

Наталья Павловна Бондаренко

ЗАДАЧА ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ

Рекомендовано редакционно-издательским советом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева» в качестве учебного пособия для обучающихся по основным образовательным программам высшего образования по направлениям подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика и 03.03.01 Прикладные математика и физика.

Саратов

2026

УДК 517.984(075)

ББК В162.4я7

Б 811

Рецензенты:

доцент, к.ф.-м.н. Бутерин Сергей Александрович

доцент, к.ф.-м.н. Подклетнова Светлана Владимировна

Бондаренко, Наталья Павловна

Задача Штурма–Лиувилля: учеб. пособие / *Н. П. Бондаренко*. Саратов: «Саратовский источник», 2026. 86 с.

ISBN 978-5-6055745-9-0

Учебное пособие содержит теоретический материал по отдельным темам дисциплины «Уравнения математической физики» для студентов, обучающихся по направлениям 01.03.02 Прикладная математика и информатика и 03.03.01 Прикладные математика и физика. Также может использоваться для научно-исследовательской работы студентов и аспирантов математических специальностей.

УДК 517.984(075)

ББК В162.4я7

ISBN 978-5-6055745-9-0

© Н. П. Бондаренко, 2026

Оглавление

Введение	5
Обозначения	7
1 Предварительные сведения	8
1.1 Линейное пространство	8
1.2 Аналитические функции	13
1.3 Ряд Лорана и вычеты	16
1.4 Гильбертово пространство	20
2 Собственные значения задачи Штурма–Лиувилля	24
2.1 Характеристическая функция	25
2.2 Сведение уравнения Штурма–Лиувилля к интегральному уравнению	29
2.3 Асимптотические формулы для решений типа синуса и косинуса	31
2.4 Оценки характеристической функции	34
2.5 Асимптотика собственных значений	37
2.6 Уточненные асимптотические формулы	40
3 Оператор Штурма–Лиувилля	46
3.1 Определение оператора Штурма–Лиувилля	46
3.2 Собственные значения и собственные функции	48
3.3 Симметрические операторы	49
3.4 Симметричность оператора Штурма–Лиувилля	51
3.5 Положительные операторы	52
3.6 Присоединенные функции	54
3.7 Кратности собственных значений	57

4	Обратные задачи Штурма–Лиувилля	61
4.1	Решение Вейля и функция Вейля	61
4.2	Постановки обратных задач	66
4.3	Оценки для функции Вейля	68
4.4	Связь функции Вейля и спектральных данных	70
4.5	Единственность решения обратных задач	75
4.6	Задача Хохштадта–Либермана	79
	Список рекомендованной литературы	83

Введение

В учебном пособии рассматривается задача Штурма–Лиувилля

$$\begin{aligned} -y'' + q(x)y &= \lambda y, \quad x \in (0, \pi), \\ y(0) &= y(\pi) = 0. \end{aligned}$$

Данная краевая задача для линейного уравнения второго порядка начала изучаться в серии работ французских математиков Ж. Ш. Ф. Штурма и Ж. Лиувилля 1836–41 гг. (см. [22]). Задача Штурма–Лиувилля возникает при решении уравнений математической физики методом разделения переменных (см. [14, Глава II, § 3]). При этом важную роль при этом играют свойства ее собственных значений и собственных функций, рассматриваемые в данном пособии: вещественность, простота и асимптотическое поведение собственных значений, ортогональность собственных функций.

Данное учебное пособие дополняет классические учебники по уравнениям математической физики введением в теорию обратных спектральных задач Штурма–Лиувилля. Это направление интенсивно развивается в работах российских и зарубежных математиков, начиная с 50-х годов прошлого века, и знакомство с ним будет полезно студентам для их научно-исследовательской работы. Стоит также отметить, что часть результатов учебного пособия получена при помощи теории операторов в общем виде и поэтому без труда может быть перенесена на другие классы краевых задач.

Учебное пособие состоит из четырех глав. Первая глава содержит вспомогательные сведения из линейной алгебры, теории функций комплексной переменной и функционального анализа, используемые в последующих главах. Во второй главе изучаются свойства решений уравнения Штурма–Лиувилля и собственных значе-

ний краевой задачи. В частности, доказана теорема об асимптотическом поведении собственных значений. В третьей главе вводится оператор Штурма–Лиувилля и применяется операторный подход для исследования спектральных свойств рассматриваемой краевой задачи. Четвертая глава представляет собой краткое введение в теорию обратных задач Штурма–Лиувилля. В ней приведены постановки обратных задач и доказаны теоремы единственности их решения.

Учебное пособие предназначено для студентов направлений «Прикладная математика и информатика», «Прикладные математика и физика» и других математических специальностей как дополнительная литература по дисциплине «Уравнения математической физики». Также данное пособие может использоваться для научной работы студентов и аспирантов.

Обозначения

$\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел.

$\mathbb{Z}$ — множество целых чисел.

$\mathbb{R}$ — множество действительных чисел.

$\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел.

T — знак транспонирования.

$\operatorname{Re} z$ и $\operatorname{Im} z$ — действительная и мнимая части комплексного числа.

$\bar{z}$ — комплексное сопряжение.

i — мнимая единица: $i^2 = -1$.

$\operatorname{Res}_{z=z_0}$ — вычет относительно особой точки z_0 .

$\oint$ — контурный интеграл.

$\overline{k, n}$ — диапазон целых чисел от k до n .

$\equiv$ — знак тождественного равенства при любых значениях аргументов.

$C[a, b]$ — пространство непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций.

$C^k[a, b]$ — пространство k раз непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a, b]$ функций.

$O(\cdot)$ и $o(\cdot)$ — символы Ландау.

$\rho = \sqrt{\lambda}$, $\tau = \operatorname{Im} \rho$.

$\langle y, z \rangle$ — вронскиан $yz' - y'z$.

В оценках символ C обозначает различные положительные константы, не зависящие от x , λ , n и т.п.

1. Предварительные сведения

Данная глава содержит сведения из линейной алгебры, теории функций комплексной переменной и функционального анализа, которые используются в основной части учебного пособия.

1.1. Линейное пространство

Пусть V — некоторое множество. Пусть на множестве V определена *операция сложения*, ставящая в соответствие любой паре элементов a, b из V однозначно определенный элемент $a + b$ из V , называемый их суммой, и определена *операция умножения на комплексное число*, причем произведение αa элемента a на число α однозначно определено и принадлежит V . Далее в этом разделе латинские буквы $a, b, \dots$ будут обозначать элементы из V , а греческие буквы $\alpha, \beta, \dots$ — комплексные числа.

Множество V называется *комплексным линейным пространством*, если введенные операции удовлетворяют следующим аксиомам:

1. $a + b = b + a$ (коммутативность сложения).
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$ (ассоциативность сложения).
3. В V существует нулевой элемент 0 , удовлетворяющий условию: $a + 0 = a$ для всех a из V .
4. Для любого элемента a в V существует противоположный элемент $-a$, удовлетворяющий условию: $a + (-a) = 0$.
5. $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$ (дистрибутивность умножения на число относительно сложения элементов V).

6. $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$ (дистрибутивность умножения на элемент пространства V относительно сложения чисел).
7. $(\alpha\beta)a = \alpha(\beta a)$.
8. $1 \cdot a = a$.

Аналогично можно ввести понятие *действительного линейного пространства*, в котором определены операции сложения векторов и умножения вектора на действительное число. Однако в данном учебном пособии будут рассматриваться преимущественно комплексные пространства.

Перечислим простейшие свойства, вытекающие из аксиом 1–8.

1. Нулевой элемент в пространстве V единственен.
2. Противоположный элемент к каждому из элементов пространства V единственен.
3. Для любых элементов a и b из V существует и единственная разность $a - b = a + (-b)$.
4. $\alpha \cdot 0 = 0$ для любого $\alpha \in \mathbb{C}$.
5. $0 \cdot a = 0$.
6. Если $\alpha a = 0$, то $\alpha = 0$ или $a = 0$.
7. $\alpha(-a) = -\alpha a$.
8. $(-\alpha)a = -\alpha a$.
9. $\alpha(a - b) = \alpha a - \alpha b$.
10. $(\alpha - \beta)a = \alpha a - \beta a$.

Элементы линейного пространства называются *векторами*. Пусть $a_1, a_2, \dots, a_k$ — векторы линейного пространства V и $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ — комплексные числа. Вектор $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_k a_k$ называется *линейной комбинацией* векторов $a_1, a_2, \dots, a_k$ с коэффициентами $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$.

Система векторов $a_1, a_2, \dots, a_k$ называется *линейно независимой*, если равенство

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_k a_k = 0$$

возможно лишь при $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$.

Базисом линейного пространства называется упорядоченная линейно независимая система векторов пространства, через которую линейно выражается любой вектор пространства, то есть система векторов $e_1, e_2, \dots, e_n$ образует базис в V , если

- система $e_1, \dots, e_n$ линейно независима,
- для любого вектора $x \in V$ существуют числа $x_1, x_2, \dots, x_n$, такие что

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n. \quad (1.1)$$

Все базисы линейного пространства состоят из одного и того же числа векторов, которое называется *размерностью* пространства. Если это число конечное и равно n , линейное пространство называется *конечномерным* или n -мерным, иначе — *бесконечномерным*. Далее мы будем считать, что V — n -мерное линейное пространство. В n -мерном пространстве любые n линейно независимых векторов образуют базис.

Пример 1.1. Пространство $\mathbb{C}^n$ всевозможных комплексных векторов-столбцов $(x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ размера n является n -мерным

линейным пространством. Операции сложения и умножения на число в $\mathbb{C}^n$ вводятся следующим образом:

$$\begin{aligned}x &= (x_1, x_2, \dots, x_n)^T, & y &= (y_1, y_2, \dots, y_n)^T, \\x + y &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)^T, \\ \alpha x &= (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)^T.\end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что для введенных операций выполняются аксиомы 1–8. Базисом в $\mathbb{C}^n$ будет, например, система единичных векторов $e_1, e_2, \dots, e_n$, где вектор e_j содержит единицу в j -й позиции, и все остальные его элементы равны нулю.

Разложение (1.1) вектора по базису единственно для любого вектора из конечномерного пространства V . Коэффициенты $x_1, x_2, \dots, x_n$ называются *координатами* вектора x в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$. Таким образом, существует взаимно однозначное соответствие между векторами n -мерного пространства V и векторами координат $(x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, которые образуют пространство $\mathbb{C}^n$. Поэтому вместо произвольного n -мерного пространства можно ограничиться изучением пространства $\mathbb{C}^n$.

Пример 1.2. Рассмотрим функции вида $c_1 \sin x + c_2 \cos x$ на отрезке $[0, \pi]$, где c_1, c_2 — произвольные комплексные коэффициенты. Все функции такого вида образуют линейное пространство, в которых сложение и умножение на число заданы следующим образом:

$$\begin{aligned}f(x) &= c_1 \sin x + c_2 \cos x, & g(x) &= d_1 \sin x + d_2 \cos x, \\f(x) + g(x) &= (c_1 + d_1) \sin x + (c_2 + d_2) \cos x, \\ \alpha f(x) &= (\alpha c_1) \sin x + (\alpha c_2) \cos x.\end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что для введенных операций выполняются аксиомы 1–8.

Функции $\sin x$ и $\cos x$ линейно независимы и образуют базис в рассматриваемом пространстве. Значит, пространство конечномерно и имеет размерность 2. Числа c_1 и c_2 являются координатами функции $c_1 \sin x + c_2 \cos x$ в этом базисе. Таким образом, любой функции вида $c_1 \sin x + c_2 \cos x$ соответствует вектор $(c_1, c_2)^T$ из пространства $\mathbb{C}^2$.

Пример 1.3. Множество непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций $C[a, b]$ является линейным пространством. Операции сложения и умножения на число в нем вводятся естественным образом. Известно, что это пространство бесконечномерно, то есть в нем не существует конечного базиса. Все пространства, содержащие $C[a, b]$ (например, определенное в разделе 1.4 пространство $L_2(a, b)$), тоже являются бесконечномерными.

Непустое подмножество L линейного пространства V называется *подпространством*, если оно само является линейным пространством относительно операций сложения векторов и умножения вектора на число, заданных в V . Непустое подмножество L линейного пространства V является его подпространством тогда и только тогда, когда для любых двух векторов L их линейная комбинация также принадлежит L . Заметим, что нулевой элемент пространства V принадлежит всем его подпространствам. Любое линейное пространство имеет нулевое подпространство, состоящее из одного нулевого элемента, и подпространство, совпадающее со всем пространством. Также подпространством линейного пространства V будет *линейная оболочка* любых векторов $a_1, a_2, \dots, a_k$, то есть множество всех линейных комбинаций вида $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_k a_k$, где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ — комплексные числа.

Линейную оболочку векторов $a_1, a_2, \dots, a_n$ еще называют пространством, натянутым на эти векторы.

Дополнительная литература к разделу 1.1: [2, 3, 5].

1.2. Аналитические функции

Пусть $f(z)$ — однозначная функция, определенная в области G плоскости комплексной переменной z . *Область* — это открытое связное множество. Каждая точка z_0 принадлежит области вместе с некоторой окрестностью $\{z \in \mathbb{C}: |z - z_0| < \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$.

Будем говорить, что функция $f(z)$ *комплексно дифференцируема* в точке z области G , если отношение

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

стремится к нулю при $h \rightarrow 0$. Предел этого отношения называется *производной* функции f в точке z и обозначается $f'(z)$:

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}.$$

Функция $f(z)$ называется *аналитической* в области G , если она комплексно дифференцируема в каждой точке этой области. Говорят, что функция $f(z)$ *аналитична* в точке z , если она аналитична в некоторой окрестности этой точки.

Аналитичность функции — достаточно сильное требование. Действительно, предполагая дифференцируемость функции $f(z)$ в точке z , мы считаем, что предел отношения $\frac{f(z+h) - f(z)}{h}$ будет одним и тем же числом вне зависимости от направления, по которому переменная точка $z+h$ приближается к точке z . Более того, понятие аналитичности требует комплексной дифференцируемости

функции не в одной конкретной точке, а в области. Поэтому аналитические функции обладают рядом специфических свойств, играющих важную роль в теории функций комплексной переменной. Приведем альтернативное эквивалентное определение аналитической функции.

Функция $f(z)$ называется аналитической в точке z_0 , если ее ряд Тейлора

$$f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n + \dots \quad (1.2)$$

сходится к $f(z)$ в некоторой окрестности точки z_0 .

Функция называется *целой*, если она аналитична во всей комплексной плоскости. В этом случае ее ряд Тейлора (1.2) сходится к ее значению в любой точке комплексной плоскости.

Примеры целых функций:

$$\begin{aligned} P_n(z) &= a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n, \\ e^z &= 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots, \\ \sin z &= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots, \\ \cos z &= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} + \dots, \\ \cos \sqrt{z} &= 1 - \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{4!} + \dots + \frac{(-1)^n z^n}{(2n)!} + \dots, \\ \frac{\sin \sqrt{z}}{\sqrt{z}} &= 1 - \frac{z}{3!} + \frac{z^2}{5!} - \dots + \frac{(-1)^n z^n}{(2n+1)!} + \dots \end{aligned}$$

Отметим, что функция $\sqrt{z}$ не является целой, так как ее производная $(\sqrt{z})' = \frac{1}{2\sqrt{z}}$ не существует в нуле. Тем не менее, функции $\cos \sqrt{z}$ и $\frac{\sin \sqrt{z}}{\sqrt{z}}$ аналитичны в нуле, что следует из вида их рядов Тейлора. Функция $\sqrt{z}$, в свою очередь, аналитична во всех точках $z \neq 0$ и также будет аналитической, например, в области, представляющей собой всю комплексную плоскость с разрезом по лучу $z \geq 0$.

Для аналитических функций справедливы следующие теоремы.

Теорема 1.4 (принцип максимума модуля, [12], с. 205). *Модуль функции $f(z) \not\equiv \text{const}$, аналитической в области G и непрерывной в ее замыкании $\overline{G}$, достигает своего максимального значения на границе области.*

Теорема 1.5 (Лиувилля, [12], с. 208). *Если функция $f(z)$, аналитическая во всей комплексной плоскости, является ограниченной по модулю, то она постоянна.*

Теорема 1.6 (единственности, [12], с. 201). *Если две функции $f(z)$ и $g(z)$, аналитические в некоторой области G , имеют равные значения на бесконечном множестве точек E в этой области, причем множество E допускает по крайней мере одну предельную точку, лежащую внутри G , то эти функции равны между собой всюду в области G .*

Таким образом, две аналитические функции совпадают в области, если они совпадают, например, на каком-либо отрезке, принадлежащем этой области, или на счетном множестве, имеющем предельную точку в этой области. *Счетное множество* — это бес-

конечное множество, элементы которого можно пронумеровать натуральными числами.

Из теоремы единственности вытекает следующее важное утверждение о нулях аналитической функции.

Теорема 1.7. *Функция $f(z) \not\equiv 0$, аналитическая в области G , имеет в этой области не более чем счетное множество нулей, которое не имеет предельных точек в области G .*

Отметим, что множество нулей целой функции может быть:

- пустым (пример — e^z);
- конечным (пример — многочлен $P_n(z)$);
- счетным с бесконечно удаленной предельной точкой (примеры — $\sin z$, $\cos z$).

1.3. Ряд Лорана и вычеты

Пусть $f(z)$ — функция, аналитическая в кольце $\{z: r < |z - z_0| < R\}$. Тогда имеет место разложение в *ряд Лорана*, который сходится к $f(z)$ во всех точках кольца:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n. \quad (1.3)$$

Коэффициенты ряда Лорана c_n определяются однозначно. Сумма $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ называется *правильной частью* ряда Лорана¹.

¹Правильная часть представляет собой ряд Тейлора, сходящийся в круге $\{z: |z - z_0| < R\}$.

Сумма по отрицательным степеням $\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - z_0)^n$ называется *главной частью* ряда Лорана. Если главная часть содержит хотя бы один ненулевой коэффициент, она неограниченно возрастает по абсолютной величине при $z \rightarrow z_0$.

Особого внимания заслуживает случай, когда $r = 0$ и ряд Лорана сходится к $f(z)$ при всех z в круге $\{z: |z - z_0| < R\}$, кроме, возможно, $z = z_0$. В этом случае точка z_0 называется *изолированной особой точкой* функции $f(z)$.

Существует три типа изолированных особых точек:

1. Точка z_0 называется *существенно особой точкой* функции $f(z)$, если ряд Лорана (1.3) содержит бесконечное число отрицательных степеней $(z - z_0)$.
2. Точка z_0 называется *полюсом* функции $f(z)$, если ряд Лорана (1.3) содержит конечное число отрицательных степеней.
3. Точка z_0 называется *устранимой особой точкой*, если ряд Лорана (1.3) не содержит отрицательных степеней.

Функция называется *мероморфной*, если она не имеет конечных особых точек, кроме полюсов. Отношение двух целых функций $\frac{f(z)}{g(z)}$ является мероморфной функцией, нули которой совпадают с нулями $f(z)$, а полюсы — с нулями $g(z)$. Верно и обратное: любую мероморфную функцию можно представить в виде отношения двух целых функций. Заметим, что в силу теоремы 1.7, мероморфная функция имеет не более чем счетное множество полюсов, не имеющее конечных предельных точек.

Вычетом функции $f(z)$ относительно изолированной особой точки z_0 называется коэффициент c_{-1} ряда Лорана (1.3) при степени $(z - z_0)^{-1}$. Для вычета используется обозначение $\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z)$.

Существуют простые формулы для вычисления вычетов относительно полюсов. Говорят, что точка z_0 является полюсом n -го порядка функции $f(z)$, если главная часть ряда Лорана функции $f(z)$ относительно этой точки имеет вид

$$\frac{c_{-1}}{z - z_0} + \frac{c_{-2}}{(z - z_0)^2} + \dots + \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}.$$

Полюс первого порядка называется *простым*. Вычет относительно простого полюса может быть вычислен по следующей формуле:

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z). \quad (1.4)$$

Действительно, ряд Лорана относительно простого полюса имеет вид

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z - z_0} + c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \dots \quad (1.5)$$

Подставляя формулу (1.5) в правую часть (1.4), получаем

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) &= \lim_{z \rightarrow z_0} (c_{-1} + c_0(z - z_0) + c_1(z - z_0)^2 + \\ &\quad + c_2(z - z_0)^3 + \dots) = c_{-1}, \end{aligned}$$

что доказывает формулу (1.4).

Вычет функции $f(z)$ относительно полюса n -го порядка z_0 вычисляется по формуле

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{n-1}[(z - z_0)^n f(z)]}{dz^{n-1}}.$$

Если $m(z)$ — мероморфная функция, представимая в виде отношения целых функций $\frac{f(z)}{g(z)}$, причем $f(z)$ и $g(z)$ не имеют общих

нулей, то полюсы $m(z)$ совпадают с нулями $g(z)$ и порядки полюсов совпадает с кратностями нулей. Число z_0 является нулем кратности k аналитической в z_0 функции $g(z)$, если $g^{(j)}(z_0) = 0$ при $j = 0, k-1$ и $g^{(k)}(z_0) \neq 0$. Здесь мы считаем, что $g^{(0)}(z) = g(z)$. Вычет мероморфной функции $m(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$ относительно простого полюса z_0 может быть вычислен по формуле

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} m(z) = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}. \quad (1.6)$$

Данная формула может быть легко получена из (1.4):

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} m(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(z - z_0)f(z)}{g(z) - g(z_0)} = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}.$$

Справедлива основная теорема о вычетах.

Теорема 1.8 ([12], с. 238). Пусть $f(z)$ — функция, аналитическая во всех точках области G , кроме конечного числа особых точек $z_1, z_2, \dots, z_k$. Обозначим через Γ произвольный кусочно-гладкий замкнутый контур, содержащий внутри себя точки $z_1, z_2, \dots, z_k$ и целиком лежащий в области G . При этих условиях интеграл от функции $f(z)$ по контуру Γ , деленный на $2\pi i$, равен сумме вычетов этой функции относительно $z_1, z_2, \dots, z_k$:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{j=1}^k \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z).$$

Дополнительная литература к разделам 1.2 и 1.3: [12, 16].

1.4. Гильбертово пространство

Скалярным произведением в комплексном линейном пространстве H называется функция (x, y) , определенная для каждой пары элементов $x, y \in H$ и удовлетворяющая следующим условиям:

1. $(x, y) = \overline{(y, x)}$ (в частности, (x, x) — вещественное число);
2. $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$;
3. $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$, $\lambda \in \mathbb{C}$;
4. $(x, x) \geq 0$, причем $(x, x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$.

Элементы x и y пространства со скалярным произведением называются *ортogonalными*, если $(x, y) = 0$.

Нормой в линейном пространстве H называется функционал², обозначаемый $\| \cdot \|$ и удовлетворяющий следующим трем аксиомам:

1. $\|x\| \geq 0$, причем $\|x\| = 0$ только при $x = 0$;
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ при любых $\lambda \in \mathbb{C}$ и $x \in H$;
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $x, y \in H$ (неравенство треугольника).

Линейное пространство H , на котором задана норма, называется *нормированным пространством*.

В пространстве со скалярным произведением вводится норма $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$. Нетрудно проверить, что для нее выполнены все три аксиомы нормы.

Бесконечномерное линейное пространство со скалярным произведением называется *гильбертовым пространством*, если оно

²То есть функция, заданная на H , с числовой областью значений

дополнительно удовлетворяет условиям полноты и сепарабельности (более подробно см. в [4, 7]). Однако утверждения о гильбертовом пространстве, приведенные в данном учебном пособии, справедливы для любого линейного пространства со скалярным произведением. Свойства полноты и сепарабельности в их доказательствах не используются.

Рассмотрим примеры гильбертовых пространств.

Пример 1.9. Пространство $\mathbb{C}^n$ комплексных векторов размерности n со скалярным произведением

$$(x, y) = \sum_{j=1}^n x_j \overline{y_j},$$

строго говоря, не является гильбертовым, потому что оно конечномерно. Тем не менее, для него выполнены все остальные условия из определения и многие свойства гильбертова пространства.

Пример 1.10. Пространство l_2 бесконечных последовательностей $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, для которых

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty,$$

является гильбертовым пространством со скалярным произведением и нормой

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}, \quad \|x\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \right)^{1/2}.$$

Следующим важным примером гильбертова пространства является пространство функций $L_2(a, b)$.

Определение 1.11. Пространством $L_2(a, b)$ называется линейное пространство, состоящее из классов эквивалентных между собой функций, интегрируемых с квадратом, то есть таких функций $f(x)$, для которых

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty.$$

Под интегрируемостью здесь понимается интегрируемость по Лебегу (см. [11, Главы V, VI]). Отметим, что две функции $f, g \in L_2(a, b)$ считаются равными, если $f(x) = g(x)$ п.в. («почти всюду») на (a, b) . Равенство «почти всюду» означает, что функции равны на всем интервале (a, b) за исключением, возможно, множества меры нуль. Множествами меры нуль являются, в частности, все конечные и счетные множества. Поэтому функции из $L_2(a, b)$, строго говоря, не имеют значений в конкретных точках. Значение функции в точке можно заменить на любое другое значение, и элемент пространства L_2 от этого не изменится. Поэтому в определении идет речь о классах эквивалентных между собой функций. Отсюда, в частности, следует, что $L_2(a, b) = L_2[a, b]$, так как значения функций в точках a и b все равно не важны.

Интегрируемыми по Лебегу на конечном интервале (a, b) функциями являются все функции, интегрируемые по Риману (обратное неверно). В частности, все непрерывные на отрезке $[a, b]$ функции являются интегрируемыми по Лебегу и принадлежат пространству $L_2(a, b)$, однако это пространство не исчерпывается непрерывными функциями.

Приведем некоторые примеры функций, принадлежащих пространству $L_2(a, b)$.

Пример 1.12. Пусть $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ — разбиение отрезка $[a, b]$. К функциям из класса $L_2(a, b)$ относятся

все ступенчатые функции вида $f(x) = a_k$, $x_{k-1} < x < x_k$ (значения в точках разбиения x_k неважны), $k = \overline{1, n}$, где $\{a_k\}_{k=1}^n$ — некоторые числа. Для ступенчатых функций

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} |a_k|^2 dx = \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) |a_k|^2 < \infty.$$

Пример 1.13. Функции из $L_2(a, b)$ не обязательно ограничены. Например, $x^{-\alpha} \in L_2(0, 1)$ при $0 < \alpha < 1/2$:

$$\int_0^1 |x^{-\alpha}|^2 dx = \frac{x^{-2\alpha+1}}{-2\alpha} \Big|_0^1 < \infty.$$

Пространство функций $L_2(a, b)$ является гильбертовым пространством со скалярным произведением и нормой

$$(f, g) = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx, \quad \|f\| = \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Дополнительная литература к разделу 1.4: [4, 7].

2. Собственные значения задачи Штурма–Лиувилля

Рассмотрим краевую задачу для уравнения Штурма–Лиувилля

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad x \in (0, \pi), \quad (2.1)$$

с краевыми условиями Дирихле

$$y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0. \quad (2.2)$$

Здесь q — комплекснозначная функция, непрерывная на отрезке $[0, \pi]$, λ — комплексное число. Обычно функцию q называют *потенциалом*, число λ — *спектральным параметром*. Обозначим задачу (2.1)–(2.2) через L .

Интервал $(0, \pi)$ взят для простоты. Случай произвольного интервала (a, b) всегда сводится к этому случаю путем линейной замены переменной: $x = ct + d$.

Определение 2.1. *Собственным значением* краевой задачи L называется значение параметра λ , при котором данная задача имеет нетривиальное решение y ($y \neq 0$), называемое *собственной функцией*, отвечающей собственному значению λ .

В данной главе изучаются некоторые свойства решений уравнения Штурма–Лиувилля (2.1) и собственных значений краевой задачи L при произвольном комплекснозначном потенциале q . Основным результатом главы является теорема 2.8, описывающая асимптотическое поведение собственных значений.

2.1. Характеристическая функция

Пусть $S(x, \lambda)$ и $C(x, \lambda)$ — решения уравнения (2.1), удовлетворяющие начальным условиям³

$$S(0, \lambda) = 0, \quad S'(0, \lambda) = 1, \quad C(0, \lambda) = 1, \quad C'(0, \lambda) = 0. \quad (2.3)$$

Заметим, что в силу теоремы Пикара о существовании и единственности решения задачи Коши [9, Глава 5, § 1], условия (2.3) однозначно задают решения уравнения (2.1) на отрезке $[0, \pi]$. Более того, из доказательства теоремы Пикара вытекает непрерывная зависимость этих решений от спектрального параметра λ (см. [9, Глава 5, § 2]). Аналогично можно показать, что данная зависимость является аналитической. Действительно, коэффициенты уравнения (2.1) зависят от параметра λ линейно, что является частным случаем аналитической зависимости. При доказательстве теоремы Пикара решения дифференциального уравнения строятся в виде рядов, члены которых также будут аналитическими функциями параметра λ . Вследствие этого решения $S(x, \lambda)$ и $C(x, \lambda)$, а также их производные $S'(x, \lambda)$ и $C'(x, \lambda)$ по переменной x аналитичны по $\lambda \in \mathbb{C}$ при каждом фиксированном $x \in [0, \pi]$. Функции, аналитические во всей комплексной плоскости, называются *целыми*. Таким образом, функции $S^{(\nu)}(x, \lambda)$ и $C^{(\nu)}(x, \lambda)$ при $\nu = 0, 1$ — целые по λ .

Будем называть функцию $\Delta(\lambda) := S(\pi, \lambda)$ *характеристической функцией* краевой задачи L . Очевидно, характеристическая функция является целой. Следующая теорема показывает связь между характеристической функцией и собственными значениями краевой задачи.

³Здесь и далее «штрих» обозначает дифференцирование по первой переменной.

Теорема 2.2. Собственные значения краевой задачи L совпадают с нулями $\{\lambda_n\}$ характеристической функции $\Delta(\lambda)$. Функции $S(x, \lambda_n)$ являются собственными функциями краевой задачи L , отвечающими соответствующим собственным значениям λ_n . Каждому собственному значению соответствует единственная с точностью до постоянного множителя собственная функция.

Доказательство. Пусть число λ_0 является нулем функции $\Delta(\lambda)$. Тогда решение $S(x, \lambda_0)$ удовлетворяет краевым условиям (2.2) и, следовательно, является собственной функцией краевой задачи L .

Обратно, пусть λ_0 — собственное значение и $y_0(x)$ — отвечающая ему собственная функция. Решения $C(x, \lambda)$ и $S(x, \lambda)$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (2.1), поэтому любое его решение при фиксированном λ представимо в виде $AC(x, \lambda) + BS(x, \lambda)$, где A и B — некоторые константы. Для собственной функции имеем: $y_0(x) = AC(x, \lambda_0) + BS(x, \lambda_0)$. Подставляя это представление в первое из условий (2.2) и используя (2.3), получаем $A = 0$. Следовательно, $y_0(x) = BS(x, \lambda_0)$. В силу второго краевого условия (2.2), имеем $B\Delta(\lambda_0) = 0$. Константа B не может быть равна нулю, поскольку $y_0(x)$ — нетривиальное решение. Значит, λ_0 — нуль характеристической функции. Попутно мы доказали, что любая собственная функция, отвечающая собственному значению λ_0 , имеет вид $BS(x, \lambda_0)$, то есть она единственна с точностью до постоянного множителя B . $\square$

Пример 2.3. Рассмотрим задачу (2.1)–(2.2) с потенциалом $q(x) \equiv 0$. Общее решение уравнения $-y'' = \lambda y$ может быть найдено методом Эйлера:

$$y(x) = C_1 e^{i\rho x} + C_2 e^{-i\rho x}, \quad \rho := \sqrt{\lambda}, \quad \rho \neq 0.$$

Здесь C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Подставляя общее решение в начальные условия (2.3), находим:

$$S(x, \lambda) = \frac{\sin \rho x}{\rho}, \quad C(x, \lambda) = \cos \rho x. \quad (2.4)$$

Заметим, что функции, определяемые формулами (2.4), удовлетворяют уравнению $-y'' = \lambda y$ и начальным условиям (2.3) в том числе при $\rho = 0$, если понимать первую из них как первый замечательный предел:

$$S(x, 0) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\sin \rho x}{\rho} = x.$$

Заметим также, что функции $S(x, \lambda)$ и $C(x, \lambda)$ целые не только по ρ , но и по λ . Для этого используем разложения синуса и косинуса в ряды, сходящиеся во всей комплексной плоскости:

$$S(x, \lambda) = \frac{1}{\rho} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\rho x)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \lambda^n x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$C(x, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\rho x)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \lambda^n x^{2n}}{(2n)!}.$$

Вообще говоря, извлекая корень ρ из комплексного числа λ , необходимо указывать ветвь многозначной аналитической функции. Однако в данном случае выбор ветви не важен, поскольку разложения функций $S(x, \lambda)$ и $C(x, \lambda)$ в ряды содержат ρ только в четных степенях.

Характеристическая функция имеет вид $\Delta(\lambda) = \frac{\sin \rho \pi}{\rho}$. Функция $\sin \rho \pi$ имеет нули $\rho_n = n$, $n \in \mathbb{Z}$. Следовательно, функция $\Delta(\lambda)$ имеет нули $\lambda_n = n^2$, $n \in \mathbb{N}$. Действительно, нуль $n = 0$ исчезает из-за деления на ρ . Отрицательные значения ρ_n исключаются из рассмотрения, поскольку они дают в квадрате те же λ_n , что и по-

ложительные. По теореме 2.2 найденные числа $\lambda_n = n^2$ ($n \in \mathbb{N}$) образуют множество собственных значений краевой задачи L при $q = 0$.

Замечание 2.4. Как правило, *характеристической функцией* краевой задачи называется целая функция $\Delta(\lambda)$, нули которой совпадают с собственными значениями этой задачи. Рассмотрим метод построения характеристической функции на примере краевой задачи для уравнения Штурма–Лиувилля (2.1) с условиями Неймана

$$y'(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0. \quad (2.5)$$

Общее решение уравнения (2.1) имеет вид

$$y(x) = AC(x, \lambda) + BS(x, \lambda), \quad (2.6)$$

где A и B — произвольные постоянные (y , A и B зависят от λ). Для нахождения собственных значений задачи (2.1), (2.5) подставим (2.6) в краевые условия (2.5) и применим (2.3):

$$\begin{aligned} y'(0) &= AC'(0, \lambda) + BS'(0, \lambda) = B = 0, \\ y'(\pi) &= AC'(\pi, \lambda) = 0. \end{aligned}$$

Заметим, что $A \neq 0$. Иначе решение (2.6) будет тривиальным. Следовательно, собственные значения задачи (2.1), (2.5) совпадают с нулями целой функции $\Delta(\lambda) = C'(\pi, \lambda)$. Таким образом, мы получили формулу для характеристической функции задачи (2.1), (2.5). Для данной функции можно доказать утверждение, аналогичное теореме 2.2.

В случае ненулевого потенциала $q(x)$ уравнение (2.1) может, вообще говоря, не решаться аналитически. Тем не менее, у него су-

ществуют решения $S(x, \lambda)$ и $C(x, \lambda)$, которые по своим свойствам аналогичны решениям $S_0(x, \lambda)$ и $C_0(x, \lambda)$ уравнения $-y'' = \lambda y$. Ввиду формулы (2.4), функции $S(x, \lambda)$ и $C(x, \lambda)$ называются решениями *типа синуса* и *косинуса*. Следующие два раздела посвящены их свойствам.

2.2. Сведение уравнения Штурма–Лиувилля к интегральному уравнению

В данном разделе произвольная задача Коши для уравнения Штурма–Лиувилля (2.1) сводится к интегральному уравнению методом вариации произвольных постоянных (см. [9, Глава 6, § 3]).

Перепишем уравнение (2.1) в виде

$$y'' + \lambda y = f(x), \quad f(x) := q(x)y, \quad (2.7)$$

и будем смотреть на $f(x)$ как на неоднородность.

Общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y'' + \lambda y = 0$$

имеет вид (см. пример 2.3):

$$y(x) = A \cos \rho x + B \frac{\sin \rho x}{\rho}, \quad \rho = \sqrt{\lambda}, \quad (2.8)$$

где A и B — произвольные постоянные. Следуя методу вариации произвольных постоянных, будем искать решение уравнения (2.7) в виде

$$y(x) = A(x) \cos \rho x + B(x) \frac{\sin \rho x}{\rho}.$$

Имеем:

$$y'(x) = -A(x)\rho \sin \rho x + B(x) \cos \rho x + \underbrace{A'(x) \cos \rho x + B'(x) \frac{\sin \rho x}{\rho}}_{=0} \quad (2.9)$$

$$y''(x) = -A(x)\rho^2 \cos \rho x - B(x)\rho \sin \rho x - A'(x)\rho \sin \rho x + B'(x) \cos \rho x = -\lambda y(x) + f(x).$$

Таким образом, получаем систему относительно неизвестных $A'(x)$ и $B'(x)$:

$$\begin{cases} A'(x) \cos \rho x + B'(x) \frac{\sin \rho x}{\rho} = 0, \\ -A'(x)\rho \sin \rho x + B'(x) \cos \rho x = f(x). \end{cases}$$

Решение этой системы имеет вид:

$$A'(x) = -f(x) \frac{\sin \rho x}{\rho}, \quad B'(x) = f(x) \cos \rho x.$$

Интегрируя полученные дифференциальные уравнения, приходим к соотношениям

$$\begin{aligned} A(x) &= A(0) - \int_0^x f(t) \frac{\sin \rho t}{\rho} dt, \\ B(x) &= B(0) + \int_0^x f(t) \cos \rho t dt. \end{aligned}$$

Подставляя данные соотношения в (2.8), получаем общее решение неоднородного уравнения (2.7), зависящее от произвольных постоянных $A(0)$ и $B(0)$:

$$y(x) = A(0) \cos \rho x + B(0) \frac{\sin \rho x}{\rho} + \int_0^x \frac{\sin \rho(x-t)}{\rho} f(t) dt. \quad (2.10)$$

Заметим, что $y(0) = A(0)$. Из (2.9) следует, что $y'(0) = B(0)$. Подставляя $y(x) = S(x, \lambda)$ и $y(x) = C(x, \lambda)$ в (2.10) и принимая во внимание начальные условия (2.3) и обозначение $f(x) = q(x)y$, приходим к интегральным уравнениям для решений типа синуса и косинуса:

$$S(x, \lambda) = \frac{\sin \rho x}{\rho} + \int_0^x \frac{\sin \rho(x-t)}{\rho} q(t) S(t, \lambda) dt, \quad (2.11)$$

$$C(x, \lambda) = \cos \rho x + \int_0^x \frac{\sin \rho(x-t)}{\rho} q(t) C(t, \lambda) dt. \quad (2.12)$$

Таким образом, мы показали, что решения $S(x, \lambda)$ и $C(x, \lambda)$ уравнения Штурма–Лиувилля (2.1) удовлетворяют уравнениям (2.11) и (2.12) соответственно. Уравнения (2.11) и (2.12) являются интегральными уравнениями Вольтерра второго рода (см. [1, Глава IV]). Изложение теории интегральных уравнений выходит за рамки данного учебного пособия. Отметим только, что интегральные уравнения Вольтерра (2.11) и (2.12) однозначно разрешимы при любых значениях спектрального параметра λ , и можно убедиться непосредственной проверкой, что их решения удовлетворяют уравнению Штурма–Лиувилля (2.1). То есть на функции $S(x, \lambda)$ и $C(x, \lambda)$ можно смотреть как на решения задач Коши для дифференциального уравнения, а можно — как на решения интегральных уравнений. В дальнейшем мы будем использовать оба подхода.

2.3. Асимптотические формулы для решений типа синуса и косинуса

Важную роль для дальнейшего анализа будет играть асимптотическое поведение различных характеристик, связанных с уравнением (2.1), то есть их поведение при больших по модулю значениях

спектрального параметра λ . В этом разделе, используя интегральные уравнения (2.11) и (2.12), мы получим асимптотические формулы для решений $S(x, \lambda)$ и $C(x, \lambda)$. В дальнейшем будем считать, что $\rho = \sqrt{\lambda}$, $\operatorname{Re} \rho \geq 0$ и $\tau = \operatorname{Im} \rho$.

Теорема 2.5. При $|\rho| \rightarrow \infty$ верны следующие асимптотические формулы:

$$S(x, \lambda) = \frac{\sin \rho x}{\rho} + O\left(|\rho|^{-2} e^{|\tau|x}\right) = O\left(|\rho|^{-1} e^{|\tau|x}\right), \quad (2.13)$$

$$S'(x, \lambda) = \cos \rho x + O\left(|\rho|^{-1} e^{|\tau|x}\right) = O\left(e^{|\tau|x}\right), \quad (2.14)$$

$$C(x, \lambda) = \cos \rho x + O\left(|\rho|^{-1} e^{|\tau|x}\right) = O\left(e^{|\tau|x}\right), \quad (2.15)$$

$$C'(x, \lambda) = -\rho \sin \rho x + O\left(e^{|\tau|x}\right) = O\left(|\rho| e^{|\tau|x}\right) \quad (2.16)$$

равномерно по $x \in [0, \pi]$.

Доказательство. Из уравнения (2.11) получаем оценку

$$\begin{aligned} |\rho S(x, \lambda)| e^{-|\tau|x} &\leq |\sin \rho x| e^{-|\tau|x} + |\rho|^{-1} \int_0^x |\sin \rho(x-t)| e^{|\tau|(x-t)} \cdot \\ &\cdot |q(t)| |\rho S(t, \lambda)| e^{-|\tau|t} dt, \quad |\rho| \geq 1. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Используя формулы

$$\cos \rho x = \frac{e^{i\rho x} + e^{-i\rho x}}{2}, \quad \sin \rho x = \frac{e^{i\rho x} - e^{-i\rho x}}{2i},$$

нетрудно показать справедливость оценок

$$|\sin \rho x| \leq e^{|\tau|x}, \quad |\cos \rho x| \leq e^{|\tau|x}. \quad (2.18)$$

Обозначим

$$\mu(\lambda) = \max_{0 \leq x \leq \pi} \left(|\rho S(x, \lambda)| e^{-|\tau|x} \right). \quad (2.19)$$

Подставляя (2.18) и (2.19) в (2.17), приходим к оценке

$$|\rho S(x, \lambda)| e^{-|\tau|x} \leq 1 + |\rho|^{-1} \int_0^x |q(t)| \mu(\lambda) dt, \quad |\rho| \geq 1.$$

Таким образом,

$$\mu(\lambda) \leq 1 + \frac{C_1 \mu(\lambda)}{|\rho|}, \quad C_1 = \int_0^\pi |q(t)| dt.$$

Так как потенциал q непрерывен на $[0, \pi]$, функция $|q(t)|$ интегрируема на этом отрезке и, следовательно, $C_1 < \infty$. При $|\rho| \geq 2C_1$ получаем

$$\mu(\lambda) \leq 1 + \frac{1}{2} \mu(\lambda) \Rightarrow \mu(\lambda) \leq 2.$$

Таким образом, $\mu(\lambda) = O(1)$ при $|\rho| \rightarrow \infty$, то есть $S(x, \lambda) = O(|\rho|^{-1} e^{|\tau|x})$. Подставляя полученную оценку в правую часть равенства (2.11) и применяя (2.18), получаем

$$\begin{aligned} \left| S(x, \lambda) - \frac{\sin \rho x}{\rho} \right| &\leq |\rho|^{-2} \int_0^x |\sin \rho(x-t)| |q(t)| e^{|\tau|t} dt \leq \\ &\leq |\rho|^{-2} e^{|\tau|x} \int_0^\pi |q(t)| dt. \end{aligned}$$

Оценка (2.11) доказана.

Дифференцируя (2.11), вычисляем

$$S'(x, \lambda) = \cos \rho x + \int_0^x \cos \rho(x-t) q(t) S(t, \lambda) dt. \quad (2.20)$$

Здесь используется формула дифференцирования интеграла с переменными пределами и подынтегральной функцией, зависящей от параметра (см. [15, Глава 14]):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, t) dt &= f(x, \beta(x))\beta'(x) - f(x, \alpha(x))\alpha'(x) + \\ &+ \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Подставляя оценку $S(x, \lambda) = O(|\rho|^{-1}e^{|\tau|x})$ в правую часть (2.20), приходим к асимптотической формуле (2.14).

Аналогичным образом, с использованием интегрального уравнения (2.12), доказываются формулы (2.15) и (2.16). $\square$

Заметим, что в главных частях асимптотик (2.13) и (2.16) стоят решения $S(x, \lambda)$ и $C(x, \lambda)$ для случая $q = 0$ и их производные (см. пример 2.3).

2.4. Оценки характеристической функции

Формула (2.13) дает асимптотику характеристической функции:

$$\Delta(\lambda) = S(\pi, \lambda) = \frac{\sin \rho\pi}{\rho} + O\left(|\rho|^{-2}e^{|\tau|\pi}\right), \quad |\rho| \rightarrow \infty. \quad (2.22)$$

Из этой формулы очевидно, что $\Delta(\lambda) \not\equiv 0$. По теореме 1.7 целая функция $\Delta(\lambda)$ имеет не более чем счетное множество нулей, не имеющих конечных предельных точек.

В дальнейшем нам потребуется вспомогательная лемма об оценке функции $\sin \rho\pi$ снизу. Выберем достаточно малое положительное число $\delta \in (0, \frac{1}{2})$ и рассмотрим следующую область в ρ -плоскости:

$$G_\delta = \{\rho: |\rho - n| \geq \delta, n \in \mathbb{Z}\}. \quad (2.23)$$

Лемма 2.6. *Справедлива оценка*

$$|\sin \rho\pi| \geq C_\delta e^{|\tau|\pi}, \quad \rho \in G_\delta, \quad (2.24)$$

где C_δ — положительная константа, зависящая от δ .

Заметим, что функция $\sin \rho\pi$ имеет нули в точках $\rho = n$, $n \in \mathbb{Z}$. При получении оценки снизу необходимо отступить от нулей, поэтому мы рассматриваем область G_δ .

Доказательство. Пусть $\rho = \sigma + i\tau$. Благодаря 2-периодичности и нечетности функции $\sin \rho\pi$, достаточно доказать оценку (2.24) в следующей области (см. рис. 1):

$$D_\delta = \{\rho: \sigma \in [-1/2, 1/2], \tau \geq 0, |\rho| \geq \delta\},$$

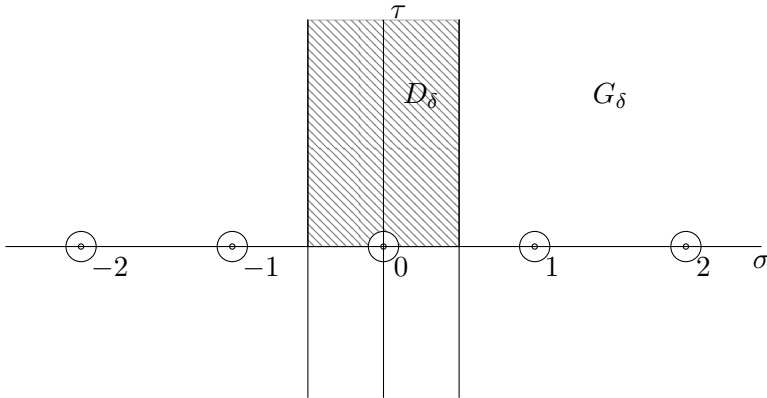


Рис. 1. Области G_δ и D_δ

Положим $\theta(\rho) = |\sin \rho\pi| e^{-|\tau|\pi}$. Функция $\theta(\rho)$ непрерывна и положительна в ограниченной замкнутой области $\rho \in D_\delta$, $\tau \leq 1$.

Следовательно, в этой области $\theta(\rho) \geq C_\delta > 0$. При $\tau \geq 1$ вычисляем

$$\theta(\rho) = \frac{1}{2} \left| e^{i\sigma\pi - \tau\pi} - e^{-i\sigma\pi + \tau\pi} \right| e^{-\tau\pi} = \frac{1}{2} \left| e^{-i\sigma\pi} \right| \left| e^{2i\sigma\pi} e^{-2\tau\pi} - 1 \right|.$$

Заметим, что

$$\left| e^{-i\sigma\pi} \right| = 1, \quad e^{-2\tau\pi} \leq e^{-2\pi} \leq \frac{1}{2}.$$

В результате получаем $\theta(\rho) \geq \frac{1}{4}$. Таким образом, оценка (2.24) доказана. $\square$

Докажем следующую теорему об оценке модуля характеристической функции снизу, которая будет использоваться в главе 4 для исследования обратной спектральной задачи.

Теорема 2.7. *Существуют константы $\rho^* > 0$, $\delta \in (0, \frac{1}{2})$ и $C > 0$, при которых справедлива оценка*

$$|\Delta(\lambda)| \geq C|\rho|^{-1}e^{|\tau|\pi}, \quad \lambda = \rho^2, \quad \rho \in G_\delta, \quad |\rho| \geq \rho^*, \quad (2.25)$$

Доказательство. Заметим, что

$$|\Delta(\lambda)| \geq \left| \rho^{-1} \sin \rho\pi \right| - \left| \Delta(\lambda) - \rho^{-1} \sin \rho\pi \right|. \quad (2.26)$$

Согласно оценке (2.24) имеем

$$\left| \rho^{-1} \sin \rho\pi \right| \geq C_\delta |\rho|^{-1} e^{|\tau|\pi}, \quad \rho \in G_\delta.$$

С другой стороны, согласно асимптотической формуле (2.22) верна оценка

$$\left| \Delta(\lambda) - \rho^{-1} \sin \rho\pi \right| \leq C|\rho|^{-2} e^{|\tau|\pi}, \quad |\rho| \geq 1.$$

Рассмотрим значения $\rho \in G_\delta$, $|\rho| \geq \rho^*$, где $\rho^* = 2C/C_\delta$. В этой области

$$|\Delta(\lambda) - \rho^{-1} \sin \rho\pi| \leq \frac{1}{2} C_\delta |\rho|^{-1} e^{|\tau|\pi},$$

Следовательно, из (2.26) вытекает оценка требуемого вида

$$|\Delta(\lambda)| \geq \frac{1}{2} C_\delta |\rho|^{-1} e^{|\tau|\pi}, \quad \rho \in G_\delta, \quad |\rho| \geq \rho^*.$$

Теорема доказана. □

2.5. Асимптотика собственных значений

Данный раздел посвящен доказательству следующей теоремы об асимптотическом поведении собственных значений:

Теорема 2.8. *Краевая задача L имеет счетное множество собственных значений $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ (с учетом кратностей), причем*

$$\rho_n = \sqrt{\lambda_n} = n + O(n^{-1}), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.27)$$

Отметим, что нули характеристической функции $\Delta(\lambda)$ в случае комплекснозначного потенциала q могут быть кратными.

Определение 2.9. *Кратностью (алгебраической кратностью) собственного значения задачи L называется кратность соответствующего нуля функции $\Delta(\lambda)$. Собственное значение называется *простым*, если его кратность равна 1, и *кратным* в противном случае.*

Поскольку $\Delta(\lambda)$ — целая функция, не равная тождественно нулю, кратности ее нулей конечны. Формулировка теоремы 2.8 предполагает, что кратное собственное значение встречается в последовательности $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ столько раз, какова его кратность.

Для доказательства теоремы 2.8 потребуется теорема Руше из теории аналитических функций.

Теорема 2.10 (Руше, [12], с. 245). Если две функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, аналитические внутри и на кусочно-гладком замкнутом контуре Γ , удовлетворяют на Γ условию $|\psi(z)| < |\varphi(z)|$, то внутри Γ функции $\varphi(z)$ и $\varphi(z) + \psi(z)$ имеют одинаковое число нулей (с учетом кратностей).

Доказательство теоремы 2.8. Согласно теореме 2.2, собственные значения краевой задачи L совпадают с нулями характеристической функции $\Delta(\lambda)$. Рассмотрим контуры

$$\Gamma_n = \{\lambda: |\lambda| = (n + 1/2)^2\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Заметим, что если $\lambda = \rho^2 \in \Gamma_n$, то $\rho \in G_\delta$ при всех достаточно больших $n \geq n_0$ и достаточно малых $\delta \in (0, d_0)$.

Согласно асимптотике (2.22), имеем

$$\Delta(\lambda) = \varphi(\lambda) + \psi(\lambda), \quad \varphi(\lambda) = \frac{\sin \rho\pi}{\rho}$$

и $|\psi(\lambda)| \leq C|\rho|^{-2}e^{|\tau|\pi}$ при больших значениях $|\rho|$.

Используя оценку (2.24), получаем $|\varphi(\lambda)| > |\psi(\lambda)|$, $\lambda \in \Gamma_n$ при достаточно больших n ($n \geq n_0$). Функция $\varphi(\lambda)$ имеет внутри контура Γ_n ровно n нулей $1^2, 2^2, 3^2, \dots, n^2$. По теореме Руше число нулей функции $\Delta(\lambda) = \varphi(\lambda) + \psi(\lambda)$ совпадает с числом нулей $\varphi(\lambda)$, то есть равно n . Принимая во внимание теорему 2.2, заключаем, что в круге $|\lambda| < (n+1/2)^2$ расположено ровно n собственных значений краевой задачи L (с учетом кратностей): $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Поскольку данное утверждение справедливо для сколь угодно большого натурального числа n , получаем, что задача L имеет счетное множество собственных значений $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Далее применим теорему Руше к функциям $\varphi(\rho^2)$ и $\psi(\rho^2)$, рассматриваемым относительно комплексной переменной ρ на контурах

$$\gamma_n(\delta) = \{\rho: |\rho - n| = \delta\}.$$

При достаточно больших n заключаем, что внутри $\gamma_n(\delta)$ лежит ровно один нуль функции $\Delta(\rho^2)$, а именно $\rho_n = \sqrt{\lambda_n}$. В силу произвольности $\delta \in (0, \delta_0)$ имеем

$$\rho_n = n + \varepsilon_n, \quad \varepsilon_n = o(1), \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.28)$$

Подставим полученную формулу в (2.22):

$$\Delta(\rho_n^2) = \frac{\sin(n + \varepsilon_n)\pi}{n + \varepsilon_n} + O(n^{-2}) = 0. \quad (2.29)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \sin(n + \varepsilon_n)\pi &= \sin n\pi \cos \varepsilon_n\pi + \cos n\pi \sin \varepsilon_n\pi = \\ &= (-1)^n \varepsilon_n\pi (1 + O(\varepsilon_n^2)), \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Следовательно, из (2.29) вытекает

$$\varepsilon_n = O(n^{-1}),$$

что вместе с (2.28) дает (2.27). □

Согласно асимптотике (2.27), собственные значения задачи L при больших n близки к собственным значениям задачи с нулевым потенциалом (см. пример 2.3). Кроме того, из асимптотической формулы (2.27) вытекает следствие.

Следствие 2.11. *Собственные значения краевой задачи L простые при всех достаточно больших n . Следовательно, задача L имеет не более конечного числа кратных собственных значений.*

2.6. Уточненные асимптотические формулы

В данном разделе получены уточненные асимптотические формулы для решения $S(x, \lambda)$, характеристической функции $\Delta(\lambda)$ и собственных значений задачи L .

Подставим формулу (2.13) в правую часть (2.11):

$$S(x, \lambda) = \frac{\sin \rho x}{\rho} + \int_0^x \frac{\sin \rho(x-t)}{\rho} q(t) \left[\frac{\sin \rho t}{\rho} + O(|\rho|^{-2} e^{|\tau|t}) \right] dt.$$

Поскольку

$$\sin \rho(x-t) \sin \rho t = \frac{1}{2} (\cos \rho(x-2t) - \cos \rho x),$$

приходим к соотношению

$$\begin{aligned} S(x, \lambda) &= \frac{\sin \rho x}{\rho} - \frac{1}{2\rho^2} \cos \rho x \int_0^x q(t) dt + \\ &+ \frac{1}{2\rho^2} \int_0^x q(t) \cos \rho(x-2t) dt + O(|\rho|^{-3} e^{|\tau|x}), \quad |\rho| \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (2.30)$$

которое уточняет асимптотическую формулу (2.13).

Аналогично может быть получена асимптотическая формула

$$\begin{aligned} C(x, \lambda) &= \cos \rho x + \frac{1}{2\rho} \sin \rho x \int_0^x q(t) dt + \\ &+ \frac{1}{2\rho} \int_0^x q(t) \sin \rho(x-2t) dt + O(|\rho|^{-2} e^{|\tau|x}), \quad |\rho| \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Подставляя $x = \pi$ в (2.30), получаем уточненную асимптотику для характеристической функции:

$$\Delta(\lambda) = \frac{\sin \rho\pi}{\rho} - \frac{\omega \cos \rho\pi}{\rho^2} + \frac{\varkappa(\rho)}{\rho^2}, \quad (2.32)$$

где

$$\omega = \frac{1}{2} \int_0^\pi q(t) dt, \quad (2.33)$$

$$\varkappa(\rho) = \frac{1}{2} \int_0^\pi q(t) \cos \rho(\pi - 2t) dt + O\left(|\rho|^{-1} e^{|\tau|\pi}\right), \quad |\rho| \rightarrow \infty. \quad (2.34)$$

Далее нам потребуется следующий вспомогательный факт, называемый леммой Римана–Лебега.

Лемма 2.12 (Римана–Лебега). *Пусть функция a непрерывна на $[0, \pi]$. Тогда*

$$\lim_{\rho \rightarrow \pm\infty} \int_0^\pi a(x) \cos \rho x dx = 0. \quad (2.35)$$

Доказательство. 1) Докажем лемму для $a \in C^1[0, \pi]$.⁴ Выполним интегрирование по частям:

$$\int_0^\pi a(x) \cos \rho x dx = \frac{a(\pi) \sin \rho\pi}{\rho} - \frac{1}{\rho} \int_0^\pi a'(x) \sin \rho x dx.$$

Ясно, что

$$|a(\pi)| \leq C, \quad |a'(x)| \leq C, \quad |\sin \rho x| \leq C \quad (2.36)$$

при $x \in [0, \pi]$, $\rho \rightarrow \pm\infty$. Здесь и далее в доказательстве символ C обозначает различные положительные константы. В первых двух

⁴ $C^1[0, \pi]$ — класс непрерывно дифференцируемых на $[0, \pi]$ функций.

оценках (2.36) константа C зависит от a , но не зависит от x и ρ . Используя (2.36), получаем

$$\left| \frac{a(\pi) \sin \rho \pi}{\rho} \right| \leq \frac{C}{|\rho|},$$

$$\left| \frac{1}{\rho} \int_0^\pi a'(x) \sin \rho x \, dx \right| \leq \frac{\pi}{|\rho|} \max_{0 \leq x \leq \pi} |a'(x)| |\sin \rho x| \leq \frac{C}{|\rho|},$$

при $|\rho| \geq \rho^*$. Таким образом,

$$\int_0^\pi a(x) \cos \rho x \, dx = O(|\rho|^{-1}), \quad \rho \rightarrow \infty, \quad (2.37)$$

если $a \in C^1[0, \pi]$.

2) При $a \in C[0, \pi]$ рассуждения п. 1, вообще говоря, неверны, потому что у функции a может не существовать производной. Однако, согласно теореме Вейерштрасса о приближении непрерывной функции многочленами (см. [4, с. 418]), любую функцию $a \in C[0, \pi]$ можно с любой степенью точности приблизить функцией $b \in C^1[0, \pi]$ (более того, $b(x)$ — многочлен). Иначе говоря, пусть функция $a \in C[0, \pi]$ фиксирована, тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists b \in C^1[0, \pi] \quad \max_{0 \leq x \leq \pi} |a(x) - b(x)| \leq \varepsilon.$$

Следовательно

$$\left| \int_0^\pi (a(x) - b(x)) \cos(\rho x) \, dx \right| \leq \int_0^\pi |a(x) - b(x)| |\cos(\rho x)| \, dx \leq C\varepsilon.$$

Фиксируем $\delta > 0$. Пусть $b \in C^1[0, \pi]$ — такая функция, что

$$\left| \int_0^\pi (a(x) - b(x)) \cos(\rho x) \, dx \right| \leq \frac{\delta}{2}. \quad (2.38)$$

Так как $b \in C^1[0, \pi]$, для функции b выполнена оценка (2.37). Следовательно, существует ρ^* , при котором

$$\left| \int_0^\pi b(x) \cos(\rho x) dx \right| \leq \frac{\delta}{2}, \quad |\rho| \geq \rho^*. \quad (2.39)$$

Объединяя оценки (2.38) и (2.39), получаем

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\pi a(x) \cos(\rho x) dx \right| &\leq \left| \int_0^\pi (a(x) - b(x)) \cos(\rho x) dx \right| + \\ &+ \left| \int_0^\pi b(x) \cos(\rho x) dx \right| \leq \delta, \quad |\rho| \geq \rho^*. \end{aligned}$$

В силу произвольности $\delta > 0$ приходим к соотношению (2.35). $\square$

Докажем следующую теорему, уточняющую асимптотическую формулу (2.27) для собственных значений.

Теорема 2.13. *Справедлива асимптотическая формула*

$$\rho_n = n + \frac{\omega}{\pi n} + \frac{\varkappa_n}{n}, \quad \varkappa_n = o(1), \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.40)$$

Доказательство. Согласно формуле (2.27), корни из собственных значений представимы в виде

$$\rho_n = n + \frac{s_n}{n}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.41)$$

где $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ — ограниченная последовательность. Подставим (2.41) в (2.32):

$$\begin{aligned} \rho_n^2 \Delta(\lambda_n) &= \left(n + \frac{s_n}{n} \right) \sin \left(n + \frac{s_n}{n} \right) \pi - \\ &- \omega \cos \left(n + \frac{s_n}{n} \right) \pi + \varkappa(\rho_n) = 0. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Воспользуемся соотношениями

$$\begin{aligned}\sin\left(n + \frac{s_n}{n}\right)\pi &= \sin \pi n \cos \frac{s_n \pi}{n} + \cos \pi n \sin \frac{s_n \pi}{n} = \\ &= (-1)^n \frac{s_n \pi}{n} (1 + O(n^{-2})), \\ \cos\left(n + \frac{s_n}{n}\right)\pi &= \cos \pi n \cos \frac{s_n \pi}{n} - \sin \pi n \sin \frac{s_n \pi}{n} = \\ &= (-1)^n (1 + O(n^{-2})).\end{aligned}$$

Из (2.42) получаем

$$(-1)^n s_n \pi - (-1)^n \omega + \varkappa(\rho_n) + O(n^{-1}) = 0.$$

Следовательно,

$$s_n = \frac{\omega}{\pi} + \varkappa_n, \quad \varkappa_n = \frac{(-1)^{n+1} \varkappa(\rho_n)}{\pi} + O(n^{-1}). \quad (2.43)$$

Осталось показать, что $\varkappa_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Преобразуем интеграл из (2.34), используя замену переменной $x = \pi - 2t$ и четность функции $\cos \rho x$:

$$\begin{aligned}\int_0^\pi q(t) \cos \rho(\pi - 2t) dt &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^\pi q\left(\frac{\pi - x}{2}\right) \cos \rho x dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \left(q\left(\frac{\pi - x}{2}\right) + q\left(\frac{\pi + x}{2}\right) \right) \cos \rho x dx.\end{aligned}$$

Функции $q\left(\frac{\pi - x}{2}\right)$ и $q\left(\frac{\pi + x}{2}\right)$ непрерывны на $[0, \pi]$, поэтому к последнему интегралу применима лемма Римана–Лебега. С учетом (2.34) получаем

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \varkappa(\rho) = 0.$$

Из (2.41) следует, что $\rho_n \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow \infty$. В результате получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varkappa(\rho_n) = 0,$$

что с учетом (2.43) дает $\varkappa_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Объединяя (2.41) и (2.43), приходим к формуле (2.40). $\square$

Из соотношения (2.40) следует асимптотика

$$\lambda_n = \left(n + \frac{\omega}{\pi n} + \frac{\varkappa_n}{n} \right)^2 = n^2 + \frac{2\omega}{\pi} + o(1), \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.44)$$

Формула (2.44) может быть использована для приближенного вычисления собственных значений при больших n :

$$\lambda_n \approx n^2 + \frac{2\omega}{\pi}.$$

При малых значениях n асимптотическая формула (2.44) неинформативна, поскольку остаточный член $o(1)$ может быть сопоставим по величине с главной частью $n^2 + \frac{2\omega}{\pi}$.

Замечание 2.14. Используя формулы (2.34), (2.41) и (2.43), можно показать, что $\{\varkappa_n\} \in l_2$.

3. Оператор Штурма–Лиувилля

В данной главе вводится оператор Штурма–Лиувилля, связанный с краевой задачей (2.1)–(2.2), и исследуются свойства его собственных значений и собственных функций. В частности, указаны условия на потенциал, при которых собственные значения являются вещественными, положительными и простыми. При этом часть свойств доказывается для произвольных операторов из некоторых классов (симметрических, положительных) и поэтому может быть легко перенесена на другие виды краевых задач.

3.1. Определение оператора Штурма–Лиувилля

Начнем с определения оператора в произвольном линейном пространстве. Пусть V — линейное пространство и $\mathcal{D}$ — некоторое подмножество в V . Отображение A , которое каждому элементу y из $\mathcal{D}$ ставит в соответствие некоторый элемент $z = Ay$ из V , называется *оператором* в пространстве V с областью определения $\mathcal{D}$. Мы будем использовать обозначение $\mathcal{D}(A)$ для области определения оператора A , чтобы указать, к какому оператору эта область относится.

Оператор A называется *линейным*, если его область определения $\mathcal{D}(A)$ — подпространство и если для любых двух элементов $y, z \in \mathcal{D}(A)$ и для любого числа $\lambda \in \mathbb{C}$ выполнены соотношения

$$A(\lambda y) = \lambda Ay, \quad A(y + z) = Ay + Az.$$

Два оператора A и B в пространстве V совпадают тогда и только тогда, когда они имеют одну и ту же область определения $\mathcal{D}$ и $Ay = By$ для всех $y \in \mathcal{D}$.

Таким образом, чтобы ввести оператор, нужно задать его область определения и правило, по которому он действует. Два оператора, действующие по одному и тому же правилу, но с разными областями определения — это разные операторы.

Определение 3.1. Пусть $q \in C[0, \pi]$ — заданная комплекснозначная функция (потенциал). Обозначим через $\mathcal{L}$ оператор Штурма–Лиувилля в пространстве $C[0, \pi]$, действующий по правилу

$$\mathcal{L}y = -y'' + q(x)y, \quad (3.1)$$

с областью определения

$$\mathcal{D}(\mathcal{L}) = \{y \in C^2[0, \pi] : y(0) = y(\pi) = 0\}.$$

Таким образом, левая часть уравнения Штурма–Лиувилля (2.1) определяет правило, по которому действует оператор $\mathcal{L}$, при этом область определения оператора состоит из дважды непрерывно дифференцируемых функций, удовлетворяющих краевым условиям (2.2). Если мы заменим краевые условия Дирихле (2.2), например, на условия Неймана (2.5), то получим другой оператор с другими свойствами.

Отметим, что для любой функции $y \in C^2[0, \pi]$ результат действия на нее оператора $\mathcal{L}y$ принадлежит $C[0, \pi]$. Действительно, если функция y принадлежит $C^2[0, \pi]$, то ее вторая производная непрерывна. Произведение y на непрерывную функцию q также непрерывно.

Кроме того, нетрудно проверить, что область определения оператора $\mathcal{L}$ является подпространством, и сам оператор линеен. Дей-

ствительно, пусть $y_1, y_2 \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$. Тогда $y_1, y_2 \in C^2[0, \pi]$ и

$$y_1(0) = y_1(\pi) = 0, \quad y_2(0) = y_2(\pi) = 0.$$

Любая линейная комбинация $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ принадлежит $C^2[0, \pi]$ и удовлетворяет краевым условиям:

$$y(0) = C_1 y_1(0) + C_2 y_2(0) = 0,$$

$$y(\pi) = C_1 y_1(\pi) + C_2 y_2(\pi) = 0,$$

откуда следует, что $y \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$. Используя выражение (3.1), нетрудно убедиться, что

$$\mathcal{L}y = C_1 \mathcal{L}y_1 + C_2 \mathcal{L}y_2.$$

Таким образом, определение 3.1 корректно задает линейный оператор $\mathcal{L}$ в линейном пространстве $C[0, \pi]$.

3.2. Собственные значения и собственные функции

Пусть A — линейный оператор в некотором линейном пространстве V .

Определение 3.2. Число λ называется *собственным значением* оператора A , если существует ненулевой элемент $y \in \mathcal{D}(A)$, удовлетворяющий соотношению $Ay = \lambda y$. Этот элемент y называется *собственным элементом* или *собственной функцией* оператора A .

Собственная функция определяется с точностью до умножения на произвольную постоянную. Действительно, если y — собственная функция, то Cy — тоже собственная функция (здесь C — ненулевая константа), так как

$$A(Cy) = CAy = C\lambda y = \lambda(Cy).$$

Здесь мы воспользовались линейностью оператора A .

Одному собственному значению λ могут отвечать несколько собственных функций $y_1, y_2, \dots, y_n$. В этом случае любая ненулевая линейная комбинация $C_1y_1 + C_2y_2 + \dots + C_ny_n$ также будет собственной функцией, отвечающей λ . Следовательно, собственные функции, соответствующие одному и тому же собственному значению, образуют подпространство, называемое *собственным подпространством*. Как правило, в качестве собственных функций выбирается некоторый базис собственного подпространства.

Пример 3.3. Рассмотрим линейное пространство $\mathbb{C}^n$ и действующий в нем линейный оператор умножения на матрицу A размера $(n \times n)$. Собственными значениями оператора в данном случае будут собственные значения матрицы, а собственными функциями — собственные векторы.

Очевидно, понятия собственных значений и собственных функций для краевой задачи L и для соответствующего оператора Штурма–Лиувилля $\mathcal{L}$ совпадают (см. определения 2.1 и 3.2). Следовательно, все свойства собственных значений и собственных функций, полученные в данной главе, выполнены для краевой задачи L .

3.3. Симметрические операторы

Для чтения разделов 3.3–3.6 необходимо знакомство с понятием гильбертова пространства (см. раздел 1.4).

Оператор A в гильбертовом пространстве H называется *симметрическим*, если для любых элементов y и z из области определения $\mathcal{D}(A)$ выполнено равенство $(Ay, z) = (y, Az)$.

Собственные значения и собственные функции симметрического оператора обладают следующими свойствами.

Теорема 3.4. *Все собственные значения симметрического оператора вещественны.*

Доказательство. Пусть λ — собственное значение симметрического оператора A , а y — соответствующая собственная функция. Рассмотрим скалярное произведение (Ay, y) . С одной стороны,

$$(Ay, y) = (\lambda y, y) = \lambda(y, y).$$

С другой стороны,

$$(Ay, y) = (y, Ay) = (y, \lambda y) = \overline{(\lambda y, y)} = \bar{\lambda}(y, y).$$

Таким образом, $\lambda(y, y) = \bar{\lambda}(y, y)$. Так как y — собственная функция, $(y, y) \neq 0$. Следовательно, $\lambda = \bar{\lambda}$ — вещественное число. $\square$

Теорема 3.5. *Собственные функции симметрического оператора, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны.*

Доказательство. Пусть различным собственным значениям λ и μ симметрического оператора A отвечают собственные функции y и z соответственно:

$$Ay = \lambda y, \quad Az = \mu z.$$

Тогда

$$(Ay, z) = (\lambda y, z) = \lambda(y, z).$$

С другой стороны, используя симметричность оператора A и вещественность собственного значения μ , получаем

$$(Ay, z) = (y, Az) = (y, \mu z) = \mu(y, z).$$

Таким образом, $\lambda(y, z) = \mu(y, z)$. Поскольку $\lambda \neq \mu$, отсюда следует $(y, z) = 0$, то есть собственные функции y и z ортогональны. $\square$

3.4. Симметричность оператора Штурма–Лиувилля

В данном разделе будем предполагать, что $q(x)$ — вещественная функция. Мы докажем, что в этом случае оператор Штурма–Лиувилля является симметрическим, из чего вытекают важные следствия для его собственных значений и собственных функций.

Теорема 3.6. *Оператор $\mathcal{L}$ с вещественным потенциалом q является симметрическим в гильбертовом пространстве $L_2(0, \pi)$, то есть для любых функций $y, z \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$ верно равенство $(\mathcal{L}y, z) = (y, \mathcal{L}z)$.*

Доказательство. Определение 3.1 задает оператор $\mathcal{L}$ в пространстве непрерывных функций $C[0, \pi]$. Однако $C[0, \pi]$ является подпространством в $L_2(0, \pi)$, поэтому можно считать оператор $\mathcal{L}$ действующим в пространстве $L_2(0, \pi)$.

Согласно определению скалярного произведения в $L_2(0, \pi)$, необходимо доказать равенство

$$\int_0^\pi (-y''(x) + q(x)y(x))\overline{z(x)} dx = \int_0^\pi y(x)\overline{(-z''(x) + q(x)z(x))} dx \quad (3.2)$$

для любых функций y и z из $C^2[0, \pi]$, удовлетворяющих краевым условиям (2.2). Интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned} \int_0^\pi y''(x)\overline{z(x)} dx &= y'(x)\overline{z(x)}\Big|_0^\pi - \int_0^\pi y'(x)\overline{z'(x)} dx = \\ &= y'(x)\overline{z(x)}\Big|_0^\pi - y(x)\overline{z'(x)}\Big|_0^\pi + \int_0^\pi y(x)\overline{z''(x)} dx. \end{aligned}$$

В силу краевых условий (2.2), подстановки равны нулю. Используя вещественность потенциала $q(x)$, приходим к равенству (3.2). $\square$

Теоремы 3.4, 3.5 и 3.6 вместе приводят к следствию:

Следствие 3.7. *Все собственные значения оператора $\mathcal{L}$ вещественны. Собственные функции, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны в $L_2(0, \pi)$.*

3.5. Положительные операторы

Оператор A в гильбертовом пространстве H называется *положительным*, если для любого элемента $y \neq 0$ из области определения $\mathcal{D}(A)$ выполнено $(Ay, y) > 0$.

Теорема 3.8. *Собственные значения положительного оператора положительны.*

Доказательство. Пусть λ — собственное значение положительного оператора A и y — отвечающая ему собственная функция. Тогда

$$(Ay, y) = (\lambda y, y) = \lambda(y, y) > 0.$$

По свойству скалярного произведения $(y, y) > 0$, поэтому $\lambda > 0$. □

Теорема 3.9. *Пусть $q(x) \geq 0$ при всех $x \in [0, \pi]$. Тогда $\mathcal{L}$ — положительный оператор в $L_2(0, \pi)$.*

Доказательство. Пусть $y \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$ и $y \neq 0$. Применяя интегрирование по частям аналогично доказательству теоремы 3.6, получаем соотношение

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}y, y) &= \int_0^\pi (-y''(x) + q(x)y(x))\overline{y(x)} dx = \\ &= \int_0^\pi |y'(x)|^2 dx + \int_0^\pi q(x)|y(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

Очевидно, что $(\mathcal{L}y, y) \geq 0$. Покажем, что $(\mathcal{L}y, y) \neq 0$. Равенство

$$\int_0^\pi |y'(x)|^2 dx = 0$$

возможно лишь в случае $y'(x) \equiv 0$. Тогда $y(x) = \text{const}$, что невозможно в силу краевых условий (2.2) и требования $y(x) \neq 0$. Следовательно,

$$\int_0^\pi |y'(x)|^2 dx > 0,$$

что завершает доказательство. $\square$

Следствие 3.10. *При условии теоремы 3.9 все собственные значения оператора Штурма–Лиувилля $\mathcal{L}$ положительны.*

Замечание 3.11. Сдвиг потенциала на константу $q(x) \mapsto q(x) + c$ сдвигает на ту же константу собственные значения: $\lambda_n \mapsto \lambda_n + c$, поскольку

$$-y'' + (q(x) + c)y = (\lambda + c)y.$$

Отсюда, в частности, следует, что утверждение теоремы 3.9 неверно для произвольного вещественного потенциала. Действительно, для любого потенциала q можно подобрать сдвиг, который сделает часть собственных значений отрицательными. С другой стороны, сдвиг $c = -\min_{0 \leq x \leq \pi} q(x)$ сделает потенциал неотрицательным, что приведет к положительности оператора $\mathcal{L}$ и его собственных значений. Поэтому множество собственных значений $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ограничено снизу: $\lambda_n \geq r$ при всех $n \in \mathbb{N}$, где r — некоторая константа (возможно, отрицательная). Данный вывод вытекает также из асимптотики (2.27) в случае вещественного потенциала.

3.6. Присоединенные функции

Помимо собственных функций, в спектральной теории операторов рассматриваются присоединенные функции.

Функция y_1 называется *присоединенной функцией* оператора A в линейном пространстве V , если $y_1 \in \mathcal{D}(A)$ и

$$Ay_1 = \lambda y_1 + y_0, \quad (3.3)$$

где λ — собственное значение оператора A и y_0 — отвечающая ему собственная функция.

Цепочкой присоединенных функций называется набор функций $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$ из $\mathcal{D}(A)$, где y_0 — собственная функция, отвечающая некоторому собственному значению λ , и выполнены соотношения:

$$y_k = \lambda y_k + y_{k-1}, \quad k = \overline{1, n}.$$

В дальнейшем будем считать, что рассматриваемый оператор действует в гильбертовом пространстве.

Теорема 3.12. *Симметрический оператор не имеет присоединенных функций.*

Доказательство. Будем доказывать теорему от противного: предположим, что оператор A имеет присоединенную функцию y_1 , удовлетворяющую соотношению (3.3). Согласно определению симметрического оператора, верно соотношение

$$(Ay_1, y_0) = (y_1, Ay_0),$$

поскольку собственная функция y_0 и присоединенная функция y_1 принадлежат $\mathcal{D}(A)$.

Используя (3.3) и свойство линейности скалярного произведения, получаем

$$(Ay_1, y_0) = \lambda(y_1, y_0) + (y_0, y_0). \quad (3.4)$$

Так как функция y_0 является собственной, она удовлетворяет соотношению $Ay_0 = \lambda y_0$. Кроме того, согласно теореме 3.4, собственное значение λ — вещественное. Следовательно,

$$(y_1, Ay_0) = (y_1, \lambda y_0) = \bar{\lambda}(y_1, y_0) = \lambda(y_1, y_0). \quad (3.5)$$

Приравнивая правые части соотношений (3.4) и (3.5), заключаем, что $(y_0, y_0) = 0$. В результате $y_0 = 0$, что невозможно, так как y_0 — собственная функция. Полученное противоречие доказывает требуемое. $\square$

Следствие 3.13. *Оператор Штурма–Лиувилля $\mathcal{L}$ с вещественным потенциалом q не имеет присоединенных функций.*

В случае комплекснозначного потенциала оператор $\mathcal{L}$ может иметь присоединенные функции. Их вид описывается следующей теоремой.

Теорема 3.14. *Каждому собственному значению λ_0 оператора Штурма–Лиувилля $\mathcal{L}$ отвечает цепочка присоединенных функций вида*

$$y_k(x) = \frac{1}{k!} \frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} S(x, \lambda) \Big|_{\lambda=\lambda_0}, \quad k = \overline{0, m-1}, \quad (3.6)$$

длина которой (m) равна алгебраической кратности⁵ собственного значения λ_0 .

⁵Понятие алгебраической кратности собственного значения вводится в определении 2.9.

Доказательство. Вспомним, что решение $S(x, \lambda)$ дважды непрерывно дифференцируемо по переменной $x \in [0, \pi]$ и является аналитической (то есть бесконечно дифференцируемой) функцией переменной λ . Поэтому производные в формуле (3.6) существуют для любого порядка k , и $y_k \in C^2[0, \pi]$. Кроме того, из начального условия получаем

$$S(0, \lambda) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} S(0, \lambda) = 0,$$

что дает $y_k(0) = 0$.

Подстановка решения $S(x, \lambda)$ в уравнение (2.1) обращает его в тождество

$$-S''(x, \lambda) + q(x)S(x, \lambda) = \lambda S(x, \lambda), \quad (3.7)$$

которое выполнено при всех $x \in [0, \pi]$ и $\lambda \in \mathbb{C}$. Продифференцируем (3.7) по λ :

$$-\frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} S''(x, \lambda) + q(x) \frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} S(x, \lambda) = \lambda \frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} S(x, \lambda) + k \frac{\partial^{k-1}}{\partial \lambda^{k-1}} S(x, \lambda).$$

Деление на $k!$ дает

$$\begin{aligned} -\frac{1}{k!} \frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} S''(x, \lambda) + q(x) \frac{1}{k!} \frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} S(x, \lambda) &= \\ &= \lambda \frac{1}{k!} \frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} S(x, \lambda) + \frac{1}{(k-1)!} \frac{\partial^{k-1}}{\partial \lambda^{k-1}} S(x, \lambda). \end{aligned}$$

Подстановка $\lambda = \lambda_0$ приводит к рекуррентному соотношению

$$y_k = \lambda_0 y_k + y_{k-1}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Заметим, что по теореме 2.2 функция $y_0(x) = S(x, \lambda_0)$ является собственной функцией, отвечающей собственному значению λ_0 .

Для завершения доказательства осталось показать справедливость соотношений

$$y_k(\pi) = 0, \quad k = \overline{1, m-1}, \quad (3.8)$$

при некотором натуральном m . Используя характеристическую функцию $\Delta(\lambda) = S(\pi, \lambda)$ и (3.6), получаем

$$y_k(\pi) = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{d\lambda^k} \Delta(\lambda) \Big|_{\lambda=\lambda_0}.$$

Таким образом, для выполнения соотношений (3.8) при некотором m необходимо и достаточно, чтобы число λ_0 было нулем характеристической функции $\Delta(\lambda)$ кратности не менее m . С учетом определения 2.9 заключаем, что длина цепочки присоединенных функций вида (3.6) в точности совпадает с алгебраической кратностью собственного значения λ_0 . $\square$

Из следствия 3.13 и теоремы 3.14 вытекает следующий вывод.

Следствие 3.15. *В случае вещественного потенциала q алгебраические кратности всех собственных значений оператора $\mathcal{L}$ равны 1 и все нули характеристической функции $\Delta(\lambda)$ простые.*

Последнее утверждение будет доказано в следующем разделе независимым образом, без использования теории операторов. Отметим, что в случае комплекснозначного потенциала q собственные значения $\{\lambda_n\}$ являются простыми, начиная с некоторого номера n_0 (см. следствие 2.11).

3.7. Кратности собственных значений

Рассмотрим более подробно вопрос о кратностях собственных значений оператора Штурма–Лиувилля. Ранее вводилось понятие

алгебраической кратности собственного значения (см. определение 2.9). Дадим также определение геометрической кратности.

Геометрической кратностью собственного значения оператора A в линейном пространстве V называется число отвечающих ему линейно независимых собственных функций или, иначе говоря, размерность соответствующего собственного подпространства.

Согласно теореме 2.2, геометрические кратности всех собственных значений задачи Штурма–Лиувилля L равны 1, поскольку каждому собственному значению соответствует единственная с точностью до постоянного множителя собственная функция. В силу следствия 3.15, алгебраические кратности всех собственных значений также равны 1 в случае вещественного потенциала q . Докажем данное утверждение другим способом, не привлекая теорию операторов.

Введем обозначение для вронскиана двух решений y и z уравнения (2.1):

$$\langle y, z \rangle = \begin{vmatrix} y(x) & z(x) \\ y'(x) & z'(x) \end{vmatrix}. \quad (3.9)$$

Теорема 3.16. Пусть функция q — вещественная. Тогда все нули характеристической функции $\Delta(\lambda)$ простые.

Доказательство. Пусть λ_0 — произвольный нуль функции $\Delta(\lambda)$. Необходимо показать, что $\frac{d}{d\lambda}\Delta(\lambda_0) = 0$. Используя (2.1), вычисляем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \langle S(x, \lambda), S(x, \lambda_0) \rangle &= \frac{\partial}{\partial x} (S(x, \lambda)S'(x, \lambda_0) - S'(x, \lambda)S(x, \lambda_0)) = \\ &= S(x, \lambda)S''(x, \lambda_0) - S''(x, \lambda)S(x, \lambda_0) = S(x, \lambda)(q(x) - \lambda_0)S(x, \lambda_0) - \\ &\quad - (q(x) - \lambda)S(x, \lambda)S(x, \lambda_0) = (\lambda - \lambda_0)S(x, \lambda)S(x, \lambda_0). \end{aligned}$$

Проинтегрируем обе части полученного равенства от 0 до π :

$$\langle S(x, \lambda), S(x, \lambda_0) \rangle \Big|_0^\pi = (\lambda - \lambda_0) \int_0^\pi S(x, \lambda) S(x, \lambda_0) dx. \quad (3.10)$$

Начальные условия (2.3) дают

$$\langle S(x, \lambda), S(x, \lambda_0) \rangle \Big|_{x=0} = 0. \quad (3.11)$$

В точке $x = \pi$ получаем

$$\begin{aligned} \langle S(x, \lambda), S(x, \lambda_0) \rangle \Big|_{x=\pi} &= S(\pi, \lambda) S'(\pi, \lambda_0) - S'(\pi, \lambda) S(\pi, \lambda_0) = \\ &= \Delta(\lambda) S'(\pi, \lambda_0), \end{aligned} \quad (3.12)$$

поскольку $S(\pi, \lambda_0) = \Delta(\lambda_0) = 0$. Подставляя (3.11) и (3.12) в (3.10), приходим к соотношению

$$\Delta(\lambda) S'(\pi, \lambda_0) = (\lambda - \lambda_0) \int_0^\pi S(x, \lambda) S(x, \lambda_0) dx.$$

Поделим обе части равенства на $(\lambda - \lambda_0)$ и перейдем к пределу при $\lambda \rightarrow \lambda_0$, в результате получим

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \frac{\Delta(\lambda) - \Delta(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} S'(\pi, \lambda_0) = \int_0^\pi S^2(x, \lambda_0) dx.$$

Заметим, что в левой части стоит производная $\frac{d}{d\lambda} \Delta(\lambda_0)$, а интеграл в правой части строго положителен, так как $S(x, \lambda_0) \not\equiv 0$. Следовательно, $\frac{d}{d\lambda} \Delta(\lambda_0) \neq 0$. $\square$

Следствие 3.17. *В случае вещественного потенциала q алгебраические кратности собственных значений оператора $\mathcal{L}$ совпадают с геометрическими.*

Собственным значениям дифференциальных операторов более общего вида, чем $\mathcal{L}$, могут отвечать несколько линейно независимых собственных функций, каждая из которых имеет цепочку присоединенных функций. При этом алгебраическая кратность собственного значения совпадает с суммой длин цепочек присоединенных функций (см. [10, с. 29]). Таким образом, геометрическая кратность каждого собственного значения не превосходит его алгебраической кратности.

4. Обратные задачи Штурма–Лиувилля

Данная глава представляет собой введение в теорию обратных спектральных задач для дифференциальных операторов. Под прямыми спектральными задачами обычно понимается исследование свойств собственных значений, собственных и присоединенных функций, таких как их асимптотическое поведение, полнота и базисность систем собственных и присоединенных функций, сходимость рядов по собственным функциям. Обратные задачи состоят в восстановлении неизвестных коэффициентов дифференциальных уравнений и краевых условий по спектральным данным. Такие задачи играют фундаментальную роль в математике и имеют приложения во многих областях естествознания и техники, например, в квантовой и классической механике, геофизике, акустике, нанотехнологиях, электронике и др. (см. монографии [6, 8, 13, 17, 21] и ссылки на литературу в них). В настоящее время теория обратных спектральных задач активно развивается в работах российских и зарубежных математиков.

В данной главе приводятся постановки обратных задач Штурма–Лиувилля, состоящих в восстановлении потенциала $q(x)$ по различным типам спектральных характеристик, и доказывается единственность решения поставленных задач.

4.1. Решение Вейля и функция Вейля

Решением Вейля краевой задачи (2.1)–(2.2) называется решение $\Phi(x, \lambda)$ уравнения (2.1), удовлетворяющее условиям

$$\Phi(0, \lambda) = 1, \quad \Phi(\pi, \lambda) = 0. \quad (4.1)$$

Функцией Вейля называется $M(\lambda) = \Phi'(0, \lambda)$. Функция Вейля является одной из основных спектральных характеристик оператора Штурма–Лиувилля, используемых в теории обратных задач.

Рассмотрим решение $\psi(x, \lambda)$ уравнения (2.1), удовлетворяющее начальным условиям

$$\psi(\pi, \lambda) = 0, \quad \psi'(\pi, \lambda) = -1. \quad (4.2)$$

Заметим, что $\psi(\pi - x, \lambda)$ является решением типа синуса для уравнения Штурма–Лиувилля с потенциалом $q(\pi - x)$, поэтому его свойства аналогичны свойствам $S(x, \lambda)$. В частности, решение $\psi(x, \lambda)$ и его производная $\psi'(x, \lambda)$ целые по λ при каждом фиксированном $x \in [0, \pi]$ и при $|\rho| \rightarrow \infty$ удовлетворяют асимптотическим формулам

$$\psi(x, \lambda) = \frac{\sin \rho(\pi - x)}{\rho} + O\left(|\rho|^{-2} e^{|\tau|(\pi - x)}\right), \quad (4.3)$$

$$\psi'(x, \lambda) = -\cos \rho(\pi - x) + O\left(|\rho|^{-1} e^{|\tau|(\pi - x)}\right), \quad (4.4)$$

аналогичным (2.13), (2.14).

Докажем три вспомогательных утверждения.

Лемма 4.1. *Вронскиан⁶ $\langle y, z \rangle$ двух решений $y(x)$ и $z(x)$ уравнения (2.1) при фиксированном λ не зависит от x .*

Доказательство. Утверждение леммы следует из формулы Остроградского–Лиувилля (см. [9, Глава 6, § 2]). Его также нетрудно проверить непосредственно.

⁶Вронскиан определяется формулой (3.9).

Вычислим производную

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \langle y, z \rangle &= \frac{d}{dx} (y(x)z'(x) - y'(x)z(x)) = y(x)z''(x) - y''(x)z(x) = \\ &= y(x)(q(x) - \lambda)z(x) - (q(x) - \lambda)y(x)z(x) = 0. \end{aligned}$$

Здесь мы заменили $y''(x)$ и $z''(x)$, используя уравнение (2.1). Следовательно, $\langle y, z \rangle = \text{const}$. $\square$

Введем функцию $\Delta_1(\lambda) = C(\pi, \lambda)$.

Лемма 4.2. *Справедливы соотношения $\Delta(\lambda) = \psi(0, \lambda)$ и $\Delta_1(\lambda) = -\psi'(0, \lambda)$.*

Доказательство. Рассмотрим вронскиан $\langle S(x, \lambda), \psi(x, \lambda) \rangle$. Согласно лемме 4.1, он не зависит от x . С одной стороны,

$$\langle S(x, \lambda), \psi(x, \lambda) \rangle = \langle S(x, \lambda), \psi(x, \lambda) \rangle \Big|_{x=0} = -\psi(0, \lambda).$$

С другой стороны,

$$\langle S(x, \lambda), \psi(x, \lambda) \rangle = \langle S(x, \lambda), \psi(x, \lambda) \rangle \Big|_{x=\pi} = -S(\pi, \lambda) = -\Delta(\lambda), \quad (4.5)$$

что дает $\Delta(\lambda) = \psi(0, \lambda)$. Второе соотношение доказывается аналогично. $\square$

Лемма 4.3. *Функции $\Delta(\lambda)$ и $\Delta_1(\lambda)$ не имеют общих нулей.*

Доказательство. Докажем лемму от противного. Предположим, что $\Delta(\lambda)$ и $\Delta_1(\lambda)$ имеют общий нуль λ_0 . Тогда по лемме 4.2 $\psi(0, \lambda_0) = \psi'(0, \lambda_0) = 0$. Это означает, что при $\lambda = \lambda_0$ функция $\psi(x, \lambda)$ является решением уравнения Штурма–Лиувилля (2.1) при

нулевых начальных условиях. Ввиду единственности решения задачи Коши, получаем $\psi(x, \lambda_0) \equiv 0$, что невозможно в силу начальных условий (4.2). Полученное противоречие доказывает требуемое. $\square$

Следующая теорема дает корректность определения решения и функции Вейля⁷ и их основные свойства.

Теорема 4.4. *При $\lambda \neq \lambda_n$, $n \in \mathbb{N}$, решение $\Phi(x, \lambda)$ уравнения (2.1), удовлетворяющее краевым условиям (4.1), существует и единственно. Функции $\Phi(x, \lambda)$ и $M(\lambda)$ являются мероморфными по λ и их полюсы совпадают с собственными значениями краевой задачи L . Справедливы соотношения*

$$\Phi(x, \lambda) = \frac{\psi(x, \lambda)}{\Delta(\lambda)}, \quad (4.6)$$

$$\Phi(x, \lambda) = C(x, \lambda) + M(\lambda)S(x, \lambda), \quad (4.7)$$

$$M(\lambda) = -\frac{\Delta_1(\lambda)}{\Delta(\lambda)}, \quad (4.8)$$

$$\langle \Phi(x, \lambda), S(x, \lambda) \rangle \equiv 1. \quad (4.9)$$

Доказательство. Заметим, что $\psi(x, \lambda)$ — единственное с точностью до постоянного множителя решение уравнения (2.1), удовлетворяющее условию $\psi(\pi, \lambda) = 0$. Следовательно, в силу условий (4.1), если решение Вейля существует, то оно представимо в виде $\Phi(x, \lambda) = D(\lambda)\psi(x, \lambda)$. Подставляя этот вид в первое из условий (4.1), получаем $D(\lambda) = \frac{1}{\psi(0, \lambda)}$, то есть $\Phi(x, \lambda) = \frac{\psi(x, \lambda)}{\psi(0, \lambda)}$. Применяя лемму 4.2, приходим к соотношению (4.6). Нетрудно видеть, что функция, заданная соотношением (4.6), удовлетворяет

⁷Задача (2.1), (4.1) не является задачей Коши. Поэтому существование и единственность решения Вейля не следуют из теоремы Пикара, как для решений $S(x, \lambda)$, $C(x, \lambda)$ и $\psi(x, \lambda)$, и требуют отдельного доказательства.

уравнению (2.1) и условиям (4.1) при $\lambda \neq \lambda_n$, $n \in \mathbb{N}$, то есть является решением Вейля. Таким образом, при $\lambda \neq \lambda_n$, $n \in \mathbb{N}$, решение Вейля существует и единственно.

Из определения функции Вейля и формулы (4.6) получаем соотношение $M(\lambda) = \frac{\psi'(0, \lambda)}{\Delta(\lambda)}$. Учитывая лемму 4.2, приходим к (4.8). По теореме 2.2 собственные значения $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ являются нулями знаменателя $\Delta(\lambda)$, а функции $\psi(x, \lambda)$ и $\psi'(x, \lambda)$ — целые по λ . Согласно формулам (4.6) и (4.8), функции $\Phi(x, \lambda)$ и $M(\lambda)$ мероморфны по λ и их полюсы совпадают с собственными значениями.

С другой стороны, решение Вейля можно представить через фундаментальную систему решений $\{C(x, \lambda), S(x, \lambda)\}$ уравнения (2.1):

$$\Phi(x, \lambda) = A(\lambda)C(x, \lambda) + B(\lambda)S(x, \lambda). \quad (4.10)$$

Подставляя (4.10) в (4.1), находим:

$$A(\lambda) = 1, \quad B(\lambda) = -\frac{C(\pi, \lambda)}{S(\pi, \lambda)} = -\frac{\Delta_1(\lambda)}{\Delta(\lambda)}.$$

Используя (4.8), приходим к соотношению (4.7).

Согласно лемме 4.1, вронскиан в (4.9) не зависит от x . Вычислим его при $x = 0$:

$$\langle \Phi(x, \lambda), S(x, \lambda) \rangle = \Phi(0, \lambda)S'(0, \lambda) - \Phi'(0, \lambda)S(0, \lambda) = 1.$$

Таким образом, все утверждения теоремы доказаны. □

Замечание 4.5. Из соотношения (4.8) и леммы 4.3 следует, что порядки полюсов функции Вейля $M(\lambda)$ совпадают с алгебраическими кратностями соответствующих собственных значений. Согласно (4.6), функции $\Phi(x, \lambda)$ и $\Phi'(x, \lambda)$ имеют полюсы порядков, не превосходящих кратности собственных значений, поскольку числи-

тели могут обращаться в ноль при некоторых значениях x . С учетом теоремы 3.16 заключаем, что в случае вещественного потенциала q все полюсы функций $\Phi(x, \lambda)$, $\Phi'(x, \lambda)$ и $M(\lambda)$ простые.

Пример 4.6. При $q(x) \equiv 0$ имеем (см. пример 2.3):

$$\begin{aligned}\Delta(\lambda) &= \frac{\sin \rho\pi}{\rho}, \quad \psi(x, \lambda) = \frac{\sin \rho(\pi - x)}{\rho}, \quad \Delta_1(\lambda) = \cos \rho\pi, \\ \Phi(x, \lambda) &= \frac{\sin \rho(\pi - x)}{\sin \rho\pi}, \quad M(\lambda) = -\frac{\rho \cos \rho\pi}{\sin \rho\pi}, \quad \rho = \sqrt{\lambda}.\end{aligned}$$

Очевидно, что полюсы функции $M(\lambda)$ в λ -плоскости совпадают с собственными значениями $\lambda_n = n^2$, $n \in \mathbb{N}$.

4.2. Постановки обратных задач

Рассмотрим задачу Штурма–Лиувилля L вида (2.1)–(2.2) и последовательность ее собственных значений $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, которую будем называть *спектром*. Предположим, что потенциал q неизвестен, в то время как спектр задан. Возникает вопрос: можно ли восстановить потенциал q на отрезке $[0, \pi]$ по спектру $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$? В общем случае ответ на него отрицательный. Одного спектра недостаточно, и для восстановления потенциала требуются дополнительные данные. В качестве таких данных могут использоваться весовые числа или второй спектр.

Весовыми числами краевой задачи L называются квадраты норм ее собственных функций в $L_2(0, \pi)$:

$$\alpha_n = \int_0^\pi S^2(x, \lambda_n) dx. \quad (4.11)$$

Числа $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ называются *спектральными данными* задачи L .

Обратная задача 4.7. По спектральным данным $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ построить потенциал q .

Вместе с задачей L рассмотрим краевую задачу L_1 для уравнения Штурма–Лиувилля (2.1) с условиями Неймана–Дирихле:

$$y'(0) = y(\pi) = 0.$$

Нетрудно показать, что собственные значения краевой задачи L_1 совпадают с нулями характеристической функции $\Delta_1(\lambda) = C(\pi, \lambda)$. Обозначим их $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Обратная задача 4.8. По двум спектрам $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ и $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ построить потенциал q .

Изучается также обратная задача по функции Вейля.

Обратная задача 4.9. По функции Вейля $M(\lambda)$ построить потенциал q .

Замечание 4.10. Обратные задачи 4.8 и 4.9 эквивалентны. Действительно, согласно формуле (4.8), по функции Вейля нетрудно определить два спектра: собственные значения $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ являются ее полюсами, а значения $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ — нулями. Заметим, что нули числителя и знаменателя в (4.8) не совпадают в силу леммы 4.3. С другой стороны, характеристические функции $\Delta(\lambda)$ и $\Delta_1(\lambda)$ можно построить по их нулям как бесконечные произведения (см. [17, с. 17–18]):

$$\Delta(\lambda) = \pi \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n - \lambda}{n^2}, \quad \Delta_1(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n - \lambda}{(n - 1/2)^2}, \quad (4.12)$$

и затем найти $M(\lambda)$ по формуле (4.8). Вопрос о построении целых функций по их нулям не рассматривается в данном учебном пособии, с этой темой можно ознакомиться по пособию [19]. Таким

образом, задание функции Вейля эквивалентно заданию двух спектров. Связь функции Вейля и спектральных данных $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ рассматривается в разделе 4.4.

4.3. Оценки для функции Вейля

В данном разделе получены вспомогательные оценки для функции Вейля $M(\lambda)$, которые требуются для доказательства основных теорем данной главы.

Лемма 4.11. *Существуют константы $\rho^* > 0$, $\delta \in (0, 1/2)$ и C , при которых справедлива оценка*

$$|M(\lambda)| \leq C|\rho|, \quad \rho \in G_\delta, \quad |\rho| \geq \rho^*, \quad (4.13)$$

где $\lambda = \rho^2$ и область G_δ определена формулой (2.23).

Доказательство. Согласно (2.15), имеем

$$\Delta_1(\lambda) = C(\pi, \lambda) = O(e^{|\tau|\pi}).$$

Используя (4.8) и теорему 2.7, получаем

$$|M(\lambda)| \leq \frac{|\Delta_1(\pi, \lambda)|}{|\Delta(\lambda)|} \leq \frac{Ce^{|\tau|\pi}}{|\rho|^{-1}e^{|\tau|\pi}}, \quad \rho \in G_\delta, \quad |\rho| \geq \rho^*,$$

что дает (4.13). □

Лемма 4.12. *Справедлива асимптотическая формула $M(-\tau^2) = -\tau + o(1)$ при $\tau \in \mathbb{R}$, $\tau \rightarrow +\infty$.*

Доказательство. Используя уточненную асимптотическую формулу (2.31) для $C(x, \lambda)$, получаем

$$\Delta_1(\lambda) = \cos \rho\pi + \frac{\omega \sin \rho\pi}{\rho} + \frac{\varkappa_1(\rho)}{\rho}, \quad (4.14)$$

где ω определена в (2.33) и

$$\varkappa_1(\rho) = \frac{1}{2} \int_0^\pi q(t) \sin \rho(\pi - 2t) dt + O\left(|\rho|^{-1} e^{|\tau|\pi}\right), \quad |\rho| \rightarrow \infty.$$

Подставляя в формулы (2.32) и (4.14) $\rho = i\tau$, $\tau \in \mathbb{R}$, $\tau \rightarrow +\infty$, и применяя формулы

$$\begin{aligned} \cos i\tau\pi &= \frac{e^{\tau\pi} + e^{-\tau\pi}}{2} = \frac{1}{2} e^{\tau\pi} (1 + o(1)), \\ \sin i\tau\pi &= \frac{e^{-\tau\pi} - e^{\tau\pi}}{2i} = \frac{i}{2} e^{\tau\pi} (1 + o(1)), \end{aligned}$$

приходим к соотношениям⁸

$$\begin{aligned} \Delta(-\tau^2) &= \frac{1}{2\tau} \left(1 + \frac{\omega}{\tau} + o(\tau^{-1})\right), \\ \Delta_1(-\tau^2) &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\omega}{\tau} + o(\tau^{-1})\right). \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{\omega}{\tau} + o(\tau^{-1})\right) \cdot \left(1 + \frac{\omega}{\tau} + o(\tau^{-1})\right)^{-1} &= \\ = \left(1 + \frac{\omega}{\tau} + o(\tau^{-1})\right) \left(1 - \frac{\omega}{\tau} + o(\tau^{-1})\right) &= 1 + o(\tau^{-1}). \end{aligned}$$

⁸Соотношения $\varkappa(i\tau) = o(e^{|\tau|\pi})$ и $\varkappa_1(i\tau) = o(e^{|\tau|\pi})$ при $\tau \rightarrow +\infty$ доказываются аналогично лемме Римана–Лебега 2.12.

Таким образом,

$$M(-\tau^2) = -\frac{\Delta_1(-\tau^2)}{\Delta(-\tau^2)} = -\tau (1 + o(\tau^{-1})) = -\tau + o(1),$$

что завершает доказательство. $\square$

4.4. Связь функции Вейля и спектральных данных

В данном разделе будем предполагать, что все собственные значения задачи L — простые. В частности, данное условие выполнено в случае вещественного потенциала q (см. следствие 3.15 и теорему 3.16).

Теорема 4.13. *Если λ_n — простое собственное значение задачи L , то⁹*

$$\alpha_n^{-1} = -\operatorname{Res}_{\lambda=\lambda_n} M(\lambda). \quad (4.15)$$

Доказательство. При доказательстве теоремы 3.16 было фактически получено соотношение

$$\frac{d}{d\lambda} \Delta(\lambda_n) S'(\pi, \lambda_n) = \alpha_n. \quad (4.16)$$

Вычислим вычет $M(\lambda)$ относительно простого полюса, используя (4.8):

$$\operatorname{Res}_{\lambda=\lambda_n} M(\lambda) = -\frac{C(\pi, \lambda_n)}{\frac{d}{d\lambda} \Delta(\lambda_n)}. \quad (4.17)$$

В силу леммы 4.1, вронскиан $\langle C(x, \lambda_n), S(x, \lambda_n) \rangle$ не зависит от x . Используя (2.3) и соотношение $S(\pi, \lambda_n) = 0$, вычисляем

$$\langle C(x, \lambda_n), S(x, \lambda_n) \rangle = \langle C(x, \lambda_n), S(x, \lambda_n) \rangle \Big|_{x=0} = 1,$$

⁹Понятие вычета Res вводится в разделе 1.3.

$$\langle C(x, \lambda_n), S(x, \lambda_n) \rangle = \langle C(x, \lambda_n), S(x, \lambda_n) \rangle \Big|_{x=\pi} = C(\pi, \lambda_n) S'(\pi, \lambda_n).$$

Таким образом, $C(\pi, \lambda_n) S'(\pi, \lambda_n) = 1$. Вместе с (4.16) и (4.17), это соотношение дает (4.15). $\square$

Пример 4.14. Вычислим вычеты функции Вейля относительно ее полюсов в случае $q(x) \equiv 0$ (см. пример 4.6):

$$\operatorname{Res}_{\lambda=\lambda_n} M(\lambda) = - \operatorname{Res}_{\lambda=n^2} \frac{\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} \pi}{\sin \sqrt{\lambda} \pi} = - \frac{\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} \pi}{\frac{d}{d\lambda}(\sin \sqrt{\lambda} \pi)} \Big|_{\lambda=n^2}.$$

Поскольку

$$\frac{d}{d\lambda}(\sin \sqrt{\lambda} \pi) = \pi \cos \sqrt{\lambda} \pi \cdot \frac{1}{2\sqrt{\lambda}},$$

получаем

$$\operatorname{Res}_{\lambda=\lambda_n} M(\lambda) = - \frac{2n^2}{\pi}.$$

Вычислим весовые числа по формуле (4.11):

$$S(x, \lambda_n) = \frac{\sin nx}{n}, \quad \alpha_n = \int_0^\pi \frac{\sin^2 nx}{n^2} dx = \frac{\pi}{2n^2}.$$

Очевидно, в данном частном случае выполнено соотношение (4.15).

Спектральные данные $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ однозначно определяются по функции Вейля $M(\lambda)$: собственные значения $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ — как ее полюсы, весовые числа $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ — по формуле (4.15). Далее в этом разделе мы получим формулу, позволяющую, наоборот, построить функцию Вейля по спектральным данным.

Выберем число $w > 0$ так, чтобы $\Delta(\pm iw) \neq 0$, и введем функцию

$$\beta(\lambda) = \frac{\lambda}{\lambda^2 + w^2}.$$

Следующая теорема дает представление для функции Вейля.

Теорема 4.15 ([18], Теорема 1). *Пусть все собственные значения $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ простые. Тогда справедливо соотношение*

$$M(\lambda) = \mathfrak{M}(\lambda) + m_0, \quad (4.18)$$

где

$$\mathfrak{M}(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda - \lambda_n} + \beta(\lambda_n) \right) M_n, \quad M_n = \operatorname{Res}_{\lambda=\lambda_n} M(\lambda), \quad (4.19)$$

$$m_0 = - \lim_{\tau \rightarrow +\infty} (\tau + \mathfrak{M}(-\tau^2)). \quad (4.20)$$

Доказательство. Пусть значение $\lambda \neq \lambda_n$ фиксировано. Рассмотрим функцию

$$F(\mu) = \left(\frac{1}{\lambda - \mu} + \beta(\mu) \right) M(\mu).$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda - \mu} + \beta(\mu) &= \frac{1}{\lambda - \mu} + \frac{\mu}{\mu^2 + w^2} = \\ &+ \frac{\lambda\mu + w^2}{(\lambda - \mu)(\mu^2 + w^2)} = O(|\mu|^{-2}), \quad |\mu| \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Используя (4.13) и (4.21), получаем оценку

$$F(\mu) = O(|\mu|^{-3/2}), \quad |\mu| \rightarrow \infty, \quad \sqrt{\mu} \in G_\delta. \quad (4.22)$$

Рассмотрим контурный интеграл

$$I_N(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_N} F(\mu) d\mu,$$

где контур $\Gamma_N = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = (N + 1/2)^2\}$ имеет обход против часовой стрелки. Ясно, что при достаточно больших значениях N точки λ и $\pm iw$ лежат внутри контура Γ_N и при $\mu \in \Gamma_N$ выполнена оценка (4.22). Поэтому справедлива оценка

$$|I_N(\lambda)| \leq \frac{1}{2\pi} \text{len}(\Gamma_N) \cdot O((N + 1/2)^{-3}),$$

где $\text{len}(\Gamma_N)$ — длина контура Γ_N , которая равна $2\pi(N + 1/2)^2$. Отсюда следует

$$I_N(\lambda) = O((N + 1/2)^{-1}), \quad N \rightarrow \infty,$$

что дает

$$\lim_{N \rightarrow \infty} I_N(\lambda) = 0. \quad (4.23)$$

Вычислим интеграл $I_N(\lambda)$ при помощи основной теоремы о вычетах (теоремы 1.8). Функция $F(\mu)$ имеет простые полюсы λ , $\pm iw$ и λ_n ($n \in \mathbb{N}$). Найдем вычеты относительно этих полюсов:

$$\begin{aligned} \text{Res}_{\mu=\lambda} F(\mu) &= -M(\lambda), & \text{Res}_{\mu=\pm iw} F(\mu) &= \frac{1}{2} M(\pm iw), \\ \text{Res}_{\mu=\lambda_n} F(\mu) &= \left(\frac{1}{\lambda - \lambda_n} + \beta(\lambda_n) \right) M_n, & n &\in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

При достаточно больших значениях N получаем

$$I_N(\lambda) = -M(\lambda) + \frac{M(iw) + M(-iw)}{2} + \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{\lambda - \lambda_n} + \beta(\lambda_n) \right) M_n.$$

Перейдем к пределу при $N \rightarrow \infty$, учитывая соотношение (4.23):

$$M(\lambda) = \frac{M(iw) + M(-iw)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda - \lambda_n} + \beta(\lambda_n) \right) M_n.$$

Таким образом, мы получили равенство (4.18) с константой $m_0 = \frac{M(iw) + M(-iw)}{2}$. Осталось показать, что m_0 удовлетворяет (4.20). Из представления (4.18) получаем, что $m_0 = M(\lambda) - \mathfrak{M}(\lambda)$ при любом λ , в том числе выполнено предельное соотношение

$$m_0 = \lim_{\tau \in \mathbb{R}, \tau \rightarrow +\infty} (M(-\tau^2) - \mathfrak{M}(-\tau^2)).$$

По лемме 4.12 имеем $M(-\tau^2) = -\tau + o(1)$, $\tau \rightarrow +\infty$, что завершает доказательство. $\square$

Следствие 4.16. *Функция Вейля $M(\lambda)$ однозначно определяется спектральными данными $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ по формуле (4.18), поскольку $M_n = -\alpha_n^{-1}$. Обратно, по функции Вейля можно однозначно найти спектральные данные через ее полюсы и вычеты. Таким образом, в случае простых собственных значений обратные задачи 4.7 и 4.9 эквивалентны.*

Замечание 4.17. В случае кратных собственных значений соответствующие полюсы $\{\lambda_n\}$ функции $F(\mu)$ в доказательстве теоремы 4.15 будут кратными и ряд (4.19) будет иметь более общий вид (см. [18]).

4.5. Единственность решения обратных задач

В данном разделе доказана единственность решения обратных задач 4.7, 4.8 и 4.9.

Рассмотрим вместе с краевой задачей L другую задачу $\tilde{L}$ того же вида (2.1)–(2.2), но с другим потенциалом $\tilde{q}$. Условимся, что если некоторый символ γ обозначает объект, относящийся к задаче L , то символ $\tilde{\gamma}$ будет обозначать аналогичный объект, относящийся к $\tilde{L}$.

Следующая теорема дает единственность решения обратной задачи 4.9 по функции Вейля.

Теорема 4.18 ([18], Теорема 3). *Если $M(\lambda) \equiv \tilde{M}(\lambda)$, то $q(x) = \tilde{q}(x)$ на $[0, \pi]$. Таким образом, задание функции Вейля однозначно определяет потенциал q .*

Доказательство. Введем матрицу спектральных отображений $P(x, \lambda) = (P_{jk}(x, \lambda))_{j,k=1}^2$ по формуле

$$P(x, \lambda) \begin{pmatrix} \tilde{\Phi}(x, \lambda) & \tilde{S}(x, \lambda) \\ \tilde{\Phi}'(x, \lambda) & \tilde{S}'(x, \lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi(x, \lambda) & S(x, \lambda) \\ \Phi'(x, \lambda) & S'(x, \lambda) \end{pmatrix}. \quad (4.24)$$

Заметим, что

$$\det \begin{pmatrix} \tilde{\Phi}(x, \lambda) & \tilde{S}(x, \lambda) \\ \tilde{\Phi}'(x, \lambda) & \tilde{S}'(x, \lambda) \end{pmatrix} = \langle \tilde{\Phi}(x, \lambda), \tilde{S}(x, \lambda) \rangle \equiv 1$$

в силу (4.9). Следовательно, имеем

$$\begin{pmatrix} \tilde{\Phi}(x, \lambda) & \tilde{S}(x, \lambda) \\ \tilde{\Phi}'(x, \lambda) & \tilde{S}'(x, \lambda) \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \tilde{S}'(x, \lambda) & -\tilde{S}(x, \lambda) \\ -\tilde{\Phi}'(x, \lambda) & \tilde{\Phi}(x, \lambda) \end{pmatrix}. \quad (4.25)$$

Используя формулы (4.24) и (4.25), находим

$$P(x, \lambda) = \begin{pmatrix} \Phi(x, \lambda) & S(x, \lambda) \\ \Phi'(x, \lambda) & S'(x, \lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{S}'(x, \lambda) & -\tilde{S}(x, \lambda) \\ -\tilde{\Phi}'(x, \lambda) & \tilde{\Phi}(x, \lambda) \end{pmatrix},$$

что поэлементно дает

$$P_{11}(x, \lambda) = \Phi(x, \lambda)\tilde{S}'(x, \lambda) - S(x, \lambda)\tilde{\Phi}'(x, \lambda), \quad (4.26)$$

$$P_{12}(x, \lambda) = S(x, \lambda)\tilde{\Phi}(x, \lambda) - \Phi(x, \lambda)\tilde{S}(x, \lambda). \quad (4.27)$$

Подставляя (4.6) и аналогичное соотношение для $\tilde{\Phi}(x, \lambda)$ в (4.26), получаем

$$\begin{aligned} P_{11}(x, \lambda) &= \frac{S(x, \lambda)\tilde{\psi}'(x, \lambda) - \psi(x, \lambda)\tilde{S}'(x, \lambda)}{\Delta(\lambda)} = \\ &= \frac{S(x, \lambda)\psi'(x, \lambda) - \psi(x, \lambda)S'(x, \lambda)}{\Delta(\lambda)} + \\ &+ \frac{S(x, \lambda)(\tilde{\psi}'(x, \lambda) - \psi'(x, \lambda)) - \psi(x, \lambda)(\tilde{S}'(x, \lambda) - S'(x, \lambda))}{\Delta(\lambda)}. \end{aligned}$$

Заметим, что¹⁰

$$S(x, \lambda)\psi'(x, \lambda) - \psi(x, \lambda)S'(x, \lambda) = -\langle \psi(x, \lambda), S(x, \lambda) \rangle = \Delta(\lambda)$$

Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} P_{11}(x, \lambda) &= 1 + \frac{1}{\Delta(\lambda)} (S(x, \lambda)(\tilde{\psi}'(x, \lambda) - \psi'(x, \lambda)) - \\ &\quad - \psi(x, \lambda)(\tilde{S}'(x, \lambda) - S'(x, \lambda))). \end{aligned}$$

¹⁰См. доказательство леммы 4.2.

Аналогично из (4.27) выводим

$$P_{12}(x, \lambda) = \frac{\psi(x, \lambda)\tilde{S}(x, \lambda) - S(x, \lambda)\tilde{\psi}(x, \lambda)}{\Delta(\lambda)}.$$

Используя асимптотические формулы (2.13), (2.14), (4.3), (4.4) и их аналоги для $\tilde{S}(x, \lambda)$, $\tilde{S}'(x, \lambda)$, $\tilde{\psi}(x, \lambda)$, $\tilde{\psi}'(x, \lambda)$, вычисляем

$$\begin{aligned} S(x, \lambda)(\tilde{\psi}'(x, \lambda) - \psi'(x, \lambda)) - \psi(x, \lambda)(\tilde{S}'(x, \lambda) - S'(x, \lambda)) = \\ = O\left(|\rho|^{-1}e^{|\tau|x}\right)O\left(|\rho|^{-1}e^{|\tau|(\pi-x)}\right) - \\ - O\left(|\rho|^{-1}e^{|\tau|(\pi-x)}\right)O\left(|\rho|^{-1}e^{|\tau|x}\right) = O\left(|\rho|^{-2}e^{|\tau|\pi}\right), \end{aligned}$$

$$\psi(x, \lambda)\tilde{S}(x, \lambda) - S(x, \lambda)\tilde{\psi}(x, \lambda) = O\left(|\rho|^{-2}e^{|\tau|\pi}\right),$$

при $|\rho| \rightarrow \infty$. Применяя полученные формулы вместе с оценкой модуля характеристической функции снизу (2.25), приходим к соотношениям

$$|P_{11}(x, \lambda) - 1| \leq \frac{C}{|\rho|}, \quad |P_{12}(x, \lambda)| \leq \frac{C}{|\rho|}, \quad \rho \in G_\delta, \quad |\rho| \geq \rho^*. \quad (4.28)$$

С другой стороны, подставляя (4.7) и аналогичное равенство для $\tilde{\Phi}(x, \lambda)$ в (4.26) и (4.27), приходим к соотношениям

$$\begin{aligned} P_{11}(x, \lambda) = C(x, \lambda)\tilde{S}'(x, \lambda) - S(x, \lambda)\tilde{C}'(x, \lambda) + \\ + (M(\lambda) - \tilde{M}(\lambda))S(x, \lambda)\tilde{S}'(x, \lambda), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{12}(x, \lambda) = S(x, \lambda)\tilde{C}(x, \lambda) - C(x, \lambda)\tilde{S}(x, \lambda) + \\ + (\tilde{M}(\lambda) - M(\lambda))S(x, \lambda)\tilde{S}(x, \lambda). \end{aligned}$$

Таким образом, если $M(\lambda) \equiv \tilde{M}(\lambda)$, при каждом фиксированном $x \in [0, \pi]$ функции $P_{11}(x, \lambda)$ и $P_{12}(x, \lambda)$ целые по λ и удовлетворяют оценкам (4.28) при $\rho \in G_\delta$. Применяя принцип максимума модуля для аналитических функций (теорему 1.4) к областям¹¹ $|\rho - n| < \delta$ и $|\rho| < \rho^*$, заключаем, что оценки (4.28) выполнены во всей комплексной плоскости. В данных оценок функции $P_{11}(x, \lambda)$ и $P_{12}(x, \lambda)$ ограничены в $\mathbb{C}$. По теореме Лиувилля 1.5 они равны константам. Из оценок (4.28) вытекает, что

$$P_{11}(x, \lambda) \equiv 1, \quad P_{12}(x, \lambda) \equiv 0. \quad (4.29)$$

Из определения (4.24) следует равенство

$$S(x, \lambda) = P_{11}(x, \lambda)\tilde{S}(x, \lambda) + P_{12}(x, \lambda)\tilde{S}'(x, \lambda).$$

Подставляя в данное соотношение (4.29), получаем $S(x, \lambda) \equiv \tilde{S}(x, \lambda)$. Выразим $q(x)$ из уравнения (2.1):

$$q(x) = \lambda + \frac{S''(x, \lambda)}{S(x, \lambda)}.$$

В результате заключаем, что $q(x) = \tilde{q}(x)$ на $[0, \pi]$. □

В силу эквивалентности обратных задач 4.8 и 4.9 и их эквивалентности обратной задаче 4.7 в случае простого спектра, из теоремы 4.18 вытекают следствия:

Следствие 4.19. *Если $\lambda_n = \tilde{\lambda}_n$ и $\mu_n = \tilde{\mu}_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$, то $q(x) = \tilde{q}(x)$ на $[0, \pi]$. Таким образом, два спектра $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ и $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ однозначно определяют потенциал q .*

¹¹ Данные области представляют собой «дырки» в G_δ (2.23).

Следствие 4.20. *Предположим, что все собственные значения задач L и $\tilde{L}$ простые и выполнены равенства $\lambda_n = \tilde{\lambda}_n$, $\alpha_n = \tilde{\alpha}_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда $q(x) = \tilde{q}(x)$ на $[0, \pi]$, то есть спектральные данные $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ однозначно определяют потенциал q .*

Замечание 4.21. Следствие 4.20 справедливо лишь при условии простоты спектра, которое выполнено, в частности, для вещественных потенциалов. В общем комплексном случае для однозначного восстановления потенциала необходимо задавать как называемые обобщенные спектральные данные с учетом кратностей собственных значений (см. [18]).

Используемый в доказательстве теоремы 4.18 метод был разработан В. А. Юрко [17] и называется *методом спектральных отображений*. Данный метод можно использовать не только для доказательства теорем единственности, но и для конструктивного решения обратных задач.

4.6. Задача Хохштадта–Либермана

Ранее мы отмечали, что в общем случае для восстановления потенциала q недостаточно одного спектра и требуются дополнительные данные. В данном разделе мы рассмотрим частный случай, в котором потенциал $q(x)$ задан на половине отрезка, и изучим задачу восстановления $q(x)$ на второй половине отрезка по одному спектру.

Обратная задача 4.22. *Пусть потенциал $q(x)$ задан априори на интервале $(0, \frac{\pi}{2})$.¹² По спектру $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ построить потенциал $q(x)$ на интервале $(\frac{\pi}{2}, \pi)$.*

¹²Потенциал на концах отрезка можно определить по непрерывности: $q(0) = \lim_{x \rightarrow 0} q(x)$ и $q(\frac{\pi}{2}) = \lim_{x \rightarrow \pi/2} q(x)$.

Обратная задача 4.22 была впервые сформулирована в статье [20] и называется *задачей Хохштадта–Либермана*, или *неполной обратной задачей*. Докажем теорему единственности решения этой задачи.

Теорема 4.23 (Хохштадта–Либермана [20]). *Если $q(x) = \tilde{q}(x)$ на $(0, \frac{\pi}{2})$ и $\lambda_n = \tilde{\lambda}_n$ при $n \in \mathbb{N}$, то $q(x) = \tilde{q}(x)$ на $(\frac{\pi}{2}, \pi)$. Таким образом, задание потенциала $q(x)$ на интервале $(0, \frac{\pi}{2})$ и спектра $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ однозначно определяет потенциал q на всем отрезке $[0, \pi]$.*

Доказательство. Для доказательства теоремы нам потребуется формула (4.5), которая при $x = \frac{\pi}{2}$ и $\lambda = \lambda_n$ дает

$$\psi\left(\frac{\pi}{2}, \lambda_n\right) S'\left(\frac{\pi}{2}, \lambda_n\right) - \psi'\left(\frac{\pi}{2}, \lambda_n\right) S\left(\frac{\pi}{2}, \lambda_n\right) = 0. \quad (4.30)$$

Заметим, что из равенства $q(x) = \tilde{q}(x)$ на $(0, \frac{\pi}{2})$ следует $S(x, \lambda) = \tilde{S}(x, \lambda)$ при $x \in (0, \frac{\pi}{2}]$ и $\lambda \in \mathbb{C}$. Принимая во внимание условие $\lambda_n = \tilde{\lambda}_n$, $n \in \mathbb{N}$, мы можем выписать соотношение для краевой задачи $\tilde{L}$, аналогичное (4.30), в виде

$$\tilde{\psi}\left(\frac{\pi}{2}, \lambda_n\right) S'\left(\frac{\pi}{2}, \lambda_n\right) - \tilde{\psi}'\left(\frac{\pi}{2}, \lambda_n\right) S\left(\frac{\pi}{2}, \lambda_n\right) = 0. \quad (4.31)$$

Вместе (4.30) и (4.31) при фиксированном $n \in \mathbb{N}$ образуют систему двух линейных уравнений относительно неизвестных $S\left(\frac{\pi}{2}, \lambda_n\right)$ и $S'\left(\frac{\pi}{2}, \lambda_n\right)$. Заметим, что величины $S\left(\frac{\pi}{2}, \lambda_n\right)$ и $S'\left(\frac{\pi}{2}, \lambda_n\right)$ не могут одновременно равняться нулю, что доказывается аналогично лемме 4.3. Таким образом, однородная система (4.30)–(4.31) имеет нетривиальное решение. Значит, решение этой системы не единственно, и ее определитель равен нулю:

$$\psi\left(\frac{\pi}{2}, \lambda_n\right) \tilde{\psi}'\left(\frac{\pi}{2}, \lambda_n\right) - \tilde{\psi}\left(\frac{\pi}{2}, \lambda_n\right) \psi'\left(\frac{\pi}{2}, \lambda_n\right) = 0.$$

В итоге мы показали, что функция

$$\Psi(\lambda) := \psi\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right) \tilde{\psi}'\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right) - \tilde{\psi}\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right) \psi'\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right)$$

имеет нули $\lambda = \lambda_n$, $n \in \mathbb{N}$. Используя асимптотические формулы (4.3) and (4.4), получаем следующую оценку при $|\lambda| \rightarrow \infty$:

$$\Psi(\lambda) = O\left(|\rho|^{-2} e^{|\tau|\pi}\right). \quad (4.32)$$

Функция $\frac{\Psi(\lambda)}{\Delta(\lambda)}$ целая, поскольку все нули $\Delta(\lambda)$ являются также нулями $\Psi(\lambda)$. В силу (2.25) и (4.32), справедлива оценка

$$\frac{\Psi(\lambda)}{\Delta(\lambda)} = O(|\rho|^{-1}), \quad \rho \in G_\delta.$$

Таким образом, функция $\frac{\Psi(\lambda)}{\Delta(\lambda)}$ ограничена в G_δ , а вследствие принципа максимума модуля для аналитических функций (теоремы 1.4), и во всей комплексной плоскости. По теореме Лиувилля 1.5 получаем, что $\frac{\Psi(\lambda)}{\Delta(\lambda)} = \text{const}$. Так как $\left|\frac{\Psi(\lambda)}{\Delta(\lambda)}\right| \rightarrow 0$ при $|\rho| \rightarrow \infty$, заключаем, что $\Psi(\lambda) \equiv 0$, или

$$\frac{\psi'\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right)}{\psi\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right)} \equiv \frac{\tilde{\psi}'\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right)}{\tilde{\psi}\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right)}. \quad (4.33)$$

Заметим, что дробь $\frac{\psi'\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right)}{\psi\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right)}$ ввиду соотношения (4.8) и леммы 4.2 является функцией Вейля задачи Штурма–Лиувилля на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. Действительно, $\psi\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right)$ и $\psi'\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right)$ — характеристические функции задач Штурма–Лиувилля с краевыми условиями $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = y(\pi) = 0$ и $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = y(\pi) = 0$. Используя теорему 4.18, из

равенства функций Вейля (4.33) получаем равенство потенциалов $q(x) = \tilde{q}(x)$ на интервале $(\frac{\pi}{2}, \pi)$. $\square$

Таким образом, были рассмотрены некоторые классические постановки обратных задач Штурма–Лиувилля и доказаны соответствующие теоремы единственности.

Дополнительная литература к главе 4: [6, 8, 13, 17, 21].

Список рекомендованной литературы

- [1] Владимиров, В. С. Уравнения математической физики: учебник для вузов / В. С. Владимиров, В. А. Жаринов. — 2-е изд., стереотип. — М.: Физматлит, 2004. — 400 с.
- [2] Гельфанд, И. М. Лекции по линейной алгебре / И. М. Гельфанд. — 5-е изд., испр. — М.: Добросвет, МЦНМО, 1998. — 320 с.
- [3] Ильин, В. А. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: учебник / В. А. Ильин, Г. Д. Ким — М.: Изд. Моск. ун-та, 1998. — 320 с.
- [4] Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. — Изд. 4-е, перераб. — М.: Наука, 1976. — 543 с.
- [5] Курош, А. Г. Курс высшей алгебры / А. Г. Курош. — Изд. 9-е. — М.: Наука, 1968. — 431 с.
- [6] Левитан, Б. М. Обратные задачи Штурма–Лиувилля / Б. М. Левитан. — М.: Наука, 1984. — 240 с.
- [7] Люстерник, Л. А. Элементы функционального анализа / Л. А. Люстерник, В. И. Соболев. — 2-е изд. — М.: Наука, 1965. — 520 с.
- [8] Марченко, В. А. Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения / В. А. Марченко. — Киев: Наукова думка, 1977. — 330 с.
- [9] Матвеев, Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений / Н. М. Матвеев. — Изд. 3-е, испр. и доп. — М.: Высшая школа, 1967. — 565 с.

- [10] Наймарк, М. А. Линейные дифференциальные операторы / М. А. Наймарк. — Изд. 2-е, перераб. и доп. — М.: Наука, 1969. — 527 с.
- [11] Натансон, И. П. Теория функций вещественной переменной / И. П. Натансон. — Изд. 3-е. — М.: Наука, 1974. — 480 с.
- [12] Привалов, И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного / И. И. Привалов. — Изд. 13-е. — М.: Наука, 1984. — 432 с.
- [13] Садовничий, В. А. Обратные задачи Штурма–Лиувилля с нераспадающимися краевыми условиями / В. А. Садовничий, Я. Т. Султанаев, А. М. Ахтямов. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 2009. — 184 с.
- [14] Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. — 5-е изд., стереотип. — М.: Наука, 1977. — 736 с.
- [15] Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том II / Г. М. Фихтенгольц. — Изд. 7-е, стереотип. — М.: Наука, 1970. — 800 с.
- [16] Шабат, Б. В. Введение в комплексный анализ / Б. В. Шабат. — М.: Наука, 1969. — 577 с.
- [17] Юрко, В. А. Введение в теорию обратных спектральных задач / В. А. Юрко. — М.: Физматлит, 2007. — 384 с.
- [18] Buterin, S. A. Inverse spectral problems for non-selfadjoint second-order differential operators with Dirichlet boundary conditions / S. A. Buterin, C.-T. Shieh, V. A. Yurko. // Boundary Value Problems. — 2013. — Article ID 80. — 24 p.

- [19] Buterin, S. A. Lectures on the Theory of Entire functions / S. A. Buterin, G. Freiling, V. A. Yurko. // Schriftenreihe der Fakultät für Mathematik. — Duisburg: Universität Duisburg-Essen, 2014. — SM-UDE-779. — 37 p. — URL: <https://www.uni-due.de/imperia/md/content/mathematik/buterinfreilingyurko2014.pdf> (дата обращения: 16.11.2025).
- [20] Hochstadt, H. An inverse Sturm-Liouville problem with mixed given data / H. Hochstadt, B. Lieberman. // SIAM J. Appl. Math. — 1978. — Vol. 34. — P. 676–680.
- [21] Kravchenko, V. V. Direct and Inverse Sturm–Liouville Problems / V. V. Kravchenko. — Cham: Frontiers in Mathematics, 2020. — 155 p.
- [22] Liouville, J. Mémoire sur le développement des fonctions ou parties de fonctions en séries.../ J. Liouville. // Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. — 1836. — P. 253–265

Учебное издание

Бондаренко Наталья Павловна

ЗАДАЧА ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ

ISBN 978-5-6055745-9-0



Подписано в печать 26.02.2026 г. Формат 60×84/16.
Усл.-печ. л. 5,4. Тираж 500 экз. Заказ № 14

Издательство «Саратовский источник»

г. Саратов, проспект Строителей, 36.

Тел. (8452) 52-05-93

E-mail: saristoch@bk.ru

Отпечатано в типографии «Саратовский источник»