

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

Л.С. КЛЕНТАК

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом
федерального государственного бюджетного образовательного
учреждения высшего профессионального образования «Самар-
ский государственный аэрокосмический университет имени
академика С.П. Королева (национальный исследовательский
университет) в качестве учебного пособия

САМАРА
Издательство СГАУ
2013

УДК 519.2 (075)
ББК 22.171я7
К484

Рецензенты: зав. кафедрой организации производства СГАУ
д-р техн. наук, проф. В. Г. З а с к а н о в;
проф. кафедры прикладной математики
и эконометрики НОУ ВПО "МИР",
д-р техн. наук И. Н. Х а й м о в и ч

Клентак Л.С.

К 484 **Элементы теории вероятностей и математической статистики:**
учеб. пособие / *Л.С. Клентак*. – Самара: Изд-во Самар. гос.
аэрокосм. ун-та, 2013. – 156 с.

ISBN 978-5-7883-0928-6

В пособии кратко и в доступной форме рассматривается математический аппарат, обеспечивающий студентам заочного факультета экономического профиля повышение общего уровня математической культуры, выработку навыков использования вероятностно - статистических законов и исследования статистических моделей.

Конспективно излагаются основные теоретические положения каждой изучаемой темы, приводится подробное решение типовых задач, а также для более полного усвоения методики решения предлагаются задачи для самостоятельной работы. Включены варианты индивидуальных контрольных заданий.

Работа подготовлена на кафедре "Математические методы в экономике" для студентов заочного факультета, обучающихся по направлениям подготовки 080100.62 – Экономика и 080200.62 – Менеджмент.

УДК 519.2 (075)
ББК 22.171я7

ISBN978-5-7883-0928-6

© Самарский государственный
аэрокосмический университет, 2013

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	5
1. Основные понятия теории вероятностей.....	6
1.1 Испытания и события.....	6
1.2 Практическое занятие №1.....	11
1.3 Элементы комбинаторики.....	17
Практическое занятие №2.....	33
2. Основные теоремы теории вероятностей.....	37
2.1 Теоремы сложения и умножения вероятностей.....	37
2.2 Формула полной вероятности и формулы Байеса.....	45
2.3 Практическое занятие №3.....	48
2.4 Последовательность независимых испытаний.....	51
2.5 Практическое занятие №4.....	61
3. Случайные величины.....	63
3.1 Понятие случайной величины и ее функции распределения.....	63
3.2 Случайные величины и их числовые характеристики.....	66
3.3 Практическое занятие №5.....	74
4. Закон больших чисел и основные законы распределения	77
4.1 Понятие о законе больших чисел.....	77
4.2 Законы распределения случайных величин.....	79
4.3 Практическое занятие №6.....	91
5. Основные понятия математической статистики.....	93
5.1 Первичная обработка выборок.....	93
5.2 Теория оценок.....	114
5.3 Практическое занятие №7.....	117

Требования к выполнению и оформлению контрольной работы.....	120
Контрольная работа №1.....	122
Контрольная работа №2.....	127
Приложения.....	128
Список литературы.....	155

ВВЕДЕНИЕ

Данное учебное пособие предназначено для студентов заочного факультета СГАУ при изучении дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика». В настоящее время очевидна универсальность вероятностно-статистических законов: не только естественно-научные дисциплины, но и весь комплекс социально-экономических наук развиваются на вероятностно-статистической базе.

Данное пособие ставит своей целью оказание помощи студентам заочного факультета в организации их самостоятельной работы по овладению системой знаний, умений и навыков в объеме действующей программы.

В каждой теме пособия подробно проанализированы варианты типовых задач, а для более полного усвоения методики решения предлагаются задачи для самостоятельной работы.

Контрольные работы следует выполнять самостоятельно и лишь после того, как проработан соответствующий теоретический материал и решен необходимый минимум задач. Так как каждой теме соответствует задача или упражнение, контрольную работу следует выполнять постепенно по мере изучения материала.

При решении задач следует обосновать каждый шаг решения, исходя из теоретических основ курса. Решение должно быть доведено до окончательного ответа.

Теория в пособии дается в сжатой форме и служит в основном для того, чтобы при решении задач можно было делать точные ссылки на нужные формулы, определения, теоремы, правила.

Избрав учебное пособие в качестве основного, придерживайтесь его при изучении всей части курса, так как замена учебника может привести к утрате логической связи между отдельными вопросами.

Конспекты по дисциплине главным образом должны содержать определения, чертежи и выводы основных формул. Записи должны быть аккуратными. Не нужно забывать, что они делаются для того, чтобы впоследствии ими пользоваться.

Учитесь самоконтролю. Для заочника – это важнейшая форма проверки правильности понимания и усвоения материала. Решение задач является лучшим способом закрепления материала. Если решить задачу не удастся, отыщите в учебной литературе уже решенную задачу, похожую на данную, изучите внимательно это «готовое» решение и постарайтесь снова приступить к решению данной задачи.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

1.1 Испытания и события

Предмет теории вероятностей. Возникла теория вероятностей в середине XVII века. У ее истоков стояли французские математики Б. Паскаль и П. Ферма, а также голландский математик Х. Гюйгенс. В переписке между ними, вызванной анализом задач, связанных с азартными играми, формировались основные понятия теории вероятностей. При этом следует отметить, что выдающиеся ученые, решая различные задачи азартных игр, предвидели фундаментальную роль науки, изучающей случайные явления.

В настоящее время теория вероятностей характеризуется всеобщим подъемом интереса к ней, а ее методы находят широкое применение в различных областях. Теперь немыслимо успешное развитие теории массового обслуживания, теории информации, теории управления, теории надежности, физики, геодезии, астрономии, экономики и других разделов науки без четких представлений о случайных явлениях (событиях) и их закономерностях.

Всякое случайное событие является следствием очень многих причин. Например, выпадение герба или цифры при бросании монеты зависит от силы, с которой брошена монета, ее формы, сплава и многих других причин. Попадание или промах при стрельбе зависят от расстояния до мишени, формы и веса пули (снаряда), от направления и силы ветра и других случайных причин. В связи с этим невозможно заранее предсказать, произойдет единичное событие или нет. Иначе обстоит дело при изучении многократно повторяющихся опытов. Оказывается, что однородные случайные события при многократном повторении опыта подчиняются определенным закономерностям. Изучением этих закономерностей и занимается теория вероятностей. К основным понятиям теории вероятностей относятся испытания и события.

Под *испытанием (опытом)* понимают реализацию данного комплекса условий, в результате которого непременно произойдет какое-либо событие. Например, бросание монеты – испытание; появление герба или цифры – события.

Случайным событием называется событие, связанное с данным испытанием, которое при осуществлении испытания может произойти, а может и не произойти. Слово "случайное" для краткости часто опускают и говорят просто "событие". Например, выстрел по цели – это опыт, случайные события в этом опыте – попадание в цель или промах.

Событие называется *достоверным*, если в результате опыта оно непременно должно произойти, и *невозможным*, если оно заведомо не произойдет, например, выпадение не более шести очков при бросании одной игральной кости – достоверное событие; выпадение десяти очков при бросании одной игральной кости – невозможное событие.

Два события называются *несовместными*, если появление одного из них исключает появление другого. В противном случае события называются *совместными*.

Пример 1. В ящике имеются стандартные и нестандартные детали. Наудачу берут одну деталь. События A_1 – «появилась стандартная деталь» и A_2 – «появилась нестандартная деталь» являются несовместными событиями.

Пример 2. Брошена игральная кость. Событие A_1 – «появление двух очков» и событие A_2 – «появление четного числа очков» совместны, так как появление одного из них не исключает появления другого.

События $A_1, A_2, \dots, A_n$ называются *попарно несовместными*, если любые два из этих событий несовместны.

Пример 3. Произведено два выстрела по мишени. События A_1 – «два попадания», A_2 – «только одно попадание», A_3 – «ни одного попадания» попарно несовместны.

События $A_1, A_2, \dots, A_n$ образуют *полную систему событий*, если в результате данного испытания непременно произойдет хотя бы одно из них.

Пример 4. Учащемуся на экзаменах достался билет с двумя теоретическими вопросами. События A_1 – «учащийся знает оба вопроса», A_2 – «учащийся знает первый вопрос, но не знает второго», A_3 – «учащийся знает второй вопрос, но не знает первого», A_4 – «учащийся знает

только один вопрос», A_5 – «учащийся не знает ни одного из вопросов» – образуют полную систему событий, среди которых имеются как несовместные – A_1 и A_2 , A_1 и A_5 и другие, так и совместные – A_2 и A_4 , A_3 и A_4 .

В теории вероятностей важную роль играет *полная система попарно несовместных событий*, т.е. такая система событий, что в результате данного испытания непременно произойдет одно, и притом только одно, событие данной системы.

Пример 5. Из ящика, в котором имеются стандартные и нестандартные детали, наудачу извлечены три детали. События A_1 – «все три детали стандартные», A_2 – «две детали стандартные и одна нестандартная», A_3 – «одна деталь стандартная и две нестандартные», A_4 – «все три детали нестандартные» образуют полную систему попарно несовместных событий.

Различают события *элементарные и составные*. Так, в примере 4 событие A_4 является составным событием из A_2 и A_3 , потому что событие A_4 наступит только в результате наступления либо только события A_2 , либо только события A_3 . В таком случае говорят, что событие A_4 разлагается на элементарные события A_2 и A_3 , и пишут $A_4 = \{A_2, A_3\}$.

Пример 6. При однократном бросании игральной кости элементарными являются события: $A_1 = \{1\}$ – «появление одного очка», $A_2 = \{2\}$ – «появление двух очков», $A_3 = \{3\}$ – «появление трех очков», $A_4 = \{4\}$ – «появление четырех очков», $A_5 = \{5\}$ – «появление пяти очков», $A_6 = \{6\}$ – «появление шести очков». События $B = \{1, 3, 5\}$ – «появление нечетного числа очков», $B_2 = \{3, 6\}$ – «появление числа очков, кратного 3», $B_3 = \{1, 2, 3, 4\}$ – «появление числа очков, меньшего пяти» являются составными, так как их можно разложить соответственно на три $\{1\}$, $\{3\}$, $\{5\}$, два $\{3\}$, $\{6\}$ и четыре $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$ элементарных события.

События $A_1, A_2, \dots, A_n$ называются *равновозможными*, если условия испытания обеспечивают одинаковую возможность осуществления каждого из них.

Пример 7. Появление того или иного числа очков при бросании игральной кости есть события равновозможные, так как игральная кость изготавливается из однородного материала и имеет строго симметричную форму.

Множество всех элементарных событий, связанных с некоторым опытом, называется пространством элементарных событий Ω . Будем считать, что пространство Ω конечно или счетно.

Классическое и статистическое определение вероятности. Каждое событие обладает какой-то степенью возможности. Численная мера степени объективной возможности события – это вероятность события. Вероятность события A обозначается $P(A)$. Пусть из системы n несовместных равновозможных исходов испытания m исходов благоприятствуют событию A .

Вероятностью события A называют отношение числа благоприятствующих этому событию исходов к общему числу всех несовместных равновозможных элементарных исходов, образующих полную группу данного испытания:

$$P(A) = \frac{m}{n}. \quad (1.1)$$

Эта формула носит название *классического определения вероятности*.

Отметим *свойства* вероятности события.

1. Вероятность любого события заключена между нулем и единицей, т.е. $0 \leq P(A) \leq 1$.
2. Вероятность достоверного события равна единице, т.е. $P(U) = 1$, т.к. если U – достоверное событие, то $m = n$.
3. Вероятность невозможного события равна нулю, т.е. $P(V) = 0$, т.к. если V – невозможное событие, то $m = 0$.

Пример 8. Игральную кость подбрасывают один раз. Найти вероятности событий: A – появление четного числа очков; B – появление не менее пяти очков; C – появление не более пяти очков.

Решение. Опыт имеет шесть равновозможных независимых исходов (появление одного, двух, трех, четырех, пяти и шести очков), образующих полную систему.

Событию A благоприятствуют три исхода (выпадение двух, четырех и шести очков), поэтому $P(A) = 3/6 = 1/2$; событию B – два исхода (выпадение пяти и шести очков), поэтому $P(B) = 2/6 = 1/3$; событию C – пять исходов (выпадение одного, двух, трех, четырех и пяти очков), поэтому $P(C) = 5/6$.

Классическое определение вероятностей применимо только для тех событий, которые могут появиться в результате испытаний, обладающих *симметрией* возможных исходов, т.е. сводящихся к схеме случаев.

Но есть и другой подход при оценке вероятности событий, основанный на том, насколько *часто* будет появляться данное событие в произведенных испытаниях. В этом случае используется *статистическое определение* вероятности.

Статистической вероятностью события A называется относительная частота (частость) появления этого события в n произведенных испытаниях, т.е.

$$\tilde{P}(A) = w(A) = \frac{m}{n}, \quad (1.2)$$

где $\tilde{P}(A)$ – статистическая вероятность события A ; $w(A)$ – относительная частота (частость);

m – число испытаний, в которых появилось событие A ;

n – общее число испытаний.

В отличие от "математической" вероятности, рассматриваемой в классическом определении, статистическая вероятность является характеристикой *опытной, экспериментальной*.

Операции над событиями. Укажем некоторые соотношения, которые могут существовать между событиями системы.

1. Если в результате испытания при каждом появлении события A наступает событие B , то говорят, что A является частным случаем B и записывают этот факт в виде $A \subset B$.

2. Если $A \subset B$ и $B \subset A$, то $A=B$. События A и B называются *равными*, если при каждом испытании они оба наступают либо не наступают.

3. *Произведением событий A и B* называется такое событие AB , которое заключается в совместном наступлении этих событий.

4. *Суммой событий A и B* называется такое событие $A+B$, которое заключается в наступлении, по крайней мере, одного из этих событий.

5. Событие $\bar{A}$ называется противоположным событию A (и наоборот), если для них одновременно выполняются неравенства: $A + \bar{A} = U$; $A\bar{A} = V$.

6. События A и B называются несовместными, если их совместное наступление неосуществимо, т. е. если $AB = V$.

Введенные операции над событиями удовлетворяют следующим правилам:

1. $A + B = B + A$ -коммутативность сложения.
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$ -ассоциативность сложения.
3. $AB = BA$ -коммутативность умножения.
4. $A(BC) = (AB)C$ -ассоциативность умножения.
5. $A(B + C) = AB + AC$ -закон дистрибутивности.

Из определения операций над событиями вытекают равенства:

$A + A = A$	$A \cdot A = A$
$A + U = U$	$A \cdot U = A$
$A + V = A$	$A \cdot V = V$
$A + \bar{A} = U$	$A \cdot \bar{A} = V$
$U + V = U$	$UV = V$

1.2. Практическое занятие №1

по теме: «Испытания и события. Виды случайных событий.

Классическое определение вероятности»

Цель занятия: изучить основные понятия теории вероятностей; знать классификацию событий и методы вычисления вероятности событий.

Предмет теории вероятностей. Понятие о случайном событии. Виды случайных событий. Частота события. Классическое и статистическое определение вероятности событий.

Учебные вопросы:

1. Предмет теории вероятностей.
2. Испытания и события.
3. Классическое и статистическое определение вероятности.
4. Операции над событиями.
5. Применение знаний при решении типовых примеров и задач.

Методические рекомендации

Изучите основные теоретические сведения и ответьте на контрольные вопросы, только затем приступите к решению упражнений.

1. Вопросы для самопроверки:

1. Какое событие называется невозможным, достоверным, случайным?
2. Какие события называются совместными, несовместными, равновероятными?
3. Какие события образуют полную систему событий?
4. Что понимается под вероятностью события?
5. Дайте классическое определение вероятности события.

2. Упражнения для самостоятельной работы:

1. Укажите, какие из следующих событий – невозможные, достоверные, случайные:

A: футбольный матч «Спартак» – «Динамо» закончится вничью.

B: вы выиграете, участвуя в беспроигрышной лотерее.

C: в полночь выпадет снег, а через 24 ч будет светить солнце.

D: завтра будет контрольная по математике.

E: 30 февраля будет дождь.

Ответ: Событие *B* – достоверное; *C*, *E* – невозможные; *A*, *D* – случайные. Но если вы решаете эту задачу накануне выходного дня, то событие *D* можно считать невозможным.

2. Вы купили в магазине телевизор, на который фирма-производитель дает два года гарантии. Какие из следующих событий невозможные, случайные, достоверные:

A: телевизор не сломается в течение года.

B: телевизор не сломается в течение двух лет.

C: в течение двух лет вам не придется платить за ремонт телевизора.

D: телевизор сломается на третий год.

Ответ: События *A*, *B*, *D* – случайные, событие *C* – достоверное.

3. В коробке лежат десять красных, одна зеленая и две синих ручки. Из коробки наугад вынимаются два предмета. Какие из следующих событий невозможные, случайные, достоверные:

A: будут вынуты две красных ручки.

B: будут вынуты две зеленых ручки.

C: будут вынуты две синих ручки.

D: будут вынуты две разноцветных ручки.

E: будут вынуты две ручки.

F: будут вынуты два карандаша.

Ответ: События *A, C, D* – случайные; события *B, F* – невозможные; *E* – достоверное.

4. Три господина, придя в ресторан, сдали в гардероб свои шляпы. Расходились по домам они уже в темноте и разобрали свои шляпы наугад. Какие из следующих событий невозможные, случайные, достоверные:

A: каждый надел свою шляпу.

B: все надели чужие шляпы.

C: двое надели чужие шляпы, а один – свою.

D: двое надели свои шляпы, а один – чужую.

Ответ: События *A, B, C* – случайные; *D* – невозможное.

5. В игре «Любовь с первого взгляда» трое юношей и три девушки случайно выбирают друг друга. Если выбор какого-нибудь юноши и девушки совпал, то образуется пара. Какие из следующих событий невозможные, случайные, достоверные:

A: не образовалось ни одной пары.

B: образовалась одна пара.

C: образовалось две пары.

D: образовалось три пары.

Ответ: Все события случайные.

6. Винни Пух, Пятачок и «все-все-все» садятся за круглый стол праздновать день рождения. При каком количестве «всех-всех-всех» событие *A: Винни и Пятачок будут сидеть рядом* является достоверным, а при каком – случайным?

Ответ: Если «всех-всех-всех» всего 1, т.е. за столом собрались всего три лица, то событие *A* – достоверное, если больше 1, то *A* – случайное событие.

7. Среди 100 билетов школьной благотворительной лотереи 20 выигрышных. Сколько билетов вам надо купить, чтобы событие *A: вы ничего не выиграете* было невозможным? *Ответ:* 81 билет.

8. В шкафу 10 пар ботинок с 36-го по 45-й размеры – по одной паре каждого размера. Какое минимальное количество ботинок надо наугад вынуть из шкафа, чтобы событие *A*: *из вынутых ботинок можно составить хотя бы одну пару* было достоверным?

Ответ: 11 ботинок.

9. Автобусу, в котором едут 15 пассажиров, предстоит сделать 10 остановок. Какие из следующих событий невозможные, случайные, достоверные:

A: все пассажиры выйдут на разных остановках.

B: все пассажиры выйдут на одной остановке.

C: на каждой остановке хоть кто-то выйдет.

D: найдется остановка, на которой никто не выйдет.

E: на всех остановках выйдет четное число пассажиров.

F: на всех остановках выйдет нечетное число пассажиров.

Ответ: События *B*, *C*, *D* – случайные; *A*, *E*, *F* – невозможные.

10. На модели координатной прямой в точке 0 стоит фишка. После каждого бросания монеты она сдвигается на единицу вправо, если выпал «орел», и на единицу влево, если выпала «решка». Какие из следующих событий невозможные, случайные, достоверные:

A: после четырех бросаний фишка находится в точке 0.

B: после трех бросаний фишка находится в точке 2.

C: после пяти бросаний фишка находится в точке 5.

D: после пятидесяти бросаний фишка находится в точке 25.

E: после пятидесяти бросаний фишка находится в точке 26.

Ответ: События *A*, *C*, *E* – случайные; *B*, *D* – невозможные.

11. На остановке останавливаются три автобуса: № 1, 2 и 3. Интервал в движении каждого автобуса колеблется от 8 до 10 мин. Когда Саша, Маша, Гриша и Наташа подошли к остановке, от нее отошел автобус № 3, а еще через 6 мин подошел автобус № 1. После этого каждый из ребят высказал свое мнение о том, каким будет следующий автобус.

Саша: «Следующим обязательно будет № 2».

Маша: «Возможно, что следующим будет № 2».

Гриша: «Возможно, что следующим будет № 3».

Наташа: «Невозможно, что следующим будет № 1».

С кем из ребят вы согласны, а с кем нет? Объясните сделанный выбор.

Ответ: Не прав только Саша.

12. В коробке 3 красных, 3 желтых, 3 зеленых шара. Вытаскиваем наугад n шаров. Рассмотрим событие A : среди вынутых шаров окажутся шары ровно трех цветов.

Для каждого n от 1 до 9 определите, какое это событие – невозможное, достоверное или случайное. Ответ: в табл. 1.

Таблица 1

Число вынутых шаров (n)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Характеристика A	Н	Н	С	С	С	С	Д	Д	Д

13. В коробке снова 3 красных, 3 желтых, 3 зеленых шара. Вытаскиваем наугад 4 шара. Рассмотрим событие B : среди вынутых шаров окажутся шары ровно t расцветок.

Для каждого t от 1 до 4 определите, какое это событие – невозможное, достоверное или случайное, и заполните табл. 2. Ответ: в табл.

Таблица 2

Число расцветок (t)	1	2	3	4
Характеристика события B	Н	С	С	С

14. Попробуем обобщить результаты двух предыдущих задач. В коробке 3 красных, 3 зеленых шара. Вытаскиваем наугад n шаров. Рассмотрим событие C : среди n вынутых шаров окажутся шары ровно t разных цветов. Для каждого n от 1 до 9 и каждого t от 1 до 4 определите, какое это событие – невозможное, достоверное или случайное, и заполните табл. 3. Какие клетки этой таблицы можно заполнить сразу по результатам двух предыдущих задач? Ответ: в табл. 3.

Таблица 3

Характеристика события C в зависимости от n и t				
Число расцветок (t) Число шаров (n)	1	2	3	4
1	Д	Н	Н	Н
2	С	С	Н	Н
3	С	С	С	Н
4	Н	С	С	Н
5	Н	С	С	Н
6	Н	С	С	Н
7	Н	Н	Д	Н
8	Н	Н	Д	Н
9	Н	Н	Д	Н

15. Найти среди событий A_i достоверные и невозможные:
 A_1 – «появление 10 очков при бросании игральной кости»;
 A_2 – «появление 10 очков при бросании трех игральных костей»;
 A_3 – «появление 20 очков при бросании трех игральных костей»;
 A_4 – «наугад выбранное двузначное число не больше 100»;
 A_5 – «появление двух гербов при бросании двух монет».
16. Являются ли несовместными события A_1 и A_2 :
 испытание – бросание монеты; события: A_1 – «появление герба», A_2 – «появление цифры»;
 испытание – бросание игральной кости; события: A_1 – «появление трех очков», A_2 – «появление нечетного числа очков»;
 испытание – бросание двух монет; события: A_1 – «появление герба на одной из монет», A_2 – «появление герба на второй монете»?
17. Являются ли равновозможными события A_1 и A_2 :
 испытание – бросание игральной кости; события: A_1 – «появление двух очков», A_2 – «появление пяти очков»;
 испытание – бросание игральной кости; события: A_1 – «появление двух очков», A_2 – «появление четного числа очков»;
 испытание – два выстрела по мишени; события: A_1 – «промах при первом выстреле», A_2 – «промах при втором выстреле»?
18. Образуют ли полную систему события:
 Испытание – бросание монеты; события: A_1 – «появление герба», A_2 – «появление цифры».
 Испытание – три выстрела по мишени; события: A_1 – «ни одного попадания», A_2 – «одно попадание», A_3 – «два попадания», A_4 – «три попадания». Являются ли они попарно несовместными?
19. Найти сумму событий:
 1) испытание – два выстрела по мишени; события: A – «попадание с первого выстрела», B – «попадание со второго выстрела»;
 2) испытание – бросание игральной кости; события: A – «появление одного очка», B – «появление двух очков», C – «появление трех очков»;

3) испытание – приобретение лотерейных билетов; события – A – «выигрыш 10 рублей»; B – «выигрыш 20 рублей»; C – «выигрыш 25 рублей».

20. Найти произведение событий:

испытание – два выстрела по мишени; события: A – «попадание первым выстрелом», B – «попадание вторым выстрелом»;

испытание – бросание игральной кости; события: A – «непоявление трех очков»; B – «непоявление пяти очков», C – «непоявление нечетного числа очков».

21. Назовите противоположные события для событий:

A – «выпадение двух гербов при бросании двух монет»;

B – «появление белого шара», если опыт состоит в извлечении одного шара из урны, в которой имеются белые, черные и красные шары;

C – «пять попаданий при пяти выстрелах»;

D – «не более трех попаданий при пяти выстрелах»;

E – «хотя бы одно попадание при пяти выстрелах».

22. В урне 100 шаров, помеченных номерами 1, 2, ..., 100. Из урны наугад вынимают один шар. Какова вероятность того, что номер вынутого шара содержит цифру 5?

23. Из урны, в которой находятся 7 красных, 8 желтых и 5 зеленых шаров, наудачу вынимается один. Найти вероятность того, что вынутый шар окажется: а) красным; б) желтым; в) черным; г) зеленым.

24. Среди 50 деталей 5 нестандартных. Найти вероятность того, что наугад взятая деталь окажется: а) стандартной; б) нестандартной.

25. Брошена игральная кость. Найти вероятность следующих событий: A – «выпало 3 очка»; B – «выпало нечетное число очков».

26. Монета брошена два раза. Какова вероятность того, что хотя бы один раз выпадет герб?

1.3. Элементы комбинаторики

При решении ряда теоретических и практических задач требуется из конечного множества элементов по заданным правилам состав-

лять различные комбинации и производить подсчет числа всех возможных таких комбинаций. Такие задачи принято называть *комбинаторными*, а раздел математики, занимающийся их решением, называется *комбинаторикой*. Комбинаторика широко применяется в теории вероятностей, теории массового обслуживания, теории управляющих систем и вычислительных машин и других разделах науки и техники.

Упорядоченные и неупорядоченные подмножества. Основными понятиями комбинаторики являются понятия множеств *упорядоченного* и *неупорядоченного*. Следует сразу оговорить, что в комбинаторике множество рассматривается с точки зрения того, что можно с ним сделать, или как одно множество соотнести с другим. Исходя из этого, понятие *неупорядоченного множества* можно описать как некий набор элементов, связанных между собой лишь отношением принадлежности данному множеству, т. е. по отношению друг к другу элементы этого множества обладают неограниченной (качественно) свободой взаиморасположения и взаимосвязей. Понятие *упорядоченного множества* можно описать как множество, на котором задан некоторый порядок, т. е. элементы его либо ограничены в свободе взаиморасположения (произведена их фиксация в множестве), либо на множестве задана какая-то структура, либо каждому элементу присвоена возможность оказывать воздействие на элементы другого множества, причем воздействия не одинаковые, но взаимосвязанные (порядок через последовательность, структуру воздействия).

Рассмотрим примеры, иллюстрирующие сказанное.

Пример 1. Пусть дано неупорядоченное числовое множество $A = \{1; 2; 5; 7\}$. Используя это множество, можно получить упорядоченные множества. Так, $B = (1\ 2; 5; 7)$ получено введением на A порядка не меньше, $C = (7; 5; 2; 1)$ – порядка не больше, $D = (1; 5; 2; 7)$ и $E = (7; 1; 5; 2)$ – фиксацией элементов, т.е. ограничением свободы взаиморасположения.

Пример 2. Рассмотрим теперь нечисловые множества. Пусть дано множество L (L – «люди») – это множество неупорядоченное, так как на его элементы не наложены никакие ограничения, нет никаких отношений на этом множестве, т.е. с точки зрения действенной направ-

ленности элементы L могут заниматься любой деятельностью, функционировать вне зависимости от остальных, между ними нет никакой структурной связи. Здесь следует оговорить, что мы абстрагируемся от социальных структур, которые связывают всех людей. Возьмем для рассмотрения следующие множества, составленные из данного:

A – «актив»; D – «дежурные в группе»; I – «игроки сборной».

Перед нами стоит задача разобраться, настолько ли сильны ограничения, наложенные на элементы множества L , что ими установлен действенный порядок элементов, установлена взаимосвязь между ними.

Множество A – каждый его элемент обладает строго определенным действием и все его элементы связаны между собой определенной структурой (структура актива). Таким образом A – упорядоченное множество.

Множество D – его элементы несут одинаковую действенную нагрузку и с точки зрения порядка они не различимы, т. е. D – неупорядоченное множество. На этом множестве легко показать, как достаточно наложить на его элементы небольшое ограничение, и мы получим упорядоченное множество. Например, пусть в множестве D – один дежурный старший, другой подметает пол, третий его моет, четвертый моет парты и т. д. Элементы стали действительно различимы и множество приобрело порядок.

Множество I – нельзя без дополнительных ограничений отнести ни к упорядоченным, ни к неупорядоченным. Так как неизвестно, о какой сборной идет речь — это может быть и сборная по волейболу, и по шахматам, и по городкам, и по футболу.

Пример 3. Рассмотрим три задачи, которые решаются с применением графов.

1. Сколькими способами можно выбрать двух дежурных из четырех студентов?
2. Сколькими способами можно выбрать двух дежурных из четырех студентов так, чтоб один из них был старшим дежурным?
3. Сколькими способами можно расставить четырех дежурных на четырех этажах?

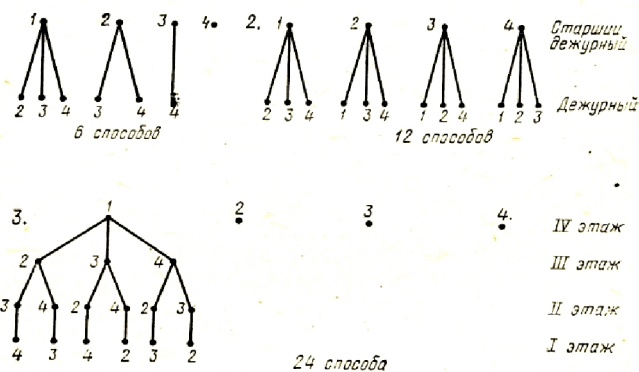


Рис. 1.1. Графы вышеуказанных задач

Проследим изменение характера решений в зависимости от характеристик множеств, с которыми мы оперируем (упорядоченность, число элементов), кроме того, при решении и анализе задач получаем числовые зависимости понятий (рис. 1.1).

Таким образом, в первой задаче речь идет об изменении состава подмножества без его организации (неупорядоченное). Во второй – об изменении состава подмножества с одновременной его организацией (упорядоченностью); в третьей мы наглядно видим различные варианты организации (упорядочения) всего множества.

В решении задач по комбинаторике можно выделить общий подход, основанный на раскрытии структуры задачи (рис. 1.2).



Рис. 1.2. Последовательность разбора структуры задачи

Первым шагом выделяется множество, о котором идет речь в задаче, и определяется число его элементов. Вторым шагом выясняется, о чем идет речь: о самом множестве или о его подмножестве, сколько в нем элементов. Третьим шагом определяется, упорядоченное ли подмножество или нет, и затем соотносим задачи к сочетанию, размещению или перестановке.

Основные понятия комбинаторики: перестановки, сочетания, размещения. Мы встретились с тремя основными понятиями комбинаторики: сочетанием, размещением, перестановкой. Дадим их определения.

Размещения. Пусть имеется множество, содержащее n элементов. Каждое его упорядоченное подмножество, содержащее m элементов, называется: *размещение из n элементов по m элементов*.

Пример 4. Например, из элементов 1, 2, 3 можно составить размещения по 2 элемента в каждом: 12, 21, 13, 31, 23, 32.

Из определения вытекает, что $0 \leq m \leq n$ и что размещения из n элементов по m – это все m -элементные подмножества, отличающиеся составом элементов или порядком их следования.

Число размещений из n элементов по m элементов в каждом обозначают A_n^m и вычисляют по формуле:

$$A_n^m = n(n-1)(n-2) \dots (n-m+1). \quad (1.3)$$

Число размещений из n элементов по m элементов в каждом равно произведению m последовательно убывающих натуральных чисел, из которых большее есть n .

Для краткости произведение первых n натуральных чисел принято обозначать $n!$ (n – факториал):

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n = n! \quad (1.4)$$

Условились считать, что $0! = 1$.

Тогда формулу числа размещений из n элементов по m элементов можно записать и в другом виде:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}. \quad (1.5)$$

Пример 5. Вычислить A_8^3 .

Решение.

$$A_8^3 = \frac{8!}{(8-3)!} = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336.$$

Ответ: 336.

Пример 6. Из 10 студентов надо отобрать по одному человеку для участия в одновременно проходящих олимпиадах по математике, истории, статистике и специальной дисциплине. Сколькими способами это можно сделать, если все студенты хорошо знают эти дисциплины?

1. Множество – «студенты», $n = 10$.
2. Подмножество – «студенты, идущие на олимпиаду», $k = 4$.
3. Упорядоченное (порядок определяется функцией студента в подмножестве).
4. Задача относится к размещению (по определению):

$$A_{10}^4 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040.$$

Пример 7. Сколькими способами собрание, состоящее из 30 человек, может выбрать из присутствующих президиум в составе председателя, секретаря и члена президиума?

Решение. Состав президиума собрания является упорядоченным множеством из 30 элементов по три элемента. Значит, искомое число способов равно числу размещений из 30 элементов по три элемента в каждом:

$$A_{30}^3 = \frac{30!}{(30-3)!} = 30 \cdot 29 \cdot 28 = 24360$$

или

$$A_{30}^3 = 30 \cdot 29 \cdot 28 = 24360.$$

Пример 8. Перед выпуском группа учащихся в 30 человек обменялась фотокарточками. Сколько всего было роздано фотокарточек?

Решение. Передача фотокарточки одним учащимся другому есть размещение из 30 элементов по два элемента. Искомое число фотокарточек равно числу размещений из 30 элементов по два элемента в каждом:

$$A_{30}^2 = \frac{30!}{(30-2)!} = 30 \cdot 29 = 870 \quad \text{или} \quad A_{30}^3 = 30 \cdot 29 = 870.$$

Перестановки. Размещения из n элементов по n элементов называются *перестановками* из n элементов.

Пример 9. Например, из элементов 1, 2, 3 можно составить перестановки: 123, 132, 213, 231, 312, 321.

Из определения следует, что перестановки являются частным случаем размещений. Так как каждая перестановка содержит все n

элементов множества, то различные перестановки отличаются друг от друга только порядком элементов.

Число перестановок из n элементов данного множества обозначают P_n и вычисляют по формуле

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = n! \quad (1.6)$$

Пример 10. Вычислить P_5 .

Решение.

$$P_5 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120.$$

Ответ: 120.

Пример 11. Дано множество цифр $\{1; 3; 0; 4; 5\}$. Найти сколько 5-значных чисел из него можно составить:

1. Множество – «цифры», $n = 5$.
2. Подмножество – «цифры», $k = 5$.
3. Упорядоченное.
4. Перестановка P_5 .

Ограничение: числа 5-значные, следовательно 0 на первом месте исключается. Найдем число таких перестановок, у которых 0 на первом месте (задача с фиксацией).

Выбираем из множества 0 и фиксируем его в подмножестве (0....): n стало равно 4, k стало равно 4. Получаем P_4 .

$$\text{Итак, } 5\text{-значных чисел } P_5 - P_4 = 5! - 4! = 120 - 24 = 96.$$

Пример 12. Сколько четырехзначных чисел можно составить из четырех цифр 1, 2, 3, 4 без повторений?

Решение. По условию дано множество из четырех элементов, которые требуется расположить в определенном порядке. Значит, требуется найти количество перестановок из четырех элементов:

$P_4 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$, т. е. из цифр 1, 2, 3, 4 можно составить 24 четырехзначных числа (без повторений цифр).

Сочетания. Пусть имеется множество, состоящее из n элементов. Каждое его подмножество, содержащее m элементов, называется сочетанием из n элементов по m элементов.

Пример 13. Например, из элементов 1, 2, 3 можно составить только одно сочетание, состоящее из трех элементов: 123. Все остальные (132, 213, 231, 312, 321) отличаются от 123 только порядком, а элементы в них те же.

Таким образом, сочетания из n элементов по m элементов – это все m -элементные подмножества, которые имеют одинаковый состав элементов. Подмножества, отличающиеся друг от друга порядком следования элементов, не считаются различными.

Число подмножеств по m элементов в каждом, содержащихся во множестве из n элементов, т. е. число сочетаний из n элементов по m элементов в каждом, обозначают C_n^m и вычисляют по формуле

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} \quad (1.7)$$

или

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \quad (1.8)$$

Число сочетаний C_n^m обладает *основным свойством*:

$$C_n^m = C_n^{n-m} \quad (0 \leq m \leq n). \quad (1.9)$$

Пример 14. Вычислить C_6^4 , C_{10}^7 .

Решение.

$$C_6^4 = C_6^2 = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15.$$

$$\text{Так, } C_{10}^7 = C_{10}^{10-7} = C_{10}^3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120.$$

Ответ: 15, 120.

Пример 15. В здании спортивного лагеря живут 3 тренера и 60 спортсменов. Сколькими способами можно выделить одного тренера и 10 спортсменов для уборки здания?

Так как мы имеем два множества, то:

1. Множество – «студенты», $n = 60$.
2. Подмножество – «студенты, идущие на уборку здания», $k = 4$.
3. Неупорядоченное (так как имеют одинаковые функциональные значения).

4. Задача относится к сочетанию (по определению): C_{60}^{10} .

1. Множество – «тренеры», $n = 3$.
2. Подмножество, $k = 1$.
3. Неупорядоченное (так как $k = 1$).
4. Сочетание: C_3^1 .

Взаимосвязь покажем на рис. 1.3.

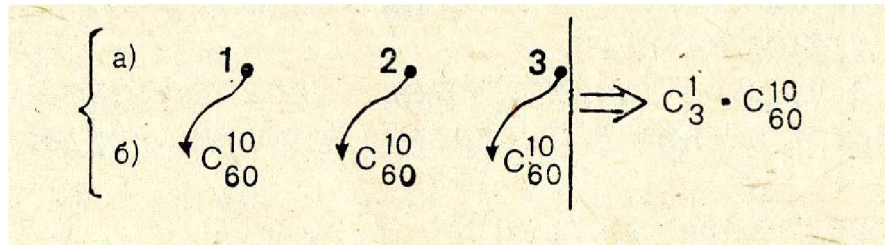


Рис. 1.3. Взаимосвязь

Пример 16. Сколькими способами можно распределить 12 человек по бригадам, если в каждой бригаде по 6 человек?

Решение. Состав каждой бригады является конечным множеством из 12 элементов по 6. Значит, искомое число способов равно числу сочетаний из 12 элементов по 6 в каждом:

$$C_{12}^6 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 924.$$

Пример 17. Сколько всего игр должны провести 20 футбольных команд в однокруговом чемпионате?

Решение. Так как игра любой команды A с командой B совпадает с игрой команды B с командой A , то каждая игра есть сочетание из 20 элементов по 2. Искомое число всех игр равно числу сочетаний из 20 элементов по 2 элемента в каждом:

$$C_{20}^2 = \frac{20 \cdot 19}{1 \cdot 2} = 190.$$

Введенные таким образом понятия легко позволяют установить переход от одного понятия к другому; установить, какое из них является по отношению к какому общим, какое – частным.

Так, сочетание является обобщенным для размещения и перестановки. Из него может быть получено размещение введением дополнительного ограничения на элементы подмножества – упорядочения; перестановка – расширением числа элементов подмножества до всего множества и их упорядочение, т. е. двумя ограничениями.

Правило произведения: «Если элемент a можно выбрать m способами и элемент b – n способами, то пару (a, b) можно выбрать $m \cdot n$ способами».

Пример 18. На тарелке лежат 7 слив и 3 яблока. Сколькими способами можно выбрать пару (слива, яблоко)?

Решение. С каждой из 7 слив можно выбрать каждое из 3 яблок, поэтому пару (слива, яблоко) можно выбрать 21 способом ($7 \cdot 3 = 21$).

Ответ: 21 способом.

Правило суммы: «Если элемент a можно выбрать m способами, а элемент b (независимо от первого выбора) n способами, то выбор или a , или b можно сделать $m+n$ способами».

Пример 19. На тарелке лежат 7 слив и 3 яблока. Сколькими способами можно выбрать или сливу, или яблоко?

Решение. 7 способами можно выбрать одну из 7 слив и 3 способами – одно из 3 яблок. Поэтому выбор – или сливу, или яблоко – можно сделать 10 способами ($7+3=10$).

Ответ: 10 способами.

Соединения с повторениями. В рассмотренных выше соединениях каждый элемент входил в соединение не более одного раза. Существуют соединения, которые содержат один и тот же элемент несколько раз. Такие соединения носят название соединений с повторениями.

Число размещений с повторениями из n элементов по m элементов равно

$$n^m \quad (1.10)$$

Число различных перестановок из n элементов, в которых элементы $a, b, c, \dots, l$ повторяются соответственно $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda$ раз, равно

$$\frac{n!}{\alpha! \beta! \gamma! \dots \lambda!}, \text{ где } n = \alpha + \beta + \gamma + \dots + \lambda. \quad (1.11)$$

Число возможных сочетаний с повторениями из n элементов по m элементов равно

$$\frac{(n+m-1)!}{(n-1)!m!}. \quad (1.12)$$

Если в перестановках из общего числа n элементов есть k различных элементов, при этом 1-й элемент повторяется n_1 раз, 2-й элемент – n_2 раз, k -й элемент – n_k раз, причем $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$, то такие перестановки называют перестановками с повторениями из n элементов. Число перестановок с повторениями из n элементов равно

$$P_n(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}. \quad (1.13)$$

Пример 20. В конкурсе по 5 номинациям участвуют 10 кинофильмов. Сколько существует вариантов распределения призов, если по каждой номинации установлены: а) различные призы; б) одинаковые призы?

Решение. а) Каждый из вариантов распределения призов представляет собой комбинацию 5 фильмов из 10, отличающуюся от других комбинаций как составом фильмов, так и их порядком по номинациям (или и тем и другим), причем одни и те же фильмы могут повторяться несколько раз, т.е. представляет размещение с повторениями из 10 элементов по 5. Их число по формуле (1.10) равно $10^5 = 100000$.

б) Если по каждой номинации установлены одинаковые призы, то порядок следования фильмов в комбинации 5 призеров значения не имеет, и число вариантов распределения призов представляет собой число сочетаний с повторениями из 10 элементов по 5, определяемое по формуле (1.11) с учетом равенства (1.12):

$$\frac{(n + m - 1)!}{(n - 1)! m!} = C_{10+5-1}^5 = C_{14}^5 = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 2002.$$

Пример 21. Сколько существует семизначных чисел, состоящих из цифр 4, 5 и 6, в которых цифра 4 повторяется 3 раза, а цифры 5 и 6 – по 2 раза?

Решение. Каждое семизначное число отличается от другого порядком следования цифр (причем $n_1 = 3$, $n_2 = 2$, $n_3 = 2$, а их сумма равна 7), т.е. является перестановкой с повторениями из 7 элементов. Их число по формуле (1.13):

$$P_7(3, 2, 2) = \frac{7!}{3! 2! 2!} = 210.$$

Пример 22.

В урне 5 черных и 6 белых шаров. Случайным образом вынимают 4 шара. Найти вероятность того, что среди них имеется:

- а) 2 белых шара;
- б) меньше, чем 2 белых шара;
- в) хотя бы один белый шар.

Испытанием будет случайное вынимание четырех шаров. Элементарными событиями являются всевозможные сочетания по 4 из 11 шаров. Их число равно

$$n = C_{11}^4 = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 330.$$

а) A_1 – среди вынутых шаров 2 белых. Значит, среди вынутых шаров 2 белых и 2 черных. Используя правило умножения, получаем

$$m = C_6^2 \cdot C_5^2 = \frac{5 \cdot 6}{1 \cdot 2} \cdot \frac{4 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15 \cdot 10 = 150.$$

$$P(A_1) = \frac{150}{330} = \frac{5}{11}.$$

б) A_2 – среди вынутых шаров меньше, чем 2 белых. Это событие состоит из двух несовместных событий:

B_1 – среди вынутых шаров только один белый и 3 черных шара;

B_2 – среди вынутых шаров нет ни одного белого, все 4 шара черные:

$$A_2 = B_1 \cup B_2.$$

Так как события B_1 и B_2 несовместны, можно использовать формулу:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Имеем:

$$P(A_2) = P(B_1) + P(B_2),$$

$$m_1 = C_6^1 \cdot C_5^3 = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 1 \cdot 2} = 60.$$

$$m_2 = C_5^4 = 5.$$

$$P(B_1) = \frac{60}{330}; \quad P(B_2) = \frac{5}{330};$$

$$P(A_2) = \frac{60}{330} + \frac{5}{330} = \frac{65}{330} = \frac{13}{66}.$$

в) A_3 – среди вынутых шаров хотя бы один белый. Этому событию удовлетворяют следующие сочетания шаров: 1 белый шар и 3 черных (B_1), 2 белых и 2 черных (B_2), 3 белых и 1 черный (B_3), 4 белых (B_4).

Имеем:

$$A_3 = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4.$$

Здесь событие A_3 определяется словами «хотя бы один» и прямое решение приводит обычно к сложным вычислениям. Проще сначала найти вероятность противоположного события и затем по формуле

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

вычислить вероятность искомого события.

$\bar{A}_3$ – среди вынутых шаров нет ни одного белого. В этом случае

$$m = C_5^4 = 5.$$

$$P(\bar{A}_3) = \frac{5}{330} = \frac{1}{66};$$

$$P(A_3) = 1 - P(\bar{A}_3) = 1 - \frac{1}{66} = \frac{65}{66}.$$

$$\text{Ответ: } P(A_1) = \frac{5}{11}, P(A_2) = \frac{13}{66}, P(A_3) = \frac{65}{66}.$$

Бином Ньютона. Широко известные формулы сокращенного умножения квадрата суммы и разности, куба суммы и разности являются частными случаями бинома Ньютона (полиномиальная формула). Бином Ньютона – это формула, представляющая выражение $(a + b)^n$ в виде многочлена. Она имеет вид:

$$(a + b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + b^n = \sum_{i=0}^n C_n^i a^{n-i} b^i, \quad (1.14)$$

где C_n^k – число сочетаний из n элементов по k .

Любой член разложения может быть вычислен по формуле

$$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} x^k. \quad (1.15)$$

Когда степень бинома невысока, коэффициенты многочлена могут быть найдены не расчетом по формуле количества сочетаний, а с помощью так называемого треугольника Паскаля (рис.1.4). (Блез Паскаль (1623 – 1662) – французский математик.) А еще проще объясняют устройство треугольника Паскаля слова: каждое число равно сумме двух расположенных над ним чисел. Все элементарно, но сколько в этом таится чудес!

Этот треугольник имеет вид:

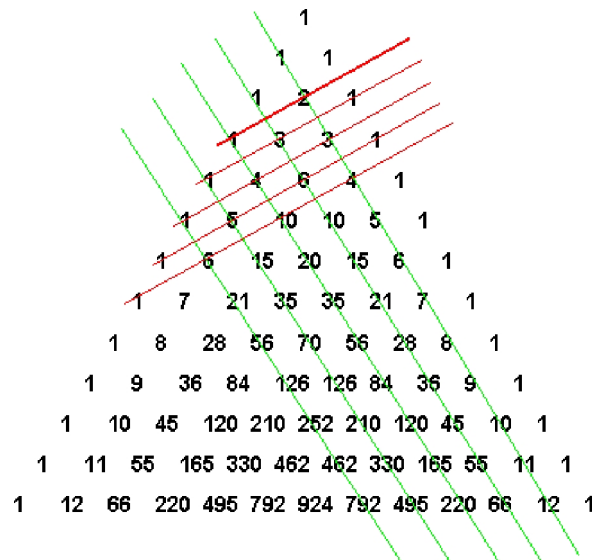


Рис. 1.4. Треугольник Паскаля

Пример 23. Найти 5-й член разложения $(a + b)^9$.

Решение.

$$T_{4+1} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a^{9-4} b^4 = 126 a^5 b^4.$$

Ответ: $T_5 = 126 a^5 b^4$.

Использование табличного процессора Excel. Для вычислений использовать калькулятор или встроенные функции табличного процессора Excel ПЕРЕСТ, ЧИСЛОКОМБ и ФАКТОРИАЛ (ФАКТР). Функция ПЕРЕСТ относится к категории статистические, ФАКТР и ЧИСЛОКОМБ – математические.

В группе 25 студентов. Сколько вариантов может быть при выборе актива из 2 человек?

Активизировать ячейку A_2 (рис. 1.5), щелкнуть по пиктограмме , выбрать: «Категория» – *Математические*, среди них функцию ЧИСЛОКОМБ (рис. 1.6). В диалоговом окне «ЧИСЛОКОМБ» записать в поле «Число» – значение 25, а в поле «Выбранное число» – значение 2. Результат – число 300 (рис. 1.7 и 1.8).

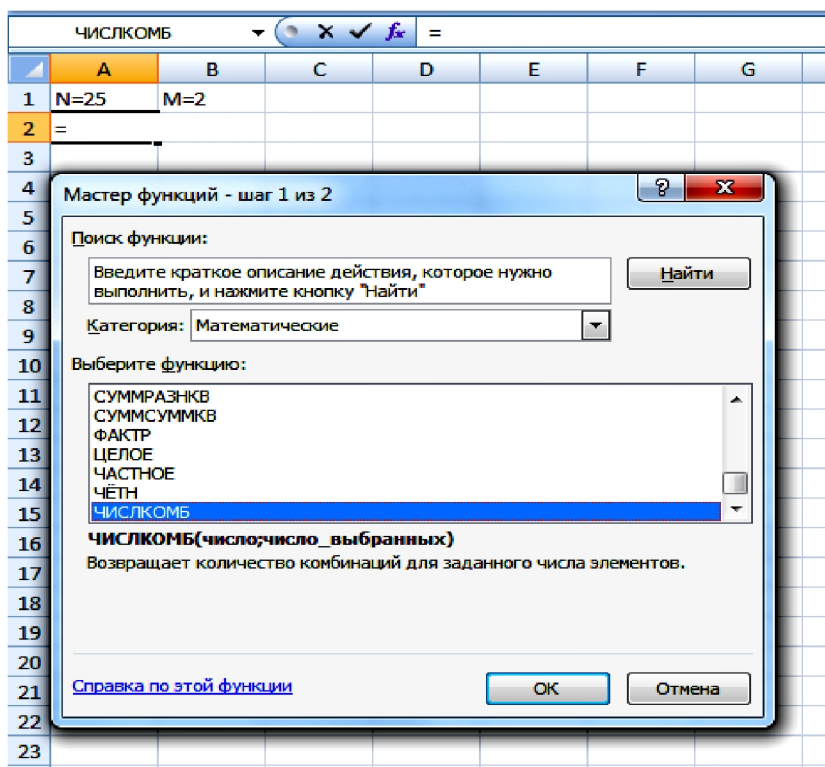


Рис.1.5

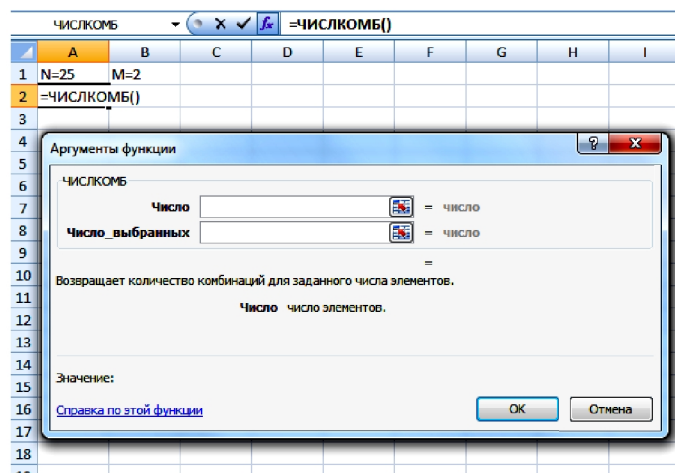


Рис.1.6

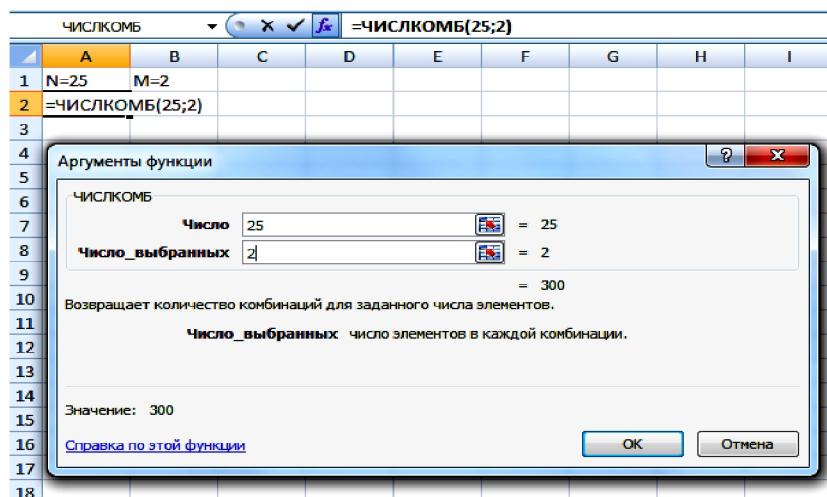


Рис.1.7

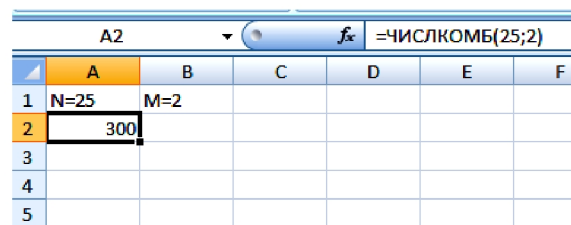


Рис.1.8

1.4. Практическое занятие № 2

по теме: «Основные понятия комбинаторики: перестановки, сочетания, размещения»

Цель занятия: научиться анализировать возможную ситуацию, правильно оценивать ее и принимать решение; ознакомиться с основными правилами комбинаторики.

Учебные вопросы:

1. Назначение комбинаторики.
2. Основные понятия комбинаторики: размещение, перестановки, сочетания.
3. Основные правила комбинаторики.
4. Технология решения комбинаторных задач в табличном процессоре Excel.
5. Применение знаний при решении типовых примеров и задач.

Упорядоченные и неупорядоченные подмножества. Основные понятия комбинаторики: перестановки, сочетания, размещения. Свойства сочетаний. Бином Ньютона.

Методические рекомендации

Изучите основные теоретические сведения и ответьте на контрольные вопросы, только затем приступите к решению упражнений.

1. Вопросы для самопроверки:

1. Что называется размещениями? перестановками? сочетаниями?
2. Что такое факториал?
3. Напишите формулы для нахождения числа размещения, перестановок, сочетаний без повторений и с повторениями.
4. Чем отличаются перестановки от размещений?
5. Чем отличаются сочетания от размещений?
6. Сформулируйте основное свойство сочетаний.
7. Сформулируйте правила суммы и произведения.
8. Какое разложение называют биномом Ньютона?
9. По какой формуле находят $(k + 1)$ -й член разложения бинома Ньютона?

2. Упражнения для самостоятельной работы

1. Найти значение выражения:

а) $\frac{8!-7!}{7!}$

б) $\frac{5!+6!}{4!}$

2. Вычислить A_{12}^4 ; P_6 ; C_{18}^{15} .

3. Вычислить без применения формул: C_{15}^0 ; C_{17}^1 ; C_{100}^{100} .

4. Сократить дробь:

а) $\frac{n}{(n-1)!}$

б) $\frac{2k(2k-1)!}{(2k)!}$

в) $\frac{A_{n+1}^3}{A_n^2}$

г) $\frac{A_{n+1}^3}{A_{n+1}^2!}$

д) $\frac{(n-1)!}{n!}$

е) $\frac{(n-1)!}{(n-3)!}$

ж) $\frac{A_{n+4}^3}{A_{n+4}^3}$

з) $\frac{A_n^3}{A_n^2}$

5. Выполнить действия:

а) $\frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!}$

б) $\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$

6. Решить уравнения:

а) $6P_x = P_{x+2}$

б) $A_n^3 = \frac{1}{2}A_n^4$

в) $A_{2x}^3 = 100A_x^2$

г) $C_x^4 = \frac{15A_x^2}{4}$

д) $C_x^4 \div C_x^5 = 2 \div 3$

е) $\frac{P_{x+2}}{A_x^5 P_{x-5}} = 90$

7. Доказать тождество $(A_m^4 - A_m^3) \div ((m-4)A_{m-1}^2) = m$.

8. Сколько различных трехзначных чисел можно написать посредством девяти цифр?
9. Сколькими способами можно выбрать четырех лиц на четыре различные должности из девяти кандидатов на эти должности?
10. Сколько различных слов получается при перестановке букв в слове «мировоззрение»? Под «словом» подразумевается любая комбинация букв.
11. Из цифр 0, 1, 2, 3 составлены всевозможные четырехзначные числа так, что в каждом числе нет одинаковых цифр. Сколько получается чисел?
12. Энциклопедия состоит из 8 томов. Сколькими способами ее можно поставить на полке в беспорядке, т.е. так, чтобы тома не следовали один за другим в порядке их номеров?
13. В урне 9 белых и 6 черных шаров. Из урны вынимают два шара. Какова вероятность того, что оба шара окажутся белыми?
14. В партии из 8 деталей имеется 6 стандартных. Найти вероятность того, что среди пяти взятых наугад деталей ровно три стандартных.
15. Бросаются одновременно две игральные кости. Найти вероятности следующих событий:
- А – «сумма выпавших очков равна 8»;
 - В – «произведение выпавших очков равно 8»;
 - С – «сумма выпавших очков больше, чем их произведение».
16. Восемь различных книг расставляются наугад на одной полке. Найти вероятность того, что две определенные книги окажутся поставленными рядом.
17. В книжном магазине на полке 10 различных книг, причем 5 книг стоят по 4 рубля каждая; 3 книги – по одному рублю и две – по 3 рубля. Найти вероятность того, что взятые наугад две книги стоят 5 рублей.
18. Оля и Коля договорились встретить Новый год в компании из десяти человек. Они оба хотели сидеть за праздничным столом рядом. Найти вероятность исполнения их желания, если среди друзей принято распределять места по жеребьевке.

19. В урне 8 белых и 6 черных шаров. Из урны наугад вынимаются два шара. Найти вероятность того, что оба шара черные.

20. В урне 8 белых и 6 черных шаров. Из урны наугад вынимаются два шара. Найти вероятность того, что они разного цвета.

21. 32 буквы русского алфавита написаны на карточках разрезной азбуки. Пять карточек вынимаются наугад одна за другой и укладываются на стол в порядке появления. Найти вероятность того, что получится слово «конец».

2. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

2.1. Теоремы сложения и умножения вероятностей

Теорема 1. Вероятность появления одного из двух несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B)=P(A)+P(B). \quad (2.1)$$

Следствие. Вероятность появления одного из нескольких попарно несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\dots+P(A_n). \quad (2.2)$$

Пример 1. В урне 30 шаров: 10 красных, 5 синих, 15 белых. Найти вероятность появления цветного шара.

Решение. Появление цветного шара означает появление либо красного, либо синего шара.

Вероятность появления красного шара (событие A):

$$P(A)=10/30=1/3.$$

Вероятность появления синего шара (событие B):

$$P(B)=5/30=1/6.$$

События A и B несовместны (появление шара одного цвета исключает появление шара другого цвета), поэтому теорема сложения применима.

Искомая вероятность $P(A+B)=P(A)+P(B)=1/3+1/6=1/2$.

Пример 2. Стрелок стреляет по мишени, разделенной на 3 области. Вероятность попадания в первую область равна 0,45, во вторую – 0,35. Найти вероятность того, что стрелок при одном выстреле попадет либо в первую, либо во вторую область.

Решение. События A – «стрелок попал в первую область» и B – «стрелок попал во вторую область» – несовместны (попадание в одну область исключает попадание в другую), поэтому теорема сложения применима. Искомая вероятность

$$P(A+B)=P(A)+P(B)=0,45+0,35=0,80.$$

Теорема 2. Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB). \quad (2.3)$$

Теорема 3. Сумма вероятностей событий $A_1, A_2, \dots, A_n$, образующих полную группу, равна единице:

$$P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1. \quad (2.4)$$

Пример 3. Консультационный пункт института получает пакеты с контрольными работами из городов A, B и C . Вероятность получения пакета из города A равна 0,7, из города B - 0,2. Найти вероятность того, что очередной пакет будет получен из города C .

Решение. События «пакет получен из города A », «пакет получен из города B », «пакет получен из города C » образуют полную группу, поэтому сумма вероятностей этих событий равна единице:

$$0,7 + 0,2 + p = 1.$$

Отсюда искомая вероятность

$$p = 1 - 0,9 = 0,1.$$

Два несовместных и единственно возможных события называют *противоположными событиями* и обозначают A и $\bar{A}$. Так, промах ($\bar{A}$) при выстреле в цель и попадание (A) – события противоположные.

Теорема 4. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1. \quad (2.5)$$

Замечание 1. Если вероятность одного из двух противоположных событий обозначена через p , то вероятность другого события обозначают через q . Таким образом, в силу предыдущей теоремы:

$$p + q = 1. \quad (2.6)$$

Пример 4. Вероятность того, что день будет дождливым, $p = 0,7$. Найти вероятность того, что день будет ясным.

Решение. События «день дождливый» и «день ясный» – противоположные, поэтому искомая вероятность

$$q = 1 - p = 1 - 0,7 = 0,3.$$

Замечание 2. При решении задач на отыскание вероятности события A часто выгодно сначала вычислить вероятность события $\bar{A}$, а затем найти искомую вероятность по формуле: $p + q = 1$.

Пример 5. В ящике имеется n деталей, из которых m стандартных. Найти вероятность того, что среди k наудачу извлеченных деталей есть хотя бы одна стандартная.

Решение. События «среди извлеченных деталей есть хотя бы одна стандартная» и «среди извлеченных деталей нет ни одной стандартной» – противоположные. Обозначим первое событие через A , а второе – через $\bar{A}$.

Очевидно, $P(A) = 1 - P(\bar{A})$.

Найдем $P(\bar{A})$. Общее число способов, которыми можно извлечь k деталей из n деталей, равно C_n^k . Число нестандартных деталей равно $n - m$; из этого числа деталей можно C_{n-m}^k способами извлечь k нестандартных деталей. Поэтому вероятность того, что среди извлеченных k деталей нет ни одной стандартной, равна $P(\bar{A}) = \frac{C_{n-m}^k}{C_n^k}$.

Искомая вероятность:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{C_{n-m}^k}{C_n^k}.$$

Принцип практической невозможности маловероятных событий. Появление или неоявление маловероятного события в единичном испытании предсказать невозможно. Однако длительный опыт показывает, что маловероятное событие в единичном испытании в подавляющем большинстве случаев не наступает. На основании этого факта принимают следующий «принцип практической невозможности маловероятных событий»: если случайное событие имеет очень малую вероятность, то практически можно считать, что в единичном испытании это событие не наступит.

Естественно, возникает вопрос: насколько малой должна быть вероятность события, чтобы можно было считать невозможным его появление в одном испытании? На этот вопрос нельзя ответить одно-

значно. Для задач, различных по существу, ответы разные. Например, если вероятность того, что парашют при прыжке не раскроется, равна 0,01, то было бы недопустимым применять такие парашюты. Если же вероятность того, что поезд дальнего следования прибудет с опозданием, равна 0,01, то можно практически быть уверенным, что поезд прибудет вовремя.

Достаточно малую вероятность, при которой (в данной определенной задаче) событие можно считать практически невозможным, называют *уровнем значимости*. На практике обычно принимают уровни значимости, заключенные между 0,01 и 0,05. Уровень значимости, равный 0,01, называют однопроцентным; уровень значимости, равный 0,02, называют двухпроцентным и т. д.

Подчеркнем, что рассмотренный здесь принцип позволяет делать предсказания не только о событиях, имеющих малую вероятность, но и о событиях, вероятность которых близка к единице.

Условная вероятность. Теорема умножения вероятностей.

Условной вероятностью $P_A(B)$ называют вероятность события B , вычисленную в предположении, что событие A уже наступило.

Пример 6. В урне 3 белых и 3 черных шара. Из урны дважды вынимают по одному шару, не возвращая их обратно. Найти вероятность появления белого шара при втором испытании (событие B), если при первом испытании был извлечен черный шар (событие A).

Решение. После первого испытания в урне осталось 5 шаров, из них 3 белых. Искомая условная вероятность

$$P_A(B) = 3/5.$$

Этот же результат можно получить по формуле:

$$P_A(B) = P(AB) / P(A), \text{ причем } (P(A) > 0).$$

Действительно, вероятность появления белого шара при первом испытании

$$P(A) = 3/6 = 1/2.$$

Найдем вероятность $P(AB)$ того, что в первом испытании появится черный шар, а во втором – белый. Общее число исходов совместного появления двух шаров, безразлично какого цвета, равно числу

размещений $A_6^2 = 6 \cdot 5 = 30$. Из этого числа исходов событию благоприятствуют $3 \cdot 3 = 9$ исходов. Следовательно,

$$P(AB) = 9/30 = 3/10.$$

Искомая условная вероятность

$$P_A(B) = P(AB) / P(A) = (3/10)/(1/2) = 3/5.$$

Как видим, получен прежний результат.

Т.о. условная вероятность события B при условии, что событие A уже наступило, по определению равна:

$$P_A(B) = P(AB) / P(A), \text{ причем } (P(A) > 0). \quad (2.7)$$

Теорема 5 Вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило:

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B). \quad (2.8)$$

Следствие. Вероятность совместного появления нескольких событий равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех остальных, причем вероятность каждого последующего события вычисляется в предположении, что все предыдущие события уже появились:

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1) P_{A_1}(A_2) P_{A_1 A_2}(A_3) \dots P_{A_1 A_2 \dots A_{n-1}}(A_n), \quad (2.9)$$

где $P_{A_1 A_2 \dots A_{n-1}}(A_n)$ – вероятность события A_n , вычисленная в предположении, что события $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ наступили. В частности, для трех событий

$$P(ABC) = P(A) P_A(B) P_{AB}(C). \quad (2.10)$$

Заметим, что порядок, в котором расположены события, может быть выбран любым, т. е. безразлично какое событие считать первым, вторым и т.д.

Пример 7. У сборщика имеются 3 конусных и 7 эллиптических валиков. Сборщик взял один валик, а затем второй. Найти вероятность того, что первый из взятых валиков – конусный, а второй – эллиптический.

Решение. Вероятность того, что первый валик окажется конусным, равна (событие A) $P(A) = 3/10$.

Вероятность того, что второй валик окажется эллиптическим (событие B), вычисленная в предположении, что первый валик – конусный, т.е. условная вероятность $P_A(B) = 7/9$.

По теореме умножения искомая вероятность

$$P(AB) = P(A) P_A(B) = (3/10) \cdot (7/9) = 7/30.$$

Заметим, что, сохранив обозначения, легко найдем: $P(B) = 7/10$,

$$P_B(A) = 3/9, \quad P(AB) = P(B) P_B(A) = 7/30.$$

Независимые события. Теорема умножения для независимых событий. Пусть вероятность события B не зависит от появления события A .

Два события называются независимыми, если вероятность появления одного из них не зависит от появления или не появления другого.

Событие B называют *независимым от события A* , если появление события A не изменяет вероятности события B , т.е. если условная вероятность события B равна его безусловной вероятности:

$$P_B(A) = P(A),$$

т. е. условная вероятность события A в предположении, что наступило событие B , равна его безусловной вероятности. Другими словами, событие A не зависит от события B .

Итак, если событие B не зависит от события A , то и событие A не зависит от события B ; это означает, что *свойство независимости событий взаимно*.

Теорема 6. Для независимых событий теорема умножения имеет вид

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B), \quad (2.11)$$

т. е. вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий.

Итак, два события называют независимыми, если вероятность их совмещения равна произведению вероятностей этих событий; в противном случае события называют зависимыми.

Пример 8. Найти вероятность совместного появления герба при одном бросании двух монет.

Решение. Вероятность появления герба первой монеты (событие A): $P(A) = 1/2$. Вероятность появления герба второй монеты (событие B): $P(B)=1/2$.

События A и B независимые, поэтому искомая вероятность по теореме умножения равна

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B) = 1/2 \cdot 1/2 = 1/4.$$

Пример 9. Имеется 3 ящика, содержащих по 10 деталей. В первом ящике 8, во втором 7 и в третьем 9 стандартных деталей. Из каждого ящика наудачу вынимают по одной детали. Найти вероятность того, что все три вынутые детали окажутся стандартными.

Решение. Вероятность того, что из первого ящика вынута стандартная деталь (событие A), $P(A) = 8/10 = 0,8$.

Вероятность того, что из второго ящика вынута стандартная деталь (событие B), $P(B) = 7/10 = 0,7$.

Вероятность того, что из третьего ящика вынута стандартная деталь (событие C), $P(C) = 9/10 = 0,9$.

Так как события A , B и C независимые в совокупности, то искомая вероятность (по теореме умножения) равна

$$P(ABC) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = 0,8 \cdot 0,7 \cdot 0,9 = 0,504.$$

Вероятность появления хотя бы одного события. Пусть в результате испытания могут появиться n событий, независимых в совокупности, либо некоторые из них (в частности, только одно или ни одного), причем вероятности появления каждого из событий известны. Как найти вероятность того, что наступит хотя бы одно из этих событий? Например, если в результате испытания могут появиться три события, то появление хотя бы одного из этих событий означает наступление либо одного, либо двух, либо трех событий. Ответ на поставленный вопрос дает следующая теорема.

Теорема 7. Вероятность появления хотя бы одного из событий $A_1, A_2, \dots, A_n$, независимых в совокупности, равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_n$:

$$P(A) = 1 - q_1 q_2 \dots q_n. \quad (2.12)$$

Частный случай. Если события $A_1, A_2, \dots, A_n$ имеют одинаковую вероятность, равную p , то вероятность появления хотя бы одного из этих событий равна:

$$P(A) = 1 - q^n. \quad (2.13)$$

Пример 10. Устройство состоит из трех независимых элементов, работающих в течение времени T безотказно соответственно с вероятностями 0,851, 0,751 и 0,701. Найти вероятность того, что за время T выйдет из строя:

- а) только один элемент;
- б) хотя бы один элемент.

Испытание, т. е. работу за время T , нужно рассмотреть на двух уровнях: на уровне устройства и на уровне элементов. Элементарные события определять не надо, так как их вероятности заданы.

- а) A_1 – за время T выходит из строя только один элемент:

B_1 – первый элемент выходит из строя;

B_2 – второй элемент выходит из строя;

B_3 – третий элемент выходит из строя;

$\bar{B}_1$ – первый элемент не выходит из строя;

$\bar{B}_2$ – второй элемент не выходит из строя;

$\bar{B}_3$ – третий элемент не выходит из строя.

$$A_1 = (B_1 \cap \bar{B}_2 \cap \bar{B}_3) \cup (\bar{B}_1 \cap B_2 \cap \bar{B}_3) \cup (\bar{B}_1 \cap \bar{B}_2 \cap B_3).$$

Учитывая независимость элементов устройств, несовместность событий B_i и $\bar{B}_i$ и формулы $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ и $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, получаем следующую формулу:

$$P(A_1) = P(B_1) \cdot P(\bar{B}_2) \cdot P(\bar{B}_3) + P(\bar{B}_1) \cdot P(B_2) \cdot P(\bar{B}_3) + P(\bar{B}_1) \cdot P(\bar{B}_2) \cdot P(B_3).$$

По условию

$$P(\bar{B}_1) = 0,851, P(\bar{B}_2) = 0,751, P(\bar{B}_3) = 0,701, \text{ а по формуле}$$

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1 \text{ получаем}$$

$$P(B_1) = 0,149, P(B_2) = 0,249, P(B_3) = 0,299.$$

Таким образом,

$$P(A_1) = 0,149 \cdot 0,751 \cdot 0,701 + 0,851 \cdot 0,249 \cdot 0,701 + 0,851 \cdot 0,751 \cdot 0,299 = 0,418.$$

б) A_2 – за время T выходит из строя хотя бы один элемент. Событие определяется словами «хотя бы один», значит, используем противоположное событие.

$\bar{A}_2$ – за время T все элементы работают безотказно:

$$\bar{A}_2 = \bar{B}_1 \cap \bar{B}_2 \cap \bar{B}_3.$$

$$P(\bar{A}_2) = P(\bar{B}_1) \cdot P(\bar{B}_2) \cdot P(\bar{B}_3) = 0,851 \cdot 0,751 \cdot 0,701 = 0,418.$$

$$P(A_2) = 1 - P(\bar{A}_2) = 1 - 0,448 = 0,552.$$

Ответ: $P(A_1) = 0,418$, $P(A_2) = 0,552$.

2.2. Формула полной вероятности и формулы Байеса

Пусть событие A может наступить при условии появления одного из несовместных событий $B_1, B_2, \dots, B_n$, образующих полную группу. Поскольку заранее не известно, какое из этих событий наступит, их называют *гипотезами*.

Теорема 1. Вероятность события A , которое может наступить лишь при условии появления одного из несовместных событий $B_1, B_2, \dots, B_n$, образующих полную группу, равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующую условную вероятность события A :

$$P(A) = P(B_1) P_{B_1}(A) + P(B_2) P_{B_2}(A) + \dots + P(B_n) P_{B_n}(A) \quad (2.14)$$

Эту формулу называют «*формулой полной вероятности*».

Пример 1. В пирамиде стоят 19 винтовок, из них 3 с оптическим прицелом. Стрелок, стреляя из винтовки с оптическим прицелом, может поразить мишень с вероятностью 0,81, а стреляя из винтовки без оптического прицела – с вероятностью 0,46. Найти вероятность того, что стрелок поразит мишень, стреляя из случайно взятой винтовки.

В этой задаче первым испытанием является случайный выбор винтовки, вторым – стрельба по мишени. Рассмотрим следующие события:

A – стрелок поразит мишень;

B_1 – стрелок возьмет винтовку с оптическим прицелом;

B_2 – стрелок возьмет винтовку без оптического прицела.

Используем формулу полной вероятности

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A|B_i) \cdot P(B_i).$$

Имеем

$$P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2).$$

Учитывая, что винтовки выбираются по одной, получаем $n = C_{19}^1 = 19$ и соответственно $m_1 = C_3^1 = 3$ (для B_1) и $m_2 = C_{16}^1 = 16$ (для B_2); таким образом, $P(B_1) = \frac{3}{19}$, $P(B_2) = \frac{16}{19}$.

Условные вероятности заданы в условии задачи:

$$P(A|B_1) = 0,81 \text{ и } P(A|B_2) = 0,46.$$

Следовательно,

$$P(A) = 0,81 \cdot \frac{3}{19} + 0,46 \cdot \frac{16}{19} = 0,5150.$$

Ответ: $P(A) = 0,515$.

Допустим, что произведено испытание, в результате которого появилось событие A . Поставим своей задачей определить, как изменились (в связи с тем, что событие A уже наступило) вероятности гипотез. Другими словами, будем искать условные вероятности $P_A(B_1)$, $P_A(B_2)$, ..., $P_A(B_n)$.

Найдем сначала условную вероятность $P_A(B_1)$.

По теореме умножения имеем

$$P(AB_1) = P(A) P_A(B_1) = P(B_1) P_{B_1}(A).$$

$$\text{Отсюда } P_A(B_1) = \frac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{P(A)}.$$

Заменив здесь $P(A)$ по формуле (2.14), получим

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + \dots + P(B_n)P_{B_n}(A)}. \quad (2.15)$$

Аналогично выводятся формулы, определяющие условные вероятности остальных гипотез, т. е. условная вероятность любой гипотезы B_i ($i = 1, 2, \dots, n$) может быть вычислена по формуле

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i)P_{B_i}(A)}{P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + \dots + P(B_n)P_{B_n}(A)}. \quad (2.16)$$

Полученные формулы называют *формулами Байеса* (по имени английского математика, который их вывел; опубликованы в 1764 г.). Формулы Байеса позволяют переоценить вероятности гипотез после того, как становится известным результат испытания, в итоге которого появилось событие A .

Пример 2. Детали, изготавливаемые цехом завода, попадают для проверки их на стандартность к одному из двух контролеров. Вероятность того, что деталь попадает к первому контролеру, равна 0,6, а ко второму – 0,4. Вероятность того, что годная деталь будет признана стандартной первым контролером, равна 0,94, а вторым – 0,98. Годная деталь при проверке была признана стандартной. Найти вероятность того, что эту деталь проверил первый контролер.

Решение. Обозначим через A событие, состоящее в том, что годная деталь признана стандартной. Можно сделать два предположения:

- 1) деталь проверил первый контролер (гипотеза B_1);
- 2) деталь проверил второй контролер (гипотеза B_2).

Искомую вероятность того, что деталь проверил первый контролер, найдем по формуле Байеса:

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + \dots + P(B_n)P_{B_n}(A)}.$$

По условию задачи имеем:

$P(B_1) = 0,6$ (вероятность того, что деталь попадает к первому контролеру);

$P(B_2) = 0,4$ (вероятность того, что деталь попадет ко второму контролеру);

$P_{B_1}(A) = 0,94$ (вероятность того, что годная деталь будет признана первым контролером стандартной);

$P_{B_2}(A) = 0,98$ (вероятность того, что годная деталь будет признана вторым контролером стандартной).

Искомая вероятность

$$P_A(B_1) = (0,6 \cdot 0,94) / (0,6 \cdot 0,94 + 0,4 \cdot 0,98) \approx 0,59.$$

Как видно, до испытания вероятность гипотезы B_1 равнялась 0,6, а после того, как стал известен результат испытания, вероятность этой гипотезы (точнее, условная вероятность) изменилась и стала равной 0,59. Таким образом, использование формулы Байеса позволило переоценить вероятность рассматриваемой гипотезы.

2.3. Практическое занятие № 3

по теме: «Теоремы сложения и умножения вероятностей. Формула полной вероятности»

Цель занятия: научиться применять теоремы сложения и умножения вероятностей для решения задач, а также изучить методы вычисления вероятностей сложных событий с помощью формул полной вероятности и формул Байеса.

Учебные вопросы:

1. Сумма и произведение событий.
2. Теоремы сложения вероятностей.
3. Понятие условной вероятности.
4. Теоремы умножения вероятностей.
5. Формула полной вероятности.
6. Формулы Байеса.

Маловероятные события. Зависимые и независимые события. Условная вероятность. Хотя бы одно событие. Гипотезы.

Методические рекомендации

Изучите основные теоретические сведения и ответьте на контрольные вопросы, только затем приступите к решению упражнений.

1. Вопросы для самопроверки

1. Сформулировать определение суммы и произведения событий.
2. Определение условной вероятности.
3. Теоремы сложения несовместных событий.
4. Теорема сложения для совместных событий.
5. Теоремы о вероятности произведения независимых событий.
6. Теоремы о вероятности произведения зависимых событий.
7. Вероятность появления хотя бы одного события.
8. Принцип практической невозможности маловероятных событий.
9. Формула полной вероятности и формулы Байеса.
10. Какова роль формул Байеса?

2. Упражнения для самостоятельной работы

1. В денежно-вещевой лотерее на каждые 10000 билетов разыгрывается 150 вещевых и 50 денежных выигрышей. Чему равна вероятность выигрыша, безразлично денежного или вещевого, для владельца одного лотерейного билета? *Ответ:* $p = 0,02$.

2. Вероятность того, что стрелок при одном выстреле выбьет 10 очков, равна 0,1; вероятность выбить 9 очков равна 0,3; вероятность выбить 8 или меньше очков равна 0,6. Найти вероятность того, что при одном выстреле стрелок выбьет не менее 9 очков. *Ответ:* $p = 0,4$.

3. В партии из 10 деталей 8 стандартных. Найти вероятность того, что среди наудачу извлеченных 2 деталей есть хотя бы одна стандартная. *Ответ:* $p = 44/45$.

4. В ящике 10 деталей, среди которых 2 нестандартных. Найти вероятность того, что в наудачу отобранных 6 деталях окажется не более одной нестандартной детали. *Ответ:* $p = 2/3$.

Указание. Если A – нет ни одной нестандартной детали, B – есть одна нестандартная деталь, то

$$P(A+B) = P(A) + P(B) = \frac{C_8^6}{C_{10}^6} + C_2^1 \cdot \frac{C_8^5}{C_{10}^6}.$$

5. События A , B , C и D образуют полную группу. Вероятности событий таковы: $P(A) = 0,1$; $P(B) = 0,4$; $P(C) = 0,3$. Чему равна вероятность события D ? *Ответ:* $P(D) = 0,2$.

6. По статистическим данным ремонтной мастерской в среднем на 20 остановок токарного станка приходится: 10 – для смены резца; 3 – из-за неисправности привода; 2 – из-за несвоевременной подачи заготовок. Остальные остановки происходят по другим причинам. Найти вероятность остановки станка по другим причинам. *Ответ:* $p = 0,25$.

7. Вероятность того, что стрелок при одном выстреле попадает в мишень, равна $p = 0,9$. Стрелок произвел 3 выстрела. Найти вероятность того, что все 3 выстрела дали попадание. *Ответ:* 0,729.

8. Брошены монета и игральная кость. Найти вероятность совмещения событий: «появился «герб», «появилось 6 очков». *Ответ:* $1/12$.

9. В двух ящиках находятся детали: в первом – 10 (из них 3 стандартных), во втором – 15 (из них 6 стандартных). Из каждого ящика наудачу вынимают по одной детали. Найти вероятность того, что обе детали окажутся стандартными. *Ответ:* 0,12.

10. В студии телевидения 3 телевизионных камеры. Для каждой камеры вероятность того, что она включена в данный момент, равна $p = 0,6$. Найти вероятность того, что в данный момент включена хотя бы одна камера (событие A). *Ответ:* 0,936.

11. Чему равна вероятность того, что при бросании трех игральных костей 6 очков появится хотя бы на одной из костей (событие A)? *Ответ:* $91/216$.

12. Предприятие изготавливает 95% изделий стандартных, причем из них 86% – первого сорта. Найти вероятность того, что взятое наудачу изделие, изготовленное на этом предприятии, окажется первого сорта. *Ответ:* 0,817.

13. Монета бросается до тех пор, пока 2 раза подряд она не выпадет одной и той же стороной. Найти вероятности следующих событий: а) опыт окончится до шестого бросания; б) потребуется четное число бросаний. *Ответ:* а) $15/16$; б) $2/3$.

14. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 сначала выбирается одна, а затем из оставшихся четырех – вторая цифра. Предполагается, что все 20 воз-

возможных исходов равновероятны. Найти вероятность того, что будет выбрана нечетная цифра: а) в первый раз; б) во второй раз; в) в оба раза.

Ответ: а) $3/5$; б) $3/5$; в) $3/10$.

15. Вероятность того, что при одном выстреле стрелок попадет в десятку, равна $0,6$. Сколько выстрелов должен сделать стрелок, чтобы с вероятностью не менее $0,8$ он попал в десятку хотя бы один раз?

Ответ: $n = 2$.

16. Три электрические лампочки последовательно включены в цепь. Вероятность того, что одна (любая) лампочка перегорит, если напряжение в сети превысит номинальное, равна $0,6$. Найти вероятность того, что при повышенном напряжении тока в цепи не будет.

Ответ: $0,936$.

17. Вероятность того, что событие A появится хотя бы один раз при двух независимых испытаниях, равна $0,75$. Найти вероятность появления события в одном испытании (предполагается, что вероятность появления события в обоих испытаниях одна и та же).

Ответ: $0,5$.

18. Вероятность поражения цели первым стрелком при одном выстреле равна $0,8$, а вторым стрелком – $0,6$. Найти вероятность того, что цель будет поражена только одним стрелком.

Ответ: $0,44$.

19. Отдел технического контроля проверяет изделия на стандартность. Вероятность того, что изделие нестандартно, равна $0,1$. Найти вероятность того, что: а) из трех проверенных изделий только одно окажется нестандартным; б) нестандартным окажется только четвертое по порядку проверенное изделие.

Ответ: а) $0,243$; б) $0,0729$.

2.4. Последовательность независимых испытаний

Повторные испытания. Формула Бернулли. Если производится несколько испытаний, причем вероятность события A в каждом испытании не зависит от исходов других испытаний, то такие испытания называют *независимыми относительно события A* .

В разных независимых испытаниях событие A может иметь либо различные вероятности, либо одну и ту же вероятность. Будем далее рассматривать лишь такие независимые испытания, в которых событие A имеет одну и ту же вероятность.

Ниже воспользуемся понятием сложного события, понимая под ним совмещение нескольких отдельных событий, которые называют простыми.

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых событие A может появиться либо не появиться. Условимся считать, что вероятность события A в каждом испытании одна и та же, а именно – равна p . Следовательно, вероятность ненаступления события A в каждом испытании также постоянна и равна $q=1-p$.

Искомую вероятность обозначим $P_n(k)$. Например, символ $P_5(3)$ вероятность того, что в пяти испытаниях событие появится ровно 3 раза и, следовательно, не наступит 2 раза.

Если рассматривать все n испытаний как одно испытание, то его результатом является произведение событий A и $\bar{A}$. Здесь ввиду независимости исходных испытаний важен не порядок событий, а число повторений события A . Частоту события A обозначим через k , $0 < k < n$. Вероятность появления события A k раз вычисляют по формуле Бернулли:

$$p_k(n) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}. \quad (2.17)$$

Если нужно вычислить вероятности для всех значений k , $0 < k < n$, то можно воспользоваться формулой, с помощью которой p_k вычисляется по значению p_{k-1} :

$$p_k = \frac{n-k+1}{k} \cdot \frac{p}{q} \cdot p_{k-1}, k=1, \dots, n. \quad (2.18)$$

Тогда p_0 следует вычислять по формуле (2.17), которая при $k=0$ принимает вид $p_0 = q^n$, а все остальные p_k – по формуле (2.18). При больших значениях n и k вычисления по формуле Бернулли достаточно громоздки и, кроме того, на практике обычно не требуется такая высокая точность. Поэтому разработаны довольно точные приближенные методы вычисления вероятности p_k .

Пример 1. Вероятность того, что расход электроэнергии в продолжение одних суток не превысит установленной нормы, равна $p = 0,75$. Найти вероятность того, что в ближайшие 6 суток расход электроэнергии в течение 4 суток не превысит нормы.

Решение. Вероятность нормального расхода электроэнергии в продолжение каждых из 6 суток постоянна и равна $p = 0,75$. Следовательно, вероятность перерасхода электроэнергии в каждые сутки также постоянна и равна $q = 1 - p = 1 - 0,75 = 0,25$. Искомая вероятность по формуле Бернулли равна

$$P_6(4) = C_6^4 p^4 q^2 = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} (0,75)^4 \cdot (0,25)^2 = 0,30.$$

Пример 2. В мишень стреляют 6 раз. Вероятность как попадания, так промаха $p = q = 0,5$. Какова вероятность поражения мишени 0, 1, 2, ..., 6 раз?

Решение. Так как вероятности поражения и непоражения равны, то вероятность непоражения ни одной мишени будет равна вероятности поражения всех мишеней, а вероятность поражения только одной мишени будет равна непоражению 5 мишеней и т.д. Поэтому можно считать, что вероятности поражения любого числа мишеней в соответствии с условиями задачи будут вычислены по формуле (2.17)

$$\begin{aligned} p_6(0) &= p_6(6) = \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}; \\ p_6(1) &= p_6(5) = C_6^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{32}; \\ p_6(2) &= p_6(4) = C_6^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{15}{64}; \\ p_6(3) &= \frac{5}{13}. \end{aligned}$$

Иногда находят *наивероятнейшую частоту*, т.е. частоту, имеющую максимальную вероятность. Наивероятнейшая частота находится в интервале $np - q \leq k \leq np + p$. Длина этого интервала равна единице, поэтому если границы интервала – целые числа, то имеются две наивероятнейшие частоты, в противном случае – только одна.

Пример 3. В каждом из 11 независимых испытаний событие A происходит с постоянной вероятностью 0,3. Вычислить все вероятности p_k , $k = 0, 1, 2, \dots, 11$, где k – частота события A . Построить график вероятностей p_k . Вычислить наивероятнейшую частоту.

Задано: $n = 11$, $p = 0,3$, $q = 1 - p = 0,7$.

Найти: $p_0, p_1, p_2, \dots, p_{11}$ и k .

Используем формулу Бернулли $p_k = C_n^k p^k q^{n-k}$ и формулу вычисления последующего значения p_k через предыдущее значение p_{k-1} : $p_k = \frac{n-k+1}{k} \cdot \frac{p}{q} \cdot p_{k-1}$. Значение p_0 вычисляем по первой из формул, а остальные вероятности p_k – по второй.

В рекуррентном соотношении вычисляем постоянный множитель

$$\frac{p}{q} = \frac{0,3}{0,7} = 0,4285714, \quad p_0 = C_{11}^0 \cdot 0,3^0 \cdot 0,7^{11} = 0,7^{11} = 0,0197732.$$

Результаты вычислений запишем в табл. 2.1. Если вычисления верны, то должно выполняться равенство $\sum_{k=0}^n p_k = 1$.

Таблица 2.1

k	$\frac{(n-k+1)}{k}$	p_k
0	—	0,0197732
1	11/1	0,0932168
2	10/2	0,1997503
3	9/3	0,2568218
4	8/4	0,2201330
5	7/5	0,1320798
6	6/6	0,0566056
7	5/7	0,0173282
8	4/8	0,0037131
9	3/9	0,0005304
10	2/10	0,0000454
11	1/11	0,0000017
Σ	—	0,9999994

По найденным значениям вероятностей построим их график (рис. 2.1).

Найдем наивероятнейшую частоту по заданным условиям:

$$np - q \leq k \leq np + p,$$

$$np - q = 11 \cdot 0,3 - 0,7 = 3,3 - 0,7 = 2,6,$$

$$np + p = 11 \cdot 0,3 + 0,3 = 3,3 + 0,3 = 3,3.$$

Значит, наивероятнейшая частота $k = 3$ и, как и было получено ранее, значение p_3 является максимальным.

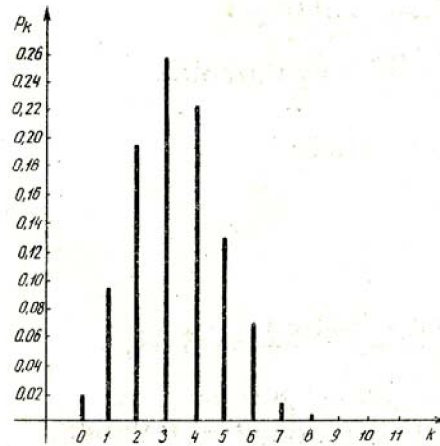


Рис. 2.1. График вероятностей p_k

Формулы Муавра – Лапласа и Пуассона. Выше была приведена формула Бернулли, позволяющая вычислить вероятность того, что событие A появится в n испытаниях ровно k раз. Легко видеть, что пользоваться формулой Бернулли при больших значениях n достаточно трудно, так как формула требует выполнения действий над громадными числами. Естественно, возникает вопрос: нельзя ли вычислить интересующую нас вероятность, не прибегая к формуле Бернулли? Оказывается, можно. Локальная теорема Лапласа и дает асимптотическую формулу, которая позволяет приближенно найти вероятность появления события ровно k раз в n испытаниях, если число испытаний

достаточно велико. (Функцию $\varphi(x)$ называют асимптотическим приближением функции $f(x)$, если $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 1$).

Заметим, что для частного случая, а именно для $p = 1/2$, асимптотическая формула была найдена в 1730 г. Муавром; в 1783 г. Лаплас обобщил формулу Муавра для произвольного p , отличного от 0 и 1. Поэтому теорему, о которой здесь идет речь, иногда называют *локальной теоремой Муавра–Лапласа*.

Теорема 1. Если при n независимых испытаниях событие A происходит с постоянной вероятностью p , которая не очень близка к нулю и единице ($0 < p < 1$), то при достаточно большом количестве испытаний n вероятность того, что событие A произойдет k раз, приближенно равна:

$$P_n(k) \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}, \quad (2.19)$$

где

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}. \quad (2.20)$$

Функция $\varphi(x)$ – четная ($\varphi(-x) = \varphi(x)$) и принимает только неотрицательные значения (рис. 2.2). Для нее составлены таблицы (см. прил. 1). Так как график функции симметричен относительно оси ординат, то таблицы составлены только для положительных значений аргумента.

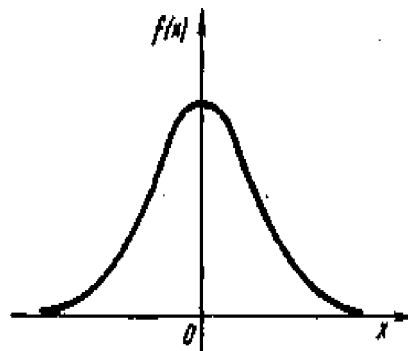


Рис. 2.2. График функции $f(x)$

Пример 4. Вероятности попадания по мишени, равно как и промаха, равны ($p = q = 0,5$). Определить вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена 55 раз.

Решение. Исходными данными задачи являются: $p = q = 0,5$; $n = 100$; $k = 55$. Если вычислять вероятность по формуле Бернулли (2.17), то она равна:

$$p_n(k) = p_{100}(55) = C_{100}^{55} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{55} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{45} = 0,0485.$$

В то же время применение асимптотической формулы (2.19) и (2.20) дает упрощенное выражение:

$$P_n(k) = P_{100}(55) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{5} \cdot f(1) = \frac{1}{5} \cdot 0,2420 = 0,0484,$$

где $x = \frac{a-np}{\sqrt{npq}} = \frac{55-100 \cdot 0,5}{\sqrt{100 \cdot 0,5 \cdot 0,5}} = 1$, т.е. $f(x) = f(1)$. Значение $f(1)$ определяется по таблице приложения 1 и будет равно 0,2420.

Если вероятность p реализации события A близка к нулю, то следует использовать следующую *теорему Пуассона*, которая в этом случае дает большую точность.

Теорема 2. Если при n независимых испытаниях событие A происходит с вероятностью p , близкой к 0 (например, $n > 100$, $\lambda = np < 10$), то при достаточно большом n вероятность осуществления события A k раз приближенно равна

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad \text{где } \lambda = np. \quad (2.21)$$

Вероятность появления события A не более k раз будет вычисляться по формуле:

$$p(m \leq k) \approx e^{-\lambda} \cdot \sum_{m=0}^k \frac{\lambda^m}{m!}, \quad \text{где } \lambda = np. \quad (2.22)$$

Для упрощения расчетов по формулам (2.21, 2.22) можно воспользоваться их табулированными значениями (приложение 3, табл. 1, 2).

Пример 5. Известно, что при стрельбе из пистолета Макарова 2,5% патронов дают осечку. Найти вероятность того, что при 200 выстрелах дадут осечку: а) ровно 4 патрона; б) не более 6 патронов.

Решение. Так как по условию задачи вероятность осечки патрона равна $p = 0,025$ и она мала, количество выстрелов $n = 200$ – велико

и $\lambda = np = 200 \cdot 0,025 = 5 < 10$, для определения этих вероятностей можно применить формулу Пуассона (табл. приложения 3):

$$\text{а) } P_{200}(4) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \frac{5^4}{4!} \cdot e^{-5} \approx 0,1755,$$

$$\text{б) } P_{200}(m \leq 6) \approx e^{-\lambda} \cdot \sum_{m=0}^k \frac{\lambda^m}{m!} \approx e^{-5} \cdot \sum_{m=0}^6 \frac{5^m}{m!} \approx 0,7622.$$

Часто нужно найти вероятность того, что частота появления события A находится в каком-то интервале. Эту проблему позволяет решить *интегральная теорема Муавра – Лапласа*:

Теорема 3. Если в n независимых испытаниях событие A происходит с постоянной вероятностью p , которая отличается от 0 и 1, то при достаточно большом n вероятность того, что частота k события A находится в интервале $[a, b]$, приближенно равна

$$P_n(a \leq k \leq b) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \quad (2.23)$$

$$\text{где } \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad (2.24)$$

$$x_1 = \frac{a - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{b - np}{\sqrt{npq}}. \quad (2.25)$$

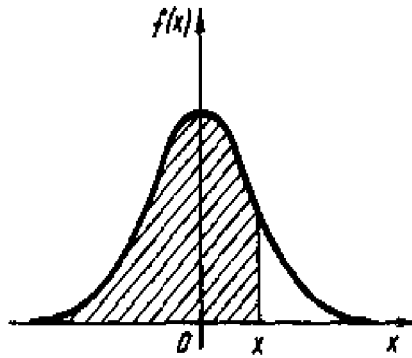


Рис. 2.3. Геометрический смысл функции $\Phi(x)$

Функция $\Phi(x)$ является интегралом от функции $f(x)$ [см. формулу (2.24)] и принимает значения в интервале $[0, 1]$, при этом

$\Phi(-\infty) = 0$, $\Phi(\infty) = 1$ и $\Phi(0) = 0,5$. Геометрический смысл функции $\Phi(x)$ приведен на рис. 2.3. Для функции $\Phi(x)$ составлены таблицы (см. прил. 2). Таблицы составлены только для положительных значений аргумента. Для отрицательных аргументов значения функции можно получить из этой же таблицы, используя соотношение

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x). \quad (2.26)$$

Пример 6. Вероятность того, что любой студент своевременно выполнит упражнения по стрельбе, равна 0,8. Определить вероятность того, что из 100 студентов не менее 75 (т.е. от 75 до 100 студентов) своевременно выполняют упражнения по стрельбе.

Решение. Так как значение $n = 100$ велико при оптимальных $p = 0,8$ и $q = 1 - p = 0,2$, то задача решается с помощью интегральной формулы Муавра – Лапласа (2.23 - 2.25):

$$P_{100}(75 \leq k \leq 100) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1);$$

$$x_1 = \frac{75 - 100 \cdot 0,8}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = -1,2; \quad x_2 = \frac{100 - 100 \cdot 0,8}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = 5;$$

$$\begin{aligned} P_{100}(75 \leq k \leq 100) &\approx \Phi(5) - \Phi(-1,2) = \\ &= \Phi(5) - (1 - \Phi(1,2)) = 1 - (1 - 0,8849) = 0,8849. \end{aligned}$$

Иногда нужно решить следующую задачу. В n независимых испытаниях событие A происходит с постоянной вероятностью p . Найти вероятность того, что относительная частота k/n события A отличается от вероятности события A по абсолютной величине не больше, чем на $\varepsilon > 0$. Решение этой задачи сводится к использованию интегральной формулы Муавра – Лапласа (2.23), с помощью которой для решения данной задачи получаем следующую формулу:

$$P_n \left(\left| \frac{k}{n} - p \right| \leq \varepsilon \right) = 2\Phi \left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}} \right) - 1. \quad (2.27)$$

Пример 7. В каждом из 500 независимых испытаний событие A происходит с постоянной вероятностью 0,4. Найти вероятность того, что событие A происходит:

- а) точно 220 раз;
- б) точно 190 раз;
- в) меньше, чем 240, и больше, чем 180 раз;
- г) меньше, чем 235 раз.

При решении этой задачи используем теоремы Муавра – Лапласа: локальную в случаях а) и б) и интегральную для случаев в) и г).

а) *Задано:* $n = 500, p = 0,4, k = 220$.

Найти: $P_{500}(220)$.

Имеем:

$$\sqrt{npq} = \sqrt{500 \cdot 0,4 \cdot 0,6} = \sqrt{120} \approx 11;$$

$$x = \frac{220 - 500 \cdot 0,4}{11} = 1,82; \quad f(1,82) = 0,07614.$$

$$P_{500}(220) = \frac{0,07614}{11} = 0,00692.$$

б) *Задано:* $n = 500, p = 0,4, k = 190$.

Найти: $P_{500}(190)$.

Получаем:

$$\sqrt{npq} = \sqrt{500 \cdot 0,4 \cdot 0,6} = \sqrt{120} \approx 11;$$

$$x = \frac{190 - 500 \cdot 0,4}{11} = -0,91; \quad f(-0,91) = 0,26369.$$

$$P_{500}(190) = \frac{0,26369}{11} = 0,02397.$$

в) *Задано:* $n = 500, p = 0,4, a = 190, b = 240$.

Найти: $P_{500}(180 < k < 240)$.

Находим:

$$\sqrt{npq} = \sqrt{500 \cdot 0,4 \cdot 0,6} = \sqrt{120} \approx 11;$$

$$x_1 = \frac{180 - 500 \cdot 0,4}{11} = -1,82; \quad x_2 = \frac{240 - 500 \cdot 0,4}{11} = 3,64;$$

$$P_{500}(180 < k < 240) = \Phi(3,64) - \Phi(-1,82) = 0,96548.$$

г) *Задано:* $n = 500, p = 0,4, a = 0, b = 235$.

Найти: $P_{500}(k < 235)$.

Имеем:

$$\sqrt{npq} = \sqrt{500 \cdot 0,4 \cdot 0,6} = \sqrt{120} \approx 11;$$

$$x_1 = \frac{0 - 500 \cdot 0,4}{11} = -18; \quad x_2 = \frac{235 - 500 \cdot 0,4}{11} = 3,18;$$

$$P_{500}(k < 235) = P_{500}(0 < k < 235) = \Phi(3,18) - \Phi(-18) = 0,99926.$$

2.5. Практическое занятие № 4

по теме: «Последовательность независимых испытаний. Формула Я. Бернулли и ее применение. Асимптотические формулы»

Цель занятия: изучить методы вычисления вероятностей сложных событий с помощью формулы Бернулли и асимптотических формул. Сформировать у студентов такой метод научного познания, как обобщение.

Учебные вопросы:

1. Последовательность независимых испытаний.
2. Формула Я.Бернулли и ее применение.
3. Формула Пуассона.
4. Локальная и интегральная теоремы Муавра – Лапласа. Формула Пуассона.

Повторные испытания. Формула Бернулли. Локальная и интегральная теоремы Муавра – Лапласа. Формула Пуассона.

Методические рекомендации

Изучите основные теоретические сведения и ответьте на контрольные вопросы, только затем приступите к решению упражнений.

1. Вопросы для самопроверки

1. В каких опытах для определения вероятности используют формулу Бернулли? Поясните смысл формулы и смысл входящих в нее величин.
2. Выпишите формулы Муавра – Лапласа и Пуассона. Поясните их смысл и смысл входящих в них величин.
3. В чем отличие в использовании формул Бернулли, Муавра – Лапласа и Пуассона для решения задач теории вероятностей и в чем сходство?

2. Упражнения для самостоятельной работы

1. Вероятность приема радиосигнала при каждой передаче равна 0,8. Найти вероятность того, что при пятикратной передаче сигнал будет принят ровно 4 раза. *Ответ:* 0,41.
2. Монета подбрасывается 10 раз. Найти вероятность того, что «герб» выпадает ровно 8 раз. *Ответ:* 0,044.

3. Баскетболист забрасывает мяч в корзину с вероятностью попадания $p = 0,4$. Что вероятнее: ожидать попадание трех мячей при четырех бросках или попадание четырех мячей при шести бросках?

4. Всхожесть семян данного сорта растений оценивается вероятностью 0,8. Найти вероятность, что из пяти посеянных семян взойдет не меньше четырех. *Ответ:* 0,74.

5. Сколько испытаний потребуется для того, чтобы сделать вероятность события, которое произошло хотя бы один раз, равной не менее 0,5, если вероятность этого события при одном испытании равна 0,01? *Ответ:* Не менее 70 испытаний.

6. При стрельбе в тире вероятность попадания пули в мишень равна $1/3$. Сколько раз нужно выстрелить, чтобы вероятность по меньшей мере одного попадания в мишень была больше, чем 0,9? *Ответ:* Более 6 раз.

7. Вероятность рождения мальчика равна 0,51. Найти вероятность того, что среди 100 новорожденных окажется 50 мальчиков. *Ответ:* 0,0782.

8. Монета брошена $2N$ раз (N велико!). Найти вероятность того, что «герб» выпадет ровно N раз. *Ответ:* $0,5642/\sqrt{N}$.

9. Вероятность появления события в каждом из 100 независимых испытаний постоянна и равна $p = 0,8$. Найти вероятность того, что событие появится: а) не менее 75 раз и не более 90 раз; б) не менее 75 раз; в) не более 74 раз. *Ответ:* а) 0,8882; б) 0,8944; в) 0,1056.

3. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

3.1. Понятие случайной величины и ее функции распределения

Одним из важнейших понятий в теории вероятностей является понятие *случайной величины*.

Величина X называется *случайной*, если в результате опыта она может принимать любые заранее неизвестные значения.

Случайные величины делятся на *дискретные* и *непрерывные*.

Величина X называется *дискретной*, если она может принимать определенные, фиксированные значения. Например, число ежедневно продаваемых в магазине холодильников является дискретной случайной величиной.

Случайная величина называется **непрерывной**, если она может принимать значения, сколь угодно мало отличающиеся друг от друга. Примером непрерывной случайной величины является время заправки автомашины на автозаправочной станции.

Функция распределения дискретной и непрерывной случайной величины. Для дискретной случайной величины, так же как и для непрерывной, вводится понятие *функции распределения*, которая представляет собой вероятность события $X < x$, где x – задаваемые непрерывно изменяющиеся значения, т. е.

$$F(x) = P(X < x). \quad (3.1)$$

Функция распределения $F(x)$ – неубывающая, непрерывная слева функция, определенная на всей числовой оси, при этом $F(-\infty) = 0$ и $F(\infty) = 1$.

Закон распределения дискретной случайной величины X можно определить с помощью ряда распределения, заданного в виде следующей табл. 3.1:

Таблица 3.1

X	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_n

В первой строке этой таблицы указаны все значения x_i дискретной случайной величины X , а во второй строке – вероятности p_i при-

нения случайной величиной соответствующих значений x_i . Сумма всех вероятностей равна единице.

Если дискретные значения случайной величины $x_1, x_2, \dots, x_n$ расположены в порядке возрастания, то каждому значению x_i этих величин ставится в соответствие сумма вероятностей всех предыдущих значений и вероятности p_i :

$$F(x) = \sum_{x_i < x} p_i. \quad (3.2)$$

Так как до значения x_1 случайная величина X не встречалась, то и вероятность события $X < x_1$ равна нулю. Для всех значений $x_1 < x \leq x_2$ вероятность события $X < x$ совпадает с вероятностью значения x_1 , т. е. p_1 . Но при $x > x_2$ случайная величина уже может принимать два возможных значения x_1 и x_2 , поэтому вероятность события $X < x$ для $x_2 < x \leq x_3$ будет равна сумме вероятностей p_1 и p_2 и т. д. Нанося на график возможные дискретные значения случайной величины x и соответствующие суммы вероятностей, получаем ступенчатую фигуру, которая и является графиком функции распределения вероятностей дискретной случайной величины (рис. 3.1).

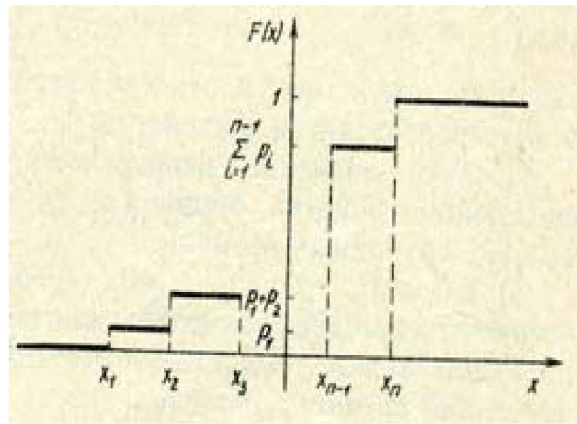


Рис. 3.1. График функции распределения $F(x)$ дискретной случайной величины X

Формулу (3.2) можно записать в следующем виде, наглядно иллюстрирующем непрерывность слева функции распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq x_1, \\ p_1, & x_1 < x < x_2, \\ p_1 + p_2, & x_2 < x \leq x_3, \\ \dots\dots\dots, & \\ \sum_{i=1}^{n-1} p_i, & x_{n-1} < x \leq x_n, \\ 1, & x > x_n. \end{cases} \quad (3.3)$$

Закон распределения непрерывной случайной величины задается или функцией распределения, или функцией плотности вероятности.

Функция распределения непрерывной случайной величины X представляется в виде интеграла

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt, \quad (3.4)$$

где $f(x) > 0$ – функция плотности вероятности. График этой функции (рис. 3.3) всегда охватывает фигуру, площадь которой равна единице. Это следует из свойства функции распределения: $F(\infty) = 1$, так как

$$F(\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = 1. \quad (3.5)$$

Формула (3.5) определяет площадь под графиком функции $f(x)$ в интервале $(-\infty, x]$ (рис. 3.2).

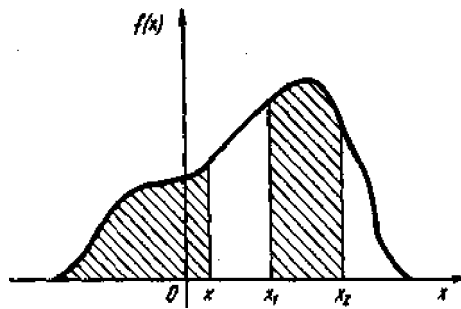


Рис. 3.2. График функции плотности вероятности $f(x)$ непрерывной случайной величины

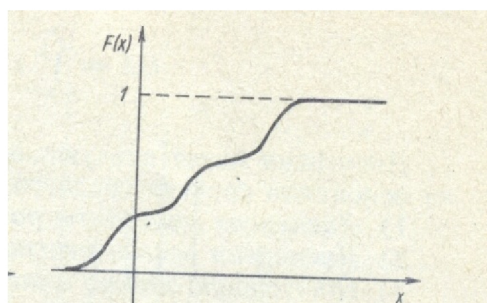


Рис. 3.3. График функции распределения $F(x)$ непрерывной случайной величины X

Итак, из формулы (3.4) плотностью распределения вероятностей $f(x)$ непрерывной случайной величины X называется производная от ее функции распределения вероятностей

$$f(x) = F'(x). \quad (3.6)$$

Если заданы два значения x_1 и x_2 непрерывной случайной величины $X(x_1 < x_2)$, то вероятность того, что X принимает значение в интервале $[x_1, x_2]$, равна:

$$P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1).$$

3.2. Случайные величины и их числовые характеристики

Математическое ожидание и его свойства. Математическим ожиданием дискретной случайной величины X называется сумма произведений всех ее значений на соответствующие вероятности:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n = \sum_{i=1}^n x_i p_i. \quad (3.7)$$

Пример 1. В магазин ежедневно поступает не более пяти радиоприемников. Известны вероятности их поступления:

$$p_0 = 0,1, \quad p_1 = 0,2, \quad p_2 = 0,1, \quad p_3 = 0,15, \quad p_4 = 0,2, \quad p_5 = 0,25.$$

Найти математическое ожидание числа поступлений радиоприемников.

Решение. Математическое ожидание

$$M_x = 0 \cdot 0,1 + 1 \cdot 0,2 + 2 \cdot 0,1 + 3 \cdot 0,15 + 4 \cdot 0,2 + 5 \cdot 0,25 = 2,9.$$

Математическое ожидание случайной величины – это постоянная величина, которая показывает, какое значение случайной величины можно ожидать в среднем при проведении серии опытов.

Существует ряд *свойств* математического ожидания, которые формулируются в виде теорем.

Теорема 1. Математическое ожидание постоянной величины равно этой постоянной: $M(C) = C$.

Теорема 2. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания: $M(kX) = k M(X)$.

Прежде чем формулировать следующую теорему, дадим определение суммы случайных величин.

Суммой случайных величин X и Y называется новая случайная величина, обозначаемая $X + Y$, которая принимает все значения вида $x_i + y_j$ ($i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m$) с вероятностями p_{ij} , выражающими вероятность того, что случайная величина X принимает значение x_i , а случайная величина Y — значение y_j , т. е.

$$P(X = x_i) = p_i, \quad P(X = x_i / Y = y_j) = p_{ij}.$$

$$P(Y = y_j) = p_j, \quad P(Y = y_j / X = x_i) = p_{ji}.$$

Для независимых случайных величин $p_{ij} = p_i \cdot p_j$.

Случайные величины X и Y являются независимыми, если при всех парах чисел (x, y) независимы и соответствующие события $(X < x)$ и $(Y < y)$.

Теорема 3. Математическое ожидание суммы конечного числа случайных величин равно сумме их математических ожиданий:

$$M(X + Y) = M(X) + M(Y).$$

Следствие. Математическое ожидание отклонения случайной величины X от ее математического ожидания равно нулю. Действительно,

$$M(X - M_x) = M_x - M_x = 0.$$

Теорема 4. Математическое ожидание произведения конечного числа независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий: $M(X Y) = M(X) M(Y)$.

Пример 2. Рассмотрим две дискретные случайные величины X и Y . Первая принимает значения -1 и 1 с вероятностями 0,5. Вторая при-

нимает значения -5 и 5 с теми же вероятностями 0,5. Математические ожидания этих величин одинаковы и равны нулю:

$$M(X) = -1 \cdot 0,5 + 1 \cdot 0,5 = 0,$$

$$M(Y) = -5 \cdot 0,5 + 5 \cdot 0,5 = 0.$$

Однако очевидно, что вторая величина сильнее отклоняется от своего математического ожидания в конкретных реализациях, чем первая. Чтобы учесть и оценить эти отклонения, можно в качестве меры разброса взять математическое ожидание квадрата отклонений случайной величины от ее математического ожидания.

Дисперсия и ее свойства. Дисперсией случайной величины X называется математическое ожидание квадрата отклонения ее от математического ожидания самой величины:

$$D(X) = D_x = M(X - M_x)^2. \quad (3.8)$$

В рассмотренном выше случае (пример 2):

$$D_x = (-1)^2 \cdot 0,5 + 1^2 \cdot 0,5 = 1,$$

$$D_y = (-5)^2 \cdot 0,5 + 5^2 \cdot 0,5 = 25.$$

Для непрерывных случайных величин, так же как и для дискретных, используются понятия математического ожидания и дисперсии.

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X называется значение интеграла

$$M(x) = M_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx, \quad (3.9)$$

где $f(x)$ – плотность вероятности.

Дисперсией непрерывной случайной величины X называется значение интеграла

$$D(x) = D_x = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M_x)^2 f(x) dx \quad (3.10)$$

Средним квадратичным отклонением случайной величины X называется арифметическое значение корня квадратного из ее дисперсии:

$$\sigma_x = \sqrt{D_x}. \quad (3.11)$$

Так же как и для математического ожидания, свойства дисперсий обычно формулируются в виде теорем.

Теорема 5. Дисперсия постоянной величины равна нулю:

$$D(C) = 0.$$

Теорема 6. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его при этом в квадрат:

$$D(kX) = k^2 D(X).$$

Теорема 7. Дисперсия случайной величины равна разности математического ожидания ее квадрата и квадрата математического ожидания самой величины:

$$D(X) = M(X^2) - M_x^2.$$

Теорема 8. Дисперсия суммы конечного числа независимых случайных величин равна сумме их дисперсий:

$$D(X+Y) = D(X) + D(Y).$$

Основные свойства математического ожидания и дисперсии для непрерывных случайных величин остаются такими же, как и для дискретных случайных величин.

Математическое ожидание и дисперсия числа появлений события в независимых испытаниях. Если вероятность появления события A в каждом испытании не зависит от исходов других испытаний, то такие испытания являются *независимыми*. Пусть эти вероятности одинаковы и равны p . Тогда вероятность ненаступления события A в испытании $q = 1 - p$.

Теорема 9. Математическое ожидание числа появлений события A в n независимых испытаниях равно произведению числа испытаний на вероятность появления события A в каждом испытании.

$$M(X) = np.$$

Теорема 10. Дисперсия числа появлений события A в n независимых испытаниях равна произведению числа испытаний на вероятности появления и не появления события в одном испытании:

$$D_x = npq.$$

Пример 3. В пяти торговых точках проверяется годовой баланс. Вероятность правильного оформления баланса в каждой точке равна

0,7. Найти математическое ожидание и дисперсию правильно оформленных балансов.

Решение. Дано: $n = 5, p = 0,7, q = 0,3$.

Тогда $M_x = 5 \cdot 0,7 = 3,5$,

$D_x = 5 \cdot 0,7 \cdot 0,3 = 1,05$.

Начальные и центральные моменты. Кроме математического ожидания и дисперсии для оценки случайной величины используются и другие числовые характеристики. Все эти числовые характеристики носят общее название моментов случайной величины. Различают *начальные и центральные моменты*.

Начальным моментом порядка k случайной величины X называется математическое ожидание величины X^k : $\nu_k = M(X^k)$.

Центральным моментом порядка k случайной величины X называется математическое ожидание величины $(X - M_x)^k$: $\mu_k = M(X - M_x)^k$.

Начальный момент первого порядка представляет математическое ожидание самой случайной величины X : $\nu_1 = M(X)$.

Центральный момент первого порядка равен нулю:

$$\mu_1 = M(X - M_x) = 0.$$

Центральный момент второго порядка представляет собой дисперсию случайной величины: $\mu_2 = M(X - M_x)^2 = D_x$.

Для дискретных случайных величин:

$$\nu_k = \sum_{i=1}^n x_i^k p_i; \quad \mu_k = \sum_{i=1}^n (x_i - M_x)^k p_i. \quad (3.12)$$

Начальные и центральные моменты для непрерывной случайной величины находятся по формулам:

$$\nu_k = M(X^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x) dx, \quad (3.13)$$

$$\mu_k = M(X - M_x)^k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M_x)^k f(x) dx. \quad (3.14)$$

Мода и медиана. *Модой (M_o)* называется значение случайной величины, которое встречается чаще всего, т.е. имеет максимальную вероятность (для дискретной случайной величины) или максимум функции плотности вероятности в данной точке (при непрерывной случайной величине).

Одна и та же случайная величина может иметь одну или несколько мод. Однако возможно, что случайная величина и не имеет моды (если все ее значения имеют одинаковую вероятность (равномерное распределение)).

Определим сначала понятие *квантиля непрерывной случайной величины*. Корень уравнения $F(x) = p$, где $F(x)$ – функция распределения и $0 < p < 1$, называется p -квантилем x_p (рис. 3.4): 1/2-квантиль называется *медианой (Me)*. Учитывая определение функции распределения $F(x)$ (формулу (3.4)), получаем $P(X < Me) = 1/2$ и отсюда $P(X > Me) = 1/2$. Таким образом, медиана делит область значений случайной величины на две равные по вероятности части.

Медианой Me непрерывной случайной величины X называется такое ее значение, которое определяется равенством

$$P(X < Me(X)) = P(X > Me(X)).$$

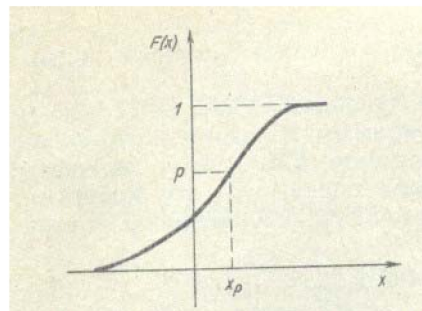


Рис.3.4. p -квантиль

Пример 4. Случайная величина X задана рядом распределения (табл. 3.2).

Таблица 3.2

X	3	5	7	11
P	0,14	0,20	0,49	0,17

Найти функцию распределения $F(x)$ случайной величины X и построить ее график. Вычислить для X ее среднее значение $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и моду Mo .

Функцию распределения находим по формулам для дискретных случайных величин (3.2) и (3.3):

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 3, \\ 0,14, & 3 < x \leq 5, \\ 0,34, & 5 < x \leq 7, \\ 0,83, & 7 < x \leq 11 \\ 1, & x > 11. \end{cases}$$

Построим график функции распределения $F(x)$ (рис. 3.5).

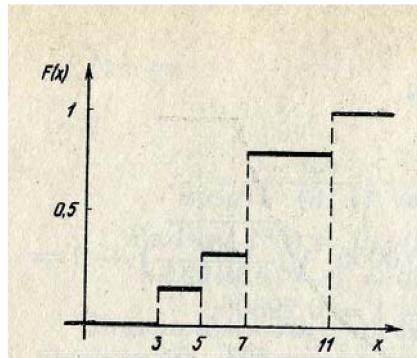


Рис. 3.5. График функции распределения

Среднее значение $M(X)$ вычисляем по формуле

$$M(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i :$$

$$M(X) = 3 \cdot 0,14 + 5 \cdot 0,2 + 7 \cdot 0,49 + 11 \cdot 0,17 = 6,72.$$

Для нахождения дисперсии воспользуемся формулами

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$$

$$\text{и } D(X) = \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot p_i - (M(X))^2:$$

$$M(X^2) = 3^2 \cdot 0,14 + 5^2 \cdot 0,2 + 7^2 \cdot 0,49 + 11^2 \cdot 0,17 = 50,84,$$

$$D(X) = 50,84 - 6,72^2 = 5,6816.$$

Моду Mo найдем по максимальной вероятности $Mo = 7$.

Пример 5. Случайная величина X задана функцией плотности вероятности. Значения параметров K и R вычислены по следующим формулам: $K=2 + V = 2+0 = 2$, $R^2 = 2 \cdot K = 4$.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ x/2, & 0 < x \leq 2, \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

Найти функцию распределения $F(x)$ случайной величины X . Построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$. Вычислить для X ее среднее значение $M(X)$, дисперсию $D(X)$, моду Mo и медиану Me .

Функцию распределения $F(x)$ непрерывной случайной величины находим по формуле: $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$, где $f(x) > 0$ – функция плотности вероятности.

$$F(x) = \int_0^x \frac{t}{2} dt = \frac{t^2}{4} \Big|_0^x = \frac{x^2}{4}, \quad 0 \leq x \leq 2.$$

Поэтому

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ x^2/4, & 0 < x \leq 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Построим графики функций $f(x)$ и $F(x)$ (рис. 3.6 и рис. 3.7).

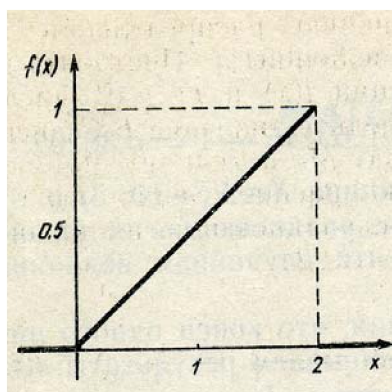


Рис. 3.6. График функции плотности вероятности $f(x)$

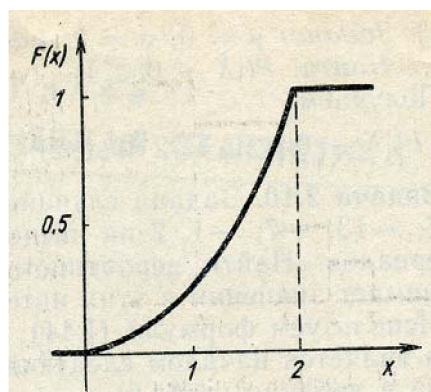


Рис. 3.7. График функции распределения $F(x)$

3.3. Практическое занятие № 5

по теме: «Случайные величины и их числовые характеристики»

Цель занятия: познакомиться с понятиями дискретной и непрерывной случайной величины, научиться вычислять их числовые характеристики.

Учебные вопросы:

1. Виды случайных величин.
2. Функция распределения и плотность вероятности случайных величин.
3. Числовые характеристики случайных величин.

Случайная величина (СЛ). Дискретная случайная величина (ДСВ). Непрерывная случайная величина (НСВ). Числовые характеристики: математическое ожидание, дисперсия, мода, медиана, моменты. Функция распределения и плотность вероятности. Закон распределения.

Методические рекомендации

Изучите основные теоретические сведения и ответьте на контрольные вопросы, только затем приступите к решению упражнений.

1. Вопросы для самопроверки

1. Что такое СВ? Какие СВ называют дискретными? непрерывными?
2. Представьте графическое изображение закона распределения дискретной СВ.
3. Что представляет собой функция распределения СВ? Укажите возможные пределы изменения функции распределения. Чем отличаются функции распределения для дискретных и непрерывных СВ?
4. Как с помощью функции распределения найти вероятность попадания СВ в заданный интервал?
5. Что называется плотностью вероятностей СВ? Запишите формулу для ее определения. Как найти функцию распределения по заданной плотности вероятностей?
6. Поясните на графиках связь между функцией распределения и плотностью вероятностей.
7. Что представляет собой математическое ожидание? В чем разница в определении этой характеристики для дискретных и непрерывных СВ? Перечислите основные свойства математического ожидания.
8. Что такое дисперсия? Как дисперсия связана со средним квадратичным отклонением? Перечислите основные свойства дисперсии.

2. Упражнения для самостоятельной работы

1. Дисперсия случайной величины X равна 6. Найти дисперсию следующих величин: а) $X-2$; б) $-4X$; в) $2X+5$.
2. Случайная величина X принимает только два значения: $+B$ и $-B$, первое – с вероятностью 0,4, второе – с вероятностью 0,6. Найти дисперсию этой величины.
3. Найти дисперсию случайной величины, зная закон ее распределения (табл.3.3):

Таблица 3.3

X	0,2	3	20	30
P	0,4	0,2	0,15	0,25

Случайная величина X может принимать два возможных значения: x_1 с вероятностью 0,4 и x_2 с вероятностью 0,6, причем $x_2 > x_1$. Найти x_2 и x_1 зная, что $M(X)=1,7$ и $D(X) = 0,31$.

Случайная величина задана законом распределения:

X	3	9	27
P	0,2	0,6	0,2

Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x) = 2x$ в интервале $(0; 1)$; вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти математическое ожидание величины X . *Ответ:* 2/3.

Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x)=(1/2)x$ в интервале $(0; 2)$; вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти математическое ожидание величины X . *Ответ:* 4/3.

По мишени производится три выстрела, причем вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,8. Найти закон распределения случайной величины X_i – числа попаданий в мишень. *Контроль:* $0,008 + 0,096 + 0,384 + 0,512 = 1$.

В денежной лотерее выпущено 100 билетов. Разыгрывается один выигрыш в 50 руб. и десять выигрышей по 1 руб. Найти закон распределения случайной величины X – стоимости возможного выигрыша для владельца одного лотерейного билета. *Контроль:* $0,01 + 0,1 + 0,89 = 1$.

В некоторой лотерее 100 билетов, из которых 5 билетов выигрывают по 20 руб., 15 – по 10 руб., 30 – по 5 руб., 50 билетов ничего не выигрывают. Вычислить математическое ожидание выигрыша. *Ответ:* 4 руб.

4. ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ И ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Для практики очень важно знание условий, при выполнении которых совокупное действие очень многих случайных причин приводит к результату, почти не зависящему от случая, так как позволяет предвидеть ход явлений. Эти условия и указываются в теоремах, носящих общее название закона больших чисел. К ним относятся теоремы Чебышева и Бернулли.

4.1. Понятие о законе больших чисел

Теорема Чебышева является наиболее общим законом больших чисел, теорема Бернулли – простейшим. Для доказательства этих теорем используется неравенство Чебышева.

Неравенство Чебышева. Вероятность того, что отклонение случайной величины X от ее математического ожидания по абсолютной величине меньше положительного числа ε , не меньше, чем

$$1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2} :$$

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}. \quad (4.1)$$

Теорема Чебышева. Если $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ – попарно независимые случайные величины, причем дисперсии их равномерно ограничены (не превышают постоянного числа C), то, как бы мало ни было положительное число ε , вероятность неравенства

$$\left| \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + \dots + M(X_n)}{n} \right| < \varepsilon \quad (4.2)$$

будет как угодно близка к единице, если число случайных величин достаточно велико.

Другими словами, в условиях теоремы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left| \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + \dots + M(X_n)}{n} \right| < \varepsilon\right) = 1. \quad (4.3)$$

Таким образом, теорема Чебышева утверждает, что если рассматривается достаточно большое число независимых случайных ве-

личин, имеющих ограниченные дисперсии, то почти достоверным можно считать событие, состоящее в том, что отклонение среднего арифметического случайных величин от среднего арифметического их математических ожиданий будет по абсолютной величине сколь угодно малым.

Частный случай теоремы Чебышева. Если $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ – попарно независимые случайные величины, имеющие одно и то же математическое ожидание a , и если дисперсии этих величин равномерно ограничены, то, как бы мало ни было число $\varepsilon > 0$, вероятность неравенства

$$\left| \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - a \right| < \varepsilon \quad (4.4)$$

будет как угодно близка к единице, если число случайных величин достаточно велико.

Другими словами, в условиях теоремы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\left| \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - a \right| < \varepsilon \right) = 1. \quad (4.5)$$

Сущность теоремы Чебышева. Сущность доказанной теоремы такова: отдельные случайные величины могут иметь значительный разброс, а их среднее арифметическое рассеянно мало.

Таким образом, нельзя уверенно предсказать, какое возможное значение примет каждая из случайных величин, но можно предвидеть, какое значение примет их среднее арифметическое.

Итак, *среднее арифметическое достаточно большого числа независимых случайных величин (дисперсии которых равномерно ограничены) утрачивает характер случайной величины.*

Значение теоремы Чебышева для практики. Приведем примеры применения теоремы Чебышева к решению практических задач.

На теореме Чебышева основан широко применяемый в статистике выборочный метод, суть которого состоит в том, что по сравнительно небольшой случайной выборке судят о всей совокупности (генеральной совокупности) исследуемых объектов. Например, о качестве кипы хлопка заключают по небольшому пучку, состоящему из волокон, наудачу отобранных из разных мест кипы. Хотя число волокон

в пучке значительно меньше, чем в кипе, сам пучок содержит достаточно большое количество волокон, исчисляемое сотнями.

В качестве другого примера можно указать на определение качества зерна по небольшой его пробе. И в этом случае число наудачу отобранных зерен мало сравнительно со всей массой зерна, но само по себе оно достаточно велико.

Уже из приведенных примеров можно заключить, что для практики теорема Чебышева имеет неоценимое значение.

Теорема Бернулли. Если в каждом из n независимых испытаний вероятность p появления события A постоянна, то как угодно близка к единице вероятность того, что отклонение относительной частоты от вероятности p по абсолютной величине будет сколь угодно малым, если число испытаний достаточно велико.

Другими словами, если ε — сколь угодно малое положительное число, то при соблюдении условий теоремы имеет место равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1. \quad (4.6)$$

4.2. Закон распределения случайных величин

Биномиальное распределение. Случайная величина, имеющая биномиальное распределение, получается при повторных независимых испытаниях. Значениями случайной величины X значений являются частоты события A при независимых испытаниях, т. е. целые числа в интервале $[0, n]$. Это означает, что случайная величина с биномиальным распределением *дискретна*.

Вероятность каждого значения вычисляется по формуле Бернулли (2.17) (рис. 4.1).

Согласно формуле (3.1), можно записать *функцию распределения биномиальной случайной величины*:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \sum_{k \leq x} C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}, & 0 < x \leq n \\ 1, & x > n \end{cases} \quad (4.7)$$

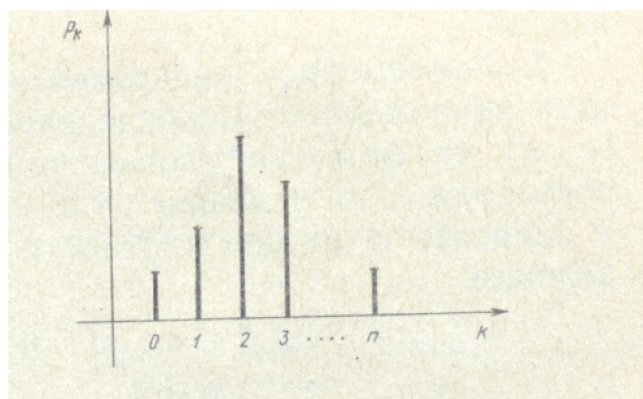


Рис. 4.1. График вероятностей значений случайной величины X с биномиальным распределением

Параметрами биномиального распределения являются n и p . Утверждение, что случайная величина X имеет биномиальное распределение с параметрами n и p , можно более кратко записывать в виде $X \in B(n, p)$. Среднее значение биномиального распределения $M(X) = np$ и дисперсия $D(X) = npq$. Модой является наивероятнейшая частота.

Пример 1. Монета брошена 2 раза. Написать в виде таблицы закон распределения случайной величины X - числа выпадений «герба».

Решение. Вероятность появления «герба» в каждом бросании монеты $p=1/2$, следовательно, вероятность не появления «герба» $q=1-1/2=1/2$.

При двух бросаниях монеты «герб» может появиться либо 2 раза, либо 1 раз, либо совсем не появиться. Таким образом, возможные значения X таковы: $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$. Найдем вероятность этих возможных значений по формуле Бернулли:

$$\begin{aligned} P_2(2) &= C_2^2 \cdot p^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}. \\ P_2(1) &= C_2^1 \cdot p \cdot q = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}. \\ P_2(0) &= C_2^0 \cdot q^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Таким образом, искомый закон распределения (табл 4.1):

Таблица 4.1

X	2	1	0
P	0,25	0,5	0,25

Распределение Пуассона (экспоненциальное распределение).

Величина срока службы различных устройств и времени безотказной работы отдельных элементов этих устройств при выполнении определенных условий обычно подчиняется показательному распределению. Другими словами, величина промежутка времени между появлениями двух последовательных редких событий подчиняется зачастую показательному распределению.

Случайная величина, имеющая распределение Пуассона, принимает значения $0, 1, 2, \dots, n$, причем вероятность p_k того, что она принимает значения $k > 0$, вычисляется по формуле Пуассона:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \end{cases} \quad (4.8)$$

где λ – постоянная положительная величина.

График функции плотности вероятности представлен на рис. 4.2 и интегральной функции – на рис. 4.3 для экспоненциального распределения.

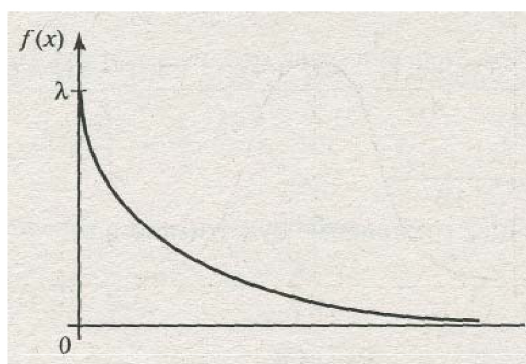


Рис. 4.2. График функции плотности вероятности для экспоненциального распределения

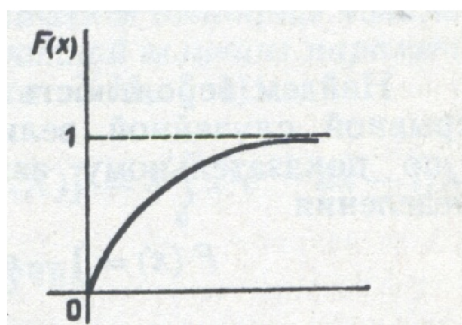


Рис. 4.3. График функции распределения вероятности для экспоненциального распределения

Ее функция распределения определяется соотношением:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \sum_{k < n} \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}, & 0 < x \leq n \\ 1, & x > n, \end{cases} \quad (4.9)$$

где $\lambda = \text{const}$, $\lambda > 0$.

Параметром распределения Пуассона является величина λ .

Математическое ожидание случайной величины, имеющей экспоненциальное распределение: $M_x = \frac{1}{\lambda}$. Дисперсия для экспоненци-

ального распределения: $D_x = \frac{1}{\lambda^2}$.

Пример 2. Время безотказной работы устройства распределено по закону $f(t) = 0.02e^{-0.02t}$; $t \geq 0$. Найти среднее время безотказной работы устройства, вероятность того, что устройство не откажет за среднее время безотказной работы. Найти вероятность отказа за время $t = 100$ ч.

Решение:

Выясним смысл числовых характеристик и параметра распределения.

Математическое ожидание – это среднее время между двумя ближайшими отказами устройства, а величина, обратная математическому ожиданию (параметр распределения), – интенсивность отказов, т.е. количество отказов в единицу времени.

По условию интенсивность отказов $\lambda = 0,02$. Тогда среднее время между двумя отказами, т.е. математическое ожидание $M(X) = 1/0,02 = 50$ ч. Вероятность безотказной работы за этот промежуток времени вычислим по функции надежности $R(t)$:

$$R(t) = P(T > t) = 1 - F(t).$$

Функция распределения $F(t) = P(T < t) = 1 - e^{-\lambda t}$ определяет вероятность отказа устройства за время t .

$$R(50) = e^{-0,02 \cdot 50} = e^{-1} \approx 0,37.$$

По функции $F(t)$ вычислим вероятность отказа за время $t = 100$ ч:

$$F(100) = 1 - e^{-0,02 \cdot 100} = 1 - e^{-2} \approx 0,86.$$

Равномерное распределение. На практике встречаются случайные величины, о которых заранее известно, что они могут принять какое-либо значение в строго определенных границах, причем в этих границах все значения случайной величины имеют одинаковую вероятность (обладают одной и той же плотностью вероятностей). Например, при поломке часов остановившаяся минутная стрелка будет с одинаковой вероятностью (плотностью вероятности) показывать время, прошедшее от начала данного часа до поломки часов. Это время является случайной величиной, принимающей с одинаковой плотностью вероятности значения, которые не выходят за границы, определенные продолжительностью одного часа. К подобным случайным величинам относится также и погрешность округления. Про такие величины говорят, что они распределены равномерно, т.е. имеют равномерное распределение.

Случайная величина X , имеющая равномерное распределение, принимает значения в интервале $[a, b]$, ее функция плотности вероятности $f(x)$ в этом интервале постоянна. По условию (3.4) можно определить эту константу и записать функцию плотности вероятности равномерного распределения:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{1}{b-a}, & a < x \leq b \\ 1, & x > b. \end{cases} \quad (4.10)$$

Функцию распределения можно найти по формуле:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x \leq b \\ 1, & x > b \end{cases} \quad (4.11)$$

Графики этих функций изображены на рис. 4.4 и 4.5.

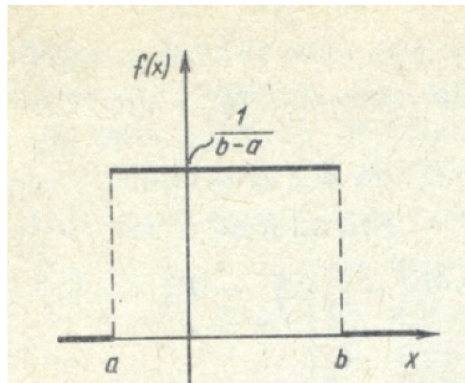


Рис. 4.4. График функции плотности вероятности $f(x)$ равномерного распределения

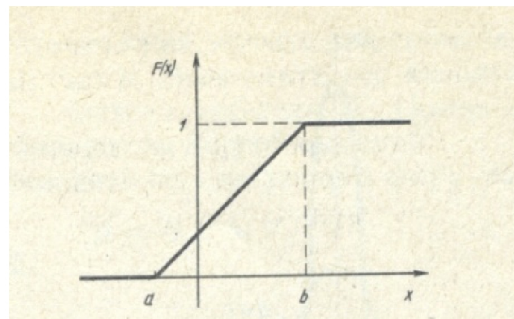


Рис. 4.5. График функции распределения $F(x)$ равномерного распределения

Математическое ожидание случайной величины, имеющей равномерное распределение: $M_x = \frac{a+b}{2}$.

Дисперсия может быть вычислена следующим образом:

$$D_x = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Откуда сразу же следует, что среднее квадратическое отклонение: $\sigma_x = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$.

Равномерное распределение не имеет моды, а медиана совпадает со средним значением.

Найдем теперь вероятность попадания значения случайной величины, имеющей равномерное распределение, на интервал (α, β) , принадлежащий целиком отрезку $[a, b]$:

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{b-a} = \frac{\beta - \alpha}{b-a}. \quad (4.12)$$

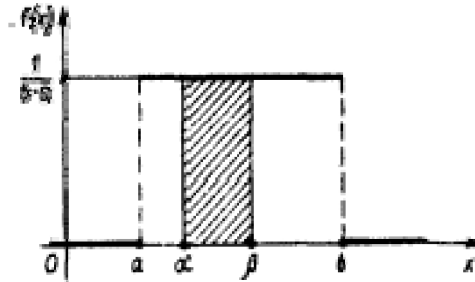


Рис. 4.6

Геометрически (рис.4.6) эта вероятность представляет собой площадь заштрихованного прямоугольника. Числа a и b называются *параметрами распределения* и однозначно определяют равномерное распределение.

Пример 3. Автобусы некоторого маршрута идут строго по расписанию. Интервал движения 5 мин. Найти вероятность того, что пассажир, подошедший к остановке, будет ожидать очередной автобус менее 3 мин.

Решение: Время ожидания автобуса имеет равномерное распределение. Тогда искомая вероятность будет равна:

$$P(0 < X < 3) = \frac{3-0}{5-0} = 0,6.$$

Пример 4. Ребро куба x измерено приближенно. Причем $a \leq x \leq b$.

Рассматривая ребро куба как случайную величину, распределенную равномерно в интервале (a, b) , найти математическое ожидание и дисперсию объема куба.

Решение:

Объем куба – случайная величина, определяемая выражением $Y = X^3$. Тогда математическое ожидание равно:

$$M(X) = \int_a^b x^3 \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{4} \cdot \frac{x^4}{(b-a)} = \frac{(b+a)(b^2+a^2)}{4}.$$

Дисперсия:

$$\begin{aligned} D(X) &= \int_a^b x^6 \frac{1}{b-a} dx - [M(X)]^2 = \frac{1}{7} \frac{x^7}{b-a} \Big|_a^b - [M(X)]^2 = \\ &= \frac{1}{7} \frac{b^7 - a^7}{b-a} - \left[\frac{(b+a)(b^2+a^2)}{4} \right]^2. \end{aligned}$$

Нормальное распределение. Для примера рассмотрим изготовление некоторой детали на станке-автомате. Размеры изготовленных деталей несколько отличаются от требуемых. Это отклонение размеров от стандарта вызывается различными причинами, которые более или менее независимы друг от друга. К ним могут относиться: неравномерный режим обработки детали; неоднородность обрабатываемого материала; неточность установки заготовки в станке; износ режущего инструмента и деталей станков; упругие деформации узлов станка; состояние микроклимата в цехе; колебание напряжения в электросети и т. д. Каждая из перечисленных и подобных им причин влияет на отклонение размера изготавливаемой детали от стандарта. Таким образом, общее отклонение размера, фиксируемое измерительным прибором, является суммой большего числа отклонений, обусловленных различными причинами. Если ни одна из этих причин не является доминирующей, то суммарное отклонение является случайной величиной, имеющей нормальный закон распределения.

Нормальное распределение является самым распространенным распределением в природе, экономике и т. д. Случайная величина с нормальным распределением может принимать любые значения в интервале $(-\infty, +\infty)$ и имеет *функцию плотности вероятности*:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-M_x)^2}{2\sigma_x^2}\right), \quad (4.13)$$

где σ_x и M_x – среднее квадратичное отклонение и математическое ожидание случайной величины.

Нормальный закон распределения называют также *законом Гаусса*. График функции плотности вероятности нормального распределения представлен на рис. 4.7.

Как показывает исследование функции $f(x)$, функция определена на всей числовой оси, все ее значения неотрицательны, при $|x| \rightarrow \infty$ значения функции уменьшаются $f(x) \rightarrow 0$, т. е. ось x является асимптотой функции $f(x)$. Функция $f(x)$ достигает в точке $x = \mu$ максимума, равного $\frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}}$ и имеет точки перегиба в точках $x_1 = \mu - \sigma$ и $x_2 = \mu + \sigma$.

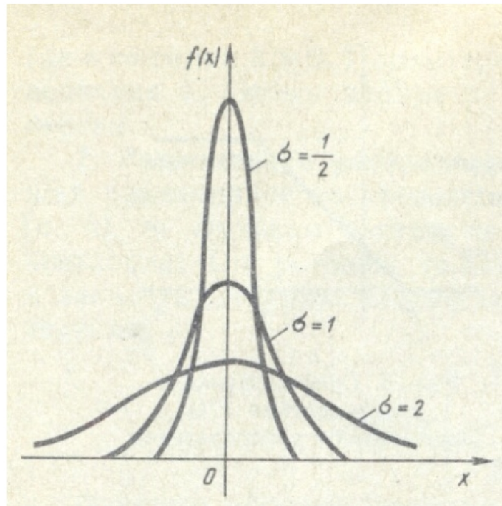


Рис. 4.7. Изменение графика функции плотности $f(x)$ нормального распределения при изменении параметров σ

При изменении значения μ график функции $f(x)$ «жестко» смещается вдоль оси Ox (рис. 4.8). При изменении значения σ изменяется и вид графика (рис. 4.7).

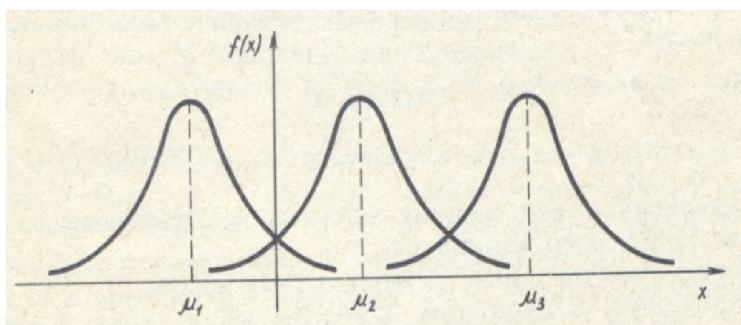


Рис. 4.8. Смещение графика $f(x)$ при изменении параметра μ

На основании формул (3.4) и (4.13) получаем *функцию распределения* $\Phi(x)$ нормального распределения:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt. \quad (4.14)$$

По параметрам нормального распределения вычисляют и все числовые характеристики нормального распределения, а именно, $M(X) = \mu$, $D(X) = \sigma^2$, σ является средним квадратичным отклонением: $Mo = Me = \mu$. Утверждение «случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами μ и σ » кратко записывается так: $X \in N(\mu, \sigma)$.

Особое значение среди нормальных распределений имеет *нормированное нормальное распределение* с параметрами $\mu = 0$ и $\sigma = 1$: $X \in N(0, 1)$. Если эти параметры подставить в формулы (4.13) и (4.14), то получим знакомые (2.20) и (2.24) формулы для $f(x)$ и $\Phi(x)$, для которых составлены таблицы (приложение 1 и 2). И график плотности $f(x)$ имеет вид, представленный на рис. 4.9:

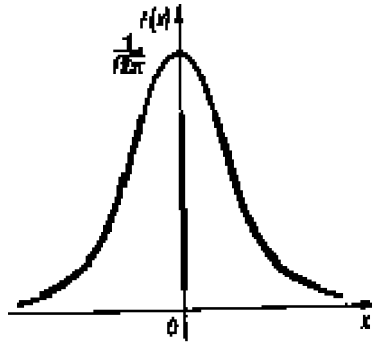


Рис. 4.9

Интеграл вида

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad (4.15)$$

носит название *нормированной функции Лапласа* или просто *функции Лапласа*. Интегралы от функции $e^{-\frac{t^2}{2}}$ нельзя выразить через элементарные функции, поэтому определяют их численные значения, которые помещают в специальные таблицы.

Искомая вероятность через функцию Лапласа запишется в виде

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = \Phi\left(\frac{x_2 - M_x}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - M_x}{\sigma_x}\right). \quad (4.16)$$

Пример 5. Задана случайная величина $X \in N(0, 2)$. Найти вероятность того, что эта случайная величина принимает значение:

- а) в интервале $[-1, 2]$;
- б) меньше - 1;
- в) больше 2;
- г) отличающееся от своего среднего значения по абсолютной величине не больше, чем на 1.

В первых трех случаях можно воспользоваться формулой

$$P(a \leq X \leq b) = \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x)$ – функция распределения, а в четвертом – формулой

$$P(|X - \mu| \leq \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) - 1.$$

а) *Задаано:* $\mu = 0$, $\sigma = 2$, $a = -1$, $b = 2$.

Найти: $P(-1 \leq X \leq 2)$.

Имеем:

$$P(-1 \leq X \leq 2) = \Phi\left(\frac{2-0}{2}\right) - \Phi\left(\frac{-1-0}{2}\right) = \Phi(1) - \Phi(-0,5) = \Phi(1) - 1 + \Phi(0,5) = 0,84134 - 1 + 0,69146 = 0,53280.$$

б) *Задаано:* $\mu = 0$, $\sigma = 2$, $a = -\infty$, $b = -1$.

Найти: $P(X \leq -1)$.

Получаем

$$P(X \leq -1) = P(-\infty < X \leq -1) = \Phi\left(\frac{-1-0}{2}\right) - \Phi\left(\frac{-\infty-0}{2}\right) = \Phi(-0,5) - \Phi(-\infty) = 1 - \Phi(0,5) - 0 = 0,30854.$$

в) *Задаано:* $\mu = 0$, $\sigma = 2$, $a = 2$, $b = \infty$.

Найти: $P(X \geq 2)$.

Получаем

$$P(X \geq 2) = P(2 \leq X < \infty) = \Phi\left(\frac{\infty-0}{2}\right) - \Phi\left(\frac{2-0}{2}\right) = \Phi(\infty) - \Phi(1) = 1 - 0,84134 = 0,15866.$$

г) *Задаано:* $\mu = 0$, $\sigma = 2$, $\varepsilon = 1$.

Найти: $P(|X - 0| \leq 1)$.

Получаем:

$$P(|X - 0| \leq 1) = 2 \cdot \Phi\left(\frac{1}{2}\right) - 1 = 2 \cdot 0,69146 - 1 = 0,38292.$$

Пример 6. Случайная величина X является нормально распределенной $X \in N(10, 2)$. Ее математическое ожидание равно 10, а сред-

нее квадратичное отклонение равно 2. Найти вероятность того, что в результате испытания случайная величина примет значение в интервале (9, 12).

Решение. Воспользуемся формулой (4.16):

$$P(9 < X < 12) = \Phi\left(\frac{12-10}{2}\right) - \Phi\left(\frac{9-10}{2}\right) = \Phi(1) - \Phi(-0,5) = 0,5328.$$

По таблице функции Лапласа (см. приложение 2) находим:

$$\Phi(1) = 0,84134, \Phi(-0,5) = 1 - \Phi(0,5) = 1 - 0,69146 = 0,30854.$$

$$\text{Тогда } P(9 < X < 12) = 0,84134 - 0,30854 = 0,5328.$$

4.3. Практическое занятие № 6

по теме: «Понятие о законе больших чисел. Законы распределения случайных величин»

Цель занятия: дать понятие о законе больших чисел, формируя статистическое мышление студентов, изучить законы распределения случайных величин.

Учебные вопросы:

1. Неравенство и теорема Чебышева.
2. Теорема Бернулли.
3. Сущность закона больших чисел.
4. Распределения ДСВ.
5. Распределения НСВ.

Неравенство Чебышева. Теорема Чебышева. Теорема Бернулли. Закон больших чисел. Биномиальное распределение. Распределение Пуассона. Равномерное распределение. Нормальное распределение.

Методические рекомендации

Изучите основные теоретические сведения и ответьте на контрольные вопросы, только затем приступите к решению упражнений.

1. Вопросы для самопроверки

1. Дать понятие о законе больших чисел.
2. Сформулировать равномерный закон распределения. Записать дифференциальную и интегральную функции.
3. Записать формулы для вычисления числовых характеристик равномерно распределенной случайной величины.

4. Сформулировать нормальный закон распределения. Записать дифференциальную и интегральную функции.
5. Описать свойства дифференциальной функции нормально распределенной случайной величины. Пояснить геометрический смысл параметров нормального распределения.
6. При каких значениях параметров функция плотности нормального распределения называется плотностью стандартной нормальной случайной величины?
7. Записать формулу для вычисления вероятности отклонения нормально распределенной СВ от математического ожидания.
8. Сформулировать правило трех сигм и пояснить его суть.
9. Сформулировать показательный закон распределения. Записать дифференциальную и интегральную функции.
10. Каков смысл параметра показательного распределения, если в качестве СВ рассматривать время безотказной работы устройства? Какими выражениями параметр распределения связан с числовыми характеристиками?
11. Вероятность какого события определяет функция надежности?

2. Упражнения для самостоятельной работы

1. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что $|X - M(X)| < 0,2$, если $D(X) = 0,004$.
2. Минутная стрелка электрических часов перемещается скачком в конце каждой минуты. Найти вероятность того, что в данное мгновение часы покажут время, которое отличается от истинного не более чем на 20 с.
3. Найти математическое ожидание случайной величины X , распределенной равномерно в интервале (2, 8).
4. Математическое ожидание нормально распределенной случайной величины X равно $a = 3$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma = 2$. Написать плотность вероятности X .
5. Написать плотность вероятности нормально распределенной случайной величины X , зная, что $M(X) = 3$, $D(X) = 16$.
6. Написать плотность и функцию распределения показательного закона, если параметр $\lambda = 5$.

5. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Математическая статистика – это раздел математики, который имеет своим предметом изучения методы сбора, систематизации, обработки и использования статистических данных для получения научно обоснованных выводов и принятия решений.

При этом под *статистическими данными* понимается совокупность чисел, которые представляют количественные характеристики интересующих нас признаков изучаемых объектов. Статистические данные получаются в результате специально поставленных опытов, наблюдения.

Статистические данные по своей сущности зависят от многих случайных факторов, поэтому математическая статистика тесно связана с теорией вероятностей, которая является ее теоретической основой.

Среди основных задач математической статистики могут быть отмечены следующие: оценка неизвестной вероятности случайного события; оценка неизвестного закона распределения случайной величины или ее числовых характеристик (математического ожидания, дисперсии); проверка гипотез (предположений), сделанных относительно некоторых случайных событий, случайных величин (о вероятности события, законе распределения случайной величины и т. д.).

Так как практически любой признак допускает количественную оценку, то вместо того, чтобы говорить о совокупности изучаемых объектов, можно говорить о значениях изучаемого признака этих объектов.

5.1. Первичная обработка выборок

Чтобы научиться обрабатывать выборки, познакомимся с понятиями генеральной и выборочной совокупности.

Определение. Генеральной совокупностью называется множество числовых значений некоторого признака всех объектов рассматриваемой совокупности.

Определение. Выборочной совокупностью или просто *выборкой* называется множество числовых значений некоторого признака всех объектов, случайным образом отобранных из всей совокупности рассматриваемых объектов.

Обычно из генеральной совокупности делают выборку, т. е. исследуют только некоторые ее объекты. С помощью выборки оценивают генеральную совокупность по вероятностным свойствам. Чтобы оценки были достоверными, выборка должна быть *представительной*, т.е. ее вероятностные свойства должны совпадать или быть близкими к свойствам генеральной совокупности.

Определение. Выборка является *репрезентативной*, если относительные частоты варианта выборки близки к соответствующим относительным частотам варианта генеральной совокупности (по всем вариантам генеральной совокупности).

Представительную выборку можно получить, если выбирать объекты для исследований случайно, т.е. гарантировать всем объектам генеральной совокупности одинаковую вероятность подвергнуться исследованию, а также все выборки получены из генеральной совокупности случайно.

Случайно выбранный объект после проверки нужного признака можно возвратить (возвратная или повторная выборка) или не возвращать (*безвозвратная* или *бесповторная выборка*) обратно в генеральную совокупность. В первом случае получаем более независимую и представительную выборку.

С целью обеспечения репрезентативности выборки в зависимости от конкретных условий применяются различные способы отбора: простой, типический, механический, серийный или сочетанием вышеуказанных способов.

Простым называется отбор, при котором из генеральной совокупности случайным образом извлекается по одному элементу с возвращением или без возвращения. Например, для изучения белых медведей экспедиция ловит случайным образом попавшихся ей белых медведей, измеряет исследуемые параметры и отпускает животных на волю или сдает в зоопарк в зависимости от целей, которые стоят перед ней.

Типическим называется отбор, при котором объекты случайным образом отбираются из каждой «типической» части генеральной совокупности. Например, если детали изготавливаются разными цехами, то для обеспечения репрезентативности выборки отбор производится

случайным образом с соблюдением пропорций из продукции каждого цеха. Типическим отбором пользуются тогда, когда исследуемый признак существенно колеблется в различных частях генеральной совокупности.

Механическим называется отбор, при котором объекты отбираются через определенный интервал, скажем, каждый пятый, двадцатый, сотый и т. д. Механическим отбором надо пользоваться осторожно. Например, если резец заменяется после тридцати обработанных деталей, то нельзя составлять выборку, отбирая каждую десятую или пятнадцатую деталь. Отметим, что в таких случаях целесообразно, чтобы номер отбираемой детали и период ритма работы были взаимно простыми числами. Тогда в выборку попадут объекты из различных моментов периода ритма.

Серийным называется отбор, при котором выборка состоит из целой серии объектов. Этим способом пользуются в тех случаях, когда исследуемый признак в генеральной совокупности колеблется незначительно. Например, если квалификация всех рабочих цеха, качество технических средств и сырья существенно изменяются в течение недели, то для проверки недельной продукции данного цеха можно провести сплошную проверку продукции одного дня.

При исследовании объектов можно фиксировать или измерять значение одного или нескольких признаков. Соответственно говорят об *одномерной, двумерной, трехмерной* и т. д. выборках.

Вначале рассмотрим обработку одномерных выборок.

Вариационный ряд. Выбор объекта из генеральной совокупности и измерение значения признака называется статистическим наблюдением. Результаты наблюдений фиксируют в протоколе или дневнике наблюдений в порядке их появления.

Выборка будет намного наглядней, если все ее элементы упорядочить по возрастанию или убыванию. Но в выборке одно значение (вариант) может встречаться несколько раз и поэтому целесообразно результаты записать в виде таблицы, в первом столбце которой находятся всевозможные значения (варианты) x_i генеральной совокупности (или случайной величины) X , а во втором – числа n_i , т. е. частоты появления i -го значения. Такую таблицу называют *вариационной*

таблицей или вариационным рядом, который может быть составлен либо по значениям, либо по интервалам. Чтобы решить этот вопрос, нужно вычислить размах выборки.

$$R = x_{\max} - x_{\min}. \quad (5.1)$$

Если размах мал, то составляется вариационный ряд по значениям, если велик или если количество вариантов m слишком велико или близко к объему выборки, то целесообразно составить *вариационный ряд по интервалам значений генеральной совокупности*. По интервалам составляют вариационный ряд и из выборки непрерывной генеральной совокупности.

Графики вариационного ряда. Используют два вида графиков вариационных рядов: *полигон* и *гистограмму*.

Определение. Ломаная линия, отрезки которой соединяют точки $(x_i; n_i)$, называется *полигоном частот*.

Определение. *Гистограммой частот* называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, построенных на частичных интервалах с длиной d и высотой, равной отношению n_i / d (плотность частоты на данном интервале).

Если вариационный ряд составлен по значениям, то полигон строят из отрезков, соединяющих точки, координатами которых являются значения x_i и соответствующие частоты n_i / n (рис. 5.1). При построении гистограммы над каждым значением x_i строят прямоугольник, высота которого пропорциональна соответствующей частоте n_i / n (рис. 5.2).

При большом числе наблюдений и большом числе вариантов удобно варианты группировать по отдельным интервалам их значений. Для этого шкала интересующего нас признака разделяется на некоторое число интервалов и вместо отдельных вариантов рассматриваются группы значений вариантов, попавших в последовательно расположенные интервалы. Число m таких интервалов, как правило, берется в пределах от 10 до 20. Ширина интервалов Δx определяется путем деления размаха выборки $x_k - x_1$ на количество интервалов:

$$\Delta x = \frac{x_k - x_1}{m}. \quad (5.2)$$

В таких случаях составляется статистическое распределение выборки по частотам интервалов (интервальное статистическое распределение выборки). При этом частота интервала равна сумме частот вариантов, попавших в данный интервал.

Если вариационный ряд составлен по интервалам, то в качестве значений x_i следует рассматривать середины интервалов (см. рис. 5.14, 5.15).

Эмпирическая функция распределения. Каждая генеральная совокупность имеет функцию распределения $F(x) = P(X < x)$, которая обычно неизвестна. По выборке можно найти эмпирическую функцию распределения $F^*(x)$, где на основании закона больших чисел по теореме Бернулли вместо вероятностей p_i берутся относительные частоты n_i/n . Процесс нахождения эмпирической функции распределения $F^*(x)$ аналогичен процессу нахождения функции распределения $F(x)$ дискретной случайной величины.

$$F^*(x) = \sum_{x_i < x} \frac{n_i}{n}. \quad (5.3)$$

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \leq x_1, \\ \frac{n_1}{n}, & x_1 < x \leq x_2, \\ \frac{n_1 + n_2}{n}, & x_2 < x \leq x_3, \\ \dots\dots\dots \\ \sum_{i=1}^{m-1} \frac{n_i}{n}, & x_{m-1} < x < x_m, \\ 1, & x > x_m. \end{cases} \quad (5.4)$$

Значениями эмпирической функции распределения $F^*(x)$ являются так называемые *накопленные частоты* (см. табл. 5.2). График эмпирической функции распределения строят так же, как и график функции распределения $F(x)$ случайной дискретной величины.

Числовые характеристики выборки. Среднее арифметическое. **Выборочной средней** называют среднее арифметическое значение выборки. *Среднее арифметическое* $\bar{x}$ определяется по формуле

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad (5.5)$$

где x_i – элементы выборки, n – ее объем. С помощью формулы (5.5) вычисляют непосредственно по протоколу наблюдений. Если составлен вариационный ряд, то следует использовать формулу:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m x_i n_i, \quad (5.6)$$

где x_i – варианты случайной величины,

n_i – соответствующие частоты,

m – количество вариантов,

n – объем выборки.

Если вариационный ряд составлен по интервалам значений, то в роли x_i в формулах (5.5) и (5.6) используют середины интервалов.

Дисперсия выборки. **Выборочной дисперсией** называется среднее арифметическое квадратов отклонений наблюдаемых значений от выборочного среднего. Дисперсию выборки обозначим через $\bar{S}^2$. Для вычисления выборочной дисперсии $\bar{S}^2$ приведем такие же формулы, что и для нахождения среднего арифметического:

$$\bar{S}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \text{ или } \bar{S}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2. \quad (5.7)$$

$$\bar{S}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^2 n_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m x_i^2 n_i - \bar{x}^2. \quad (5.8)$$

Стандартное отклонение. *Стандартное*, или *среднеквадратичное*, отклонение определяется как квадратный корень из дисперсии:

$$\bar{S} = \sqrt{\bar{S}^2}. \quad (5.9)$$

Мода. Если вариационный ряд составлен по значениям генеральной совокупности, то *модой выборки* является значение, имеющее максимальную частоту. Если вариационный ряд составлен по интервалам значений генеральной совокупности, то мода вычисляется по следующей приближенной формуле:

$$Mo = x_{0+} k \frac{n_i - n_{i-1}}{(n_i - n_{i-1}) + (n_i - n_{i+1})}. \quad (5.10)$$

где x_0 – начало модального интервала, т.е. интервала, имеющего максимальную частоту; k – длина модального интервала; n_i – частота модального интервала; n_{i-1} и n_{i+1} – частоты соответственно предшествующего и последующего за модальным интервалов.

Важность этого показателя состоит в том, что он характеризует существенную часть совокупности.

Медиана. *Медианой* выборки является значение срединного элемента вариационного ряда. Если вариационный ряд составлен по значениям генеральной совокупности, то при нечетном объеме выборки n медиана – это действительное значение срединного элемента, а при n четном – среднее арифметическое двух срединных элементов.

Если вариационный ряд составлен по интервалам значений, то медиана вычисляется по следующей приближенной формуле:

$$Me = x_{0+} k \frac{n/2 - T_{i-1}}{n_i}, \quad (5.11)$$

где x_0 – начало медианного интервала, т.е. интервала, в котором содержится срединный элемент; k – длина медианного интервала; n – объем выборки; T_{i-1} – сумма частот интервалов, предшествующих медианному; n_i – частота медианного интервала.

Медиана – значение признака, приходящееся на середину упорядоченного ряда наблюдений. Она делит всю группу (данную совокупность) на две равные части (50% группы имеет значение признака, меньшее, чем медиана, 50% – большее) и представляет собой центральную величину. Медиана характеризует особое свойство изучаемого явления: сумма абсолютных отклонений чисел распределенного ряда от медианы есть величина наименьшая.

$$\sum_{i=1}^n (x_i - M_e) \rightarrow \min. \quad (5.12)$$

Пример 1. На некотором ООО "ГАК" снизились продажи выпущенной продукции. Администрация этого малого предприятия решила провести статистический анализ работающих специалистов. Была сделана выборка личных дел в количестве 79. Полученные в отделе кадров данные о разрядах были зафиксированы, причем статус "Ученик" - приобрел разряд 0, статус "Работник 6 разряда с многолетним стажем" - разряд 7. Протокол наблюдений представлен выборкой *A* (табл. 5.1), объем которой составил 79 элементов.

Таблица 5.1. **Выборка А**

2	4	2	4	3	3	3	2	0	6
1	2	3	2	2	4	3	3	5	1
0	2	4	3	2	2	3	3	1	3
3	3	1	1	2	3	1	4	3	1
7	4	3	4	2	3	2	3	3	1
4	3	1	4	5	3	4	2	4	5
3	6	4	1	3	2	4	1	3	1
0	0	4	6	4	7	4	1	3	

$n = 79$ – объем выборки.

Для составления вариационного ряда находим $x_{min} = 0$ и $x_{max} = 7$.

Размах довольно мал ($7 - 0 = 7$), поэтому составим вариационный ряд по значениям (табл. 5.2).

Все относительные частоты (см. формулу 1.2) вычисляем с одинаковой точностью, причем

$$n = \sum_{i=1}^m n_i, \quad (5.13)$$

где m – количество вариантов в вариационном ряде. Если условие (5.13) не выполнено, то пересчитаем все n_i .

Сумма всех относительных частот должна быть равна единице:

$$\sum_{i=1}^m \frac{n_i}{n} = 1 \quad (5.14)$$

Таблица 5.2

x_i	n_i	$\frac{n_i}{n}$	Накопленные частоты
0	4	0,0506	0,0506
1	13	0,1646	0,2152
2	14	0,1772	0,3924
3	24	0,3038	0,6962
4	16	0,2025	0,8987
5	3	0,0380	0,9367
6	3	0,0380	0,9747
7	2	0,0253	1,0000
Σ	79	1,0000	—

При построении графиков изображаем на оси Ox значения с 0 по 7 и на оси $\frac{n_i}{n}$ — значения с 0 по 0,3 (рис. 5.1 и 5.2).

Эмпирическую функцию распределения $F^*(x)$ находим, используя формулу (5.4) и накопленные частоты из табл. 5.2.

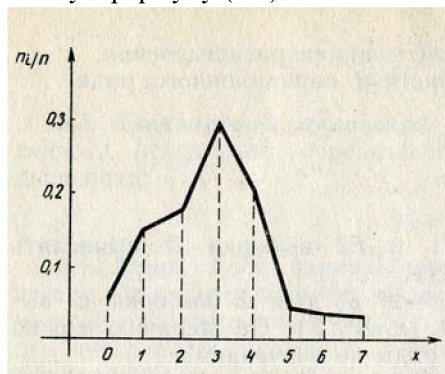


Рис. 5.1 Полигон вариационного ряда выборки А

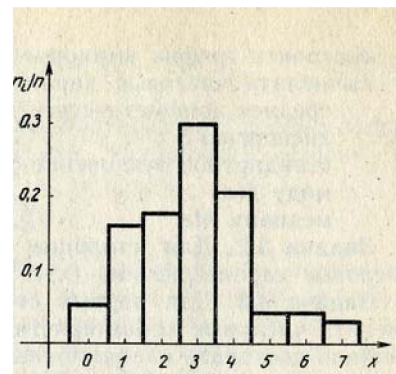


Рис. 5.2. Гистограмма вариационного ряда выборки А

Имеем:

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 0,0506, & 0 < x \leq 1, \\ 0,2152, & 1 < x \leq 2, \\ 0,3924, & 2 < x \leq 3, \\ 0,6962, & 3 < x \leq 4, \\ 0,8987, & 4 < x \leq 5, \\ 0,9367, & 5 < x \leq 6, \\ 0,9747, & 6 < x \leq 7, \\ 1, & x > 7. \end{cases}$$

При построении графика $F^*(x)$ откладываем значения функции в интервале от 0 до 1 (рис. 5.3).

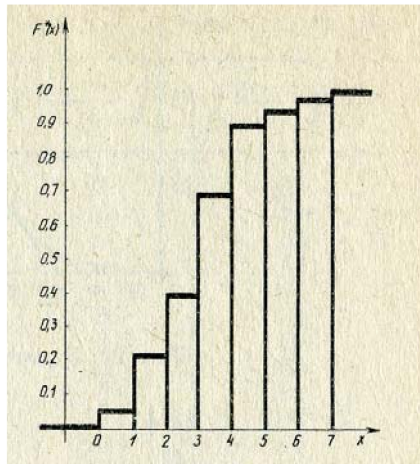


Рис. 5.3. График эмпирической функции распределения выборки А

Вычисление *среднего арифметического* и *дисперсии* проводим по формулам (5.6) и (5.8):

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{79} \cdot (0 \cdot 4 + 1 \cdot 13 + 2 \cdot 14 + 3 \cdot 24 + 4 \cdot 16 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 3 + 7 \cdot 2) = \\ &= \frac{1}{79} \cdot (0 + 13 + 28 + 72 + 64 + 15 + 18 + 14) = 2,84, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{S}^2 &= \frac{1}{79} \cdot (0^2 \cdot 13 + 1^2 \cdot 13 + 2^2 \cdot 14 + 3^2 \cdot 24 + 4^2 \cdot 16 + 5^2 \cdot 3 + \\ &+ 6^2 \cdot 3 + 7^2 \cdot 2) - 2,84^2 = 2,3668.\end{aligned}$$

Стандартное отклонение вычислим по формуле (5.9):

$$\bar{S} = \sqrt{2,3668} = 1,54.$$

Модой Mo является значение с максимальной частотой, т.е. $Mo = 3$.

Медианой Me служит срединное значение, т.е. 39-е значение вариационного ряда: $Me = 3$.

Что же мы получили, проведя статистический анализ работающих в ООО "ГАК" по составленной выборке? Наиболее распространенный разряд 3-й. Может ли работник 3-го разряда качественно производить продукцию? Половина сотрудников по выборке имеет меньше 3-го разряда. А 5-6-й разряд имеют всего 4,74% сотрудников из выборки. Как же обстоят дела в целом на малом предприятии ООО "ГАК" вы узнаете, изучив следующий параграф 5.2.

Пример 2. Одной из главных задач современного обучения в вузе является раскрытие способностей каждого студента, воспитание личности, готовой к жизни в конкурентном мире. Готовы ли студенты к этому? Попробуем ответить на этот вопрос, составив абстрактную модель "среднестатистического студента". Различные аспекты деятельности студента можно проиллюстрировать с помощью словесной модели (рис. 5.4).

Для решения приведенного в модели круга вопросов необходимо привлечение аппарата математической статистики и современных средств вычислительной техники. Методом анкетирования была составлена выборка в количестве 48 человек из 148 студентов второго курса факультета №7 СГАУ.



Рис. 5.4. Словесная модель различных аспектов деятельности студентов

По аспекту "Достижения в учебе" были взяты результаты сдачи экзаменов на 1-ом курсе и найдены средний балл опрошенных студентов, среднее арифметическое по изученным дисциплинам. После выявленной закономерности проведена обработка статистических данных. Они представлены в удобной для изучения и анализа форме: в виде вариационного ряда, составленного по значениям, так как размах мал (табл. 5.2 - 5.3) и построены полигоны (рис. 5.5 - 5.6).

Найдены среднее арифметическое вариационного ряда "Успеваемость" и "Дисциплины", которые оказались равны $\bar{x} = 3,87$. Вычисление среднего арифметического позволяет переходить от частных случаев к некоторому обобщению. Особым видом средних величин являются структурные средние, которые дают известное представление о совокупности в целом и характеризуют типичное значение признака в данной совокупности. К таким показателям относятся мода и медиана, которые равны соответственно для ряда "Успеваемость" 3 и 3,875. Так же выявлена любимая дисциплина студентов - менеджмент и макроэкономика.

Таблица 5.2. Вариационный ряд "Успеваемость"

Средний балл	Количество студентов n_i	n_i/N	Накопленные частоты
3,000	7	0,1458	0,1458
3,125	3	0,0625	0,2083
3,250	1	0,0208	0,2292
3,375	4	0,0833	0,3125
3,500	4	0,0833	0,3958
3,625	1	0,0208	0,4167
3,750	3	0,0625	0,4792
3,875	3	0,0625	0,5417
4,000	1	0,0208	0,5625
4,125	5	0,1042	0,6667
4,250	3	0,0625	0,7292
4,375	4	0,0833	0,8125
4,500	1	0,0208	0,8333
4,625	1	0,0208	0,8542
4,750	2	0,0417	0,8958
4,875	2	0,0417	0,9375
5,000	3	0,0625	1,0000
	$N = \sum_{i=1}^n n_i = 48$	1,0000	

Таблица 5.3. Вариационный ряд "Дисциплины"

Дисциплина	Среднее арифметическое по дисциплине
Линейная алгебра	3,4792
Математический анализ	3,6250
Информатика	3,6667
История	3,8542
Микроэкономика	3,8542
ИТУ	3,8750
Социология	4,2500
Право	4,3750

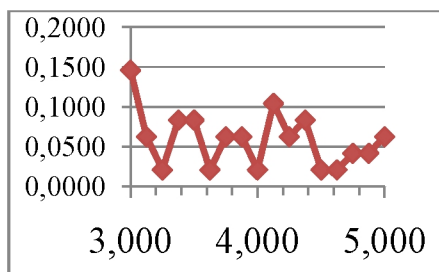


Рис. 5.5. Полигон вариационного ряда – "Успеваемость"

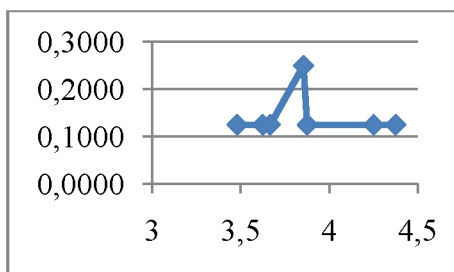


Рис. 5.6. Полигон вариационного ряда – "Дисциплины"

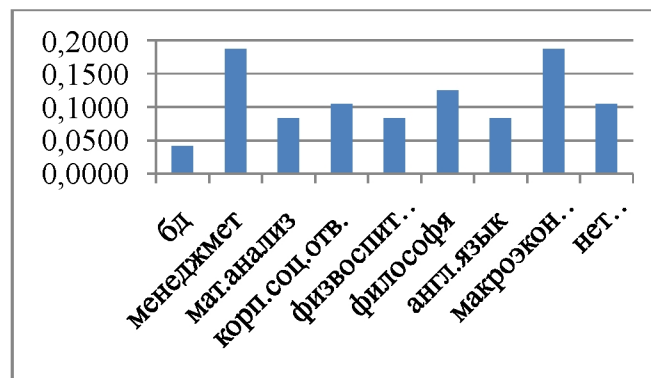


Рис. 5.7. Гистограмма вариационного ряда – "Любимая дисциплина"

Исследование вариации в математической статистике играет большую роль, так как позволяет уяснить сущность изучаемого явления. Оценка вариации, выяснение причинно-следственных связей дают важную информацию для научно-обоснованных управленческих решений.

Обучение в вузе – важное составное звено в интеллектуальном развитии личности. Готовы ли студенты к жизни в высокотехнологичном мире? Результаты получены после анализа исследования марки мобильных телефонов и использования оператора мобильной связи. Предпочтения отданы смартфону марки Samsung и оператору Мегафон (рис.5.8 - 5.9).

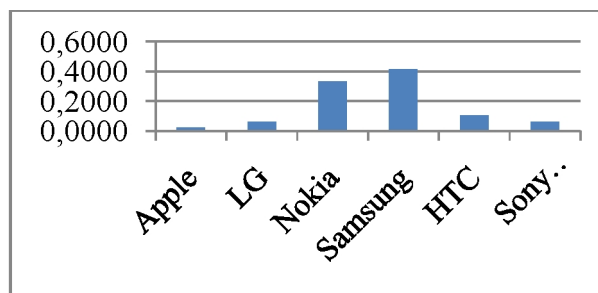


Рис. 5.8. Гистограмма "Мобильная связь. Доверенная марка"

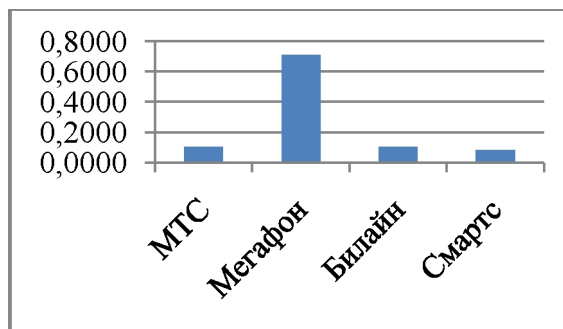


Рис. 5.9. Гистограмма "Мобильная связь. Предпочтительный оператор"

Современный студент всесторонне развит. Его интересы многогранны. Он смотрит телевизор значительно меньше своих родителей, так как всю интересующую его информацию находит с помощью ПК. Любимых телепередач анализ не выявил (рис. 5.10).

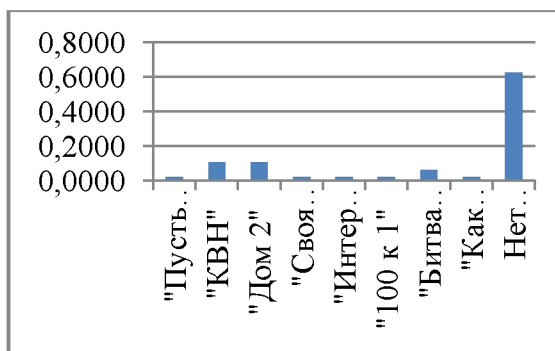


Рис. 5.10. Гистограмма вариационного ряда – "Просмотр телепередач"

Студент физически развит, занимается различными видами спорта. Модой ряда "Спортивные увлечения" стали волейбол и плавание (рис.5.11).

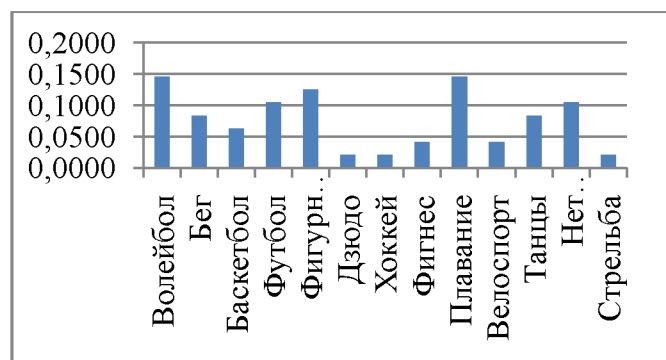


Рис. 5.11. Гистограмма вариационного ряда - "Спортивные увлечения"

Интересуется политической жизнью общества, ходит на выборы, но с предпочтением той или иной партии не определился (рис. 5.12, 5.13).

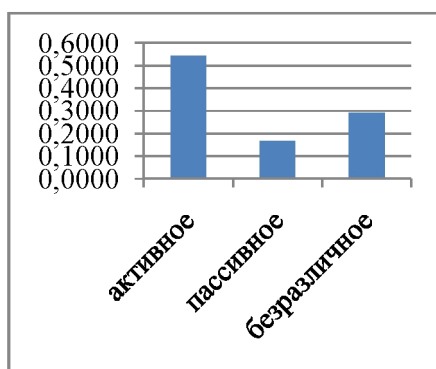


Рис. 5.12. Гистограмма вариационного ряда "Отношение к политике"

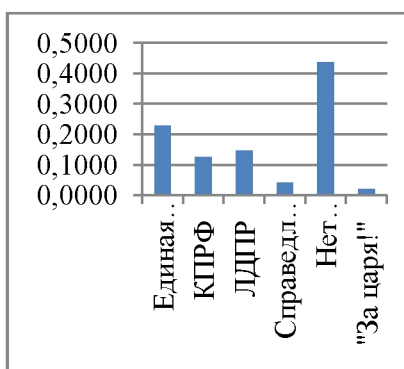


Рис. 5.13. Гистограмма вариационного ряда "Политические предпочтения"

По итогам анализа каждого блока исследований создается среднестатистическая модель второкурсника СГАУ (табл. 5.4).

Таблица 5.4. Среднестатистическая модель второкурсника СГАУ

Показатели развития и затраты времени	Статистические характеристики
Хорошо учится	Ср. балл 3,875, учится хорошо
Материально обеспечен, но не богат	Имеет ПК, мобильный телефон Samsung, деньги на его эксплуатацию 73,13 руб. в неделю
Интересы	Разносторонние. Выделяет макроэкономику и менеджмент среди любимых дисциплин, а среди любимых занятий – чтение
Физически развит	Любит плавание и волейбол, уделяет время на спортивные секции 0,5 часа в день
Политический статус	Политически активен, но из существующих партий предпочтений не отдано ни одной
Время занятий в СГАУ	6 часов в день
Время на дорогу в СГАУ и домой	0,8 часа в день
Выполнение дом задания	2,68 часа в день
Увлечение ПК (время отдыха)	2,54 часа в день
Использование ПК для работы	2,2 часа в день
Прогулки на свежем воздухе	0,5 часа в день
Питание	1,3 часа в день
Просмотр телепередач	1,25 часа в день
Сон	6,49 часов в день
Всего	24,26 часов в день

Как следует из табл. 5.4, студент, обучающийся по профилю «Экономика», «Менеджмент», как будущий экономист и бизнесмен просто обязан уже в вузе применять приобретенные знания, навыки и умения в практической деятельности и повседневной жизни. Но в сутках всего 24 часа, а наш "среднестатистический студент" проживает 24,26 часов. Студент перегружен. Мало того, по мнению специалистов

в области гигиены труда, студенты 1 - 2 курсов должны спать 8 часов в сутки (вместо 6,49), а на питание должны тратить 3 часа (вместо 1,3). Время, которое студент выкраивает из сна, обедов, прогулок приводит к различным заболеваниям. Вывод напрашивается сам собой. Нужно правильно организовать режим дня. Для более наглядного статистического анализа распределения учебного времени и времени отдыха сведем полученные данные в табл. 5.5.

Таблица 5.5. Среднестатистическая модель распределения времени студента

Показатель деятельности студента	Ср. значение, час/день	Мода	Медиана	Макс. знач.	Мин. знач.	СКО
Занятие спортом	0,50	0,58	0,75	1,50	0,00	0,87
Время занятий в СГАУ	6,00	-	-	-	-	-
Время на дорогу в СГАУ и домой	0,80	1,00	0,75	3,50	0,27	0,56
Выполнение дом задания	2,68	2,00	2,50	5,00	1,00	0,58
Увлечение ПК (время отдыха)	2,54	2,00	2,30	8,00	0,00	3,46
Использование ПК для работы	2,20	2,00	2,00	9,00	0,00	2,27
Прогулки на свежем воздухе	0,50	0,30	0,67	1,00	0,50	0,48
Питание	1,30	1,00	1,00	3,00	0,50	0,57
Просмотр телепередач	1,25	0,00	1,00	5,00	0	0,76
Сон	6,49	7,00	6,50	9,00	4,00	2,15
Всего	24,26					

Внимательно просмотрев полученные данные, видно, что половина студентов не досыпает 1,5 часа в день, вместо положенных 3 ча-

сов на еду кушают на бегу, выделяя в среднем по 20 минут на завтрак, обед и ужин, а вот за ПК проводит 4,5 часа в день. Здесь кроются причины усталости, иногда неуспеваемости, опозданий студентов. Хочется порекомендовать больше времени бывать на воздухе за счет уменьшения времени на использование ПК в игровых ситуациях и для работы, уменьшения времени просмотра телепередач.

Пример 3. Решим задачу по выборке В.

Находим $x_{min} = 60$ и $x_{max} = 81$. Размах ($81 - 60 = 21$) достаточно большой, поэтому составим вариационный ряд по интервалам значений, используя при выборке заданные начало первого интервала и длину интервала (табл. 5.6).

Таблица 5.6. Выборка В

65	71	67	73	68	68	72	68	67	70	78	74	79	65	72
65	71	70	69	69	76	71	63	77	75	70	74	65	71	68
74	69	69	66	71	69	73	74	80	69	73	76	69	69	67
67	74	68	74	60	70	66	70	68	64	75	78	71	70	69
73	75	74	72	80	72	69	69	71	70	73	65	66	67	69
71	70	72	76	72	73	64	74	71	76	68	69	75	76	73
74	78	66	75	72	69	68	63	70	70	78	76	73	73	67
71	66	66	72	69	71	71	68	72	69	73	73	66	72	73
70	69	74	72	69	74	70	74	72	76	71	66	62	69	74
76	74	69	64	75	71	76	68	68	78	71	71	68	67	74
68	81	72	68	72	71	71	71	69	61	74	66	70	72	65
67	73	78	73	71	75	73	71	72	68	67	69	69	77	63
71	74	67	68	69	74	69	67	74	66	74	74	69	75	70
73	63	77	74	75										

$N = 200$. Начало первого интервала: 59. Длина интервала: 2.

Вариационный ряд представлен в табл. 5.7. Заполняя первый столбец таблицы, все интервалы выбраны одной длины, причем так, что x_{min} вошло в первый, а x_{max} – в последний. Обычно начало интервала входит в интервал, а конец – не входит.

Таблица 5.7

Интервалы	n_i	$\frac{n_i}{n}$	Накопленные частоты
59 – 61	1	0,005	0,005
61 – 63	2	0,010	0,015
63 – 65	7	0,035	0,050
65 – 67	16	0,080	0,130
67 – 69	27	0,135	0,265
69 – 71	40	0,200	0,465
71 – 73	38	0,190	0,655
73 – 75	38	0,190	0,845
75 – 77	18	0,090	0,935
77 – 79	9	0,045	0,980
79 – 81	3	0,015	0,995
81 – 83	1	0,005	1,000
Σ	200	1,000	–

При построении графиков откладываем по оси Ox значения с 59 по 83 и по оси $\frac{n_i}{n}$ – значения с 0 по 0,2 (рис. 5.14 и рис. 5.15).

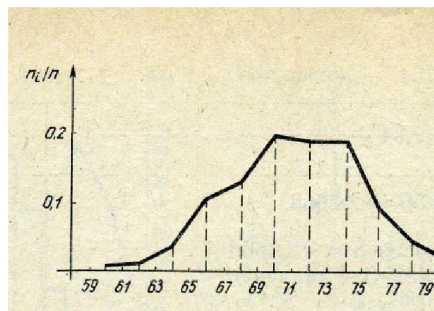


Рис. 5.14. Полигон вариационного ряда выборки В

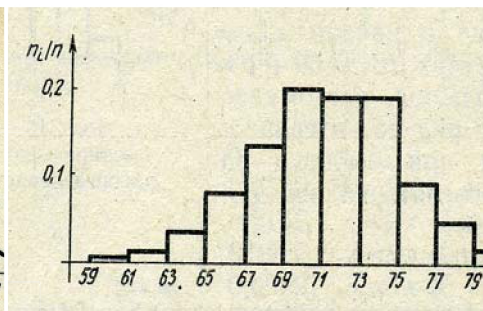


Рис. 5.15. Гистограмма вариационного ряда выборки В

Далее учитываем, что в качестве представителя каждого интервала взят его конец. Принимая за координаты точек концы и соединяя эти точки прямыми, построим график эмпирической функции распределения (рис. 5.16).

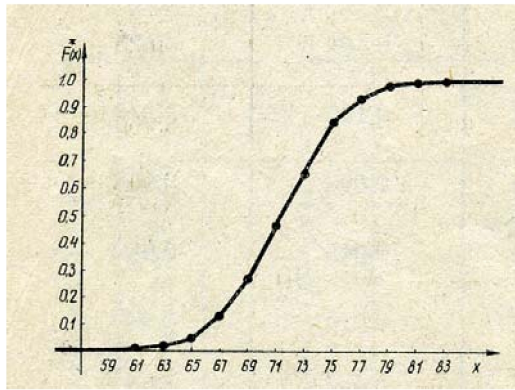


Рис. 5.16. График эмпирической функции распределения выборки В

Вычисление *среднего арифметического* и *дисперсии* проводим по формулам (5.6) и (5.8):

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{1}{200} \cdot (60 \cdot 1 + 62 \cdot 2 + 64 \cdot 7 + 68 \cdot 27 + 70 \cdot 40 + 72 \cdot 38 + 74 \cdot 38 + \\ &+ 76 \cdot 18 + 78 \cdot 9 + 80 \cdot 3 + 82 \cdot 1) = \frac{1}{200} \cdot (60 + 124 + 448 + 1836 + 2800 + \\ &+ 2736 + 2812 + 1368 + 702 + 240 + 82) = 71,32; \\ \bar{S}^2 &= \frac{1}{200} \cdot (60^2 \cdot 1 + 62^2 \cdot 2 + 64^2 \cdot 7 + 68^2 \cdot 27 + 70^2 \cdot 40 + 72^2 \cdot 38 + \\ &+ 74^2 \cdot 38 + 76^2 \cdot 18 + 78^2 \cdot 9 + 80^2 \cdot 3 + 82^2 \cdot 1) - 71,32^2 = 14,6176.\end{aligned}$$

Стандартное отклонение вычислим по формуле (5.9):

$$\bar{S} = \sqrt{14,6176} = 3,82.$$

Моду Mo находим по формуле (5.10), т.е.

$$Mo = 69 + 2 \cdot \frac{40 - 27}{(40 - 27) + (40 - 38)} = 69 + 2 \cdot \frac{13}{13 + 2} = 70,7.$$

Медиану Me находим по формуле (5.11):

$$Me = 71 + 2 \cdot \frac{100 - 93}{38} = 71 + 0,4 = 71,4.$$

5.2. Теория оценок

Пусть дана случайная величина X , закон распределения и параметры (математическое ожидание, дисперсия) которой неизвестны. Множество всех значений случайной величины X можно рассмотреть как генеральную совокупность, которая в полном объеме, вообще говоря, остается неизвестной. Однако в результате опыта, наблюдений мы можем получить некоторую последовательность значений этой случайной величины, которая представляет собой определенную выборку из генеральной совокупности. Для полученной из опыта выборки можно вычислить выборочное среднее, выборочную дисперсию, исправленную выборочную дисперсию. При помощи полученных выборочных параметров оценивают неизвестные параметры случайной величины X (генеральной совокупности). Именно *выборочное среднее $\bar{x}_{\text{выб}}$ берется в качестве оценки (приближенного значения) математического ожидания $M(X)$, выборочную дисперсию $\bar{S}^2$ и выборочную исправленную дисперсию S^2 принимают в качестве оценки дисперсии $D(X)$ случайной величины X .*

Пусть $\theta = \theta(X)$ – какая-либо из числовых характеристик (параметров) случайной величины X . В качестве θ мы будем рассматривать математическое ожидание и дисперсию. Допустим, что случайная величина X в результате n опытов приняла значения, т. е. отобрана выборка

$$x_1, x_2, \dots, x_n. \quad (5.15)$$

Тот факт, что случайная величина X приняла значения (5.15), также является случайным явлением. Поэтому эти значения можно рассматривать как значения некоторых случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_n$, которые в результате данного опыта приняли соответствующие значения из (5.15).

В силу независимости проведенных опытов случайные величины $X_1, X_2, \dots, X_n$ можно рассматривать как n независимых «экземпляров» величины X . Но тогда для каждой числовой характеристики θ имеем $\theta(X_i) = \theta(X)$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$.

Допустим, что по данной выборке (5.15) можно вычислить по определенным правилам число $\hat{\theta}$, которым оценивается параметр θ ; $\theta \approx \hat{\theta}$. Такое число $\hat{\theta}$ будем называть *точечной оценкой* параметра θ . Выбор оценки, позволяющей получить хорошее приближение оцениваемого параметра, – основная задача теории оценивания. Введем два свойства оценок, которые обеспечивают их близость к соответствующим параметрам. Предварительно заметим, что значение оценки $\hat{\theta}$ зависит от значений (5.15) случайной величины X и от числа опытов n , $\hat{\theta} = \hat{\theta}(x_1, \dots, x_n)$, т.е. само $\hat{\theta}$ является случайной величиной. Следовательно, имеет смысл говорить о математическом ожидании $M(\hat{\theta})$ и дисперсии $D(\hat{\theta})$ случайной величины $\hat{\theta}$. При этом возможны случаи $M(\hat{\theta}) > 0$, $M(\hat{\theta}) < 0$, $M(\hat{\theta}) = 0$. Если выполняется $M(\hat{\theta}) > 0$, то оценка $\hat{\theta}$ завышает значение параметра θ , а при $M(\hat{\theta}) < 0$ – занижает его. Наилучшее согласование имеется при $M(\hat{\theta}) = 0$. Далее заметим, что для того, чтобы приближение $\hat{\theta} \approx \theta$ было хорошим, необходимо, чтобы значение случайной величины $\hat{\theta}$ концентрировалось около θ , т.е. чтобы дисперсия $D(\hat{\theta})$ была как можно меньше. В связи с этим даются следующие определения.

Определение 1. Точечная оценка $\hat{\theta}$ называется *несмещенной*, если

$$M(\hat{\theta}) = \theta. \quad (5.16)$$

Это означает, что оценивая θ величиной $\hat{\theta}$, мы не допустим систематических ошибок либо только в сторону завышения, либо только в сторону занижения. Требование несмещенности особенно важно при небольшом числе опытов. Если это условие не выполняется, то оценку называют *смещенной*, при этом смещение вычисляется как разность $M(\hat{\theta}) - \theta$.

Определение 2. Несмещенная точечная оценка $\hat{\theta}$ параметра θ называется *состоятельной*, если с увеличением числа n опытов дисперсия стремится к нулю, т.е.

$$D(\hat{\theta}) \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty \quad (5.17)$$

Естественно возникает вопрос о том, какие выборочные характеристики лучше всего оценивают математическое ожидание и дисперсию случайной величины с точки зрения свойств несмещенности и состоятельности.

Теорема 1. Выборочное среднее $\overline{x}_{\text{выб}}$, вычисленное по n независимым наблюдениям над случайной величиной X , которая имеет математическое ожидание $M(X)$, является несмещенной оценкой математического ожидания $M(X)$.

Теорема 2. Выборочное среднее $\overline{x}_{\text{выб}}$, вычисленное по n независимым наблюдениям над случайной величиной X , которая имеет математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$, является состоятельной оценкой математического ожидания $M(X)$.

Теорема 3. Исправленная выборочная дисперсия S^2 вычисленная по n независимым наблюдениям над случайной величиной X , которая имеет математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$, является несмещенной и состоятельной оценкой дисперсии $D(X)$, т.е. имеет место $M(S^2) = D(X)$ и $D(S^2) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Таким образом, несмещенной оценкой математического ожидания является среднее арифметическое. Выборочная дисперсия является смещенной оценкой дисперсии, за несмещенную оценку дисперсии при малом объеме выборке используют исправленную дисперсию.

$$S^2 = \frac{n}{n-1} \cdot \overline{S}^2. \quad (5.18)$$

Пример 1. Вычислить несмещенные оценки параметров генеральной совокупности $\overline{x}$, S^2 , S по выборке A , используя результаты, полученные в примере 1 параграфа 5.1.

Для выборки A при решении задачи была получена несмещенная оценка значения $\overline{x} = 2,84$, а также выборочная дисперсия

$$\overline{S}^2 = 2,3668. \quad n = 79.$$

По формуле $S^2 = \frac{n}{n-1} \cdot \overline{S}^2$ находим несмещенные оценки дисперсии и стандартного отклонения.

Таким образом, несмещенные оценки параметров генеральной совокупности имеют вид:

$$\bar{x} = 2,84, S^2 = \frac{79}{78} \cdot 2,3668 = 2,3971, S = \sqrt{2,3971} = 1,55.$$

Следовательно, теперь мы можем сделать выводы в целом по малому предприятию ООО "ГАК". На предприятии работают специалисты в среднем с 3 разрядом. При этом половина сотрудников имеют даже меньший разряд. Как следует из статистического анализа, для повышения качества выпускаемой продукции необходимо организовать курсы повышения квалификации, используя, например, знания и умения людей с 6 - 7 разрядами, так как их мало и сами они не могут произвести много товара. По-видимому, нужно использовать фонд стимулирующих выплат для людей, согласившихся учить и учиться в нерабочее время.

Пример 2. Вычислить несмещенные оценки параметров генеральной совокупности $\bar{x}$, S^2 , S по выборке В, используя результаты, полученные в примере 3 параграфа 5.1.

Для выборки В из параграфа 5.1 имеем

$$\bar{x} = 71,32, \bar{S}^2 = 14,6176, n = 200.$$

Таким образом, несмещенные оценки параметров генеральной совокупности имеют вид:

$$\bar{x} = 71,32, S^2 = \frac{200}{199} \cdot 14,6176 = 14,6910, S = \sqrt{14,6910} = 3,83.$$

5.3. Практическое занятие № 7

по теме: «Предмет и основные задачи математической статистики. Группировка статистических данных»

Цель занятия: изучить основные понятия математической статистики, уяснить такие понятия математической статистики, как группировка статистических данных, ряды распределения, средние величины.

Учебные вопросы:

1. Предмет и основные задачи математической статистики.
2. Цель статистических исследований.
3. Группировка статистических данных.

Математическая статистика. Генеральная и выборочная совокупность. Способы отбора. Вариационный ряд. Графики вариационного ряда. Эмпирическая функция распределения. Числовые характеристики выборки.

Методические рекомендации

Изучите основные теоретические сведения и ответьте на контрольные вопросы, только затем приступите к решению упражнений.

1. Вопросы для самопроверки

1. Что изучает математическая статистика?
2. Что называется генеральной совокупностью?
3. Что называется выборочной совокупностью?
4. Перечислите и охарактеризуйте способы отбора.
5. Что называется вариационным рядом?
6. Особенности эмпирической функции распределения.
7. Перечислите и охарактеризуйте числовые характеристики выборки.
8. Охарактеризуйте среднюю арифметическую, среднюю гармоническую и среднюю геометрическую.
9. Что относится к структурным средним?
10. Дайте понятие точечной оценки.
11. Какая оценка называется несмещенной?
12. Какая оценка называется состоятельной?

2. Упражнения для самостоятельной работы

1. Для оценки скорости ввода текста с клавиатуры обучаемым был выдан одинаковый текст и установлено контрольное время. Результат ввода текста в страницах составил: 13,9; 12,5; 13,2; 6,4; 11,7; 11,8; 10,6; 10,5; 11,3; 15,1; 11,5; 11,3; 10,3; 11,0; 10,7; 8,3; 9,7; 10,3; 15,1. С учетом этих данных составить ряд распределения, построить полигон и гистограмму вариационного ряда.

2. Требуется найти средний рост студентов в группе, используя формулу нахождения среднего арифметического.

3. В одной семье имеются две машины одной модели и разного года выпуска, работающие на одинаковой марке бензина. Расход топлива у автомобиля более раннего года выпуска составляет 0,05 л/км, а у второго - 0,08 л/км. Каков средний расход бензина на 1 км пройденного пути, если каждый автомобиль израсходовал по 10 л бензина? (Воспользоваться формулой средней гармонической взвешенной).

4. В некотором институте за последние 5 лет динамика роста цен на обучение выражена следующими цифрами: 80, 90, 100, 110, 120. Найдите величину среднего геометрического значения в данном ряде распределения.

ТРЕБОВАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ И ОФОРМЛЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Каждая работа выполняется отдельно на листах формата А4. Следует пронумеровать страницы и оставить на них поля не менее 3 см для замечаний преподавателя.

2. Работа должна начинаться с титульного листа утвержденного образца, содержащего все данные: шифр, фамилия, имя, отчество студента, дисциплина и номер работы.

3. Работа должна быть выполнена чернилами одного цвета, аккуратно и разборчиво или на ПК.

4. Решение задач желательно располагать в порядке номеров, указанных в задании, номера задач следует указывать перед условием.

5. Условия задач должны быть обязательно переписаны полностью, решение задачи отделяется от условия, в конце решения записывается полный ответ.

6. Решения задач должны сопровождаться краткими, но достаточно обоснованными пояснениями, используемые формулы нужно выписывать.

7. При оформлении записей важные формулы, равенства, определения нужно выделять в отдельные строки, чтобы сделать их более обзримыми.

8. Чертежи следует выполнять карандашом с использованием чертежных инструментов, соблюдая масштаб.

9. В конце работы следует указать литературу, которой вы пользовались, проставить дату выполнения работы и подпись.

10. Если в работе допущены недочеты и ошибки, то студент выполняет все указания преподавателя, сделанные в рецензии.

11. Контрольные работы должны быть выполнены в срок (в соответствии с учебным планом-графиком). В период сессии работы на проверку не принимаются.

12. Работа, выполненная не по своему варианту, не зачитывается и возвращается студенту без оценки.

13. Студенты, не имеющие зачет по контрольным работам курса, к экзамену не допускаются.

14. Во время экзамена зачетные контрольные работы представляются преподавателю.

15. Варианты контрольной работы определяются по порядковому номеру студента в списке группы.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1

Варианты заданий для расчетной работы определяются по порядковому номеру студента в списке группы (буквой *V* обозначен номер варианта).

Задание к задачам № 1.1 - 1.5

1. Переписать текст задачи, заменяя все параметры их значениями для решаемого варианта.
2. Определить испытания и элементарные события.
3. Определить исследуемое событие *A* и другие события.
4. Установить, какие формулы следует использовать для вычислений и выполнить последние.

Задача 1.1. Бросают *две монеты*. Найти вероятность того, что:

- 1) на обеих монетах появится «герб»;
- 2) хотя бы на одной монете появится «герб»;
- 3) ни на одной монете не появится «герб».

Бросают *три монеты*. Найти вероятность того, что:

- 4) на всех монетах появится «герб»;
- 5) хотя бы на одной монете появится «герб»;
- 6) только на двух монетах появится «герб»;
- 7) только на одной монете появится «герб»;
- 8) ни на одной монете не появится «герб».

Бросают *четыре монеты*. Найти вероятность того, что:

- 9) на всех монетах появится «герб»;
- 10) хотя бы на одной монете появится «герб»;
- 11) только на одной монете появится «герб»;
- 12) только на двух монетах появится «герб»;
- 13) только на трех монетах появится «герб»;
- 14) ни на одной монете не появится «герб».

Бросают игральную кость. Найти вероятность того, что на верхней грани появится:

- 15) четное число очков;
- 16) «1» или «6».

Бросают две игральные кости. Найти вероятность того, что на верхних гранях появятся следующие числа очков:

- 17) только четные;
- 18) одно четное, другое нечетное;

- 19) сумма которых четна;
- 20) сумма которых нечетна;
- 21) сумма которых больше, чем их произведение;
- 22) сумма которых меньше шести;
- 23) сумма которых больше восьми.

Бросают три игральные кости. Найти вероятность того, что на верхних гранях появятся следующие числа очков:

- 24) только четные;
- 25) одно четное, остальные нечетные;
- 26) сумма которых четна;
- 27) сумма которых нечетна;
- 28) которые все одинаковы;
- 29) которые все различны.

Задача 1.2. В урне содержится K черных и H белых шаров. Случайным образом вынимают M шаров. Найти вероятность того, что среди них имеется:

- а) P белых шаров;
- б) меньше, чем P , белых шаров;
- в) хотя бы один белый шар.

Значения параметров K , H , M и P по вариантам приведены в табл. 1.

Таблица 1

№ вар.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
K	5	5	6	6	7	4	8	6	4	5	7	8	6	4	8	5
H	6	6	5	5	4	5	6	7	7	6	4	6	5	6	6	6
M	4	5	4	5	4	4	5	4	4	5	4	4	4	4	5	5
P	2	3	2	3	2	2	3	4	2	3	2	3	3	3	2	4
№ вар.	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	
K	7	5	6	5	6	6	6	8	6	5	6	5	6	6	4	
H	4	7	5	7	7	8	5	6	7	7	7	7	8	7	7	
M	5	4	5	5	5	5	5	5	4	4	6	5	5	5	4	
P	3	3	2	4	3	4	4	3	3	2	3	3	3	2	2	

Задача 1.3. Устройство состоит из трех независимых элементов, работающих в течение времени T безотказно соответственно с вероят-

ностями p_1 , p_2 и p_3 . Найти вероятность того, что за время T выйдет из строя:

- а) только один элемент;
- б) хотя бы один элемент.

Значения параметров вычислить по следующим формулам:

$$k = \frac{|14,9 - V|}{100}; \quad p_1 = 1 - k, \quad p_2 = 0,9 - k, \quad p_3 = 0,85 - k.$$

Задача 1.4. В пирамиде стоят R винтовок, из них L с оптическим прицелом. Стрелок, стреляя из винтовки с оптическим прицелом, может поразить мишень с вероятностью p_1 , а стреляя из винтовки без оптического прицела – с вероятностью p_2 . Найти вероятность того, что стрелок поразит мишень, стреляя из случайно взятой винтовки.

Значения параметров вычислить по следующим формулам:

$$k = |14 - V|, \quad p_1 = 0,95 - k/100, \quad p_2 = 0,6 - k/100,$$

$$R = 5 + k, \quad L = \begin{cases} 3, & V \leq 14, \\ 4, & V > 14. \end{cases}$$

Задача 1.5. В монтажном цехе к устройству присоединяется электродвигатель. Электродвигатели поставляются тремя заводами-изготовителями. На складе имеются электродвигатели этих заводов соответственно в количестве M_1, M_2, M_3 штук, которые могут безотказно работать до конца гарантийного срока с вероятностями соответственно p_1, p_2 и p_3 . Рабочий берет случайно один электродвигатель и монтирует его к устройству. Найти вероятности того, что смонтированный и работающий безотказно до конца гарантийного срока электродвигатель поставлен соответственно первым, вторым или третьим заводом-изготовителем.

Значения параметров вычислить по следующим формулам:

$$k = |14 - V|, \quad p_1 = 0,99 - k/100, \quad p_2 = 0,9 - k/100,$$

$$p_3 = 0,85 - k/100,$$

$$M_1 = 5 + k, \quad M_2 = 20 - k, \quad M_3 = 25 - k.$$

Задание к задачам 1.6 – 1.10.

1. Переписать текст задачи, заменяя все параметры их значениями для решаемого варианта.
2. Определить исходные данные и результаты.
3. Определить подходящие формулы вычисления и выполнить вычисления при помощи микрокалькулятора и таблиц.
4. Построить требуемые графики.

Задача 1.6. В каждом из n независимых испытаний событие A происходит с постоянной вероятностью p . Вычислить все вероятности p_k , $k = 0, 1, 2, \dots, n$, где k – частота события A .

Построить график вероятностей p_k . Найти наивероятнейшую частоту.

Значения параметров n и p вычислить по следующим формулам:

$$n = \begin{cases} 11, & V \leq 10, \\ 10, & 10 < V \leq 20, \\ 9, & V > 20. \end{cases} \quad p = 0,3 + V/100,$$

Задача 1.7. В каждом из n независимых испытаний событие A происходит с постоянной вероятностью p . Найти вероятность того, что событие A происходит:

- а) точно G раз;
- б) точно L раз;
- в) меньше чем M и больше чем F раз;
- г) меньше чем R раз.

Значения параметров n, p, G, L, M, F и R вычислить по следующим формулам:

$$n = 500 + V \cdot 10, \quad p = 0,4 + V/100, \quad G = 220 + V \cdot 10, \\ L = G - 30, \quad M = G + 20 + V, \quad F = G - 40 + V, \quad R = G + 15.$$

Задача 1.8. Случайная величина X задана рядом распределения

X	x_1	x_2	x_3	x_4
P	p_1	p_2	p_3	p_4

Найти функцию распределения $F(x)$ случайной величины X и построить ее график. Вычислить для X ее среднее значение $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и моду Mo .

Значения параметров $x_1, x_2, x_3, x_4, p_1, p_2, p_3, p_4$ вычислить по следующим формулам:

$$R = \text{остаток}(V/4) + 2;$$

$$x_1 = V + 3, \quad x_2 = x_1 + R, \quad x_3 = x_2 + R, \quad x_4 = x_3 + 2R;$$

$$p_1 = \frac{1}{R+5}, \quad p_2 = \frac{1}{R+3}, \quad p_3 = \frac{41+33R+R^2-R^3}{(R+3)(R+5)(8-R)}, \quad p_4 = \frac{1}{8-R}.$$

Задача 1.9. Случайная величина X задана функцией плотности вероятности

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ x/K, & 0 < x \leq R, \\ 0, & x > R. \end{cases}$$

Найти функцию распределения $F(x)$ случайной величины X . Построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$. Вычислить для X ее среднее значение $M(X)$, дисперсию $D(X)$, моду Mo и медиану Me .

Значения параметров K и R вычислить по следующим формулам:

$$K = 2 + V, \quad R^2 = 2 \cdot K.$$

Задача 1.10. Задана случайная величина $X \in N(\mu, \sigma)$. Найти вероятность того, что эта случайная величина принимает значение:

- а) в интервале $[a, b]$;
- б) меньше K ;
- в) большее L ;
- г) отличающееся от своего среднего значения по абсолютной величине не больше, чем на ε .

Значения параметров $\mu, \sigma, a, b, K, L, \varepsilon$ вычислить по следующим формулам:

$$\mu = V, \quad \sigma = \text{остаток}(V/8) + 2, \quad S = \text{остаток}(V/5) + 1,$$

$$a = V - S, \quad b = V + 2S, \quad K = V - S,$$

$$L = V + 2S, \quad \varepsilon = S.$$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2

Варианты заданий для расчетной работы определяются по порядковому номеру студента в списке группы (буквой *V* обозначен номер варианта).

Задание к задачам № 2.1 -2.2

В следующих задачах использовать выборки из приложения 4. Вычисления по возможности выполнить максимально в таблицах.

Задача 2.1. По выборкам А составить вариационный ряд по значениям и по выборке В – по интервалам значений, затем решить следующие подзадачи:

вычислить относительные частоты (частости) и накопленные частоты;

построить графики вариационного ряда (полигон и гистограмму);

составить эмпирическую функцию распределения;

построить график эмпирической функции распределения;

вычислить числовые характеристики вариационного ряда:

- среднее арифметическое $\bar{x}$;

- дисперсию $\bar{S}^2$;

- стандартное отклонение $\bar{S}$;

- моду Mo ;

- медиану Me .

Задача 2.2. Вычислить несмещенные оценки параметров генеральной совокупности $\bar{x}$, S^2 , S по выборкам А и В, используя результаты, полученные в задаче 2.1.

Задача 2.3.. Составить среднестатистическую модель распределения времени сотрудников Вашего предприятия.

Приложение 1

Таблица значений функции $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3725	0,3712	0,3697
0,4	0,3683	0,3668	0,3653	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0396	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0355	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061

Окончание прил. 1

2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001

Приложение 2

Таблица значений функции $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981

Окончание прил. 2

2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
4,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Приложение 3

Распределение Пуассона $P(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

λ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	
k										
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066	
1	0,0905	0,1637	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293	0,3476	0,3595	0,3659	
2	0,0045	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988	0,1217	0,1438	0,1647	
3	0,0002	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198	0,0284	0,0383	0,0494	
4	0,0000	0,0001	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030	0,0050	0,0077	0,0111	
5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0004	0,0007	0,0012	0,0020	
6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0003	
λ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
k										
0	0,3679	0,1353	0,0498	0,0183	0,0067	0,0025	0,0009	0,0003	0,0001	0,0000
1	0,3679	0,2707	0,1494	0,0733	0,0337	0,0149	0,0064	0,0027	0,0011	0,0005
2	0,1839	0,2707	0,2240	0,1465	0,0842	0,0446	0,0223	0,0107	0,0050	0,0023
3	0,0613	0,1804	0,2240	0,1954	0,1404	0,0892	0,0521	0,0286	0,0150	0,0076
4	0,0153	0,0902	0,1680	0,1954	0,1755	0,1339	0,0912	0,0573	0,0337	0,0189
5	0,0031	0,0361	0,1008	0,1563	0,1755	0,1606	0,1277	0,0916	0,0607	0,0378
6	0,0005	0,0120	0,0504	0,1042	0,1462	0,1606	0,1490	0,1221	0,0911	0,0631
7	0,0001	0,0034	0,0216	0,0595	0,1044	0,1377	0,1490	0,1396	0,1171	0,0901
8		0,0009	0,0081	0,0298	0,0653	0,1033	0,1304	0,1396	0,1318	0,1126
9		0,0002	0,0027	0,0132	0,0363	0,0688	0,1014	0,1241	0,1318	0,1251
10			0,0008	0,0053	0,0181	0,0413	0,0710	0,0993	0,1186	0,1251
11			0,0002	0,0019	0,0082	0,0225	0,0452	0,0722	0,0970	0,1137
12			0,0001	0,0006	0,0034	0,0113	0,0263	0,0481	0,0728	0,0948
13				0,0002	0,0013	0,0052	0,0142	0,0296	0,0504	0,0729
14					0,0005	0,0022	0,0071	0,0169	0,0324	0,0521
15					0,0002	0,0009	0,0033	0,0090	0,0194	0,0347

Окончание прил. 3

16						0,0003	0,0014	0,0045	0,0109	0,0217
17						0,0001	0,0006	0,0021	0,0058	0,0128
18							0,0002	0,0009	0,0029	0,0071
19							0,0001	0,0004	0,0014	0,0037
20								0,0002	0,0006	0,0019
21								0,0001	0,0003	0,0009
22									0,0001	0,0004
23										0,0002
24										0,0001

ВАРИАНТ 1

Выборка A1

0	4	2	0	5	1	1	3	0	2
2	4	3	2	3	3	0	4	5	1
3	1	5	2	0	2	2	3	2	2
2	6	2	1	3	1	3	1	5	4
5	5	3	2	2	0	2	1	1	3
2	3	5	3	5	2	5	2	1	1
2	3	4	3	2	3	2	4	2	

N = 69. Начало первого интервала: 0. Длина интервала: 1.

Выборка B1

135	133	124	132	104	152	134	130	129	120	122	124
117	123	123	129	121	122	125	131	147	124	137	112
126	128	111	129	115	147	131	132	137	119	125	120
129	125	123	127	132	118	133	132	132	134	131	120
135	132	125	132	108	114	121	133	133	135	131	125
114	115	122	131	125	132	120	126	115	117	118	118
132	134	127	127	124	135	128	127	115	144	129	120
137	127	125	116	132	120	117	127	118	109	127	122
120	135	116	118	133	136	125	126	119	126	129	127
129	124	127	132	126	131	127	130	126	124	135	127
124	123	123	130	132	143	122	139	120	134	108	132
121	111	123	140	137	120	125	131	118	120	120	136
129	127	116	138	128	133	122	131	128	140	138	134
120	126	109	137	111	115	117	130	113	126	115	124
125	118	115	128	123	129	128	120	115	134	118	135
134											

N = 181. Начало первого интервала: 102. Длина интервала: 4.

ВАРИАНТ 2

Выборка A2

3	7	4	6	1	4	2	4	6	5	3	2	9	0	5	6	7	7	3	1
5	5	4	2	6	2	1	5	3	3	1	5	6	4	4	3	4	1	5	5
3	4	3	7	4	5	6	7	5	2	4	6	6	7	7	3	5	4	4	3
5	5	7	6	6	1														

N = 66. Начало первого интервала: 0. Длина интервала: 1.

Выборка В2

95	96	103	89	72	105	85	85	91	101	82	91
80	85	91	87	101	94	98	85	82	94	86	72
89	83	100	86	85	95	95	83	87	92	92	79
93	88	77	92	92	103	85	90	83	86	104	104
85	85	80	95	91	93	70	83	93	95	95	78
111	95	94	84	64	87	85	87	87	81	82	97
101	86	89	80	88	85	93	79	95	90	107	93
96	83	88	91	95	94	88	80	96	93	77	71
88	97	90	86	93	91	98	95	83	84	91	99
109	80	95	87	89	85	87	72	77	90	97	87
95	91	88	91	81	88	78	75	80	97	95	83
91	78	87	92	103	77	101	66	71	90	105	76
97	75	95	88	84	96	79	89	94	100	87	100
92	100	79	96	104	84	89	82	93	92	85	80
104	87	90	85	89	83	84	98	81	97	86	81
96	82	102	73	100	81	86	84	86	88	90	94
81	99	100	81	95	88	90	87	97	90	100	94
88	85	95	74	85	88	78	97	74			

N = 213. Начало первого интервала: 62. Длина интервала: 4.

ВАРИАНТ 3

Выборка А3

0	0	2	0	1	3	0	1	0	1	2	1	3	0	0	2	1	3	2	2
1	3	3	2	0	2	4	3	2	1	2	2	2	2	3	3	1	1	1	3
2	1	0	1	2	1	4	4	2	3	3	5	5	2	1	2	3	2	3	1
1	0	1	0	4	1	1	0	2	2	4	2	1	4	3	0	2	0	2	0
3	1																		

N = 82. Начало первого интервала: 0. Длина интервала: 1.

Выборка В3

-29	-22	-16	-20	-16	-18	-28	-20	-32	-22	-23	-26	-10	-25	-25
-29	-29	-19	-12	-26	-18	-20	-9	-24	-20	-19	-26	-23	-11	-26
-30	-23	-30	-18	-20	-13	-17	-24	-28	-26	-21	-21	-26	-24	-36
-23	-24	-25	-20	-23	-17	-11	-22	-19	-19	-25	-29	-23	-16	-25
-15	-18	-17	-19	-21	-12	-24	-30	-33	-22	-15	-18	-26	-22	-19
-25	-23	-21	-22	-22	-25	-16	-25	-19	-17	-30	-13	-25	-19	-24

-17	-24	-16	-23	-15	-22	-22	-19	-20	-19	-33	-14	-17	-21	-16
-24	-13	-20	-19	-17	-13	-27	-25	-25	-19	-22	-22	-22	-23	-9
-11	-22	-24	-18	-19	-18	-31	-16	-18	-24	-14	-23	-26	-25	-19
-23	-24	-21	-26	-25	-18	-16	-30	-16	-24	-13	-14	-18	-22	-22
-28	-18	-21	-27	-31	-23	-23	-27	-21	-21	-22	-34	-24	-20	-24
-21	-32	-16	-18	-15	-22	-15	-15	-22	-18					

N = 175. Начало первого интервала: - 37. Длина интервала: 2.

ВАРИАНТ 4

Выборка А4

3	3	1	0	0	3	3	5	3	0	0	4	1	5	1	6	5	4	7	4
5	3	3	0	2	3	1	4	1	2	4	3	4	5	4	0	5	6	6	3
5	4	1	3	3	6	3	1	1	5	2	3	5	3	3	4	1	5	6	1
3	3	3	5	6	1	2	1	3	4										

N = 70. Начало первого интервала: 0. Длина интервала: 1.

Выборка В4

58	78	84	62	63	100	55	90	102	70	66	89
71	92	71	93	83	42	110	110	56	96	95	87
88	102	104	88	64	96	92	67	78	95	71	105
50	66	73	76	100	72	86	46	102	95	98	84
82	46	60	94	109	93	79	74	62	97	94	91
81	71	89	78	85	80	93	64	65	109	89	55
103	98	108	68	65	71	82	70	84	73	65	79
99	81	92	76	82	95	75	45	94	81	84	68
77	90	103	119	57	102	100	83	68	69	68	81
83	69	90	99	69	85	84	70	80	117	76	104
78	114	79	70	56	62	73	71	77	98	86	82
54	62	82	103	91	61	93	68	109	96	67	110
84	82	56	78	80	88	66	78	65	50	88	72
94	92	89	109	69	58	75	72	101	92	75	77
85	76	85	84	68	74	78	87	69	75	61	53
70	106	68	81	61	64	100	73	74	57	63	102
96	80										

N = 194. Начало первого интервала: 39. Длина интервала: 6.

ВАРИАНТ 5**Выборка А5**

0	2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	1	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	2	0	0	0	1	1	1	1
0	0	0	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	2	1	0	1
0																			

N = 81. Начало первого интервала: 0. Длина интервала: 1.

Выборка В5

34	14	-14	10	9	29	27	-1	-4	17	23	13	18	-17	-22
1	8	-9	3	11	6	26	6	8	16	19	22	-8	23	-5
17	-21	-20	-17	16	3	6	25	0	4	5	6	-21	-2	8
-6	11	3	-2	17	13	8	27	11	9	12	12	-1	25	4
19	-8	29	0	-13	0	9	26	19	29	9	22	30	13	19
-1	-10	20	-7	21	10	8	-5	-2	9	-10	1	20	8	35
11	15	13	2	-5	-12	11	9	34	9	-2	-20	-4	-2	19
31	31	-11	-7	23	-20	-2	-2	-3	13	-7	15	8	-9	19
-8	-12	8	30	-22	18	-9	19	17	28	26	6	-7	0	-9
7	11	20	23	12	19	52	-10	32	29	33	3	-8	5	-4
9	18	-16	0	-8	25	32	26	-1	-5	6	-5	21	9	17
21	33	7	19	-2	6	14	8	14	27	16	-6	8	-2	-3
-16	-22	-7	13	20	18	1	4	-4	2	20	14	28	-9	-2
34	-16	-9	5	20	-8	25	7	19	5	12	-2	5	25	1
6	-7	4	-14	3	2	24	-5	4	24	30	21	7	27	12
36	13	-2	18											

N = 229. Начало первого интервала: 25. Длина интервала: 6.

ВАРИАНТ 6**Выборка А6**

4	10	7	6	3	7	8	7	4	7	10	7	3	9	3
1	5	8	10	11	6	5	7	6	3	8	4	3	8	4
10	6	8	7	8	7	7	7	4	6	7	10	4	4	0
5	4	4	8	5	5	10	7	3	8	5	6	6	6	3
5	7	8	5	7	10	9	10	8	2	3	6	9		

N = 73. Начало первого интервала: 0. Длина интервала: 1.

Выборка В6

324	296	313	323	312	321	322	301	337	322	329	307
301	328	312	318	327	315	319	317	309	334	323	340
326	322	314	335	313	322	319	325	312	300	323	335

339	326	298	298	337	322	303	314	315	310	316	321
312	315	331	322	321	336	328	315	338	318	327	323
325	314	297	303	322	314	317	330	318	320	312	333
332	319	325	319	307	305	316	330	318	335	327	321
332	288	322	334	295	318	329	305	310	304	326	319
317	316	316	307	309	309	328	317	317	322	316	304
303	350	309	327	345	329	338	311	316	324	310	306
308	302	315	314	343	320	304	310	345	312	330	324
308	326	313	320	328	309	306	306	308	324	312	309
324	321	313	330	330	315	320	313	302	295	337	346
327	320	307	305	323	331	345	315	318	331	322	315
304	324	317	322	312	314	308	303	333	321	312	323
317	288	317	327	292	316	322	319	313	328	313	309
329	313	334	314	320	301	329	319	332	316	300	300
304	306	314	323	318	337	325	321	322	288	313	314
307	329	302	300	316	321	315	323	331	318	334	316
328	294	288	312	312	315	321	332	319			

N = 237. Начало первого интервала: 285. Длина интервала: 7.

ВАРИАНТ 7

Выборка А7

2	2	1	3	4	2	1	1	3	3	4	3	2	4	2	1	4	3	1	4
0	4	2	3	4	3	7	1	3	3	3	4	3	2	1	2	3	3	1	5
3	0	2	1	2	3	0	0	3	6	2	4	3	4	2	4	1	2	0	3
1	0	0	2																

N = 64. Начало первого интервала: 0. Длина интервала: 1.

Выборка В7

61	59	60	50	58	71	57	61	55	75	68	65	63	68	60
66	52	70	69	62	58	56	54	65	61	67	64	58	61	64
71	60	51	54	57	56	55	57	65	56	61	49	67	64	59
65	63	72	67	54	53	58	69	63	66	55	57	68	53	61
55	69	54	64	54	61	66	65	57	60	72	62	68	61	62
52	62	55	70	72	64	71	54	58	71	66	65	66	62	68
60	64	63	61	60	64	65	68	64	66	69	53	57	59	62
60	63	65	60	66	68	66	64	64	67	62	55	65	62	60
55	65	56	57	72	53	62	68	63	57	55	68	59	61	63
62	63	62	59	67	56	65	67	56	69	63	53	55	67	61
54	68	59	63	67	57	64	68	76	64	64				

N = 161. Начало первого интервала: 48. Длина интервала: 3.

ВАРИАНТ 8**Выборка А8**

8	4	4	7	5	5	5	3	10	2	3	6	7	6	10
6	7	7	6	10	7	6	8	10	7	7	9	1	3	4
7	4	4	5	4	9	6	5	9	5	6	5	6	4	7
2	5	7	6	7	3	8	8	7	4	7	5	7	6	6
5	6	6	6	12	5	11	8	1	10	10	9	1	4	5
6	8	4	10	8										

N = 80. Начало первого интервала: 1. Длина интервала: 1.

Выборка В8

78	85	52	53	62	56	58	68	98	58	94	84	57	68	64
61	64	62	53	89	66	54	62	57	64	66	35	53	73	57
62	54	75	52	59	72	54	66	46	44	57	63	86	63	61
59	54	83	53	71	64	60	48	77	47	59	54	60	67	85
54	66	64	82	78	70	88	61	63	77	41	62	69	60	64
64	66	80	71	53	99	58	63	43	56	51	70	73	76	73
60	58	59	67	53	56	74	71	86	30	55	58	67	76	69
73	85	50	63	50	74	78	60	78	68	72	65	87	62	72
51	68	65	64	72	72	70	70	78	50	56	66	73	67	60
65	59	64	58	71	76	51	52	67	71	61	73	45	82	64
63	53	76	58	58	77	68	67	60	69	64	53	70	79	79
80	53	83	51	46	63	74	45	73	70	92	79	82	73	64
69	56	48	64	75	62	67	49	58	73	52	64	67	57	40
70	64	75	78	59	51	86	74	72	43	53	65	53	98	64
66	54	70	81	47	68	85	93	70	51	71	87	56	63	49
79	46	54	49	63	96	63	61	82	61					

N = 235. Начало первого интервала: 28. Длина интервала: 5.

ВАРИАНТ 9**Выборка А9**

2	1	2	3	1	1	0	2	2	4	3	3	0	3	0	3	2	3	1	2
2	3	0	2	3	0	2	3	3	4	4	1	4	0	0	1	2	4	4	3
0	0	0	2	2	3	2	1	0	0	0	3	1	0	1	2	1	2	2	4
3	2	0	0	1	0	3	0	0	3	1	3	4	2	3	3	2	0	4	

N = 79. Начало первого интервала: 0. Длина интервала: 1.

Выборка В9

56	76	65	66	76	62	89	48	62	50	47	80	67	87	78
55	67	51	73	75	61	88	46	57	65	60	72	28	75	51
69	68	65	34	77	63	57	61	42	85	49	41	62	63	80
62	65	75	56	66	92	60	43	52	80	68	70	76	62	55
42	87	81	67	65	81	90	38	58	60	79	79	50	64	70
58	77	73	54	58	77	86	52	61	42	70	93	54	65	51
53	64	65	76	88	59	62	67	62	90	88	69	61	81	65
72	58	68	94	54	58	58	81	57	70	71	78	52	93	89
57	68	70	58	72	57	62	63	87	61	91	57	57	66	68
40	63	86	48	75	66	83	64	55	75	65	67	54	70	44
51	86	67	58	73	71	46	86	68	79	50	58	66	69	61
64	78	78	60	46	71	71	74	79	65	61	62	84	53	67
83	43	64	67	50	60	83	61	83	67	67	58	46	73	58
47	76	81	72	66	83	73	71	70	60	68	52	51	63	63
75	61	80	51	63	62	46								

N = 217. Начало первого интервала: 26. Длина интервала: 5.

ВАРИАНТ 10

Выборка А10

3	5	6	8	4	5	4	7	2	7	7	3	7	4	4
5	4	4	5	2	4	8	8	4	6	5	9	4	0	4
4	4	9	3	3	2	1	5	2	5	5	3	4	4	7
8	9	11	4	5	2	5	7	6	1	2	5	6	3	1
2	6	7	3	3	2	5	4	8	2	6	5	9	5	5
2	8	3	6	4	6	6	8	7	3	3	7	3		

N = 88. Начало первого интервала: 0. Длина интервала: 1.

Выборка В10

71	62	43	80	70	44	42	25	48	55	58	44	74	55	56
49	54	63	60	57	70	52	74	65	61	60	72	69	68	47
30	62	81	56	55	38	68	55	74	50	29	35	55	52	27
58	50	62	80	49	68	68	81	66	64	41	45	48	68	79
56	82	76	84	47	44	72	58	58	80	61	55	66	36	69
44	88	88	73	39	70	70	35	51	69	50	59	35	43	71
54	65	85	63	59	52	88	64	60	61	31	64	48	49	50
41	62	42	76	81	76	70	76	75	53	66	87	74	61	68
73	44	61	53	46	69	71	58	63	73	56	65	53	77	39
83	45	55	77	61	42	72	49	52	67	62	68	72	46	76
67	53	70	76	56	62	38	59	53	50	76	52	73	34	51
60	61													

N = 167. Начало первого интервала: 23. Длина интервала: 5.

ВАРИАНТ 11**Выборка А11**

4	5	6	1	1	6	2	2	8	4	5	5	4	2	3	4	7	5	4	7
3	3	4	4	3	8	4	3	5	5	2	1	4	3	5	1	4	3	3	3
1	0	2	2	1	7	5	2	6	2	1	1	8	4	5	4	1	4	5	4
4	2	3	4	3	3	9	2	6	2	3	2	7	1	4	7	3	5	7	2
5	5	4	4	6	1														

N = 86. Начало первого интервала: 0. Длина интервала: 1.

Выборка В11

127	141	121	131	145	139	141	131	139	137	128	132
129	134	140	143	140	127	132	136	134	133	121	133
136	126	138	144	138	138	137	137	127	139	140	141
125	136	136	129	136	135	142	132	129	128	134	139
130	137	132	140	125	127	129	133	134	135	124	132
127	133	140	135	140	130	130	130	131	133	133	131
129	127	138	128	122	137	136	137	140	138	117	114
132	137	126	137	136	130	148	130	140	132	127	125
134	136	116	120	125	136	124	144	133	132	123	136
131	130	130	134	132	131	125	138	130	146	132	131
138	135	133	126	134	137	141	136	126	125	135	139
150	130	136	132	127	131	122	125	133	133	123	136
131	135	130	123	133	123	140	133	138	124	129	129
128	126	128	138	127	120	144	135	126	126	144	125
123	132	138	155	139	137	133	129	124	140	131	128
130	130	124	142	124	129	131	143	129	127		

N = 190. Начало первого интервала: 112. Длина интервала: 5

ВАРИАНТ 12**Выборка А12**

11	6	7	8	7	3	7	3	3	12	7	9	12	5	10
4	7	2	7	7	4	5	11	5	5	6	4	5	8	9
8	12	5	6	7	10	11	9	13	9	3	8	11	9	7
12	6	6	14	11	9	8	14	6	4	10	8	4	6	8
3	6	6	7	7	6	10	11	3	11	8	5	8	11	11
6	11	7	8	7	12	5	5	9	5	7	10	5	7	

N = 89. Начало первого интервала: 2. Длина интервала: 1.

Выборка В12

103	120	129	105	131	138	113	87	117	109	109	113
162	139	101	98	114	116	94	125	108	119	130	127
116	124	137	140	151	102	115	127	121	110	131	106

112	96	112	112	120	100	118	104	106	123	112	134
106	107	115	130	140	104	127	125	117	109	106	109
112	90	111	138	112	97	124	128	105	122	118	126
84	138	123	119	121	116	120	101	118	102	102	120
145	117	110	138	107	127	119	127	128	90	95	92
105	131	118	127	105	139	92	122	116	111	111	101
99	98	103	123	114	126	132	123	142	92	103	109
138	115	94	116	138	125	91	132	98	111	154	129
146	123	96	112	104	111	108	89	128	111	140	143
131	102	116	105	135	96	102	106	99	116	99	129
128	125	97	97	96	114	148	133	126	98	107	130
93	123	112	117	87	98	79	97	136	121	100	127
113	116	117	115	97	108	110	110	103	128	86	126
98	121	119	99	134	114	157	133	109	120	129	129
147	110	120									

N = 207. Начало первого интервала: 76. Длина интервала: 6.

ВАРИАНТ 13

Выборка A13

1	0	1	1	1	2	0	2	1	0	0	0	1	0	3	2	1	1	1	0
0	0	1	1	0	2	0	3	1	2	1	3	2	1	0	0	1	0	1	1
0	2	3	1	0	3	1	1	1	2	1	1	0	0	1	1	3	0	2	3
2	1	1	0	4	2	2	1	1	2	0									

N = 71. Начало первого интервала: 0. Длина интервала: 1.

Выборка B13

-71	-74	-51	-87	-37	-72	-64	-77	-63	-58	-50	-39	-71	-48	-39
-44	-62	-59	-50	-91	-51	-65	-54	-70	-50	-46	-66	-44	-71	-72
-58	-52	-58	-72	-62	-47	-58	-69	-58	-72	-42	-70	-84	-65	-65
-49	-45	-53	-50	-73	-47	-21	-40	-74	-35	-49	-58	-44	-50	-74
-53	-66	-67	-64	-62	-49	-67	-41	-67	-57	-56	-60	-71	-46	-79
-72	-48	-38	-51	-37	-60	-58	-52	-58	-55	-50	-64	-68	-53	-70
-59	-59	-90	-72	-61	-74	-36	-79	-65	-68	-39	-54	-86	-49	-48
-59	-44	-68	-52	-60	-42	-78	-29	-68	-79	-78	-68	-70	-66	-45
-62	-56	-36	-67	-64	-45	-63	-59	-59	-58	-67	-69	-44	-69	-69
-78	-58	-53	-58	-71	-52	-59	-27	-46	-56	-72	-50	-55	-30	-56
-62	-34	-35	-38	-64	-67	-59	-59	-58	-62	-88	-30	-41	-59	-54
-47	-55	-50	-79	-63	-50	-77	-23	-73	-63	-63	-67	-74	-59	-60
-46	-57	-74	-54											

N = 184. Начало первого интервала: -95. Длина интервала: 8.

ВАРИАНТ 14**Выборка А14**

6	6	5	6	11	8	7	4	4	8	3	2	3	9	7
6	9	5	8	8	7	10	8	6	9	9	10	3	10	5
7	6	8	9	9	3	8	4	11	4	6	9	2	8	7
7	7	8	4	3	6	12	10	2	3	8	6	8	2	3
8	8	7	6	9	4	4	7	6	9	6				

N = 71. Начало первого интервала: 2. Длина интервала: 1.

Выборка В14

58	49	46	53	63	64	53	46	59	64	50	55	57	55	68
48	58	54	59	66	61	69	70	51	60	47	50	43	62	48
40	51	46	58	63	51	65	55	55	61	45	50	44	45	57
65	52	60	58	27	41	60	44	38	44	59	72	43	60	50
55	53	51	33	53	70	55	60	50	51	50	55	57	58	61
52	46	56	65	52	61	52	65	51	58	54	55	64	58	68
52	52	47	48	55	58	72	53	69	42	41	59	56	28	50
47	54	52	60	47	55	48	64	63	72	51	55	50	65	66
42	63	59	60	70	54	40	58	49	66	59	55	50	46	58
73	41	68	54	48	52	52	50	67	59	43	64	57	71	67
54	63	63	65	60	47	72	58	55	52	53	49	59	43	45
45	40	54	77	49	56	45	64	69	57	50	59	74	47	38
54	57	52	63	42	41	57	60	60	52	49	46	60	71	57
47	52	51	59	42	56	43	50	44	45	59	54	56	71	63
50	46	42	48	59	53	64	53	54	72	55				

N = 221. Начало первого интервала: 25. Длина интервала: 4.

ВАРИАНТ 15**Выборка А15**

2	0	1	2	0	0	2	2	1	1	0	0	0	0	1	2	0	4	0	0
1	0	4	1	1	0	2	1	0	0	2	1	1	1	1	0	1	1	0	3
1	2	1	0	1	2	1	2	3	0	2	4	0	0	0	3	0	2	0	2
2	2	1	1																

N = 64. Начало первого интервала: 0. Длина интервала: 1.

Выборка В15

174	166	157	161	165	162	161	164	172	158	161	163
160	154	171	160	168	171	161	162	168	164	166	159
172	154	154	154	153	159	160	173	150	166	157	177
165	168	152	168	164	158	153	164	174	179	159	165

167	169	164	168	151	174	166	169	170	159	162	153
175	178	157	170	174	169	159	154	165	167	161	168
157	182	175	170	155	164	174	167	170	159	160	153
151	169	155	143	163	155	173	166	164	186	161	158
150	159	167	163	166	155	149	157	164	166	171	172
154	161	169	164	173	164	162	171	156	155	160	156
165	149	175	150	162	179	154	167	158	155	147	161
161	173	166	156	171	158	164	168	173	166	148	174
179	173	167	162	166	167	164	158	160	163	161	154
151	156	150	157	163	168	170	165	174	149	161	162
155	164	156	157	170	173	165	160	166	166	160	165
159	157	162	173	173	151	151	169	167	145	166	168
161	169	170	172	159	161	162	151	165	161	151	156
167	148	167	170	149	162	169	157	167	169	174	163
164	169	161	164	172	160	154	156	166	170	164	160
161	149	158	168	176	155						

N = 234. Начало первого интервала: 141. Длина интервала: 5.

ВАРИАНТ 16

Выборка A16

5	4	4	4	5	0	3	7	2	2	3	0	5	6	3	4	6	1	2	5
3	2	3	6	6	2	3	1	7	2	3	2	2	5	2	0	2	2	6	1
3	6	7	7	2	0	4	6	1	1	6	7	1	3	4	6	6	3	2	1
7	2	5	4	2	3	4	5	6	6	5	3	2							

N = 73. Начало первого интервала: 0. Длина интервала: 1.

Выборка B16

79	56	46	50	67	37	53	49	42	57	49	20	45	83	15
54	43	82	54	49	27	56	49	26	46	72	41	38	29	65
59	61	41	32	42	71	55	46	71	68	37	67	36	33	38
39	59	39	42	45	55	45	54	87	72	68	44	33	47	63
69	52	67	66	7	54	56	39	40	61	73	50	49	72	57
77	54	70	45	49	50	41	39	61	70	44	42	43	71	57
70	55	45	36	40	71	17	48	49	48	72	48	53	28	44
64	11	66	37	12	36	15	55	39	72	61	68	42	48	72
48	28	40	32	26	69	33	50	78	56	61	36	44	36	52
25	67	50	60	69	63	60	58	46	11	59	53	77	38	54
41	76	56	46	26	58	40	43	55	45	73	47	76	46	16
86	25	27	43	26	61	64	10	50	24	42	36	33	51	34
54	80	56	27	57	76	43	49	43	67	75	64	39	64	53
62	88	27	37	56	67	63	56	48	28	24	42	43	48	49

N = 210. Начало первого интервала: 3. Длина интервала: 9.

ВАРИАНТ 17**Выборка А17**

4	8	4	11	7	7	5	8	9	6	7	1	6	5	8
4	7	4	8	4	6	5	7	4	8	7	4	3	2	8
7	5	0	4	7	6	3	5	7	2	6	6	5	8	1
3	8	6	6	8	8	9	6	8	7	5	12	5	3	9
5	7	7	8	3	7	9	6	5	4	4	4	7	7	4
7	5	9	5	9	3	4	4	8	5	1	10	6	1	7
6	8	6	7	9										

N = 95. Начало первого интервала: 0. Длина интервала: 1.

Выборка В17

-21	-66	-28	-40	-37	-58	-44	-32	-60	-33	-47	-55	-47	-37	-31
-41	-45	-45	-41	-42	-27	-33	-33	-63	-51	-53	-46	-37	-23	-36
-43	-78	-38	-43	-46	-37	-46	-47	-48	-59	-30	-37	-60	-42	-49
-32	-61	-37	-54	-42	-26	-30	-60	-40	-65	-50	-63	-53	-47	-61
-47	-34	-30	-62	-44	-39	-25	-49	-48	-51	-43	-50	-44	-64	-45
-54	-21	-40	-25	-59	-40	-48	-54	-38	-42	-34	-46	-31	-30	-75
-70	-59	-45	-57	-45	-33	-51	-47	-58	-32	-36	-42	-37	-47	-32
-28	-69	-33	-45	-38	-42	-30	-29	-18	-57	-46	-45	-47	-37	-58
-72	-38	-50	-51	-49	-47	-63	-52	-34	-47	-63	-53	-65	-55	-39
-60	-50	-57	-46	-70	-42	-39	-43	-60	-52	-52	-46	-34	-33	-31
-39	-16	-54	-63	-63	-27	-48	-38	-34	-40	-49	-43	-32	-54	-56
-38	-34	-39	-31	-46	-52	-80	-21	-54	-50	-50	-55	-47	-26	-34
-54	-36	-33	-46	-23	-56	-28	-36	-35	-52	-51	-58	-65	-36	-58
-53	-54	-44	-43	-37	-49	-63	-52	-50	-58	-51	-58	-40	-40	-19
-51	-81	-42	-52	-50	-20	-53	-49	-40	-55	-55	-48	-28	-49	-46
-65	-63	-37	-47	-43	-35	-81	-44	-18	-41	-53	-	-	-	-

N = 236. Начало первого интервала: - 84. Длина интервала: 7.

ВАРИАНТ 18**Выборка А18**

5	3	3	3	5	4	5	3	3	4	2	1	5	2	4	0	2	2	3	2
1	3	3	1	2	4	6	6	4	1	2	4	3	1	5	2	4	6	3	8
4	5	1	1	2	0	2	3	3	2	4	2	1	2	3	1	2	4	3	0
6	3	1	4	3	7	1	1	0	2	3	1	1							

N = 73. Начало первого интервала: 0. Длина интервала: 1.

Выборка В18

52	40	47	54	40	54	41	74	45	45	51	76	58	37	40
42	53	54	65	46	65	61	55	38	66	42	56	54	40	60
43	49	77	64	53	64	58	54	56	53	43	35	56	34	59
58	66	49	49	57	48	42	46	52	59	50	62	50	55	55
46	53	51	50	60	30	48	56	29	74	52	60	44	62	23
54	40	33	20	55	42	61	54	41	45	75	59	41	51	45
54	52	62	69	65	49	48	63	52	46	44	55	60	54	39
82	67	68	34	56	51	56	48	53	47	59	51	59	66	48
61	42	54	33	39	47	46	47	73	63	34	44	51	46	40
43	30	60	61	53	47	42	56	70	48	45	65	48	48	51
40	57	56	33	44	43	45	35	35	56	59	66	56	52	44
53	49	55	25	53	48	73	38	58	72	57	46	54	55	59
38	53	48	68	36	53	41	55	51	50	45	50	29	60	39
50	59	33	56	49	31	70	56	56						

N = 204. Начало первого интервала: 17. Длина интервала: 7.

ВАРИАНТ 19

Выборка А19

2	2	0	1	3	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	4	1	0	0
0	2	0	1	1	0	1	2	1	2	0	0	0	1	1	0	1	0	1	1
0	1	0	0	2	1	0	0	1	1	1	0	0	2	0	0	1	1	0	0
0	0	0	2	1	1	1	1	3	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0

N = 80. Начало первого интервала: 0. Длина интервала: 1.

Выборка В19

144	166	120	89	103	140	143	126	119	125	161	140
168	133	151	132	135	166	131	120	127	105	136	145
154	105	173	97	113	150	143	107	133	139	127	138
107	107	127	127	159	170	120	120	106	126	152	128
160	120	109	106	134	127	107	106	95	91	113	128
120	99	160	137	143	103	138	143	131	157	148	146
112	141	174	109	173	91	148	123	133	117	122	139
107	139	169	125	141	132	115	157	127	158	115	161
165	145	168	107	105	115	113	138	113	145	104	99
137	144	122	93	124	120	112	159	135	145	137	115
98	159	158	125	125	121	145	130	168	132	118	139
184	153	133	122	138	117	147	115	134	102	107	85
159	139	156	123	138	136	112	101	114	141	164	142

96	137	161	153	125	147	137	129	140	171	115	155
126	145	109	147	112	98	144	114	109	149	114	173
118	138	102	168	116	125	151	86	129	166	115	106
120	133	159	158	156	114	109	138	108	155	129	145
139	161	116	110	155	122	181	151	129	128	137	104
107	115	131	146	119	125	164	145				

N = 224. Начало первого интервала: 80. Длина интервала: 11.

ВАРИАНТ 20

Выборка А20

7	8	4	0	4	6	5	4	3	2	4	8	6	2	2
5	3	6	6	5	5	3	5	6	7	8	9	5	2	5
4	5	6	6	3	6	5	3	4	5	10	3	7	5	3
3	3	7	5	3	4	9	2	1	4	4	4	2	4	3
4	4	5	5	3	7	5	3	2	6	2	4	4	4	0
6	1	3	4	4	5	4	8	3	5	4	11	9	9	

N = 89. Начало первого интервала: 0. Длина интервала: 1.

Выборка В20

107	78	93	81	80	92	126	93	67	50	104	110
120	91	101	91	120	88	69	74	102	65	48	71
103	67	95	112	112	86	99	99	103	122	112	102
92	69	105	106	124	46	72	75	126	73	106	75
80	92	68	112	127	88	93	74	131	51	117	145
96	76	71	138	104	120	67	92	130	99	94	92
97	105	84	78	100	98	114	113	94	108	76	88
91	78	96	81	116	75	120	75	62	113	109	111
127	63	87	86	66	100	75	84	95	121	103	95
70	98	67	148	95	92	105	114	98	102	41	76
114	90	97	111	93	110	79	63	109	69	108	71
111	100	136	92	84	123	84	125	102	96	72	102
90	136	87	132	137	100	102	88	65	75	114	79
122	63	115	90	78	86	122	119	87	115	96	137
106	105	88	75	100	84	71	123	121	94	114	94
93	118	94	102	109	86	45	97	93	43	48	114
85	79	124	89	104	108	108	100	106	102	105	119
71	86	115	82	101							

N = 209. Начало первого интервала: 36. Длина интервала: 11.

ВАРИАНТ 21**Выборка A21**

4	5	3	4	5	2	3	3	3	4	4	5	3	1	4	1	4	5	5	1
2	5	5	5	3	4	3	5	5	4	0	2	6	7	1	3	2	2	4	2
3	3	6	0	6	2	4	3	6	1	5	4	4	4	5	2	4	5	3	5
5	6	2	2	3	2	2	5	2	5	5	0	7	1	0	0	0	5	3	2
7	6	3	5	3															

N = 85. Начало первого интервала: 0. Длина интервала: 1.

Выборка B21

110	115	122	128	115	118	116	124	120	127	136	129
119	124	131	116	108	122	118	132	118	118	116	132
124	120	124	124	118	127	126	119	115	122	131	129
128	122	103	125	115	122	114	109	132	122	121	129
108	111	104	115	105	135	132	133	119	137	126	102
114	109	125	121	112	131	115	122	118	116	130	126
131	127	116	120	119	128	104	131	115	140	115	124
126	115	104	125	131	117	118	102	127	120	102	120
130	128	106	132	129	131	126	116	128	134	132	124
107	119	132	117	120	122	114	125	139	116	125	132
111	122	120	113	123	119	122	112	125	101	121	124
110	123	141	115	121	113	125	139	111	117	114	109
128	126	139	114	123	125	123	118	129	123	124	122
123	120	115	115	127	115	114	133	128	123	104	124
105	124	112	135	117	127	134	117	120	97	123	105
108	119	112	114	133	112	120	145	121	126	127	118
129											

N = 193. Начало первого интервала: 95. Длина интервала: 5.

ВАРИАНТ 22**Выборка A22**

2	3	1	6	4	6	3	3	1	3	1	2	4	4	4	3	0	3	2	4
2	3	2	3	3	2	0	6	1	0	2	2	6	2	0	2	4	3	1	5
3	0	4	4	3	5	3	2	5	2	0	2	0	2	5	0	1	3	3	2
0	2	2	2	5															

N = 65. Начало первого интервала: 0. Длина интервала: 1.

Выборка В22

184	181	201	178	190	188	181	180	186	180	176	186
185	184	187	176	189	194	196	190	193	180	186	195
197	189	197	190	176	200	196	188	203	191	180	181
188	185	188	173	184	180	189	178	190	175	193	184
177	179	177	203	185	182	191	183	183	211	189	177
195	196	175	188	189	187	193	185	184	193	181	185
214	177	196	195	193	172	190	200	176	179	185	182
175	180	179	170	206	181	197	197	180	193	192	200
175	196	174	171	160	187	185	206	187	182	175	172
191	179	191	199	197	177	175	170	174	194	188	182
179	186	190	183	196	183	185	174	195	179	197	182
183	184	185	172	193	175	172	179	179	184	190	183
178	192	186	157	172	185	180	193	177	174	200	195
184	186	185	206	192	189	189	184	183	182	179	186
184	169	189	180	183	192	186	200	176	191	186	182
202	184	192	179	204	197	194	182	172	185	175	187
182	184	186	201	197	188	188	194	184	193	178	191
203	193	190	185	181	187	181	196	204	177	178	167
178	194	188	182	182	199	180	181	187	187	178	181
180	182	160	183	193	189	193	191				

N = 236. Начало первого интервала: 154. Длина интервала: 6.

ВАРИАНТ 23

Выборка А23

1	4	3	3	1	0	4	0	4	3	2	0	2	2	3	3	1	0	3	3
3	2	3	3	3	2	5	6	3	2	5	2	3	4	2	3	2	2	6	2
0	1	2	3	6	2	1	4	3	3	1	5	4	3	2	1	1	1	6	3
2	0	2	2	2	3														

N = 66. Начало первого интервала: 0. Длина интервала: 1.

Выборка В23

5	-25	13	29	28	24	-8	40	24	-7	42	-49	30	-31	-7
-3	53	-6	14	46	-16	3	2	19	31	-26	10	46	-4	-5
5	8	6	30	39	14	3	32	6	25	-13	-12	20	26	5
33	2	-20	5	29	5	39	36	24	38	-2	30	53	52	7
20	-35	27	11	-12	23	1	-10	-3	-5	31	21	6	-15	-2
17	-15	26	17	0	46	13	21	-3	6	9	31	-15	43	4
19	-8	9	37	43	-3	20	20	24	17	3	43	-19	-36	19
-6	14	6	24	5	-50	4	-24	-6	43	17	-22	37	19	28
9	3	-34	-7	19	18	-14	19	15	-26	-6	52	5	26	29
28	-4	8	-1	30	65	1	25	-3	1	30	53	35	9	-11

1	35	1	21	76	29	-15	6	-31	-6	58	18	-10	3	60
17	23	3	3	27	-2	9	88	6	-1	21	-6	30	12	1
24	28	7												

N = 183. Начало первого интервала: - 57. Длина интервала: 14.

ВАРИАНТ 24

Выборка A24

7	11	5	5	5	5	9	4	5	3	8	5	3	8	3
11	3	9	6	8	3	3	6	2	7	4	4	3	5	7
4	6	5	2	9	5	8	6	1	1	7	7	4	4	9
7	4	3	1	6	6	4	5	4	5	5	7	8	6	8
4	10	2	7	7	5	9	6	11	2	7	7	9	2	6
8														

N = 76. Начало первого интервала: 1. Длина интервала: 1.

Выборка B24

-64	5	-53	-29	-61	-49	-1	-22	-25	-38	-73	-20	-8	-37	-47
0	-37	-50	-46	-13	7	-13	-42	-1	-44	-27	-20	-33	-37	-30
-20	-73	-57	-40	-4	-40	-83	-33	-37	-26	-79	-16	-77	-5	-51
-28	-63	-24	-25	-24	-38	16	-38	-15	29	-11	-14	-34	-31	-23
-16	-58	-73	-43	-31	-65	-12	-4	-38	-25	-31	-7	-9	-60	-61
-47	-46	-33	-15	-79	-48	1	-62	-14	-49	-31	-25	-33	-38	-27
-51	-30	-43	-64	-24	-50	-22	-37	-6	-11	-78	-51	-1	-9	-34
1	-17	-33	11	-54	-31	-34	-38	-22	-2	-9	-15	-6	-87	-45
-22	-30	-15	-30	-18	-77	6	-47	-33	-21	-86	-31	-45	-43	-19
-36	-46	-69	-22	-59	-30	-22	5	-29	-42	-47	5	-17	-71	-36
6	-6	-7	-41	-37	-11	-11	-65	-36	-58	-36	-30	-46	-15	-49
-88	-12	-8	-83	-13	-30	-48	-66	-9	-31	-13	-32	-21	-47	-50
-25	-6	-31	-75	-48	-77	-13	-55	-26	-9	-32	-41	-68	-55	-53
25	-77	1	-65	-35	-51	-24	-42							

N = 203. Начало первого интервала: - 94. Длина интервала: 12.

ВАРИАНТ 25

Выборка A25

2	0	2	6	2	3	5	3	8	3	6	4	5	2	6	6	5	5	8	8
3	5	3	2	4	5	2	1	6	9	7	6	7	4	5	6	5	6	8	3
6	5	5	1	7	6	4	1	5	6	4	7	2	8	8	2	8	2	1	6
5	2	3	6	3	3	5	3	3	7	5	6	6	3	4	6	7	4	6	2
7	7	1	2	3	6	6	3	2	6	4	2	4	8						

N = 94. Начало первого интервала: 0. Длина интервала: 1.

Выборка В25

100	51	80	83	83	67	55	84	78	83	101	75
78	99	69	99	71	67	56	74	51	78	34	67
107	66	106	70	117	67	116	79	120	47	113	113
59	100	78	31	68	66	91	85	64	55	83	77
68	83	38	89	88	58	75	60	89	111	42	104
33	96	50	42	81	78	42	64	89	60	32	46
82	33	72	93	94	49	153	68	85	78	95	51
76	81	67	50	75	99	114	111	108	127	110	91
77	85	102	101	79	118	132	130	79	88	76	73
82	75	118	50	100	70	42	79	64	78	137	83
92	71	84	77	73	100	69	77	74	98	79	102
83	66	59	67	87	60	91	68	91	103	73	93
69	54	82	71	60	88	82	82	41	68	53	78
96	97	81	96	69	52	77	66	100	119	84	102
46	54	77	129	87	106	84	96	81			

N = 177. Начало первого интервала: 25. Длина интервала: 13.

ВАРИАНТ 26

Выборка А26

2	0	0	3	1	2	2	2	3	4	1	2	3	3	2	1	1	3	3	0
4	1	3	3	0	1	0	0	1	2	1	1	3	2	3	0	1	0	4	2
3	1	2	1	1	1	1	2	1	2	5	2	1	3	2	31	1	1	1	1
2	1	1	1	3	1	3	1	2	1	2	1	1	0	0	3	3	1	2	3

N = 80. Начало первого интервала: 0. Длина интервала: 1.

Выборка В26

22	49	18	44	52	31	18	20	27	35	41	28	29	45	36
40	41	37	18	40	25	38	46	37	50	41	37	37	21	37
27	27	32	34	28	40	31	20	22	25	31	34	56	35	37
47	40	29	28	29	3	27	12	41	24	40	57	49	37	34
23	38	19	29	27	32	21	21	13	40	24	37	7	24	34
52	38	32	49	43	25	16	33	22	6	41	48	35	55	35
4	31	18	19	17	23	6	36	40	12	66	26	23	30	28
49	30	50	13	33	46	26	37	30	46	41	18	28	14	50
26	25	30	53	46	30	11	40	40	24	16	24	28	29	25
10	19	35	27	22	38	32	41	21	46	27	49	34	53	32
31	15	24	38	25	34	22	35	42	38	33				

N = 161. Начало первого интервала: 0. Длина интервала: 7.

ВАРИАНТ 27**Выборка A27**

1	0	1	3	1	1	4	0	0	1	1	1	0	1	2	0	2	1	0	1
1	0	1	0	2	2	1	1	0	0	0	1	2	1	1	1	2	3	0	1
0	2	2	0	2	2	0	1	0	0	0	0	3	2	2	3	1	2	0	1
2	1	1	0	1	2	0	2	2	1	0	0	2	0	0	0	3	1	2	2
2	0	2	0	2	1	0	3	1	1	3									

N = 91. Начало первого интервала: 0. Длина интервала: 1.

Выборка B27

187	193	199	197	196	184	200	193	198	191	193	188
193	195	197	199	202	193	190	197	195	182	201	202
184	197	205	178	191	200	223	188	192	188	194	183
207	183	195	184	175	195	212	197	194	184	175	198
189	194	185	213	192	200	194	173	206	163	204	174
183	199	203	185	199	196	196	188	169	196	190	205
189	189	190	175	190	193	209	190	183	191	193	191
190	192	191	185	202	176	184	176	199	182	186	189
193	185	168	192	193	205	171	193	191	206	187	193
192	189	191	190	182	194	194	197	207	198	180	175
193	191	188	187	191	191	192	192	214	171	208	185
195	190	214	193	183	193	193	187	198	203	181	173
189	195	180	180	205	194	179	191	201	195	195	189
185	199	194	187	173	211	190	165	182	182	194	168
176	192										

N = 170. Начало первого интервала: 160. Длина интервала: 7.

ВАРИАНТ 28**Выборка A28**

0	0	0	1	0	0	1	3	1	1	1	0	3	0	2	0	0	0	0	1
1	1	1	3	2	0	0	1	4	1	0	0	0	2	0	1	2	1	2	0
1	2	1	0	0	1	0	1	1	0	2	1	1	2	0	1	0	0	0	2
1	2	0	1	1	1	2	0	0	2	2	1	2	2	0	0	0	2	0	0
0	1	0	0																

N = 84. Начало первого интервала: 0. Длина интервала: 1.

Выборка B28

-50	-39	-48	-56	-49	-44	-39	-42	-56	-46	-39	-50	-52	-48	-55
-46	-37	-51	-52	-45	-46	-51	-43	-49	-35	-57	-48	-42	-42	-54
-33	-44	-56	-44	-43	-41	-47	-42	-47	-59	-54	-53	-55	-34	-53
-50	-36	-53	-53	-55	-54	-39	-53	-42	-49	-45	-48	-50	-48	-56
-52	-46	-53	-56	-57	-42	-53	-50	-44	-46	-59	-62	-57	-36	-43
-46	-59	-52	-52	-64	-46	-46	-49	-53	-44	-49	-62	-50	-42	-53

-41	-44	-49	-52	-62	-44	-53	-44	-50	-47	-48	-51	-55	-64	-52
-48	-50	-53	-30	-41	-48	-55	-35	-66	-37	-58	-59	-42	-51	-54
-47	-52	-44	-61	-39	-54	-60	-58	-45	-54	-38	-50	-61	-46	-31
-40	-49	-52	-36	-52	-41	-54	-50	-59	-44	-40	-47	-61	-41	-53
-47	-44	-43	-51	-48	-48	-43	-39	-45	-54	-41	-55	-42	-37	-45
-59	-47	-43	-56	-48	-43	-66	-60	-51	-44	-48	-46	-43	-51	-43
-43	-50	-48	-56	-54	-56	-61	-60	-42	-34	-40	-46	-45	-59	-47
-61	-41	-54	-45	-48	-52	-55	-49	-51	-52	-49	-48	-47	-62	-43
-55	-53													

N = 212. Начало первого интервала: - 68. Длина интервала: 4.

ВАРИАНТ 29

Выборка А29

4	1	9	6	11	11	6	5	10	4	10	10	12	10	9
6	6	8	4	10	2	5	6	8	6	7	2	2	6	12
2	8	8	11	9	6	7	4	5	9	7	9	5	9	10
5	8	6	10	8	8	6	9	10	8	6	1	3	10	4
8	6	10	9	10	3	6	11							

N = 68. Начало первого интервала: 0. Длина интервала: 1.

Выборка В29

17	25	25	25	32	32	23	24	23	26	29	34	29	26	23
21	21	19	27	17	22	31	23	23	26	37	15	12	32	23
25	45	27	38	8	19	25	15	24	23	39	21	29	22	22
24	21	24	31	22	23	31	24	26	19	17	26	25	30	18
32	32	37	28	29	17	17	24	28	18	38	18	28	25	14
18	26	27	26	20	33	24	33	33	36	22	19	25	23	23
33	25	32	24	33	17	15	26	25	21	37	24	36	28	37
19	25	21	23	27	32	12	25	23	28	18	41	21	26	35
31	21	16	27	34	16	30	20	24	16	20	33	21	31	22
17	23	14	28	37	18	29	26	26	19	28	31	22	28	23
22	27	20	29	24	17	24	15	24	21	22	30	19	42	33
27	23	9	25	26	12	19	33	24	35	22	26			

N = 177. Начало первого интервала: 6. Длина интервала: 4.

ВАРИАНТ 30

Выборка А30

4	6	0	2	1	3	3	1	2	5	3	1	2	2	4	4	4	3	2	5
2	5	1	2	3	0	3	0	5	1	2	1	3	0	4	0	2	2	1	0
5	1	4	2	4	2	1	3	1	0	6	1	2	1	4	2	2	0	2	4
2	2	1	2	2															

N = 65. Начало первого интервала: 0. Длина интервала: 1.

Выборка В30

57	61	60	63	66	68	64	72	69	59	71	62	69	57	61
58	60	66	59	62	64	53	50	50	55	70	61	77	70	65
66	72	71	60	74	62	49	92	76	66	64	62	60	53	65
49	79	58	73	61	63	64	59	55	70	62	61	68	69	67
64	42	73	62	69	60	64	69	62	67	67	72	57	51	77
58	63	71	73	68	80	54	64	53	64	68	58	73	68	61
54	73	59	69	60	67	57	54	69	55	70	65	61	65	62
71	55	67	57	64	70	55	65	69	65	65	60	66	63	74
60	54	75	62	74	63	64	76	59	71	68	55	68	61	57
73	54	57	56	65	53	64	58	67	48	66	68	55	77	59
58	58	62	58	52	62	65	71	64	66	65	58	66	73	73
72	43	63	59	76	67	63	71	66	59	69	65	66	50	65
57														

N = 181. Начало первого интервала: 40. Длина интервала: 4.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная

1. Венцель, Е.С. Теория вероятностей и ее инженерные приложения [Текст]: учеб. пособие для студентов вузов / Е.С. Венцель, Л.А. Овчаров. – 4-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2007. – 491 с.
2. Венцель, Е.С. Задачи и упражнения по теории вероятностей [Текст]: учеб. пособие для студентов вузов / Е.С. Венцель, Л.А. Овчаров. – 8-е изд., стер. – М.: КНОРУС, 2010. – 496 с.
3. Горлач, Б.А. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст]: учеб. пособие / Б.А. Горлач. – СПб.: Лань, 2013. – 320с.

Дополнительная

1. Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст]: учеб. пособие для вузов / В.Е. Гмурман. – 11-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2005. – 479 с.
2. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике [Текст]: учеб. пособие для студентов вузов / В.Е. Гмурман. – 9-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2004. – 404 с.
3. Кремер, Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст]: учеб. для студентов вузов, обучающихся по экономическим специальностям / Н.Ш. Кремер. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: ЮНИТИ – ДАНА, 2007. – 551 с.
4. Горлач, Б.А. Математика [Текст]: учеб. пособие для студентов вузов, обучающихся по экономическим специальностям / Б.А. Горлач. – М.: ЮНИТИ – ДАНА, 2006. – 911 с.
5. Клентак, Л.С. Математика: методические указания и задания для расчетных работ. Ч. 3 [Текст]/ Л.С. Клентак. – Самара: МИР, 2008. – 51 с.
6. Высшая математика [Текст]: метод. указания и контрольные задания для студентов-заочников инженерных специальностей вузов / Е.С. Мироненко. – М.: Высш. шк., 2002. – 110 с.
7. Колде, Я.К. Практикум по теории вероятностей и математической статистике [Текст] / Я.К. Колде. – М.: Высш. шк., 1991. – 157 с.

Учебное издание

Клентак Людмила Стефановна

**ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ**

Учебное пособие

Редактор Н. С. Куприянова
Компьютерная верстка А. В. Ярославцева

Подписано в печать 7.06.2013 г. Формат 60х84 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Печ. л. 9,75.
Тираж 100 экз. Заказ . Арт. – С2/2013.

Самарский государственный
аэрокосмический университет.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

Изд-во Самарского государственного
аэрокосмического университета.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.