

ПРИМЕНЕНИЕ АЛГОРИТМА ОБРАТНОЙ ПРОЕКЦИИ ДЛЯ ВОССТАНОВЛЕНИЯ 2D-ПРОФИЛЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КОНЦЕНТРАЦИИ ЭЛЕКТРОНОВ В ИОНОСФЕРЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ДАННЫХ НИЗКООРБИТАЛЬНЫХ СПУТНИКОВ

А.М. Крот, И.Э. Савиных

ОИПИ НАН Беларуси

rct.savinykh@gmail.com

Проблема восстановления многомерного сигнала по его проекциям – исключительно многомерная задача, не имеющая одномерного аналога. Эту проблему можно анализировать с различных точек зрения – как задачу обращения свёртки, как задачу моделирования, как задачу оценки или как интерполяционную задачу [1]. Каждая точка зрения позволяет по-своему подойти к решению этой проблемы.

Проекция является математической операцией, подобной физической операции получения изображения в рентгеновских лучах с помощью коллимированного источника излучения. Процессы рассеяния и поглощения приводят к экспоненциальному ослаблению радиосигнала по закону Бугера при прохождении через облако электронов в ионосфере до величины выходной интенсивности:

$$I = I_0 e^{-\int_0^l \rho(x_1, x_2) dl}, \quad (1)$$

где $\rho = m_e n$ – плотность электронного облака (n – концентрация; m_e – масса электрона); l – его толщина.

Введём новую систему координат $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$, повернутую относительно первоначальной. В этой системе координат пучок излучения параллелен оси $\hat{x}_2$ и перпендикулярен оси $\hat{x}_1$. Так как структура электронной концентрации гетерогенна, то проекция концентрации под углом θ выражается через линейный интеграл так, что закон Бугера принимает вид [1]:

$$I(\hat{x}_1) = I_0 \exp \left[m_e \int_{-\infty}^{\infty} n(x_1, x_2) d\hat{x}_2 \right]. \quad (2)$$

Величина $p_\theta(\hat{x}_1) = -\ln(I(\hat{x}_1)/I_0(\hat{x}_1))$ называется проекцией концентрации n под углом θ и равна интегралу по координате оси именуемого полным электронным содержанием.

$$p_\theta(\hat{x}_1) = \int_{-\infty}^{\infty} n(x_1, x_2) d\hat{x}_2 = \int_{-\infty}^{\infty} n(\hat{x}_1 \cos \theta - \hat{x}_2 \sin \theta, \hat{x}_1 \sin \theta + \hat{x}_2 \cos \theta) d\hat{x}_2, 0 \leq \theta < \pi. \quad (3)$$

ПЭС соответствует семейству линейных интегралов, взятых вдоль ряда линий, параллельных пучку и друг другу. Различным углам θ в диапазоне $0 \leq \theta < \pi$ соответствуют различные ориентации пучка и различные проекции.

Функция проецирования – ПЭС, определяемая уравнением (3), является одномерной. Если 2D-концентрация $n(x_1, x_2)$ имеет спектр Фурье $N(\Omega_1, \Omega_2)$, то существует и одномерный спектр Фурье функции $p_\theta(\hat{x}_1)$, который обозначим через $S_\theta(\omega)$. Тогда можно его записать с учётом (3) следующим образом:

$$S_{\theta}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\theta}(\hat{x}_1) \exp(-j\omega\hat{x}_1) d\hat{x}_1 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} n(\hat{x}_1 \cos \theta - \hat{x}_2 \sin \theta, \hat{x}_1 \sin \theta + \hat{x}_2 \cos \theta) \exp(-j\omega\hat{x}_1) d\hat{x}_2 d\hat{x}_1.$$

Возвращаясь в (4) к неповёрнутой (исходной) системе координат, получим [1]:

$$S_{\theta}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} n(x_1, x_2) \exp[-j\omega(x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta)] dx_1 dx_2 \quad (5)$$

или

$$S_{\theta}(\omega) = N(\omega \cos \theta, \omega \sin \theta). \quad (6)$$

Таким образом, согласно (6) спектр Фурье проекции, полученной под углом θ , является сечением двумерного преобразования Фурье двумерной функции концентрации $n(x_1, x_2)$ вдоль линии, проходящей через начало координат плоскости (Ω_1, Ω_2) и составляющей угол θ с осью Ω_1 [1-3]. Эту функцию сечения $S_{\theta}(\omega)$ называем *срезом* $N(\Omega_1, \Omega_2)$ под углом θ , а уравнение (6) – *теоремой о проекционном срезе* [1]. В этой связи задача восстановления или оценки концентрации $n(x_1, x_2)$ эквивалентна задаче интерполяции двумерного преобразования Фурье в целом на основе этих радиальных сечений. При интерполяции можно так же использовать и априорные значения об $n(x_1, x_2)$. Например, если известно, что $n(x_1, x_2)$ обладает конечной протяжённостью, то функция $N(\Omega_1, \Omega_2)$ аналитическая, что верно при выборе способа интерполяции в 2D-частотной области.

Наконец, искомую функцию двумерной концентрации $n(x_1, x_2)$, находим из восстановленного двумерного спектра Фурье $N(\Omega_1, \Omega_2)$ с помощью обратного двумерного преобразования Фурье:

$$n(x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} N(\Omega_1, \Omega_2) e^{j(\Omega_1 x_1 + \Omega_2 x_2)} d\Omega_1 d\Omega_2. \quad (7)$$

Если в двумерной спектральной плоскости перейти к полярным координатам (см. рисунок 1), то формула (7) в полярных координатах (ω, θ) имеет вид [1]:

$$n(x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} N(\omega \cos \theta, \omega \sin \theta) e^{j\omega(x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta)} |\omega| d\omega d\theta =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\theta}(\omega) e^{j\omega(x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta)} |\omega| d\theta d\omega. \quad (8)$$

Соотношение (9) реализует фильтр от функции проецирования p_{θ} , при этом частотный отклик $|\omega|$ является производной от преобразования Гильберта функции $p_{\theta}(x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta)$ [1]. С использованием (9) вычисление искомой концентрации $n(x_1, x_2)$ по алгоритму обратной проекции, основанному на формуле обращения Радона, записывается следующим образом [1]:

$$n(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g_{\theta}(x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta) d\theta. \quad (10)$$

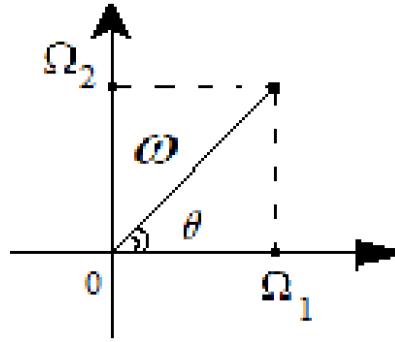


Рисунок 1 – Полярные координаты (ω, θ) в двумерной частотной области (Ω_1, Ω_2)

Путём дискретизации формулы обращения Радона (10) можно вывести алгоритмы обратной проекции. Их отличительной особенностью является возможность реализации полностью в пространственной области [1]. Дискретизация формулы обращения Радона задана на предположении, что заданы проекции под углами $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{N-1}$ и что

$$\left. \begin{aligned} \Delta\theta_i &= \theta_i - \theta_{i-1}, i=1, \dots, N-1; \\ \Delta\theta_0 &= \theta_0 - \theta_{N-1} + \pi. \end{aligned} \right\}. \quad (11)$$

Из формулы обращения Радона (10) следует, что искомую 2-D концентрацию $n(x_1, x_2)$ можно аппроксимировать следующим образом:

$$n(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=0}^{N-1} \Delta\theta_i g_i(x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta), \quad (12)$$

где $g_i(x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta) = g_i(\hat{x}_1)$ – функция в повернутой системе координат $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$.

В этой связи сигнал g_i можно представить себе как двумерный сигнал, отфильтрованный по переменной $\hat{x}_1$ и однородный по переменной $\hat{x}_2$. Поскольку операция восстановления двумерной функции начинается с одномерной функции для получения двумерной, эта операция называется *обратной проекцией*. Функция $g_i(x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta)$ получается из $g_i(t)$ обратной проекцией этой функции в направлении $\hat{x}_2$ (т. е. параллельно первоначальным линиям интегрирования, определяющим проекцию). Поскольку ориентация координатной системы $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ различна для каждого из проекционных углов, то каждая из отфильтрованных обратных проекций будет иметь свою ориентацию [1].

На основе данных ПЭС трех станций получено изображение ионосферы с использованием метода обратной проекции (без дополнений нулевыми значениями) с использованием алгоритмов ДПФ [4], представленное на рис. 2. Так как были использованы данные трех станций, то разрешение составляет 3 пикселя.

Также было синтезировано изображение из дополненных нейросетью данных, которое представлено на рис. 3. Размер восстановленного изображения 7 пикселей, так как с помощью нейросети были сгенерированы данные для дополнительных псевдостанций.

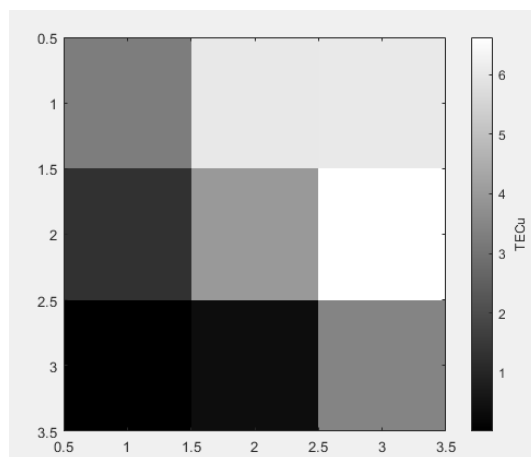


Рисунок 2 –Изображение, восстановленное методом обратной проекции

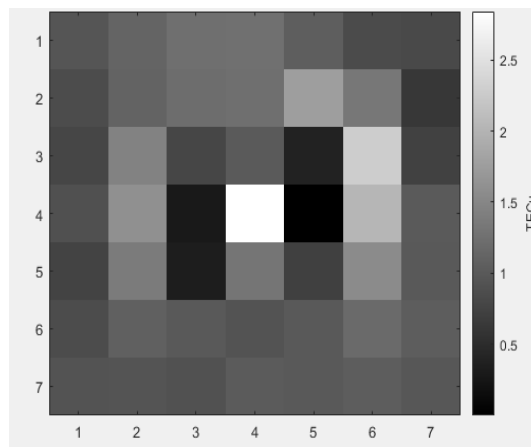


Рисунок 3 –Изображение, восстановленное методом обратной проекции
с использованием дополненных данных

Список литературы:

1. Даджион Д., Мерсеро Р. Цифровая обработка многомерных сигналов: Пер. с англ. М.: Мир, 1988. 412 -420 с.
2. Крот, А. М. Разработка алгоритмов и программ оценивания электронного содержания и радиотомографического восстановления поля концентрации электронов в ионосфере на основе радиосигналов спутниковых систем / А.М. Крот, И.Э. Савиных, А.С. Шапкин // Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук. 2025. Т. 61, No 1. С. 47–62. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2025-61-1-47-62>
3. Krot, A.M., Savinykh, I.E. Development of Radiotomography Algorithms for the Study of Electron Clouds in the Ionosphere and Structures in the Dusty Plasma Using Low-Orbital Satellite Systems. Sol Syst Res 60, (2025)
4. Крот А. М, Минервина Е. Б. Быстрые алгоритмы и программы цифровой спектральной обработки сигналов и изображений. Минск, Наука и техника, 1995. 234 с.