

УДК 517.928

ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛИ ПОПУЛЯЦИОННОЙ ДИНАМИКИ С СИНГУЛЯРНЫМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ

© Федорова Д.А.

*Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация*

e-mail: fedorovadarinochka75@gmail.ru

Научный руководитель: Щепаккина Е.А., д-р физ.-мат. наук, профессор
*Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация*

Ключевые слова: динамическая система, сингулярные возмущения, устойчивость, особые точки, динамика популяций.

Еловая листовертка является одним из самых разрушительных насекомых в еловых лесах. В работе исследуется модель динамики популяций, в которой описывается взаимодействие между листоверткой и елью [1]:

$$\begin{aligned}\frac{dN}{dt} &= rN \left(1 - \frac{N}{kS}\right) - \beta \frac{PN^2}{\mu^2 S^2 + N^2}, \\ \frac{dS}{dt} &= \rho S \left(1 - \frac{S}{S_{max}}\right) - \frac{\delta S}{K + S} N,\end{aligned}$$

где N – плотность популяции личинок листовертки, S – средняя площадь листьев ели, r и ρ – внутренние темпы роста личинок листовертки и листьев ели соответственно, kS – способность к размножению листовертки, S_{max} – пропускная способность листьев ели, $\beta \frac{PN^2}{\mu^2 S^2 + N^2}$ – воздействие хищничества на популяцию листовертки, $\frac{\delta S}{K + S} N$ – воздействие хищничества на популяцию ели.

Предполагается, что $\rho \ll r$, т. е. внутренние темпы роста популяций имеют разные порядки. Поэтому после изменения масштаба переменных

$$x = \frac{N}{kS}, \quad y = \frac{rkS}{\beta P}, \quad \tau = \rho t$$

и переобозначений

$$\varepsilon = \frac{\rho}{r}, \quad \alpha = \frac{\mu}{k}, \quad l = \frac{\delta k}{\rho}, \quad d = \frac{rkS_{max}}{\beta P}, \quad A = \frac{rkK}{\beta P}$$

модель может быть записана в безразмерном виде [2] как сингулярно возмущенная система [3]:

$$\begin{aligned}\varepsilon \frac{dx}{d\tau} &= f_0(x, y; \alpha^2) - \varepsilon x g_0(x, y; l, d, A), \\ \frac{dy}{d\tau} &= y g_0(x, y; l, d, A),\end{aligned}\tag{1}$$

$$f_0(x, y; \alpha^2) = x(1 - x) - \frac{1}{y} \frac{x^2}{x^2 + \alpha^2}, \quad g_0(x, y; l, d, A) = 1 - \frac{y}{d} - \frac{lux}{A + y},$$

где $0 < \varepsilon \ll 1$, $x \geq 0$, $y > 0$, все переменные и параметры системы положительны.

На основе исследования положений равновесий системы (1) делается вывод о динамике популяций при различных значениях параметров. Установлено существование положения равновесия $P(0, d)$.

Для исследования остальных стационаров проводится анализ графиков функций

$$y = \varphi(x) = \frac{x}{(x^2 + \alpha^2)(1-x)}, \quad x = w(y) = \left(1 - \frac{A+y}{d} + \frac{A}{y}\right),$$

определяющих координаты остальных особых точек системы.

Показано, что в физически интересной области значений переменных и параметров графики функций $\varphi(x)$ и $w(y)$ могут иметь от одной до трех точек пересечения, а, это значит, что у системы (1) есть еще от одной до трех точек покоя. Установлены возможные типы особых точек и характер их устойчивости.

На основе анализа особых точек можно судить о динамике численности популяций хищников и жертв [4–6]. Устойчивость особой точки означает, что численность обеих популяций стабилизируется, если начальное условие попадает в особую точку, а иначе наблюдаются колебания: численность одного вида растет, другого – падает, затем наоборот и т. д. Неустойчивость же может означать, что сколько угодно малое отклонение от положения равновесия способно привести к катастрофическим последствиям, вплоть до полного вымирания одного из видов.

Установлено, что в дифференциальной системе одна из особых точек, лежащая в физически интересной области фазового пространства, при изменении значений одного или нескольких параметров системы меняет свою устойчивость, оставаясь фокусом. При этом наблюдается бифуркация рождения цикла [7; 8], что означает при определенных условиях окружающей среды возможны периодические колебания в размерах обеих популяций. Такое явление свидетельствует об экологическом равновесии.

Результаты качественного анализа подтверждены численным экспериментом.

Библиографический список

1. Zhong, L. Canard explosions in a Spruce-Budworm model with Holling-II functional response / L. Zhong, J. Shen // *Journal of Nonlinear Modeling and Analysis*. – 2024. – Vol. 6. – P. 238–264.
2. Марри, Дж. Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. Лекции о моделях: пер. с англ. / Дж. Марри. – М.: Мир, 1983. – 396 с.
3. Соболев, В.А. Редукция моделей и критические явления в макрокинетике / В.А. Соболев, Е.А. Щепкина. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. – 320 с.
4. Базыкин, А.Д. Нелинейная динамика взаимодействующих популяций / А.Д. Базыкин. – М.; Ижевск: Ижевский институт компьютерных исследований, 2003. – 368 с.
5. Братусь, А.С. Динамические системы и модели биологии / А.С. Братусь, А.С. Новожилов, А.П. Платонов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 400 с.
6. Ризниченко, Г.Ю. Математические методы в биологии и экологии. Биофизическая динамика продукционных процессов в 2 ч. Ч. 1: учебник для вузов / Г.Ю. Ризниченко, А.Б. Рубин. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Юрайт, 2023. – 210 с.
7. Арнольд, В.И. Теория бифуркаций / В.И. Арнольд, В.С. Афраимович, Ю.С. Ильяшенко, Л.П. Шильников // *Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. фундам. направления*. – 1986. – Т. 5. – С. 5–218.
8. Мищенко, Е.Ф. Периодические движения и бифуркационные процессы в сингулярно возмущенных системах / Е.Ф. Мищенко, Ю.С. Колесов, А.Ю. Колесов, Н.Х. Розов. – М.: Физматлит, 1995. – 336 с.