

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»  
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

*О. В. ТЕРЯЕВА, А. Ю. ЛАВРОВ, А. В. ПАРШИНА*

## ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПЕРЕМЕННОГО СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

Рекомендовано редакционно-издательским советом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева» в качестве учебного пособия для обучающихся по основным образовательным программам высшего образования по направлениям подготовки 12.03.03 Фотоника и оптоинформатика, 12.03.04 Биотехнические системы и технологии, 12.03.05 Лазерная техника и лазерные технологии и специальности 11.05.01 Радиоэлектронные системы и комплексы

САМАРА

Издательство Самарского университета  
2025

УДК 621.3.011.71(075)  
ББК 3211.612я7  
Т359

Рецензенты: д-р техн. наук, проф. П. К. Кузнецов;  
д-р техн. наук, проф. С. А. Матюнин

***Теряева, Ольга Викторовна***

**Т359 Электрические цепи переменного синусоидального тока:**  
учебное пособие / *О. В. Теряева, А. Ю. Лавров, А. В. Паршина.* –  
Самара: Издательство Самарского университета. 2025. –  
80 с.: ил.

**ISBN 978-5-7883-2268-1**

В пособии рассмотрены вопросы общей электротехники. Дается описание цепей переменного синусоидального тока, а также методов их расчетов.

Предназначено для обучающихся по основным образовательным программам направлений подготовки 12.03.03 Фотоника и оптоинформатика, 12.03.04 Биотехнические системы и технологии, 12.03.05 Лазерная техника и лазерные технологии и специальности 11.05.01 Радиоэлектронные системы и комплексы.

Подготовлено на кафедре электротехники Самарского университета.

УДК 621.3.011.71(075)  
ББК 3211.612я7

ISBN 978-5-7883-2268-1

© Самарский университет, 2025

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение .....	4
1. Переменный ток (напряжение) и характеризующие его величины .....	5
2. Среднее и действующее значения переменного тока и напряжения .....	8
3. Векторные диаграммы переменных токов и напряжений .....	11
4. Теоретические основы комплексного метода расчета цепей переменного тока .....	14
5. Мощность переменного тока .....	20
6. Переменный ток в однородных идеальных элементах .....	24
7. Электрическая цепь с последовательным соединением элементов R, L и C .....	30
8. Электрическая цепь с параллельным соединением элементов R, L и C .....	32
9. Активные и реактивные составляющие токов и напряжений .....	34
10. Передача энергии от активного двухполюсника (источника) к пассивному двухполюснику (приемнику) .....	53
11. Компенсация реактивной мощности приемников энергии .....	56
12. Определение резонанса .....	61
13. Резонанс напряжений .....	62
14. Резонанс токов .....	68
15. Резонанс в сложных схемах .....	73
Заключение .....	77
Список использованной литературы .....	78

## **ВВЕДЕНИЕ**

Учебное пособие предназначено для обучающихся основных образовательных программ высшего образования направлений подготовки 11.05.01 Радиоэлектронные системы и комплексы, 12.03.03 Фотоника и оптоинформатика, 12.03.04 Биотехнические системы и технологии, 12.03.05 Лазерная техника и лазерные технологии.

Электротехника является общетехнической дисциплиной, играющей важную роль в формировании профессиональных компетенций будущих специалистов в области радиоэлектроники, фотоники и приборостроения. Электротехника служит базой для изучения специальных дисциплин, связанных с разработкой и эксплуатацией схем электропитания, электронных средств обеспечения технологических процессов и компьютерных систем.

Пособие включает материалы, призванные помочь обучающимся конкретизировать знания, приобрести умения и навыки применения основных законов общей электротехники при решении задач определения параметров цепей переменного синусоидального тока. Учебное пособие содержит описание основных параметров, режимов работы, методов расчета цепей, а также примеры схем, которые могут быть использованы обучающимися для самостоятельного совершенствования приобретенных навыков.

# 1. ПЕРЕМЕННЫЙ ТОК (НАПРЯЖЕНИЕ) И ХАРАКТЕРИЗУЮЩИЕ ЕГО ВЕЛИЧИНЫ

Переменным называется ток  $i(t)$  [напряжение  $u(t)$ ], периодически изменяющийся во времени по произвольному закону. В электроэнергетике понятие «переменный» употребляют в более узком смысле, а именно: под переменным понимают ток (напряжение), изменяющийся во времени по синусоидальному закону:

$$i(t) = I_m \cdot \sin(\omega t + \varphi_i),$$

$$u(t) = U_m \cdot \sin(\omega t + \psi_u).$$

Графические диаграммы этих функций имеют вид рис. 1:

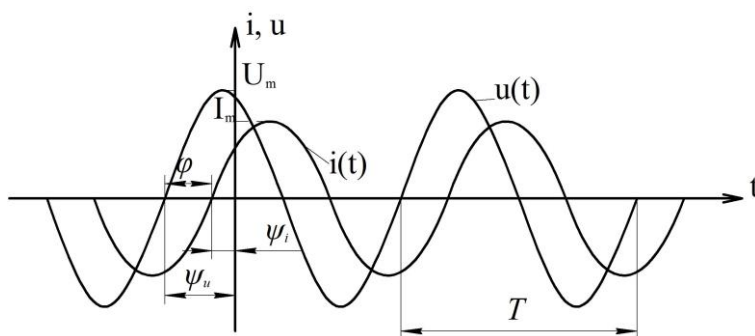


Рис. 1. Графические диаграммы переменного синусоидального тока и напряжения

Время, за которое происходит одно полное колебание, называется периодом и обозначается буквой  $T$ . Число полных колебаний (периодов) в единицу времени называется частотой  $f$ :

$$f = \frac{1}{T}, [\text{Гц}].$$

Из математики известно, что синусоидальная функция времени может быть описана вращающимся вектором со скоростью вращения  $\omega$ . В технике эта величина получила название угловой частоты:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} [c^{-1}] \text{ или } [rad / c].$$

В выражениях функций  $u(t), i(t)$  приняты обозначения:

$u(t), i(t)$  или  $u, i$  – мгновенные значения функций, т.е. их значения в произвольно выбранный момент времени;

$U_m, I_m$  – амплитудные (максимальные) значения функций;

$(\omega t + \psi)$  – фаза, определяющая момент времени;

$\psi_u, \psi_i$  – начальные фазы функций, определяющие их значения в момент  $t = 0$ , зависят от выбора начала отсчета времени;

$\varphi = \psi_u - \psi_i$  – угол сдвига фаз (разность начальных фаз) между напряжением и током, не зависит от выбора начала отсчета времени.

Синусоидальная форма для функций токов и напряжений в электроэнергетике утверждена в качестве стандарта и является одним из показателей качества электроэнергии как товара.

Из физических законов следует, что при протекании синусоидального ток  $i = I_m \cdot \sin \omega t$  через любой линейный элемент электрической цепи напряжение на его зажимах также будет синусоидальным, и, наоборот, при синусоидальном напряжении ток также будет иметь синусоидальную форму.

Из закона Ома для резистора  $R$  следует:

$$U_R = R \cdot i = R \cdot I_m \cdot \sin \omega t.$$

Из закона электромагнитной индукции для катушки L следует:

$$U_L = -e = L \frac{di}{dt} = \omega L \cdot I_m \cdot \cos \omega t = U_m \cdot \sin(\omega t + 90^\circ).$$

Из закона сохранения заряда для конденсатора C следует:

$$U_c = \frac{1}{C} \int i \cdot dt = -\frac{I_m}{\omega C} \cos \omega t = U_m \cdot \sin(\omega t - 90^\circ).$$

Таким образом, в цепи переменного тока любой сложности напряжения и токи на всех участках будут изменяться по синусоидальному закону при условии, что источники энергии обеспечивают синусоидальную форму напряжений на их выводах.

Диапазон частот токов и напряжений, применяемых в различных отраслях современной техники, очень велик: от 10–1 Гц до 109 Гц. В электроэнергетике в качестве стандарта частоты в Европе принята частота  $f = 50$  Гц ( $\omega = 2\pi f = 314^{-1} c$ ) а в США и Канаде  $f = 60$  Гц ( $\omega = 377 c^{-1}$ ), в других странах возможны оба варианта или один из них.

Частота  $f = 50$  Гц принята в качестве стандарта исторически на заре развития электроэнергетики и уже не соответствует сегодняшнему уровню развития техники. Оптимальной на сегодня была бы частота в диапазоне 150...200 Гц. Однако переход на оптимальную частоту связан с большими техническими сложностями и в ближайшее время не может быть осуществлен.

## 2. СРЕДНЕЕ И ДЕЙСТВУЮЩЕЕ ЗНАЧЕНИЯ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА И НАПРЯЖЕНИЯ

Среднее или среднеарифметическое значение  $F_{cp}$  произвольной функции времени  $f(t)$  за интервал времени  $T$  определяется по формуле:

$$F_{cp} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cdot dt ,$$

численно среднее значение  $F_{cp}$  равно высоте прямоугольника, равновеликого по площади фигуре, ограниченной кривой  $f(t)$ , осью  $t$  и пределами интегрирования  $0-T$  (рис. 2).

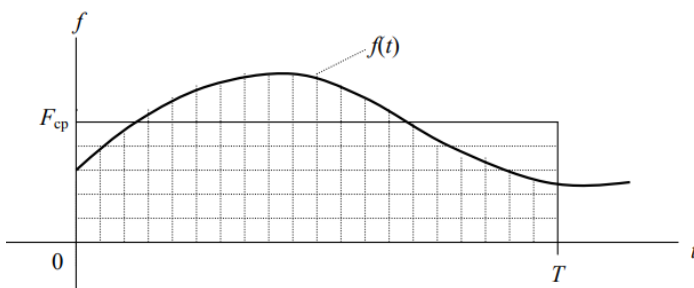


Рис. 2. Определение среднего значения функции  $f(t)$

Для синусоидальной функции среднее значение за полный период  $T$  (или за целое число полных периодов) равно нулю, так как площади положительной и отрицательной полуволн этой функции равны. Для переменного синусоидального напряжения определяют

среднее по модулю значение за полный период  $T$  или среднее значение за половину периода ( $T/2$ ) между двумя нулевыми значениями (рис. 3)

$$\begin{aligned}
 U_{cp} &= \frac{1}{\frac{T}{2}} \int_0^{\frac{T}{2}} U_m \cdot \sin \omega t dt = \frac{2U_m}{\omega T} \int_0^{\pi} \sin \omega t \cdot d(\omega t) = \\
 &= \frac{2U_m}{\frac{2\pi}{T}} \left| -\cos \omega t \right|_0^{\pi} = \frac{2U_m}{\pi} \approx 0,637I_m.
 \end{aligned}$$

Аналогично получим для тока:  $I_{cp} = \frac{2I_m}{\pi} \approx 0.637I_m$ .

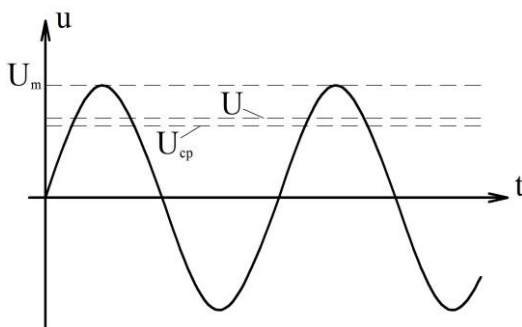


Рис. 3 Действующее, среднее и амплитудное значение синусоидального напряжения

Действующее значение переменного напряжения определяется как среднеквадратичное значение функции за период:

$$\begin{aligned}
 U &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u(t)^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T U_m^2 \sin^2 \omega t \cdot dt} = \\
 &= \sqrt{\frac{U_m^2}{T} \int_0^T \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\omega t \right) dt} = \sqrt{\frac{U_m^2}{T} \cdot \frac{1}{2} T} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \approx 0,707U_m.
 \end{aligned}$$

Количество энергии, выделяемое переменным током в резисторе  $R$  за время  $T$ , по закону Джоуля будет равно:

$$W = \int_0^T i^2 R dt = I^2 RT ,$$

а активная мощность соответственно:

$$P = \frac{W}{T} = I^2 R .$$

Таким образом, количественные параметры электрической энергии на переменном токе (количество энергии, мощность) определяются действующими значениями напряжения  $U$  и тока  $I$ . По этой причине в электроэнергетике все теоретические расчеты и экспериментальные измерения принято выполнять для действующих значений токов и напряжений. В радиотехнике и в технике связи, наоборот, оперируют максимальными значениями этих функций.

Приведенные выше формулы для энергии и мощности переменного тока полностью совпадают с аналогичными формулами для постоянного тока. На этом основании можно утверждать, что энергетически постоянному току эквивалентно действующее значение переменного тока.

Синусоидальная функция времени, как периодическая функция, характеризуется следующими коэффициентами:

$$K_a = \frac{I_m}{I} = \frac{Um}{U} = \sqrt{2} \approx 1,41 - \text{коэффициент амплитуды},$$

$$K_\phi = \frac{I}{I_{cp}} = \frac{U}{U_{cp}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \approx 1,11 - \text{коэффициент формы}.$$

### 3. ВЕКТОРНЫЕ ДИАГРАММЫ ПЕРЕМЕННЫХ ТОКОВ И НАПРЯЖЕНИЙ

Из курса математики известно, что любую синусоидальную функцию времени, например  $i(t) = I_m \cdot \sin(\omega t + \alpha)$  можно изобразить вращающимся вектором (рис. 4) при соблюдении следующих условий:

- а) длина вектора в масштабе равна амплитуде функции  $I_m$  ;
- б) начальное положение вектора при  $t = 0$  определяется начальной фазой  $\alpha$  ;
- в) вектор равномерно вращается с угловой скоростью  $\omega$ , равной угловой частоте функции.

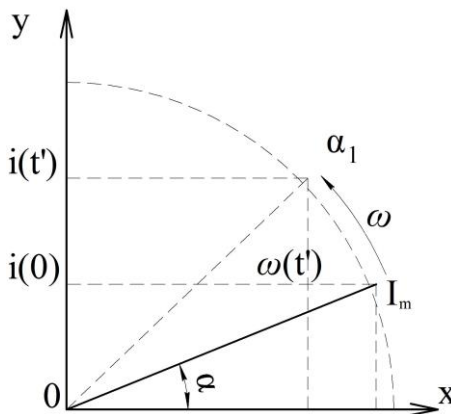


Рис. 4. Изображение синусоидальной функции вращающимся вектором

При соблюдении названных условий проекция вращающегося вектора на вертикальную ось  $y$  в системе координат  $x - y$  в любой

момент времени  $t'$  равна мгновенному значению функции  $i(t')$ , следовательно:

$$i(t) = I_m \cdot \sin(\omega t + \alpha).$$

Рассмотрим процессы в схеме электрической цепи, изображенной на рис. 5.

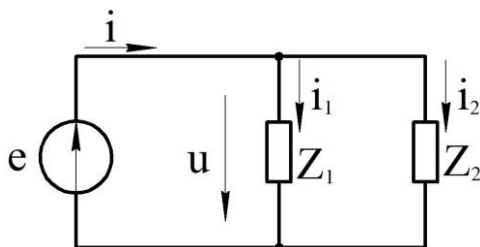


Рис .5. Схема электрической цепи

Мгновенные значения токов и напряжения можно записать в виде:

$$u = e = E_m \cdot \sin(\omega t + \alpha),$$

$$i = I_m \cdot \sin(\omega t + \psi),$$

$$i_1 = I_{m1} \cdot \sin(\omega t + \psi_1),$$

$$i_2 = I_{m2} \cdot \sin(\omega t + \psi_2).$$

Изобразим синусоидальные функции токов и напряжений вращающимися векторами для произвольного момента времени, например,  $t = 0$  (рис. 6а). При рассмотрении установившегося режима в схеме мгновенные значения функций не представляют интереса, поэтому момент времени, для которого строится векторная диаграмма, может быть выбран произвольно. Целесообразно один из векторов принять начальным или исходным и совместить его на диаграмме с одной из осей координат (вектор  $E$  на рис. 6,  $\vec{e}$  совмещен с осью  $y$ ), при этом остальные векторы располагают по отношению к исходному вектору под углами, равными их сдвигам фаз.

Так как на практике интерес представляют действующие значения токов и напряжений, то на векторных диаграммах длины векторов принимают равными в выбранных масштабах их действующим значениям (рис. 6, б).

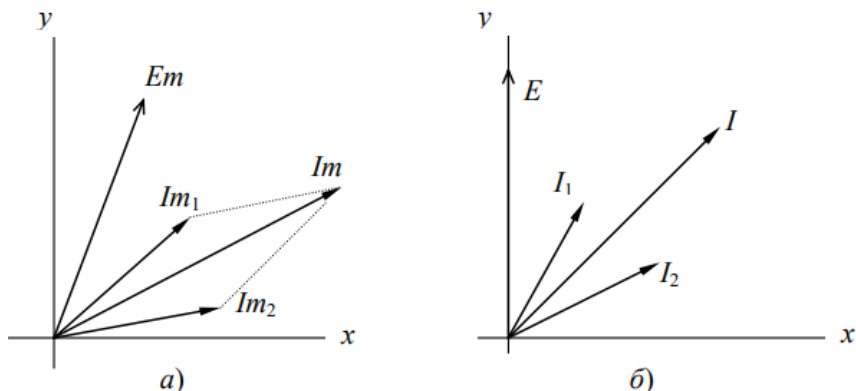


Рис. 6. Векторная диаграмма процессов, происходящих в цепи рис. 5

Совокупность векторов токов и напряжений, характеризующих процессы в цепи переменного тока, построенных в выбранных масштабах и с соблюдением правильной их ориентации друг относительно друга, называется векторной диаграммой.

## 4. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ КОМПЛЕКСНОГО МЕТОДА РАСЧЕТА ЦЕПЕЙ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

Из курса математики известно, что комплексное число  $\underline{Z}$  может быть представлено в следующих трех формах: показательной, тригонометрической и алгебраической:

$$\underline{Z} = Ze^{j\alpha} = Z(\cos \alpha + j \sin \alpha) = a + jb.$$

*показательная      тригонометрическая      алгебраическая*

В основе перехода от одной формы комплексного числа к другой лежит известная из математики формула Эйлера:

$$e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \sin \alpha,$$

здесь обозначены:

$j = \sqrt{-1}$  – мнимое единичное число,

$Z$  – модуль комплексного числа,

$\alpha$  – аргумент комплексного числа,

$a$  – вещественная часть комплексного числа,

$jb$  – мнимая часть комплексного числа.

Соотношения между коэффициентами различных форм комплексного числа вытекают из формулы Эйлера:

$$a = Z \cdot \cos \alpha, \quad b = Z \cdot \sin \alpha, \quad Z = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \alpha = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}.$$

С использованием формулы Эйлера получены следующие соотношения:

$$e^{j0} = 1, \quad e^{\pm j180^\circ} = -1, \quad e^{j90^\circ} = +j, \quad e^{-j90^\circ} = -j,$$

$$1/j = -j, \quad j^2 = -1, \quad j^3 = -j.$$

Комплексное число  $\underline{Z} = Ze^{j\alpha} = a + jb$  может быть изображено вектором на комплексной плоскости (рис. 7), при этом алгебраической форме числа  $\underline{Z} = a + jb$  соответствует декартова система координат ( $a \rightarrow x; b \rightarrow y$ ), а показательной форме числа  $\underline{Z} = Ze^{j\alpha}$  – полярная система координат ( $Z \rightarrow \rho; \alpha \rightarrow \theta$ ).

Можно утверждать, что каждой точке (вектору) на комплексной плоскости соответствует определенное комплексное число, и наоборот, каждому комплексному числу соответствует определенная точка (вектор) на комплексной плоскости.

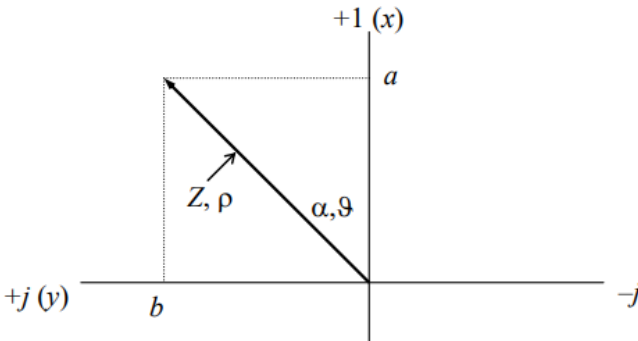


Рис. 7. Изображение вектора на комплексной плоскости

Известно, что синусоидальную функцию можно изобразить вектором, а вектор в свою очередь можно представить комплексным числом. Таким образом, синусоидальные токи и напряжения, характеризующие установившийся режим цепи переменного тока, могут быть представлены комплексными числами:

$$i = I_m \cdot \sin(\omega t) \Leftrightarrow \underline{I} = I \cdot e^{j0} = I + j \cdot 0,$$

$$i = I_m \cos(\omega t) = I_m \sin(\omega t + 90^\circ) \Leftrightarrow \underline{I} = I \cdot e^{j90} = 0 + jI$$

$$i = I_m \cdot \sin(\omega t + \psi) \Leftrightarrow \underline{I} = I \cdot e^{j\psi} = a + jb.$$

Здесь  $\Leftrightarrow$  – означает знак соответствия, а выражения справа от знака соответствия – комплексные действующие значения функций.

При расчете цепей переменного тока возникает необходимость выполнения различного рода математических операций с синусоидальными функциями. При замене синусоидальных функций (оригиналов) комплексными числами (изображениями) соответствующие математические операции выполняются с комплексными числами.

Сложение (вычитание) комплексных чисел производится в алгебраической форме

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 = (a_1 + jb_1) \cdot (a_2 + jb_2) = \\ &= (a_1a_2 - b_1b_2) + j(a_1b_2 - a_2b_1) = a + jb = Ze^{ja}. \end{aligned}$$

Умножение комплексных чисел может выполняться, как в алгебраической, так и в показательной формах:

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= \underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 = (a_1 + jb_1) \cdot (a_2 + jb_2) = \\ &= (a_1a_2 - b_1b_2) + j(a_1b_2 - a_2b_1) = a + jb = Ze^{ja}, \end{aligned}$$

$$Z = Z_1 \cdot Z_2 = Z_1 e^{j\alpha_1} \cdot Z_2 e^{j\alpha_2} = Z_1 Z_2 \cdot e^{j(\alpha_1 + \alpha_2)} = Ze^{j\alpha} = a + jb.$$

Деление комплексных чисел может выполняться как в алгебраической, так и в показательной формах:

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} = \frac{(a_1 + jb_1)}{(a_2 + jb_2)} = \frac{(a_1 + jb_1)(a_2 - jb_2)}{(a_2 + jb_2)(a_2 - jb_2)} = \\ &= \frac{(a_1a_2 + b_1b_2) + j(b_1a_2 - a_1b_2)}{a_2^2 + b_2^2} = \\ &= \frac{(a_1a_2 + b_1b_2)}{a_2^2 + b_2^2} + j \frac{(b_1a_2 - a_1b_2)}{a_2^2 + b_2^2} = a + jb = Ze^{j\alpha} \end{aligned}$$

$$\underline{Z} = \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{Z_1 e^{j\alpha_1}}{Z_2 e^{j\alpha_2}} = \frac{Z_1}{Z_2} \cdot e^{j(\alpha_1 - \alpha_2)} = Z e^{j\alpha} = a + jb.$$

Возведение в степень (извлечение корня) комплексного числа выполняется только в показательной форме:

$$\underline{Z} = (M \cdot e^{j\psi})^n = M^n \cdot e^{jn\psi} = Z e^{j\alpha},$$

$$\underline{Z} = \sqrt{M \cdot e^{j\psi}} = \sqrt{M} \cdot e^{j\frac{\psi}{2}} = Z e^{j\alpha}.$$

Установим порядок дифференцирования и интегрирования синусоидальных функций в комплексной форме. Пусть задана некоторая функция тока и ее комплексное изображение:

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi) \Leftrightarrow \underline{U} = U e^{j\psi}.$$

Производная и интеграл от этой функции их комплексные изображения будут равны:

$$\frac{du}{dt} = U_m \omega \cdot \cos(\omega t + \psi) = U_m \omega \cdot \sin(\omega t + \psi + 90^\circ) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow U \omega \cdot e^{j(\psi+90^\circ)} = U \omega \cdot e^{j\psi} e^{j90^\circ} = j\omega \cdot U;$$

$$\int u \cdot dt = -\frac{U_m}{\omega} \cdot \cos(\omega t + \psi) = \frac{U_m}{\omega} \cdot \sin(\omega t + \psi - 90^\circ) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow U \omega \cdot e^{j(\psi-90^\circ)} = \frac{U}{\omega} e^{j\psi} \cdot e^{-j90^\circ} = \frac{U}{j\omega}.$$

Таким образом, дифференцированию синусоидальной функции времени соответствует в комплексной форме умножение ее комплексного изображения на множитель  $j\omega$ , а интегрированию – соответственно деление на тот же коэффициент:

$$\frac{du}{dt} \Leftrightarrow j\omega U;$$

$$\int u dt \Leftrightarrow \frac{1}{j\omega} U.$$

Замена математических операций 2-го рода (дифференцирование, интегрирование) операциями 1-го рода (умножение, деление) существенно упрощает расчет цепей переменного тока в комплексной форме.

Современные инженерные калькуляторы в режиме «сplx» позволяют выполнять все действия с комплексными числами непосредственно так же, как с обычными числами. При этом следует принять во внимание, что калькулятор выполняет действия над комплексными числами только в алгебраической форме ( $\underline{Z} = a + jb$ ) и результаты расчета выдает также в алгебраической форме. Если исходные комплексные числа заданы в показательной форме ( $\underline{Z} = Ze^{j\alpha}$ ), то после их ввода необходимо выполнить операцию преобразования их в алгебраическую форму. Действия с комплексными числами в mathCAD выполняются так же, как и с обычными числами. Комплексный метод расчета цепей переменного тока был разработан в 1910-1912 гг. американским инженером Штейнметцем и сыграл большую роль в развитии теории электрических цепей переменного тока.

**Самостоятельно** Записать в показательной, тригонометрической, алгебраической формах выражения комплексных действующих значений тока и напряжения, мгновенные значения которых  $u = 100\sqrt{2} \sin(\omega t + 15^\circ)$  В;  $i = 5\sqrt{2} \sin(\omega t - 20^\circ)$  А.

**Самостоятельно** В цепи (рис. 8) напряжение  $U_1$ , на участке  $R_1$ ,  $C_1$  равно 24 В. Дано:  $R_1 = 30$  Ом,  $R_2 = 40$  Ом,  $C_1 = 5$  мкФ,

$C_2 = 1 \text{ мкФ}$ . Угловая частота  $\omega = 5000 \text{ с}^{-1}$ . Чему равно напряжение, приложенное к цепи?

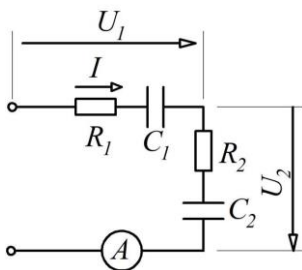


Рис. 8. Схема при последовательном включении

## 5. МОЩНОСТЬ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

В сложной электрической цепи, состоящей из разнородных элементов  $R$ ,  $L$ ,  $C$ , одновременно происходят следующие физические процессы:

а) необратимый процесс преобразования электрической энергии в другие виды (тепловую, механическую и др.), который называется активным;

б) обратимый процесс колебания энергии между переменным электрическим полем конденсаторов  $\left(W_C = \frac{C u^2}{2}\right)$ , магнитным полем катушек  $\left(W_M = \frac{L i^2}{2}\right)$  и источником энергии, который называется реактивным.

Процесс преобразования и процесс колебания энергии взаимно накладываются друг на друга, создавая в цепи единый сложный энергетический процесс.

Пусть электрическая цепь носит активно-индуктивный характер и может быть представлена простой схемой, состоящей из источника ЭДС  $e$  и пассивных элементов  $R$  и  $L$ , включенных последовательно (рис. 9):

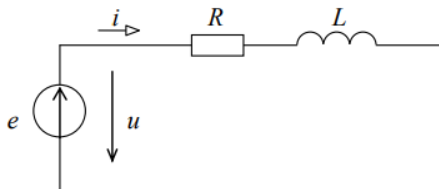


Рис. 9. Схема активно-индуктивной электрической цепи

Напряжение и ток на входе схемы как функции времени и их комплексные изображения будут равны:

$$u = U_m \cdot \sin \omega t \Leftrightarrow \underline{U} = U e^{j0},$$

$$i = I_m \cdot \sin(\omega t - \varphi) \Leftrightarrow \underline{I} = I e^{-j\varphi}.$$

Мгновенная мощность, как функция времени, состоит из двух слагаемых:

$$\begin{aligned} p(t) &= u \cdot i = U_m \cdot \sin \omega t \cdot I_m \cdot \sin(\omega t - \varphi) = \\ &= \frac{U_m \cdot I_m}{2} \cos \varphi + \frac{U_m \cdot I_m}{2} \cos(2\omega t - \varphi) = p_1(t) + p_2(t). \end{aligned}$$

Первое слагаемое:

$$p_1(t) = \frac{U_m \cdot I_m}{2} \cos \varphi > 0,$$

характеризует процесс преобразования электрической энергии в другие виды (активный процесс).

Второе слагаемое:

$$p_2(t) = \frac{U_m \cdot I_m}{2} \cos(2\omega t - \varphi),$$

изменяется по периодическому закону с частотой  $2\omega$  и характеризует процесс обмена энергией между магнитным полем приемника и источником энергии (реактивный процесс).

Количество энергии, которое преобразуется в приемнике в другие виды в единицу времени, называется активной мощностью  $P$ . Математически активная мощность может быть получена как среднее значение мгновенной мощности за период:

$$\begin{aligned} P = P_{cp} &= \frac{1}{T} \int_0^T p(t) \cdot dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{U_m \cdot I_m}{2} \cos \varphi \cdot dt - \\ &- \frac{1}{T} \int_0^T \frac{U_m \cdot I_m}{2} \cos(2\omega t - \varphi) \cdot dt = \frac{U_m \cdot I_m}{2} \cos \varphi = U \cdot I \cdot \cos \varphi. \end{aligned}$$

Реактивная мощность  $Q$  характеризует интенсивность обмена энергией между магнитным полем приемника и источником и определяется по формуле:

$$Q = UI \cdot \sin \varphi = I^2 \omega L = \omega \cdot \frac{LI_m^2}{2} = W_{\max} \cdot \omega.$$

Реактивная мощность индуктивного характера ( $\varphi > 0$ ) положительна, а емкостного характера ( $\varphi < 0$ ) отрицательна. Противоположность знаков указывает на тот факт, что колебания энергии в разнородных элементах совершаются в противофазе.

В технике используется понятие полной мощности  $S$ , которая не имеет физического смысла и определяется по формуле:

$$S = UI = \sqrt{P^2 + Q^2}.$$

Мощности  $S$ ,  $P$ ,  $Q$  образуют прямоугольный треугольник, который называется треугольником мощностей (рис. 10).

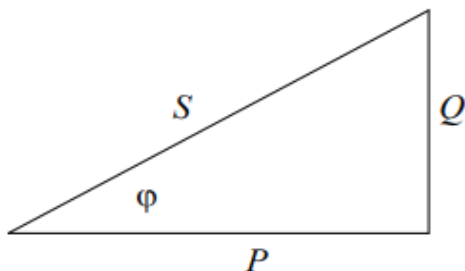


Рис. 10. Треугольник мощностей

Хотя физическая размерность мощностей  $S$ ,  $P$ ,  $Q$  одинакова, а именно  $[ВА]$ , для каждой из них на практике применяется своя единица измерения: для активной мощности  $P$  – ватт  $[Вт]$ , для реактивной мощности  $Q$  – вольтампер реактивный  $[вар]$ , для полной мощности  $S$  – вольтампер  $[ВА]$ .

В соответствии с законом сохранения энергии в цепи переменного тока должны балансироваться независимо друг от друга активные и реактивные мощности приемников и источников энергии:

$$\sum P_{ист} = \sum P_{пр} \text{ и } \sum Q_{ист} = \sum Q_{пр} .$$

Баланс для полных мощностей не соблюдается.

При расчете цепей переменного тока комплексным методом мощности  $S$ ,  $P$ ,  $Q$  представляют в комплексной форме:

$$\underline{S} = P + jQ = I^2 R + jI^2 X = I^2 (R + jX) = \underline{I}^* \underline{I} \cdot Z = \underline{U} \cdot \underline{I}^* ,$$

где  $\underline{I}^*$  – сопряженный комплекс тока  $\underline{I}$ .

Таким образом:

$$S = \text{Mod}[\underline{S}] = \text{Mod}[\underline{U} \cdot \underline{I}^*] - \text{модуль комплексной мощности};$$

$$P = \text{Re}[\underline{S}] = \text{Re}[\underline{U} \cdot \underline{I}^*] - \text{вещественная часть};$$

$$Q = I_m[\underline{S}] = I_m[\underline{U} \cdot \underline{I}^*] - \text{мнимая часть}.$$

## 6. ПЕРЕМЕННЫЕ ТОК В ОДНОРОДНЫХ ИДЕАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТАХ

Существует три типа идеальных схемных элементов: резистор  $R$ , катушка  $L$  и конденсатор  $C$ . Рассмотрим процессы в цепи с каждым из названных элементов в отдельности.

### *Цепь с идеальным резистором $R$ .*

Пусть к цепи с резистором  $R$  (рис. 11, а) приложено переменное напряжение:

$$u(t) = U_m \sin \omega t \Leftrightarrow \underline{U} = Ue^{j0}.$$

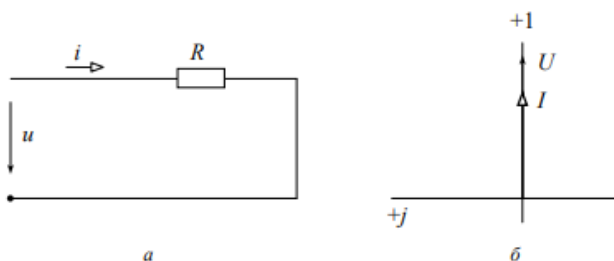


Рис. 11. Цепь с идеальным резистором и ее векторная диаграмма

Ток и напряжение на зажимах резистора связаны между собой физическим законом Ома, т. е.

$$i(t) = \frac{u}{R} = \frac{U_m}{R} \sin \omega t = I_m \cdot \sin \omega t \Leftrightarrow \underline{I} = Ie^{j0},$$

где  $I_m = \frac{U_m}{R}$ ,  $I = \frac{U}{R}$  – уравнения закона Ома для амплитудных и действующих значений функций.

Угол сдвига фаз между напряжением и током  $\varphi = \psi_u - \psi_i = 0 - 0 = 0$ , следовательно, в цепи с резистором  $R$  ток и напряжение совпадают по фазе.

Комплексное сопротивление резистора является чисто вещественным:

$$\underline{Z} = \frac{U}{I} = \frac{U \cdot e^{j0}}{I \cdot e^{j0}} = R \cdot e^{j0} = R + j0.$$

Мгновенная мощность в цепи с резистором  $R$  всегда положительна:

$$p(t) = u \cdot i = U_m \cdot \sin \omega t \cdot I_m \cdot \sin \omega t = U_m \cdot I_m \cdot \sin^2 \omega t \geq 0.$$

Это означает, что в цепи с резистором  $R$  протекает только процесс преобразования электрической энергии в другие виды (активный процесс). По этой причине сопротивление резистора  $R$  на переменном токе называется активным.

Графические диаграммы функций времени  $u(t)$ ,  $i(t)$ ,  $p(t)$  представлены на рис. 12, а векторная диаграмма напряжения и тока – на рис. 11, б.

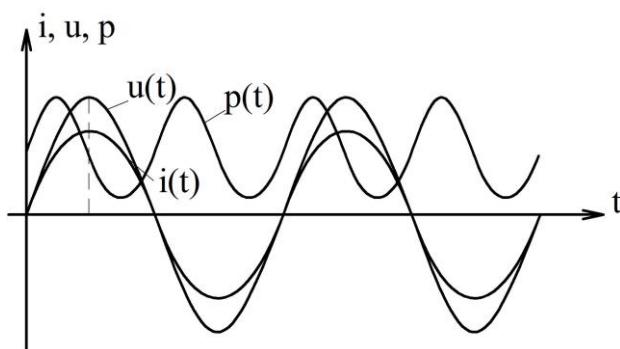


Рис. 12. Графические диаграммы мгновенных значений тока, напряжения и мощности в цепи с идеальным резистором

### Цепь с идеальной катушкой $L$

Пусть к цепи с идеальной катушкой  $L$  (рис. 13, а) приложено переменное напряжение:

$$u(t) = U_m \cdot \sin \omega t \Leftrightarrow \underline{U} = U e^{j0}.$$

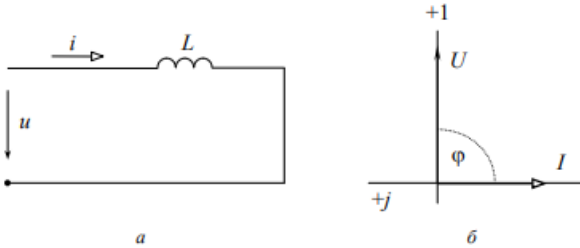


Рис. 13. Схема с идеальной катушкой индуктивности и ее векторная диаграмма

Ток и напряжение на зажимах катушки связаны между собой физическим законом электромагнитной индукции  $u = -e = L \frac{di}{dt}$ , откуда следует:

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{1}{L} \int u \cdot dt = \frac{U_m}{L} \int \sin \omega t \cdot dt = \frac{U_m}{\omega L} (-\cos \omega t) = \\ &= I_m \cdot \sin(\omega t - 90^\circ) \Leftrightarrow \underline{I} = I e^{-j90^\circ}, \end{aligned}$$

где  $\omega L = X_L$  – индуктивное реактивное сопротивление катушки.

Уравнения закона Ома для амплитудных и действующих значений функций:

$$I_m = \frac{U_m}{X_L}, I = \frac{U}{X_L}.$$

Угол сдвига фаз  $\varphi = \psi_u - \psi_i = 0 - (-90^\circ) = 90^\circ$ , т.е. в цепи с катушкой  $L$  ток отстает от напряжения (напряжение опережает ток) на угол  $90^\circ$ .

Комплексное сопротивление катушки является чисто мнимым и положительным:

$$\underline{Z}_L = \frac{U}{I} = \frac{Ue^{j0}}{Ie^{-j90}} = X_L e^{j90} = 0 = jX_L.$$

Мгновенная мощность цепи изменяется по синусоидальному закону с частотой  $2\omega$ :

$$p(t) = U_m \cdot \sin \omega t \cdot I_m \cdot \sin(\omega t - 90^\circ) \omega t = \frac{U_m \cdot I_m}{2} \cos 90^\circ - \frac{U_m \cdot I_m}{2} \cos(2\omega t - 90^\circ) = -\frac{U_m \cdot I_m}{2} \sin 2\omega t.$$

Это означает, что в цепи с катушкой  $L$  происходит только периодический процесс обмена энергией между магнитным полем катушки ( $W_m = \frac{Li^2}{2}$ ) и источником (реактивный процесс). По этой причине сопротивление катушки переменному току  $X_L = \omega L$  называется реактивным.

Графические диаграммы функции времени  $u(t)$ ,  $i(t)$ ,  $p(t)$  представлены на рис.14, а векторная диаграмма напряжения и тока на рис. 13,б.

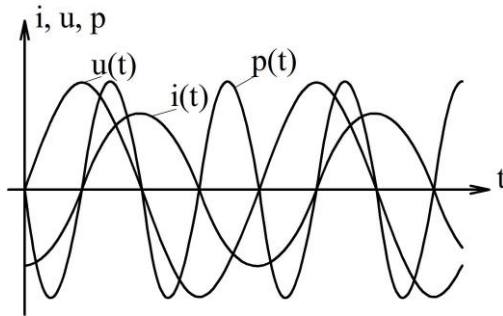


Рис. 14. Графические диаграммы мгновенных значений тока, напряжения и мощности в цепи с идеальной индуктивной катушкой

### Цепь с идеальным конденсатором $C$ .

Пусть к цепи с идеальным конденсатором  $C$  (рис. 15а) приложено переменное напряжение

$$u(t) = U_m \cdot \sin \omega t \Leftrightarrow U = U e^{j0}.$$

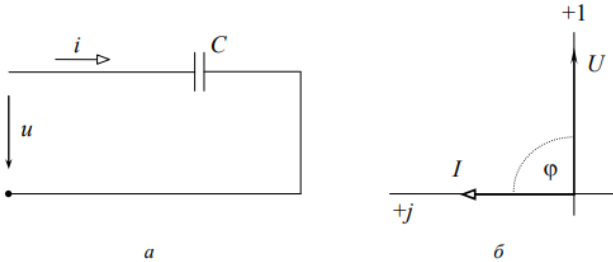


Рис. 15. Схема и векторная диаграмма цепи с идеальным конденсатором

Ток и напряжение на зажимах конденсатора связаны между собой физическим законом сохранения заряда:

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{dq}{dt} = C \frac{du}{dt} = U_m C \frac{d(\sin \omega t)}{dt} = \frac{U_m}{1/\omega C} \cos \omega t = \\ &= I_m \cdot \sin(\omega t + 90^\circ) \Leftrightarrow \underline{I} = I \cdot e^{j90^\circ}, \end{aligned}$$

где  $\frac{1}{\omega C} = X_C$  – емкостное реактивное сопротивление [Ом].

Уравнения закона Ома для амплитудных и действующих значений функций:

$$I_m = \frac{U_m}{X_C}, I = \frac{U}{X_C}.$$

Угол сдвига фаз  $\varphi = \psi_u - \psi_i = 0 - 90^\circ = -90^\circ$ , т.е. в цепи с конденсатором  $C$  ток опережает напряжение (напряжение отстает от тока) на угол  $90^\circ$ .

Комплексное сопротивление конденсатора является чисто мнимым и отрицательным:

$$\underline{Z}_C = \frac{U}{I} = \frac{Ue^{j0}}{Ie^{j90}} = X_C^{-j90} = 0 - jX_C.$$

Мгновенная мощность цепи изменяется по синусоидальному закону с частотой  $2\omega$ :

$$\begin{aligned} p(t) &= U_m \cdot \sin \omega t \cdot I_m \cdot \sin(\omega t + 90^\circ) \omega t = \\ &= \frac{U_m \cdot I_m}{2} \cos(-90^\circ) - \frac{U_m \cdot I_m}{2} \cos(2\omega t + 90^\circ) = -\frac{U_m \cdot I_m}{2} \sin 2\omega t. \end{aligned}$$

Это означает, что в цепи с конденсатором  $C$  происходит только периодический процесс обмена энергией между электрическим полем конденсатора ( $W_\varepsilon = \frac{Cu^2}{2}$ ) и источником (реактивный процесс).

По этой причине сопротивление конденсатора переменному току  $X_C = \frac{1}{\omega C}$  называется реактивным.

Графические диаграммы функций времени  $u(t)$ ,  $i(t)$ ,  $p(t)$  представлены на рис. 16, а векторная диаграмма напряжения и тока – на рис. 15, б.

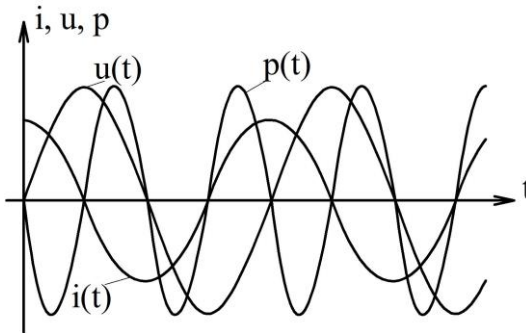


Рис. 16. Графические диаграммы мгновенных значений тока, напряжения и мощности в цепи с идеальным конденсатором

## 7. ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ЦЕПЬ С ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫМ СОЕДИНЕНИЕМ ЭЛЕМЕНТОВ R, L И C

Пусть в заданной схеме с последовательным соединением элементов R, L и C (рис. 16) протекает переменный ток

$$i(t) = I_m \cdot \sin \omega t \Leftrightarrow \underline{I} = I e^{j0}.$$

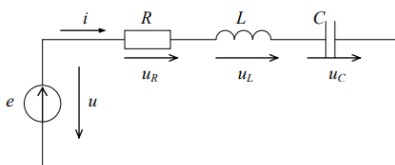


Рис. 17. Схема с последовательным соединением элементов R, L и C

По 2-му закону Кирхгофа для мгновенных значений функций получим уравнение в дифференциальной форме:

$$u = u_R + u_L + u_C = iR + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt .$$

То же уравнение в комплексной форме получит вид:

$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L + \underline{U}_C = \underline{I}R + \underline{I}jX_L + \underline{I}(-jX_C) = \underline{I}(R + jX_L - jX_C) = \underline{I}\underline{Z},$$

где  $\underline{Z} = R + j(X_L - X_C) = R + jX = Ze^{j\varphi}$  – комплексное сопротивление,

$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$  – модуль комплексного или полное сопротивление,

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{X_L - X_C}{R} \text{ – аргумент комплексного сопротивления}$$

или угол сдвига фаз между напряжением и током на входе схемы.

При  $(X_L - X_C) > 0$  фазный угол  $\varphi > 0$ , при этом цепь в целом носит активно индуктивный характер, а при  $(X_L - X_C) < 0$  и  $\varphi < 0$  – цепь в целом носит активно-емкостный характер.

Уравнение закона Ома для последовательной схемы будет иметь вид:

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{\underline{U}}{R + j(X_L - X_C)} \text{ – в комплексной форме,}$$

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} \text{ – в обычной форме для модулей.}$$

Векторная диаграмма тока и напряжений при  $\varphi > 0$  показана на рис. 18.

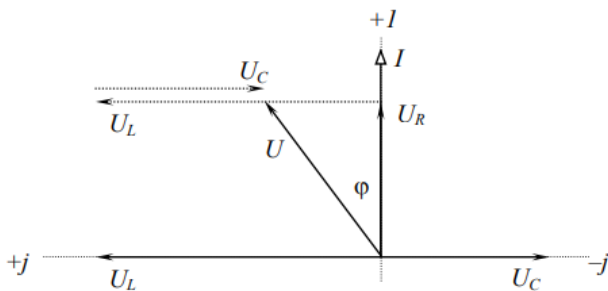


Рис. 18. Векторная диаграмма тока и напряжений в цепи с последовательным соединением элементов R, L и C

В рассматриваемой цепи на переменном токе будут происходить одновременно два физических процесса: преобразование энергии в другие виды в резисторе R (активный процесс) и взаимный обмен энергией между магнитным полем катушки, электрическим полем конденсатора и источником энергии (реактивный процесс).

## 8. ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ЦЕПЬ С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМ СОЕДИНЕНИЕМ ЭЛЕМЕНТОВ R, L И C

Пусть на входе схемы рис. 19 действует переменное напряжение:

$$u(t) = U_m \cdot \sin \omega t \Leftrightarrow \underline{U} = U^{j0}.$$

По 1-му закону Кирхгофа для мгновенных значений функций получаем уравнение в дифференциальной форме:

$$i = i_R + i_L + i_C = \frac{U}{R} + \frac{1}{L} \int idt + C \frac{du}{dt}.$$

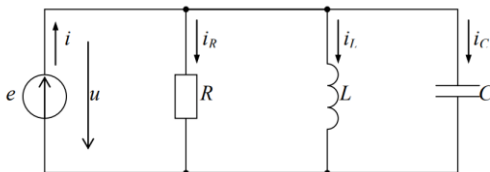


Рис. 19. Электрическая цепь с параллельным соединением элементов R, L и C

То же уравнение в комплексной форме получит вид:

$$\underline{I} = \underline{I}_R + \underline{I}_L + \underline{I}_C = \frac{\underline{U}}{R} + \frac{\underline{U}}{jX_L} + \frac{\underline{U}}{-jX_C} = \underline{U}(G - jB_L + jB_C) = \underline{U} \cdot \underline{Y},$$

где  $\underline{Y} = G - j(B_L - B_C) = G - jB = Ye^{-j\varphi}$  — комплексная проводимость,  $G = \frac{1}{R}$  — активная проводимость,  $B_L = \frac{1}{X_L}$  — реактивная

индуктивная проводимость,  $B_C = \frac{1}{X_C}$  — реактивная емкостная проводимость

проводимость,  $B = B_L - B_C$  – реактивная (эквивалентная) проводимость,  $Y = \sqrt{G^2 + (B_L - B_C)^2}$  – модуль комплексной проводимости или полная проводимость,  $\varphi = \arctg \frac{B_L - B_C}{G}$  – аргумент комплексной проводимости или угол сдвига фаз между напряжением и током на входе схемы.

При  $(B_L - B_C) > 0$  и  $\varphi > 0$  – цепь в целом носит активно-индуктивный характер, а при  $(B_L - B_C) < 0$  и  $\varphi < 0$  – цепь в целом носит активно-емкостный характер.

Уравнение закона Ома для параллельной схемы будет иметь вид:

$$\underline{I} = \underline{U} \cdot \underline{Y} = \underline{U} \cdot [G - j(B_L - B_C)] \text{ – в комплексной форме;}$$

$$I = U \cdot Y = U \cdot \sqrt{G^2 + (B_L - B_C)^2} \text{ – в обычной форме для модулей.}$$

Векторная диаграмма токов и напряжения при  $\varphi > 0$  показана на рис. 20.

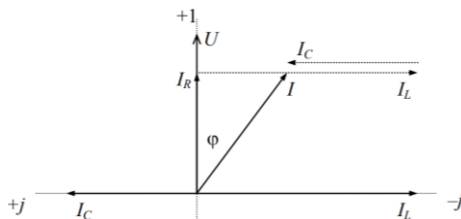


Рис. 20. Векторная диаграмма токов и напряжения в цепи с параллельным соединением элементов R, L и C при  $\varphi > 0$

На переменном токе в рассматриваемой цепи будут происходить одновременно два физических процесса: преобразование электрической энергии в другие виды (активный процесс) и взаимный обмен энергией между магнитным полем катушки, электрическим полем конденсатора и источником энергии (реактивный процесс).

## 9. АКТИВНЫЕ И РЕАКТИВНЫЕ СОСТАВЛЯЮЩИЕ ТОКОВ И НАПРЯЖЕНИЙ

При расчете электрических цепей переменного тока реальные элементы цепи (приемники, источники) заменяются эквивалентными схемами замещения, состоящими из комбинации идеальных схемных элементов R, L и C. Пусть некоторый приемник энергии носит в целом активноиндуктивный характер (например, электродвигатель). Такой приемник может быть представлен двумя простейшими схемами замещения, состоящими из 2-х схемных элементов R и L: а) последовательной (рис. 21, а) и б) параллельной (рис. 21, б):

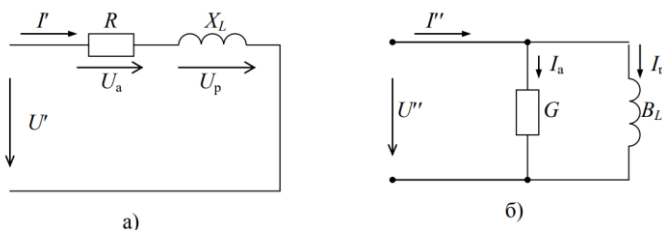


Рис. 21. Схемы замещения активноиндуктивного приемника

Обе схемы будут эквивалентны друг другу при условии равенства параметров режима на входе:

$$\underline{U} = \underline{U}' = \underline{U}'' ,$$

$$\underline{I} = \underline{I}' = \underline{I}'' .$$

Для последовательной схемы (рис. 21 а) справедливы соотношения:

$$\underline{I}' = \frac{\underline{U}'}{R + jX_L} = \frac{\underline{U}'(R - jX_L)}{R^2 + X_L^2} = \underline{U}' \cdot \left( \frac{R}{R^2 + X_L^2} - j \frac{X_L}{R^2 + X_L^2} \right) = \underline{U}' \cdot \underline{Y},$$

$$\underline{U}' = \underline{I}' \cdot \underline{Z} = \underline{I}' \cdot (R + jX_L).$$

Для параллельной схемы (рис. 21 б) справедливы соотношения:

$$\underline{I}'' = \underline{U}'' \cdot \underline{Y} = \underline{U}'' \cdot (G - jB_L),$$

$$\underline{U}'' = \frac{\underline{I}''}{G - jB_L} = \frac{\underline{U}''(G + jB_L)}{G^2 + B_L^2} = \underline{I}'' \cdot \left( \frac{G}{G^2 + B_L^2} + j \frac{B_L}{G^2 + B_L^2} \right) = \underline{I}'' \cdot \underline{Z}.$$

Сравнивая правые части уравнений для U и I, получим соотношения между параметрами эквивалентных схем:

$$G = \frac{R}{R^2 + X^2} = \frac{R}{Z^2}, \quad B = \frac{X}{R^2 + X^2} = \frac{X}{Z^2},$$

$$R = \frac{G}{G^2 + B^2} = \frac{G}{Y^2}, \quad X = \frac{B}{G^2 + B^2} = \frac{B}{Y^2}.$$

Из анализа полученных уравнений следует сделать вывод, что в общем случае  $R \neq \frac{1}{G}$  и  $X \neq \frac{1}{B}$  и соответственно  $R \neq \frac{1}{G}$  и  $X \neq \frac{1}{B}$ , как это имеет место для цепей постоянного тока. Математически любой вектор можно представить состоящим из суммы нескольких векторов или составляющих. Последовательной схеме замещения соответствует представление вектора напряжения в виде суммы двух составляющих: активной составляющей  $U_a$  совпадающей с вектором тока I, и реактивной составляющей  $U_p$ , перпендикулярной к вектору тока (рис. 22, а):

Из геометрии рис. 22 а следуют соотношения:

$$U_a = U \cdot \cos \varphi = IR, \quad \text{с, } U = \sqrt{U_a^2 + U_p^2} = IZ.$$

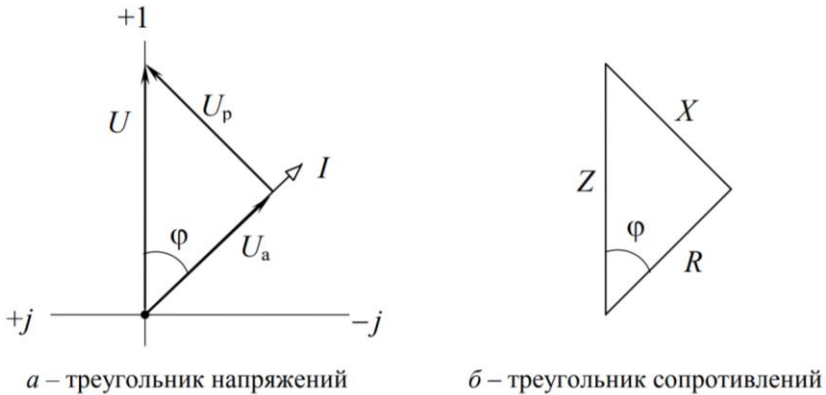


Рис. 22. Треугольник напряжений  
и треугольник сопротивлений

Треугольник, составленный из векторов  $\bar{U}, \bar{U}_a, \bar{U}_p$ , получил название треугольника напряжений (рис. 22, а).

Если стороны треугольника напряжений разделить на ток  $I$ , то получится новый треугольник, подобный исходному, но сторонами которого являются полное сопротивление  $Z$ , активное сопротивление  $R$  и реактивное сопротивление  $X$ . Треугольник со сторонами  $Z, R, X$  называется треугольником сопротивлений (рис. 22, б). Из треугольника сопротивлений следуют соотношения:

$$R = Z \cdot \cos \varphi, \quad X = Z \cdot \sin \varphi, \quad Z = \sqrt{R^2 + X^2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{X}{R}.$$

Параллельной схеме замещения соответствует представление вектора тока в виде суммы двух составляющих: активной составляющей  $I_a$ , совпадающей с вектором напряжения  $U$ , и реактивной составляющей  $I_p$ , перпендикулярной к вектору  $U$  (рис. 23, а). Из геометрии рисунка следуют соотношения:

$$I_a = I \cdot \cos \varphi = UG, \quad I_p = I \cdot \sin \varphi = UB, \quad I = \sqrt{I_a^2 + I_p^2} = UY.$$

Треугольник, составленный из векторов  $\bar{I}$ ,  $\bar{I}_a$ ,  $\bar{I}_p$  получил название треугольника токов (рис. 23, а).

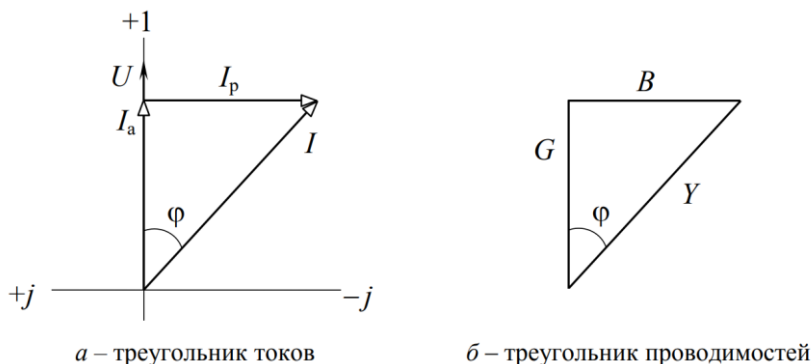


Рис. 23. Треугольник токов и треугольник проводимостей

Если стороны треугольника токов разделить на напряжение  $U$ , то получится новый треугольник, подобный исходному, но сторонами которого являются проводимости: полная –  $Y$ , активная –  $G$ , реактивная –  $B$  (рис. 23, б).

Треугольник со сторонами  $Y$ ,  $G$ ,  $B$  называется треугольником проводимостей. Из треугольника проводимостей следуют соотношения:

$$G = Y \cos \varphi, B = Y \sin \varphi, Y = \sqrt{G^2 + B^2}, \varphi = \arctg \frac{B}{G}.$$

Разложение напряжений и токов на активные и реактивные составляющие является математическим приемом и применяется на практике для расчета сравнительно несложных цепей переменного тока.

Для расчета электрических цепей переменного тока применимы все расчетные методы, полученные ранее для цепей постоянного тока, а именно:

- а) метод преобразования (свертки) схемы;

- б) метод законов Кирхгофа;
- в) метод контурных токов;
- г) метод узловых потенциалов;
- д) метод двух узлов;
- е) метод эквивалентного генератора.

Отличительной особенностью расчета цепей переменного тока является то, что исходные параметры отдельных элементов схемы задаются в комплексной форме. Целью расчета цепей переменного тока энергетического характера является определение действующих значений напряжений и токов, а также активных и реактивных мощностей отдельных источников и приемников энергии. По этой причине на начальном этапе расчета синусоидальные по форме источники энергии заменяют их комплексными действующими значениями по форме:

$$e(t) = Em \cdot \sin(\omega t + \alpha) \Leftrightarrow \underline{E} = \frac{Em}{\sqrt{2}} e^{j\alpha},$$

все математические операции в процессе решения выполняются также в комплексной форме. Результаты расчета для напряжений и токов представляют в показательной форме  $\underline{U} = Ue^{j\psi}$ , а для мощностей – в алгебраической форме  $\underline{S} = P + jQ$ . В цепи переменного тока каждой точке электрической схемы соответствует определенное значение комплексного потенциала. Если на комплексной плоскости в выбранном масштабе нанести координаты всех точек схемы, а затем соединить точки на графической диаграмме прямолинейными отрезками точно так, как они соединены между собой на электрической схеме, то получим топографическую диаграмму потенциалов. На топографической диаграмме потенциалов можно графически определить напряжение между двумя произвольно выбранными точками, для этого достаточно соединить выбранные точки отрезком прямой, при этом длина отрезка в выбранном

масштабе равна модулю, а угол с вещественной осью – аргументу комплексного числа.

Расчет цепей переменного тока, как правило, иллюстрируется построением топографической диаграммы потенциалов, совмещенной с векторной диаграммой токов. Ниже приведены примеры решения различных задач.

**Пример 1.1.** В цепи (рис. 24, а) дано:  $U=120$  В,  $Z_1 = R_1 + jX_1 = (10 + j6)$  Ом,  $Z_2 = R_2 + jX_2 = (24 - j7)$  Ом,  $Z_3 = R_3 + jX_3 = (15 + j20)$  Ом. Определить токи  $\dot{I}_1, \dot{I}_2, \dot{I}_3$ , активные и реактивные мощности всей цепи и отдельных ветвей. Построить векторную диаграмму.

**Решение**

Полное сопротивление цепи:

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= \underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = 10 + j6 + \frac{(24 - j7)(15 + j20)}{39 + j13} = \\ &= 24,4 + j10,8 = 26,7e^{j23'55'}, \text{ Ом} \end{aligned}$$

Для определения  $\underline{Z}$  можно также воспользоваться программой, к результатам расчёта прибавить  $\underline{Z}_1$ .

В неразветвленной части цепи проходит ток:

$$\dot{I}_1 = U / Z = 120 / 26,7e^{j23'55'} = 4,5e^{-j23'55'}, \text{ А.}$$

Токи в параллельных ветвях могут быть выражены через ток в неразветвленной части цепи.

$$\begin{aligned} \dot{I}_2 &= \dot{I}_1 \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = 4,5e^{-j23'55'} \frac{15 + j20}{39 + j13} = 2,74e^{j10'45'}, \text{ А;} \\ \dot{I}_3 &= \dot{I}_1 \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = 4,5e^{-j23'55'} \frac{24 - j7}{39 + j13} = 2,74e^{-j58'35'}, \text{ А.} \end{aligned}$$

Токи  $\dot{I}_2$  и  $\dot{I}_3$  можно найти и другим путём:

$$\begin{aligned}\dot{U}_{ab} = \dot{I}_1 \underline{Z}_{ab} = \dot{I}_1 \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} &= 4,5e^{-j23^\circ 55'} \frac{(24 - j7)(15 + j20)}{39 + j13} = \\ &= 68,4e^{-j5^\circ 30'}, B;\end{aligned}$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_{ab}}{\underline{Z}_2} = \frac{68,4e^{-j5^\circ 30'}}{24 - j7} = 2,74e^{j10^\circ 45'}, A;$$

$$\dot{I}_3 = \frac{\dot{U}_{ab}}{\underline{Z}_3} = \frac{68,4e^{-j5^\circ 30'}}{15 + j20} = 2,74e^{-j58^\circ 35'}, A.$$

Найдём мощности (активные) всей цепи и отдельных её ветвей:

$$\begin{aligned}P &= \text{Re}[\dot{U} \dot{I}_1^*] = \text{Re}[120 \cdot 4,5e^{j23^\circ 55'}] = \\ &= 120 \cdot 4,5 \cos 23^\circ 55' = 494, Bm;\end{aligned}$$

$$P_1 = I_1^2 R_1 = 4,5^2 \cdot 10 = 202, Bm; \quad P_2 = I_2^2 R_2 = 180 Bm;$$

$$P_3 = I_3^2 R_3 = 112, Bm.$$

Проверка показывает, что  $P = P_1 + P_2 + P_3$ .

Определим реактивные мощности всей цепи и отдельных её ветвей:

$$Q = \text{Im}[\dot{U} \dot{I}_1^*] = \text{Im}[120 \cdot 4,5e^{j23^\circ 55'}] = 120 \cdot 4,5 \sin 23^\circ 55' = 218, BAp;$$

$$Q_1 = I_1^2 X_1 = 4,5^2 \cdot 6 = 122, BAp; \quad Q_2 = I_2^2 X_2 = -52,5, BAp;$$

$$Q_3 = I_3^2 X_3 = 150, BAp.$$

Учитывая, что реактивные мощности катушек  $Q_1$  и  $Q_3$  положительны, а реактивная мощность конденсатора  $Q_2$  отрицательна, получим  $Q = 122 - 52,2 + 150 \approx 218 BAp$ .

На рис. 38, б приведена векторная диаграмма. Порядок её построения следующий: по результатам расчётов отложены векторы токов  $\dot{I}_1$ ,  $\dot{I}_2$  и  $\dot{I}_3$ , затем по направлению  $\dot{I}_1$  отложен вектор  $\dot{I}_1 R_1$  и перпендикулярно ему в сторону опережения — вектор  $j\dot{I}_1 X_1$ . Их сумма даёт вектор  $\dot{I}_1 \underline{Z}_1$ . Далее в фазе с  $\dot{I}_2$  построен вектор  $I_2 R_2$  и перпендикулярно ему в сторону отставания (так как  $X_2$  отрицательно) вектор  $jX_2 \dot{I}_2$ , а их сумма даёт вектор напряжения на параллельном участке  $U_{ab}$ . Тот же вектор можно получить, если в фазе с  $\dot{I}_3$  отложить  $I_3 R_3$  и к нему прибавить вектор  $j\dot{I}_3 X_3$ , опережающий  $\dot{I}_3$  на  $\pi/2$ . Сумма векторов  $\dot{I}_1 \underline{Z}_1$  и  $U_{ab}$  даёт вектор приложенного напряжения.

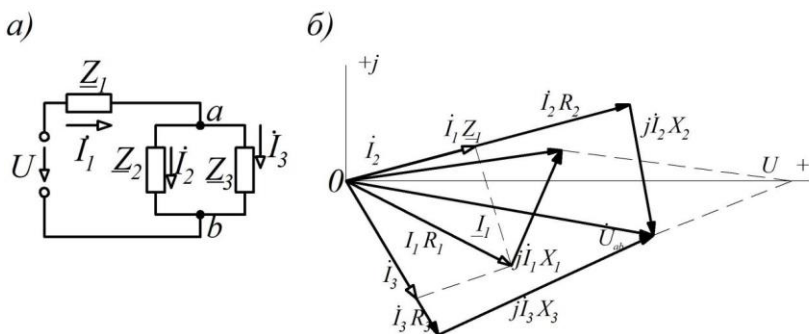


Рис. 24. Схема и векторная диаграмма

**Пример 1.2.** Параметры цепи (рис. 25):  $R_2 = 40$  Ом,  $X_2 = 100$  Ом,  $X_3 = -20$  Ом. Определить значение и характер сопротивления  $\underline{Z}_1$ , если известно, что оно чисто реактивно и через него проходит ток  $I_1 = 12$  А, а напряжение, приложенное к цепи,  $U = 30$  В.

### Решение

Сопротивление разветвлённой части цепи

$$\underline{Z}_{ab} = \frac{(40 + j100)(-j20)}{40 + j80} = (2 - j24) \text{ Ом.}$$

Общее сопротивление цепи  $Z = U / I = 30 / 12 = 2,5$  Ом. Оно может быть выражено и так:  $Z = \sqrt{2^2 + (X_1 - 24)^2} = 2,5$  Ом. Отсюда  $(X_1 - 24)^2 = 2,25$ , или  $X_1 - 24 = \pm 1,5$ .

Возможны два решения задачи; искомое сопротивление имеет индуктивный характер и равно либо  $X'_1 = 25,5$  Ом, либо  $X''_1 = 22,5$  Ом.

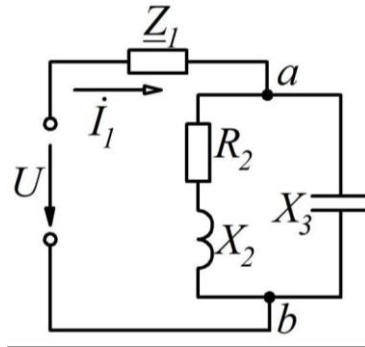


Рис. 25. Схема параллельного колебательного контура

**Пример 1.3.** Вычислить резистивное сопротивление  $R_2$ , которое надо подключить к зажимам 2 – 2' цепи (рис. 26), чтобы отношение напряжения  $U_2$  на этом сопротивлении к напряжению  $U_1$  на входе цепи равнялось  $H$ . Числовой расчет проделать при  $R_1 = 100$  Ом,  $X_c = 50$  Ом,  $H = U_2/U_1 = 0,2$ .

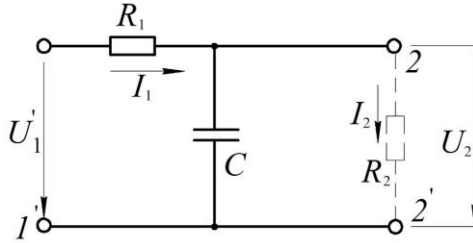


Рис. 26. Схема для определения напряжения

### Решение

Входное сопротивление всей цепи

$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_2 \underline{Z}_3 + \underline{Z}_3 \underline{Z}_1}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3},$$

где  $Z_1 = R_1, Z_2 = R_2, Z_3 = -jX_c$ .

Вычислим напряжение  $\dot{U}_2$ , для чего сначала найдем токи

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_1}{\underline{Z}} = \frac{\dot{U}_1 (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3)}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_2 \underline{Z}_3 + \underline{Z}_3 \underline{Z}_1};$$

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_1 \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = \frac{\dot{U}_1 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_2 \underline{Z}_3 + \underline{Z}_3 \underline{Z}_1};$$

$$\dot{U}_2 = \dot{I}_2 Z_2 = \frac{\dot{U}_1 \underline{Z}_2 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_2 \underline{Z}_3 + \underline{Z}_3 \underline{Z}_1} = \frac{\dot{U}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_3}}.$$

Отсюда определим отношение комплексных напряжений

$$\frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_3}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + j \frac{R_1 R_2}{X_c}}$$

и отношение модулей напряжений

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{R_2}{\sqrt{(R_1 + R_2)^2 + \left(\frac{R_1 R_2}{X_c}\right)^2}} = H.$$

Подставляя числовые значения, после простых преобразований получим квадратное уравнение относительно  $R_2$ :  $R_2^2 - 10R_2 - 500 = 0$ .

Решение этого уравнения дает значение искомого сопротивления  $R_2 = 28$  Ом.

**Пример 1.4.** В схеме цепи (рис. 27) рассчитать токи, если

$\dot{E}_1 = 120$  В,  $\dot{E}_2 = (120 + j10)$  В,  $\dot{E}_3 = (70 + j25)$  В,  $\underline{Z}_1 = (10 + j30)$  Ом,  $\underline{Z}_2 = (15 + j40)$  Ом,  $\underline{Z}_3 = 35$  Ом.

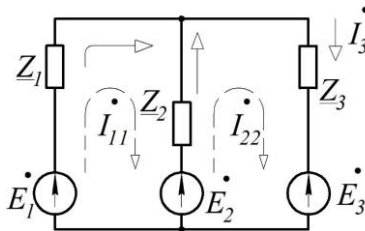


Рис. 27. Схема для примера 1.4

**Решение.** Задачу решаем методом контурных токов, обозначив и выбрав их положительные направления, как указано на рис. 41. Контурные уравнения имеют вид:

$$\begin{cases} \dot{I}_{11}(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) - \dot{I}_{22} \underline{Z}_2 = \dot{E}_1 - \dot{E}_2, \\ -\dot{I}_{11} \underline{Z}_2 + \dot{I}_{22}(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3) = \dot{E}_2 - \dot{E}_3. \end{cases}$$

или, подставляя числовые значения:

$$\begin{cases} (25 + j70) \dot{I}_{11} - \dot{I}_{22}(15 + j40) = 20 - j10, \\ -(15 + j40) \dot{I}_{11} + \dot{I}_{22}(50 + j40) = 30 - 15j. \end{cases}$$

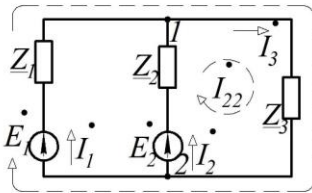
Решая полученную систему, находим неизвестные токи в виде:

$$x = I'_{11} + jI''_{11} = \dot{I}_{11} = (3,46 \cdot 10^{-1} - j7,61 \cdot 10^{-1}), A,$$

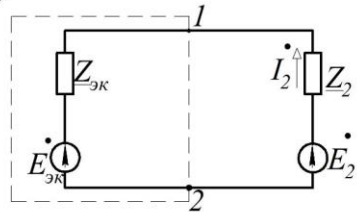
$$y = \dot{I}_{22} = I'_{22} + jI''_{22} = (6,67 \cdot 10^{-1} - j7,94 \cdot 10^{-4}), A.$$

**Пример 1.5.** В цепи (рис. 28,а) дано:  $Z_1 = Z_2 = (50 + j30)$  Ом,  $Z_3 = 100$  Ом,  $\dot{E}_1 = 100$  В,  $\dot{E}_2 = 100e^{-j30^\circ}$  В. Положительные направления ЭДС показаны на схеме стрелками. Определить все токи методами: а) контурных токов; б) узловых напряжений; в) методом эквивалентного источника ЭДС определить ток ветви  $Z_2$ . Проверить баланс активных мощностей.

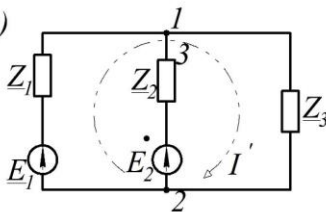
а)



б)



в)



з)

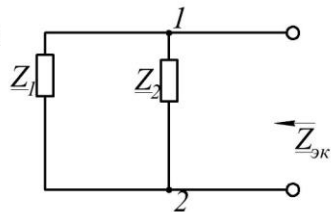


Рис. 28. Схема для примера 1.5

**Решение.**

а) Выберем направления контурных токов согласно рис 42, а.  
Система уравнений по методу контурных токов

$$\begin{cases} \dot{I}_{11}(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3) + \dot{I}_{22} \underline{Z}_3 = \dot{E}_1, \\ \dot{I}_{11} \underline{Z}_3 + \dot{I}_{22}(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3) = \dot{E}_2. \end{cases}$$

Решая эти уравнения получим

$$\dot{I}_{11} = \frac{\dot{E}_1(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3) - \dot{E}_2 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_2 \underline{Z}_3 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_3} = \frac{100(150 + j30) - 100e^{-j30^\circ} \cdot 100}{(50 + j30)^2 + 2(50 + j30) \cdot 100} = 0,693e^{j13^\circ 50'}, A;$$

$$\dot{I}_{22} = \frac{\dot{E}_2(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3) - \dot{E}_1 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_2 \underline{Z}_3 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_3} = 0,452e^{-j85^\circ 20'}, A.$$

Токи в ветвях

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_{11} = 0,693e^{j13^\circ 50'}, A; \quad \dot{I}_2 = \dot{I}_{22} = 0,452e^{-j85^\circ 20'}, A;$$

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_{11} + \dot{I}_{22} = 0,693e^{j13^\circ 50'} + 0,452e^{-j85^\circ 20'} = 0,77e^{-j21^\circ 50'}, A;$$

Уравнение баланса мощностей

$$\operatorname{Re}[\dot{E}_1 \dot{I}_1^*] + \operatorname{Re}[\dot{E}_2 \dot{I}_2^*] = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3,$$

или

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re}[100 \cdot 0,693e^{-j13^\circ 50'}] + \operatorname{Re}[100e^{-j30^\circ} \cdot 0,452e^{j85^\circ 20'}] = \\ & = 69,3 \cos 13^\circ 50' + 45,2 \cos 55^\circ 20' = 0,693^2 \cdot 50 + \\ & + 0,452^2 \cdot 50 + 0,77^2 \cdot 100, \end{aligned}$$

или  $66,4 + 25,8 = 24 + 10,2 + 59$ , т.е. получено тождество  $93,2 = 93,2$ .

б) При решении задачи по методу узловых напряжений сначала определяем напряжение между точками 1 и 2:

$$\begin{aligned} \dot{U}_{12} &= \frac{\dot{E}_1 \underline{Y}_1 + \dot{E}_2 \underline{Y}_2}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3} = \frac{100 \frac{1}{50 + j30} + 100e^{-j30^\circ} \frac{1}{50 + j30}}{\frac{1}{50 + j30} + \frac{1}{50 + j30} + \frac{1}{j100}} = \\ &= (71,5 - j28,6), B. \end{aligned}$$

Токи в ветвях находим по закону Ома:

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= (\dot{E}_1 - \dot{U}_{12}) \underline{Y}_1 = (100 - 71,5 + j28,6) \times \\ &\times (0,0147 - j0,00884) = 0,693e^{j13^\circ 50'}, A; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{I}_2 &= (\dot{E}_2 - \dot{U}_{12}) \underline{Y}_2 = (86,6 - j50 - 71,5 + j28,6) \times \\ &\times (0,0147 - j0,00884) = 0,45e^{-j85^\circ 20'}, A; \end{aligned}$$

$$\dot{I}_3 = \dot{U}_{12} \underline{Y}_3 = 77e^{-j21^\circ 50'} \cdot 0,01 = 0,77e^{-j21^\circ 50'}, A.$$

в) Для определения тока по методу эквивалентного источника ЭДС надо найти ЭДС  $\dot{E}_{\text{эк}}$  эквивалентного источника ЭДС и его сопротивление  $\underline{Z}_{\text{эк}}$  (рис. 42, б).

Для определения  $\dot{E}_{\text{эк}}$  отключим ветвь  $\underline{Z}_2$  (рис. 28, в) и вычислим напряжение холостого хода (между точками 3 и 1):

$$\dot{I}' = \frac{\dot{E}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3}; \dot{U}_{12} = \dot{I}' \underline{Z}_3 = \dot{E}_{\text{эк}} = \frac{\dot{E}_1 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3} = 64,2 + j12,8, A.$$

Эквивалентное сопротивление источника ЭДС (рис. 28, г)

$$\underline{Z}_{\text{эк}} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3} = \frac{(50 + j30)100}{150 + j30} = (35,9 + j12,8), \text{ Ом.}$$

Искомый ток (см. рис. 28, б)

$$\dot{i}_2 = \frac{\dot{E}_2 - \dot{E}_{\text{ЭК}}}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_{\text{ЭК}}} = \frac{43,5e^{-j59^\circ}}{85,9 + j42,8} = \frac{43,5e^{-j59^\circ}}{96e^{j26,30^\circ}} = 0,453e^{-j85,30^\circ}, \text{ А.}$$

**Пример 1.6.** Методом эквивалентного источника ЭДС найти ток на закороченном участке 3-4 (см. рис. 29). Воспользоваться данными задачи 1.5.

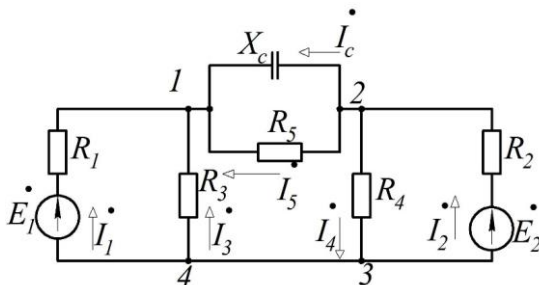


Рис. 29. Схема для примера 1.6

**Решение.** Для определения тока надо определять ЭДС  $\dot{E}_{\text{ЭК}}$  эквивалентного источника между разомкнутыми точками 3 и 4 (рис. 30, а) и сопротивление  $\underline{Z}_{\text{ЭК}}$  между теми же точками при закороченных  $\dot{E}_1$  и  $\dot{E}_2$  (рис. 44, б). Определяем  $\dot{E}_{\text{ЭК}}$ .

$$I' = \frac{E_1}{(R_1 + R_3)} = 0,2 \text{ А}; \quad I'' = \frac{E_2}{(R_2 + R_4)} = 0,1, \text{ А};$$

$$V_1 - V_4 = I'R_3 = 5, \text{ В}; \quad V_2 - V_3 = I''R_4 = 10, \text{ В}.$$

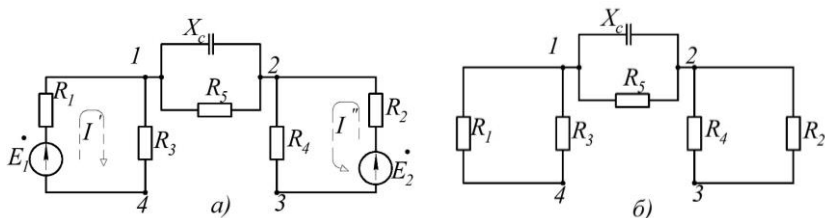


Рис. 30. Схемы для пояснения хода решения примера 1.6

Точки 1 и 2 равнопотенциальны. Вычитая в последних двух равенствах одно из другого, получим  $V_4 - V_3 = E_{\text{эк}} = 5\text{В}$ .

Расчет  $Z_{\text{эк}}$  по рис. 44, б

$$Z_{\text{эк}} = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} + \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4} + \frac{R_5 (-jX_c)}{R_5 - jX_c} = 160 - j20, \text{ Ом.}$$

Искомый ток

$$\dot{I}_{43} = \frac{\dot{E}_{\text{эк}}}{Z_{34} + Z_{\text{эк}}} = \frac{5}{(0 + 160 - j20)} = 0,031e^{-j7,12^\circ}, \text{ А.}$$

**Пример 1.7.** Для каждой из частей схем рис. 31, а-в, расположенных левее штриховой линии  $ab$ , найти ЭДС  $\dot{E}_{\text{эк}}$  эквивалентного источника ЭДС и его внутренне сопротивление  $Z_{\text{эк}}$  (рис. 31, г).

Определить ток  $\dot{I}_n$  в ветви нагрузки расположенной правее линии  $ab$ . Частота переменного тока  $f$ .

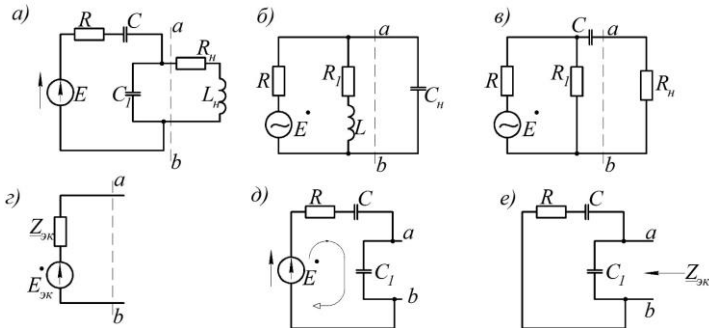


Рис. 31. Схемы для примера 1.7

**Решение.** Приведем расчет для схемы рис. 31, а. Отключим ветвь правее линии  $ab$  (рис. 31, д) и найдем напряжение холостого хода между точками  $a$  и  $b$ , равное  $\dot{E}_{\text{эк}}$  :

$$\dot{U}_{abx} = \dot{E}_{\text{эк}} = -j \frac{1}{\omega C_1} \dot{I}' = -j \frac{\frac{1}{\omega C_1} \dot{E}}{R - j \left( \frac{1}{\omega C} + \frac{1}{\omega C_1} \right)}.$$

Сопротивление эквивалентного источника найдем по схеме рис. 31, е:

$$\underline{Z}_{\text{эк}} = \frac{-j \frac{1}{\omega C_1} \left( R - j \frac{1}{\omega C} \right)}{R - j \left( \frac{1}{\omega C} + \frac{1}{\omega C_1} \right)}.$$

Ток в искомой ветви

$$\dot{I}_H = \frac{\dot{E}_{\text{эк}}}{R_H + j\omega L_H + \underline{Z}_{\text{эк}}}.$$

**Пример 1.8.** Сопротивления цепи (рис. 32, а):  $R = 10$  Ом,  $X_c = 30$  Ом, ЭДС  $E = 100$  В. При каком нагрузочном сопротивлении  $\underline{Z}_H$  в нем выделится максимальная мощность и чему она равна? Вычислить КПД, т.е. отношение мощности, выделяемой в  $\underline{Z}_H$ , к мощности, доставляемой источником  $E$ , и коэффициент передачи  $H$  – отношение напряжения на зажимах  $2-2'$  к  $E$ .

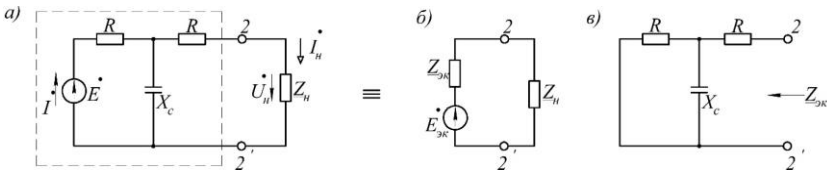


Рис. 32. Схемы для примера 1.8

**Решение.** Часть схемы левее зажимов  $2-2'$  (обведенную штриховой линией) заменим эквивалентным источником. Найдем его

ЭДС  $\dot{E}_{\text{эк}}$  и сопротивление  $\underline{Z}_{\text{эк}}$  (рис. 32, б). Отключив  $\underline{Z}_H$ , определим напряжение холостого хода между точками 2 – 2', которое равняется ЭДС  $\dot{E}_{\text{эк}}$ :

$$\dot{E}_{\text{эк}} = \frac{E}{R - jX_c} (-jX_c R) = -j30 \frac{100}{10 - j30} = 90 - j30 = 95e^{-j18^\circ 25'}, \text{ В.}$$

Сопротивление эквивалентного источника (рис. 32, в)

$$\underline{Z}_{\text{эк}} = R + \frac{-jX_c R}{R - jX_c} = 10 + \frac{-j30 \cdot 10}{10 - j30} = (19 - j3), \text{ Ом.}$$

Максимум мощности выделяется в нагрузке  $\underline{Z}_H$  при условии, что это сопротивление комплексно сопряжено с сопротивлением эквивалентного источника, т.е. при  $\underline{Z}_H = \underline{Z}_{\text{эк}}^* = (19 + j3)$  Ом. Эта мощность:

$$P_{H \text{ max}} = \frac{E_{\text{эк}}^2}{(4R_H)} = \frac{95^2}{(4 \cdot 19)} = 118, \text{ Вт.}$$

Рассчитываем мощность, доставляемую источником (рис. 32, а). Для этого вычислим ток

$$\dot{I} = \frac{E}{R_1 + \frac{-jX_c(R_1 + \underline{Z}_H)}{R_1 + \underline{Z}_H - jX_c}} = \frac{100}{10 - \frac{j30(29 + j3)}{29 - j27}} = 3,3e^{-j28^\circ 37'}, \text{ А;}$$

$$P_u = \text{Re}[E\dot{I}^*] = \text{Re}[100 \cdot 3,3e^{-j28^\circ 37'}] = 100 \cdot 3,3 \cos 28^\circ 37' = 290, \text{ Вт.}$$

$$\text{КПД } \eta = \frac{P_{H \text{ max}}}{P_u} 100\% = \frac{118}{290} 100\% = 40,7\% .$$

Для расчета коэффициента передачи  $H$  найдем ток

$$\dot{I}_H = \dot{I} \frac{-jX_c}{R_1 + \underline{Z}_H - jX_c} = 3,3e^{-j28^\circ 37'} \frac{-j30}{29 - j27} = 2,5e^{-j28^\circ 23'}, \text{ А;}$$

$$\dot{H} = \frac{\dot{U}_n}{E} = \frac{\dot{I}_n Z_n}{E} = \frac{2,5e^{-j18^\circ 23'}(19 + j3)}{100} = 0,48e^{-j9^\circ 25'}$$

**Пример 1.9.** Рассчитать амплитудно и фазочастотную характеристики модуля фазы сопротивления последовательной RC-цепи, если  $R = 10,2$  Ом,  $C = 20$  мкФ. Диапазон изменения частоты от  $f_{\min} = 10$  Гц до  $f_{\max} = 100$  Гц. Шаг изменения частоты  $\Delta f = 10$  Гц.

## 10. ПЕРЕДАЧА ЭНЕРГИИ ОТ АКТИВНОГО ДВУХПОЛЮСНИКА (ИСТОЧНИКА) К ПАССИВНОМУ ДВУХПОЛЮСНИКУ (ПРИЕМНИКУ)

Двухполусником называется устройство или часть схемы (цепи) с двумя выводами (полюсами). Если внутри двухполусника содержатся источники энергии, то он называется активным (А), в противном случае – пассивным (П).

Энергетические характеристики передачи энергии от активного двухполусника (источника) к пассивному двухполуснику (приемнику) на переменном токе зависят от соотношения параметров приемника и источника между собой (рис. 33).

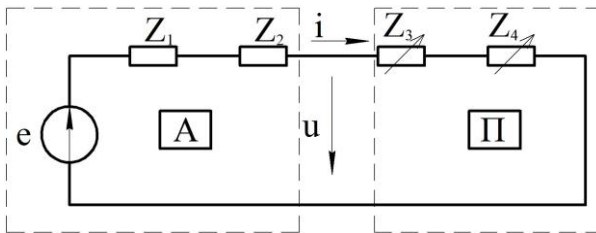


Рис. 33. Схема подключения пассивного двухполусника к активному двухполуснику

По закону Ома ток в схеме равен:

$$I = \frac{E}{Z} = \frac{E}{\sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (X_1 + X_2)^2}}$$

Активная мощность приемника:

$$P_2 = I^2 \cdot R_2 \frac{E^2 \times R_2}{\sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (X_1 + X_2)^2}}$$

Активная мощность источника:

$$P_E = E \cdot I$$

При постоянных параметрах источника энергии активная мощность функцию на максимум при изменении отдельных параметров.

Условие первое:  $X_2 = \text{var}, R_2 = \text{const}$  :

$$\frac{dP_2}{dX_2} = 0, \rightarrow -E^2 R_2 (2X_1 + 2X_2) = 0 \text{ или } X_2 = -X_1.$$

Максимум мощности приемника  $P_{2 \max}$  имеет место при условии равенства реактивных сопротивлений приемника и источника по модулю и противоположности их по знаку, например, если реактивное сопротивление источника носит индуктивный характер, то реактивное сопротивление приемника должно быть емкостным, и наоборот.

Условие второе:  $R_2 = \text{var}, X_2 = \text{const}$  :

$$\frac{dP_2}{dR_2} = 0, \rightarrow E^2 (R_1 + R_2) - E^2 R_2 (2R_1 + 2R_2) = 0 \text{ или } R_2 = R_1.$$

Максимум мощности приемника имеет место при равенстве активных сопротивлений приемника и источника.

Абсолютный максимум мощности приемника наблюдается при выполнении обоих условий и равен:

$$P_2 \max = \frac{E_2 R_2}{(R_1 + R_2)^2} = \frac{E^2}{4R_1}.$$

В режиме максимума потребляемой мощности работают приемники в линиях связи.

Коэффициент полезного действия передачи энергии от источника к приемнику равен отношению активных мощностей:

$$\eta = \frac{R_2}{R_1} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

и не зависит от величины их реактивных сопротивлений. В режиме максимума мощности ( $R_2 = R_1$ ) КПД передачи составляет 0,5. Линии электропередачи (ЛЭП) работают с КПД  $\eta = 0,90 \dots 0,95$ , что соответствует соотношению активных сопротивлений приемника и источника (генератора + ЛЭП)  $R_2 / R_1 = 10 \dots 20$ .

На графической диаграмме рис. 33 показаны энергетические характеристики передачи энергии при  $R_2 = \text{var}$ ,  $X_2 = \text{const} : P_2$ ,  $\eta = f(R_2)$ .

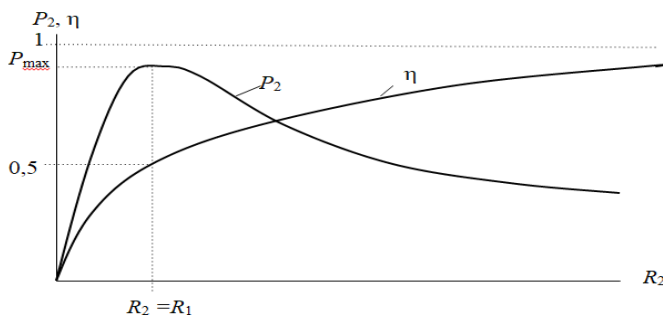


Рис. 33. Энергетические характеристики передачи энергии при  $R_2 = \text{var}$ ,  $X_2 = \text{const} : P_2, \eta = f(R_2)$

## 11. КОМПЕНСАЦИЯ РЕАКТИВНОЙ МОЩНОСТИ ПРИЕМНИКОВ ЭНЕРГИИ

Активная мощность приёмника:

$$P = UI \cos \varphi$$

характеризует интенсивность потребления им энергии и зависит от режима его работы.

Реактивная мощность приемника:

$$Q = UI \sin \varphi$$

характеризует интенсивность обмена энергией между электромагнитным полем приемника и остальной цепью. Эта мощность положительна при индуктивном характере приемника ( $\omega > 0$ ) и отрицательно при емкостном характере ( $\omega < 0$ ). В промышленных условиях преобладающее большинство приемников имеют активно индуктивный характер ( $\omega > 0$ ) и потребляют положительную реактивную мощность  $Q_L > 0$  и, таким образом, являющихся генераторами реактивной мощности для приемников, позволяет уменьшить (компенсировать) суммарную реактивную мощность:  $Q = Q_L - Q_C$ .

Компенсация реактивной мощности позволяет при неизменной активной мощности уменьшить потребляемый от сети ток:

$$I = \frac{\sqrt{P^2 + (Q_L - Q_C)^2}}{U}.$$

Схема цепи в режиме компенсации реактивной мощности показана на рис. 34.

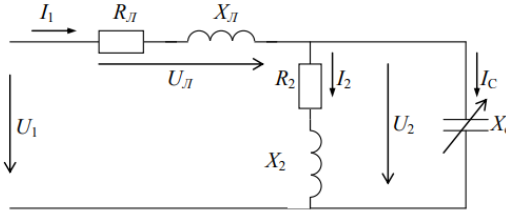


Рис. 34. Схема цепи в режиме компенсации реактивной мощности

При увеличении емкости компенсирующего конденсатора  $C$  пропорционально будет увеличиваться потребляемый им ток  $I_C = U_2 \cdot \omega C$ . Ток линии равный геометрической сумме токов нагрузки и конденсатора:

$$I_C = I_2 + I_C$$

вначале будет уменьшаться при ( $Q_L > Q_C$ ), достигнет своего минимального значения при полной компенсации реактивной мощности:

$$I_{1\min} = I_a = I_2 \cos \varphi_2,$$

а затем начнет возрастать при  $Q_C > Q_L$ .

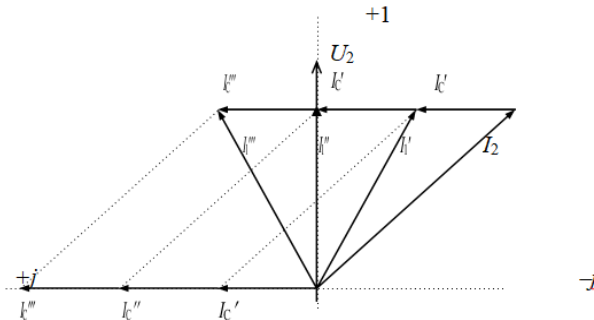


Рис. 35. Векторная диаграмма процессов в цепи в режиме компенсации реактивной мощности

Из геометрии рис. 35 следует соотношение:

$$I'_c = I_a \cdot \operatorname{tg} \varphi_2 - I_a \cdot \operatorname{tg} \varphi'_2 = \frac{P}{U} (\operatorname{tg} \varphi_2 - \operatorname{tg} \varphi'_2).$$

Тоже из закона Ома:

$$I'_c = \frac{U_2}{X_c} = U_2 \omega C'.$$

Из совместного решения этих двух уравнений вытекает формула для расчета емкости компенсирующего устройства от первоначального значения  $\operatorname{tg} \varphi_2$  до заданного  $\operatorname{tg} \varphi'_2$ :

$$C' = \frac{P \cdot 10^6}{\omega U^2} (\operatorname{tg} \varphi_2 - \operatorname{tg} \varphi'_2) \text{ [мкФ]}.$$

Сопротивление воздушных ЛЭП носит активно-индуктивный характер с существенным преобладанием реактивного сопротивления ( $X_{Л} \gg R_{Л}$ ), поэтому падение напряжения в линии  $\underline{U}_{Л} = I(R_{Л} + jX_{Л})$  почти на  $90^\circ$  опережает ток. На рис. 36 показано семейство векторных диаграмм токов и напряжений для разных значений компенсирующей емкости с при постоянном значении напряжения в начале линии  $\underline{U}_1 = \text{const}$ .

Из анализа семейства векторных диаграмм рис. 36 следует, что увеличение степени компенсации реактивной мощности повышает напряжение на выводах нагрузки ( $U_2''' > U_2'' > U_2'$ ), при этом потеря напряжения в линии  $\Delta U = U_1 - U_2$  уменьшается и может быть даже отрицательной. На практике указанная функциональная зависимость  $U_2 = f(C)$  используется для поддержания заданного уровня напряжения на выводах (шинах) нагрузки  $U_2 = \text{const}$  при изменении ее параметров.

Таким образом, посредством компенсации реактивной мощности нагрузки в энергосистеме решаются две важные технико-экономические задачи. Во-первых, это уменьшение потерь мощности в

линии электропередачи ( $P_L = I^2 R_L$ ) и повышение ее КПД вследствие уменьшения тока. Во-вторых, с помощью регулируемых компенсирующих устройств осуществляется управление напряжением в конце линии, поддержание его на заданном номинальном уровне при изменении потребляемой мощности в широком диапазоне.

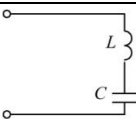
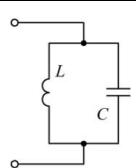
**Самостоятельно**

а) Для параллельной RC-цепи (рис. 37) составить программу расчёта эквивалентного сопротивления  $Z_{эк}$  (АЧХ) и сдвига физ  $\varphi_{эк}$  (ФЧХ)  $R = 12$  Ом,  $C = 5$  мкФ. Угловая частота  $\omega$  изменяется в пределах от  $\omega_{\min} = 2 \cdot 10^3 \text{ c}^{-1}$  до  $\omega_{\max} = 2 \cdot 10^4 \text{ c}^{-1}$ , шаг изменения  $\Delta\omega = 10^3 \text{ c}^{-1}$ . По результатам расчёта построить кривые  $Z_{эк}$  и  $\varphi_{эк}$  как функции  $\omega$ .

б) Составить таблицу отношений двух значений, выраженных в обычных числах, децибелах и неперах для следующих чисел:  $10^{-3}$ ,  $10^{-2}$ ,  $10^{-1}$ , 1, 10,  $10^2$ ,  $10^3$ ,  $10^4$ ,  $10^5$ ,  $10^6$ .

в) В схеме табл. 1 известны сопротивления  $X_1$  и  $X_2$  реактивных двухполюсников при двух частотах  $f_1$  и  $f_2$ .

Таблица 1. Варианты

Схема двухполюсника	Номера вариантов	Значения частоты и соответствующего реактивного сопротивления			
		$f_1$ , кГц	$X_1$ , Ом	$f_2$ , кГц	$X_2$ , Ом
	1	5,3	+90	10,6	+225
	2	2,65	-90	10,6	+90
	3	5,3	0	21,2	+225
	4	2,65	+40	7,92	-72
	5	2,65	$\infty$	10,6	-16
	6	10,6	-40	21,2	-16

Для каждого варианта найти резонансную частоту и значения индуктивности и ёмкости. Указать, какие из двухполюсников эквиваленты, а какие обратны.

2) Вычислить входное сопротивление  $Z$  двухполюсников на рис 37, а, б, если  $R_1 = R_2 = R = \sqrt{L/C} = 500 \text{ Ом}$ .

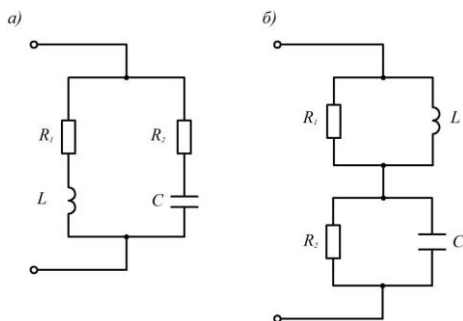


Рис 37. Параллельные колебательные контуры

## 12. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕЗОНАНСА

В электрической цепи, содержащей катушки индуктивности  $L$  и конденсаторы  $C$ , возможны свободные гармонические колебания энергии между магнитным полем катушки  $W_M = \frac{Li^2}{2}$  и электрическим полем конденсатора  $W_C = \frac{Cu^2}{2}$ . Угловая частота этих колебаний  $\omega_0$ , называемых свободными или собственными, определяется структурой цепи и параметрами ее отдельных элементов  $R, L, C$ .

Резонансным режимом цепи или просто резонансом называется явление увеличения амплитуды гармонических колебаний энергии в цепи, наблюдаемое при совпадении частоты собственных колебаний  $m$  с частотой вынужденных колебаний  $\omega$ , сообщаемых цепи источником энергии ( $\omega_0 = \omega$ ).

В резонансном режиме колебания энергии между магнитным и электрическим полями замыкаются внутри цепи, обмен энергией между источником и цепью отсутствует, а вся поступающая от источника энергия преобразуется в другие виды, т.е. электрическая цепь по отношению к источнику энергии ведет себя как чисто активное сопротивление  $R$  (активная проводимость  $G$ ). На этом основании условие для резонансного режима можно сформулировать через параметры элементов схемы, а именно: входное сопротивление и, соответственно, входная проводимость схемы со стороны выводов источника энергии должна носить чисто активный характер:

$$Z_{BX} = R_{BX}; Y_{BX} = G_{BX}; X_{BX} = 0; B_{BX} = 0;$$

$$\text{или в комплексной форме: } I_m [Z_{BX}] = 0, I_m [Y_{BX}] = 0.$$

### 13. РЕЗОНАНС НАПРЯЖЕНИЙ

Резонанс в цепи с последовательным соединением источника энергии и реактивных элементов L и C получил название резонанса напряжений. Простейшая схема такой цепи показана на рис. 38.

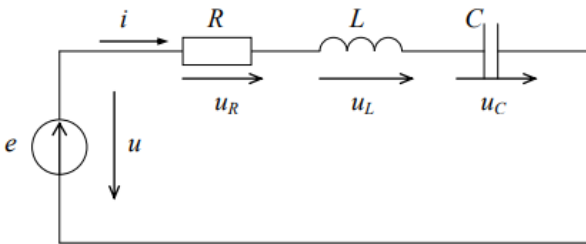


Рис. 38. Цепь с последовательным соединением источника энергии и реактивных элементов L и C

Комплексное входное сопротивление схемы:

$$\underline{Z}_{BX} = R + j(X_L - X_C) = R..$$

Условие резонанса напряжений:  $X = X_L - X_C = 0$  или  $\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$ , откуда  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  – резонансная или собственная частота. Из полученного равенства следует, что резонансного режима в цепи можно достичь изменением параметров элементов L и C или частоты источника  $\omega$ . В резонансном режиме полное сопротивление схемы имеет минимальное значение и равно активному сопротивлению:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = R,$$

а ток максимален и совпадает по фазе с напряжением источника:

$$I = \frac{E}{R}, \quad \varphi = 0.$$

Векторная диаграмма напряжений и тока показана на рис. 39.

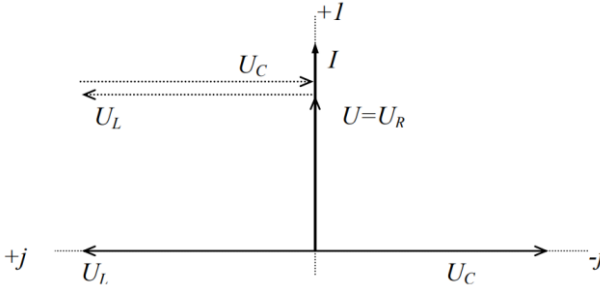


Рис. 39. Векторная диаграмма напряжений и тока в момент резонанса напряжений

Напряжения на реактивных элементах равны по модулю, противоположны по фазе и взаимно компенсируют друг друга:

$$\underline{U}_L = \underline{I}jX_L = j\underline{U} \frac{X_L}{R};$$

$$\underline{U}_C = \underline{I}(-jX_C) = -j\underline{U} \frac{X_C}{R},$$

а напряжение на резисторе равно напряжению источника:

$$\underline{U}_R = \underline{I}R = \underline{U} = \underline{E}.$$

Напряжения на реактивных элементах:

$$U_L = U_C = U \frac{X_L}{R} = U \frac{X_C}{R}$$

могут значительно превосходить напряжение источника  $U=E$  при условии, что  $X_L = X_C \gg R$ . Выясним энергетические процессы,

протекающие в цепи в резонансном режиме. Пусть в цепи протекает ток  $i = I_m \sin \omega t$ , тогда напряжение на конденсаторе составит:

$$u_C = \frac{1}{C} \int i \cdot dt = \frac{I_m}{\omega C} \cos \omega t = \frac{I_m}{\frac{1}{\sqrt{LC}} \cdot C} \cos \omega t = \sqrt{\frac{L}{C}} I_m \cos \omega t.$$

Сумма энергий магнитного и электрического полей равна:

$$W = W_M + W_C = \frac{Li^2}{2} + \frac{Cu^2}{2} = \frac{L \cdot I_m^2}{2} \sin^2 \omega t + \\ + C \frac{L}{C} I_m^2 \cos^2 \omega t = \frac{L \cdot I_m^2}{2} = const.$$

Таким образом, сумма энергий магнитного и электрического полей равна постоянному значению. Это значит, что между магнитным и электрическим полями происходит непрерывный обмен энергией, суммарное значение которой постоянно, а обмен энергией между источником и цепью отсутствует, при этом поступающая от источника энергия преобразуется в другие виды. Электрическая цепь с последовательным соединением элементов  $R$ ,  $L$  и  $C$  в технике получила название последовательного колебательного контура. Свойства такой цепи как колебательного контура характеризуют следующие параметры:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ – резонансная частота,}$$

$$\rho = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}} \text{ – волновое сопротивление,}$$

$$Q = \frac{\rho}{R} \text{ – добротность контура.}$$

Чем больше добротность контура  $Q$ , тем выразительнее проявляются в нем резонансные явления, например, напряжения на реактивных элементах больше напряжения источника в  $Q$  раз:

$$U_L = U_C = UQ.$$

При изменении частоты источника  $\omega = \text{var}$  будут изменяться сопротивления реактивных элементов и, как следствие, будут изменяться ток в цепи и напряжения на отдельных участках.

Частотными характеристиками контура называются зависимости сопротивлений отдельных элементов и участков от частоты

$$X_L = \omega L, \quad X_C = \frac{1}{\omega C}, \quad X = X_L - X_C, \quad Z = \sqrt{R + (X_L + X_C)^2} \quad (\text{рис. 40}).$$

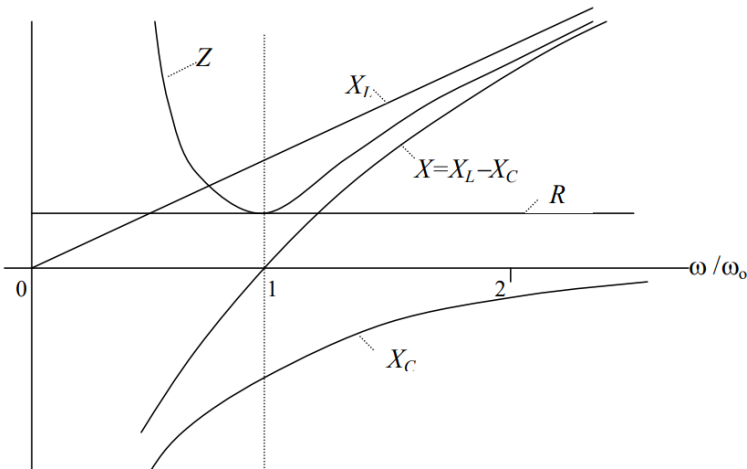


Рис.40. Частотные характеристики контура

Резонансными характеристиками называются зависимости режимных параметров от частоты:  $U_L, U_C, I, \varphi = f(\omega)$  (рис. 41). Полосой пропускания резонансного контура называют область частот  $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$ , на границах которой ток  $I$  в  $\sqrt{2}$  раз меньше своего максимального значения, т.е.  $I = 0,707I_{\max}$ . Полоса пропускания контура обратно пропорциональна его добротности:  $\Delta\omega = \frac{1}{Q}$ . На

рис. 42 в относительных единицах представлено семейство резонансных характеристик с различными значениями добротности.

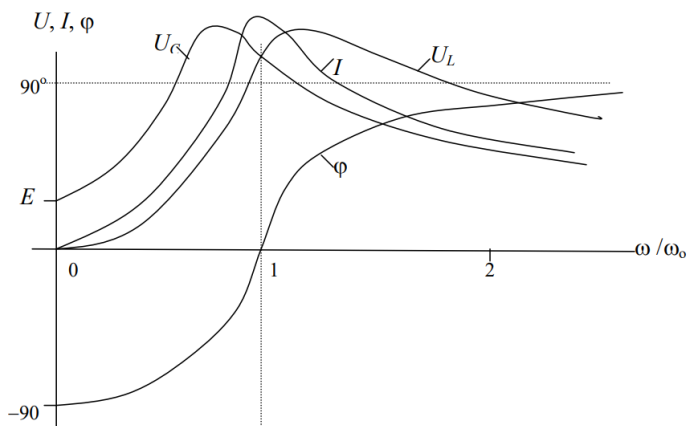


Рис. 41. Резонансные характеристики контура

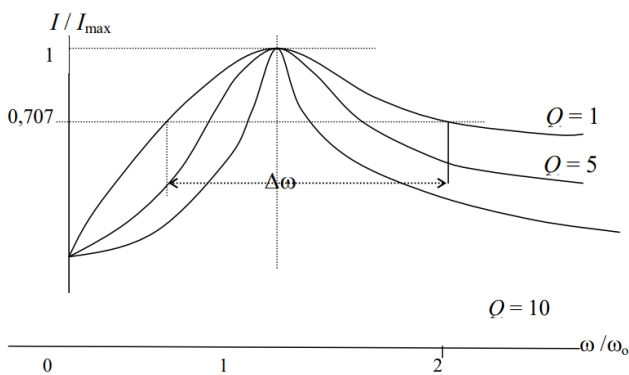


Рис. 42. Семейство резонансных характеристик с различными значениями добротности

Практическое применение резонанс напряжений находит в области радиотехники и техники связи. В электроэнергетике явление резонанса напряжений из-за сопутствующих ему перенапряжений

может привести к нежелательным последствиям. Например, при подключении к генератору или трансформатору кабельной линии, не замкнутой на приемном конце на нагрузку (в режиме холостого хода), вся цепь может оказаться в резонансном режиме, при этом напряжения на отдельных участках цепи могут появиться высокие напряжения.

## 14. РЕЗОНАНС ТОКОВ

Резонанс в цепи с параллельным соединением источника энергии и реактивных элементов  $L$  и  $C$  получил название резонанса токов. Простейшая схема такой цепи показана на рис. 43

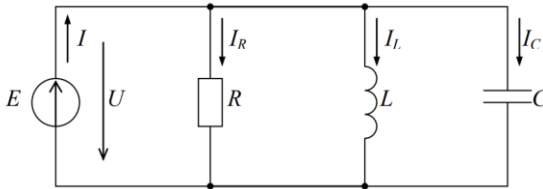


Рис. 43. Цепь с параллельным соединением источника энергии и реактивных элементов  $L$  и  $C$

Комплексная входная проводимость схемы:

$$\underline{Y}_{BX} = G - j(B_L + B_C) = G.$$

Условие резонанса токов:

$$B_3 = B_L - B_C = 0 \text{ или } \frac{1}{\omega L} - \omega C = 0,$$

откуда  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  — резонансная (собственная) частота.

Из полученного равенства следует, что резонансного режима в цепи можно достичь изменением параметров элементов  $L$  и  $C$  или частоты источника  $\omega$ .

В резонансном режиме полная проводимость схемы равна активной проводимости и имеет минимальное значение:

$$Y = \sqrt{G^2 + (B_L - B_C)^2} = G,$$

а ток источника также минимален и совпадает по фазе с напряжением источника ( $\varphi = 0$ ):  $I = UY = UG$ .

Токи в ветвях с реактивными элементами:

$$\underline{I}_L = \underline{U}(-jB_L), \quad \underline{I}_C = \underline{U}(-jB_C)$$

равны по модулю, противоположны по фазе и компенсируют друг друга, а ток в резисторе  $G$  равен току источника ( $I = I_C = UG$ ). Равные по модулю токи в реактивных элементах  $I_L = I_C$  могут значительно превосходить ток источника  $I$  при условии, что  $B_L = B_C \gg G$ .

Векторная диаграмма токов и напряжений показана на рис. 44.

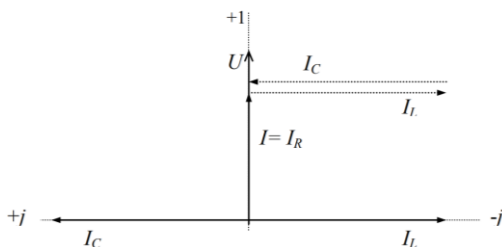


Рис. 44. Векторная диаграмма токов и напряжений в момент резонанса тока

Электрическая цепь с параллельным соединением элементов  $G$ ,  $L$  и  $C$  в технике получила название параллельного колебательного контура. Свойства такой цепи как колебательного контура характеризуют следующие параметры:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ — резонансная частота,}$$

$$\gamma = \frac{1}{\omega_0 L} = \omega_0 C = \sqrt{\frac{C}{L}} \text{ — волновая проводимость,}$$

$$Q = \frac{\gamma}{G} \text{ — добротность контура.}$$

Резонансные характеристики параллельного контура представлены на рис. 45.

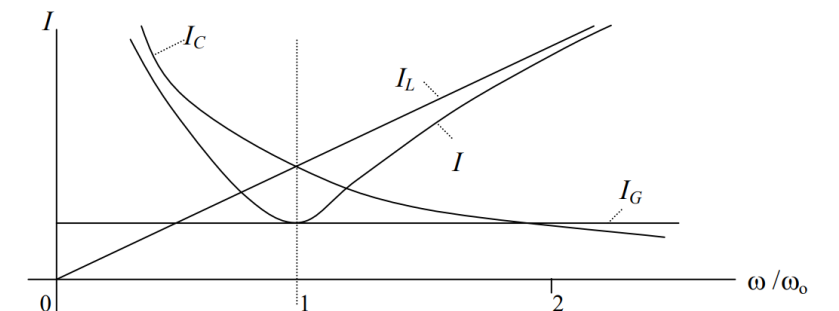


Рис. 45. Резонансные характеристики параллельного контура

Резонанс токов находит широкое применение в области радиотехники и техники связи. В электроэнергетике компенсация реактивной мощности на промышленных предприятиях с помощью параллельного подключения конденсаторных батарей, по сути дела, представляет собой мероприятие, при котором также достигается резонанс токов.

Самостоятельно

1. Определить токи во всех ветвях цепи, показанной на рис. 46, при  $U = 100\text{В}$ ,  $R_1 = 12\ \text{Ом}$ ,  $X_1 = -16\ \text{Ом}$ ,  $R_2 = 7\ \text{Ом}$ ,  $X_2 = -24\ \text{Ом}$ . Построить векторную диаграмму.

а) Определить показание вольтметра при условии, что током, проходящим через вольтметр, можно пренебречь по сравнению с токами ветвей. Чему будет равно показание амперметра, включённого вместо вольтметра между точками  $a$  и  $b$ ?

б) Что покажет вольтметр, если сопротивления  $R_2$  и  $X_2$  поменять местами?

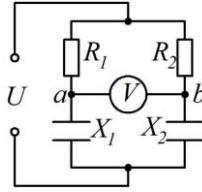


Рис. 46. Схема параллельного соединения

2 К напряжению  $U = 40$  В подключены два последовательно соединённых комплексных сопротивления  $\underline{Z}_1 = (3 + j13)$  Ом и  $\underline{Z}_2 = (10 + j40)$  Ом. Определить, каким чисто ёмкостным сопротивлением следует шунтировать сопротивление  $\underline{Z}_2$ , для того чтобы ток в неразветвленной части цепи (т.е. в сопротивлении  $\underline{Z}_1$ ) совпал по фазе с приложенным напряжением. Вычислить при этом все токи.

**Указание.** Комплекс полного сопротивления цепи должен быть вещественным, т.е. мнимую составляющую комплекса полного сопротивления необходимо приравнять нулю.

3 В цепь (рис. 47) включены два источника тока:  $i_1 = 50\sqrt{2} \sin \omega t$  мА,  $i_2 = 20\sqrt{2} \sin \omega t$  мА. Дано:  $R_1 = 10$  кОм,  $R_2 = 25$  кОм,  $R_3 = 20$  кОм и  $X_c = 34$  кОм. Определить все токи. Задачу решить методами узловых напряжений, контурных токов, наложения, преобразования источников тока в эквивалентные источники ЭДС.

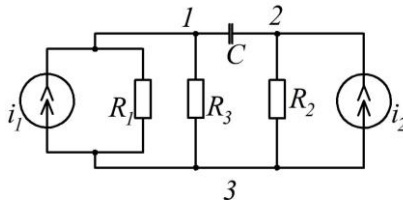


Рис. 47. Схема с двумя источниками тока

4 Для цепи (рис. 48) найти сопротивление  $\underline{Z}_n$ , при котором в нем выделится максимальная мощность и вычислить ее. Чему равно отношение мощности, выделяемой в  $\underline{Z}_n$ , к мощности, доставляемой источником, и коэффициент передачи  $\dot{H} = \frac{\dot{U}_2}{E}$ .

Дано:  $E = 100$  В;  $R = 10$  Ом;  $X_c = 20$  Ом.

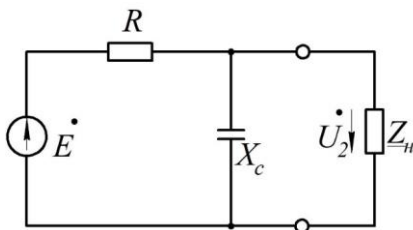


Рис. 48. Схема для задачи 2.7

5 Рассчитать АЧХ и ФЧХ последовательной RL-цепи по данным:  $R = 3$  Ом,  $L = 2$  мГн, диапазон изменения угловой частоты от  $\omega_{\min} = 2000$  с<sup>-1</sup> до  $\omega_{\max} = 10000$  с<sup>-1</sup>, равномерный шаг её изменения  $\Delta\omega = 1000$  с<sup>-1</sup>.

## 15. РЕЗОНАНС В СЛОЖНЫХ СХЕМАХ

Схемы замещения реальных электрических цепей могут существенно отличаться от рассмотренных выше простейших последовательной или параллельной схем. Хотя условие резонансного режима в общем виде ( $I_m(\underline{Z}_{BX}) = 0$  и  $I_m(\underline{Y}_{BX}) = 0$ ) для любой схемы сохраняется, однако конкретное содержание этих уравнений будет определяться структурой схемы замещения. На рис. 49 приведена эквивалентная схема параллельного контура, в которой реальные элементы цепи (катушка и конденсатор) представлены последовательными схемами замещения.

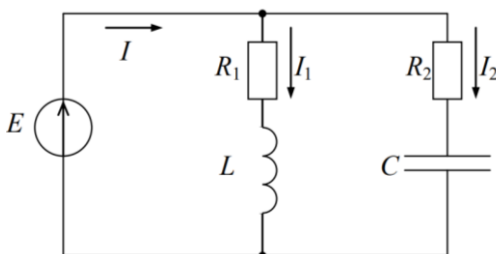


Рис. 49. Эквивалентная схема параллельного контура

Входная комплексная проводимость схемы:

$$\begin{aligned} \underline{Y}_{BX} &= \frac{1}{R_1 + jX_C} + \frac{1}{R_2 - jX_C} = \\ &= \left( \frac{R_1}{R_1^2 + X_L^2} + \frac{R_2}{R_2^2 + X_C^2} \right) - j \left( \frac{X_L}{R_1^2 + X_L^2} - \frac{X_C}{R_2^2 + X_C^2} \right) = G_{\Sigma} - jB_{\Sigma}. \end{aligned}$$

Условие резонанса:

$$B_{\vartheta} = \frac{X_L}{R_1^2 + X_L^2} - \frac{X_C}{R_2^2 + X_C^2} = 0 \text{ или } \frac{\omega L}{R_1^2 + (\omega L)^2} - \frac{\left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}{R_1^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} = 0.$$

Отличие данного условия резонанса от аналогичного условия для простейшей схемы колебательного контура состоит в том, что в этом уравнении присутствуют параметры активных элементов  $R_1$  и  $R_2$ .

Анализ полученного уравнения показывает, что при изменении параметров одного из элементов схемы возможны различные варианты решения.

При изменении сопротивлений  $R_1$  и  $R_2$  возможны два варианта решения:

- 1) существует одна точка резонанса (корни уравнения вещественные; один положительный, а другой отрицательный);
- 2) резонанс в схеме невозможен (корни уравнения комплексные).

При изменении индуктивности  $L$  или емкости  $C$  возможны три варианта решения:

- 1) существует две точки резонанса (корни уравнения вещественные и оба положительные);
- 2) существует одна точка резонанса (корни уравнения равные и положительные);
- 3) резонанс в схеме невозможен (корни уравнения комплексные).

Решая уравнение резонанса относительно частоты, получим:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{\frac{L}{C} - R_1^2}{\frac{L}{C} - R_2^2}}.$$

Анализ этого уравнения показывает, что при  $R_1 = R_2$  резонансная частота имеет выражение  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ , как и для простейшей схемы, а при  $\frac{L}{C} = R_1^2 = R_2^2$  для  $\omega_0$  получается неопределенное решение, что физически означает резонансный режим на любой частоте.

На рис. 50 приведена схема последовательного контура, в которой реальные элементы (катушка и конденсатор) представлены различными схемами замещения.

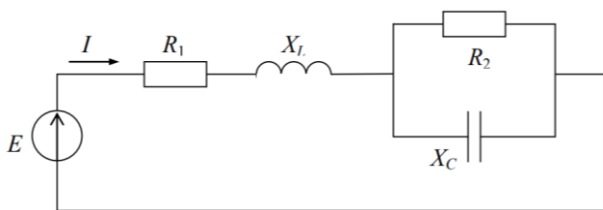


Рис. 50. Эквивалентная схема последовательного контура

Входное комплексное сопротивление схемы:

$$\begin{aligned} Z_{BX} &= R_1 + jX_L + \frac{R_2(-jX_C)}{R_2 - jX_C} = \left( R_1 + \frac{R_2 X_C^2}{R_2^2 + X_C^2} \right) + \\ &+ j \left( X_L - \frac{R_2^2 X_C}{R_2^2 + X_C^2} \right) = R_3 + jX_3. \end{aligned}$$

Условие резонанса:

$$X = X_L - \frac{R_2^2 X_C}{R_2^2 + X_C^2} \quad \text{или} \quad \omega L - \frac{R_2^2 \left( \frac{1}{\omega C} \right)^2}{R_2^2 + \left( \frac{1}{\omega C} \right)^2} = 0.$$

Анализ этого уравнения показывает неоднозначную зависимость условия резонанса от значений параметров каждого элемента

схемы. Если сложная схема содержит в своей структуре несколько (более двух) разнородных реактивных элементов, то при изменении частоты в ней могут наблюдаться несколько резонансных режимов (как тока, так и напряжения) в зависимости от структуры схемы.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Материалы данного учебного пособия предназначены для того, чтобы дать обучающимся специальностей и направлений подготовки возможность дополнительной самостоятельной подготовки для получения навыков практического применения основных законов общей электротехники.

В пособие дано теоретическое описание методов расчета цепей переменного синусоидального тока, приведены примеры проведения подобных расчетов указанными методами. А также даны материалы, с использованием которых обучающимся могут проводить самостоятельные расчеты.

Умение рассчитывать цепи переменного синусоидального тока, то есть находить значения токов, напряжений, мощностей на участках цепи, является навыком, необходимым при проектировании и использовании электрооборудования различного назначения, в частности, для выбора допустимых режимов его работы и условий безопасной эксплуатации.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бессонов, Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи: учебник / Л.А. Бессонов. – 11-е изд., перераб. и доп. – Москва: Гардарики, 2006. – 701 с.
2. Сборник задач по теоретическим основам электротехники / Л.А. Бессонов, И.Г. Демидова [и др.]; под ред. Л.А. Бессонова. – Москва: Высшая школа, 1980. – 570 с.
3. Теоретические основы электротехники: учебник для вузов. В 3 т. Т. 1 / К.С. Демирчян, Л.Р. Нейман, Н.В. Коровкин, В.Л. Чечурин. – Санкт-Петербург: Питер, 2003. – 463 с.
4. Добротворский, И.Н. Теория электрических цепей: учеб. пособие для вузов / И.Н. Добротворский. – Москва: Радио и связь, 1989. – 480 с.
5. Основы теории цепей: учебник для вузов / Г.В. Зевеке, П.А. Ионкин, А.В. Нетушил, С.В. Страхов. – 5-е изд., перераб. – Москва: Энергоатомиздат, 1989. – 528 с.
6. Электротехника: учебник для вузов / А.С. Касаткин, М.В. Немцов. – 7-е изд., стер. – Москва: Высшая школа, 2005. – 542 с.
7. Усольцев, А.А. Общая электротехника: учебное пособие / А.А. Усольцев. – Санкт-Петербург: СПбГУ ИТМО, 2009. – 301 с.
8. Сборник задач и упражнений по теоретическим основам электротехники: учеб. пособие для электротехнич. и энергет. спец. вузов / под ред. П.А. Ионкина. – 3-е изд., перераб. и доп. – Москва: Энергия, 1982. – 768 с.
9. Шебес, М.Р. Теория линейных электрических цепей в упражнениях и задачах: учебное пособие для электротехнических и радиотехнических специальностей вузов / М.Р. Шебес. – 2-е изд., перераб. и доп. – Москва: Высшая школа, 1973. – 656 с.

Учебное издание

*Теряева Ольга Викторовна,  
Лавров Андрей Юрьевич,  
Паршина Александра Валерьевна*

## **ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПЕРЕМЕННОГО СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА**

*Учебное пособие*

Редакционно-издательская обработка  
издательства Самарского университета

Подписано в печать 18.12.2025. Формат 60x84 1/16.

Бумага офсетная. Печ. л. 5,0.

Тираж 27 экз. Заказ № . Арт. – 44(P2УП)/2025.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»  
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)  
443086, Самара, Московское шоссе, 34.

---

Издательство Самарского университета.  
443086, Самара, Московское шоссе, 34.

