

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

М. Г. Лосев

Теория пластического деформирования металлов

Электронное учебное пособие
по лекционному курсу

САМАРА
2010

Автор: Лосев Михаил Григорьевич

В пособии рассмотрены основные теоретические методы для определения основных технологических параметров процессов обработки металлов давлением (ОМД).

Большое внимание уделено инженерному методу для определения деформирующего усилия в операциях ОМД.

Рассмотрены основы методов: сопротивления материалов пластическим деформациям; метод линий скольжения; метод баланса работ; вариационный метод.

Пособие предназначено для студентов инженерно-технологического факультета, обучающихся по магистерской программе «Инновационные технологии получения и обработки материалов с заданными свойствами» по направлению 150400.68 «Металлургия».

Подготовлено на кафедре обработки металлов давлением.

1 ПОСТАНОВКА ОБЩЕЙ ЗАДАЧИ В ТЕОРИИ ОМД

Одной из основных задач теории ОМД является задача о нахождении полей напряжений и деформаций в деформируемом теле. Знание напряженно-деформированного состояния позволит определить основные технологические параметры:

- деформирующее усилие, работу, мощность деформации;
- максимально допустимую степень деформации в конкретной операции ОМД;
- Форму и размеры исходной заготовки и т.д.

Все решения в теории ОМД базируются на основных уравнениях механики сплошных сред. Для решения общей (трехмерной) задачи по определению напряжений и деформаций в любой точке деформируемого тела необходимо использовать следующие уравнения (на примере декартовой системы координат (x,y,z)):

- Три уравнения равновесия:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0.$$

Выполняется закон парности касательных напряжений:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}, \tau_{zx} = \tau_{xz}.$$

- Условие пластичности:

$$\sigma_i = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}.$$

Для неупрочняемого тела: $\sigma_i = \sigma_s = const$;

Для упрочняемого тела: $\sigma_i = \sigma_s = f(\varepsilon_i)$.

Интенсивность деформаций:

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{2}{3}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)}.$$

- Шесть уравнений связи между напряжениями и деформациями:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} \left[\sigma_x - \frac{1}{2}(\sigma_y + \sigma_z) \right] & \gamma_{xy} &= 3 \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} \tau_{xy} \\ \varepsilon_y &= \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} \left[\sigma_y - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_z) \right] & \gamma_{yz} &= 3 \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} \tau_{yz} \\ \varepsilon_z &= \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} \left[\sigma_z - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \right], & \gamma_{zx} &= 3 \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} \tau_{zx}. \end{aligned}$$

- Условие постоянства объема:

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0$$

- Шесть геометрических уравнений Коши, связывающих деформации с перемещениями:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x} & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial u_y}{\partial y} & \gamma_{yz} &= \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial u_z}{\partial z}, & \gamma_{zx} &= \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}. \end{aligned}$$

Вместо уравнений Коши можно использовать уравнения неразрывности деформаций:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial x \partial z}. \end{aligned}$$

В итоге получаем 17 уравнений с 17 неизвестными. Задача статически определима. Однако методики решения подобной задачи не существует.

При решении задач ОМД вводят ряд допущений, которые, как правило, приводят задачу к следующему виду: осесимметричное напряженное состояние, плоское деформированное состояние или плоское

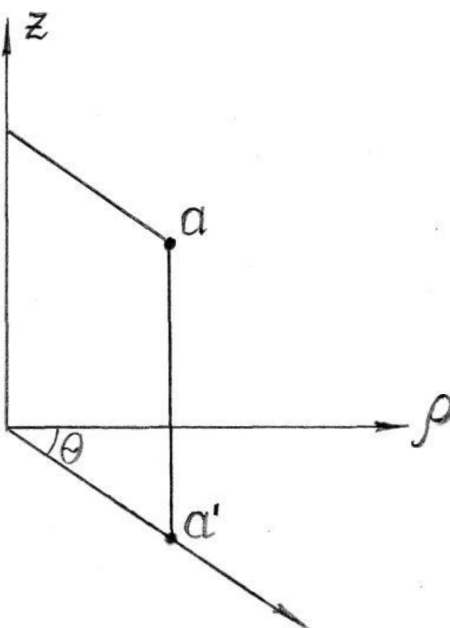
напряженное состояние. При использовании данных частных случаев приведенные уравнения упрощаются, и сокращается их количество.

1.2 ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ

1.2.1 Осесимметричное напряженное состояние

Используем цилиндрическую систему координат (ρ, θ, z) .

Положение точки в пространстве определяется следующими координатами: (рисунок 1.1)



ρ -радиальная координата; θ -угловая (тангенциальная) координата;
 z -аппликата.

Рисунок 1.1 – Цилиндрическая система координат

Весьма часто в пространстве встречаются детали, представляющие собой тела вращения. У них при нагрузке внешние силы расположены симметрично относительно оси, поэтому все напряжения и деформации не зависят от одной из координат. Перед тем, как рассматривать частные случаи напряженно-деформированного состояния, запишем уравнения равновесия в цилиндрической системе координат для объемного напряженного состояния.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial z} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_z}{\rho} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{\theta\rho}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{\theta\rho}}{\rho} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{z\rho}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{z\rho}}{\rho} &= 0.\end{aligned}$$

Условие пластичности, уравнение связи между напряжениями и деформациями, условие постоянства объема записываются аналогично и в декартовой системе координат: $x \rightarrow \rho$, $y \rightarrow \theta$, $z \rightarrow z$.

Геометрические уравнения Коши записываются несколько иначе:

$$\begin{aligned}\varepsilon_\rho &= \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} \\ \varepsilon_\theta &= \frac{u_\rho}{\rho} \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial u_z}{\partial z}.\end{aligned}$$

При осесимметричном напряженном состоянии все напряжения и деформации не зависят от координаты θ . Касательные напряжения: $\tau_{\rho\theta} = \tau_{\theta\rho} = \tau_{z\theta} = \tau_{\theta z} = 0$. Поэтому:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial z} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{z\rho}}{\partial \rho} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{z\rho}}{\rho} &= 0.\end{aligned}$$

Равенство нулю касательных напряжений приводит к равенству угловых деформаций: $\gamma_{\rho\theta} = \gamma_{\theta\rho} = \gamma_{z\theta} = \gamma_{\theta z} = 0$.

Поэтому условие пластичности несколько упростится:

$$(\sigma_\rho - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_\rho)^2 + 6\tau_{\rho z}^2 = 2\sigma_s^2.$$

Уравнения связи записываются аналогично как и в декартовой системе координат с учетом, что $\gamma_{\rho\theta} = \gamma_{z\theta} = 0$.

Четыре геометрических уравнения Коши:

$$\begin{aligned}\varepsilon_\rho &= \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho}; \\ \varepsilon_\theta &= \frac{\partial u_\rho}{\rho}; \quad \gamma_{z\rho} = \frac{\partial u_z}{\partial \rho} + \frac{\partial u_\rho}{\partial z}; \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial u_z}{\partial z};\end{aligned}$$

одно уравнение связи:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_\rho}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial \rho^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{z\rho}}{\partial z \partial \rho}.$$

Данное напряженное состояние возможно при волочении и прессовании круглых прутков, осадке цилиндрической и конической заготовки, при объемной штамповке, когда изделие имеет форму вращения, и при штамповке осесимметричных листовых деталей.

1.2.2 Плоское деформированное состояние

Плоское деформированное состояние может быть принято в тех случаях, когда деформацией в одном из главных направлений можно пренебречь (или она отсутствует). К таким процессам можно отнести прокатку широких листов, гибку широкой полосы, осадку прямоугольной заготовки, длина которой значительно больше ширины, и др.

Предположим, что в направлении оси z деформации отсутствуют: $\xi_z=0$, Тогда:

$$\begin{aligned}\gamma_{zx} = \gamma_{xz} = \gamma_{zy} = \gamma_{yz} &= 0; \\ \tau_{zx} = \tau_{xz} = \tau_{zy} = \tau_{yz} &= 0;\end{aligned}$$

$$\sigma_z = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

Энергетическое условие пластичности запишется в виде:

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = \frac{4}{3}\sigma_s^2.$$

1.2.3 Плоское напряженное состояние.

В некоторых процессах ОМД, особенно в процессах листовой штамповки, когда в одном из направлений напряжение незначительно и им можно пренебречь.

Рассмотрим пластину (рисунок 1.2).

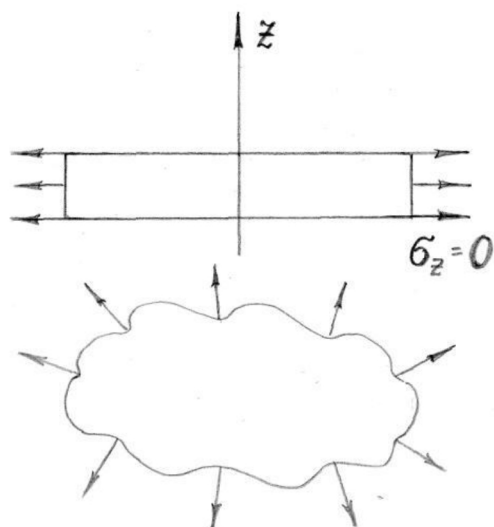


Рисунок 1.2 – Пластично нагруженная по контуру равномерно-распределенной нагрузкой.

К плоскому напряженному состоянию можно отнести плоский участок фланца листовой заготовки при вытяжке. Также это состояние реализуется при обжиме, раздаче, волочении тонкостенных труб. Предположим, что $\sigma_z=0$, тогда:

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \tau_{yz} = \tau_{zy} = 0; \gamma_{xz} = \gamma_{zx} = \gamma_{yz} = \gamma_{zy} = 0.$$

Уравнения равновесия примут вид:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0.$$

Условие пластичности запишется в виде:

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + 6\tau_{xy}^2 = 2\sigma_s^2.$$

Если $\sigma_z=0$, то напряжение σ_z является главным и деформация ε_z будет тоже главной. Следовательно, направление z – главное направление.

Уравнения связи, интегральные уравнения Коши и уравнения неразрывности деформаций тоже упростятся:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} \left(\sigma_x - \frac{1}{2} \sigma_y \right); & \varepsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x}; \\ \varepsilon_y &= \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} \left(\sigma_y - \frac{1}{2} \sigma_x \right); & \varepsilon_y &= \frac{\partial u_y}{\partial y}; \\ \varepsilon_z &= -\frac{\varepsilon_i}{2\sigma_i} (\sigma_x + \sigma_y); & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}; \\ \gamma_{xy} &= 3 \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} \tau_{xy}; & \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}.\end{aligned}$$

Условие пластичности в таком виде обычно не используют, поэтому, как правило, его берут по гипотезе максимальных касательных напряжений (условие пластичности Треска - Сен-Венана).

В листовой штамповке очень большой класс осесимметричных деталей, для которых все уравнения обычно записываются в цилиндрической системе координат.

1.3 ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ ДЕФОРМИРУЮЩЕГО УСИЛИЯ

Во многих операциях ОМД рабочий орган машины совершает поступательное движение. Активное усилие, которое развивает машина, всегда должно быть равно сопротивлению деформируемого металла. Данное активное усилие называется деформирующим усилием.

В некоторых процессах ОМД рабочий орган машины совершает вращательные движения (прокатка, вальцовка, профилирование листовой заготовки). В данных процессах необходимо знать крутящий момент и давление металла на валки.

Деформирующее усилие от машины к металлу передается через контактную поверхность. Зная закон распределения нормальных

напряжений на контактной поверхности, можно всегда определить деформирующее усилие.

Рассмотрим деформацию тела, когда поверхность контакта произвольна: (рисунок 1.3)

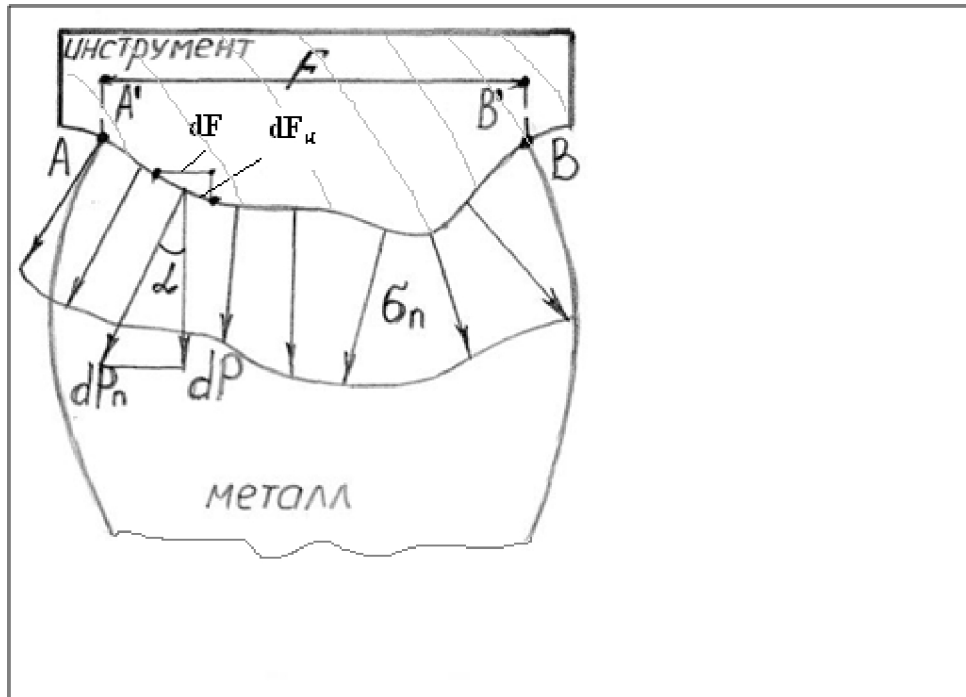


Рисунок 1.3 – Схема для определения деформирующего усилия.

Пусть на поверхности контакта известна эпюра распределения нормальных напряжений (закон распределения). Выделим достаточно малую площадку dF_k . Элементарное усилие действующее на ней можно определить из выражения:

$$dP_i = \sigma_i dF_{\epsilon};$$

Нас интересует составляющая dP :

$$dP = \sigma_i dF_{\epsilon} \cdot \cos \alpha; \quad dF_{\epsilon} \cdot \cos \alpha = dF$$

$$dP = \sigma_n dF \quad (1)$$

Для нахождения полного усилия уравнение (1) нужно проинтегрировать по площади контакта:

$$P = \iint_F \sigma_n dF.$$

Если поверхность контакта характеризуется координатами x и y , то

$$P = \iint_F \sigma_n dx dy .$$

Если поверхность контакта в цилиндрической системе координат характеризуется координатами (f и θ), то

$$P = \iint_F \rho \sigma_n d\rho d\theta .$$

Таким же образом можно найти равнодействующую касательных напряжений:

$$P_\tau = \iint_{F_\tau} \tau_k dF_\tau ,$$

где F_τ - проекция контактной поверхности на плоскость, параллельную направлению движения инструмента; τ_k - закон распределения касательных напряжений на контактной поверхности.

Данная формула позволяет определить крутящий момент для прокатных валков.

Иногда удобно пользоваться удельным усилием деформирования:

$$p = \frac{P}{F} = \frac{\iint \sigma_n dF}{F} .$$

Знание удельного усилия p позволяет определить полное усилие деформирования для заготовок любых размеров.

Полное и удельное усилия деформирования всегда положительные величины.

Для определения деформирующего усилия необходимо знать закон распределения нормальных напряжений на контактной поверхности и проекцию поверхности контакта на плоскость, перпендикулярную направленную действию внешней силы.

2 МЕТОД СОВМЕСТНОГО РЕШЕНИЯ УПРОЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ И ПЛАСТИЧНОСТИ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДЕФОРМИРУЮЩИХ УСИЛИЙ (ИНЖЕНЕРНЫЙ МЕТОД)

Данный метод используется для определения деформирующего усилия, работы и мощностей

2.1 Основные допущения инженерного метода

Задачу либо приводят к плоской по напряжениям, либо к осесимметричной. В случае сложности формы тела его разбивают на ряд объемов, на которые уже можно наложить условие плоской или осесимметричной задачи (рисунок 2.1).

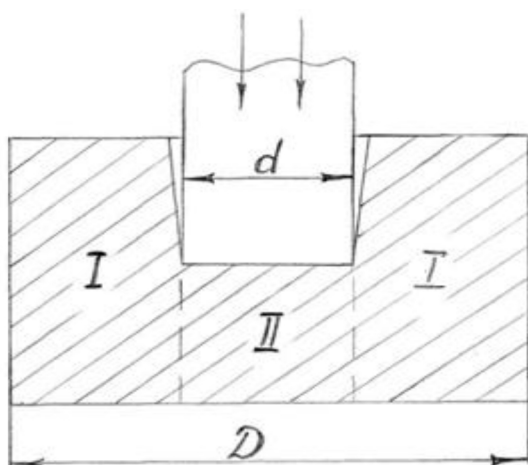


Рисунок 2.1-Схема процесса прошивки

Распределение нормальных напряжений определяют только на контактной поверхности, (что и требуется для вычисления усилия деформирования), при отказе от выявления распределения напряжений внутри тела.

Это допущение позволяет все напряжения сделать зависимыми только от одной координаты.

Касательные напряжения, вызванные трением, изменяются в глубину тела по линейному закону и переходят через ноль в середине высоты заготовки.

Данное допущение справедливо, т.к. на контактной поверхности касательные напряжения достигают величины сил трения. А в глубину тела закон их распределения нас не интересует.

Условие пластичности используют в упрощенном (линейном) виде.

Если в теле провести плоское сечение, то напряжение вдоль этого сечения будет постоянным. Тогда бочкообразованием тела можно пренебречь, плоские сечения в процессе деформирования поворачиваются или смещаются относительно друг друга, но не искажаются. В цилиндрической системе плоские сечения заменяются криволинейными параллельными сечениями (рисунок 2.2)

Когда все напряжения не зависят от одной из координат, то принятые допущения называются гипотезой плоских сечений (тонких сечений).

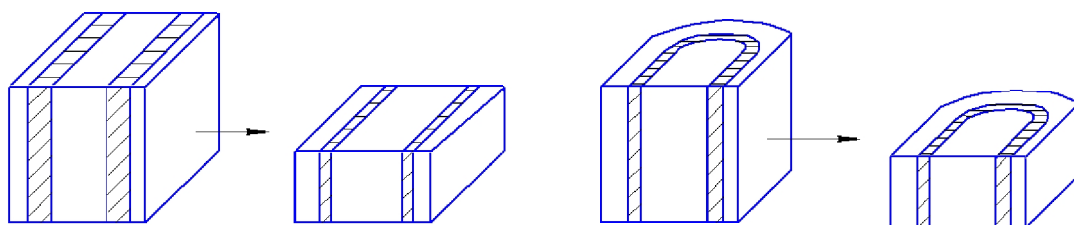


Рисунок 2.2 – Плоские сечения проведенные в деформируемых телах.

В технической литературе иногда данный метод имеет ещё одно название: определение деформирующего усилия с использованием плоских сечений.

2.2 ПРИБЛИЖЁННОЕ УРАВНЕНИЕ РАВНОВЕСИЯ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИ ВАЖНЫХ СЛУЧАЕВ НДС

2.2.1 Плоское деформированное состояние

Определим упрощённое уравнение равновесия при осадке прямоугольной заготовки в условиях плоской деформации. Возьмём декартовую систему координат (x, y, z) (рисунок 2.3). Пусть длина заготовки в несколько раз превышает её ширину, поэтому по длине заготовки деформацией можно пренебречь $\varepsilon_y = 0$

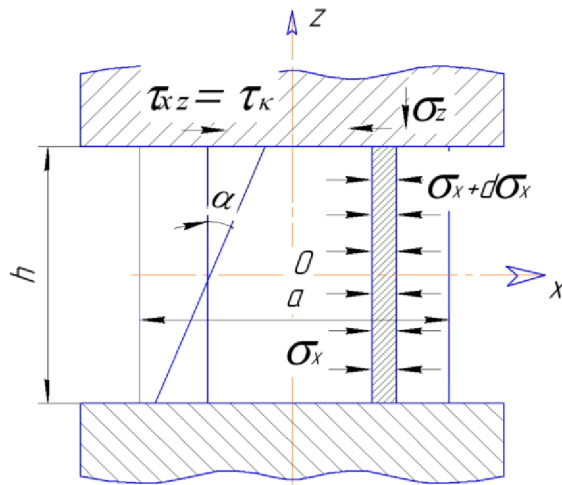


Рисунок 2.3 – расчетная схема для вывода упрощенного уравнения равновесия.

Тогда:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau_{zy} = \tau_{yz} = 0; \quad \sigma_y = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2}$$

Доказательство:

$$\varepsilon_y = \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} \left[\sigma_y - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_z) \right];$$

$$\varepsilon_y = 0; \quad \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} \neq 0; \quad \sigma_y - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_z) = 0, \text{ следовательно } \sigma_y = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_z).$$

Уравнение равновесия, примут вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Напряжение σ_z определяется только на контактной поверхности при $z=h/2$. Это необходимо для определения деформирующего усилия. Как изменятся напряжения σ_z в глубину тела нас не интересует. Поэтому в любой точке тела вдоль координаты z напряжение считаются таким же, как и на контактной поверхности, следовательно σ_z не зависит от координаты z , тогда $\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0$. Тогда из (2) уравнения. $\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} = 0$, т.е. τ_{zx} постоянна по координате x

Касательное напряжение вызванные трением на контактной поверхности $\tau_{xz}=\tau_k$ т.е. конкретно напряжению трения. Как изменяются они в глубину тела вдоль координаты z - нас не интересует. Главное, что бы на противоположной контактной поверхности они изменили свой знак, тогда имеем:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \tan \alpha = \frac{\tau_k}{h} = \frac{2\tau_x}{h}.$$

Из всего сказанного видно, что напряжение σ_x зависит только от координаты x Поэтому:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = \frac{d\sigma_x}{dx}, \text{ следовательно, } \frac{d\sigma_x}{dx} + \frac{2\tau_k}{h} = 0$$

Данное уравнение можно получить другим способом: Если рассматривать только контактную поверхность, то все напряжения не зависят от z – тогда получим уравнения:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0$$

Проинтегрируем его по z от 0 до $\frac{h}{2}$:

$$\int_0^{\frac{h}{2}} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dz + \int_0^{\frac{h}{2}} \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz = 0$$

Получаем:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{2\tau_k}{h} = 0$$

Рассмотрим упрощённое уравнение равновесия для плоского деформированного состояния, в случае процесса продолжительной прокатки (листовой) если дугу захвата заменить хордой.

2.2.2 Осесимметричное напряженное состояние.

В качестве примера рассмотрим осадку цилиндрической заготовки под плоскими плитами. Используем цилиндрическую систему координат (ρ, θ, z) . В данном случае можно принять, что все напряжения не зависят от координаты θ и касательного напряжения $\tau_{\rho\theta} = \tau_{\theta\rho} = \tau_{z\theta} = \tau_{\theta z} = 0$

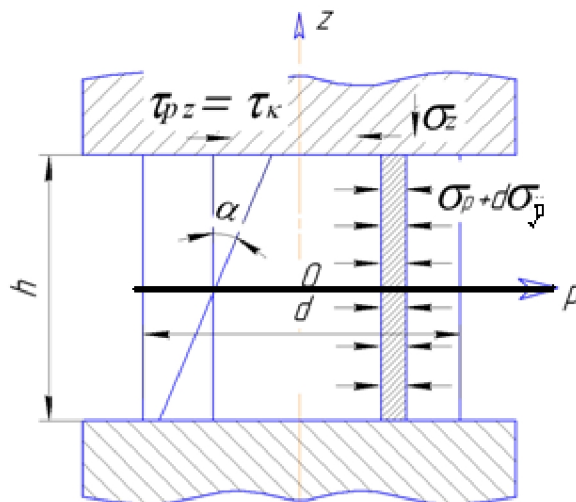


Рисунок 2.4 – Расчетная схема при осадке цилиндрической заготовки

Уравнения равновесия примут вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{\rho}}{\partial \rho} + \frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial z} + \frac{\sigma_{\rho} - \sigma_{\theta}}{\rho} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{z\rho}}{\partial \rho} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{2\tau_{z\rho}}{\rho} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Согласно второго допущения σ_z не зависит от координаты z , поэтому $\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0$

Касательные напряжения $\tau_{\rho z}$, вызванное трением на контактной поверхности не зависят от координаты ρ , т.к. трение принимаем постоянным и изотропным.

$$\text{Тогда } \frac{\partial \tau_{z\rho}}{\partial \rho} = 0.$$

Согласно третьего допущения:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\tau_k}{\frac{h}{2}} = \frac{2\tau_x}{h}.$$

Бочкообразованием заготовки пренебрегаем. Считаем, что она остаётся цилиндрической и после деформации. Тогда $\varepsilon_{\theta} = \varepsilon_{\rho}$, что вызвано равенством напряжений $\sigma_{\theta} = \sigma_{\rho}$. Таким образом напряжение σ_{ρ} зависит только от координаты ρ , следовательно $\frac{\partial \sigma_{\rho}}{\partial \rho} = \frac{d\sigma_{\rho}}{d\rho}$, тогда получаем вместо двух уравнений в частном произведении одно:

$$\frac{\partial \sigma_{\rho}}{\partial \rho} + \frac{2\tau_k}{h} = 0.$$

Рассмотрим случай, когда контактной поверхностью является

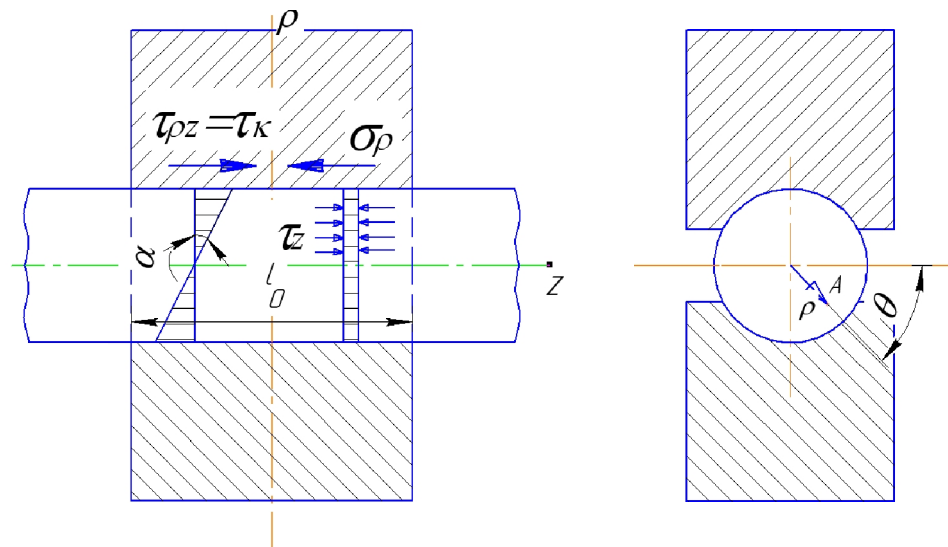


Рисунок 2.5

– Расчётная

схема для

операции

протяжки круглой заготовки в вырезанных байках

цилиндрическая поверхность (рисунок 2.5). Такой случай реализуется в кузнечной операции протяжка круглой заготовки в вырезных байках.

Здесь используется случай осесимметричного напряжённого состояния. Все напряжения не зависят от координаты θ : $\tau_{\rho\theta} = \tau_{\theta\rho} = \tau_{z\theta} = \tau_{\theta z} = 0$.

Допущение 2: Напряжение σ_ρ рассматривается только на контактных поверхностях, поэтому σ_ρ не зависит от координат ρ и $\frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} = 0$

Заготовка остаётся цилиндрической и после деформации, следовательно, $\sigma_\rho = \sigma_\theta$. Касательное напряжение $\tau_{\rho z}$ на контактной поверхности равно τ_k и изменяется в глубину тела по линейному закону:

$$\frac{\partial \tau_{z\rho}}{\partial \rho} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{2\tau_x}{d};$$

$$\frac{\tau_{z\rho}}{\rho} = \frac{2\tau_x}{d}.$$

$$\text{Окончательно } \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \pm \frac{4\tau_k}{d} = 0$$

2.2.3 ПЛОСКОНАПРЯЖЁННОЕ СОСТОЯНИЕ, УПРОЩЁННОЕ УРАВНЕНИЕ РАВНОВЕСИЯ РАССМОТРИМ ДЛЯ ОСЕСИМЕТРИЧНОЙ ТОНКОСТЕННОЙ ОБОЛОЧКИ ДВОЙНОЙ КРИВИЗНЫ И ПОСТОЯННОЙ ТОЛЩИНЫ.

Такие оболочки рассматриваются обычно либо в цилиндрической, либо в сферической системе координат. Плоское напряженное состояние наиболее часто реализуется в операциях листовой штамповки, оболочка обычно рассматривается тонкостенная и вместо толщины рассматривается срединная поверхность. (рисунок 2.6)

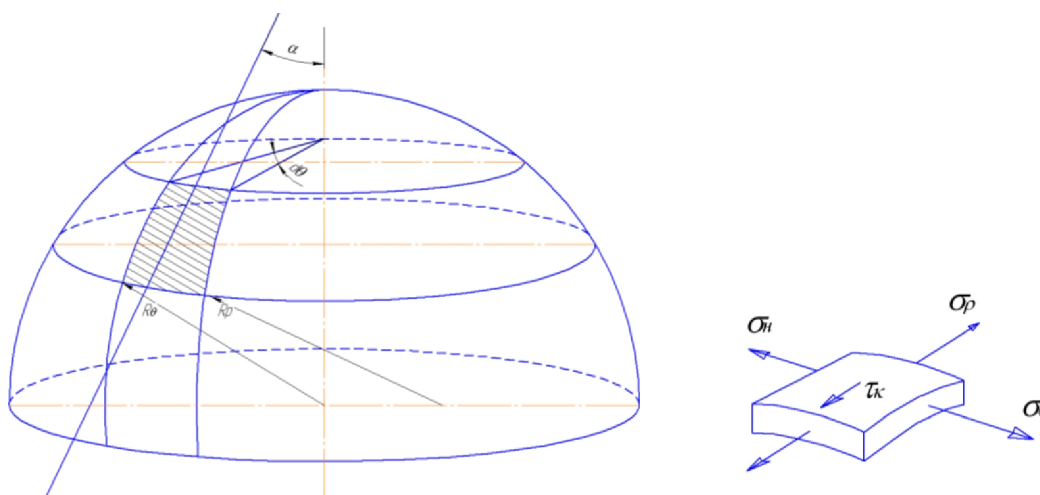


Рисунок 2.6 – Осесимметричная оболочка двойной кривизны

R_ρ - радиус кривизны оболочки в меридианальном направлении.

R_θ - радиус кривизны оболочки в тангенциальном направлении.

Двумя радиусами в меридианальном направлении вырежем элементарную полоску.

Двумя радиусами в широтном направлении также вырежем элементарную полоску.

Для выводов уравнения равновесия необходимо использовать следующие допущения:

- Оболочка осесимметричная, поэтому все напряжения не зависят от координаты θ , а касательные напряжения $\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = \tau_{z\theta} = \tau_{\theta z} = 0$, следовательно σ_θ является главным напряжением.

- Принимаем, что толщина заготовки постоянна и значительно меньше радиусов кривизны в меридианном и широтном сечениях.

$S = \text{const}$ (толщина оболочки)

- Размеры очага деформации вдоль срединной поверхности оболочки значительно больше толщины оболочки. При таких размерных характеристиках очага деформации величиной напряжений, перпендикулярных поверхности оболочки, можно пренебречь. Тогда схема напряжённого состояния с достаточной точностью будет плоской.

$$\sigma_z = 0; \tau_{rz} = 0;$$

σ_r и σ_θ - главные напряжения.

- Для тонкой оболочки, у которой радиус кривизны срединной поверхности значительно больше толщины, можно считать, что напряжение σ_r и σ_θ равномерно распределены по толщине оболочки. В данном случае σ_r и σ_θ можно привести к срединной поверхности.

- Касательное напряжение вызванное трением на контактной поверхности оболочки можно учесть законом Амантона.

$$\tau_k = \mu \sigma_n,$$

где σ_n – нормальное напряжение перпендикулярное срединной поверхности оболочки.

Напряжённое σ_n является следствием проекции σ_r и σ_θ на нормаль поверхности оболочки.

Спроецируем все элементарные силы, действующие на выделенный элемент оболочки в направлении нормали, тогда после преобразования получим, следующее уравнение:

$$\frac{\sigma_H}{S} - \frac{\sigma_\rho}{R_\rho} - \frac{\sigma_\theta}{R_\theta} = 0. \quad (1)$$

Спроецируем все элементарные силы, действующие на выделенный элемент оболочки на касательную срединной поверхности оболочки в меридианальном направлении получим.

$$\rho \frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + \sigma_\rho - \sigma_\theta - \mu\sigma_H \frac{\rho}{s \cdot \sin \alpha} = 0. \quad (2)$$

Из (1) выразим σ_H и поставим в (2) получим:

$$\rho \frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + \sigma_\rho - \sigma_\theta - \frac{\mu\rho}{\sin \alpha} \left(\frac{\sigma_\rho}{R_\rho} + \frac{\sigma_\theta}{R_\theta} \right) = 0. \quad (3)$$

Уравнение (3) является общим уравнением равновесия для тонкостенной оболочки двойной кривизны и постоянной толщины.

Уравнение (1) – уравнение Лапласа.

Если считать что в процессе деформации толщина оболочки будет изменяться то упрощенное уравнение оболочки имеет вид:

$$\rho \frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + \sigma_\rho \left(1 + \frac{\rho dS}{S d\rho} \right) - \sigma_\theta - \frac{\mu\rho}{\sin \alpha} \left(\frac{\sigma_\rho}{R_\rho} + \frac{\sigma_\theta}{R_\theta} \right) = 0. \quad (4)$$

2.3 ВЫРАЖЕНИЯ УСЛОВИЯ ПЛАСТИЧНОСТИ ДЛЯ ЧАСТНЫХ СЛУЧАЕВ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ

Часто используют системы координат (x,y,z), (ρ,θ,z), реже (ρ,θ,φ).

Обозначим систему координат (l,m,n) и запишем энергетическое условие пластичности в виде:

$$(\sigma_l - \sigma_m)^2 + (\sigma_m - \sigma_n)^2 + (\sigma_n - \sigma_l)^2 + 6(\tau_{lm}^2 + \tau_{mn}^2 + \tau_{nl}^2) = 2\sigma_s.$$

2.3.1 Плоско - деформированное состояние

Предположим, что деформация $\varepsilon_m = 0$. Тогда $\sigma_m = \frac{\sigma_l + \sigma_n}{2}$ и

$\tau_{lm} = \tau_{mn} = 0$. Подставим данные выражения в энергетическое условие пластичности, получим:

$$(\sigma_l - \sigma_n)^2 + 4\tau_{ln}^2 = \frac{4}{3}\sigma_s^2.$$

При записи условия пластичности обычно вводят постоянную пластичности $k = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}$. Тогда:

$$(\sigma_l - \sigma_n)^2 + 4\tau_{ln}^2 = 4k^2.$$

Если касательное напряжение $\tau_{ln} = 0$, то условие пластичности примет вид: $\sigma_l - \sigma_n = \pm 2k$.

В данном случае σ_n и σ_l главные напряжения, тогда:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2k = \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_s.$$

2.3.2 Плоское напряженное состояние

Предположим, что напряжение по координате m равно нулю: $\sigma_m = 0$,
и $\tau_{lm} = \tau_{mn} = 0$

Энергетическое условие пластичности запишется в виде:

$$\sigma_n^2 + \sigma_l^2 - \sigma_n\sigma_l + 3\tau_{nl}^2 = 2\sigma_s^2$$

$$\tau_{nl} = 0$$

$$\sigma_n^2 + \sigma_l^2 - \sigma_n\sigma_l = \sigma_s^2$$

Учтя, что $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ получим:

$$\sigma_1^2 + \sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_3 = \sigma_s^2.$$

2.3.3 Осесимметричное напряженное состояние

Предположим, что все напряжения не зависят от координаты m , $\tau_{lm} = \tau_{mm} = 0$.

Энергетическое условие пластичности примет вид:

$$(\sigma_l - \sigma_m)^2 + (\sigma_m - \sigma_n)^2 + (\sigma_n - \sigma_l)^2 + 6\tau_{nl}^2 = 2\sigma_s^2.$$

Последнее выражение почти ничем не отличается от исходного энергетического уравнения пластичности. Если рассматривать частный случай осесимметричной задачи $\sigma_e = \sigma_m$, то условие пластичности примет вид:

$$(\sigma_l - \sigma_n)^2 + 3\tau_{nl}^2 = \sigma_s^2.$$

Введем постоянную пластичности, тогда $(\sigma_l - \sigma_n)^2 + 3\tau_{nl}^2 = 3k$.

Если касательное напряжение $\tau_{nl} = 0$, то условие пластичности запишется следующим образом: $\sigma_l - \sigma_n = \pm\sqrt{3}k$, или $\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_s$.

Из рассмотренных случаев видно, что условие пластичности становится линейным только тогда, когда касательные напряжения отсутствуют, но только в случае плоского-деформированного и частного случая осесимметричного напряженного состояния.

Таким образом, возникает вопрос, в каких случаях мы можем пренебрегать касательным напряжением в условии пластичности, а в каких случаях этого делать нельзя. Такую оценку провел Унков Н.П.

2.4 ЛИНЕЙНАЯ ФОРМА ЗАПИСИ УСЛОВИЯ ПЛАСТИЧНОСТИ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ВЕЛИЧИНЫ КАСАТЕЛЬНОГО НАПРЯЖЕНИЯ, ВЫЗВАННОГО ТРЕНИЕМ

Исследуем правомерность допущения, когда касательными напряжениями в условии пластичности можно пренебречь.

Рассмотрим это на примере плоско-деформированного состояния.

$$(\sigma_l - \sigma_n)^2 + 4\tau_{ln}^2 = 4k^2, \text{ когда } \tau_{ln} \neq 0 \quad (1)$$

$$\sigma_l - \sigma_n = \pm 2k, \text{ когда } \tau_{ln} = 0 \quad (2)$$

Преобразуем первое уравнение и запишем в виде:

$$\frac{\sigma_l - \sigma_n}{2k} = \pm \sqrt{1 - \frac{\tau_{ln}^2}{k^2}}.$$

Построим график зависимости между $\frac{\sigma_l - \sigma_n}{2R}$ и $\frac{\tau_{ln}}{R}$ (рисунок 2.7).

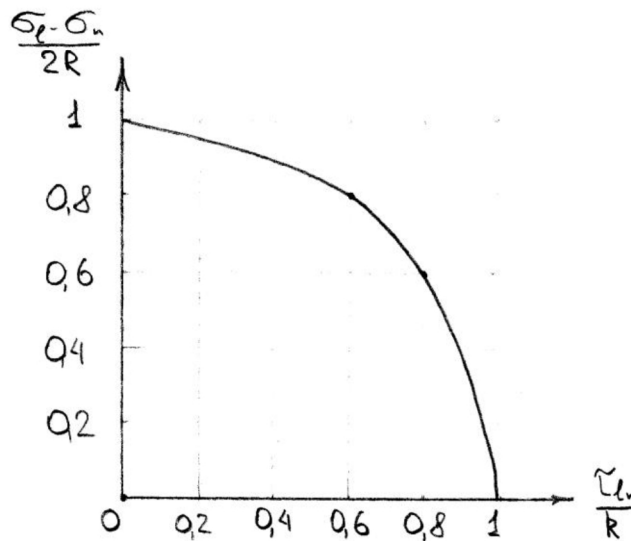


Рисунок 2.7 – график зависимостей между $\frac{\sigma_l - \sigma_n}{2R}$ и $\frac{\tau_{ln}}{R}$

Из графика следует, что $\frac{\tau_{ln}}{k}$ изменяется на отрезке $[0;1]$. Когда $\frac{\tau_{ln}}{k}$ стремится к единице, то пользоваться условием пластичности (2) нельзя, т.к. здесь более подходит условие пластичности (1).

$$\begin{aligned} \tau_{ln} &= k \\ \text{Тогда условие пластичности будет выглядеть: } \sigma_l - \sigma_n &= 0 \\ \tau_{ln} &\cong k \end{aligned} \quad (3)$$

Если продифференцировать условия пластичности (2) и (3) по любой из координат (от которых они зависят), то мы получим равенство двух дифференциалов $d\sigma_l = d\sigma_n$.

Это дифференциальная форма условия пластичности. Она необходима, когда дифференциал одного напряжения необходимо

заменить на дифференциал другого. Из полученного рассуждения можно сделать вывод, что точное условие пластичности (1) можно заменить каким-либо из приближенных условий пластичности (2) или (3).

Установим границу применимости условий (2) и (3).

$$\frac{\tau_{ln}}{k} = m, \text{ по рисунку 2.7 } 0 \leq m \leq 1.$$

$$\text{Введём обозначения: } \frac{\sigma_l - \sigma_n}{2k} = \pm \sqrt{1 - \frac{\tau_{ln}^2}{k^2}} = \varphi(m);$$

$$\frac{\sigma_l - \sigma_n}{2k} = 1 = f(m).$$

Погрешность между функциями $\varphi(m)$ и $f(m)$ определяется

выражениями:
$$\Delta = \frac{\int_a^b [f(m) - \varphi(m)] dm}{b - a}, \text{ где } [a:b] - \text{отрезок изменения}$$

аргумента m

$$\text{Здесь } a=0, b=m, \text{ тогда } \Delta = \frac{1}{m} \int_0^m (1 - \sqrt{1 - m^2}) dm = \frac{1}{m} \left(m - \frac{m}{2} \sqrt{1 - m^2} + \frac{1}{2} \arcsin m \right)$$

Построим зависимость Δ от m (Рисунок 2.8):

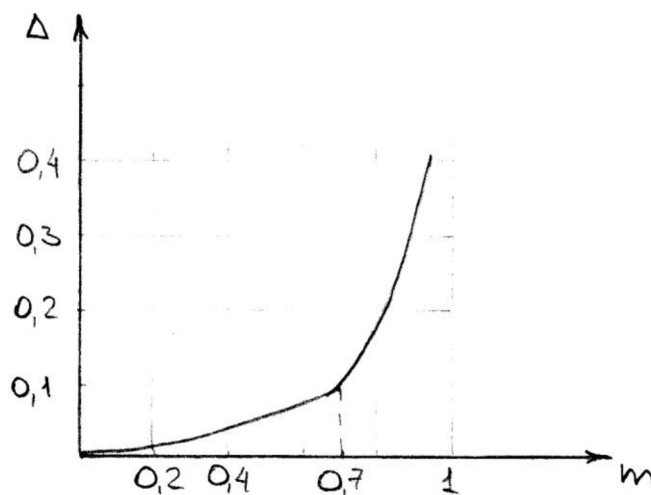


Рисунок 2.8 – Изменение величины ошибки Δ от m

В инженерной практике принято, что погрешность не должна превышать 10%. Из приведенного графика видно, что при $0,7 \geq m \geq 0$ или $0 \leq \tau_{ln} \leq 0,7$ необходимо пользоваться условием пластичности: $\sigma_l - \sigma_n = \pm 2k$.

При $0,7k < m \leq k$, $0,7k < \tau_{ln} \leq k$ используем условие $\sigma_l - \sigma_n = 0$.

При определении условия пластичности на контактной поверхности необходимо оценивать касательные напряжения, вызванные трением, так как $\tau_{ln} = \tau_k$. И по величине этих касательных напряжений, использовать условия пластичности (2) или (3).

Для осесимметричной задачи энергетическое условие пластичности можно переписать в виде:

$$\frac{\sqrt{(\sigma_l - \sigma_m)^2 + (\sigma_m - \sigma_n)^2 + (\sigma_n - \sigma_l)^2}}{\sqrt{2}\sigma_s} = \sqrt{1 - \frac{\tau_{nl}^2}{k^2}}$$

Если $0,7k < \tau_{ln} = \tau_k \leq k$ используем условие пластичности в виде

$$\sigma_l = \sigma_m = \sigma_n. \quad (5)$$

Это условия пластичности являются точными при $\tau_{ln} = k$, и является приближенным, если $0,7k < \tau_{ln} \leq k$. Для плоско-напряженного состояния подобных условий пластичности (3) и (5) не существует, так как касательные напряжения, вызванные трением не могут достигать максимальных значений, то есть не могут быть близкими к величине k .

2.5 ВЛИЯНИЕ СРЕДНЕГО ПО ВЕЛИЧИНЕ ГЛАВНОГО НОРМАЛЬНОГО НАПРЯЖЕНИЯ В УПРОЩЕННОМ УСЛОВИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

Используем правило:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \quad (\sigma_1 = \max, \sigma_3 = \min).$$

Запишем энергетическое условие пластичности в главных нормальных напряжениях: $(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_s^2$ (1)

Предположим, что $\sigma_1 = \sigma_2$. Подставим это в (1), получим:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_s$$

Если $\sigma_2 = \sigma_3$, то:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_s.$$

Вывод: если среднее напряжение σ_2 равно одному из крайних напряжений, то условие пластичности представляет собой разность двух напряжений, равную пределу текучести.

Если $\sigma_2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$ то при подстановке в условие (1) получим:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_s$$

Из полученного равенства можно сделать вывод: $\sigma_1 - \sigma_3 = \beta \sigma_s$ или

$$\sigma_{\max} - \sigma_{\min} = \beta \sigma_s \quad (2)$$

(2) – упрощенное уравнение пластичности, где β -коэффициент Лоде, учитывающий влияние среднего по величине главного нормального напряжения в упрощенном условии пластичности.

Коэффициент Лоде находится в пределах: $1 \leq \beta \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$

$\beta = 1$ при осесимметричном напряженном состоянии,

$\beta = \frac{2}{\sqrt{3}}$ -для плоского-деформированного состояния.

Для плоского напряженного состояния коэффициент β будет средне-интегральным значением между 1 и $\frac{2}{\sqrt{3}}$. В этом случае $\beta = 1,1$.

Выразим коэффициент Лоде β через показатель напряженного состояния ν_σ :

$$\nu_\sigma = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3}.$$

Из последнего выражения выделим напряжение σ_2 . Получим:

$$\sigma_2 = \frac{\nu_\sigma (\sigma_1 - \sigma_3)}{2} + \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}. \quad (3)$$

Подставляя выражение (3) в энергетическое условие пластичности

(1) получим: $\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{2}{\sqrt{3 + \nu_\sigma^2}} \sigma_s$

(4)

Из выражения (4) видно, что $\beta = \frac{2}{\sqrt{3 + \nu_\sigma^2}}$.

На рисунке 2.9 представлен график зависимости β от ν_σ .

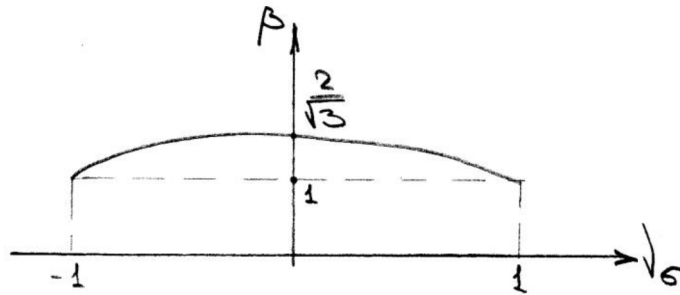


Рисунок 2.9 – График зависимости β от ν_σ .

Иногда в условии пластичности для плоского -напряженного состояния вместо $\beta = 1,1$ берут $\beta = 1$. И сразу получается условие пластичности по гипотезе постоянства главных касательных напряжений (условие Треска-Сен-Венана):

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \sigma_s$$

$$\sigma_2 - \sigma_3 = \sigma_s$$

$$\sigma_3 - \sigma_1 = -\sigma_s$$

$$\sigma_\rho - \sigma_\theta = \pm \sigma_s;$$

В цилиндрической системе координат $\sigma_\theta - \sigma_z = \pm \sigma_s;$

$$\sigma_z - \sigma_\rho = \pm \sigma_s;$$

Достаточно, чтобы одно из трех уравнений выполнялось, чтобы считать, что тело перешло в пластическое состояние. Для

плосконапряженного состояния $\sigma_z = 0$. И условия пластичности Треска-

$$\sigma_\rho - \sigma_\theta = \pm \sigma_s$$

Сен-Венана примут вид: $\sigma_\theta = \pm \sigma_s$

$$\sigma_\rho = \pm \sigma_s$$

Условие пластичности Треска-Сен-Венана было разработано значительно раньше энергетических условий пластичности. В последствии оказалось, что энергетическое условие пластичности – точное условие, а условие Треска-Сен-Венана – приближенное.

2.6 ПРИБЛИЖЕННЫЕ УСЛОВИЯ ПЛАСТИЧНОСТИ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ В ИНЖЕНЕРНОМ МЕТОДЕ

2.6.1 Осесимметричное напряженное состояние.

Цилиндрическая система координат (ρ, θ, z) , $\sigma_\rho \neq \sigma_\theta \neq \sigma_z$.

Касательные напряжения от трения $0 \leq \tau_k \leq 0,7k$ Уравнения пластичности примут вид:

$$\sigma_\rho - \sigma_\theta = \pm \beta \sigma_s$$

$$\sigma_\theta - \sigma_z = \pm \beta \sigma_s$$

$$\sigma_z - \sigma_\rho = \pm \beta \sigma_s$$

Знак $\pm$ ставится потому, что заранее неизвестно, какое напряжение максимально, а какое минимально. Коэффициент Лоде β можно принять равным единице, либо подсчитать его через показатель напряженного состояния.

Осесимметричное напряженное состояние.

Цилиндрическая система координат, но $\sigma_\rho = \sigma_\theta$ (частный случай):

$$\sigma_\rho - \sigma_z = \pm \beta \sigma_s, \text{ где } \beta = 1.$$

Это справедливо для $0 \leq \tau_k \leq 0,7k$

Осесимметричное напряженное состояние.

Цилиндрическая система координат, но $0,7k \leq \tau_k \leq k$, $\sigma_\rho = \sigma_\theta = \sigma_z$

Плоско-деформированное состояние.

Декартова система координат (x, y, z) , но $0 \leq \tau_k \leq 0,7k$.

Предположим, что $\varepsilon_y = 0$, $\sigma_y = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2}$

$$\sigma_x - \sigma_z = \pm \beta \sigma_s, \text{ где } \beta = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Плоско-деформированное состояние.

Декартова система координат, но $0 \leq \tau_k \leq 0,7k$, $\varepsilon_y = 0$, $\sigma_y = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2}$

$$\sigma_x - \sigma_z = 0, \text{ или } \sigma_x = \sigma_z.$$

Плоское напряженное состояние.

Цилиндрическая система координат (ρ, θ, z)

Предположим, что $\sigma_z = 0$. Тогда условие пластичности:

$$\sigma_\rho - \sigma_\theta = \pm \beta \sigma_s, \sigma_\rho > 0, \sigma_\theta < 0 \text{ (или наоборот).}$$

$$\sigma_\rho \cdot \sigma_\theta < 1$$

Может быть $\sigma_\rho = \pm \beta \sigma_s$, в этом случае $\sigma_\rho \cdot \sigma_\theta > 0$, $|\sigma_\rho| < |\sigma_\theta|$

Коэффициент Лоде $\beta = 1,1$.

При решении задач на объемно-деформированное состояние (осадка, протяжка, прошивка) необходимо пользоваться дифференциальным условием пластичности $(d\sigma_x = d\sigma_z)$.

При рассмотрении листовой штамповки дифференциальными условиями пластичности не пользуются. (рисунок 2.10)

Пример: найти закон распределения нормальных напряжений на контактной поверхности при осадке прямоугольной заготовки в условиях плоской деформации.

$$\text{Примем } \varepsilon_y = 0, \sigma_y = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2}$$

Трение на контактной поверхности подчиняется закону Амонтона:

$$\tau_k = \mu \sigma_z$$

$$i_{\text{ред}} = \frac{n_1}{i_{45} \cdot n_2} = \frac{4200}{2 \cdot 350} = 6\varepsilon\theta$$

Разделим переменные. Для этого левую и правую части разделим на σ_z и умножим на dx .

$$\int \frac{d\sigma_z}{\sigma_z} = -\frac{2\mu}{h} \int dx$$

$$\ln \sigma_z = -\frac{2\mu}{h}x + C \text{ пропотенцируем} \quad (4)$$

$$\sigma_z = Ce^{\frac{2\mu x}{h}} \quad (5)$$

(5) – общее решение уравнения (1) и (3).

C - постоянная интегрирования (из граничного условия).

Граничное условие: при $x = \frac{a}{2}$ $\sigma_x = 0$. Из условия пластичности (2)

получим: $\sigma_z = -\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_s$

$$-\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_s = C \cdot e^{\frac{2\mu a}{2h}}$$

$$C = -\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_s \cdot e^{\frac{\mu a}{h}}$$

Следовательно $\sigma_z = -\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_s \cdot e^{\frac{\mu a}{h}} e^{\frac{2\mu x}{h}}$

$$\sigma_z = -\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_s \cdot e^{\frac{\mu}{h}(a-2x)}$$

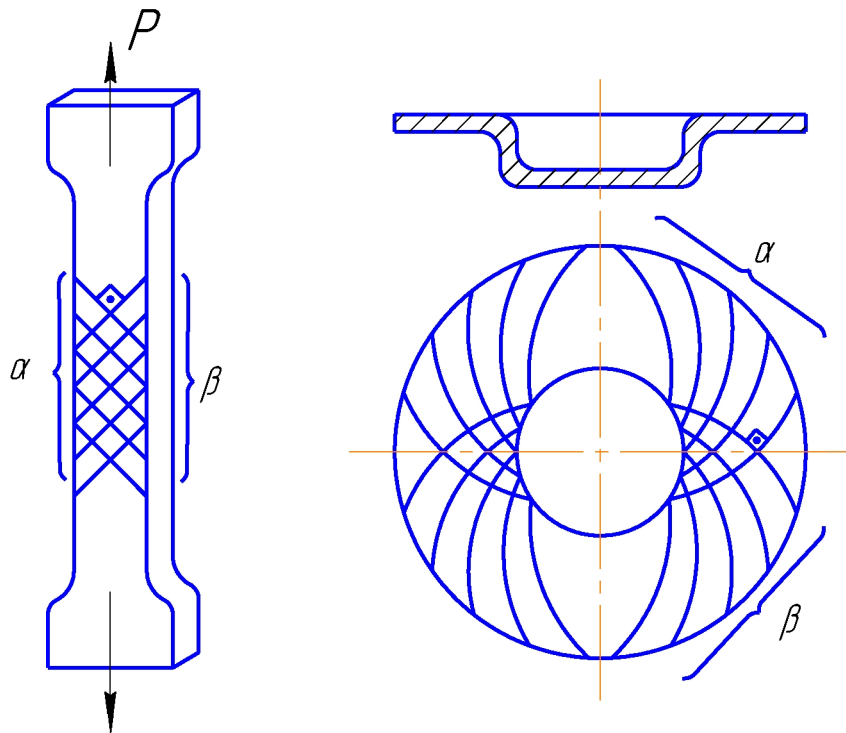
Усилие находится по формуле: $P = 2 \int_0^{a/2} \int_0^l \sigma_z dx dy$

Метод линий скольжения

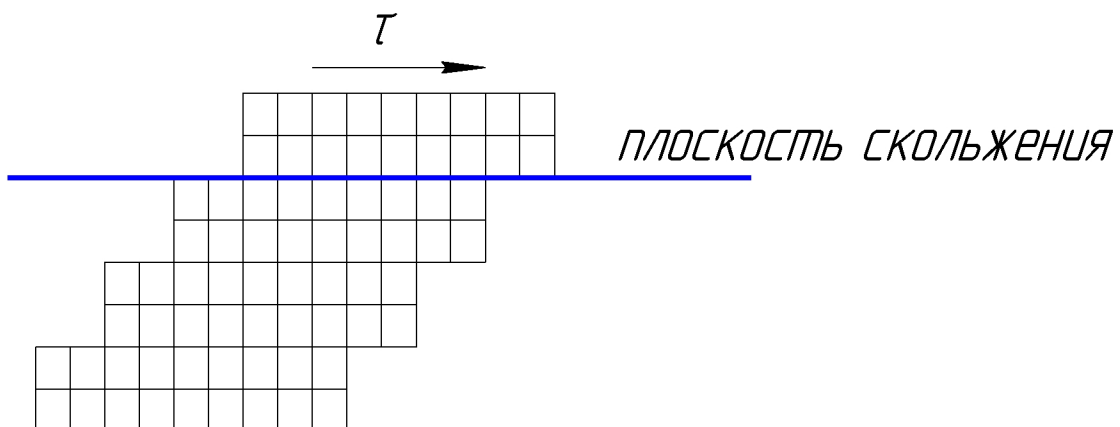
1. Основные понятия о линиях скольжения

На поверхности деформируемого металла, покрытого твердой окалиной иногда наблюдается своеобразный рисунок, состоящий из двух семейств

линий, которые пересекаются между собой под углом $\frac{\pi}{2}$. Эти линии могут быть прямыми линиями или плавными кривыми.



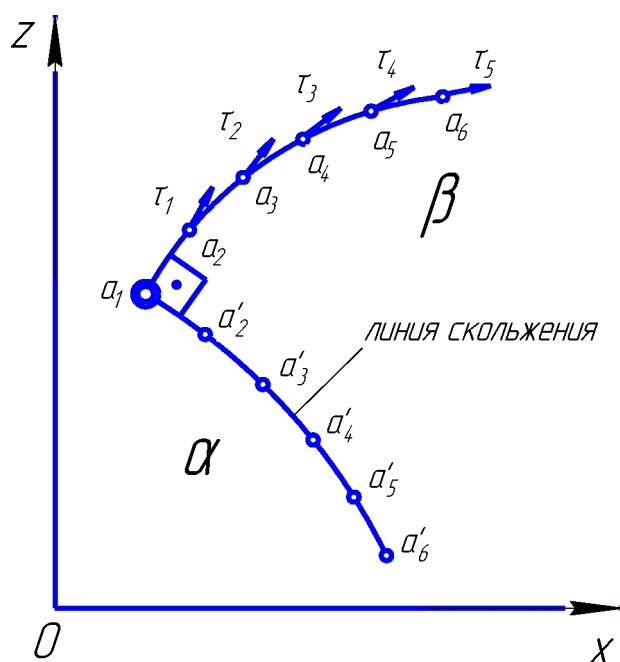
Этот своеобразный рисунок линий был описан Черновым и Людерсом. Впоследствии эти линии были названы линиями Людерса-Чернова. Дальнейшие исследования показали, что эти линии являются траекториями максимальных касательных напряжений. А сам рисунок появляется за счет выхода на поверхность металла плоскостей скольжения. Эти плоскости скольжения дают микротрещину.

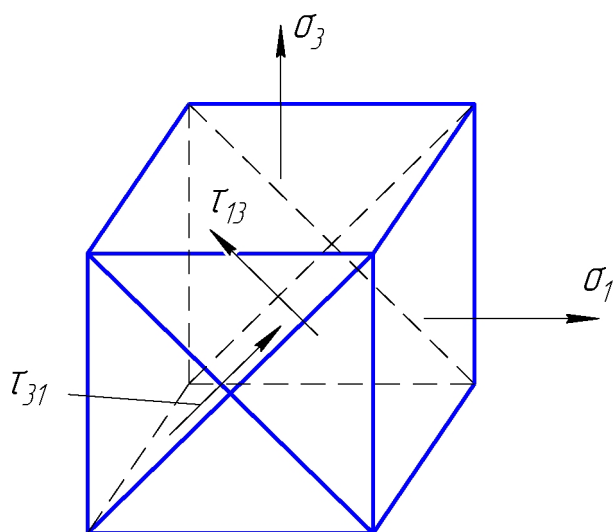


Линии скольжения не всегда можно наблюдать на поверхности металла. В настоящее время существуют экспериментальные способы получения сетки линий скольжения, в которых заготовка шлифуется и обрабатывается определенным составом.

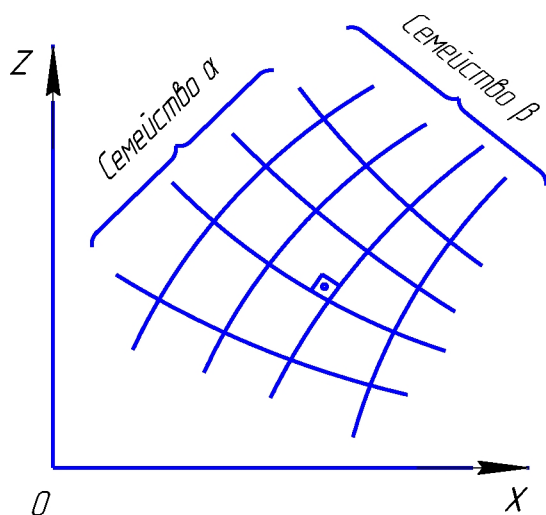
Линии скольжения обладают рядом свойств. Если построить поле линий скольжения в деформированной заготовке, то можно определить в любой точке деформируемого тела напряженное состояние и скорости деформации.

В конечном счете, метод линий скольжения заключается в построении полей линий скольжения.



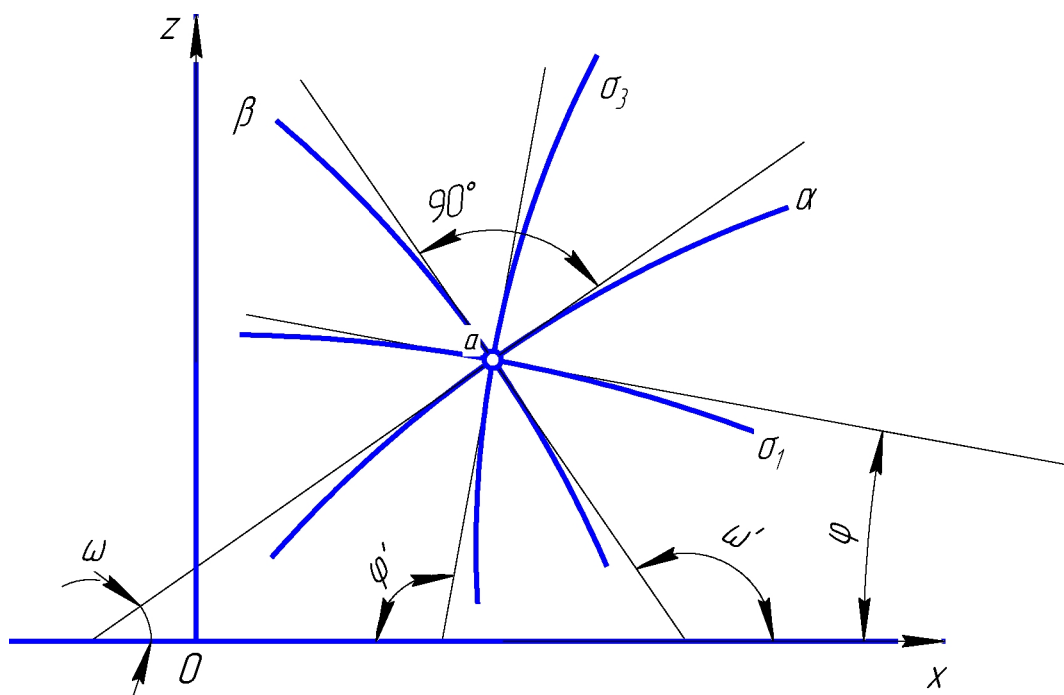


τ_1 - максимальное касательное напряжение



Для различных напряженных состояний поля линий скольжения также различны.

Рассмотрим две линии скольжения. Одна линия относится к семейству α , а другая к семейству β .



$$\omega' = \omega + \frac{\pi}{2};$$

$$\varphi' = \varphi + \frac{\pi}{2}.$$

Траектории максимальных касательных напряжений пересекают траектории главных нормальных напряжений под углом $\frac{\pi}{4}$:

$$\omega = \varphi + \frac{\pi}{4}.$$

Траектории линий скольжения (или сами линии скольжения) пересекают траектории главных нормальных напряжений под углом $\frac{\pi}{4}$.

$$\frac{dz}{dx} = \operatorname{tg} \omega;$$

$$\frac{dz}{dx} = -\operatorname{ctg} \omega.$$

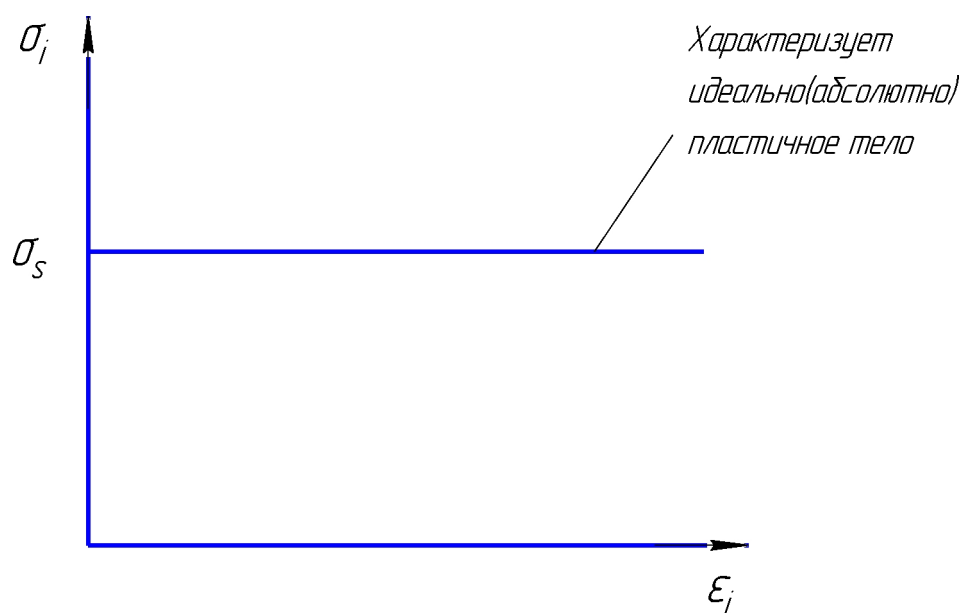
2. Основные допущения и ограничения метода линий скольжения

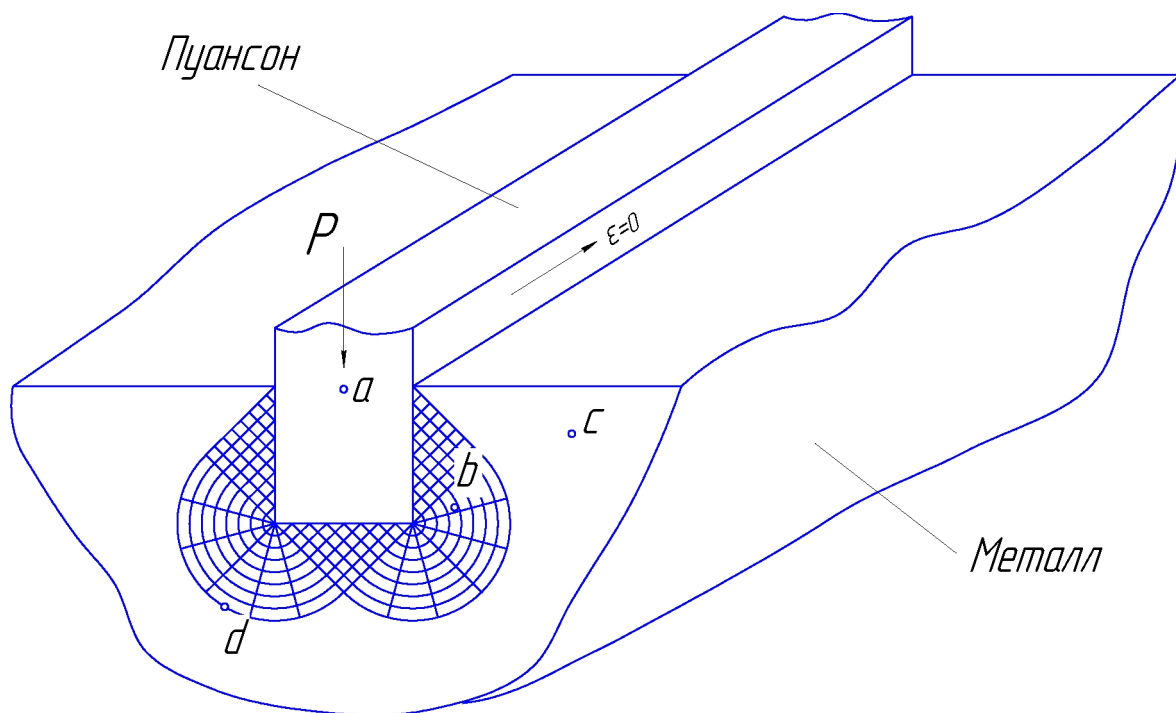
Данный метод в настоящее время получил широкое распространение при решении практических задач. Однако данный метод имеет ряд допущений, которые ограничивают его применение:

1) Метод линий скольжения, строго говоря, применим для случая плоско-деформированного состояния, когда напряжение и скорости деформации не зависят от одной из координат.

Однако данный метод используют для решения задач на осесимметричное напряженное состояние и плоское напряженное состояние, но здесь будет он считаться приближенным.

2) При решении задач методом линий скольжения подразумевается только две области – это область абсолютно жесткого тела и область абсолютно пластичного тела.





В точках a и c подразумевается абсолютно жесткая зона, в точке b - абсолютно пластическая зона, в точке d подразумевается скачкообразный переход от абсолютно пластической зоны к абсолютно жесткой зоне (в природе не существует).

3) При решении задач методом линий скольжения материал заготовки считается не упрочняемым, т.е. абсолютно пластичным. Если учитывать упрочнение металла в данном методе, т.е. $\sigma_s = f(\varepsilon_i)$, то задача становится статически неопределимой.

4) Изменение скорости деформирования не влияет на решение методом линий скольжения.

5) Для решения практических задач методом линий скольжения необходимо знать условие на поверхности контакта между металлом и инструментом, т.е. трение. Здесь в основном рассматриваются два случая: либо трение приравнивается нулю, либо берется максимальным ($\tau_k = k$).

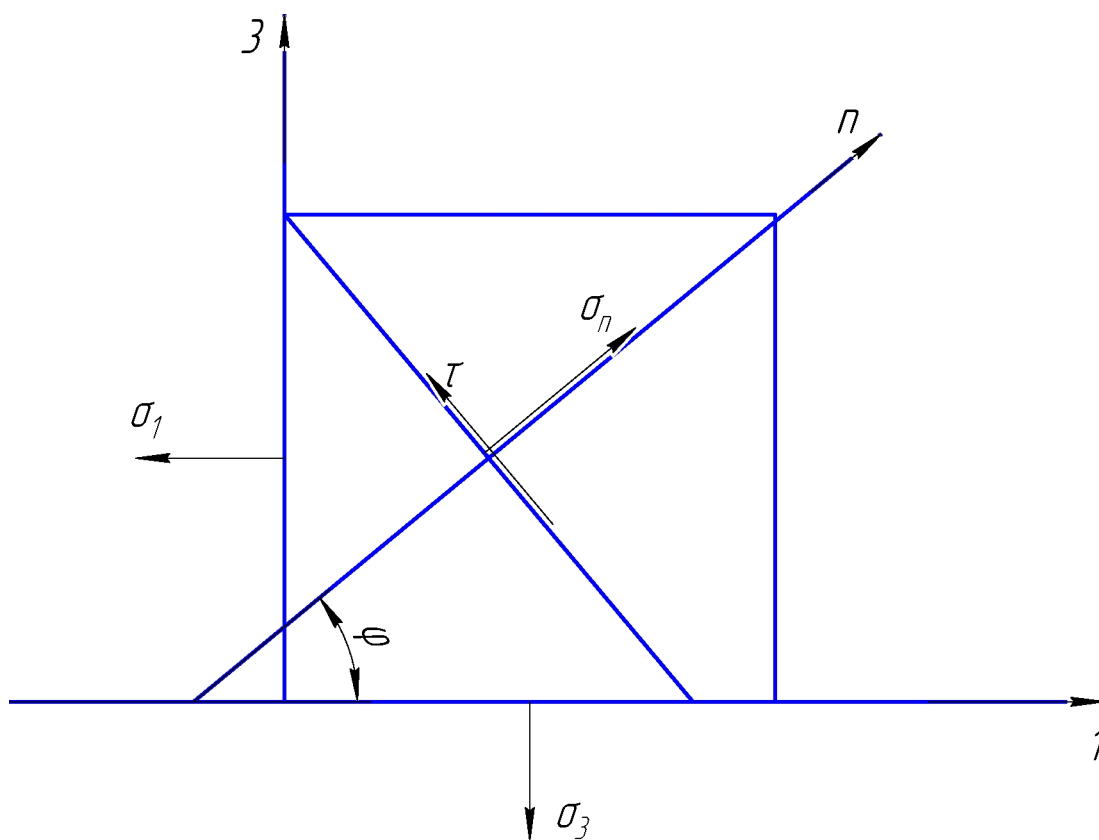
В данном случае известен угол выхода линий скольжения на контактную поверхность. Если $0 \leq \tau_k \leq k$, то и угол изменяется.

Несмотря на указанные ограничения, методом линий скольжения решены многие задачи для объемного деформирования и при деформации

листового материала.

ВЫВОД УРАВНЕНИЙ ЛЕВИ

Рассмотрим плоское деформированное состояние, когда $\varepsilon_2 = 0$. Выделим элементарный квадратный элемент, на гранях которого действуют нормальные напряжения σ_1 и σ_3 . Касательные напряжения на этих гранях отсутствуют.



Проведем произвольную наклонную площадку к осям 1 и 3. Данная площадка характеризуется нормалью n .

На данной наклонной площадке действуют σ_n и τ . Из теории напряжений известно, что нормальные напряжения σ_n и касательные напряжения τ на наклонной площадке определяются из выражений:

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2 ; \\ \tau^2 &= \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 - (\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2)^2 .\end{aligned}\quad (1)$$

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ - главные нормальные напряжения.

n_1, n_2, n_3 - направляющие косинусы выбранной площадки.

В нашем случае $n_1 = \cos \varphi, n_2 = \cos \frac{\pi}{2} = 0, n_3 = \cos(90 - \varphi) = \sin \varphi$.

Значения направляющих косинусов подставим в уравнение (1):

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \sigma_1 \cos^2 \varphi + \sigma_3 \sin^2 \varphi ; \\ \tau^2 &= \sigma_1^2 \cos^2 \varphi + \sigma_3^2 \sin^2 \varphi - \sigma_1^2 \cos^4 \varphi - 2\sigma_1 \sigma_3 \cos^2 \varphi \cdot \sin^2 \varphi - \sigma_3^2 \sin^4 \varphi ; \\ \tau^2 &= \sigma_1^2 \cos^2 \varphi (1 - \cos^2 \varphi) + \sigma_3^2 \sin^2 \varphi (1 - \sin^2 \varphi) - 2\sigma_1 \sigma_3 \cos^2 \varphi \cdot \sin^2 \varphi ; \\ \tau^2 &= (\sigma_1 - \sigma_3)^2 \cdot \cos^2 \varphi \cdot \sin^2 \varphi ; \\ \tau &= \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin 2\varphi .\end{aligned}$$

Таким образом:

$$\sigma_n = \sigma_1 \cos^2 \varphi + \sigma_3 \sin^2 \varphi ; \quad (2)$$

$$\tau = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin 2\varphi . \quad (3)$$

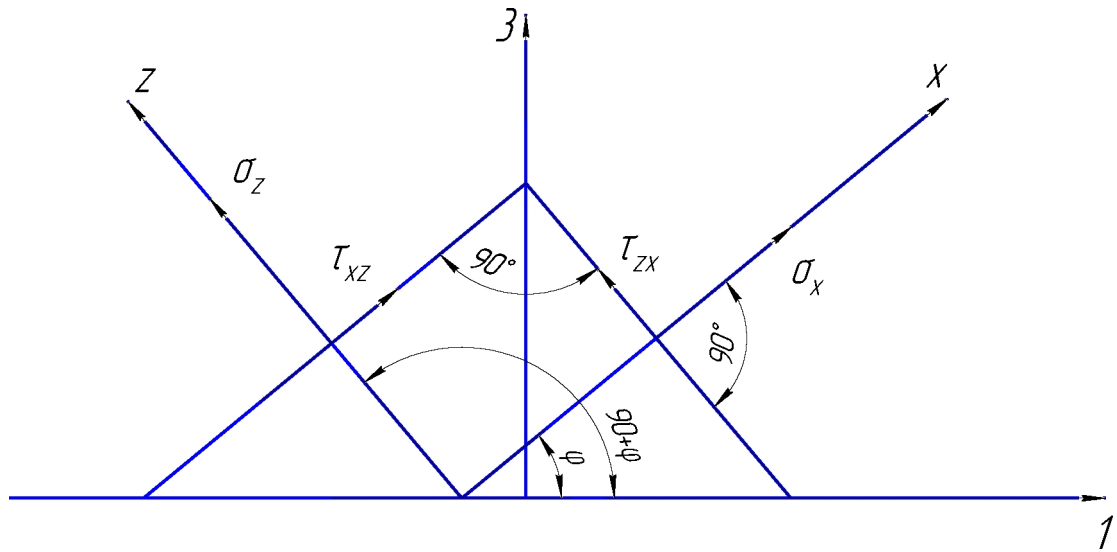
Выражение (2) можно преобразовать:

$$\begin{aligned}\cos^2 \varphi &= \frac{2\cos^2 \varphi}{2} = \frac{\cos^2 \varphi + \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi - \sin^2 \varphi}{2} = \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} ; \\ \sin^2 \varphi &= \frac{2\sin^2 \varphi}{2} = \frac{\sin^2 \varphi + \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi - \cos^2 \varphi}{2} = \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} ; \\ \sigma_n &= \sigma_1 \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} + \sigma_3 \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} ; \\ \sigma_n &= \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos 2\varphi .\end{aligned}$$

Тогда выражения (2) и (3) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos 2\varphi ; \\ \tau &= \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin 2\varphi.\end{aligned}\quad (4)$$

Наклонная площадка выбрана произвольно. Проведем ось x так, чтобы она совпала с нормалью n , тогда ось x составит с осью 1 угол φ , а ось z с осью 1 угол $90 + \varphi$.



Согласно рисунку уравнения (4) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos 2\varphi ; \\ \sigma_z &= \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos 2\varphi ; \\ \tau_{xz} &= \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin 2\varphi.\end{aligned}\quad (5)$$

При пластической деформации

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2k;$$

$$k = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}};$$

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \tau_{13} = k;$$

$$\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} = \sigma_{cp}.$$

Тогда уравнения (5) примут вид:

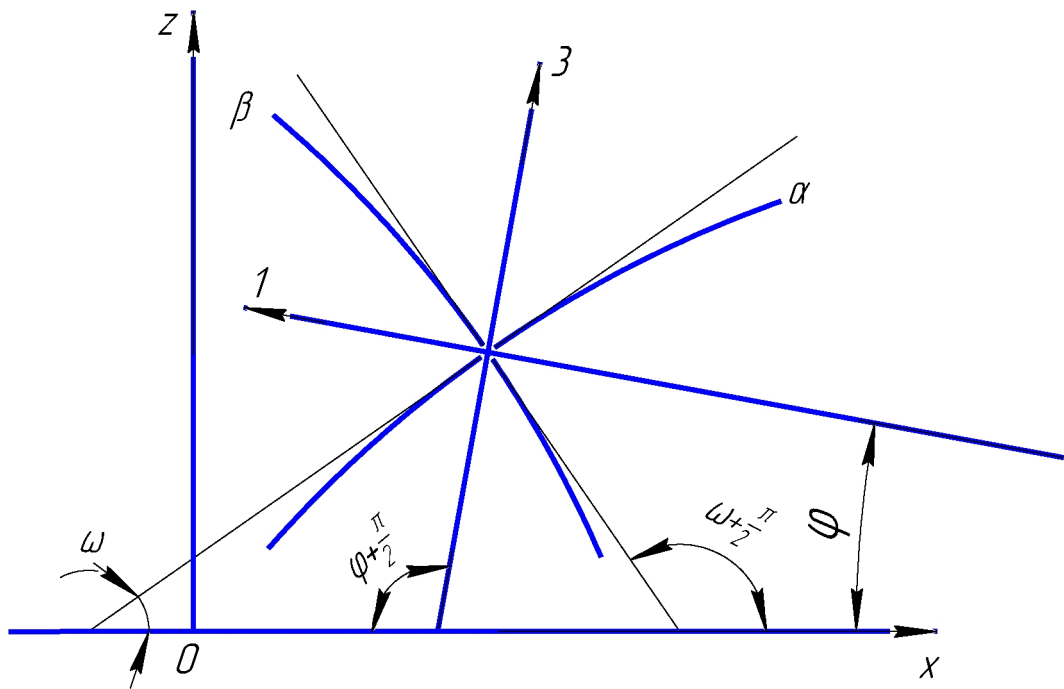
$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma_{cp} + k \cdot \cos 2\varphi ; \\ \sigma_z &= \sigma_{cp} - k \cdot \cos 2\varphi ; \\ \tau_{xz} &= \pm k \cdot \sin 2\varphi.\end{aligned}\tag{6}$$

Уравнения (6) удовлетворяют условию пластичности

$$(\sigma_x - \sigma_z)^2 + 4\tau_{xz}^2 = 4k^2.$$

Если в данное условие пластичности подставить выражение (6), то полученное уравнение превратится в тождество $4k^2 = 4k^2$. Это доказывает то, что уравнение (6) удовлетворяет условию пластичности.

Перейдем к линиям скольжения.



Углы φ и ω находятся в формульной связи, поэтому можно записать:

$$\omega = \varphi + \frac{\pi}{4}.$$

Запишем выражение (6), в котором угол φ заменим на угол ω :

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma_{cp} + k \cdot \sin 2\omega ; \\ \sigma_z &= \sigma_{cp} - k \cdot \sin 2\omega ; \\ \tau_{xz} &= -k \cdot \cos 2\omega.\end{aligned}\tag{7}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0.\end{aligned}\tag{8}$$
$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{cp}}{\partial x} + 2k \left(\cos 2\omega \frac{\partial \omega}{\partial x} + \sin 2\omega \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) &= 0; \\ \frac{\partial \sigma_{cp}}{\partial z} - 2k \left(\cos 2\omega \frac{\partial \omega}{\partial z} - \sin 2\omega \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) &= 0.\end{aligned}\tag{9}$$

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ЛЕВИ.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{cp}}{\partial x} + 2k(\cos 2\omega \frac{\partial \omega}{\partial x} + \sin 2\omega \frac{\partial \omega}{\partial z}) &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{cp}}{\partial z} - 2k(\cos 2\omega \frac{\partial \omega}{\partial z} - \sin 2\omega \frac{\partial \omega}{\partial x}) &= 0\end{aligned}$$

координат. За криволинейную систему координат возьмем сетку линий скольжения.

$o'\alpha$ и $o'\beta$ - возьмем за начальные линии. Любая точка, например А, характеризуется координатами α и β вдоль линии семейства β .

Системы координат xoz и $\alpha o'\beta$ находятся в функциональной зависимости. При перемещении т.А вдоль линии α координата β будет неизменна. И наоборот- при перемещении т.А вдоль линии β координата α остается постоянной.

Поместим начало координат системы xoz в т.А. Направим оси x и z вдоль касательных в т.А линий системы α и β . В бесконечно малой окрестности т.А

Элементы дуг системы α и β можно считать совпадающими с касательными, т.е. принять $dx=d\alpha$, $dz=d\beta$.

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \alpha}; \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \beta}$$

Теперь угол $\omega=0$, т.к. координата x совпадает с направлением линии скольжения. Однако, производные $\frac{\partial \omega}{\partial \alpha}$ и $\frac{\partial \omega}{\partial \beta}$ – в нуль не обращаются, т.к. ω изменяется при движении вдоль линии скольжения.

Учитывая сказанное, уравнение Леви можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{cp}}{\partial \alpha} + 2k \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{cp}}{\partial \beta} - 2k \frac{\partial \omega}{\partial \beta} &= 0 \end{aligned}$$

Для наглядности перепишем их в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} (\sigma_{cp} + 2k\omega) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial \beta} (\sigma_{cp} - 2k\omega) &= 0 \end{aligned}$$

(10)

Чтобы решить их, нужно 1-ое уравнение (10) проинтегрировать по α , а 2-ое по β . Учитывая, что уравнения (10) записаны в частных производных, решение будет иметь вид:

$$\sigma_{cp} + 2k\omega = 2k\eta(\beta)$$

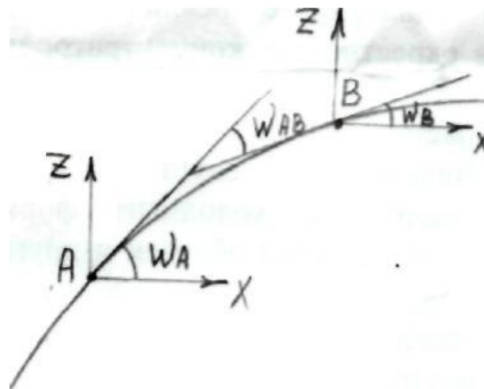
$$\sigma_{cp} - 2k\omega = 2k\xi(\alpha)$$

Здесь $2k\eta(\beta)$ и $2k\xi(\alpha)$ - произвольные постоянные интегрирования, причем $2k\eta(\beta)$ - функция координаты β , а $2k\xi(\alpha)$ - функция координаты α . Это особенность решения уравнений в частных производных.

При перемещении вдоль линии семейства α постоянная интегрирования $2k\eta(\beta)$ остается неизменной. Если перемещаться вдоль линии β , то будет 2-ая постоянная $2k\xi(\alpha)$ оставаться постоянной.

Таким образом, если известна геометрия линии скольжения, то можно найти величину среднего напряжения в любой ее точке.

Возьмем линию системы α и 2 точки А и В. Пусть в точках А и В известны величины среднего нормального напряжения, т.е. σ_{cpA} и σ_{cpB} .



Пусть в этих же точках известен ω , т.е. это угол между касательной в этой точке и осью X.

Решение уравнений Леви для т.А и т.В:

$$\sigma_{cpA} + 2k\omega_A = 2k\eta(\beta)$$

$$\sigma_{cpB} + 2k\omega_B = 2k\eta(\beta)$$

Приравнивая левые части полученных уравнений, получим:

$$\sigma_{cpA} + 2k\omega_A = \sigma_{cpB} + 2k\omega_B$$

$$\sigma_{cpA} - \sigma_{cpB} = 2k(\omega_B - \omega_A)$$

или

$$\sigma_{cpA} - \sigma_{cpB} = \pm 2k\omega_{AB}$$

где ω_{AB} - угол поворота от т.А до т.В вдоль линии скольжения α .

Основное свойство линии скольжения:

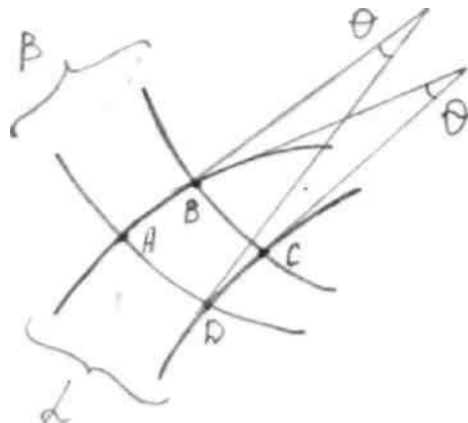
Среднее нормальное напряжение изменяется вдоль линии скольжения прямо пропорционально углу ее поворота. $2k$ - коэффициент пропорциональности ($k=\sigma_s/\sqrt{3}$ -для неупрочняемого тела). Зная среднее напряжение в каждой точке линии скольжения из выражения (7), можно определить $\sigma_x, \sigma_z, \tau_{xz}$. Следствие выведенного свойства: случай, когда линия скольжения представляет собой прямую линию. Тогда угол поворота такой линии в любой точке равен нулю и среднее напряжение вдоль линии остается постоянным, которое определяется из граничных условий.

СВОЙСТВА ЛИНИЙ СКОЛЬЖЕНИЯ.

1. Теорема Генки.

Угол между касательными к двум линиям скольжения одного семейства в точках пересечения их в каждой линии другого семейства остается постоянным.

Рассмотрим 2 линии α и 2 линии β :



Отметим точки ABCD. Определим разность средних напряжений в точках А и С, переходя от т.А к т.С или через т.В.

$$(\sigma_{срА} - \sigma_{срВ}) + (\sigma_{срВ} - \sigma_{срС}) = \sigma_{срА} - \sigma_{срС}$$

$$\sigma_{срА} - \sigma_{срВ} = -2k\omega_{AB}$$

$$\sigma_{срВ} - \sigma_{срА} = 2k\omega_{BC}$$

$$\text{Тогда } \sigma_{cpA} - \sigma_{cpC} = 2k(-\omega_{AB} + \omega_{BC})$$

При переходе от т.А к т.С через т.В, получим:

$$\sigma_{cpA} - \sigma_{cpC} = (\sigma_{cpA} - \sigma_{cpD}) + (\sigma_{cpD} - \sigma_{cpC}) = 2k(\omega_{AD} - \omega_{DC})$$

$$\omega_{AD} - \omega_{DC} = -\omega_{AB} + \omega_{BC}$$

Распишем угол ω в каждой точке:

$$\omega_A - \omega_B - \omega_D + \omega_C = \omega_B - \omega_C - \omega_A + \omega_D$$

$$2\omega_A - 2\omega_D = 2\omega_B - 2\omega_C$$

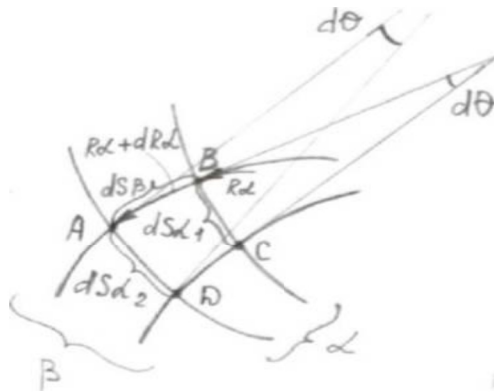
$$\omega_A - \omega_D = \omega_B - \omega_C = \theta$$

$$-\omega_{AB} - \omega_{DC} = \omega_{BC} - \omega_{AD}$$

С помощью этого свойства строим поле линий скольжения.

2. Вторая теорема Генки

При перемещении точки вдоль линии скольжения одного семейства радиусы кривизны линии скольжения другого семейства в точках пересечения с данной изменяются на величину пройденных расстояний. Для доказательства этого свойства возьмем 2 линии скольжения семейства α и 2 линии скольжения семейства β . Полученный криволинейный четырехугольник считаем бесконечно малым. Поэтому стороны такого четырехугольника можно заменить дугами окружности.



Длину дуги запишем через: $dS_{\alpha1} = R_{\alpha} \cdot d\theta$, длину дуги AD запишем через:

$$dS_{\alpha2} = (R_{\alpha} + dS_{\beta}) d\theta. \text{ Углы } d\theta \text{ равны между собой, тогда:}$$

$$dS_{\alpha2} = (R_{\alpha} + dR_{\alpha}) d\theta$$

$$dS_{\beta} = dR_{\alpha}.$$

3. Линии скольжения могут выходить как на свободную, так и на контактную поверхность.

Если трение на контактной или на свободной поверхности отсутствует, то линии скольжения обоих семейств выходят на поверхность под углом $\pi/4$.

$$\tau_{xz} = -k \cos 2\omega$$

$$\tau_k = \tau_{xz}$$

Если трение отсутствует $\tau_{xz} = 0$

$$-k \cos 2\omega = 0$$

$$\cos 2\omega = 0$$

$$\omega_{1,2} = \pm \pi/4.$$

Если трение на контактной поверхности максимальное:

$$\tau_{xz} = k$$

$$k = -k \cos 2\omega$$

$$\cos 2\omega = 1$$

$$\omega_1 = 0; \omega_2 = \pm \pi/2.$$

При промежуточном значении контактного трения:

$$0 \leq \tau_{xz} \leq k$$

$$\pm \pi/4 \leq \omega \leq \pm \pi/2.$$

4. Линии скольжения- непрерывны.

5. они образуют 2 взаимноортогональных семейства.

6. Линии скольжения пересекают траектории главных напряжений под углом $\pi/4$.

7. Изменение среднего напряжения вдоль линий скольжения пропорционально углу ее поворота.

Существует ряд способов построения полей линий скольжения:

1) Поле строится по свойствам линий скольжения. Этот метод требует от исследователя интуиции и хорошее знание предмета.

2) Аналитический способ построения линий скольжения (метод характеристик).

3) Графическое построение линий скольжения.

МЕТОД ХАРАКТЕРИСТИК.

Запишем уравнения Леви:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{cp}}{\partial x} + 2k(\cos 2\omega \frac{\partial \omega}{\partial x} + \sin 2\omega \frac{\partial \omega}{\partial z}) &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{cp}}{\partial z} - 2k(\sin 2\omega \frac{\partial \omega}{\partial x} - \cos 2\omega \frac{\partial \omega}{\partial z}) &= 0\end{aligned}$$

(1)

В приведенных уравнениях (1) неизвестными являются: σ_{cp} и угол поворота линий скольжения ω . Аналитическое решение данных уравнений затруднено из-за того, что в эти уравнения входят частные производные. Однако решение этих уравнений принципиально возможно. Исключим из уравнения (1) напряжение σ_{cp} . Для этого 1-ое уравнение продифференцируем по z , 2-ое- по x и из 1-ого уравнения вычитаем 2-ое.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \sigma_{cp}}{\partial z \partial x} + 2k \left[-2 \sin 2\omega \frac{\partial \omega}{\partial z} \frac{\partial \omega}{\partial x} + \cos 2\omega \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial z} + 2 \cos 2\omega \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} \right)^2 + \sin 2\omega \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} \right] - \frac{\partial^2 \sigma_{cp}}{\partial z \partial x} - \\ - 2k \left[2 \cos 2\omega \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 + \sin 2\omega \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + 2 \sin 2\omega \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial z} - \cos 2\omega \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial z} \right] = 0\end{aligned}$$

После преобразований получим уравнение:

$$-\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} + 2 \operatorname{ctg} 2\omega \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial z} - 4 \frac{\partial \omega}{\partial x} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial z} + 2 \operatorname{ctg} 2\omega \left[\left(\frac{\partial \omega}{\partial z} \right)^2 - \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 \right] = 0 \quad (2)$$

Уравнение (2)- квазилинейное д.у. в частных производных 2-ого порядка. В общем виде уравнение (2) записывается следующим образом:

$$A \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial z} + C \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} + F(x, z, \omega, \frac{\partial \omega}{\partial x}, \frac{\partial \omega}{\partial z}) = 0 \quad (3)$$

Тогда уравнение в обыкновенных производных:

$$A dz^2 - 2B dx dz + C dx^2 = 0 \quad (4)$$

будет являться уравнением характеристик уравнения (3). Решения уравнения (4) называют характеристиками. Составим уравнение характеристик для д.у.(2):

$$-dz^2 - 2ctg2\omega dx dz + dx^2 = 0$$

Или это уравнение можно записать:

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + 2ctg2\omega \frac{dz}{dx} - 1 = 0$$

Решая полученное уравнение относительно $\frac{dz}{dx}$, получим:

$$\frac{dz}{dx} = -ctg2\omega \pm \sqrt{ctg^2 2\omega + 1} = -\frac{\cos 2\omega}{\sin 2\omega} \pm \frac{1}{\sin 2\omega}$$

Отсюда находим 2 д.у. характеристик основного уравнение (2):

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dx} &= \frac{1 - ctg2\omega}{\sin 2\omega} = \frac{2\sin^2 \omega}{2\sin \omega \cos \omega} = tg\omega \\ \frac{dz}{dx} &= \frac{1 + ctg2\omega}{\sin 2\omega} = -\frac{2\cos^2 \omega}{2\sin \omega \cos \omega} = -ctg\omega \end{aligned}$$

(5)

Сравнивая д.у.(5) и д.у. линий скольжения, можно сделать вывод, что линии скольжения полностью совпадают с характеристиками. Решение уравнений характеристик осуществляется преимущественно с приведением их к канонической форме путем замены переменных x и z на ξ и η .

Запишем интегралы Генки:

$$\sigma_{cp} + 2k\omega = 2k\eta(\beta)$$

$$\sigma_{cp} - 2k\omega = 2k\xi(\alpha) \quad (6)$$

Примем $\eta = \eta(\beta)$; $\xi = \xi(\alpha)$

Тогда из уравнений (6) сначала исключим величину σ_{cp} , а затем ω .

$$\omega = 0,5(\eta - \xi)$$

$$\sigma_{cp} = k(\eta + \xi)$$

$$(\eta + \xi) = \sigma_{cp} / k$$

Коэффициенты x и z являются функциями координат α и β . Тогда x и z - координаты ξ и η . Поэтому имеют место производные: $\frac{\partial x}{\partial \eta}, \frac{\partial z}{\partial \xi}$

Выражение (5) преобразуем. 1-ое умножим на $\frac{\partial x}{\partial \eta}$, а 2-ое на $\frac{\partial z}{\partial \xi}$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} &= \frac{\partial x}{\partial \eta} \operatorname{tg} \omega \\ \frac{dz}{dx} \frac{dz}{d\xi} &= -\frac{dz}{d\xi} \operatorname{ctg} \omega\end{aligned}\quad (7)$$

Заменяя знаки производных, 2-ое уравнение умножаем на dx и делим на dz , окончательно получим:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial \eta} &= \frac{\partial x}{\partial \eta} \operatorname{tg} \omega; \quad \frac{\partial z}{\partial \xi} = -\frac{\partial x}{\partial \xi} \operatorname{ctg} \omega \\ \omega &= 0,5(\eta - \xi); \quad \sigma_{cp} = k(\eta + \xi)\end{aligned}\quad (8)$$

Уравнения (8) обычно решаются численным интегрированием, в параметрическом виде:

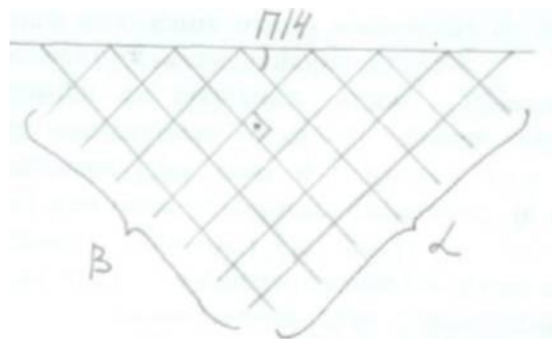
$$x = f_1(\eta, \xi); \quad z = f_2(\eta, \xi)$$

Линии скольжения строятся по координатам точек.

ВИДЫ ПОЛЕЙ ЛИНИЙ СКОЛЬЖЕНИЯ

Все поля можно разделить на: простейшие, простые, поля общего случая.

1) Простейшее поле состоит из 2-х семейств прямых линий. Углы поворота таких линий скольжения равны нулю. Среднее напряжение σ_{cp} вдоль линии скольжения постоянно и определяется из граничных условий. Простейшее поле имеет место у свободной прямолинейной границы или находящейся под равномерно распределенной нагрузкой.

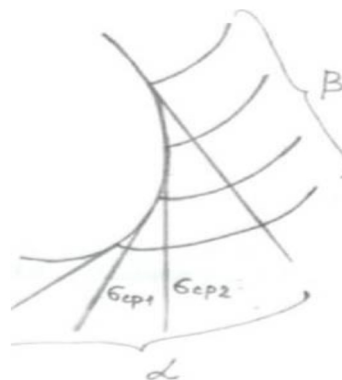


$$\eta, \xi = \text{const}$$

Такое поле выражает равномерное (однородное) напряженное состояние.

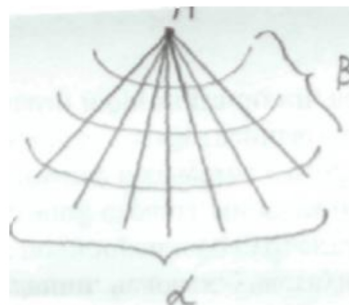
2) Простое поле- одно семейство состоит из прямых линий, а другое из плавных кривых.

$$\eta = \text{const}; \xi = \text{var}$$



Вдоль прямых линий системы α среднее напряжение постоянно. Однако при переходе от одной линии системы α к другой по линии β среднее напряжение изменяется.

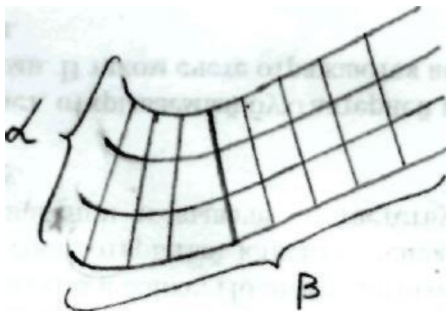
Частным случаем простого поля является центрированное поле - когда одно семейство представляет собой лучи, исходящие из одной точки, а другое семейство концентрические окружности.



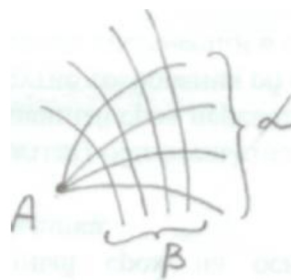
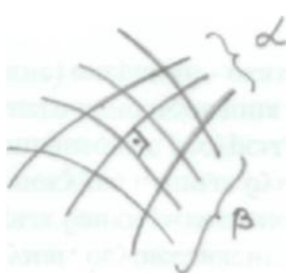
Среднее напряжение изменяется, но все лучи сходятся в т.А. т.А-особая точка. В этой точке напряжение теоретически не имеет

единственного значения. Но эта точка удовлетворяет и уравнению равновесия и условию пластичности.

В области, примыкающей к области равномерного напряженного состояния поле линий скольжения возможно только простое.

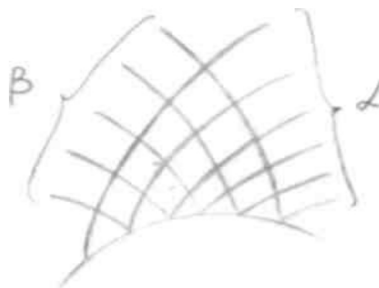


3) К общему случаю полей линий скольжения относятся поля, состоящие из 2-х семейств плавных кривых. Эти кривые могут быть циклоидами, логарифмическими спиралями и более сложными плавными кривыми.



В таких полях возможны случаи, когда одно семейство плавных прямых линий будет пересекаться в одной точке (A).

Поле линий скольжения по круговой границе, находящееся под равномерно распределенной нагрузкой или свободной нагрузкой, поле линий скольжения представляет собой логарифмические спирали.

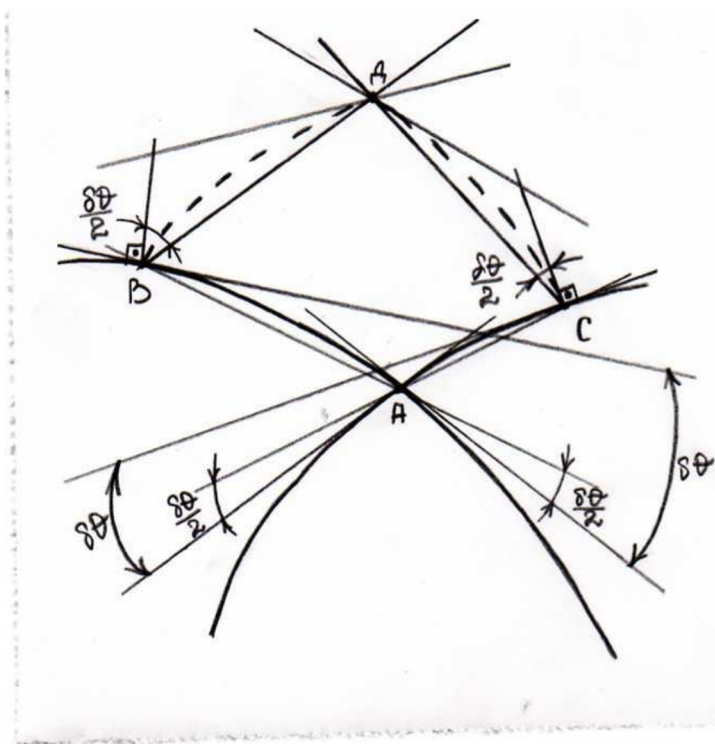


ГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ СЕТОК ЛИНИЙ СКОЛЬЖЕНИЯ

Для получения большой точности рекомендуется применять графические методы. Из них наиболее удобными являются метод «секущей» и «клиновой» метод.

Сетка линий скольжений строится от точки к точке. Угол изменения направления берется постоянным и равен 5° или 10° .

Метод «секущей»



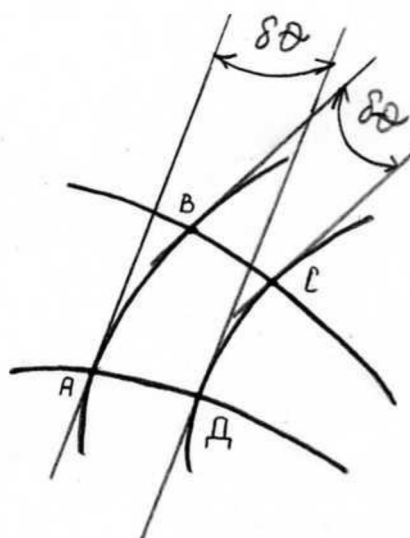
Пусть известна одна линия скольжения семейства α и одна линия скольжения семейства β . Линии скольжения пересекаются в точке A.

Проведем в точке A касательные к линии скольжения α и β , под углом $\frac{\delta\theta}{2}$ ($\delta\theta$ – Выбранный угловой параметр. 5° или 10°). К касательным проводим хорды. Хорды пересекают линии скольжения в точках B и C.

К касательным проведенным в точках В и С проведем нормали. К этим нормальям под углом $\frac{\delta\theta}{2}$, в точке Д проведем 2 касательные, которые с нормальями в точках В и С, дали бы угол $\delta\theta$.

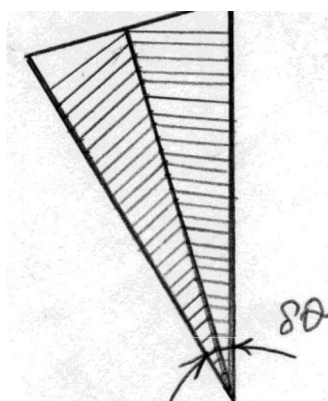
Плавные прямые можно заменить прямыми линиями, т.к. угол поворота задан ($\delta\theta$) и мы можем определить среднее напряжение, переходя от точки к точке.

«Клиновой метод»

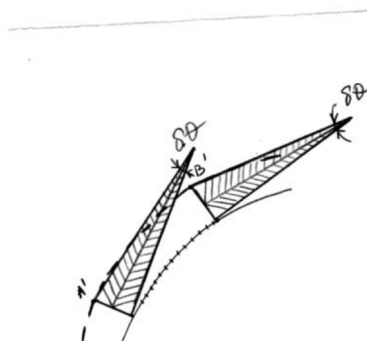


Из рисунка видно, что криволинейный четырехугольник ABCD образован двумя линиями. При построении линий скольжения клиновым методом, необходимо чтобы была известна хотя бы одна линия скольжения.

Далее из плотной бумаги вырезают клин с центральным углом $\delta\theta$, на клиньях проводят разметку (1-2 мм).



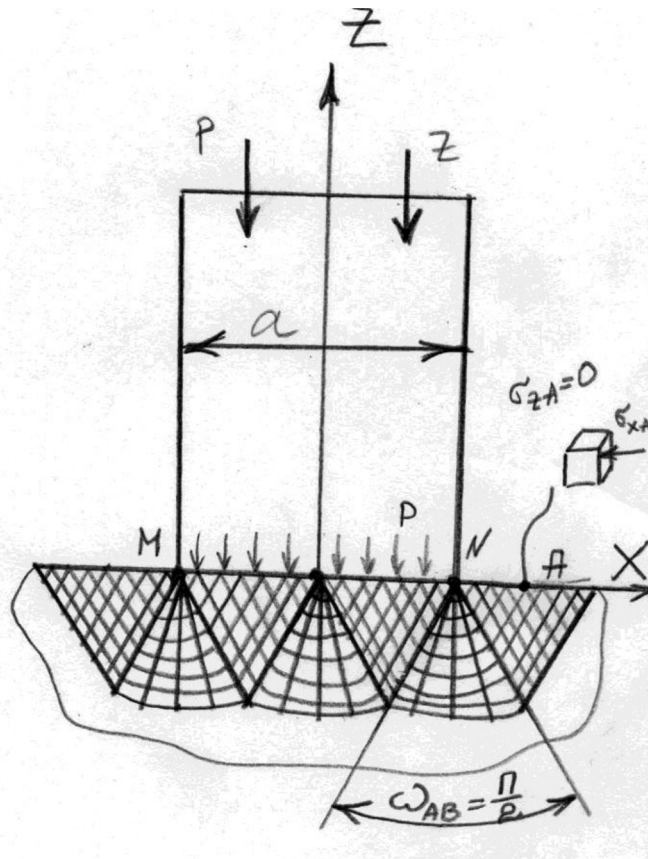
По известной линии скольжения клин скользит как по касательной, оставаясь все время касательным к новой линии скольжения. Т.о., строим поле линий скольжения первого семейства.



Если известна одна линия скольжения другого семейства, то по аналогии строится линия другого семейства.

Пример. Построить поле линии скольжения, при внедрении прямоугольного пуансона в плоское полупространство, в условиях плоской деформации, при отсутствии трения на контактной поверхности.

Определить равномерно распределенную нагрузку на контактной поверхности пуансона для начального момента внедрения при условии, что металл под пуансоном перешел в пластическое состояние.



$$l \square a; \mathcal{E}_y = 0; \tau_k = 0.$$

1. Построим поле линий скольжения

Контактная поверхность MN между пуансоном и металлом прямолинейная и нагружена равномерно – распределенной нагрузкой, следовательно под линией MN реализуется простейшее поле линии скольжения, состоящее из прямых линий, входящих на контактной поверхности под углом $\frac{\pi}{4}$, т.к. трение отсутствует.

Слева от точки M и справа от точки N, граница тела прямолинейная, свободная от нагрузки, трение на этой границе поля отсутствует, тогда в этих местах реализуются простейшие линии скольжения, также состоящие из прямых линий.

Между простейшими полями линий скольжения всегда расположены простые поля, которые состоят из прямых линий одного семейства и кривых линий другого семейства.

Рассмотрим любую линию скольжения, которая начиналась на свободной поверхности (проекция точки А) и заканчивалась на контактной поверхности (проекция точки В).

2. Запишем среднее напряжение в точке А:

$$\sigma_{cpA} = \frac{\sigma_{xA} + \sigma_{zA}}{2}$$

Запишем условие пластичности в точке А:

$$\sigma_{zA} - \sigma_{xA} = 2k, \text{ где } k\text{-постоянная пластичности.}$$

$$k = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}.$$

$$\sigma_{zA} = 0, \text{ следовательно } \sigma_{xA} = -2k.$$

$$\sigma_{cpA} = \frac{-2k + 0}{2} = -k.$$

Запишем среднее напряжение в точке В:

$$\sigma_{cpB} = \frac{\sigma_{xB} + \sigma_{zB}}{2}.$$

Запишем уравнение пластичности в точке В:

$$\sigma_{xB} - \sigma_{zB} = 2k$$

$$\sigma_{zB} = -P,$$

$$\sigma_{xB} = 2k - P,$$

$$\sigma_{cpB} = \frac{2k - P - P}{2} = k - P.$$

Запишем основное свойство линий скольжения:

$$\sigma_{cpA} - \sigma_{cpB} = 2k\omega_{AB}.$$

Из геометрии линий скольжения видно, что угол поворота равен $\frac{\pi}{2}$.

$$-k - k + p = 2k \frac{\pi}{2},$$

$$P = 2k \frac{\pi}{2} + 2k,$$

$$P = 2k(1 + \frac{\pi}{2}) = \frac{2\sigma_s}{\sqrt{3}}(1 + \frac{\pi}{2}),$$

$$P = \sigma_s(1 + \frac{\pi}{2}).$$

МЕТОД БАЛАНСА РАБОТ

Основы метода баланса работ

Приоритет вывода формул для определения деформирующего усилия принадлежит Петрову Н.С., который в 1914 году предложил оригинальный способ определения деформирующего усилия, который впоследствии был назван: «Метод баланса работ» или «Метод работ».

Впоследствии этот метод был использован Перлиным И.Л. для расчета усилия прессования, а для прокатки – Выдриным В.Н.

Метод баланса работ в основном применим для определения деформирующего усилия. Данный метод имеет почти те же допущения, что и инженерный метод.

Метод баланса работ является частным энергетических методов. Он базируется на законе сохранения энергии.

Основные положения метода

При пластической деформации работа внешних сил на соответствующих перемещениях равна работе внутренних сил.

$$A_B = A_D \text{ или } A_B - A_D = 0$$

(1)

A_B – работа внешних сил;

A_D – работа внутренних сил.

Работа внешних сил, включая работу сил трения, можно записать в общем виде:

$$A_B = \iint_F (X \cdot U_x + Y \cdot U_y + Z \cdot U_z) dF$$

X, Y, Z – проекция внешних сил на координатные оси;

U_x, U_y, U_z – перемещение по соответствующим координатным осям.

Работу внешних сил, можно представить как алгебраическую сумму работы активных сил и сил трения:

$$A_B = A_a - A_{тр} \quad (2)$$

A_a – работа активных сил;

$A_{тр}$ – работа сил трения.

Выражение (2) подставим в выражение (1) и выразим работу активных сил:

$$A_a = A_d + A_{тр} \quad (3)$$

В методе баланса работ величиной упругой деформации пренебрегают. Обязательно используется условие постоянства объема. Т.О., работа внутренних сил представляет собой работу деформации формы. Данная работа определяется как скалярное произведение компонентов деформации на компоненты соответствующих напряжений.

Пусть для элементарного объема dV величина работы внутренних сил dA_d запишется в следующем виде:

$$dA_d = (\varepsilon_1 \sigma_1 + \varepsilon_2 \sigma_2 + \varepsilon_3 \sigma_3) dV \quad (4)$$

Выразим деформацию через напряжение с помощью уравнений связи:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E'} \left[\sigma_1 - \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3) \right] \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E'} \left[\sigma_2 - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) \right] \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E'} \left[\sigma_3 - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \right] \end{aligned} \quad (5)$$

Выражение (5) подставляем в выражение (4) учитывая, что $E' = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}$

- модуль пластичности первого рода.

Тогда,

$$dA_D = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1) dV$$

(6)

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}$$

Перепишем выражение (6) в следующем виде:

$$dA_D = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] dV$$

(7)

Учитывая, что $\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$ окончательно

получаем:

$$dA_D = \sigma_i \varepsilon_i dV$$

$$A_D = \iiint_V \sigma_i \varepsilon_i dV$$

(8)

Работу сил трения можно определить из выражения:

$$A_T = \iint_F \sqrt{\tau_{kx}^2 \cdot u_x^2 + \tau_{ky}^2 \cdot u_y^2 + \tau_{kz}^2 \cdot u_z^2} dF$$

(9)

$\tau_{kx}, \tau_{ky}, \tau_{kz}$ - проекции сил трения на координатные оси.

Поверхность контакта обычно характеризуется двумя контактами, поэтому одна из проекции в выражении (9) равна нулю.

Работу активных сил в случае осадки можно представить как произведение постоянного усилия на перемещение инструмента:

$$A_a = P \cdot \Delta h$$

(10)

Выражения (8), (9), (10) подставляем в выражение (3). Полученное выражение решим относительно величины P , следовательно

$$P = \frac{1}{\Delta h} \left[\iiint_V \varepsilon_i \sigma_i dV + \iint_F \sqrt{\tau_{kx}^2 u_x^2 + \tau_{ky}^2 u_y^2 + \tau_{kz}^2 u_z^2} dF \right]$$

(11)

Для решения уравнения (11) необходимо ввести ряд допущений. Само выражение (11) представляет собой определение деформирующего усилия метода баланса работ.

Основные допущения метода баланса работ

1. Для решения выражения (11) задачу приводим к одному из частных случаев напряженно-деформированного состояния (осесимметричное и плоско-деформированное напряженное состояния).

При этом появляется возможность использовать гипотезу плоских сечений.

2. Если тело считать неупрочняемым, то интенсивность напряжения равна $\sigma_s = const$, тогда работу внутренних сил можно записать:

$$A_D = \sigma_s \iiint_V \varepsilon_i dV$$

Если тело упрочняется, то интенсивность напряжения равна интенсивности деформации, и решение данного интеграла затрудняется.

$$\sigma_i = f(\varepsilon_i).$$

3. Трение на контактной поверхности считаем постоянным и изотропным:

$$\tau_k = \tau_{kx} = \tau_{ky} = \tau_{kz} = const.$$

Тогда работа сил трения запишется:

$$A_{mp} = \tau_k \iint_F \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2} dF.$$

4. Деформацию принимаем равномерной по всему объему заготовки, хотя наличие трения на контактной поверхности в действительности приводит к неравномерности деформации.

Приведенные выше допущения позволяют записать выражение (11) в виде:

$$P = \frac{1}{\Delta h} \left[\sigma_s \iiint_V \varepsilon_i dV + \tau_k \iint_F \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2} dF \right] \quad (12)$$

В выражении (12) интенсивность деформации ε_i запишется через перемещение, используя деформационные зависимости Коши. И всё выражение (12) решается через перемещение.

В методе баланса работ допущения совпадают с допущениями инженерного метода. Величина трения здесь берется max.

МЕТОД СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛА ПЛАСТИЧЕСКИМ ДЕФОРМАЦИЯМ (СМПД)

Данный метод был разработан отечественным ученым Смирновым – Аляевым А.Ф. и его учениками. Данный метод относится к ленинградской школе ОМД.

Методом СМПД можно решить следующие классы задач:

1. Определение деформационного усилия по заданному формоизменению. (Определение напряженного состояния по заданному деформирующему состоянию).
2. Определение деформации по заданной нагрузке или заданной работе внешних сил. (Определение деформирующего состояния по известному напряженному состоянию).
3. Определение формы тела на промежуточных этапах деформирования по известному конечному формоизменению.

Для использования метода СМПД необходимо выполнить 3 условия:

1. При условии монотонности или приближенной монотонности деформации главные оси напряжений, совпадают с

главными осями деформации. Условие монотонности деформации заключается в том, что на всем протяжении деформации от начального до конечного состояния наибольшее или наименьшее удлинение (укорочение) испытывают одни и те же материальные волокна в рассматриваемой материальной точке.

Если условие монотонности выполняется, то в уравнении связи между напряжениями и деформациями, вместо малой деформации ε можно использовать конечную логарифмическую деформацию e и уравнение связи будет иметь вид:

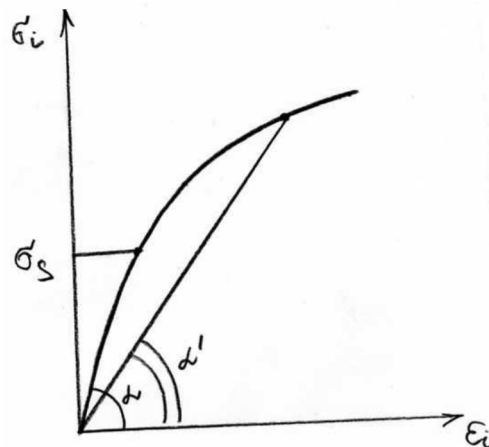
$$\frac{e_1 - e_2}{\sigma_1 - \sigma_2} = \frac{e_2 - e_3}{\sigma_2 - \sigma_3} = \frac{e_3 - e_1}{\sigma_3 - \sigma_1} = \frac{1}{2G'} = \rho'$$

ρ' - коэффициент пропорциональности,

G' - модуль пластичности второго рода.

Модуль деформации второго рода

Рассмотрим зависимость между σ_i и e_i .



При упругой деформации:

$$G = \frac{1}{2(1 + \mu)} E,$$

где G – модуль упругости второго рода,

μ - коэффициент Пуассона,

E – модуль упругости первого рода (Юнга).

Для пластической деформации и изотропии тела $\mu = \frac{1}{2}$, тогда

$$G' = \frac{E'}{3},$$

где E' – модуль пластичности первого рода.

$$E' = tg\alpha' = \frac{\sigma_i}{e_i},$$

$$\rho' = \frac{1}{2G'} = \frac{3}{2E'} = \frac{3}{2} \frac{e_i}{\sigma_i}.$$

При монотонности деформации деформационное состояние может характеризоваться показателем:

$$\nu_e = \frac{2e_2 - e_1 - e_3}{e_1 - e_3}.$$

Другими словами, при монотонности деформации две материальные точки, либо все время приближаются друг к другу, в процессе деформации, либо удаляются друг от друга. Монотонность деформации значительно облегчает анализ процесса, особенно при деформации с упрочнением.

Немонотонность деформации может не только создать серьезные затруднения, но и сделать иногда задачу нерешаемой, даже грубо приближенную.

2. Коэффициент пропорциональности ρ' должен быть функцией работы изменения форм:

$$\rho' = f_1(A_\phi).$$

Связь между коэффициентом пропорциональности ρ' и работы изменения форм A_ϕ установлена Смирновым-Аляевым на основе обширных экспериментов.

$$\rho' = \frac{3}{2} \frac{e_i}{\sigma_i},$$

$$e_i = \frac{2}{3} \rho' \sigma_i,$$

$$e_i = f_1(A_\phi) \cdot f_3(A_\phi),$$

$$\sigma_i = f_3(A_\phi),$$

$$e_i = f_2(A_\phi).$$

Функциональная зависимость $F(\sigma_i, e_i) = 0$ устанавливается экспериментально на основе испытаний на линейное растяжение или сжатие.

Построенные графики, которые называются кривыми упрочнения, можно аппроксимировать с помощью математических выражений (линейная, степенная).

3. Напряженное и деформированное состояния, рассмотренные в данном методе в полном соответствии одно с другим. При этом напряжении тензор напряжения ν_σ равняется напряженному тензору деформации ν_e .

$$\begin{aligned}\nu_\sigma &= \nu_e, \\ \nu_\sigma &= \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} = \frac{2e_2 - e_1 - e_3}{e_1 - e_3} = \nu_e \\ \sigma_1 &\geq \sigma_2 \geq \sigma_3; \quad e_1 \geq e_2 \geq e_3.\end{aligned}$$

Общий ход решения задачи методом СМПД

1. В деформируемом теле выделяют достаточно малые частицы (участки) представляющие наибольший интерес, чем меньше рассмотренная частица, тем ближе мы подходим к монотонности в процессе деформации. Обычно заготовку на элементарные частицы делят с помощью объемной координатной сетки. Если рассмотреть поверхность заготовки, то эта поверхность делится на отдельные участки с помощью координатной сетки.

Координатная сетка выполняется в виде прямоугольных и круглых ячеек.

По размерам ячейки до и после деформации определяются 3 деформации: e_1, e_2, e_3 .

2. По величинам конечных деформаций рассматриваемой частицы определяют показатель деформируемого состояния равный показателю напряженного состояния.

$$\nu_e = \frac{2e_2 - e_1 - e_3}{e_1 - e_3} = \nu_\sigma$$

Если рассмотреть анизотропное тело, то связь между ν_e и ν_σ однозначная, которая выражается через коэффициенты анизотропии.

3. Определяем коэффициент Лодэ из выражения:

$$\beta = \frac{2}{\sqrt{3 + \nu_\sigma^2}}.$$

4. Для нахождения компонента напряжения имеем следующие уравнения:

$$\text{Условие пластичности:} \quad \sigma_1 - \sigma_3 = \beta \cdot \sigma_i.$$

Уравнение связи между напряжениями и деформациями:

$$\frac{e_1 - e_2}{\sigma_1 - \sigma_2} = \frac{e_2 - e_3}{\sigma_2 - \sigma_3} = \frac{e_3 - e_1}{\sigma_3 - \sigma_1} \quad \text{или} \quad 2 \cdot \sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3 = \nu_\sigma \cdot (\sigma_1 - \sigma_3).$$

Если напряжение имеется на свободной поверхности заготовки, то напряжение перпендикулярное поверхности заготовки и для определения двух других данных уравнений достаточно.

Если необходимо определить три нормальных напряжения, то к приведенным уравнениям добавляется условие равновесия (уравнение равновесия). Уравнение равновесия рассматривается для выделенной частицы, переходя от частицы к частице, определяется напряженное состояние тела в целом.

Если тело неупрочняемое, то:

$$\sigma_i = \sigma_s = \text{const}.$$

Если тело упрочняемое, то необходимо установить зависимость между интенсивностями напряжения и деформации:

$$\sigma_i = f(e_i).$$

Данная зависимость устанавливается при испытании образца из рассматриваемого металла, испытание может быть линейное растяжение или линейное сжатие. Строится кривая упрочнения - рисунок 1.

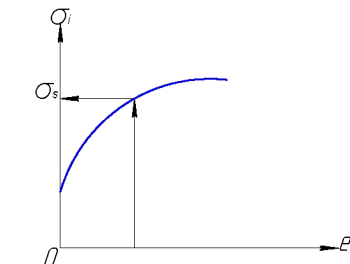


Рисунок 1. Кривая упрочнения

По трем деформациям определяется интенсивность деформации:

$$e_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \sqrt{(e_1 - e_2)^2 + (e_2 - e_3)^2 + (e_3 - e_1)^2}.$$

По кривой упрочнения определяем предел текучести для данной степени деформации. Кривая упрочнения может быть задана в виде линейной или степенной аппроксимации:

$$\sigma_s = \sigma_{so} + \Pi \cdot \varepsilon_i;$$

$$\sigma_s = k \cdot e_i^n,$$

где σ_{so}, Π, k, n - определяются через механические свойства материала по формулам, используя коэффициенты δ, ψ, σ_s .

ОСНОВЫ ВАРИАЦИОННОГО МЕТОДА.

Основоположниками вариационных методов в России являются Тарновский И.Я. и его ученики.

Основные положения вариационного метода.

Вариационные методы расчета параметров процессов пластического деформирования основаны на энергетическом принципе. Данный энергетический принцип можно сформулировать следующим образом:

действительная форма равновесия пластически деформируемого тела отличается от всех других возможных форм тем, что сообщает полное энергии формоизменение минимальное значение.

Инженерный метод заключается в интегрировании исходных уравнений равновесия и пластичности. Метод линий скольжения заключается в построении полей линий скольжения, а затем, опираясь на

свойства скольжения, определяется напряженное состояние по объему тела.

Суть вариационных методов заключается в отыскании таких функций распределения деформаций и напряжений, которые сообщают минимальное значение некоторому функционалу (полная энергия деформации). Данным методом можно не только определить полное и удельное усилие деформирования, но и распределение напряжений и деформаций по объему тела, а также можно определить форму тела после деформации даже с учетом неравномерности деформации.

Определение: Вариация δy функции $y = y(x)$ есть функция от x , определяемая при каждом значении x как разность новой функции $Y(x)$ и рассматриваемой функции $y(x)$, т.е.

$$\delta y = Y(x) - y(x).$$

Определение: Введем понятие функционала. Пусть дан класс функций: $y = y(x)$. Величина $J = J[(y(x))]$ называется функционалом, если каждому значению функции $y(x)$ соответствует вполне определенное значение функционала J . Если функция $y = y(x)$ является функцией точки, то функционал $J = J[(y(x))]$ является функцией линии или, иначе говоря, функционал есть функция от класса функций. В вариационных методах применительно к ОМД в качестве функционала выступает полная энергия деформации.

В данном методе используются вариационные уравнения. Эти уравнения выражают основной энергетический принцип механики сплошных сред. Данный принцип также можно сформулировать следующим образом:

Сумма работ всех внешних и внутренних сил на возможных перемещениях около состояния равновесия равна 0.

РАБОТЫ ВНУТРЕННИХ И ВНЕШНИХ СИЛ.

Работа внутренних сил.

Определение: под действием внешних сил в теле возникают напряжения, которые обычно называют внутренними силами:

$$A_D = \iiint_V \sigma_i \cdot \varepsilon_i dV,$$

где σ_i и ε_i - интенсивности нормальных напряжений и линейных деформаций соответственно, V - объем тела.

В вариационном методе обычно вместо интенсивности нормальных напряжений σ_i берут интенсивность касательных напряжений T :

$$T = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6 \cdot (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} = \frac{\sigma_i}{\sqrt{3}}.$$

Вместо интенсивности линейных деформаций (ε_i) используют интенсивность деформации сдвига (или интенсивности угловых деформаций):

$$\Gamma = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2} \cdot (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)} = \sqrt{3} \cdot \varepsilon_i,$$

следовательно,

$$\sigma_i \cdot \varepsilon_i = T \cdot \Gamma,$$

т.о. работа внутренних сил

$$A_D = \iiint_V T \cdot \Gamma dV.$$

Если принять металл неупрочняемым, т.е. $\sigma_s = const$, то получаем:

$$T = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}} = k,$$

следовательно,

$$A_D = k \cdot \iiint_V \Gamma dV.$$

Работа внешних сил.

Работа внешних сил всегда считается положительной. Силы, приложенные извне, совершают работу внешних сил. Работу внешних сил можно разделить на работу активных сил (тоже положительных) и на работу сил трения (которые всегда отрицательны). В общем виде работу внешних сил можно записать выражением:

$$A_B = \iint_F (X \cdot U_x + Y \cdot U_y + Z \cdot U_z) dF,$$

где X, Y, Z – проекции внешних сил на соответствующие оси координат;

U_x, U_y, U_z – перемещения точек тела по координатным осям. Введем в рассмотрение локальную систему координат. Система выбирается таким образом, чтобы одна из координатных осей была перпендикулярна внешней поверхности тела, а две других координатных оси лежали бы в касательной плоскости поверхности тела.

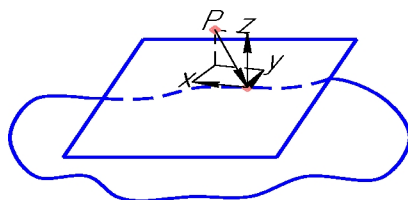


Рисунок 2. Разложение внешней нагрузки по координатным осям.

Любую внешнюю нагрузку можно разложить на три составляющие по координатным осям – рисунок 2. Удельную внешнюю нагрузку можно также разложить по трем координатным осям, тогда по координате Z действует напряжение σ_z , по координатам X, Y будут действовать касательные напряжения τ_{xy} и τ_{yz} . Данные касательные напряжения как раз и вызваны трением. Таким образом, работу внешних сил можно представить следующим выражением:

$$A_B = \iint_F \sigma_z \cdot U_z dF - k \cdot \psi \iint_F \sqrt{U_x^2 + U_y^2} dF.$$

работу активных сил можно представить в виде:

$$A_a = \iint_F \sigma_z \cdot U_z dF.$$

работу сил трения можно представить следующим выражением:

$$A_T = -k \cdot \psi \iint_F \sqrt{U_x^2 + U_y^2} dF .$$

Где k – постоянная пластичности, ψ - величина, определяемая условиями трения и геометрическими параметрами деформирования.

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ.

Рассмотрим начало возможных перемещений точек тела. Пусть тело находится в равновесии под действием внешних сил и перемещений. Будем считать, что точкам тела сообщены дополнительные бесконечно малые перемещения. Данные перемещения кинематически возможны и совмещены с граничными условиями. Обозначим эти перемещения: $\delta U_x, \delta U_y, \delta U_z$.

Такие перемещения называются виртуальными и представляют собой вариации перемещений точек по координатным осям. Эти вариации перемещений должны обращаться в 0 на тех участках поверхности тела, где перемещения заданы и не допускаются никакие изменения (вариации).

Рассмотрим примеры.

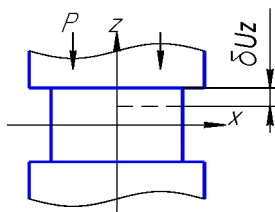


Рисунок 3. Осадка заготовки.

1. В операции осадки перемещения по координате Z задано перемещением – рисунок 3. Поэтому вариация по перемещению обращается в ноль.

2. Если металл полностью прилипает к поверхности инструмента, т.е. когда трение достигает максимума, то все три вариации перемещений будут равны 0: $\delta U_x = \delta U_y = \delta U_z = 0$.

Если рассмотреть вариацию работ активных сил A_a , то:

$$A_a = \iint_F \sigma_z \cdot \delta U_z dF = 0.$$

Рассмотрим вариацию работ сил трения, то:

$$\delta A_T = -k \cdot \psi \iint_F \sqrt{\delta U_x^2 + \delta U_y^2} dF.$$

За счет виртуальных перемещений работа внешних сил получит приращение: $\delta A_B = \delta A_a - \delta A_T = -k \cdot \psi \cdot \delta \iint_F \sqrt{U_x^2 + U_y^2} dF$.

В свою очередь вариации перемещений $\delta U_x, \delta U_y, \delta U_z$ приводят к изменению деформации тела, а следовательно, и к изменению интенсивности деформации сдвига. Таким образом работа внутренних сил также получает приращение:

$$\delta A_D = k \iiint_V \delta \cdot \Gamma dV = k \cdot \delta \iiint_V \Gamma dV.$$

Согласно принципу, при котором сумма работ внешних и внутренних сил на виртуальных перемещениях около состояния равновесия равна 0, имеем:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{E} &= \delta A_D - \delta A_B = 0; \\ k \cdot \delta \iiint_V \Gamma dV - k \cdot \psi \cdot \delta \iint_F \sqrt{U_x^2 + U_y^2} dF; \\ \delta \mathcal{E} &= \delta \cdot \left[k \iiint_V \Gamma dV - k \cdot \psi \iint_F \sqrt{U_x^2 + U_y^2} dF \right]. \end{aligned}$$

(1)

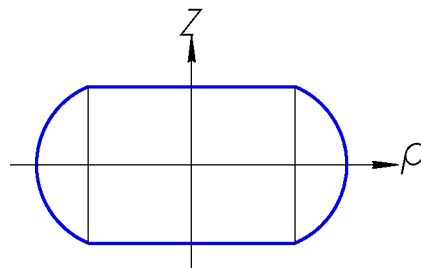
Величина, стоящая в квадратных скобках, называется полной энергией деформации и обозначается буквой $\mathcal{E}$. Поэтому $\delta \mathcal{E} = 0$. Т.е. вариация полной энергии деформации будет равна 0. Уравнение (1) представляет собой вариационное уравнение Лагранжа применительно к пластической деформации. Дальнейшая задача будет состоять теперь в том, чтобы из всех возможных перемещений найти такие функциональные зависимости перемещений от осей координат, которые бы давали минимум полной энергии деформации.

Для того, чтобы найти перемещение, отвечающее минимуму полной энергии деформации используется один из приближенных методов вариационного исчисления – прямой метод или метод Ритца.

Суть метода в том, что искомую функцию перемещения как функцию координат представляют в виде ряда. Например:

$$U = a_1 \cdot \varphi_1(x, y, z) + a_2 \cdot \varphi_2(x, y, z) + \dots + a_n \cdot \varphi_n(x, y, z) \quad (2)$$

Где $a_1, a_2, \dots, a_n$ - неизвестные варьируемые параметры, $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ - вполне определенные функции координат, отвечающие граничным условиям заданного процесса. Функции φ можно брать произвольные, лишь бы они отвечали граничным условиям. Однако для повышения точности и сокращения объемов вычислений целесообразно выбирать “подходящие” функции, т.е. те, которые по форме наиболее полно соответствуют экспериментальным данным и наиболее точно отвечают особенностям процесса.



Достаточно уже двух членов ряда, чтобы обеспечить удовлетворительную сходимость с результатами эксперимента.

После подстановки функций $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ в ряд (2), а затем подстановки перемещений U в вариационное уравнение (1), получим, что полная энергия деформации будет функцией неизвестных параметров:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

Описание неизвестных параметров $a_1, a_2, \dots, a_n$, сообщающих полной энергии деформации минимальное значение, определяется из уравнений. Получаем систему уравнений полной энергии деформации по неизвестному параметру:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a_1} = 0; \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a_2} = 0; \dots; \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a_n} = 0$$

В результате дифференцирования, а потом интегрирования получим систему уравнений, из которых определяем неизвестные параметры $a_1, a_2, \dots, a_n$, и эти параметры будут сообщать полной энергии деформации минимальное значение. Найденные параметры подставляются

в ряд (2) и находится перемещение по всем координатным осям - U_x, U_y, U_z .
Затем, используя интегрированные зависимости Коши, определяются деформации: линейные и угловые, используя уравнения связи между напряжениями и деформациями определяются напряжения. Т.о. находим поля распределения напряжений и деформаций.