

УДК 517.928

УСТОЙЧИВО-НЕУСТОЙЧИВЫЕ ИНВАРИАНТНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ СИСТЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА

© Логинов М.С.

*Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация*

e-mail: loginovmax2003@gmail.com

Научный руководитель: Щепаккина Е.А., д-р физ.-мат. наук, профессор
*Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация*

Ключевые слова: сингулярно возмущенная система, инвариантные многообразия, устойчивость, траектории-утки, бифуркация.

Работа посвящена исследованию сингулярно возмущенной системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = X(x, y, \alpha, \varepsilon), \\ \varepsilon \dot{y} = Y(x, y, \alpha, \varepsilon), \end{cases} \quad (1)$$

где ε – малый положительный параметр, α – скалярный вещественный параметр, x – скалярная медленная переменная, y – скалярная быстрая переменная, X и Y – достаточно гладкие функции. Предполагается, что значения функций X и Y сравнимы с единицей при малых значениях параметра ε . Точка означает дифференцирование по независимой переменной времени t .

Напомним [1], что медленной кривой системы (1) называется множество точек

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: Y(x, y, \alpha, 0) = 0\}.$$

Участки медленной кривой, для которых выполнено условие $Y_y < 0$ ($Y_y > 0$) называются устойчивыми (неустойчивыми).

В достаточно малой окрестности устойчивого и неустойчивого участков медленной кривой существуют, соответственно, устойчивые и неустойчивые медленные инвариантные многообразия системы (1), которые в окрестности нерегулярных точек [1] терпят разрыв. Отметим, что медленное инвариантное многообразие является устойчивым (неустойчивым), если оно обладает свойством притяжения (отталкивания). Особый интерес представляют собой инвариантные многообразия, которые состоят одновременно из устойчивых и неустойчивых частей [2]. На плоскости примером таких многообразий могут служить траектории-утки.

Первое упоминание о траекториях-утках было в работе [3] для системы Ван дер Поля, которая исследовалась методами нестандартного анализа.

В данной работе рассматривается теорема существования таких инвариантных многообразий для уравнения вида [2]

$$\varepsilon \frac{dy}{dx} = 2xy + F(x, y, \alpha, \varepsilon). \quad (2)$$

Особенность работы заключается в том, что при доказательстве теоремы рассматриваются методы стандартного анализа, применяется теория дифференциальных уравнений и теория операторов. Результат бы продемонстрирован на системе Ван дер Поля. Система была сведена к уравнению вида (2), и для нее были проверены все условия выполнения теоремы. Продемонстрирован метод нахождения

такого инвариантного многообразия в виде асимптотического разложения по целым степеням малого параметра, а также найдено значение скалярного параметра, соответствующего данному инвариантному многообразию. Результат был наглядно представлен графически (см. рис.).

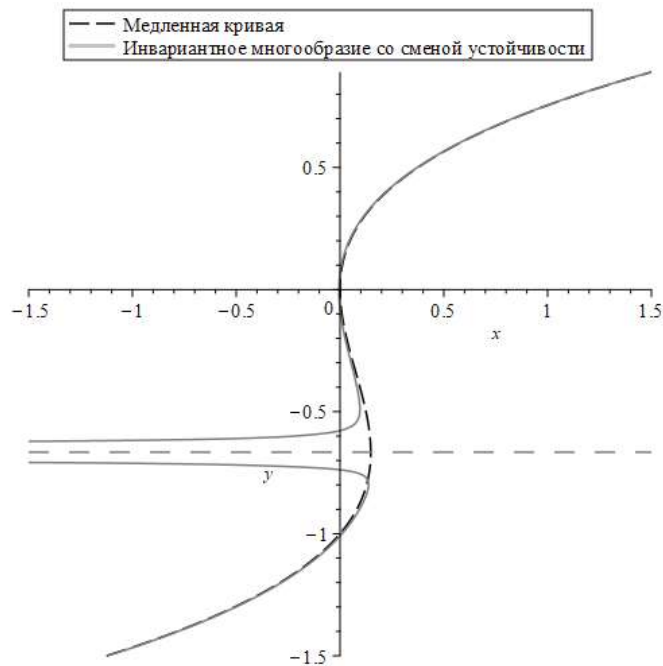


Рисунок – медленная кривая и полученное инвариантное многообразие для системы Ван дер Поля при $\varepsilon = 0,01$

Здесь для системы

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha - y, \\ \varepsilon \dot{y} = x - y^2 - y^3, \end{cases}$$

изображена медленная кривая

$$x = y^2 + y^3.$$

Для нее устойчивые участки при

$$y < -\frac{2}{3}, \quad y > 0,$$

а, соответственно, неустойчивый участок при

$$-\frac{2}{3} < y < 0.$$

Медленная кривая имеет две точки срыва

$$P_1(0,0), \quad P_2\left(\frac{4}{27}, -\frac{2}{3}\right).$$

Серой сплошной линией изображено медленное инвариантное многообразие, которое меняет свою устойчивость, проходя через точку срыва P_1 .

Библиографический список

1. Соболев, В.А. Редукция моделей и критические явления в макрокинетике / В.А. Соболев, Е.А. Щепаккина. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. – 320 с.
2. Shchepakina, E. Invariant surfaces of variable stability / E. Shchepakina, V. Sobolev // Journal of Physics: Conference Series. – 2016. – V. 727, issue 1. – P. 012016.
3. Callot, J.-L. Le probleme de la “Chasse an canard” / J.-L. Callot, F. Diener, M. Diener // C.R. Acad. Sci. Paris. Ser. 1. – 1978. – Vol. 286, № 22. – P. 1059–1061.