогнозирования реальных процессов и явлений.

В предлагаемой работе рассматриваются основы теории вероятностей. Пособие содержит краткие теоретические сведения по всем ключевым разделам теории вероятностей. В каждом разделе приведены подробные решения основных типовых задач указанного курса и перечень задач для самостоятельного решения различного уровня сложности, снабжённых ответами. Кроме того, пособие содержит варианты контрольных работ по теории вероятностей.

1 КЛАССИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Теоретический материал

Теория вероятностей изучает модели опытов, результатами которых являются случайные события — исходы опыта.

Определение:

Элементарным исходом называют любой простейший, т. е. неделимый в рамках данного опыта, результат опыта. Множество всех элементарных исходов опыта обозначается $\Omega = \{\omega\}$. В результате опыта всегда должен произойти один и только один элементарный исход $\omega \in \Omega$, т. е. появление одного из элементарных исходов исключает появление остальных.

Определение:

Любой набор элементарных исходов, т. е. произвольное подмножество множества элементарных исходов, называют событием. Элементарные исходы, которые являются элементами рассматриваемого подмножества, называют элементарными исходами, образующими это событие, или благоприятствующими данному событию. События обозначают заглавными буквами латинского алфавита: $A, B, C, \dots$

Определение:

Случайным событием называют любое событие, которое может произойти или не произойти в результате некоторого опыта.

Определение:

Событие, состоящее из всех элементарных исходов, т. е. событие, которое обязательно происходит в результате данного опыта, называют достоверным.

Определение:

Событие, не содержащее ни одного элементарного исхода, т. е. событие, которое никогда не может произойти в результате данного опыта, называют невозможным.

Под вероятностью случайного события понимают неотрицательное число, характеризующее возможность наступления данного случайного события (шанс наступления).

Существует несколько видов определений вероятности случайного события: классическое, геометрическое, статистическое.

Если элементарные исходы равновозможны, а их число конечно, то используют классическое определение вероятности.

Классическое определение вероятности:

Классической вероятностью $P(A)$ события A называется отношение числа m элементарных исходов, благоприятствующих событию A , к числу n всех элементарных исходов опыта:

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Непосредственно из классического определения следует:

1. Если A — достоверное событие, то $P(A) = 1$.
2. Если A — невозможное событие, то $P(A) = 0$.
3. Если A — случайное событие, то $0 < P(A) < 1$.

Таким образом, $0 \leq P(A) \leq 1$.

Использование классического определения вероятности предполагает подсчёт количества элементарных исходов некоторого опыта. В случае небольшого числа элементарных исходов, как правило, трудностей не возникает, но если число элементарных исходов достаточно велико или опыт достаточно сложен, то для вычисления m и n возникает необходимость использования формул комбинаторики. В основе решения комбинаторных за-

дач лежат два важных правила: правило сложения и правило умножения.

Правило сложения:

Если некоторый элемент a можно выбрать из множества A k_1 способами, а элемент b можно выбрать из множества B k_2 способами, то выбор «либо a , либо b » можно осуществить $k_1 + k_2$ способами.

Правило умножения:

Если элемент a из множества A можно выбрать k_1 способами, а элемент b из множества B можно выбрать k_2 способами, то выбор «и a , и b » можно осуществить $k_1 \cdot k_2$ способами.

Определение:

Результат выбора k элементов из множества, содержащего n элементов, называют выборкой. Если при этом элемент после выбора возвращается обратно в множество, то выборку называют выборкой с возвращением (с повторением). Если же выбранный элемент не участвует в дальнейшем выборе, то выборку называют выборкой без возвращения (без повторения).

Определение:

Выборка называется упорядоченной, если важен порядок следования элементов в выборке. В противном случае выборка называется неупорядоченной.

Определение:

Размещением из n элементов некоторого множества по k элементов без возвращения называется любая упорядоченная выборка из k различных элементов, принадлежащих данному множеству.

Размещения отличаются друг от друга либо порядком следования элементов, либо составом элементов.

Число всех размещений из n элементов по k элементов без возвращения обозначается символом A_n^k и вычисляется по формуле:

$$A_n^k = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot (n - k + 1).$$

Если в упорядоченной выборке элементы могут повторяться, то эта выборка называется размещением с возвращениями (с повторениями). Число всех размещений из n элементов по k элементов с возвращениями обозначается $\bar{A}_n^k$ и вычисляется по формуле:

$$\bar{A}_n^k = n \cdot n \dots n = n^k.$$

Частным случаем размещений являются перестановки.

Определение:

Перестановкой из n элементов некоторого множества называется размещение без повторений из n элементов этого множества по n элементов.

Перестановки отличаются друг от друга только порядком следования элементов. Число всех перестановок обозначается P_n и вычисляется по формуле:

$$P_n = A_n^n = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 1 = n!$$

Перестановки представляют собой размещения, в которых задействованы все n элементов.

Определение:

Сочетанием из n элементов некоторого множества по k элементов без возвращения называется любая неупорядоченная выборка из k различных элементов, принадлежащих данному множеству.

Сочетания отличаются друг от друга только составом элементов. Число всех сочетаний без возвращений определяется

формулой

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$$

или

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

На практике часто используют следующие свойства сочетаний:

$$C_n^0 = C_n^n = 1; \quad C_n^1 = C_n^{n-1} = n; \quad C_n^k = C_n^{n-k}.$$

Определение:

Сочетаниями с повторениями называют неупорядоченные выборки из k элементов, выбранных из n различных типов элементов, причём элементы одного типа могут повторяться в выборке несколько раз. В отличие от обычных сочетаний, в сочетаниях с повторениями разрешено выбирать один и тот же элемент несколько раз, а порядок выбранных элементов не имеет значения. Число всех таких выборок обозначается $\bar{C}_n^k$ и вычисляется по формуле:

$$\bar{C}_n^k = C_{n+k-1}^k.$$

Примеры решения задач

1.1 На полке магазина стоят 25 бутылок молока, из них 3 бутылки с истёкшим сроком годности. Покупатель наугад берёт 1 бутылку. Какова вероятность того, что покупатель выбрал бутылку с неистёкшим сроком годности?

Решение:

Введём событие A — покупатель выбрал бутылку с неистёкшим сроком годности. Вероятность события A вычисляется как отношение числа благоприятствующих исходов к общему числу возможных исходов, т. к. в рассматриваемой задаче число элементарных исходов конечно и элементарные исходы равнове-

можны. Общее число возможных исходов равно общему числу бутылок молока на полке, т. е. $n = 25$. Число благоприятствующих исходов равно числу бутылок молока с неистёкшим сроком годности, т. е. $m = 25 - 3 = 22$.

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{22}{25}.$$

1.2 В корзине с фруктами 5 груш, 4 яблока и 3 банана. Наудачу выбираются три фрукта. Какова вероятность, что выбраны 1 груша, 1 яблоко и 1 банан?

Решение:

Введём событие A — из корзины выбраны 1 груша, 1 яблоко и 1 банан. Вероятность события A вычисляется как отношение числа благоприятствующих исходов к общему числу возможных исходов, т. к. в число элементарных исходов конечно и элементарные исходы равновозможны:

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Элементарными исходами здесь являются выборки, включающие 3 фрукта. Поскольку порядок фруктов в выборке не важен, рассматриваемая выборка является неупорядоченной и без повторения.

Общее число элементарных исходов n равно числу способов выбрать 3 элемента из 12, т. е. числу сочетаний без повторений $n = C_{12}^3 = 220$.

Число благоприятствующих исходов m будет равно общему количеству способов выбрать 1 грушу, 1 яблоко и 1 банан и определяется путём умножения количества способов выбора каждого вида фруктов: $m = C_5^1 \cdot C_4^1 \cdot C_3^1 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{60}{220} = \frac{3}{11}.$$

1.3 В лифт десятиэтажного дома на первом этаже вошли 4 человека. Каждый из них с равной вероятностью может выйти на любом этаже, начиная со второго. Найти вероятность того, что все пассажиры выйдут на разных этажах.

Решение:

Введём событие A — 4 пассажира выйдут на разных этажах.

Элементарными исходами здесь являются выборки, содержащие 4 номера этажа. Количество этажей, на которых могут выйти пассажиры, составляет 9 (со 2 по 10). В данной задаче рассматриваются выборки с повторениями, т. к. каждый из четырёх человек может выйти на любом этаже. Таким образом, $n = \bar{A}_9^4 = 9^4 = 6561$.

Т. к. число элементарных исходов конечно и элементарные исходы равновозможны, то вероятность события A вычисляется как отношение числа благоприятствующих исходов к общему числу возможных исходов.

Число благоприятствующих исходов m будет равно числу размещений из 9 по 4, т. к. первый пассажир может выйти на любом из девяти этажей, второй — на любом из восьми этажей, третий — на любом из семи этажей, а четвёртый — на любом из шести этажей, т. е. $m = A_9^4 = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$.

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3024}{6561} = \frac{112}{243}.$$

Задачи

1.4 Цифры $1, 2, 3, \dots, 9$, выписанные на отдельные карточки, складывают в ящик и тщательно перемешивают. Наугад вынимают одну карточку. Найти вероятность того, что число, написанное на этой карточке: 1) чётное; 2) двузначное.

Ответ: 1) $\frac{4}{9}$; 2) 0.

1.5 Куб, все грани которого окрашены, распилен на тысячу кубиков одинакового размера, которые затем тщательно перемешаны. Найти вероятность того, что наудачу извлечённый кубик имеет окрашенных граней: 1) одну; 2) две; 3) три.

Ответ: 1) 0,384; 2) 0,096; 3) 0,008.

1.6 Какова вероятность, что взятое наудачу четырёхзначное число кратно пяти?

Ответ: $\frac{1}{5}$.

1.7 Найти вероятность того, что при бросании двух игральных костей в сумме выпадет: а) пять очков; б) не более четырёх очков; в) от трёх до девяти очков включительно.

Ответ: а) $\frac{1}{9}$; б) $\frac{1}{6}$; в) $\frac{29}{36}$.

1.8 На каждой из пяти одинаковых карточек напечатана одна из следующих букв: «а», «м», «р», «т», «ю». После тщательного перемешивания карточек последовательно извлекают по одной карточке и укладывают в ряд в порядке появления. Найти вероятность того, что на четырёх извлечённых карточках можно прочесть слово «юрта».

Ответ: $\frac{1}{120}$.

1.9 Из 9 изделий, одинаковых по внешнему виду, 3 неисправны (брак). Наугад берутся 3 изделия. Определить вероятности событий: 1) все 3 взятые изделия исправны; 2) все 3 — неисправны; 3) окажется 2 исправных и 1 неисправное.

Ответ: 1) $\frac{5}{21}$; 2) $\frac{1}{84}$; 3) $\frac{15}{28}$.

1.10 В ящике 15 шаров: 8 белых, 4 чёрных, 3 красных. Одновременно берутся три шара. Определить вероятности событий: 1) все 3 шара окажутся белыми; 2) шары будут разного цвета.

Ответ: 1) $\frac{8}{65}$; 2) $\frac{96}{455}$.

1.11 Трое студентов условились ехать определённым электропоездом, но не договорились о вагоне. Какова вероятность того, что ни один из них не встретится с другим, если в составе электропоезда 10 вагонов. Предполагается, что все возможные распределения студентов по вагонам равновероятны.

Ответ: $\frac{18}{25}$.

1.12 В лифт семиэтажного дома на первом этаже вошли 3 человека. Каждый из них может выйти на любом этаже, начиная со второго, с равной вероятностью. Найти вероятности событий: 1) все выйдут на четвёртом этаже; 2) все выйдут на одном этаже; 3) все выйдут на разных этажах.

Ответ: 1) $\frac{1}{216}$; 2) $\frac{1}{36}$; 3) $\frac{5}{9}$.

1.13 В коробке 20 шоколадных конфет, из которых 8 — с ореховой начинкой, 7 — с помадной, 5 — с фруктовой. Наудачу из коробки взяли 6 конфет. Какова вероятность, что 3 из них с помадной начинкой, 2 — с фруктовой?

Ответ: $\frac{70}{969}$.

1.14 Чему равна вероятность того, что три определённых лица родились в разные дни недели?

Ответ: $\frac{30}{49}$.

1.15 Абонент забыл последние две цифры телефонного номера, но помнит, что они различны и образуют двузначное число,

меньшее 30. С учётом этого он набирает наугад две цифры. Найти вероятность того, что это будут нужные цифры.

Ответ: $\frac{1}{18}$.

1.16 В ящике находятся 15 деталей, среди которых 10 окрашенных. Сборщик наудачу извлекает 3 детали. Найти вероятность того, что извлечённые детали окажутся окрашенными.

Ответ: $\frac{24}{91}$.

1.17 Набирая номер телефона, абонент забыл последние три цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наудачу. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры.

Ответ: $\frac{1}{720}$.

1.18 В группе 12 студентов, среди которых 8 отличников. По списку наудачу отобраны 9 студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных студентов 5 отличников.

Ответ: $\frac{14}{55}$.

1.19 Шесть человек рассаживаются случайно вдоль одной из сторон квадратного стола. Найти вероятность того, что два определённых лица окажутся рядом.

Ответ: $\frac{1}{3}$.

1.20 Пять человек рассаживаются в ряд случайным образом. Какова вероятность того, что два определённых лица не окажутся рядом?

Ответ: $\frac{3}{5}$.

1.21 Двенадцать человек рассаживаются за круглым столом. Какова вероятность того, что два определённых лица окажутся рядом?

Ответ: $\frac{2}{11}$.

1.22 Колода из 36 карт хорошо перемешана (т. е. все возможные расположения карт равновероятны). Найти вероятности того, что четыре туза расположены рядом.

Ответ: $\frac{1}{1785}$.

1.23 В кондитерской имеются 6 видов пирожных. Очередной покупатель выбил чек на 3 пирожных. Считая, что любой заказываемый набор пирожных равновероятен, вычислить вероятности событий: 1) покупатель заказал пирожные разных видов; 2) покупатель заказал пирожные одного вида.

Ответ: 1) $\frac{5}{14}$; 2) $\frac{3}{28}$.

1.24 Директор вызвал через старосту на воспитательную беседу трёх студентов из шести отстающих. Староста забыл фамилии вызываемых студентов и отправил наудачу трёх отстающих студентов. Какова вероятность того, что староста послал именно тех студентов, которых вызывал директор?

Ответ: $\frac{1}{20}$.

1.25 Три одноклассника Дмитрий, Василий и Андрей решили подать документы в один из четырёх вузов города, причём каждый выбирал себе вуз случайно и независимо от других. Найти вероятности следующих событий: 1) все одноклассники окажутся в разных вузах; 2) все подадут документы в один и тот же вуз.

Ответ: 1) $\frac{3}{8}$; 2) $\frac{1}{16}$.

1.26 Из восьми магазинов с номерами $1, 2, \dots, 8$ для проверки выбирают три. Какова вероятность того, что среди выбранных для проверки магазинов, будут магазины № 1 и № 8?

Ответ: $\frac{3}{28}$.

1.27 На почте имеются марки 10 различных видов. Покупается 15 марок. Какова вероятность того, все купленные марки одного вида?

Ответ: $\frac{5}{653752}$.

1.28 В подразделении 15 пилотов, из них 5 пилотов первого класса. Для проверки лётных навыков выбираются случайным образом 6 человек. Найти вероятность того, что среди выбранных 2 пилота первого класса.

Ответ: $\frac{60}{143}$.

1.29 На шахматную доску наугад ставят две ладьи — белую и чёрную. Найти вероятность того, что ладьи не побьют друг друга.

Ответ: $\frac{7}{9}$.

2 ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Теоретический материал

Геометрическое определение вероятности применяется в случае, когда множество элементарных исходов является бесконечным. Например, при постановке (бросании) точки наугад в некоторую область на прямой, плоскости или в пространстве, при этом считается, что попадание в любую из точек области равновозможно. Классическое определение вероятности в этом случае уже не применимо, поскольку для его использования число элементарных исходов должно быть конечно.

Вероятность в случае бесконечного числа элементарных исходов вычисляется как отношение меры (длины, площади, объёма) множества благоприятствующих исходов к мере всего множества элементарных исходов:

$$P(A) = \frac{mes A}{mes \Omega}.$$

Если рассматриваемая область линейная, то вероятность события будет равна отношению длин отрезков, плоская — отношению площадей областей, пространственная — отношению объёмов областей.

Вероятность события, определённую на основе геометрической схемы, часто называют геометрической вероятностью. Геометрическая вероятность сохраняет отмеченные ранее свойства вероятности в условиях схемы классического определения.

Примеры решения задач

2.1 Загаданы два положительных числа, не превышающих числа 3. Какова вероятность, что произведение этих чисел больше 3?

Решение:

Пусть загаданы два числа x и y : $x \in (0; 3]$, $y \in (0; 3]$.

Событие A — произведение $x \cdot y > 3$.

Каждое загаданное число может быть любым из промежутка $(0; 3]$. Количество возможных значений x и y бесконечно, поэтому воспользуемся геометрическим определением вероятности. Общему количеству исходов соответствует площадь квадрата со стороной 3. Множеству благоприятствующих исходов соответствует площадь криволинейного треугольника, расположенного внутри квадрата и выше гиперболы $y = \frac{3}{x}$ ($x \neq 0$) (рис. 1).

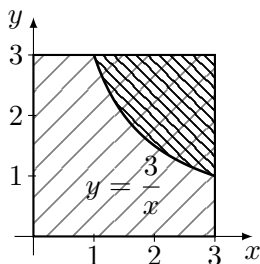


Рисунок 1 – Иллюстрация к задаче 2.1

$$P(A) = \frac{mes A}{mes \Omega} = \frac{S_{\text{крив.треуг}}}{S_{\text{квадр}}},$$

$$S_{\text{квадр}} = 3 \cdot 3 = 9 \text{ ед}^2,$$

$$\begin{aligned}
S_{\text{крив.треуг}} &= \int_1^3 dx \int_{\frac{3}{x}}^3 dy = \int_1^3 \left(3 - \frac{3}{x}\right) dx = (3x - 3 \ln |x|) \Big|_1^3 = \\
&= 6 - 3 \ln 3 \text{ ед}^2, \\
P(A) &= \frac{6 - 3 \ln 3}{9} = \frac{2 - \ln 3}{3} \approx 0,300.
\end{aligned}$$

2.2 (Задача о встрече) Оля и Дима договорились о встрече в парке с 18.00 до 19.00. Пришедший первым ждёт другого в течение 30 минут, после чего уходит. Какова вероятность того, что Оля и Дима встретятся, если каждый из них может прийти в любой момент времени в течение заданного часа?

Решение:

Пусть x — момент прихода Оли, а y — момент прихода Димы. Каждый из ребят может прийти в любой момент времени в течение 60 минут (с 18.00 до 19.00), т. е. $x \in (0; 60]$, $y \in (0; 60]$.

Событие A — Дима и Оля встретятся.

Количество возможных значений x и y бесконечно, поэтому воспользуемся геометрическим определением вероятности. Общему количеству исходов соответствует площадь квадрата со стороной 60, т. к. каждая точка квадрата определяется моментами прихода Димы и Оли в течение 60 минут. Оля и Дима встретятся, если разница в моментах их прибытия на место встречи не будет превосходить 30 минут, т. к. пришедший первым ждёт другого в течение 30 минут, после чего уходит.

Если Дима приходит первым, т. е. $x > y$, то $x - y \leq 30$, а если Оля приходит первой, т. е. $y > x$, то $y - x \leq 30$.

Множеству благоприятствующих исходов соответствует площадь полосы, расположенной внутри квадрата между прямыми $x - y = 30$ и $y - x = 30$ (рис. 2).

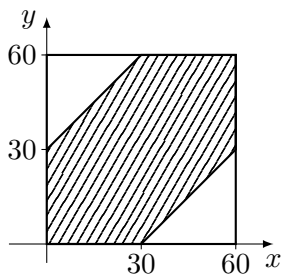


Рисунок 2 – Иллюстрация к задаче 2.2

$$P(A) = \frac{mes A}{mes \Omega} = \frac{S_1}{S_{\text{квадр}}},$$

$$S_{\text{квадр}} = 60 \cdot 60 = 3600 \text{ ед}^2,$$

$$S_1 = S_{\text{квадр}} - 2 S_{\text{треуг}} = 3600 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 60 \cdot 60 = 3600 - 900 = 2700 \text{ ед}^2,$$

$$P(A) = \frac{2700}{3600} = \frac{3}{4} = 0,75.$$

Задачи

2.3 В прямоугольник 5×4 см вписан круг радиуса 1,5 см. Какова вероятность того, что точка, случайным образом поставленная в прямоугольник, окажется внутри круга?

Ответ: 0,353.

2.4 В круге радиуса 10 см находится прямоугольный треугольник с катетами 12 и 7 см. В круг наудачу ставится точка. Найти вероятность того, что она не попадёт в данный треугольник.

Ответ: 0,8663.

2.5 Телефонная линия, соединяющая два узла связи A и B , состоящих друг от друга на расстоянии 3 км, оборвалась в неизвестном месте. Найти вероятность того, что обрыв произошёл не далее, чем в 500 метрах от пункта A .

Ответ: $\frac{1}{6}$.

2.6 Интервал движения трамвая по заданному маршруту 10 мин. Найти вероятность того, что пассажир ждёт трамвай не менее 2 и не более 5 минут.

Ответ: 0,3.

2.7 На отрезке $[0; 3]$ наудачу взяты два числа. Какова вероятность того, что их сумма больше единицы, а произведение меньше единицы?

Ответ: $\frac{1 + 4 \ln 3}{18}$.

2.8 Стержень длины l ломают наудачу на три части. Какова вероятность того, что из трёх полученных частей можно образовать треугольник?

Ответ: $\frac{1}{4}$.

2.9 В течение каждого часа на экране радиолокатора в случайный момент времени появляется объект и находится там 10 минут. Какова вероятность обнаружения объекта, если оператор наблюдает за экраном случайным образом в течение 40 минут каждый час?

Ответ: $\frac{43}{72}$.

2.10 Два лица условились встретиться в определённом месте между 12 и 13 часами. Пришедший первым ожидает другого 20 мин, после чего уходит. Определить вероятность встречи этих лиц, если моменты прихода каждого из них в течение указанного часа равновозможны.

Ответ: $\frac{5}{9}$.

2.11 Автобусы маршрутов A и B прибывают на стоянку в случайные моменты времени на каждом 10-минутном интервале. Стоянка автобуса A — 1 минута, автобуса B — 1,5 мин. Какова вероятность встречи автобусов на этой остановке?

Ответ: 0,234.

2.12 Девушка и юноша договорились встретиться у кинотеатра с 19 до 20 часов. Если девушка придёт раньше юноши, то она будет ждать его не более 10 минут, а юноша обязательно дождётся девушку. Какова вероятность того, что они не встретятся?

Ответ: $\frac{25}{72}$.

3 ДЕЙСТВИЯ НАД ВЕРОЯТНОСТЯМИ

Теоретический материал

Определение:

Событие $\bar{A}$ называется противоположным данному событию A , если оно наступает тогда, когда не наступает данное событие A .

Пусть прямоугольная область на рис. 3 соответствует множеству всех элементарных исходов опыта $\Omega = \{\omega\}$. Противоположное событие эквивалентно операции дополнения, на рис. 3 оно показано серым цветом.

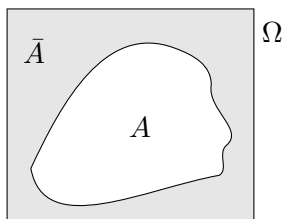


Рисунок 3 – Противоположное событие $\bar{A}$

Определение:

Суммой событий A и B называется новое событие $A + B$, которое наступает тогда, когда наступает либо событие A , либо событие B (одно или оба).

Определение:

Произведением событий A и B называется событие $A \cdot B$, которое наступает тогда, когда оба события A и B наступают одновременно.

Сумма и произведение событий эквивалентны операциям объединения и пересечения множеств, соответствующих данным событиям (рис. 4, 5).

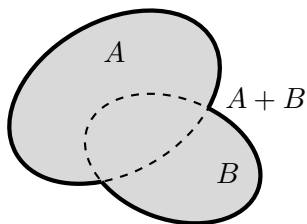


Рисунок 4 – Сумма событий

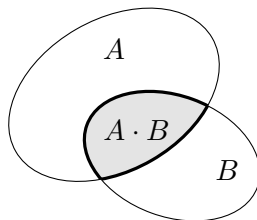


Рисунок 5 – Произведение событий

Определение:

События A и B называются совместными, если появление одного события не исключает появления другого в одном опыте.

Теорема:

Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B).$$

Определение:

События A и B называются несовместными, если они не могут произойти одновременно в одном опыте.

Теорема:

Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Для любого числа попарно несовместных событий справедливо равенство

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n).$$

В частности, вероятность противоположного события:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1 \implies P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

Определение:

События A и B называются взаимно независимыми, если вероятность одного из них не меняется от того, произошло или нет другое события.

Теорема:

Вероятность произведения двух взаимно независимых событий A и B равна произведению вероятностей этих событий

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B).$$

Теорема верна для большего числа независимых событий:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n).$$

Определение:

Вероятность события B , вычисленная при условии, что событие A произошло, называется условной вероятностью события B и обозначается $P(B | A)$.

Теорема:

Вероятность произведения двух зависимых событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого в предположении, что первое событие произошло:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B | A).$$

Обобщение на любое число зависимых событий следующее:

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) \cdot \dots \cdot P(A_n | A_1 A_2 \dots A_{n-1}).$$

В случае, когда события взаимно независимы, условные вероятности превращаются в безусловные.

Примеры решения задач

3.1 Три стрелка делают по одному выстрелу по мишени. Вероятности попадания для каждого равны 0,6, 0,7 и 0,8 соответственно. Найти вероятности следующих событий: а) все 3 стрелка попадут в мишень; б) хотя бы один из стрелков попадёт в мишень; в) только один стрелок попадёт в мишень.

Решение:

Введём вспомогательные события A_k — k -й стрелок попадёт в мишень, где $k = 1, 2, 3$.

Из условия $P(A_1) = 0,6$, $P(A_2) = 0,7$, $P(A_3) = 0,8$.

Событие A — все три стрелка попадут в мишень. Тогда $A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$. Так как события A_1 , A_2 , A_3 независимы, то

$$P(A) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = 0,6 \cdot 0,7 \cdot 0,8 = 0,336.$$

Событие B — хотя бы один стрелок попадёт в мишень. Тогда $B = A_1 + A_2 + A_3$. Так как события A_1 , A_2 , A_3 могут произойти одновременно, то они совместны. Поэтому вероятность их суммы нельзя найти как сумму вероятностей. Перейдём к противоположному событию: $\bar{B}$ — ни один стрелок не попадёт в мишень, т. е. $\bar{B} = \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3$. Так как события $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$, $\bar{A}_3$ независимы, то

$$P(\bar{B}) = P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot P(\bar{A}_3) = 0,4 \cdot 0,3 \cdot 0,2 = 0,024.$$

Следовательно, $P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - 0,024 = 0,976$.

Событие C — только один стрелок попадёт в мишень. Тогда $C = A_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \cdot A_2 \cdot \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot A_3$. Так как суммируемые события несовместны, а множители в каждом слагаемом независимы, то

$$P(C) = P(A_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot P(\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1) \cdot P(A_2) \cdot P(\bar{A}_3) +$$

$$+ P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot P(A_3) = 0,6 \cdot 0,3 \cdot 0,2 + 0,4 \cdot 0,7 \cdot 0,2 + \\ + 0,4 \cdot 0,3 \cdot 0,8 = 0,036 + 0,056 + 0,096 = 0,188.$$

3.2 Из 30 экзаменационных билетов студент выучил только 10. На экзамене он тянет билет до тех пор, пока не возьмёт выученный билет. Найти вероятность того, что будет сделано 3 попытки.

Решение:

Пусть события A_k — выученный билет взят при k -й попытке, где $k = 1, 2, 3$.

Тогда $A = \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot A_3$.

Так как вытянутые в предыдущих попытках билеты не участвуют в дальнейшем выборе, то события A_1 , A_2 и A_3 независимы, то

$$P(A) = P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2 | \bar{A}_1) \cdot P(A_3 | \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2) = \frac{20}{30} \cdot \frac{19}{29} \cdot \frac{10}{28} = \frac{95}{609}.$$

3.3 Игральная кость подбрасывается до первого выпадения «шестёрки». Найти вероятность того, что для этого будет сделано не более трёх попыток.

Решение:

Введём вспомогательные события A_k — «шестёрка» выпадет в k -й попытке, где $k = 1, 2, 3$.

Вероятность $P(A_k) = \frac{1}{6}$ для любого k .

Тогда $A = A_1 + \bar{A}_1 \cdot A_2 + \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot A_3$.

Так как слагаемые в этой сумме являются несовместными событиями, а события A_1 , A_2 и A_3 независимы, то

$$P(A) = P(A_1) + P(\bar{A}_1) \cdot P(A_2) + P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot P(A_3) = \\ = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6} + \frac{5}{36} + \frac{25}{216} = \frac{91}{216}.$$

Задачи

3.4 На стеллаже библиотеки в случайном порядке расставлено 15 учебников, причём 5 из них по математике. Библиотекарь берёт наудачу 3 учебника. Найти вероятность того, что хотя бы один из взятых учебников окажется по математике.

Ответ: $\frac{67}{91}$.

3.5 Два стрелка независимо друг от друга стреляют по одной мишени, делая по одному выстрелу. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка 0,7, а для второго — 0,5. Найти вероятность того, что оба стрелка попадут в мишень.

Ответ: 0,35.

3.6 Прибор содержит генератор и осциллограф. За время работы генератор может выйти из строя с вероятностью 0,3, а осциллограф — с вероятностью 0,2. Отказы осциллографа и генератора не связаны друг с другом. Найти вероятность, что прибор будет работать исправно.

Ответ: 0,56.

3.7 Радист пытается принять сигналы от 3 передатчиков. Сигнал первого передатчика он может принять с вероятностью 0,5, второго — 0,4 и третьего — 0,3. Найти вероятность, что ему удастся принять сигналы от всех передатчиков.

Ответ: 0,06.

3.8 В партии лампочек в среднем 4% брака. Найти вероятность, что среди наугад выбранных двух лампочек окажется хотя бы одна неисправная.

Ответ: 0,0784.

3.9 В первой урне находятся 4 чёрных и 10 белых шаров, а во второй 9 чёрных и 5 белых шаров. Из каждой урны вынули по одному шару. Какова вероятность того, что оба шара окажутся чёрными?

Ответ: $\frac{9}{49}$.

3.10 Два радиста пытаются принять сигнал передатчика. Первый из них сможет это сделать с вероятностью 0,6, а второй — с вероятностью 0,8, независимо друг от друга. Найти вероятность того, что хотя бы одному из них удастся принять сигнал.

Ответ: 0,92.

3.11 Трое учащихся на экзамене независимо друг от друга решают одну и ту же задачу. Вероятности её решения этими учащимися равны 0,8, 0,7 и 0,6, соответственно. Найдите вероятность того, что хотя бы один учащийся решит задачу.

Ответ: 0,976.

3.12 Два стрелка, вероятности попадания в мишень каждого из которых равны 0,7 и 0,8, производят по одному выстрелу. Определить вероятность хотя бы одного попадания в мишень.

Ответ: 0,94.

3.13 Для оповещения об аварии установлены два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сигнализатор сработает, равна 0,95 для первого сигнализатора и 0,9 для второго. Найти вероятность того, что при аварии сработает только один сигнализатор.

Ответ: 0,14.

3.14 В цехе работают три станка. Вероятности отказа в течение смены для станков соответственно равны 0,1, 0,2 и 0,15. Найти вероятность того, что в течение смены безотказно проработают ровно два станка.

Ответ: 0,329.

3.15 Студент знает ответы на 25 экзаменационных вопросов из 60. Какова вероятность сдать экзамен, если для этого необходимо ответить не менее чем на два из трёх вопросов?

Ответ: 0,374.

3.16 Для разрушения моста достаточно попадания одной авиационной бомбы. Найти вероятность того, что мост будет разрушен, если на него будут сброшены четыре бомбы с вероятностями попадания соответственно равными 0,6; 0,7; 0,8; 0,9.

Ответ: 0,9976.

3.17 Экспедиция издательства отправила газеты в три почтовых отделения. Вероятность своевременной доставки газет в первое отделение равна 0,95, во второе — 0,9, в третье — 0,8. Найти вероятность следующих событий: а) только одно отделение получит газеты вовремя; б) хотя бы одно отделение получит газеты с опозданием.

Ответ: а) 0,032; б) 0,316.

3.18 Три стрелка производят по одному выстрелу по одной мишени. Вероятности попаданий при этом равны 0,4; 0,6; 0,7. Найти вероятность того, что в мишени будет: а) ровно одна пробоина; б) хотя бы одна пробоина; в) ровно две пробоины; г) хотя бы две пробоины.

Ответ: а) 0,324; б) 0,928; в) 0,436; г) 0,604.

3.19 Зенитное орудие ведёт огонь по самолёту до первого попадания. Вероятность попадания при одном выстреле равна 0,3. Какова вероятность того, что будет сделано: а) три выстрела; б) не более трёх выстрелов?

Ответ: а) 0,147; б) 0,657.

3.20 Определить вероятность того, что студенту потребуется не более трёх попыток для сдачи экзамена, если вероятность успеха при каждой попытке равна 0,7.

Ответ: 0,973.

3.21 Найти вероятность того, что автомобиль проедет не более трёх светофоров без остановки, если каждый светофор разрешает или запрещает дальнейшее движение с равной вероятностью.

Ответ: $\frac{15}{16}$.

3.22 Двое поочерёдно бросают монету. Выигрывает тот, у кого раньше выпадет герб. Определить вероятность выигрыша для каждого из игроков.

Ответ: $\frac{2}{3}$ и $\frac{1}{3}$.

3.23 Два стрелка поочерёдно стреляют по мишени до первого попадания. Вероятность попадания для первого стрелка 0,2, а для второго — 0,3. Найти вероятность того, что первый стрелок сделает больше выстрелов, чем второй.

Ответ: $\frac{5}{11}$.

3.24 Вероятность попадания охотником в удаляющуюся цель при первом выстреле равна 0,8 и уменьшается с каждым выстрелом на 0,1. Найти вероятность того, что для поражения цели будет достаточно трёх попыток.

Ответ: 0,976.

3.25 В магазине выставлены для продажи 10 изделий, среди которых 4 изделия некачественные. Какова вероятность того, что взятые последовательно, по одному 2 изделия будут некачественными.

Ответ: $\frac{2}{15}$.

3.26 На складе находятся 26 деталей, из которых 13 стандартные. Рабочий берёт 2 детали последовательно, по одной и без возвращения. Определить вероятность того, что обе детали окажутся стандартными.

Ответ: $\frac{6}{25}$.

3.27 Ребёнок имеет на руках пять кубиков с буквами: А, К, К, Л, У. Какова вероятность того, что ребёнок соберёт из кубиков слово КУКЛА?

Ответ: $\frac{1}{60}$.

3.28 Абонент забыл последнюю цифру номера телефона и поэтому набирает её наугад. Определить вероятность того, что ему придётся звонить не более чем в три места.

Ответ: 0,3.

3.29 В двух ящиках находятся одинаковые шары, отличающиеся только цветом. Причём в первом ящике 5 белых, 11 чёрных и 8 красных шаров, во втором — соответственно 10, 8 и 6.

Из каждого ящика наугад извлекается по одному шару. Найти вероятность того, что оба шара будут одного цвета.

Ответ: $\frac{31}{96}$.

3.30 В партии из 23 деталей находятся 10 бракованных. Из партии наугад последовательно по одному без возвращения извлекают две детали. Какова вероятность того, что обе детали окажутся бракованными.

Ответ: $\frac{45}{253}$.

3.31 В урне имеется 3 белых и 4 чёрных шара. Из урны последовательно по одному без возвращения извлекают три шара. Найти вероятность, что хотя бы один из них окажется белым.

Ответ: $\frac{31}{35}$.

3.32 Новому работнику предоставляются три попытки проявить свои способности. Вероятность того, что ему удастся это с первой попытки, равна 0,2, со второй — 0,3, с третьей — 0,4. Найти вероятность того, что работник проявит свои способности по крайней мере один раз.

Ответ: 0,664.

3.33 В урне 20 белых и 6 чёрных шаров. Из неё по одному вынимают два шара. После возвращения первого шара в урну шары перемешиваются. Найти вероятность того, что оба шара чёрные.

Ответ: $\frac{9}{169}$.

3.34 Из 6 ламп, среди которых 2 неисправные, выбирается 1 исправная лампа путём включения в сеть. Определить вероятность того, что придётся сделать не более двух включений.

Ответ: $\frac{14}{15}$.

3.35 12 деталей, из которых 3 неисправны, укладываются в коробки по 4 детали. Найти вероятность того, что в каждой коробке будет по одной неисправной детали.

Ответ: $\frac{16}{55}$.

3.36 Вероятность хотя бы одного попадания в цель при четырёх выстрелах равна 0,9984. Найти вероятность попадания в цель при одном выстреле.

Ответ: 0,8.

3.37 Сколько раз нужно бросить пару игральных костей, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,5, хотя бы один раз появилась сумма очков, равная 12?

Ответ: $n \geq 25$.

3.38 Определить вероятность безотказной работы за время T устройств, изображённых на рис. 6, если вероятность безотказной работы за время T составляющих элементов равна 0,8 и элементы выходят из строя независимо друг от друга.

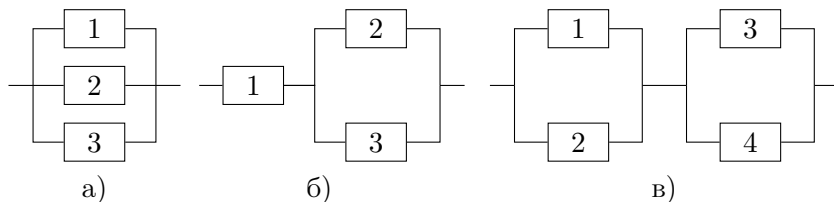


Рисунок 6 – К задаче 3.38

Ответ: а) 0,992; б) 0,768; в) 0,9216.

3.39 Элементы с номерами 1, 2, 3, 4 соединены в схемы, изображенные на рис. 7. Предполагается, что элементы в схемах

работают независимо друг от друга и имеют вероятности безотказной работы 0,6, 0,6, 0,7, 0,7, соответственно. Определить вероятность безотказной работы каждой схемы.

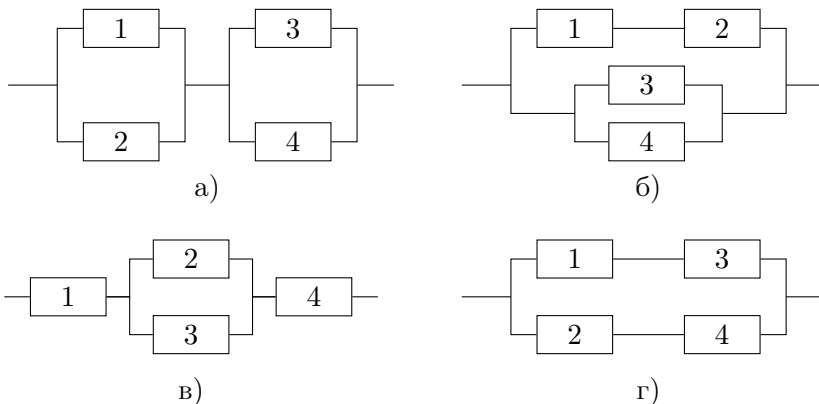


Рисунок 7 – К задаче 3.39

Ответ: а) 0,7644; б) 0,9424; в) 0,3696; г) 0,6636.

3.40 Происходит бой между истребителем X и бомбардировщиком Y . Стрельбу начинает X и сбивает Y с вероятностью 0,2. Если после этого Y не сбит, то он отвечает огнём и сбивает X с вероятностью 0,3. Если X не сбит, то он снова открывает огонь и уничтожает Y с вероятностью 0,4, дальше бой не продолжается. Найти вероятность того, что а) будет сбит X ; б) будет сбит Y .

Ответ: а) 0,24; б) 0,424.

4 ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ. ФОРМУЛА БАЙЕСА

Теоретический материал

Пусть события $H_1, H_2, \dots, H_n$ (гипотезы) попарно несовместны и представляют собой полную группу исходов данного опыта, т. е.

$$H_1 + H_2 + \dots + H_n = \Omega, \quad \sum_{i=1}^n P(H_i) = 1.$$

Теорема:

Пусть событие A может произойти только вместе с одной из гипотез $H_1, H_2, \dots, H_n$. Для любого события A , являющегося результатом данного опыта, справедлива формула полной вероятности:

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A | H_i).$$

Теорема:

Если в результате некоторого опыта наступило событие A , то вероятности гипотез H_j при условии, что событие A произошло, определяются по формуле:

$$P(H_j | A) = \frac{P(H_j) \cdot P(A | H_j)}{P(A)}, \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Это равенство называется формулой Байеса.

Формула Байеса позволяет переоценивать вероятности гипотез на основе даже одного эксперимента, что особенно ценно, когда каждый эксперимент сложен и дорог.

Вероятности гипотез $P(H_i), i = \overline{1, n}$ называются априорными, а условные вероятности гипотез $P(H_i | A)$ называются апостериорными.

Примеры решения задач

4.1 Имеется две коробки с конфетами. Вероятность извлечь конфету с ореховой начинкой из первой коробки равна 0,7, а из второй — 0,8. Найти вероятность того, что наудачу взятая конфета из наудачу выбранной коробки будет с ореховой начинкой.

Решение:

Пусть событие A — взятая конфета с ореховой начинкой.

Событие A может произойти только при наступлении одного из событий (гипотезы): H_1 — конфета взята из первой коробки; H_2 — конфета взята из второй коробки. События H_1 и H_2 попарно несовместны и образуют полную группу событий. Поскольку вероятности выбрать первую или вторую коробку одинаковы, то $P(H_1) = P(H_2) = \frac{1}{2}$.

$P(A | H_1)$ — вероятность того, что взятая конфета с ореховой начинкой при условии, что её взяли из первой коробки. По условию задачи $P(A | H_1) = 0,7$.

$P(A | H_2)$ — вероятность того, что взятая конфета с ореховой начинкой при условии, что её взяли из второй коробки. По условию задачи $P(A | H_2) = 0,8$.

Тогда вероятность события A вычисляется по формуле полной вероятности.

$$\begin{aligned} P(A) &= P(H_1) \cdot P(A | H_1) + P(H_2) \cdot P(A | H_2) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 0,7 + \frac{1}{2} \cdot 0,8 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

4.2 На предприятие аэрокосмической отрасли поступают комплектующие детали от трёх поставщиков в соотношении 2 : 3 : 5. Вероятность того, что комплектующая деталь не соответствует стандарту, у первого поставщика равна 0,1, у второго — 0,05, а у третьего — 0,2. На проверку взята комплектующая

деталь, она оказалась соответствующей стандарту. Какова вероятность того, что выбранная комплектующая деталь поступила на предприятие от третьего поставщика?

Решение:

Пусть событие A — выбранная комплектующая деталь соответствует стандарту.

Вероятность того, что выбранная комплектующая деталь соответствует стандарту, зависит от того, какой поставщик поставил эту деталь.

Пусть событие (гипотеза) H_i — выбранная на проверку комплектующая деталь поступила от i -го поставщика ($i = 1, 2, 3$). Комплектующие поступают на предприятие от трёх поставщиков в соотношении $2 : 3 : 5$, поэтому

$$P(H_1) = \frac{2}{10}, \quad P(H_2) = \frac{3}{10}, \quad P(H_3) = \frac{5}{10}.$$

События H_1 , H_2 и H_3 попарно несовместны и образуют полную группу событий, т. е. $P(H_1) + P(H_2) + P(H_3) = 1$.

Тогда условные вероятности события A равны

$$P(A | H_1) = 0,9, \quad P(A | H_2) = 0,95, \quad P(A | H_3) = 0,8.$$

Для вычисления вероятности того, что выбранная комплектующая поступила на предприятие от третьего поставщика, применим формулу Байеса:

$$\begin{aligned} P(H_3 | A) &= \frac{P(H_3) \cdot P(A | H_3)}{P(A)} = \\ &= \frac{P(H_3) \cdot P(A | H_3)}{P(H_1) \cdot P(A | H_1) + P(H_2) \cdot P(A | H_2) + P(H_3) \cdot P(A | H_3)} = \\ &= \frac{\frac{5}{10} \cdot 0,8}{\frac{2}{10} \cdot 0,9 + \frac{3}{10} \cdot 0,95 + \frac{5}{10} \cdot 0,8} \approx 0,672. \end{aligned}$$

Задачи

4.3 Три датчика посылают сигналы в общий канал связи, причём первый из них посылает вдвое больше сигналов, чем второй или третий. Вероятность получить искажённый сигнал от первого датчика равна 0,06, от второго — 0,08, а от третьего — 0,04. Какова вероятность получить неискажённый сигнал из общего канала связи?

Ответ: 0,94.

4.4 Низкая облачность в районе аэродрома бывает в среднем 28 дней в году. Вероятность благополучной посадки самолёта в этом случае равна 0,93. При хорошей погоде эта вероятность равна 0,99. Какова вероятность того, что в случайно выбранный день посадка будет благополучной (в году 365 дней)?

Ответ: 0,985.

4.5 В первом ящике 5 белых и 5 чёрных шаров, во втором — 9 белых и 1 чёрный. Из обоих ящиков извлекается по 1 шару, а затем из них наугад берётся 1 шар. Какова вероятность того, что этот шар белый?

Ответ: 0,7.

4.6 Группа студентов состоит из 2 отличников, 10 хорошо успевающих и 18 слабо занимающихся. Отличники на предстоящем экзамене могут получить только отличные оценки. Хорошо успевающие студенты могут получить с равной вероятностью хорошие и отличные оценки. Слабо занимающиеся могут получить с равной вероятностью хорошие, удовлетворительные и неудовлетворительные оценки. Для сдачи экзамена вызывает-

ся наугад один студент. Найти вероятность того, что он получит хорошую или отличную оценку.

Ответ: $\frac{3}{5}$.

4.7 Сборщик получил 3 ящика деталей: в первом — 40 деталей из них 20 окрашенных; во втором — 50, из них 10 окрашенных; в третьем — 30 деталей, из них 15 окрашенных. Найти вероятность того, что извлечённая наугад деталь из наудачу взятого ящика будет окрашена.

Ответ: $\frac{2}{5}$.

4.8 Определить вероятность того, что 10 ламп, взятых из 100, окажутся исправными, если число неисправных ламп на сотню равномерно от нуля до двух.

Ответ: 0,903.

4.9 Производятся 2 независимых выстрела снарядами по резервуару с горючим. Каждый снаряд попадает в резервуар с вероятностью 0,3. Если в резервуар попал один снаряд, то горючее воспламеняется с вероятностью 0,8, если два, то всегда воспламеняется. Найти вероятность того, что при двух выстрелах горючее воспламенится.

Ответ: 0,426.

4.10 В магазин поступают однотипные консервы от четырёх поставщиков. Вероятность брака для каждого из поставщиков равна соответственно 0,04; 0,03; 0,06 и 0,02. От первого поставщика получено 300 банок консервов, от второго — 200, от третьего — 500, от четвёртого — 250. Какова вероятность того, что купленная банка окажется бракованной?

Ответ: 0,0424.

4.11 В правом кармане 4 монеты по 2 руб. и 1 монета по 5 руб., в левом — 6 монет по 2 руб. и 3 монеты по 5 руб. Из правого кармана в левый переложили 3 монеты, затем из левого кармана берётся одна монета. Определить вероятность того, что она окажется достоинством в 2 руб.

Ответ: 0,7.

4.12 В ящике 15 мячей, из которых девять новых. Для первой игры берутся три мяча, которые после игры возвращаются обратно. Определить вероятность того, что три мяча, взятые для второй игры, окажутся новыми.

Ответ: 0,089.

4.13 В цехе два типа станков одинаковой производительности, выпускающих однотипные изделия. Брак составляет 15% для станков I типа и 5% для станков II типа. Взятое наугад изделие оказалось неисправным. Найти вероятность того, что оно изготовлено на станке I типа.

Ответ: 0,75.

4.14 На склад поступает продукция трёх фабрик, причём продукция первой фабрики составляет 20%, второй — 46%, третьей — 34%. Известно, что средний процент нестандартных изделий для продукции первой фабрики равен 3%, для второй — 2%, а для третьей — 1%. Найти вероятность того, что наудачу взятое изделие произведено на первой фабрике, если оно оказалось нестандартным.

Ответ: 0,3226.

4.15 По шоссе, на котором стоит АЗС, проезжают грузовые и легковые машины в соотношении 3:2. Вероятность того, что будет заправляться грузовая машина, равна 0,1; для легковой машины эта вероятность равна 0,2. К АЗС подъехала для заправки машина. Найти вероятность того, что это грузовая машина.

Ответ: $\frac{3}{7}$.

4.16 В группе из 24 студентов три отличника и 10 хорошистов. Из 30 вопросов на экзамене отличник выучил все вопросы, хорошист — 25 вопросов и троечник — 20 вопросов. Вызванный наугад студент ответил на вопрос. Какова вероятность того, что он отличник?

Ответ: $\frac{9}{56}$.

4.17 В ящике лежит один шар неизвестного цвета, белый или чёрный. В ящик опускается белый шар. После смешивания из двух шаров берётся один. Он оказался белым. Какова вероятность того, что в ящике остался белый шар?

Ответ: $\frac{2}{3}$.

4.18 На складе магазина имеются 70% мониторов, изготовленных на заводе №1, остальные изготовлены заводом №2. Вероятность того, что монитор не выйдет из строя в течение гарантийного срока для монитора, изготовленного на заводе №1, равна 0,8; на заводе №2 — 0,7. Наудачу взятый монитор выдержал гарантийный срок. Какова вероятность того, что он изготовлен заводом №2?

Ответ: $\frac{3}{11}$.

4.19 В трёх магазинах продаются арбузы, причём отличные среди них составляют соответственно 50, 80 и 85%. Выбрав наудачу

чу магазин, покупатель приобрёл арбуз, оказавшийся отличного качества. Найти вероятность того, что арбуз куплен во втором магазине.

Ответ: $\frac{16}{43}$.

4.20 Из 10 винтовок 4 не проверены в прицельной стрельбе. Вероятность попадания в цель из проверенной винтовки равна 0,9, из непроверенной — 0,3. Из наугад взятой винтовки произведено два выстрела по мишени. Найти вероятность того, что в мишени будет две пробоины.

Ответ: 0,522.

4.21 В первой урне 5 белых и 10 чёрных шаров, во второй — 3 белых и 7 чёрных шаров. Из второй урны в первую переложили 1 шар, а затем из первой урны наугад вынули 1 шар. Определить вероятность того, что вынутый шар — белый.

Ответ: $\frac{53}{160}$.

4.22 В коробке 10 изделий число бракованных равновозможно от нуля до двух. Взятое наугад изделие оказалось бракованным. Найти вероятность того, что оставшиеся в коробке изделия исправны.

Ответ: $\frac{1}{3}$.

4.23 Вероятность попадания в мишень трёх стрелков равны $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{4}$ и $\frac{2}{3}$, соответственно. При одновременном выстреле всех стрелков в мишени оказалось две пробоины. Найти вероятность того, что промахнулся третий стрелок.

Ответ: $\frac{6}{13}$.

4.24 В пирамиде 10 винтовок, из которых 4 снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,95, для винтовок без оптического прицела эта вероятность равна 0,8. Стрелок поразил мишень из наудачу взятой винтовки. Что вероятнее: стрелок использовал винтовку с оптическим прицелом или без него?

Ответ: $P = \frac{24}{43}$ — из винтовки без оптического прицела.

4.25 Три преподавателя принимают экзамен. За один час первый преподаватель успевает опросить троих студентов, второй — четверых, а третий — пятерых. Первый преподаватель в среднем ставит оценку «неудовлетворительно» каждому второму студенту, второй — каждому третьему, третий — каждому четвертому. Какова вероятность того, что студент, пришедший на экзамен, сдаст его?

Ответ: $\frac{95}{144}$.

4.26 Вероятность выхода самолёта на заданный пункт на больших высотах равна 0,8, на средних — 0,95, на малых — 0,6. Известно, что на малых высотах производятся 70% всех полётов, на средних — 10%, на больших — 20%. Найти вероятность того, что полёт происходил на малой высоте, если известно, что самолёт вышел на заданный пункт.

Ответ: 0,622.

4.27 В коробке две неотличимые по виду и по весу игральные кости: одна «правильная», другая «неправильная»: с неравномерным распределением массы по объёму. При случайном броске на «неправильной» кости «6» появляется с вероятностью $\frac{1}{3}$,

«1» — с вероятностью $\frac{1}{9}$, остальные цифры выпадают с равной вероятностью. Наугад взятая из коробки кость была подброшена и в результате выпала «6». Найти вероятность того, что была подброшена «правильная» кость.

Ответ: $\frac{1}{3}$.

4.28 В цель выпущено три торпеды. Вероятность попадания первой торпеды 0,5, второй — 0,6, третьей — 0,8. Если в цель попадёт одна торпеда, то она взрывается с вероятностью 0,6; если две, то с вероятностью 0,8; если три, то обязательно взрывается. Найти вероятность того, что цель не взорвётся.

Ответ: 0,236.

5 ПОВТОРЕНИЕ ОПЫТОВ. ФОРМУЛА БЕРНУЛЛИ. ФОРМУЛА ПУАССОНА

Теоретический материал

Пусть некоторый опыт повторяется при неизменных условиях несколько раз, и эти повторения не зависят друг от друга, т. е. реализуется последовательность независимых испытаний.

Определение:

Несколько испытаний называются независимыми, если исходами испытаний являются независимые события.

Определение:

Последовательность n независимых испытаний, в каждом из которых может произойти некоторое событие A (его называют «успехом») с вероятностью $P(A) = p$ или противоположное ему событие $\bar{A}$ (его называют «неудачей») с вероятностью $P(\bar{A}) = q = 1 - p$, называется схемой испытаний Бернулли.

Теорема:

Если производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A постоянна и равна p , а вероятность не появления события A равна $q = 1 - p$, то вероятность того, что событие A наступит ровно m раз в n испытаниях вычисляется по формуле Бернулли:

$$P_{m,n} = P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}.$$

Использование формулы Бернулли при больших значениях n и m связано с громоздкими вычислениями. Существуют приближённые формулы, обеспечивающие необходимую точность при большом количестве испытаний.

Если вероятность появления события A крайне мала, т. е. A является редким событием, но количество испытаний n велико,

то применяется приближённая формула Пуассона:

$$P_{m,n} = P_n(m) \approx \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}, \quad \lambda = np.$$

Обычно приближённую формулу Пуассона применяют, когда $n \geq 50$, а $\lambda = np \leq 10$.

Примеры решения задач

5.1 Производятся четыре независимых выстрела по мишеням. Найти вероятность того, что мишень будет поражена три раза, если вероятность попадания при одном выстреле равна 0,6.

Решение:

В задаче реализуется серия испытаний Бернулли, т. к. испытания независимы, а вероятность наступления события «Поражение мишени» постоянна, причём $n = 4$, $p = 0,6$, $q = 1 - p = 0,4$.

Требуется вычислить вероятность того, что событие наступит 3 раза в 4 испытаниях. Согласно формуле Бернулли:

$$P_{m,n} = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m},$$
$$P_{3,4} = C_4^3 \cdot 0,6^3 \cdot 0,4^1 = 4 \cdot 0,216 \cdot 0,4 = 0,3456.$$

5.2 Вероятность выпуска бракованной микросхемы равна 0,015. Микросхемы укладываются в коробки по 100 штук. Найти вероятность того, что в наудачу выбранной коробке не окажется ни одной бракованной микросхемы.

Решение:

В данной задаче реализуется серия испытаний Бернулли, так как испытания независимы, а вероятность наступления события «Выпуск бракованной микросхемы» постоянна, причём $n = 100$, а $p = 0,015$.

Требуется определить вероятность того, что событие наступит 0 раз в 100 испытаниях, т.е. в выбранной коробке не окажется ни одной бракованной микросхемы.

Так как число испытаний велико $n = 100$, вероятность наступления события $p = 0,015$ мала и $\lambda = n \cdot p = 100 \cdot 0,015 = 1,5 < 10$, то применима формула Пуассона:

$$P_{m,n} \approx \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!},$$
$$P_{0,100} \approx \frac{1,5^0 \cdot e^{-1,5}}{0!} = 0,223.$$

Задачи

5.3 Технический контроль проверяет изделия, каждое из которых независимо от других изделий может с вероятностью 0,1 оказаться дефектным. Какова вероятность того, что из пяти проверенных изделий только одно оказалось дефектным?

Ответ: 0,328.

5.4 В результате обследования были выделены семьи, имеющие по четыре ребенка. Считая вероятности появления мальчика и девочки в семье равными, определить вероятности того, что в семье: а) один мальчик; б) два мальчика.

Ответ: а) 0,25; б) 0,375.

5.5 Среди изделий, произведённых на станке-автомате, в среднем бывает 60% изделий первого сорта. Какова вероятность того, что среди 6 наудачу отобранных изделий будет: а) от 2 до 4 изделий первого сорта; б) не менее 5 изделий первого сорта; в) хотя бы одно изделие не первого сорта.

Ответ: а) 0,726; б) 0,233; в) 0,953.

5.6 Устройство состоит из 8 независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента за время T равна 0,2. Устройство не срабатывает в случае отказа трёх и более элементов. Найти вероятность этого события.

Ответ: 0,203.

5.7 В семье пятеро детей. Считая, что вероятность рождения мальчика равна 0,4, найти вероятность того, что среди этих детей есть не менее двух девочек.

Ответ: 0,913.

5.8 В среднем каждый десятый договор страховой компании завершается выплатой по страховому случаю. Компания заключила пять договоров. Найти вероятность того, что страховой случай наступит: а) один раз; б) хотя бы один раз.

Ответ: а) 0,328; б) 0,410.

5.9 Вероятность того, что при броске мяча баскетболист попадёт в корзину, равна 0,3. Найти наивероятнейшее число попаданий при восьми бросках и соответствующую вероятность.

Ответ: 2 попадания с вероятностью 0,296.

5.10 Аппаратура содержит 5000 одинаково надёжных элементов, вероятность отказа для каждого из которых равна 0,0002. Какова вероятность отказа только одного из элементов?

Ответ: 0,368.

5.11 АТС производит в среднем 3000 операций в час, из которых в среднем 0,2% оказываются дефектными. Определить вероятность того, что в течение часа будет не более 4 дефектных операций.

Ответ: 0,285.

5.12 В институте 730 студентов. Какова вероятность того, что 1 января является днём рождения: а) трёх студентов; б) не более трёх студентов?

Ответ: а) 0,180; б) 0,857.

5.13 В новом микрорайоне поставлено 10000 кодовых замков на входных дверях домов. Вероятность выхода из строя одного замка в течение месяца равна 0,0002. Найти вероятность того, что за месяц откажет ровно 1 замок.

Ответ: 0,271.

5.14 Среди семян пшеницы в среднем 0,5% невсхожих. Определить вероятность того, что при случайном отборе 1000 семян окажется не менее трёх невсхожих?

Ответ: 0,875.

5.15 Прядильщица обслуживает 800 веретен. В течение часа происходит обрыв пряжи в среднем на четырёх веретенах. Какова вероятность того, что в течение часа пряжа оборвётся не более чем на пяти веретенах?

Ответ: 0,785.

5.16 Завод отправил в торговую сеть 500 изделий. Вероятность повреждения изделия в пути равна 0,003. Найти вероятность того, что при транспортировке будет повреждено: а) ни одного изделия, б) ровно три изделия, в) не более трёх изделий.

Ответ: а) 0,223; б) 0,126; в) 0,934.

5.17 Применяемый метод лечения в 70% случаев приводит к выздоровлению. Найти вероятность того, что из четырёх больных поправятся: а) трое; б) хотя бы один; в) найти наимвероятнейшее количество поправившихся больных и соответствующую этому событию вероятность.

Ответ: а) 0,4116; б) 0,9919; в) 3 и 0,4116.

5.18 Вероятность того, что телевизор имеет скрытые дефекты, равна 0,2. На склад поступило 20 телевизоров. Какое событие вероятнее: что в этой партии имеется два телевизора со скрытыми дефектами или три?

Ответ: 0,137 и 0,205.

5.19 Считая, что в среднем 2% пассажиров не оплачивают проезд, найти вероятность того, что среди 100 пассажиров, едущих в трамвае, не более четырёх безбилетников?

Ответ: 0,947.

5.20 На контроль поступила партия деталей из цеха. Известно, что 5% деталей не удовлетворяют стандарту. Сколько нужно испытать деталей, чтобы с вероятностью не менее 0,95 обнаружить хотя бы одну нестандартную деталь?

Ответ: не менее 59.

5.21 Вероятность прокола шины при пробеге машины в 1000 км равна 0,05. Какова вероятность получить 3 прокола при пробеге 100000 км?

Ответ: 0,14.

5.22 В корректуре объёмом 500 страниц обнаружено 500 опечаток. Какова вероятность того, что на одной странице не меньше трёх опечаток?

Ответ: 0,08.

5.23 Среднее число звонков на коммутатор в течение часа равно 180. Какова вероятность того, что в течение одной минуты будет ровно 4 звонка?

Ответ: 0,168.

6 ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Теоретический материал

Случайной называется величина, которая в результате опыта принимает некоторое числовое значение.

Случайные величины принято обозначать заглавными буквами латинского алфавита $X, Y, \dots$, а их возможные (допустимые) значения — соответствующими строчными буквами $x, y, \dots$.

Случайные величины подразделяют на дискретные и непрерывные в зависимости от множества значений, которые они принимают.

Определение:

Случайная величина X называется дискретной, если множество её возможных значений есть числовая последовательность $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, конечная или бесконечная.

Обычно дискретная случайная величина задаётся в виде таблицы-матрицы, в первой строке которой перечисляются все значения, которые может принимать случайная величина, без пропусков и повторений, а во второй строке — вероятности, с которыми эти значения принимаются.

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{bmatrix}, \text{ где } p_i = P(X = x_i), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Эта таблица называется рядом распределения дискретной случайной величины. Отметим, что сумма всех вероятностей во второй строке таблицы должна быть равна единице:

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1.$$

Это равенство является условием полноты множества возможных значений случайной величины.

Наиболее общей характеристикой любой случайной величины X является функция распределения $F(x) = P(X < x)$ — вероятность попадания случайной величины в интервал $(-\infty; x)$, где x — любое число.

Общие свойства $F(x)$:

1. $F(x)$ — неотрицательная неубывающая функция.
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$.

Для дискретной случайной величины функция распределения

$$F(x) = P(X < x) = \sum_{x_i < x} p_i = \begin{cases} 0, & x \leq x_1; \\ p_1, & x_1 < x \leq x_2; \\ p_1 + p_2, & x_2 < x \leq x_3; \\ \dots & \\ p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1, & x > x_n. \end{cases}$$

Эта функция является кусочно-непрерывной, при переходе через каждое допустимое значение x_i функция $F(x)$ меняется скачком на величину p_i (рис. 8).

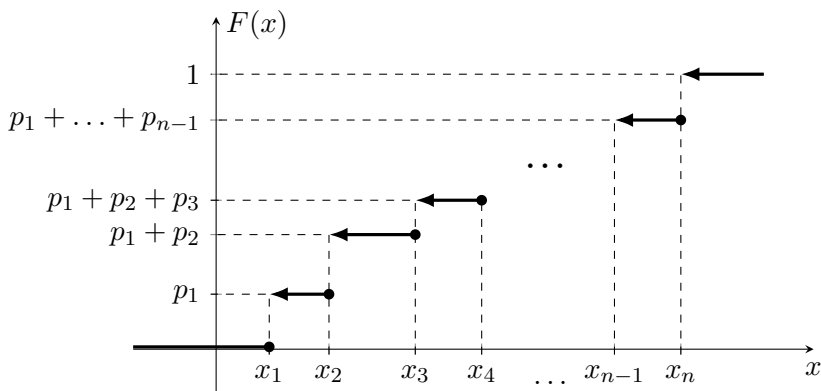


Рисунок 8 – График функции распределения $F(x)$

Основными числовыми характеристиками любой случайной величины X являются математическое ожидание $m_X = M[X]$ и дисперсия $D_X = D[X] = M[(X - m_X)^2]$.

Для дискретной случайной величины (6):

$$m_X = M[X] = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i,$$

$$D[X] = M[(X - m_X)^2] = \sum_{i=1}^n (x_i - m_X)^2 \cdot p_i.$$

Неотрицательное число $\sigma_X = \sqrt{D[X]}$ называется среднеквадратическим отклонением случайной величины X .

Физическая аналогия: если на оси OX рассматривать материальные точки с массами $p_1, p_2, \dots, p_n$ с координатами $x_1, x_2, \dots, x_n$, соответственно, то математическое ожидание $m_X = M[X]$ показывает координаты центра тяжести системы этих материальных точек, а дисперсия $D[X] = M[(X - m_X)^2]$ — момент инерции этой системы относительно найденного центра.

Дисперсия является характеристикой рассеяния случайной величины относительно центра (математического ожидания). Чем меньше дисперсия, тем меньше рассеяние, тем «менее случайной» является величина X .

Основные свойства математического ожидания и дисперсии:

1. Если C — неслучайная (постоянная) величина, то

$$M[C] = C, \quad M[C \cdot X] = C \cdot M[X];$$

$$D[C] = 0, \quad D[C \cdot X] = C^2 \cdot D[X].$$

2. Для любых случайных величин X , Y справедливо $M[X + Y] = M[X] + M[Y]$. Если случайные величины X , Y независимы, т.е. распределение вероятностей каждой из

них не зависит от того, какие значения приняла другая величина, то выполняется $D[X + Y] = D[X] + D[Y]$. Свойство справедливо для любого числа слагаемых.

$$3. D[X] = M[X^2] - M^2[X].$$

Замечание: для дискретной случайной величины $M[X^2] = \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot p_i$.

Наиболее распространённой среди дискретных случайных величин является частота появления случайного события A в n независимых опытах. Эта случайная величина принимает целые значения от 0 до n .

Если опыты повторяются при неизменных условиях, и вероятность появления события A в каждом опыте одинакова, то вероятности p_k можно найти по формуле Бернулли $p_k = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$, где $k = 0, 1, 2, \dots, n$, p — вероятность появления события A в единичном опыте, $q = 1 - p$.

Распределение с вероятностями $p_k = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$ называется биномиальным. Случайная величина, имеющая биномиальный закон распределения, имеет следующие числовые характеристики: $M[X] = np$, $D[X] = npq$.

При большом n и малом p (случай редкого события A) биномиальное распределение заменяется близким ему и более удобным для вычислений распределением Пуассона: $p_k = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$, где $\lambda = np$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$.

Для случайной величины, распределённой по закону Пуассона, $M[X] = \lambda$, $D[X] = \lambda$. Параметр λ означает среднее число появлений события A в n опытах.

Примеры решения задач

6.1 В ящике 4 белых и 2 чёрных шара. Одновременно берутся 3 шара. Построить ряд распределения вероятностей числа белых шаров в выборке. Найти математическое ожидание и функцию распределения случайной величины.

Решение:

Случайная величина X — число белых шаров в выборке. Очевидно, что X может принимать только целые значения от 1 до 3.

$$p_1 = P(X = 1) = \frac{C_4^1 \cdot C_2^2}{C_6^3} = \frac{1}{5},$$

$$p_2 = P(X = 2) = \frac{C_4^2 \cdot C_2^1}{C_6^3} = \frac{3}{5},$$

$$p_3 = P(X = 3) = \frac{C_4^3 \cdot C_2^0}{C_6^3} = \frac{1}{5}.$$

Тогда ряд распределения вероятностей примет вид:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

Вычислим математическое ожидание:

$$m_X = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i = 1 \cdot \frac{1}{5} + 2 \cdot \frac{3}{5} + 3 \cdot \frac{1}{5} = 2.$$

Функция распределения

$$F(x) = \sum_{x_i < x} p_i = \begin{cases} 0, & x \leq 1; \\ \frac{1}{5}, & 1 < x \leq 2; \\ \frac{1}{5} + \frac{3}{5} = \frac{4}{5}, & 2 < x \leq 3; \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

График функции распределения показан на рис. 9.

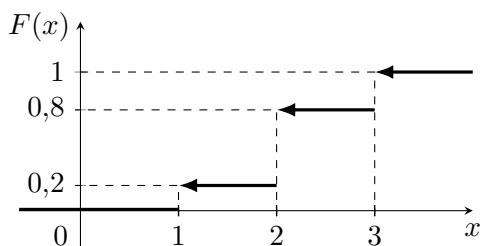


Рисунок 9 – График $F(x)$ к задаче 6.1

6.2 Два стрелка делают по одному выстрелу по мишени. Вероятность попадания для первого стрелка равна 0,8, для второго — 0,9. Построить распределение вероятностей общего числа попаданий.

Решение:

Случайная величина X — общее число попаданий. Она принимает только целые значения от 0 до 2.

Введём вспомогательные события A_1 — попадание первого стрелка, A_2 — попадание второго. Из условия задачи $P(A_1) = 0,8$, $P(A_2) = 0,9$. Отметим, что события A_1 и A_2 независимы. Тогда

$$p_1 = P(X = 0) = P(\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2) = 0,1 \cdot 0,2 = 0,02,$$

$$p_2 = P(X = 1) = P(A_1 \cdot \bar{A}_2 + \bar{A}_1 \cdot A_2) = 0,8 \cdot 0,1 + 0,2 \cdot 0,9 = 0,26,$$

$$p_3 = P(X = 2) = P(A_1 \cdot A_2) = 0,8 \cdot 0,9 = 0,72.$$

Следовательно, ряд распределения вероятностей примет вид:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0,02 & 0,26 & 0,72 \end{bmatrix}.$$

6.3 У студента имеется три попытки для сдачи экзамена. Вероятность успешной сдачи экзамена в каждой попытке равна 0,6. Построить ряд распределение вероятностей числа использованных попыток для сдачи экзамена.

Решение:

Случайная величина X — число использованных попыток. Она принимает только целые значения от 1 до 3.

Введём вспомогательные события A_1 — успешная сдача экзамена в первой попытке, A_2 — во второй, A_3 — в третьей. Из условия задачи $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = 0,6$ и события A_1 , A_2 и A_3 независимы.

Тогда

$$p_1 = P(X = 1) = P(A_1) = 0,6,$$

$$p_2 = P(X = 2) = P(\bar{A}_1 \cdot A_2) = 0,4 \cdot 0,6 = 0,24,$$

$$\begin{aligned} p_3 &= P(X = 3) = P(\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot A_3 + \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3) = \\ &= 0,4 \cdot 0,4 \cdot 0,6 + 0,4 \cdot 0,4 \cdot 0,4 = 0,24. \end{aligned}$$

Ряд распределения вероятностей будет иметь вид:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0,6 & 0,24 & 0,16 \end{bmatrix}.$$

6.4 Построить распределение вероятностей числа выпадений «шестёрки» при трёх бросаниях игральной кости. Вычислить математическое ожидание и дисперсию.

Решение:

Случайная величина X — число выпадений «шестёрки» при трёх бросаниях. Она принимает целые значения от 0 до 3.

Условие задачи удовлетворяет всем условиям схемы повторных испытаний, а именно: один и тот же опыт (бросание кости) повторяется несколько раз, и вероятность события (появления

«шестёрки») в каждом опыте одинакова. Тогда эта случайная величина имеет биномиальный закон распределения, где число опытов $n = 3$, $p = \frac{1}{6}$, $q = 1 - p = \frac{5}{6}$.

Вероятности p_k находятся по формуле Бернулли $p_k = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$, где $k = 0, 1, 2, 3$. В данном случае $p_k = C_3^k \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^k \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{3-k}$. Подставляя вместо k целые числа от 0 до 3, получим следующий ряд распределения $X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{125}{216} & \frac{75}{216} & \frac{15}{216} & \frac{1}{216} \end{bmatrix}$.

Для нахождения математического ожидания и дисперсии используем формулы $M[X] = np$, $D[X] = npq$. Тогда

$$M[X] = 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2}, \quad D[X] = 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{12}.$$

Задачи

6.5 Дискретная случайная величина X задана таблицей $X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 5 \\ \frac{1}{6} & p_2 & \frac{15}{15} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$. Найти значение p_2 , вычислить математическое ожидание и дисперсию. Составить функцию распределения.

Ответ: $p_2 = \frac{1}{5}$; $m_X = 3,1$; $D_X = 4,29$;

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \frac{1}{6}, & 0 < x \leq 1; \\ \frac{11}{30}, & 1 < x \leq 3; \\ \frac{1}{2}, & 3 < x \leq 5; \\ 1, & x > 5. \end{cases}$$

6.6 В партии 10 деталей, из которых 2 неисправны. Для контроля берутся 3 детали. Построить ряд распределения вероятностей числа неисправных деталей в выборке. Вычислить математическое ожидание, дисперсию, построить график функции распределения.

Ответ: $X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{7}{15} & \frac{7}{15} & \frac{1}{15} \end{bmatrix}; \quad M[X] = \frac{3}{5}; \quad D[X] = \frac{28}{75}.$

6.7 Из ящика с 10 шарами, среди которых 7 белых и 3 чёрных, одновременно берутся 5 шаров. Построить распределение вероятностей числа белых шаров в выборке. Вычислить математическое ожидание и дисперсию, построить график функции распределения.

Ответ: $X = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{1}{12} & \frac{5}{12} & \frac{5}{12} & \frac{1}{12} \end{bmatrix}; \quad m_X = \frac{7}{2}; \quad D_X = \frac{7}{12}.$

6.8 На пересдачу по высшей математике явились 3 студента. Вероятность того, что первый сдаст экзамен, равна 0,8, второй — 0,7, третий — 0,9. Составьте ряд распределения числа студентов, сдавших экзамен, постройте график функции распределения, найдите математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение.

Ответ: $X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0,006 & 0,092 & 0,398 & 0,504 \end{bmatrix}; \quad M[X] = 2,4;$

$\sigma[X] = \sqrt{0,46} \approx 0,678.$

6.9 Контрольная работа состоит из трёх вопросов. На каждый вопрос приведено четыре варианта ответа, один из которых правильный. Составить закон распределения числа правильных ответов при простом угадывании. Найти функцию распределения,

$M[X]$, $D[X]$ и вероятность того, что число правильных ответов не менее двух.

Ответ: $X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{27}{64} & \frac{27}{64} & \frac{9}{64} & \frac{1}{64} \end{bmatrix}$; $M[X] = \frac{3}{4}$; $D[X] = \frac{9}{16}$;

$P(2 \leq X \leq 3) = \frac{5}{32}$.

6.10 Зенитное орудие, имеющее 4 снаряда, стреляет по самолёту до первого попадания, пока не кончатся снаряды. Вероятность попадания при каждом выстреле равна $\frac{2}{3}$. Построить ряд распределения вероятностей числа израсходованных снарядов. Вычислить математическое ожидание.

Ответ: $X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{9} & \frac{2}{27} & \frac{1}{27} \end{bmatrix}$; $m_X = \frac{40}{27}$.

6.11 На пути движения автомобиля 4 светофора, каждый из которых разрешает или запрещает дальнейшее движение с вероятностями $\frac{2}{3}$ и $\frac{1}{3}$. Построить распределение вероятностей числа пройденных автомобилем светофоров до первой остановки. Построить график функции распределения, вычислить математическое ожидание.

Ответ: $X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{27}{81} & \frac{18}{81} & \frac{12}{81} & \frac{8}{81} & \frac{16}{81} \end{bmatrix}$; $m_X = \frac{130}{81}$.

6.12 Для подготовки к экзамену студенту нужна определённая книга, которая может находиться в каждой из четырёх доступных студенту библиотек с вероятностью 0,38. Составить закон распределения числа посещённых библиотек. Найти математическое ожидание, дисперсию этой случайной величины, а также

вероятность того, что студенту придётся обойти не менее трёх библиотек.

Ответ: $X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0,38 & 0,2356 & 0,1461 & 0,2383 \end{bmatrix};$

$M[X] = 2,243; \quad D[X] = 1,42; \quad P(3 \leq X \leq 4) = 0,3844.$

6.13 В городе 4 коммерческих банка. У каждого риск банкротства в течение года составляет 20%. Составить ряд распределения числа банков, которые могут обанкротиться в течение следующего года. Найти математическое ожидание и дисперсию.

Ответ: $X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0,4096 & 0,4096 & 0,1536 & 0,0256 & 0,0016 \end{bmatrix};$

$m_X = 0,8; \quad D_X = 0,64 .$

6.14 На контроль качества медицинских препаратов поступила партия из шести штук. Вероятность того, что препарат окажется некачественным, равна 0,35. Составить закон распределения числа некачественных препаратов. Найти функцию распределения, $M[X]$, $D[X]$ и наивероятнейшее число некачественных препаратов.

Ответ: $M[X] = 2,1; \quad D[X] = 1,365; \quad \text{наивероятнейшее число} - 2;$
 $X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0,0754 & 0,2437 & 0,3280 & 0,2355 & 0,0951 & 0,0205 & 0,0018 \end{bmatrix}.$

6.15 Дверь открывают только 2 из 6 одинаковых по виду ключей. Построить распределение вероятностей числа попыток, требуемых для открывания двери. Определить математическое ожидание и вероятность того, что потребуется не менее трёх попыток для открывания двери.

Ответ: $X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{1}{30} & \frac{2}{30} & \frac{3}{30} & \frac{4}{30} & \frac{5}{30} \end{bmatrix}; \quad M[X] = \frac{7}{3};$

$P(3 \leq X \leq 5) = \frac{2}{5}.$

6.16 Из 5 ламп 2 неисправны (не горят). Выбирается исправная лампа путём включения в сеть. Построить распределение вероятностей числа попыток, вычислить математическое ожидание и дисперсию.

Ответ: $X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{6} & \frac{3}{10} & \frac{1}{10} \end{bmatrix}; \quad m_X = 1,5; \quad D_X = 0,45.$

6.17 Построить ряд распределения числа ничьих в трёх шахматных партиях, если в каждой партии равновозможен любой из трёх исходов: победа, поражение, ничья. Найти математическое ожидание, дисперсию и вероятность того, что ничья случится не менее одного раза в трёх шахматных партиях.

Ответ: $X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{8}{27} & \frac{12}{27} & \frac{6}{27} & \frac{1}{27} \end{bmatrix}; \quad M[X] = 1; \quad D[X] = \frac{2}{3};$

$P(1 \leq X \leq 3) = \frac{19}{27}.$

6.18 Среди семян пшеницы 0,6% семян сорняков. Составить ряд распределения числа семян сорняков при отборе 1000 семян. Вычислить математическое ожидание и дисперсию. Какова вероятность обнаружить не менее трёх семян сорняков?

Ответ: $X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & 1000 \\ \frac{1}{e^6} & \frac{6}{e^6} & \frac{18}{e^6} & \frac{36}{e^6} & \dots & \frac{6^{1000}}{1000! e^6} \end{bmatrix};$

$m_X = 6; \quad D_X = 6; \quad P(3 \leq X \leq 1000) \approx 0,938.$

6.19 Телефонный кабель состоит из 400 жил. Составить ряд распределения числа неподключенных абонентов, если для подключения каждого из них нужна одна жила, а вероятность того, что она повреждена — 0,0125. Определить математическое ожидание и дисперсию. С какой вероятностью этим кабелем можно обеспечить телефонной связью не менее 99% абонентов?

Ответ: $X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 400 \\ \frac{1}{e^5} & \frac{5}{e^5} & \frac{25}{2e^5} & \frac{125}{6e^5} & \frac{625}{24e^5} & \dots & \frac{5^{400}}{400! e^5} \end{bmatrix};$

$m_X = 5; \quad D_X = 5; \quad P(0 \leq X \leq 4) \approx 0,4405.$

6.20 Играются две шахматные партии. В каждой партии равновозможен один из трёх исходов: победа, ничья, поражение. За победу начисляется 1 очко, за ничью — 0,5 очка, за поражение — 0. Построить ряд распределения вероятностей числа очков, набранных каждым игроком.

Ответ: $X = \begin{bmatrix} 0 & 0,5 & 1 & 1,5 & 2 \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{3}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{bmatrix}.$

7 НЕПРЕРЫВНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Теоретический материал

Определение:

Случайная величина X называется непрерывной, если в результате опыта она принимает все действительные значения из некоторого числового промежутка. У любой непрерывной случайной величины число возможных значений бесконечно.

Определение:

Основной характеристикой непрерывной случайной величины X является функция плотности распределения вероятностей $f(x)$ (плотность распределения, плотность вероятностей, вероятностная плотность), которая определяется равенством

$$f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x < X < x + \Delta x)}{\Delta x}.$$

Плотность вероятностей непрерывной случайной величины X характеризует возможность появления случайной величины X в некоторой окрестности точки x .

Функция плотности распределения вероятностей обладает свойствами:

1. Функция плотности распределения вероятностей непрерывной случайной величины X неотрицательна

$$f(x) \geq 0.$$

2. Условие полноты (нормировки)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1.$$

Геометрически свойства 1 и 2 означают, что график плотности распределения вероятностей расположен выше оси Ox и площадь фигуры под ним равна единице (рис. 10).

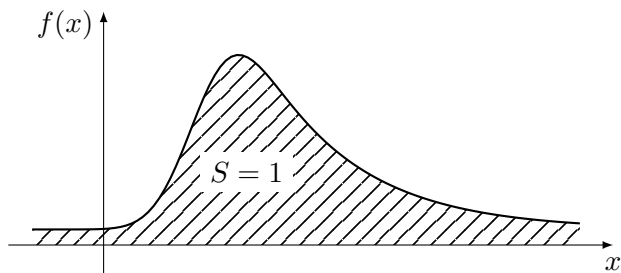


Рисунок 10 – Иллюстрация свойств плотности вероятности

Непрерывная случайная величина считается заданной, если известна её функция распределения или плотность распределения вероятностей.

Функция распределения $F(x)$ непрерывной случайной величины X определяется так же, как и функция распределения дискретной случайной величины X

$$F(x) = P(X < x).$$

Функция распределения $F(x)$ непрерывной случайной величины X является непрерывной кусочно-дифференцируемой функцией и обладает общими свойствами, перечисленными в главе 5.

Функция распределения и плотность распределения вероятностей связаны соотношениями:

$$F'(x) = f(x), \quad F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$

В связи с вышеизложенным, функцию плотности распределения вероятностей $f(x)$ называют дифференциальной функ-

цией распределения (дифференциальным законом), а функцию распределения $F(x)$ — интегральной функцией распределения (интегральным законом).

Так как $F(x)$ есть первообразная для плотности вероятности $f(x)$, то по формуле Ньютона – Лейбница:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет некоторое фиксированное значение x , равна нулю

$$P(X = x) = 0.$$

Числовые характеристики непрерывной случайной величины вычисляются по формулам

$$m_X = M[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx;$$

$$D_X = D[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_X)^2 f(x) dx;$$

$$\sigma_X = \sqrt{D_X}.$$

На практике для вычисления дисперсии используют формулу

$$D[X] = M[X^2] - M^2[X], \quad \text{где} \quad M[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx.$$

Примеры решения задач

7.1 Функция распределения непрерывной случайной величины X имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1; \\ \ln x, & 1 < x \leq e; \\ 1, & x > e. \end{cases}$$

Найти плотность вероятности $f(x)$, построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$, найти математическое ожидание, дисперсию и вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет значение из промежутка $(0; 2]$.

Решение:

Функция распределения непрерывной случайной величины и плотность вероятности связаны зависимостью

$$F'(x) = f(x).$$

Тогда $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1; \\ \frac{1}{x}, & 1 < x \leq e; \\ 0, & x > e. \end{cases}$

Графики $f(x)$ и $F(x)$ представлены на рис. 11.

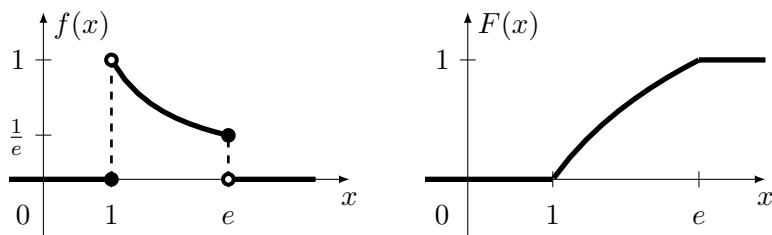


Рисунок 11 – Графики $f(x)$ и $F(x)$ к задаче 7.1

Математическое ожидание непрерывной случайной величины вычисляется по формуле:

$$M[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx.$$

Так как функция, задающая плотность вероятности, является кусочно-непрерывной, то при интегрировании воспользуемся свойством аддитивности определённого интеграла:

$$M[X] = \int_{-\infty}^1 x \cdot 0 dx + \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} dx + \int_e^{+\infty} x \cdot 0 dx = \int_1^e dx = e - 1.$$

$$M[X] = e - 1.$$

Для вычисления дисперсии воспользуемся формулой

$$D[X] = M[X^2] - M^2[X].$$

$$M[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^1 x^2 \cdot 0 dx + \int_1^e x^2 \cdot \frac{1}{x} dx + \int_e^{+\infty} x^2 \cdot 0 dx =$$

$$= \int_1^e x dx = \left. \frac{x^2}{2} \right|_1^e = \frac{1}{2} (e^2 - 1).$$

Таким образом, получаем

$$D[X] = \frac{1}{2} (e^2 - 1) - (e - 1)^2 = \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{2} - e^2 + 2e - 1 = 2e - \frac{e^2}{2} - \frac{3}{2}.$$

Вероятность попадания непрерывной случайной величины X в промежуток $(0; 2]$ вычислим, используя формулу:

$$P(a < X \leq b) = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Правая часть приведённой формулы удобнее, т. к. по условию известна функция распределения

$$P(0 < x \leq 2) = F(2) - F(0) = \ln 2 - 0 \approx 0,693.$$

7.2 Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины X задана функцией

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 1; \\ A\sqrt{x}, & 1 \leq x \leq 4; \\ 0, & x > 4. \end{cases}$$

Найти параметр A , функцию распределения и $P(0 \leq X < 4)$. Построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$.

Решение:

Согласно условию нормировки $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$. Тогда, используя свойство аддитивности определённого интеграла,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx &= \int_{-\infty}^1 0 dx + \int_1^4 A\sqrt{x} dx + \int_4^{+\infty} 0 dx = A \int_1^4 \sqrt{x} dx = \\ &= \frac{2}{3} A x^{\frac{3}{2}} \Big|_1^4 = \frac{2}{3} A (8 - 1) = \frac{14}{3} A, \\ \frac{14}{3} A &= 1 \implies A = \frac{3}{14}. \end{aligned}$$

Таким образом,

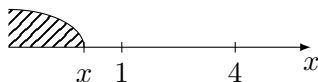
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 1; \\ \frac{3}{14} \sqrt{x}, & 1 \leq x \leq 4; \\ 0, & x > 4. \end{cases}$$

Функция распределения непрерывной случайной величины и плотность вероятности связаны зависимостью:

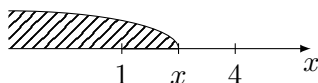
$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$

Плотность вероятности непрерывной случайной величины X является кусочно-непрерывной функцией и, следовательно, x в верхнем пределе интеграла $\int_{-\infty}^x f(t) dt$ может попадать в любой из промежутков $(-\infty; 1]$, $(1; 4]$, $(4; +\infty)$. Возможны варианты:

1. $x \leq 1$, тогда $f(x) = 0$ и $F(x) = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0$.

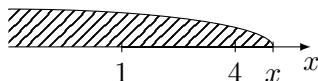


2. $1 < x \leq 4$, тогда $f(x) = 0$ для $x \in (-\infty; 1]$ и $f(x) = \frac{3}{14}\sqrt{x}$ для $x \in (1; 4]$.



$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^1 0 dt + \int_1^x \frac{3}{14} \sqrt{t} dt = \frac{3}{14} \int_1^x \sqrt{t} dt = \frac{3}{14} \cdot \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \Big|_1^x = \\ &= \frac{1}{7} (x\sqrt{x} - 1). \end{aligned}$$

3. $x > 4$, тогда $f(x) = 0$ для $x \in (-\infty; 1]$, $f(x) = \frac{3}{14}\sqrt{x}$ для $x \in (1; 4]$ и $f(x) = 0$ для $x \in (4; +\infty)$.



$$\begin{aligned}
 F(x) &= \int_{-\infty}^1 0 \, dt + \int_1^4 \frac{3}{14} \sqrt{t} \, dt + \int_4^x 0 \, dt = \frac{3}{14} \int_1^4 \sqrt{t} \, dt = \\
 &= \frac{3}{14} \cdot \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \Big|_1^4 = \frac{1}{7} \cdot (8 - 1) = 1.
 \end{aligned}$$

Таким образом,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1; \\ \frac{1}{7}(x\sqrt{x} - 1), & 1 < x \leq 4; \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

В зависимости от того, известна плотность вероятности или функция распределения непрерывной случайной величины, используют формулы $P(a \leq X < b) = \int_a^b f(x) \, dx$ или $P(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$.

В ходе решения задачи была найдена функция распределения $F(x)$, поэтому применение второй формулы более рационально.

$$P(0 \leq X < 4) = F(4) - F(0) = \frac{1}{7}(4\sqrt{4} - 1) - 0 = 1.$$

Построим графики $f(x)$ и $F(x)$ (рис. 12).

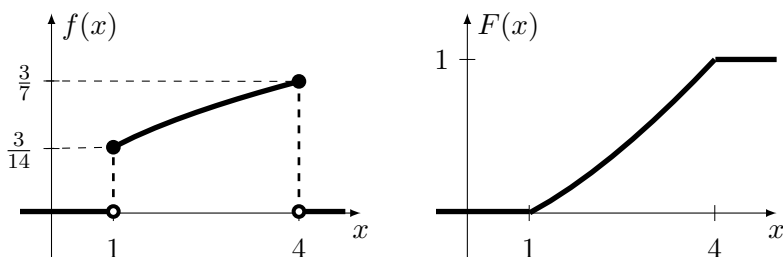


Рисунок 12 – Графики $f(x)$ и $F(x)$ к задаче 7.2

Задачи

7.3 Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения вероятностей

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1; \\ (x-1)^2, & 1 < x \leq 2; \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Построить графики $F(x)$ и $f(x)$, определить математическое ожидание, дисперсию и вероятность того, что случайная величина примет значение из промежутка $\left[\frac{3}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

Ответ: $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1; \\ 2(x-1), & 1 < x \leq 2; \\ 0, & x > 2; \end{cases}$

$$M[X] = \frac{5}{3}; \quad D[X] = \frac{1}{18}; \quad P\left(\frac{3}{4} \leq X \leq \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{4}.$$

7.4 График функции распределения непрерывной случайной величины X представлен на рис. 13. Запишите функцию распределения, плотность вероятности, найдите математическое ожидание, среднеквадратическое отклонение.

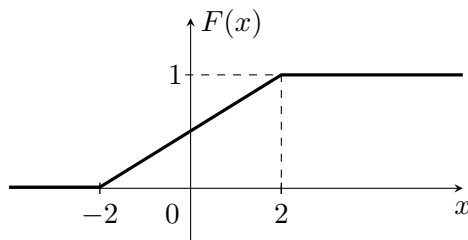


Рисунок 13 – График $F(x)$ к задаче 7.4

$$\text{Ответ: } F(x) = \begin{cases} 0, & x < -2; \\ \frac{1}{4}(x+2), & -2 \leq x \leq 2; \\ 1, & x > 2; \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & x \in [-2; 2]; \\ 0, & x \notin [-2; 2]; \end{cases} \quad m_X = 0; \quad \sigma_X = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

7.5 Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины X задана на рис. 14. Найти значение параметра C , записать функцию плотности вероятности и функцию распределения, найти $P(X > 0)$.

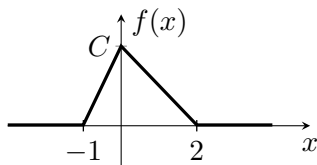


Рисунок 14 – График $f(x)$ к задаче 7.5

$$\text{Ответ: } C = \frac{2}{3}; \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1; \\ \frac{2}{3}(x+1), & -1 < x \leq 0; \\ \frac{2-x}{3}, & 0 < x \leq 2; \\ 0, & x > 2; \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1; \\ \frac{1}{3}(x+1)^2, & -1 < x \leq 0; \\ \frac{1}{3}(2x - \frac{x^2}{2} + 1), & 0 < x \leq 2; \\ 1, & x > 2; \end{cases} \quad P(X > 0) = \frac{2}{3}.$$

7.6 Определить, при каком значении параметра a функция, график которой представлен на рис. 15, является функцией плот-

ности распределения вероятности непрерывной случайной величины X . Записать функцию плотности вероятности и функцию распределения, найти математическое ожидание и вероятность того, что случайная величина X примет значение из интервала $(-\infty; 0)$.

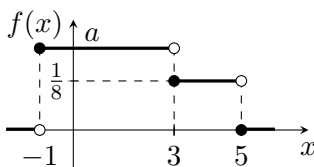


Рисунок 15 – График $f(x)$ к задаче 7.6

Ответ: $a = \frac{3}{16}$; $m_X = \frac{7}{4}$; $P(-\infty < X < 0) = \frac{3}{16}$;

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < -1; \\ \frac{3}{16}, & -1 \leq x < 3; \\ \frac{1}{8}, & 3 \leq x < 5; \\ 0, & x \geq 5; \end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1; \\ \frac{3}{16}(x+1), & -1 < x \leq 3; \\ \frac{1}{8}(x+3), & 3 < x \leq 5; \\ 1, & x > 5. \end{cases}$$

7.7 Непрерывная случайная величина X задана функцией плотности распределения вероятностей

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 2; \\ \frac{C}{x^4}, & x \geq 2. \end{cases}$$

Найти значение C , функцию распределения вероятностей $F(x)$, найти математическое ожидание и $P(2 \leq X \leq 3)$.

Ответ: $C = 24$; $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2; \\ -\frac{8}{x^3} + 1, & x > 2; \end{cases} \quad M[X] = 3$;

$$P(2 \leq X \leq 3) = \frac{19}{27}.$$

7.8 Непрерывная случайная величина X задана функцией плотности распределения вероятностей

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -\frac{\pi}{2}; \\ A \cdot \cos x, & -\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{2}; \\ 0, & x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Найти значение A , функцию распределения вероятностей $F(x)$, построить графики $F(x)$ и $f(x)$, найти математическое ожидание и $P\left(0 < X \leq \frac{\pi}{4}\right)$.

Ответ: $A = \frac{1}{2}; \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -\frac{\pi}{2}; \\ \frac{1}{2}(\sin x + 1), & -\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{2}; \\ 1, & x > \frac{\pi}{2}; \end{cases}$

$M[X] = 0; \quad P\left(0 < X \leq \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}.$

7.9 Непрерывная случайная величина X задана функцией плотности распределения вероятностей

$$f(x) = \begin{cases} A \cdot e^x, & x \leq 0; \\ 0, & x > 0. \end{cases}$$

Найти значение A , функцию распределения вероятностей $F(x)$, построить графики $F(x)$ и $f(x)$, найти математическое ожидание.

Ответ: $A = 1; \quad F(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 0; \\ 1, & x > 0. \end{cases}$

$M[X] = -1.$

7.10 Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения вероятностей

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1; \\ A \cdot (x - 1), & 1 < x \leq 3; \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

Найти значение A , функцию плотности распределения вероятностей $f(x)$, построить графики $F(x)$ и $f(x)$, найти математическое ожидание и дисперсию.

Ответ: $A = \frac{1}{2}; \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1; \\ \frac{1}{2}, & 1 < x \leq 3; \\ 0, & x > 3; \end{cases}$

$$M[X] = 2; \quad D[X] = \frac{1}{3}.$$

7.11 Непрерывная случайная величина X задана функцией плотности распределения вероятностей

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -3; \\ a, & -3 < x \leq -1; \\ 3a, & -1 < x \leq 2; \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

Найти значение a и построить график плотности распределения вероятности. Найти функцию распределения вероятностей $F(x)$ и построить её график. Найти математическое ожидание, дисперсию и $P(-2 \leq X \leq 0)$.

Ответ: $a = \frac{1}{11}; \quad M[X] = \frac{1}{22}; \quad D[X] = \frac{2329}{1452};$
 $P(-2 \leq X \leq 0) = \frac{4}{11}.$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -3; \\ \frac{x+3}{11}, & -3 < x \leq -1; \\ \frac{3x+5}{11}, & -1 < x \leq 2; \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

7.12 Функция распределения непрерывной случайной величины X имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1; \\ ax^2 + b, & 1 < x \leq 2; \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Найти коэффициенты a и b , плотность распределения вероятностей, математическое ожидание, среднее квадратическое отклонение и $P(1 < X < 1,5)$.

Ответ: $a = \frac{1}{3}; \quad b = -\frac{1}{3}; \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1; \\ \frac{2}{3}x, & 1 < x \leq 2; \\ 0, & x > 2; \end{cases}$

$$m_X = \frac{14}{9}; \quad \sigma_X = \frac{\sqrt{26}}{18}; \quad P(1 < X < 1,5) = \frac{5}{12}.$$

7.13 Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения вероятностей $F(x) = A + B \operatorname{arctg} \frac{x}{2}$. Найти значения A и B , функцию плотности распределения вероятностей $f(x)$ и $P(-1 < X < 1)$.

Ответ: $A = \frac{1}{2}; \quad B = \frac{1}{\pi}; \quad f(x) = \frac{2}{\pi(x^2 + 4)};$
 $P(-1 < X < 1) \approx 0,295.$

8 ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Теоретический материал

Равномерное распределение

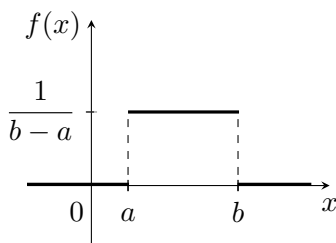
Определение:

Непрерывная случайная величина X называется равномерно распределённой на отрезке $[a; b]$, если её плотность распределения вероятности (рис. 16, а) имеет вид:

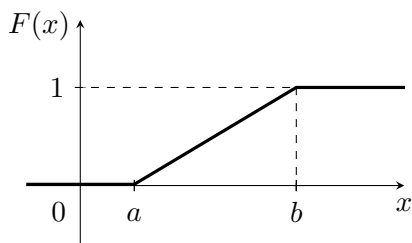
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b], \\ 0, & x \notin [a, b]. \end{cases}$$

Для равномерно распределённой случайной величины функция распределения (рис. 16, б) имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & x \in [a, b], \\ 1, & x > b. \end{cases}$$



а)



б)

Рисунок 16 – Равномерное распределение непрерывной случайной величины: a — плотность вероятности, b — функция распределения

Числовые характеристики равномерного распределения непрерывной случайной величины:

$$m_X = \frac{a+b}{2}, \quad D_X = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Показательное распределение

Непрерывная случайная величина X имеет показательное распределение, если её вероятностная плотность (рис. 17, а) имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Для неё функция распределения (рис. 17, б)

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

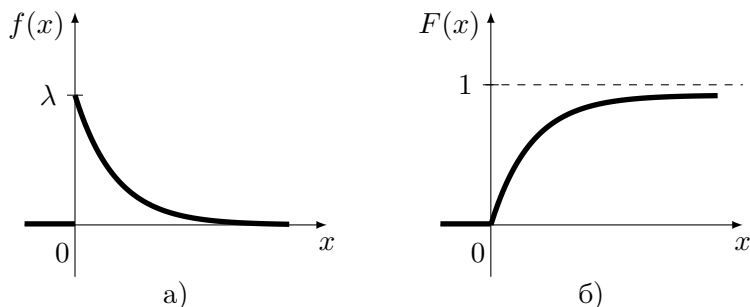


Рисунок 17 – Показательное распределение непрерывной случайной величины: а — плотность вероятности, б — функция распределения

Математическое ожидание и дисперсия показательного распределения непрерывной случайной величины

$$m_X = \frac{1}{\lambda}, \quad D_X = \sigma_X^2 = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Показательное распределение применяется при исследовании потока событий (вызовов), следующих друг за другом в случайные моменты времени. При некоторых условиях длительность интервала между двумя соседними событиями (вызовами) есть случайная величина X , распределённая по показательному закону.

Параметр λ означает среднее число событий (вызовов) за единицу времени.

Нормальное распределение

Непрерывная случайная величина X распределена по нормальному закону, если её плотность вероятности имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad \sigma > 0.$$

График этой функции называют кривой Гаусса (рис. 18).

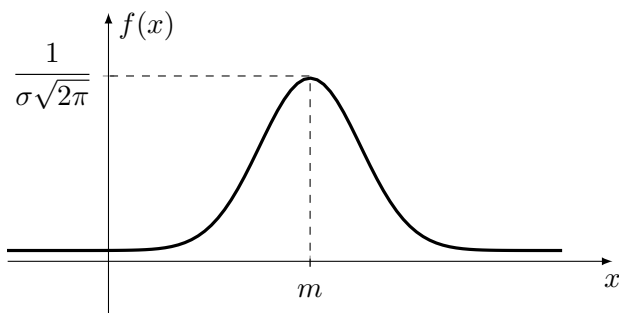


Рисунок 18 – Кривая Гаусса

Параметры $m = M[X]$ и $\sigma = \sqrt{D[X]}$ являются математическим ожиданием и среднеквадратическим отклонением величины X .

Вероятность попадания нормально распределённой величины в заданный интервал определяется формулой

$$P(a < X < b) = \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x)$ — функция Лапласа

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

которая является табулированной (приложение 1).

Функция $\Phi(x)$ — нечётная функция и $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = 0,5$.

Вероятность попадания нормально распределённой случайной величины в интервал $(m - \varepsilon; m + \varepsilon)$, симметричный относительно математического ожидания, находится по формуле

$$P(|X - m| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right).$$

Для нормального закона функция распределения

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) + 0,5.$$

Примеры решения задач

8.1 Поезда метро идут с интервалом 10 минут. Пассажир выходит на платформу в произвольный момент времени. Определить плотность распределения вероятностей и функцию распределения времени ожидания поезда. Найти математическое ожидание, дисперсию и вероятность того, что ожидание продлится более 7 минут.

Решение:

Случайная величина X — время ожидания поезда. Это непрерывная случайная величина. Так как любой момент выхода пассажира на перрон равновероятен, то эта случайная величина имеет равномерный закон распределения. Тогда

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}, & x \in [0; 10]; \\ 0, & x \notin [0; 10]. \end{cases}$$

Следовательно, функция распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \frac{x}{10}, & 0 \leq x \leq 10; \\ 1, & x > 10. \end{cases}$$

Так как для равномерного закона $m_X = \frac{a+b}{2}$, $D_X = \frac{(b-a)^2}{12}$, то

$$m_X = \frac{0+10}{2} = 5; \quad D_X = \frac{(10-0)^2}{12} = \frac{100}{12} = \frac{25}{3};$$

$$P(7 < X < 10) = F(10) - F(7) = 1 - \frac{7}{10} = \frac{3}{10}.$$

8.2 Длительность времени безотказной работы элемента имеет показательное распределение с параметром 0,01. Найти вероятность того, что за 50 часов а) элемент откажет; б) элемент не откажет.

Решение:

По условию случайная величина X — время безотказной работы элемента. Эта случайная величина имеет показательное распределение с параметром $\lambda = 0,01$. Её функция распределения имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 1 - e^{-0,01x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Тогда

$$P(0 < X < 50) = F(50) - F(0) = 1 - e^{-0,01 \cdot 50} - 0 = 1 - e^{-0,5} \approx 0,393;$$

$$P(X \geq 50) = 1 - 0,393 = 0,607.$$

8.3 Случайная величина X имеет нормальный закон распределения с математическим ожиданием $m = 3$ и среднеквадратическим отклонением $\sigma = 2$. Записать выражение для плотности вероятностей и функции распределения. Найти а) вероятность того, что X примет значение из $(2;5)$; б) вероятность того, что X отклоняется от своего математического ожидания меньше, чем на $0,2$.

Решение:

Так как для нормально распределённой случайной величины вероятностная плотность $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$, то в данном случае $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-3)^2}{8}}$.

$$\begin{aligned} P(2 < X < 5) &= \Phi\left(\frac{5-3}{2}\right) - \Phi\left(\frac{2-3}{2}\right) = \Phi(1) - \Phi\left(-\frac{1}{2}\right) = \\ &= \Phi(1) + \Phi\left(\frac{1}{2}\right) = 0,3413 + 0,1915 = 0,5328; \end{aligned}$$

$$P(|X - 3| < 0,2) = 2 \Phi\left(\frac{0,2}{2}\right) = 2 \Phi(0,1) = 2 \cdot 0,0398 = 0,0796.$$

8.4 Автомат штампует детали. Контролируется длина детали, которая распределена по нормальному закону. Проектная длина детали 50 мм. Фактически длина изготавливаемых деталей не менее 32 мм и не более 68 мм. Найти вероятность того, что длина наудачу взятой детали: а) больше 55 мм; б) меньше 40 мм.

Решение:

Случайная величина X — длина детали. Для неё математическое ожидание $m = 50$ мм. Из условия $P(32 \leq X \leq 68) = 1$.

Так как для нормального распределения справедлива формула $P(a < X < b) = \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right)$, то

$$\begin{aligned} P(32 \leq X \leq 68) &= \Phi\left(\frac{68-50}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{32-50}{\sigma}\right) = \\ &= \Phi\left(\frac{18}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-18}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{18}{\sigma}\right) + \Phi\left(\frac{18}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{18}{\sigma}\right) = 1. \end{aligned}$$

Отсюда $\Phi\left(\frac{18}{\sigma}\right) = 0,5$. Тогда $\frac{18}{\sigma} = 5$, следовательно, $\sigma = \frac{18}{5}$.

Тогда

$$\begin{aligned} P(A) &= P(55 < X < 68) = \Phi\left(\frac{68-50}{\frac{18}{5}}\right) - \Phi\left(\frac{55-50}{\frac{18}{5}}\right) = \\ &= \Phi(5) - \Phi\left(\frac{25}{18}\right) \approx 0,5 - \Phi(1,39) = 0,5 - 0,4177 = 0,0823. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(B) &= P(32 < X < 40) = \Phi\left(\frac{40-50}{\frac{18}{5}}\right) - \Phi\left(\frac{32-50}{\frac{18}{5}}\right) = \\ &= \Phi\left(-\frac{50}{18}\right) - \Phi(-5) \approx \Phi(-2,78) + \Phi(5) = -0,4973 + 0,5 = 0,0027. \end{aligned}$$

Задачи

8.5 Рыбак ловит рыбу в пруду, где равновероятно можно поймать любую рыбу весом от 0,2 до 1 кг при каждом забрасывании снасти. Найти среднюю массу рыбы и вероятность поймать при одной попытке рыбу массой не более 0,8 кг.

Ответ: $m_X = 0,6$; $P(X \leq 0,8) = 0,75$.

8.6 Время работы элемента до первого отказа подчинено показательному закону распределения с $\lambda = 5 \cdot 10^{-4}$. Вычислить вероятность того, что элемент не откажет за 1000, 2000 часов.

Ответ: 0,6065; 0,3679.

8.7 Случайная величина имеет плотность распределения вероятностей

$$f(x) = \begin{cases} 0,2, & x \in \left[\frac{2-\gamma}{2}; \frac{2+\gamma}{2} \right]; \\ 0, & x \notin \left[\frac{2-\gamma}{2}; \frac{2+\gamma}{2} \right]. \end{cases}$$

Определить значение параметра γ , функцию распределения вероятностей $F(x)$. Построить графики $f(x)$ и $F(x)$. Вычислить $P(X < 0)$ и числовые характеристики m_X , D_X и σ_X .

$$\text{Ответ: } \gamma = 5; \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1,5; \\ \frac{x+1,5}{5}, & -1,5 \leq x \leq 3,5; \\ 1, & x > 3,5; \end{cases}$$

$$P(X < 0) = 0,3; \quad m_X = 1; \quad D_X = \frac{25}{12}; \quad \sigma_X = \frac{5}{2\sqrt{3}}.$$

8.8 Время работы прибора до первого отказа подчинено закону

$$f(x) = \begin{cases} 4 \cdot 10^{-4} \cdot e^{-4 \cdot 10^{-4} x}, & x > 0; \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Вычислить среднее время между появлениями двух смежных отказов и вероятность того, что прибор не откажет за 1000 часов после начала работы.

Ответ: 2500 ч; 0,6703.

8.9 Случайная величина X имеет нормальное распределение с математическим ожиданием $m_X = 10$ и дисперсией $D_X = 4$.

Записать функцию плотности вероятности для случайной величины X . Найти вероятность попадания этой случайной величины на интервал $(12; 14)$.

$$\text{Ответ: } f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-10)^2}{8}}; \quad P(12 < X < 14) \approx 0,1359.$$

8.10 Случайная величина X распределена по нормальному закону с числовыми характеристиками: $m_X = 3$, $D_X = 16$. Найти плотность вероятности, вычислить вероятность попадания случайной величины в интервал $(1; 5)$, вероятность событий $|X - 3| \geq 12$ и $|X - 2| < 5$.

Ответ: $f(x) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-3)^2}{32}}$; $P(1 < X < 5) \approx 0,3830$;
 $P(|X - 3| \geq 12) \approx 0,0026$; $P(|X - 2| < 5) \approx 0,7745$.

8.11 Вес тропического грейпфрута — нормально распределённая случайная величина с дисперсией, равной 0,04. Известно, что средний вес одного фрукта 0,4 кг. Какой процент фруктов весит от 300 до 600 г?

Ответ: 53,28%.

8.12 Случайная величина X имеет нормальный закон распределения с параметрами m_X и D_X . Найти эти параметры, если известно, что $P(X < 1) = 0,5$ и $P(-2 < X < 4) \approx 0,9973$.

Ответ: $m_X = 1$; $D_X = 1$.

8.13 Заряд пороха взвешивается на весах, допускающих случайные ошибки, распределённые по нормальному закону со среднеквадратическим отклонением 0,1 г. Номинальный вес заряда составляет 2,3 г. Определить вероятность повреждения ружья, если максимально допустимый вес заряда 2,5 г.

Ответ: 0,0228.

8.14 Завод изготавливает шарики для подшипников. Номинальный диаметр шариков 5 мм. Вследствие неточности изготовления шарика фактический его диаметр является случайной величиной, распределённой по нормальному закону со среднеквадратическим отклонением 0,05 мм. При контроле бракуются все

шарики, диаметр которых отличается от номинального более чем на 0,1 мм. Определить, какой процент шариков (в среднем) будет браковаться.

Ответ: 4,6%.

8.15 Высотомер самолёта допускает случайные ошибки, распределённые по нормальному закону с параметрами $m_X = 0$, $\sigma_X = 30$ м. Для самолёта отведён коридор высотой 100 м. Определить вероятность того, что самолёт будет лететь: а) внутри коридора; б) ниже коридора.

Ответ: а) 0,905; б) 0,0475.

8.16 Проверкой установлено, что 90% ошибок прибора не выходит за пределы 20 м. Систематических ошибок прибор не допускает, а случайные ошибки распределены по нормальному закону. Определить среднеквадратическое отклонение ошибок измерения данным прибором.

Ответ: 12,2 м.

8.17 Считается, что отклонение длины изготавливаемых изделий от стандарта является случайной величиной, распределённой по нормальному закону. Если стандартная длина изделия 40 см, среднеквадратическое отклонение 0,4 см, то в какой интервал с вероятностью 0,8 можно гарантировать попадание длины изделия?

Ответ: (39,488; 40,512) см.

8.18 Считается, что изделие высшего качества, если отклонение его размеров от номинальных не превосходит по абсолютной величине 3,6 мм. Случайные отклонения размера изделия от но-

минального подчиняются нормальному закону со среднеквадратическим отклонением, равным 3 мм. Систематические отклонения отсутствуют. Определить среднее число изделий высшего качества среди 100 изготовленных.

Ответ: 77.

ВАРИАНТЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ

Вариант 1

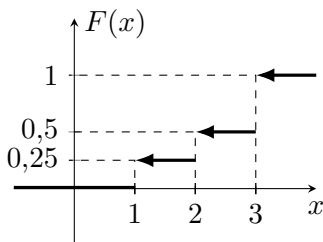
1. По результатам проверки контрольных работ оказалось, что в первой группе получили положительную оценку 20 студентов из 30, а во второй группе — 15 из 25. Найти вероятность того, что наудачу выбранная работа из наугад выбранной стопки имеет положительную оценку.
2. Пользователь компьютера забыл пароль и перебирает наудачу 4 возможных, один из которых нужный. После трёх неудачных попыток компьютер блокируется. Построить график функции распределения числа сделанных попыток, найти математическое ожидание и вероятность того, что будет сделано не менее двух попыток.
3. Случайная величина распределена равномерно на интервале от 1 до 5. Построить график плотности вероятности этого распределения. Найти функцию распределения, математическое ожидание, среднее квадратическое отклонение и вероятность того, что значение случайной величины будет не менее 2.
4. Нарушение правил дорожного движения приводит к аварии с вероятностью 0,01. Найти вероятность попасть в аварию хотя бы один раз при 100 нарушениях.
5. Отклонение длины детали от стандарта — случайная величина, распределённая по нормальному закону с среднее квадратическим отклонением 0,4 см. Стандартная длина — 40 см. Какую точность длины изделия можно гарантировать с вероятностью 0,8?

6. В ящике имеются 10 белых и 15 черных шаров. Наудачу извлекают одновременно 5 шаров. Найти вероятность того, что среди них будет ровно два белых шара.

Ответы:

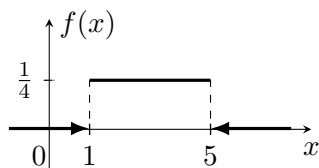
1. $\frac{19}{30}$.

2. $m_X = \frac{9}{4}; \quad P(2 \leq X \leq 3) = \frac{3}{4}$.



3. $m_X = 3; \quad \sigma_X = \frac{2}{\sqrt{3}}; \quad P(X \geq 2) = \frac{3}{4}$;

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1; \\ \frac{x-1}{4}, & 1 \leq x \leq 5; \\ 1, & x > 5. \end{cases}$$



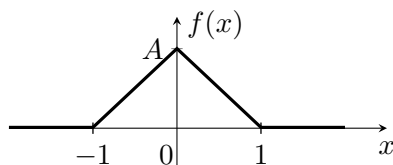
4. $1 - \frac{1}{e}$.

5. 0,512.

6. $\frac{195}{506}$.

Вариант 2

1. Среди семян пшеницы в среднем 30% невосхожих. Составить ряд распределения числа всхожих семян из 5 выбранных для посадки. Найти функцию распределения, дисперсию и вероятность того, что при случайном отборе 5 семян окажется не менее трёх невосхожих?
2. Вероятностная плотность непрерывной случайной величины задана графиком.



Найти параметр A , аналитически записать функцию плотности вероятности, найти математическое ожидание, дисперсию и $P\left(\frac{1}{2} \leq X < 2\right)$.

3. Спортивная обувь поставляется в магазин «Всё для спорта» тремя фирмами в соотношении 2 : 5 : 3. Известно, что среди продукции первой фирмы качественные изделия составляют 90%, второй — 85%, третьей — 75%. Найти вероятность того, что купленная пара обуви окажется бракованной.
4. Есть 13 карточек, на трёх из которых написана буква М, на трёх — К, на четырёх — О и на трёх — Л. Выбирают наугад одну за одной 6 карточек и выкладывают в ряд в том же порядке. Найти вероятность того, что получится слово МОЛОКО.
5. Производится взвешивание вещества без систематических ошибок. Случайные ошибки взвешивания подчинены нормальному закону с среднеквадратическим отклонением 20 г. Найти вероятность того, что абсолютная величина ошибки взвешивания не превысит 10 г.

6. Сколько раз надо бросить игральную кость, чтобы вероятность выпадения «шестёрки» хотя бы один раз была не менее 0,95?

Ответы:

$$1. X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0,00243 & 0,02835 & 0,1323 & 0,3087 & 0,36015 & 0,16807 \end{bmatrix};$$

$$D_X = 1,05; \quad P(0 \leq X \leq 2) = 0,16308;$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ 0,00243, & 0 < x \leq 1; \\ 0,03078, & 1 < x \leq 2; \\ 0,16308, & 2 < x \leq 3; \\ 0,47178, & 3 < x \leq 4; \\ 0,83193, & 4 < x \leq 5; \\ 1, & x > 5. \end{cases}$$

$$2. A = 1; \quad m_X = 0; \quad D_X = \frac{1}{6}; \quad P\left(\frac{1}{2} \leq X < 2\right) = \frac{1}{8};$$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1; \\ x + 1, & -1 < x \leq 0; \\ 1 - x, & 0 < x \leq 1; \\ 0 & x > 1. \end{cases}$$

$$3. 0,17.$$

$$4. \frac{3}{5720}.$$

$$5. 0,383.$$

$$6. \text{ не менее } 17 \text{ раз.}$$

Вариант 3

1. Вероятность сдачи экзамена по математике в сессию для студента экономического факультета равна 0,5, при первой передаче — 0,4; при второй — 0,3. Какова вероятность того, что после двух передач студент останется задолжником по математике?
2. В семье две дочери: старшая Люба и младшая Маша. Четыре раза в неделю посуду моет Люба, три раза — Маша. Вероятность, что старшая дочь разобьёт тарелку, равна 0,02, а младшая — 0,15. В один из дней родители услышали звон разбитой посуды. Какова вероятность, что в этот день посуду мыла Люба?
3. Игральная кость брошена восемь раз. Найти вероятность того, что число очков на кости, кратное трём, выпадет не менее четырёх раз.
4. В урне 2 белых и 3 чёрных шара. Из неё последовательно без возвращения вынимают шары до тех пор, пока не появится белый шар. Составить закон распределения числа извлечённых шаров. Найти функцию распределения, математическое ожидание, среднеквадратическое отклонение и вероятность того, что будет извлечено не менее 2 шаров.
5. Случайная величина X имеет плотность вероятности

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1; \\ A(1 - x^2), & -1 < x \leq 1; \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

Найти коэффициент A , математическое ожидание, дисперсию, функцию распределения и вероятность того, что $X \in (0; 2)$.

6. Владислав забыл пароль от приложения, состоящий из четырёх цифр. Однако, он помнит, что пароль содержит три «единицы», а одна из цифр — то ли «пять», то ли «семь». Какова вероятность успешного входа в приложение с первой попытки?

Ответы:

1. 0,21.

2. $\frac{8}{53}$.

3. $\frac{1697}{6561}$.

4. $X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ \frac{1}{10} & \frac{2}{10} & \frac{3}{10} & \frac{4}{10} \end{bmatrix}; \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1; \\ \frac{4}{10}, & 1 < x \leq 2; \\ \frac{7}{10}, & 2 < x \leq 3; \\ \frac{9}{10}, & 3 < x \leq 4; \\ 1, & x > 4; \end{cases}$

$m_X = 2; \quad \sigma_X = 1; \quad P(2 \leq X \leq 4) = \frac{3}{5}.$

5. $A = \frac{3}{4}; \quad m_X = 0; \quad D_X = \frac{1}{5}; \quad P(0 < X < 2) = \frac{1}{2}.$

$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1; \\ \frac{3x - x^3 + 2}{4}, & -1 < x \leq 1; \\ 1, & x > 1; \end{cases}$

6. $\frac{1}{8}$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Вентцель, Е. С. Теория вероятностей / Е. С. Вентцель. — М. : Высшая школа, 1999. — 576 с.
2. Вентцель, Е. С. Задачи и упражнения по теории вероятностей / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. — М. : Высшая школа, 2000. — 366 с.
3. Гмурман, В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / В. Е. Гмурман. — М. : Высшее образование, 2006. — 404 с.
4. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по теории вероятностей, математической статистике и случайным процессам / Д. Т. Письменный. — М. : Айрис-пресс, 2007. — 288 с.
5. Пугачев, В. С. Теория вероятностей и математическая статистика / В. С. Пугачев. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2002. — 496 с.
6. Чистяков, В. П. Курс теории вероятностей / В. П. Чистяков. — М. : Агар, 2000. — 255 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

$$\text{Функция Лапласа } \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

x	Сотые доли x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995
3,3	0,4995	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997
3,4	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4998
3,5	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998

Учебное издание

Денискина Екатерина Александровна

Семенова Ольга Юрьевна

Глушкова Антонина Грачевна

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Практикум

Редакционно-издательская обработка
издательства Самарского университета

Подписано в печать 16.04.2026. Формат 60х84 1/16.

Бумага офетная. Печ. л. 6,25.

Тираж 27 экз. Заказ . Арт. – 1(ПР)/2026.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)
443086, САМАРА, МОСКОВСКОЕ ШОССЕ, 34.

Издательство Самарского университета.
443086, Самара, Московское шоссе, 34.