

УДК 517.928

СРАВНЕНИЕ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

© Горейнов Д.В.

Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация

e-mail: denis2.goreinov@yandex.ru

Научный руководитель: Кривошеева Ю.Ю., ассистент
Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация

Ключевые слова: краевая задача, уравнение теплопроводности, явная разностная схема.

В данной работе исследуется сравнение численного и аналитического метода для решения первой краевой задачи для уравнения теплопроводности.

Задача: в области $D = \{(x, t): 0 < x < l, 0 < t < T\}$ найти функцию $u(x, t)$:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < T, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1, & \frac{l}{2} - \frac{l}{4} \leq x < \frac{l}{2} + \frac{l}{4} \\ 0, & \text{else,} \end{cases} \quad (2)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad 0 < t < T. \quad (3)$$

Пусть $a = 1 \frac{\text{см}^2}{\text{с}}$, $l = 12 \text{ см}$, $T = 1 \text{ с}$.

Аналитическое решение, полученное методом разделения переменных Фурье, имеет следующий вид:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n} \left(\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) - \cos\left(\frac{3\pi n}{4}\right) \right) \sin\left(\frac{\pi n x}{12}\right) e^{-\frac{\pi^2 n^2 t}{144}}. \quad (4)$$

Численное решение получено по явной разностной схеме [1]. Сравним аналитическое решение (1) и численное по критериям точности и времени вычисления. К сожалению, при компьютерном моделировании теплового процесса, мы не можем взять бесконечное число слагаемых в ряде 4. Поэтому экспериментально было найдено, необходимое количество слагаемых для получения решения с приемлемой точностью.

Результаты сравнения аналитического и численного решения представлены в таблице и на рисунке.

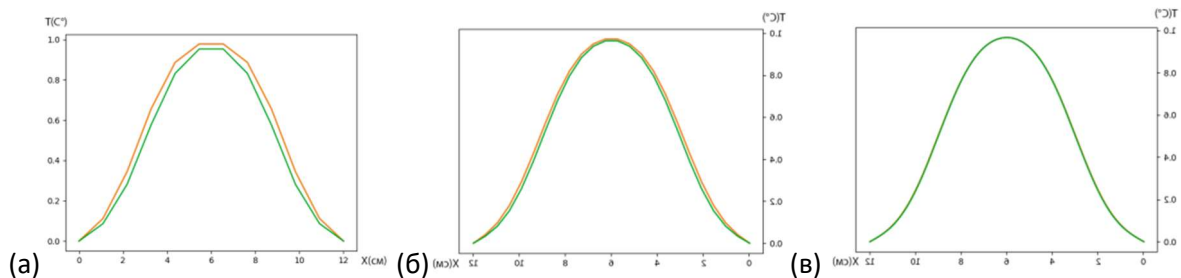


Рисунок – Графики зависимости температуры от координаты x для аналитического (зеленая линия) и численного (оранжевая линия) методов: (а) $I = 12$, $K = 5$, (б) $I = 24$, $K = 14$, (в) $I = 192$, $K = 600$

Таблица – Сравнение времени вычисления для различных сеточных областей

I,K	$t_a(c)$	$t_q(c)$	δ
12,5	1,54	$< 0,001$	0,17
24,14	8,68	0,001	0,16
48,50	67	0,002	0,08
96,150	401	0,011	0,06
192,600	3945.7	0,087	0,04

Из приведённых графиков и таблицы видно, что при измельчении сеточной области численное решение сходится к аналитическому. Кроме того, численное на достаточно мелкой сетке численное решение получается в 45 353 раза быстрее аналитического.

Библиографический список

1. Самарский, А.А. Численные методы математической физики / А.А. Самарский, А.В. Гулин. – 2-е изд. – М.: Научный мир, 2003. – 316 с.