

УДК 517.928

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЭПИДЕМИОЛОГИИ

© Протопопова Я.О.

Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация

e-mail: yana.protopopova@inbox.ru

Научный руководитель: Щепаккина Е.А., д-р физ.-мат. наук, профессор
Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация

Ключевые слова: динамическая система, особые точки, устойчивость, бифуркация, модель «хищник – жертва».

В работе исследуется динамическая модель распространения инфекции SEIS [1], которая в безразмерном виде описывается системой:

$$\begin{aligned}\dot{S} &= -(\beta_I SI + \beta_E SE) + \gamma I + \alpha E, \\ \dot{E} &= \beta_I SI + \beta_E SE - (\delta + \alpha)E, \\ \dot{I} &= \delta E - \gamma I,\end{aligned}\tag{1}$$

где β_I характеризует скорость передачи вируса от больных людей к здоровым, β_E описывает передачу заболевания от инфицированных людей, γ определяет скорость перехода из группы больных лиц в группу здоровых индивидуумов, α – постоянная скорости перехода из латентной группы в категорию здоровых людей, δ – постоянная скорости перехода из группы инфицированных в группу больных [1; 2].

Данная модель является модификацией моделей SIRS и SEIR, в которой из рассмотрения исключены полностью выздоровевшие лица, способные обладать иммунитетом к рассматриваемому заболеванию. Также модель подразумевает постоянство и замкнутость рассматриваемой популяции:

$$S + E + I = 1.\tag{2}$$

Установлено, что в системе (1) может наблюдаться бифуркация без смены устойчивости: устойчивый фокус переходит в устойчивый узел. К данному результату можно прийти, понизив размерность системы (1) на единицу за счет (2):

$$\begin{aligned}\dot{E} &= \beta_I(1 - E - I)I + \beta_E(1 - E - I)E - (\delta + \alpha)E, \\ \dot{I} &= \delta E - \gamma I.\end{aligned}\tag{3}$$

В редуцированной системе (3) точка покоя имеет координаты

$$I_0 = \frac{\delta}{\gamma + \delta} \left[\frac{\beta_E \gamma + \beta_I \delta - (\delta + \alpha) \gamma}{\beta_E \gamma + \beta_I \delta} \right],\tag{4}$$

$$E_0 = \frac{\gamma}{\gamma + \delta} \left[\frac{\beta_E \gamma + \beta_I \delta - (\delta + \alpha) \gamma}{\beta_E \gamma + \beta_I \delta} \right].\tag{5}$$

Исследования на устойчивость особой точки (4), (5) системы (3) в физически интересной области, то есть в случае, когда:

- 1) выполняется одно из найденных условий устойчивости или неустойчивости;
- 2) параметры системы попадают в заданные допустимые промежутки;
- 3) сохраняется неотрицательность координат точки покоя;

показали, что положение равновесия не может быть неустойчиво, а устойчивые стационары бывают двух типов — узел и фокус.

В ходе численного эксперимента были построены фазовые портреты устойчивого узла (рисунок 1) и устойчивого фокуса (рисунок 2) системы (3). Значения параметров системы указаны в подписях к рисункам.

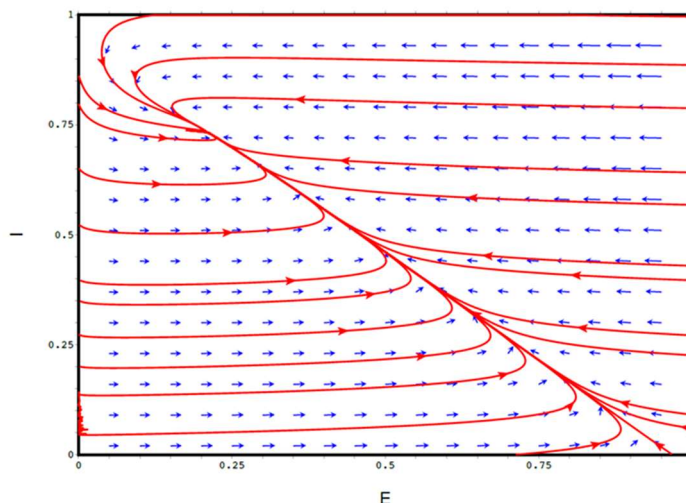


Рисунок 1 – устойчивый узел при $\alpha = \frac{1}{3}, \gamma = \frac{1}{14}, \beta_E = 10, \beta_I = \frac{1}{10}, \delta = \frac{1}{4}$

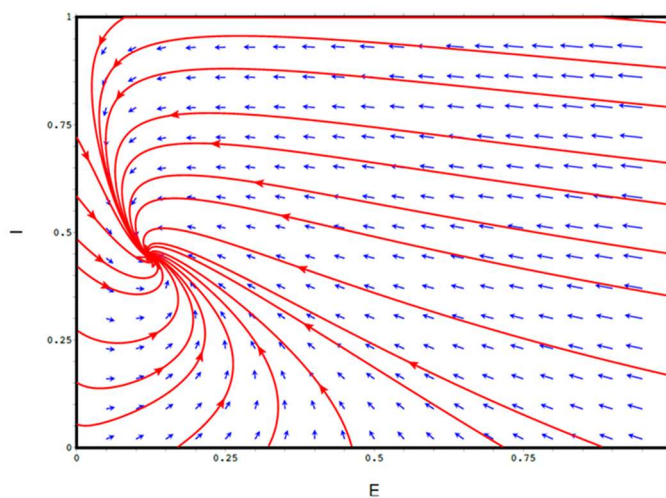


Рисунок 2 – устойчивый фокус при $\alpha = \frac{1}{3}, \gamma = \frac{1}{14}, \beta_E = 1, \beta_I = \frac{1}{10}, \delta = \frac{1}{4}$

Полученные результаты показывают, как влияют различные физические и социальные факторы на развитие инфекционных заболеваний.

Библиографический список

1. Karimov, A.R. Influence of transfer epidemiological processes on the formation of endemic equilibria in the extended SEIS / A.R. Karimov, M.A. Solomatin, A.N. Bocharov // Mathematics. – 2024. – Vol. 12. – P. 3585.
2. Братусь, А.С. Динамические системы и модели биологии / А.С. Братусь, А.С. Новожилов, А.П. Платонов. – М.: Физматлит, 2009. – 400 с.