

УДК 539.374

КРУЧЕНИЕ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ П-ОБРАЗНОГО ПРОФИЛЯ, АРМИРОВАННОГО УПРУГИМИ ВОЛОКНАМИ

© Евтихов Д.О.

*Сибирский государственный университет науки и технологий
имени академика М.Ф. Решетнева, г. Красноярск, Российская Федерация*

Научный руководитель: Сенашов С.И., д-р физ.-мат. наук, профессор
*Сибирский государственный университет науки и технологий
имени академика М.Ф. Решетнева, г. Красноярск, Российская Федерация*

e-mail: evtikhov_do@sibsau.ru

Ключевые слова: упругопластическая граница, задача кручения стержней прокатного профиля, стержни, армированные упругими волокнами, законы сохранения.

В настоящее время использованию композитных материалов уделяется все больше внимания [1–5].

Нахождение упругопластической границы в скручиваемых стержнях, необходимо для нахождения предела прочности изделия или для его упрочнения при помощи пластических деформаций. При этом важно, чтобы пластическому деформированию подвергались только близкие к внешней поверхности слои материала, и чтобы в процессе деформирования не произошло разрушение упрочняемого изделия и не ухудшились его эксплуатационные характеристики. В последнее время широкое распространение получили стержни прокатного профиля, армированные упругими волокнами. Они обладают рядом преимуществ перед металлическим изделиями. Как правило, они меньше весят и армирование позволяет им выдерживать большие нагрузки до разрушения, чем их металлические аналоги. Устоявшихся методов расчета их несущей способности в настоящее время практически нет.

Перечисленные проблемы приводят к задаче нахождения упругопластической границы стержней прокатного профиля, армированных упругими волокнами [6]. До работ авторов [7–9] не было представлено эффективного метода, который позволял бы решать эту задачу. Использование законов сохранения для решения дифференциальных уравнений позволило получить аналитические формулы для нахождения упругопластической границы стержней. В данной работе предложен метод построения упругопластической границы в скручиваемых стержнях прокатного профиля, армированных упругими волокнами. Этот метод позволяет сделать оценку несущей способности таких стержней.

Постановка задачи

Рассмотрим прямолинейный стержень, изготовленный из упруго пластического материала, армированный упругими n волокнами.

Матрица стержня имеет модуль упругости G и предел текучести при чистом сдвиге k . Волокна расположены вдоль стержня в произвольном порядке параллельно оси Z . Каждое волокно имеет круглое сечение, центр располагается в точке A_i с координатами (x_i, y_i) , радиус волокна равен R , модуль упругости G_i . Пределы текучести волокон превосходят предел текучести матрицы. Касательное напряжение между волокном и матрицей равно $\tau < k$.

Заданный процесс описывается уравнением равновесия

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

и уравнением совместности деформаций

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} = \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} + a, \quad (2)$$

где $a = -G\theta$, θ – угол закручивания, G – модуль упругости.

Граничные условия на боковой поверхности стержня, свободной от напряжений, и находящейся в пластическом состоянии

$$\tau_{xz}n_0 + \tau_{yz}m_0 = 0, \quad \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 = k^2,$$

где n_0, m_0 – компоненты вектора нормали к боковой поверхности; которые можно записать в виде

$$\tau_{xz} = \mp mk, \tau_{yz} = \pm nk. \quad (3)$$

На границе между волокном и матрицей выполняются условия

$$\tau_{xz}m_i - \tau_{yz}n_i = \tau, \quad \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 = k^2,$$

где n_i, m_i – компоненты вектора нормали к боковой поверхности i -го волокна, которые запишем в виде.

$$\tau_{xz} = m\tau \pm n\sqrt{k^2 - \tau^2}, \quad \tau_{yz} = n\tau \pm m\sqrt{k^2 - \tau^2}. \quad (4)$$

Законы сохранения уравнений (1) – (2)

Для удобства дальнейших вычислений введем следующие обозначения:

$$\tau_{xz} = u, \tau_{yz} = v.$$

Тогда задача (1) – (4) запишется так

$$F_1 = u_x + v_y = 0, \quad F_2 = u_y - v_x - a = 0, \quad (5)$$

на боковой поверхности

$$u = \mp mk, v = \pm nk,$$

на границе волокна и матрицы

$$u = m\tau \pm n\sqrt{k^2 - \tau^2}, \quad v = n\tau \pm m\sqrt{k^2 - \tau^2}.$$

Определение. Законом сохранения для системы уравнений (5) назовем выражение вида

$$A_x(x, y, u, v) + B_y(x, y, u, v) = \omega_1 F_1 + \omega_2 F_2, \quad (6)$$

где ω_1, ω_2 – некоторые линейные операторы, одновременно не равные тождественно нулю.

Пусть

$$A = \alpha^1 u + \beta^1 v + \gamma^1, \quad B = \alpha^2 u + \beta^2 v + \gamma^2, \quad (7)$$

где $\alpha^i, \beta^i, \gamma^i$ – функции только от x, y .

Подставляя (7) в (6), получаем

$$\alpha_x^1 + \alpha_y^2 = 0, \quad \beta_x^1 + \beta_y^2 = 0, \quad \alpha^1 = \omega_1, \\ \beta^1 = -\omega_2, \quad \alpha^2 = \omega_2, \quad \beta^2 = \omega_1, \quad \gamma_x^1 + \gamma_y^2 = -a\omega_2.$$

Отсюда следует

$$\alpha_x^1 - \beta_y^1 = 0, \beta_x^1 + \alpha_y^1 = 0, \gamma_x^1 + \gamma_y^2 = -a\beta^1. \quad (8)$$

Рассмотрим для системы уравнений (8) два решения:

$$\alpha^1 = \frac{x-x_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}, \beta^1 = -\frac{y-y_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}, \gamma^1 = -a \operatorname{arctg} \frac{x-x_0}{y-y_0}, \gamma^2 = 0, \quad (9)$$

$$\alpha^1 = \frac{y-y_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}, \beta^1 = \frac{x-x_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}, \gamma^2 = -a \operatorname{arctg} \frac{y-y_0}{x-x_0}, \gamma^1 = 0, \quad (10)$$

где x_0, y_0 - постоянные.

Более подробно эти вычисления рассматриваются в [7].

Используя данные вычисления для построения упругопластической границы для стржня П-образного сечения, прокатного профиля, нами были разработана программа для ЭВМ [10] в среде Maple. Результаты расчета представлены далее.

На рисунке представлено изменение упругопластические границы прокатного профиля П-образного сечения, армированного упругими волокнам в зависимости от изменения значения крутящего параметра а.

Профиль швеллер П-образного сечения, используется в качестве опорного изделия в строительстве и тяжелом машиностроении. Подходит для создания межэтажных перекрытий, лестниц, элементов строительной и специальной техники. Может иметь прямые и наклонные грани полок.

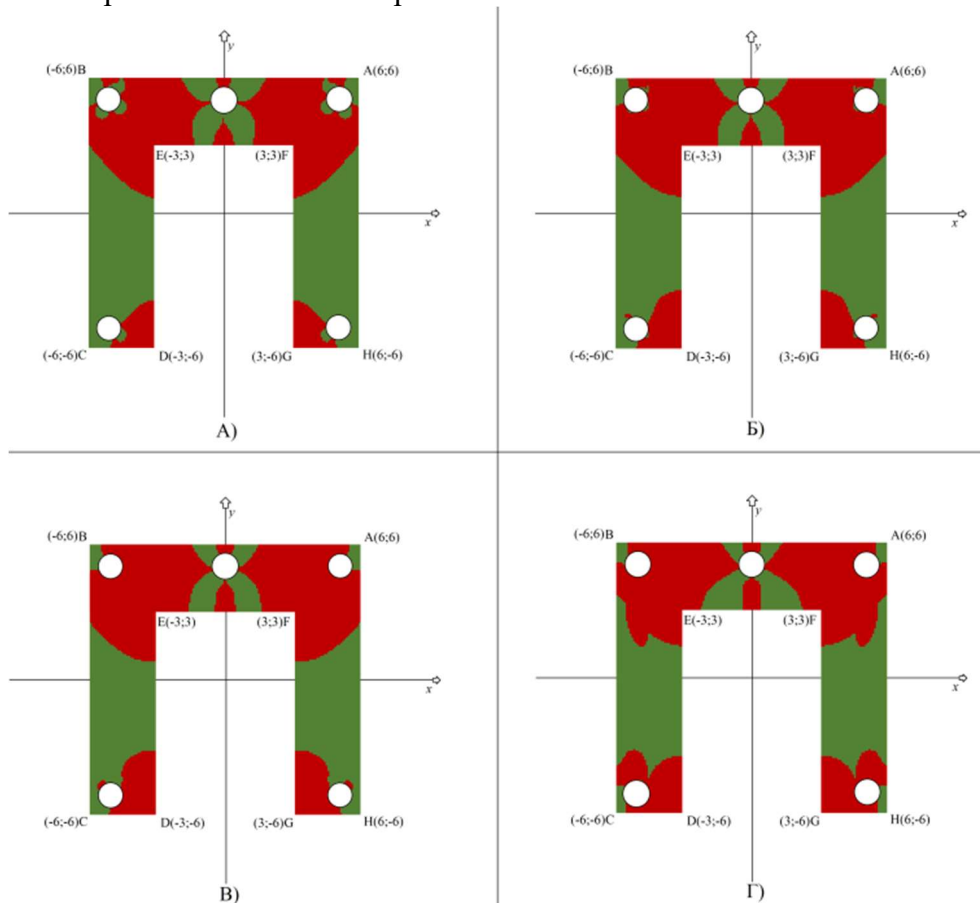


Рисунок – Упругопластическая граница швеллер профиля, армированного упругими волокнами, при значениях крутящего параметра: А) $a=-0,6$ Б) $a=-1$ В) $a=-1,6$ Г) $a=-3$.

Заключение

Рассмотрена задача о упругопластическом кручении стержней прокатного профиля, армированных упругими волокнами. Для решения задачи использовались законы сохранения. Разработана программы для ЭВМ [10] для нахождения упругопластической границы стержня. Приведены результаты работы программы с различными значениями крутящего параметра для швеллер стержня П-образного сечения.

Библиографический список

1. Композитная сталь / Н.С. Саркисян, А.О. Саркисян, А.А. Колчин [и др.] // Композиты и наноструктуры. – 2024. – Т. 16, № 3. – С. 202–207. – DOI: 10.36236/1999-7590-2024-16-3-202-207. – EDN: EAQPSQ.
2. Структурно-функциональный анализ как основа проектирования структуры массозффективных силовых элементов конструкций из композиционных материалов / П.В. Соловьев, Ю.С. Первушин, В.С. Жернаков, А.В. Ахмедьянов // Композиты и наноструктуры. – 2023. – Т. 15, № 4. – С. 237–246. – DOI: 10.36236/1999-7590-2023-15-4-237-246. – EDN: FASWSZ.
3. Богачева, В.Э. Разрыв по моде I адгезионного слоя с учетом диагональных компонент тензора напряжений / В.Э. Богачева, Л.В. Глаголев // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2022. – № 4 (54). – С. 47–56. – DOI: 10.37972/chgpu.2022.54.4.005. – EDN: ULGOYA.
4. Голышев, А.А. Влияние керамического волокна SiC в металломатричном композите на его стойкость при высокоскоростном нагружении / А.А. Голышев, С.В. Долгова // Прикладная механика и техническая физика. – 2022. – Т. 63, № 6 (376). – С. 145–149. – DOI: 10.15372/PMTF20220616. – EDN: PUGZHK.
5. Сенашов, С.И. Изгиб композитного бруса / С.И. Сенашов, И.Л. Савостьянова, А.Н. Яхно // Сибирский аэрокосмический журнал. – 2024. – Т. 25, № 1. – С. 25–32. – DOI: 10.31772/2712-8970-2024-25-1-25-32. – EDN RRHQRU.
6. Аннин, Б.Д. Упруго-пластическая задача / Б.Д. Аннин, Г.П. Черепанов. – Новосибирск: Наука, 1983. – 238 с. – ISBN 5-7692-0297-1. – EDN: XXGCWN.
7. Киряков, П.П. Приложение симметрий и законов сохранения к решению дифференциальных уравнений / П.П. Киряков, С.И. Сенашов, А.Н. Яхно. – Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2001. – 192 с.
8. Senashov, S.I. Conservation laws, hodograph transformation and boundary value problems of plane plasticity / S.I. Senashov, A.N. Yakhno // Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications. – 2012. – Vol. 8. – P. 071. – DOI: 10.3842/SIGMA.2012.071. – EDN: RGOBNN.
9. Сенашов, С.И. Об упругопластическом кручении стержня / С.И. Сенашов, О.Н. Черепанова, А.В. Кондрин // Вестник Сибирского государственного аэрокосмического университета им. академика М.Ф. Решетнева. – 2013. – № 3 (49). – С. 100–103. – EDN: RFWONN.
10. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2025614585 Российская Федерация. Построение упругопластической границы скручиваемого П-образного профиля, армированного упругими волокнами: заявл. 12.02.2025; опубли. 24.02.2025 / Д.О. Евтихов, И.Л. Савостьянова, С.И. Сенашов, О.Н. Черепанова. – EDN: DDKGDF.