УДК 539.4, 519.6

КОЭФФИЦИЕНТЫ ИНТЕНСИВНОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ КАК ИНСТРУМЕНТ МЕХАНИКИ РАЗРУШЕНИЯ: ИССЛЕДОВАНИЕ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ О ЦЕНТРАЛЬНОЙ ТРЕЩИНЕ И ПОЛУЧЕНИЕ ОБОБЩЕННЫХ ТАРИРОВОЧНЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ

© Фомченкова М.А.

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация

e-mail: fomchenkova.ma@ssau.ru

Научный руководитель: Степанова Л.В., д-р физ.-мат. наук, доцент
Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация

Ключевые слова: асимптотическое представление, трещины, анизотропные материалы, напряжения, метод конечных элементов.

Настоящее исследование посвящено разработке и применению методики восстановления асимптотических разложений (1) для полей напряжений, деформаций и перемещений в анизотропных материалах. Коэффициенты асимптотического разложения [1–4] определяются посредством решения задачи о деформировании образца с дефектом в ортотропном материале в рамках плоской задачи теории упругости с использованием метода конечных элементов (МКЭ).

$$\begin{pmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{12}\end{pmatrix} = 2\,\mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{i^{(n+1)^2}}{\mu_1-\mu_2} r^{\frac{n}{2}-1}\begin{bmatrix} \mu_2^2\mu_1^{\frac{(-1)^{n+1}+1}{2}}(\cos\theta+\mu_2\sin\theta)^{\frac{n}{2}-1} - \mu_1^2\mu_2^{\frac{(-1)^{n+1}+1}{2}}(\cos\theta+\mu_1\sin\theta)^{\frac{n}{2}-1}\\ \mu_1^{\frac{(-1)^{n+1}+1}{2}}(\cos\theta+\mu_2\sin\theta)^{\frac{n}{2}-1} - \mu_2^{\frac{(-1)^{n+1}+1}{2}}(\cos\theta+\mu_1\sin\theta)^{\frac{n}{2}-1}\\ -\left(\mu_2\mu_1^{\frac{(-1)^{n+1}+1}{2}}(\cos\theta+\mu_2\sin\theta)^{\frac{n}{2}-1} - \mu_1\mu_2^{\frac{(-1)^{n+1}+1}{2}}(\cos\theta+\mu_1\sin\theta)^{\frac{n}{2}-1}\right)\end{bmatrix}\right)+ \tag{1}$$

$$+2\,\mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{i^{(n+1)^2}}{\mu_1-\mu_2} r^{\frac{n}{2}-1}\begin{bmatrix} \mu_2^2\mu_1^{\frac{(-1)^{n}+1}{2}}(\cos\theta+\mu_2\sin\theta)^{\frac{n}{2}-1} - \mu_1^2\mu_2^{\frac{(-1)^{n}+1}{2}}(\cos\theta+\mu_1\sin\theta)^{\frac{n}{2}-1}\\ \mu_1^{\frac{(-1)^{n}+1}{2}}(\cos\theta+\mu_2\sin\theta)^{\frac{n}{2}-1} - \mu_2^{\frac{(-1)^{n}+1}{2}}(\cos\theta+\mu_1\sin\theta)^{\frac{n}{2}-1}\\ -\left(\mu_2\mu_1^{\frac{(-1)^{n}+1}{2}}(\cos\theta+\mu_2\sin\theta)^{\frac{n}{2}-1} - \mu_1\mu_2^{\frac{(-1)^{n}+1}{2}}(\cos\theta+\mu_1\sin\theta)^{\frac{n}{2}-1}\right)\end{bmatrix}\right),$$

где μ_1, μ_2 – корни характеристического уравнения; A_n, B_n – амплитудные коэффициенты асимптотических полей трещины анизотропного материала; r, θ – полярные координаты.

Коэффициенты интенсивности напряжений (КИН) выступают ключевыми характеристиками линейной механики разрушения, количественно характеризующими сингулярность напряженного состояния вблизи вершины трещины (см. рис.). В классической постановке для бесконечной пластины с центральной сквозной трещиной длиной 2a, нагруженной равномерным растягивающим напряжением σ, КИН для моды I (нормальный отрыв) задается выражением:

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi a}, \tag{2}$$

Данная формула представляет собой упрощенную форму более общей калибровочной зависимости:

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi a}\gamma, \tag{3}$$

где безразмерный поправочный коэффициент γ, учитывающий геометрию, для случая бесконечной пластины принимает значение, равное единице.

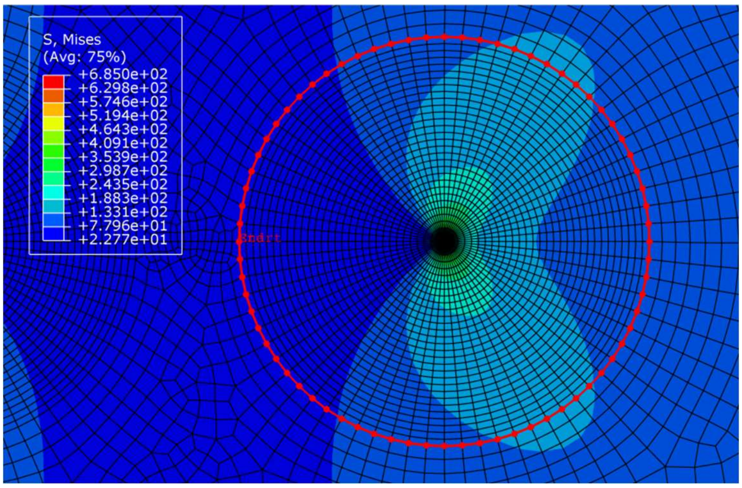

Рисунок – Путь для определения поля напряжений в окрестности вершины трещины

Современные численные подходы, прежде всего МКЭ, гарантируют высокоточное вычисление коэффициентов интенсивности напряжений. Интеграция переопределенного метода [5] асимптотического разложения напряжений с конечно-элементным моделированием разнообразных геометрических конфигураций (отношение длины трещины к ширине пластины) дает обобщенные тарировочные формулы. В частности, для $CsSnI_3$ тарировочная зависимость имеет вид:

$$F(\gamma) = 0.14 + 2.17\gamma - 4.53\gamma^2 + 8.63\gamma^3 - 5.09\gamma^4. \tag{4}$$

Библиографический список

1. Nejati, M. Crack tip asymptotic fields in anisotropic planes: Importance of higher order terms / M. Nejati, S. Ghouli, M.R. Ayatollahi // Applied Mathematical Modelling. – 2021. – Vol. 91. – P. 837–862.

2. Фомченкова, М.А. Анизотропные линейно упругие материалы: теоретические и конечно-элементные решения механики разрушения анизотропных сред / М.А. Фомченкова // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сб. тр. Междунар. науч. конф., Воронеж, 02–04 дек. 2024 г. – Воронеж: Науч.-исслед. публикации, 2025. – С. 766–770.

3. Степанова, Л.В. Теоретические и конечно-элементные решения механики разрушения анизотропных сред / Л.В. Степанова, М.А. Фомченкова // Математическое моделирование и краевые задачи: материалы XII Всерос. науч. конф. с междунар. участием: в 2 т. – Самара: СамГТУ, 2024. – Т. 1. – С. 136–139.

4. Фомченкова, М.А. Обобщение на случай анизотропных материалов переопределенного метода восстановления амплитудных коэффициентов рядов, представляющих механические поля вблизи кончика дефекта / М.А. Фомченкова, Л.В. Степанова // Математическое моделирование в естественных науках. – 2024. – Т. 1. – С. 403–406.

5. Фомченкова, М.А. Процедура переопределенного метода нахождения коэффициентов разложения полей у вершины трещины, основанная на конечно-элементном решении для компонент тензора напряжения / М.А. Фомченкова, Л.В. Степанова // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. – 2024. – Т. 30, № 2. – С. 54–66.