

Н.М. РОГАЧЕВ

КУРС ФИЗИКИ

- МЕХАНИКА
- МОЛЕКУЛЯРНАЯ
ФИЗИКА



ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА»

Н.М. Рогачев

КУРС ФИЗИКИ

КНИГА 1

Механика.

Молекулярная физика

*Допущено Министерством образования и науки
Российской Федерации в качестве учебного пособия
для студентов высших учебных заведений,
обучающихся в области техники и технологий*

САМАРА 2006

УДК 53 (075)

Рецензенты: кафедра общей физики и методики обучения физике Самарского государственного педагогического университета (зав. кафедрой, д-р пед. наук, проф. В.А. Бетев);

канд. физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой общей и теоретической физики Самарского государственного университета А.А. Бирюков

Н.М. Рогачев. Курс физики. Книга 1. Механика. Молекулярная физика:
Учеб. пособие. - Самар. гос. аэрокосм. ун-т. Самара, 2006. 192 с.

ISBN 5-7883-0405-9

Кратко изложены основные вопросы физики. Особое внимание уделено раскрытию сущности физических явлений и закономерностей, разъяснению главных идей и принципов современной физики.

Пособие состоит из двух книг. Книга 1 посвящается механике и молекулярной физике. Предназначается для студентов высших учебных заведений, обучающихся по техническим (550000) и технологическим направлениям (650000).

Табл. 2. Ил. 62.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Самарского государственного аэрокосмического университета.

ISBN 5-7883-0405-9

© Н.М. Рогачев, 2006.

© Самарский государственный
аэрокосмический университет,
2006.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие написано в соответствии с разделами рабочих программ курса физики федерального компонента ГСО подготовки дипломированных специалистов по техническим (550000) и технологическим направлениям (650000).

Пособие состоит из двух книг. Первая книга посвящена основам классической механики и молекулярной физики. В ней излагаются также элементы специальной теории относительности. Содержанием второй книги является физика электрических и магнитных явлений, оптика и атомная физика.

Изложение курса физики как единой науки опиралось на фундаментальные законы и обобщало множество опытных данных. Большое внимание уделялось точности определений, указанию пределов применимости законов и значимости фундаментальных понятий.

Пособие написано с учетом изменений школьных программ по физике. Мы считаем, что учащиеся освоили простейшие физические понятия и владеют элементами высшей математики. Однако, учитывая специфику обучения, мы повторили некоторые наиболее важные понятия и определения курса элементарной физики.

Каждая глава заканчивается примерами решения задач, тексты которых взяты из стандартных задачников.

Целью данного пособия является оказание помощи студентам, изучающим курс физики в высших учебных заведениях.

Автор выражает глубокую признательность профессорам В.А. Бетеву и А.А. Бирюкову, а также доцентам И.А. Шунину и Т.С. Соломеиной за рецензирование пособия и ценные советы, позволившие значительно улучшить книгу.

ВВЕДЕНИЕ

Физика, наряду с другими естественными науками, изучает объективные свойства окружающего нас мира.

Весь мир, все существующее вокруг нас представляет собой *материю*. Материя имеет множество форм со своими характерными свойствами и является объективной реальностью, существующей вне и независимо от нашего сознания. Неотъемлемым свойством материи и формой ее существования является *движение*. Материя и движение неотделимы друг от друга. Не может быть ни материи без движения, ни движения без материи.

Известны два вида материи: *вещество* (атомы, молекулы, тела) и *поле* (электромагнитное, гравитационное и др.). Различные виды материи могут превращаться друг в друга (электрон и позитрон, например, могут превращаться в фотон).

Материя существует и движется в пространстве и во времени.

Пространство - это форма сосуществования материальных объектов и процессов, характеризующая структурность и протяженность материальных систем.

Время – это форма последовательной смены явлений и состояний материи, которая характеризует длительность их бытия. Пространство и время не существуют в отрыве от материи.

В классической физике пространству и времени приписывается абсолютный характер: линейные размеры и промежутки времени сохраняются неизменными при переходе от одной системы отсчета к другой.

Физика - наука точная, изучающая количественные закономерности явлений и процессов. Теория и опыт являются основными методами исследования в физике. Законы физики устанавливают связь между физическими величинами, которые необходимо измерять. Для этого разработаны единицы физических величин, объединенные в системы единиц. В настоящее время обязательна к приме-

нению в нашей стране Система Единиц Интернациональная (СИ). Система СИ состоит из основных, дополнительных и производных единиц.

Основными называются единицы нескольких разнородных физических величин, произвольно выбранных при построении системы. В СИ основными единицами являются: единица длины - метр (м); массы - килограмм (кг); времени - секунда (с); силы электрического тока - ампер (А), термодинамической температуры - кельвин (К), количества вещества - моль (моль), силы света - кандела (кд).

Метр - единица длины, равная расстоянию, проходимому в вакууме плоской электромагнитной волной за $1/299792458$ доли секунды.

Килограмм - единица массы, равная массе международного прототипа килограмма.

Секунда - единица времени, равная 9192631770 периодам излучения, соответствующего переходу между двумя сверхтонкими уровнями основного состояния атома цезия - 133.

Ампер - сила неизменяющегося тока, который, проходя по двум параллельным прямолинейным проводникам бесконечной длины и ничтожно малой площади кругового поперечного сечения, расположенным на расстоянии 1 м друг от друга в вакууме, вызвал бы между этими проводниками силу, равную $2 \cdot 10^{-7}$ Н на каждый метр длины.

Кельвин - единица термодинамической температуры, равная $1/273,16$ термодинамической температуры тройной точки воды.

Моль - единица количества вещества, равная количеству вещества системы, в которой содержится столько же структурных элементов (атомов, молекул, ионов, электронов и других частиц), сколько содержится атомов в углероде - 12 массой $0,012$ кг.

Кандела - единица силы света, равная силе света в данном направлении от источника, испускающего монохроматическое излучение частоты $540 \cdot 10^{12}$ Гц, сила излучения которого в этом направлении составляет $1/683$ Вт/ср.

В СИ кроме основных введены две *дополнительные* единицы - радиан (рад) и стерадиан (ср).

Радиан - угол между двумя радиусами окружности, длина дуги между которыми равна радиусу.

Стерадиан - телесный угол с вершиной в центре сферы, вырезающей на поверхности сферы площадь, равную площади квадрата со стороной, по длине равной радиусу этой сферы.

Производными называются единицы, устанавливаемые через другие единицы данной системы на основании физических законов, выражающих взаимосвязь между соответствующими физическими величинами.

На примере единицы скорости рассмотрим схему введения определения производной единицы измерения. При определении производной единицы договариваются о выборе определенной формулы и названии единицы. Для равномерного прямолинейного движения значение скорости может быть определено как отношение пути S ко времени t :

$$v = S / t.$$

Положив в данном уравнении $S = 1$ м, $t = 1$ с, получим единицу скорости

$$[v] = 1 \text{ м} / 1 \text{ с} = 1 \text{ м/с}.$$

Запишем это в виде выражения:

$$\frac{S = 1 \text{ м}}{t = 1 \text{ с}} > v = 1 \text{ м/с}.$$

Читая его справа налево и заменив слово равно словом это, можно сформулировать словесное определение единицы скорости: один метр в секунду - это скорость равномерного прямолинейного движения, в котором материальная точка за 1с проходит путь в 1м.

В табл. 1 даются приставки для образования десятичных и дольных единиц СИ.

Таблица 1

Наименование	Обозначение приставки		Множитель
	русское	международное	
экса	Э	E	10^{18}
пета	П	P	10^{15}
тера	Т	T	10^{12}
гига	Г	G	10^9
мега	М	M	10^6
кило	к	k	10^3
гекто	г	h	10^2
дека	да	da	10
деци	д	d	10^{-1}
санتي	с	c	10^{-2}
милли	м	m	10^{-3}
микро	мк	μ	10^{-6}
нано	н	n	10^{-9}
пико	п	p	10^{-12}
фемто	ф	f	10^{-15}
атто	а	a	10^{-18}

ЧАСТЬ 1 ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ

Механика изучает закономерности механического движения.

Классическая механика подразделяется на ньютоновскую, в основе которой лежат законы Ньютона¹, и релятивистскую механику. В классической механике Ньютона изучается движение макроскопических тел, имеющих скорости гораздо меньшие, чем скорость света в вакууме. Тела, состоящие из большого числа атомов, называются макроскопическими телами.

Релятивистская механика основана на теории относительности, ее законы справедливы и при скоростях, сравнимых со скоростью света в вакууме.

В квантовой механике изучаются специфические особенности движения микроскопических тел (атомов и элементарных частиц).

Механика подразделяется на кинематику, статику и динамику.

Глава 1 КИНЕМАТИКА

Кинематика – раздел механики, в котором исследуется движение тел без выяснения причин, его вызвавших.

Движение – это любое изменение состояния системы и ее параметров (координат точки, температуры, напряженности электрического поля и т.д.). Из всех видов движения материи самым простым является механическое движение.

§1. Механическое движение.

Кинематическое уравнение движения

Механическое движение – это изменение положения тела или отдельных его частей относительно других тел с течением времени.

Поступательным называется движение, при котором отрезок прямой, соединяющей любые две точки тела, остается при его движении параллельным самому себе. При поступательном движении все точки тела имеют одинаковые скорости и ускорения и движутся по одинаковым траекториям, сдвинутым параллельно относительно друг друга.

¹Исаак Ньютон (1643-1727) – выдающийся английский ученый, основатель классической физики.

Материальной точкой (частицей) называется тело, размерами которого при решении данной задачи можно пренебречь. Одно и то же тело в одних случаях может рассматриваться как материальная точка, а в других – как тело, имеющее размеры и форму.

Абсолютно твердым называется тело, состоящее из материальных точек, расстояние между которыми всегда остается неизменным.

Все тела существуют и движутся в пространстве и во времени. Пространство *однородно*, т.е. в нем нет точек, обладающих особыми свойствами; пространство *изотропно*, т.е. все направления движения равноценны.

Время также является *однородным*, т.е. любые явления, происходящие в одних и тех же условиях, но в разные моменты времени, протекают *одинаково*.

Так как пространство однородно и изотропно, то нельзя определить положение какого-либо тела относительно пространства. Однако положение одного тела можно определить относительно другого тела.

Тело, относительно которого рассматривается изменение положения движущегося тела, называется *телом отсчета*. Тело отсчета, связанная с ним система координат и прибор для измерения времени (часы), образуют *систему отсчета*.

Положение материальной точки *A* в пространстве в данный момент времени *t* (рис. 1) можно определить тремя координатами: *x*, *y*, *z* или *радиусом-вектором* $\vec{r}$, проведенным из начала координат в данную точку.

Радиус-вектор точки *A* можно разложить по базису $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ следующим образом:

$$\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z, \quad (1.1)$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные вектор-орты системы координат. Модуль вектора

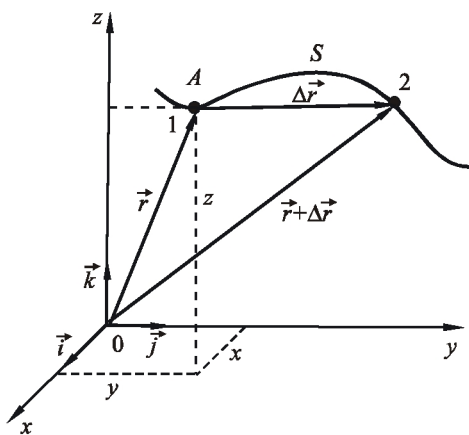


Рис. 1

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

При движении материальной точки ее координаты и радиус-вектор изменяются с течением времени. Вектор $\Delta \vec{r}$, соединяющий начальное положение 1 движущейся материальной точки с последующим ее положением 2, называется *перемещением* точки.

Линия, описываемая в пространстве концом радиуса-вектора $\vec{r}$ при движении материальной точки, относительно выбранной системы отсчета называется *траекторией*. По форме траектории движение делится на прямолинейное и криволинейное.

Путь – это расстояние, отсчитываемое вдоль траектории движения. Длина участка траектории *S* называется *длиной пути*. В случае прямолинейного движения в одном направлении длина пути *S* равна модулю перемещения $|\Delta \vec{r}|$.

При движении по замкнутой траектории, когда точка возвращается в исходное положение, путь равен длине траектории, а перемещение – нулю. Путь и перемещение в системе СИ измеряются в метрах (м).

Функции, описывающие изменения координат или радиуса-вектора материальной точки с течением времени, называются *кинематическими уравнениями движения*:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$

или

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \quad (1.2)$$

§2. Скорость движения

Равномерным прямолинейным движением называется такое движение, при котором материальная точка, двигаясь по прямой линии, за любые равные, сколь угодно малые промежутки времени Δt совершает одинаковые перемещения $\Delta \vec{r}$.

Скоростью равномерного прямолинейного движения называется векторная физическая величина, равная отношению перемещения к промежутку времени, в течение которого было совершено это перемещение:

$$\vec{v} = \Delta \vec{r} / \Delta t.$$

При малых приращениях функции и аргумента

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (1.3)$$

Скорость при равномерном прямолинейном движении является величиной постоянной:

$$\vec{v} = \text{const.}$$

По модулю скорость

$$|\vec{v}| = |\Delta\vec{r}| / \Delta t = S / \Delta t, \quad (1.4)$$

так как $S = |\Delta\vec{r}|$. Используя уравнения (1.1) и (1.3), получим

$$\vec{v} = \vec{i} \frac{dx}{dt} + \vec{j} \frac{dy}{dt} + \vec{k} \frac{dz}{dt} = \vec{i} v_x + \vec{j} v_y + \vec{k} v_z, \quad (1.5)$$

откуда

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2},$$

где v_x, v_y и v_z - проекции вектора скорости $\vec{v}$ на координатные оси x, y и z .

Из формулы (1.4) устанавливаются единица скорости в системе СИ - метр в секунду (м/с) и формула пути равномерного прямолинейного движения:

$$S = v \cdot \Delta t.$$

Используя данное уравнение, можно записать кинематическое уравнение для равномерного прямолинейного движения, т.е. найти выражение для координаты материальной точки, движущейся равномерно вдоль оси x :

$$x = x_0 + v_x \Delta t. \quad (1.6)$$

Если материальная точка начинает движение из начала координат, то $x_0 = 0$ и координата $x = v_x \Delta t$.

Если за равные промежутки времени материальная точка, двигаясь по прямой, проходит разные пути, то такое движение называется *переменным*.

Пусть материальная точка, двигаясь неравномерно, за время Δt переместилась из положения 1 в положение 2 (рис.1). *Средней скоростью* движения материальной точки называется векторная физическая величина, равная отношению перемещения $\Delta\vec{r}$ ко времени Δt , за которое оно произошло:

$$\langle \vec{v} \rangle = \Delta\vec{r} / \Delta t. \quad (1.7)$$

Средней путевой скоростью движения материальной точки называется скалярная величина, равная отношению пути S к промежутку времени Δt , за которое этот путь пройден:

$$\langle v \rangle_S = S / \Delta t. \quad (1.8)$$

Переменное движение характеризуется также мгновенной скоростью (скоростью в данный момент времени). Мгновенную скорость можно определить как предел отношения $\Delta\vec{r} / \Delta t$ при $\Delta t \rightarrow 0$:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\Delta\vec{r} / \Delta t) = d\vec{r} / dt. \quad (1.9)$$

Таким образом, *мгновенная скорость* движения материальной точки есть векторная физическая величина, равная первой производной радиуса-вектора движущейся точки по времени. Скорость $\vec{v}$ направлена по касательной к траектории в направлении движения.

§3. Ускорение

Быстрота изменения скорости по времени при переменном движении характеризуется ускорением

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta\vec{v} / \Delta t = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \quad (1.10)$$

Ускорение - это векторная физическая величина, равная первой производной скорости по времени или второй производной радиуса-вектора движущейся точки по времени.

В системе СИ ускорение измеряется в метрах на секунду в квадрате (м/с²).

Используя уравнения (1.1) и (1.10), запишем ускорение через его составляющие по осям прямоугольной декартовой системы координат:

$$\vec{a} = \vec{i} \frac{d^2x}{dt^2} + \vec{j} \frac{d^2y}{dt^2} + \vec{k} \frac{d^2z}{dt^2} = \vec{i} a_x + \vec{j} a_y + \vec{k} a_z, \quad (1.11)$$

где a_x, a_y и a_z - проекции вектора ускорения на координатные оси x, y и z .

Модуль вектора ускорения

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (1.12)$$

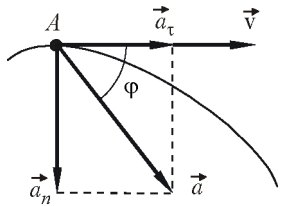


Рис. 2

Вектор ускорения $\vec{a}$ принято раскладывать на две составляющие (рис. 2):

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n, \quad (1.13)$$

где $|\vec{a}_\tau| = \frac{dv}{dt}$ - *тангенциальное ускорение*, направленное по касательной к траектории

движения, $|\vec{a}_n| = \frac{v^2}{R}$ - *нормальное (центростремительное) ускорение*, направленное перпендикулярно скорости $\vec{v}$, R - *радиус кривизны траектории* (радиус окружности, сливающейся с траекторией на бесконечно малом её участке).

Тангенциальное ускорение характеризует быстроту изменения модуля скорости, а нормальное - изменение скорости по направлению.

Квадрат модуля ускорения

$$a^2 = a_\tau^2 + a_n^2,$$

отсюда ускорение

$$a = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2}. \quad (1.14)$$

При равнопеременном прямолинейном движении $a_\tau = \text{const} \neq 0$, а $a_n = 0$, т.е. ускорение $a = a_\tau = dv/dt$. Отсюда $dv = a dt$. Интегрируя данное выражение, получим формулу скорости равнопеременного прямолинейного движения:

$$\int_{v_0}^v dv = a \int_0^t dt, \quad v = v_0 + at, \quad (1.15)$$

если $v_0 = 0$, то

$$v = at. \quad (1.16)$$

Здесь v_0 , v - скорости в моменты времени $t = 0$ и t соответственно.

Так как скорость $v = dS/dt$, то $dS = v dt$. Подставляя в данное выражение уравнение (1.15), после интегрирования получим формулу пути равнопеременного прямолинейного движения:

$$\int_0^S dS = v_0 \int_0^t dt + a \int_0^t t dt, \quad (1.17)$$

$$S = v_0 t + at^2 / 2.$$

Если $v_0 = 0$, то

$$S = at^2 / 2. \quad (1.18)$$

При равноускоренном движении в формулах (1.15) - (1.18) ускорение a берется со знаком плюс, при равнозамедленном - со знаком минус.

§4. Движение тела, брошенного под углом к горизонту

Рассмотрим движение тела, брошенного под углом α к горизонту с начальной скоростью $\vec{v}_0$. При отсутствии сопротивления воздуха движение будет происходить по параболе, изображенной на рис. 3.

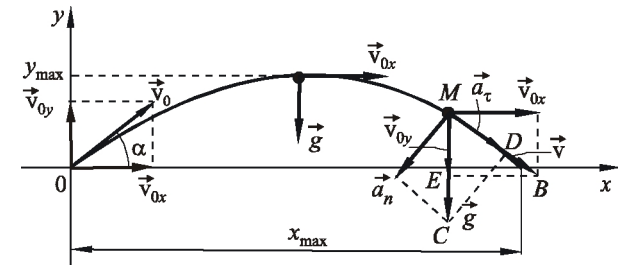


Рис. 3

Движение данного тела можно представить как результат наложения двух одновременных прямолинейных движений по осям ox и oy , направленных вдоль поверхности Земли и по нормали к ней.

По оси ox движение равномерное с постоянной скоростью

$$v_x = v_{0x} = v_0 \cos \alpha.$$

Воспользовавшись формулой (1.6) для равномерного прямолинейного движения, запишем уравнение движения тела вдоль оси ox :

$$x = v_{0x}t = v_0 t \cos \alpha, \quad (1.19)$$

где t - время движения.

По оси oy движение равнопеременное с ускорением $a_y = -g$ и с начальной скоростью

$$v_{0y} = v_0 \sin \alpha.$$

Для равнопеременного движения согласно уравнениям (1.15) и (1.17) запишем:

$$v_y = v_{0y} - gt = v_0 \sin \alpha - gt, \quad (1.20)$$

$$y = v_{0y}t - gt^2 / 2 = v_0 t \sin \alpha - gt^2 / 2. \quad (1.21)$$

Исключив время t из уравнений движения (1.19) и (1.21), найдем уравнение траектории:

$$y = x \cdot \operatorname{tg} \alpha - gx^2 / (2v_0^2 \cos^2 \alpha). \quad (1.22)$$

Это уравнение *параболы*.

В момент падения тела на Землю координата $y = 0$. Приравняв y нулю, из уравнения (1.21) найдем *время полета*:

$$t(v_0 \sin \alpha - gt/2) = 0,$$

$$t_1 = 0, \quad t_2 = (2v_0 / g) \sin \alpha.$$

Значение времени $t_1 = 0$ соответствует точке бросания тела. Таким образом, время полета тела

$$t_{\Pi} = 2v_0 \sin \alpha / g. \quad (1.23)$$

При подъеме тела значение скорости v_y уменьшается и при $y_{\max}$ превращается в ноль. Из уравнения (1.20), приняв $v_y = 0$, находится *время подъема* тела на максимальную высоту:

$$0 = v_0 \sin \alpha - gt_{\text{под}},$$

откуда

$$t_{\text{под}} = v_0 \sin \alpha / g. \quad (1.24)$$

Сопоставляя выражения (1.23) и (1.24), видим, что время подъема тела на высоту $y_{\max}$ равно времени спуска его с этой высоты.

Подставив время подъема $t_{\text{под}}$ в формулу (1.21), найдем *максимальную высоту* подъема тела:

$$y_{\max} = v_0^2 \sin^2 \alpha / (2g).$$

Дальность полета $x_{\max}$ определяется, если в уравнение (1.19) вместо t подставить время полета:

$$x_{\max} = v_0 t_{\Pi} \cos \alpha = v_0^2 \sin 2\alpha / g.$$

Дальность полета максимальна, когда значение $\sin 2\alpha$ максимально:

$$\sin 2\alpha_0 = 1, \quad 2\alpha_0 = 90^\circ, \quad \alpha_0 = 45^\circ.$$

Из подобия треугольников MCD и MEB (рис. 3) запишем:

$$\frac{EB}{MB} = \frac{DC}{MC} \quad \text{или} \quad \frac{v_{0x}}{v} = \frac{a_n}{g},$$

откуда

$$a_n = v_{0x} \cdot g / v; \quad (1.25)$$

$$\frac{ME}{MB} = \frac{MD}{MC} \quad \text{или} \quad \frac{v_y}{v} = \frac{a_{\tau}}{g},$$

откуда

$$a_{\tau} = v_y \cdot g / v. \quad (1.26)$$

Радиус кривизны траектории R в произвольной точке M определяется с использованием формулы

$$a_n = v^2 / R.$$

§5. Вращение тела вокруг неподвижной оси

Вращательным называется движение, при котором все точки тела описывают окружности, центры которых лежат на одной прямой, называемой осью вращения.

Пусть тело за промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$ повернулось на угол $\Delta \varphi$, перейдя из положения 1 в положение 2 (рис. 4). Вектор $\Delta \vec{\varphi}$, направленный вдоль оси вращения перпендикулярно плоскости, в которой происходит вращение, называется *вектором углового перемещения*. Модуль вектора $\Delta \vec{\varphi}$ равен углу поворота $\Delta \varphi$, выраженному в радианах, а ориентация вектора определяется по прави-

лу *правого винта* (если смотреть из конца вектора $\Delta\vec{\varphi}$, то вращение тела происходит против часовой стрелки).

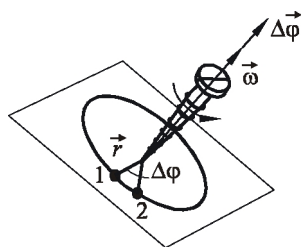


Рис. 4

Отношение $\frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t} = \langle \vec{\omega} \rangle$ называется *средней угловой скоростью*, а предел отношения

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} = \vec{\omega} \quad (1.27)$$

называется *угловой скоростью*.

Угловая скорость - это векторная физическая величина, равная первой производной углового перемещения по времени.

Угловая скорость измеряется в радианах в секунду (рад/с). Вектор угловой скорости направлен по оси вращения, и ориентация его определяется правилом правого винта.

Если угловая скорость $\vec{\omega}$ за промежуток времени Δt изменяется на $\Delta\vec{\omega}$, то для характеристики такого вращательного движения вводится понятие *углового ускорения*. *Угловым ускорением* называется векторная физическая величина, равная первой производной угловой скорости по времени или второй производной углового перемещения по времени:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2}. \quad (1.28)$$

Если $\vec{\omega}$ изменяется только по модулю, то векторы $\vec{\omega}$ и $\vec{\varepsilon}$ коллинеарны и направлены в одну и ту же сторону, когда вращение ускоренное, и в противоположные стороны, когда вращение замедленное.

Угловое ускорение измеряется в радианах на секунду в квадрате (рад/с²).

Время одного полного оборота тела T называется *периодом обращения*, величина обратная периоду $\frac{1}{T} = \nu$ называется *частотой*. Период измеряется в секундах (с), а частота - в герцах (Гц).

За один период обращения радиус-вектор $\vec{r}$ описывает угол, равный 2π рад, поэтому $2\pi = \omega T$, откуда $\omega = 2\pi/T = 2\pi\nu$.

Вращательное движение, при котором угловая скорость $\vec{\omega} = \text{const} \neq 0$, называется *равномерным вращением*.

По модулю $|\vec{\omega}| = \frac{|d\varphi|}{dt}$, откуда $d\varphi = \omega dt$. Интегрируя данное выражение:

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \omega \int_0^t dt,$$

получим формулу для определения модуля углового перемещения:

$$\varphi - \varphi_0 = \omega t,$$

или

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t. \quad (1.29)$$

Вращательное движение, при котором угловое ускорение $\vec{\varepsilon} = \text{const} \neq 0$, называется *равнопеременным вращением*. Так как

$$|\vec{\varepsilon}| = \frac{d\omega}{dt},$$

$$\text{то } d\omega = \varepsilon dt \text{ и } \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \varepsilon \int_0^t dt.$$

Откуда

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t. \quad (1.30)$$

Получили формулу для определения угловой скорости при равнопеременном вращении.

Угловая скорость

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt},$$

откуда

$$d\varphi = \omega dt.$$

После интегрирования данного выражения с учетом формулы (1.30)

$$\int_0^{\varphi} d\varphi = \omega_0 \int_0^t dt + \varepsilon \int_0^t t dt ,$$

получим формулу для определения модуля углового перемещения при равнопеременном вращении:

$$\varphi = \omega_0 t + \varepsilon t^2 / 2 . \quad (1.31)$$

При равноускоренном вращении в уравнениях (1.30) и (1.31) угловое ускорение ε берется со знаком плюс, при равнозамедленном - со знаком минус.

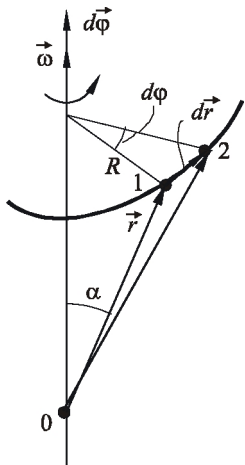


Рис. 5

Найдем связь между линейными и угловыми величинами. Пусть тело из положения 1 (рис. 5) переходит в положение 2 за малый промежуток времени dt , совершая бесконечно малое угловое перемещение $d\vec{\varphi}$. Из рис. 5 видно, что

$$|d\vec{r}| = R d\varphi ,$$

$$\text{а} \quad R = |\vec{r}| \sin \alpha ,$$

где R - радиус окружности.

Откуда

$$dr = r d\varphi \sin \alpha .$$

Полученное выражение запишем в виде векторного произведения:

$$d\vec{r} = [d\vec{\varphi} \vec{r}] . \quad (1.32)$$

Поделим правую и левую части уравнения (1.32) на dt :

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \left[\frac{d\vec{\varphi}}{dt} \vec{r} \right] = [\vec{\omega} \vec{r}] ,$$

откуда

$$\vec{v} = [\vec{\omega} \vec{r}] , \quad (1.33)$$

так как

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} , \quad \text{а} \quad \frac{d\vec{\varphi}}{dt} = \vec{\omega} .$$

Следовательно, модули векторов связаны соотношением

$$|\vec{v}| = \omega r \sin \alpha = \omega R .$$

Дифференцируя по времени уравнение (1.33), получим

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt} \vec{r} \right] + \left[\vec{\omega} \frac{d\vec{r}}{dt} \right]$$

или с учетом выражения (1.28) запишем:

$$\vec{a} = [\vec{\varepsilon} \vec{r}] + [\vec{\omega} \vec{v}] = [\vec{\varepsilon} \vec{r}] + [\vec{\omega} [\vec{\omega} \vec{r}]] .$$

Если заменить вектор ускорения

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n ,$$

то

$$|\vec{a}_\tau| = |[\vec{\varepsilon} \vec{r}]| = \varepsilon r \sin \alpha = \varepsilon R , \quad (1.34)$$

$$\text{а} \quad |\vec{a}_n| = \omega \omega r \sin \alpha = \omega^2 R . \quad (1.35)$$

Тогда модуль полного ускорения

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = R \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} .$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1. Скорость прямолинейно движущегося тела изменяется по закону

$$v = v_0 + \alpha t + \beta t^2,$$

где $\alpha = 2 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$, $\beta = 3 \frac{\text{м}}{\text{с}^3}$, $v_0 = 1 \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Найти среднюю путевую скорость за промежуток времени от $t_1 = 1 \text{ с}$ до $t_2 = 10 \text{ с}$.

Дано:	Решение:
$v = v_0 + \alpha t + \beta t^2$	Среднюю путевую скорость найдем, используя формулу (1.8):
$\alpha = 2 \text{ м/с}^2$	$\langle v \rangle = \Delta S / \Delta t$, где $\Delta t = t_2 - t_1$.
$\beta = 3 \text{ м/с}^3$	Путь определяем следующим образом:
$v_0 = 1 \text{ м/с}$	$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} (v_0 + \alpha t + \beta t^2) dt =$
$t_1 = 1 \text{ с}$	$= \left(v_0 t + \frac{\alpha t^2}{2} + \frac{\beta t^3}{3} \right) \Big _{t_1}^{t_2} = v_0 (t_2 - t_1) +$
$t_2 = 10 \text{ с}$	$+ \frac{\alpha}{2} (t_2^2 - t_1^2) + \frac{\beta}{3} (t_2^3 - t_1^3).$
$\langle v \rangle = ?$	

Вычислим среднюю скорость:

$$\langle v \rangle = \frac{v_0 (t_2 - t_1) + \frac{\alpha}{2} (t_2^2 - t_1^2) + \frac{\beta}{3} (t_2^3 - t_1^3)}{t_2 - t_1} = v_0 + \frac{\alpha}{2} (t_2 + t_1) + \frac{\beta}{3} (t_2^2 + t_1 t_2 + t_1^2).$$

Подставив числовые значения, получаем

$$\langle v \rangle = 123 \text{ м/с}.$$

Ответ: $\langle v \rangle = 123 \text{ м/с}$.

Задача 2. Материальная точка движется по закону

$$\vec{r}(t) = \alpha \sin(5t) \vec{i} + \beta \cos^2(5t) \vec{j}, \quad \text{где } \alpha = 2 \text{ м}, \beta = 3 \text{ м}.$$

Определить вектор скорости, вектор ускорения и траекторию движения материальной точки.

Дано:	Решение:
$\vec{r}(t) = \alpha \sin(5t) \vec{i} + \beta \cos^2(5t) \vec{j}$	Запишем закон движения в координатной форме, используя уравнения (1.1) и (1.2):
$\alpha = 2 \text{ м}, \beta = 3 \text{ м}$	$\begin{cases} x(t) = \alpha \sin(5t), \\ y(t) = \beta \cos^2(5t). \end{cases} \quad (1)$
$\vec{v}(t) = ?$, $\vec{a}(t) = ?$,	Определим проекции вектора скорости:
$y(x) = ?$	$v_x = \frac{dx}{dt} = 5\alpha \cos(5t);$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = -\beta 2 \cos(5t) \sin(5t) 5 = -5\beta \sin(10t).$$

Тогда выражение для вектора скорости согласно формуле (1.5) будет иметь вид

$$\vec{v} = 5\alpha \cos(5t) \vec{i} + (-5\beta) \sin(10t) \vec{j}. \quad (2)$$

Аналогично определим проекции вектора ускорения:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -25\alpha \sin(5t);$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = -50\beta \cos(10t).$$

Выражение для вектора ускорения согласно формуле (1.11) примет вид

$$\vec{a} = -25\alpha \sin(5t) \vec{i} + (-50\beta) \cos(10t) \vec{j}. \quad (3)$$

Для определения траектории движения исключим из системы уравнений (1) время t . Представим для этого систему уравнений в виде

$$\begin{cases} \sin(5t) = \frac{x}{\alpha}, \\ \cos^2(5t) = \frac{y}{\beta}. \end{cases} \quad (4)$$

Возведя левую и правую части первого уравнения в системе уравнений (4) в квадрат и сложив их, получим

$$\sin^2(5t) + \cos^2(5t) = \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y}{\beta}. \quad (5)$$

Левая часть уравнения (5) равна 1, тогда

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y}{\beta} = 1. \quad (6)$$

Уравнение (6) является уравнением параболы:

$$y = \frac{\alpha^2 \beta - \beta x^2}{\alpha^2}. \quad (7)$$

Подставив данные из условия задачи в уравнение (7), найдем траекторию движения:

$$y = 3 - \frac{3}{4}x^2.$$

При $y \geq 0$ траектория имеет вид параболы, расположенной выше оси x . Точка совершает колебательное движение по ней.

Ответ: $\vec{v}(t) = 10 \cos(5t)\vec{i} - 15 \sin(10t)\vec{j},$

$$\vec{a}(t) = -50 \sin(5t)\vec{i} - 150 \cos(10t)\vec{j},$$

$$y = 3 - \frac{3}{4}x^2.$$

Задача 3. Твердое тело начинает вращаться вокруг неподвижной оси с угловым ускорением

$$\varepsilon = \alpha t,$$

где $\alpha = 2 \cdot 10^{-2}$ рад/с³.

Через сколько времени после начала вращения вектор полного ускорения произвольной точки тела будет составлять угол $\varphi = 60^\circ$ с ее вектором скорости?

Дано:

$$\varepsilon = \alpha t$$

$$\alpha = 2 \cdot 10^{-2} \text{ рад/с}^3$$

$$\varphi = 60^\circ$$

$$t = ?$$

Решение:

Разложим вектор полного ускорения

$\vec{a}$ (см. рис) на составляющие: $\vec{a}_n$ и

$\vec{a}_\tau$. Тогда

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a_n}{a_\tau}. \quad (1)$$

Используя уравнение (1.34), найдем

$$a_\tau = \varepsilon \cdot R = \alpha t R. \quad (2)$$

С другой стороны по определению:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}. \quad (3)$$

Из уравнений (2), (3) запишем:

$$\alpha t R = \frac{dv}{dt}. \quad (4)$$

Разделим переменные в уравнении (4) и проинтегрируем его:

$$\alpha t R dt = dv, \quad \int_0^t \alpha t R dt = \int_0^v dv, \quad v = \alpha R \frac{t^2}{2}. \quad (5)$$

Нормальное ускорение

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{\alpha^2 R t^4}{4}. \quad (6)$$

Подставим в формулу (1) уравнения (2) и (6):

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\alpha t^3}{4}. \quad (7)$$

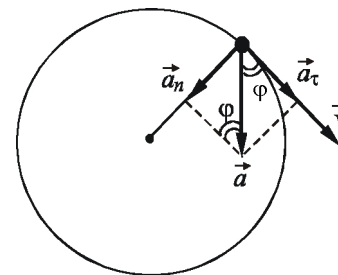


Рис. к задаче 3

Из уравнения (7) найдем время вращения тела:

$$t = 3\sqrt{\frac{4\lg \varphi}{\alpha}}.$$

Подставив числовые значения, получим

$$t = 7 \text{ с.}$$

Ответ: $t = 7 \text{ с.}$

Задача 4. Камень, брошенный с высоты $h = 2,1 \text{ м}$ под углом $\alpha = 45^\circ$ к горизонту, падает на расстоянии $S = 42 \text{ м}$ (по горизонтали) от места бросания. Найти начальную скорость v_0 камня, время полета τ , максимальную высоту H полета над уровнем Земли, радиусы кривизны траектории в верхней точке R_A и в точке падения камня на Землю R_B . Сопротивление воздуха не учитывать.

Дано:

$$h = 2,1 \text{ м}$$

$$\alpha = 45^\circ$$

$$S = 42 \text{ м}$$

$$v_0 = ? \quad H = ?$$

$$\tau = ? \quad R_A = ?$$

$$R_B = ?$$

Решение:

Камень можно рассматривать как материальную точку, движение которой происходит по параболе. Это сложное движение представим как сумму двух независимых движений. Для этого выберем систему координат XOY так, как показано на рис., а начало отсчета поместим в точку бросания O . В горизонтальном направлении сумма сил, действующих на камень, равна нулю. Поэтому движение камня вдоль оси OX - равномерное со скоростью v_x , равной горизонтальной составляющей начальной скорости v_0 :

$$v_x = v_0 \cos \alpha.$$

По вертикали на камень действует сила тяжести, поэтому движение камня вдоль оси OY будет равнопеременным (является равнозамедленным до точки A и равноускоренным после точки A) с постоянным ускорением $\vec{g}$, направленным вертикально вниз. Скорость v_{oy} равна вертикальной составляющей начальной скорости v_0 :

$$v_{oy} = v_0 \sin \alpha.$$

Законы движения вдоль осей OX и OY имеют вид

$$x = v_0 t \cos \alpha, \quad (1)$$

$$y = v_0 t \sin \alpha - g \frac{t^2}{2}. \quad (2)$$

В конечной точке B траектории движения

$$t = \tau, \quad x = S, \quad y = -h.$$

Поэтому

$$S = v_0 \tau \cos \alpha, \quad (3)$$

$$-h = v_0 \tau \sin \alpha - g \frac{\tau^2}{2}. \quad (4)$$

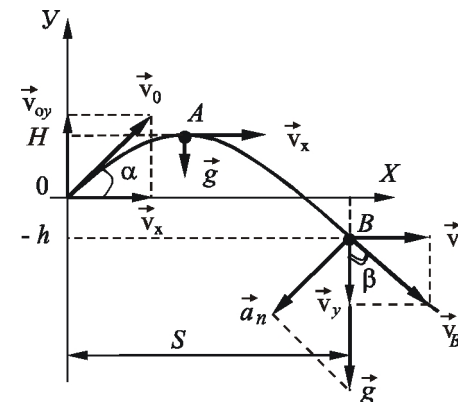


Рис. к задаче 4

Решение системы уравнений (3) - (4) дает время полета и начальную скорость:

$$\tau = \sqrt{\frac{2(h + S \tan \alpha)}{g}}, \quad (5)$$

$$v_0 = \frac{S}{\tau \cos \alpha}. \quad (6)$$

Используя уравнение (2), найдем:

$$v_y = \frac{dy}{dt} = v_0 \sin \alpha - gt. \quad (7)$$

В точке A траектории $v_y = 0$, тогда время полета камня до этой точки

$$t_1 = (v_0 \sin \alpha) / g.$$

Подставляя время t_1 в формулу (1), найдем максимальную высоту траектории над осью OX :

$$y_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}, \quad (8)$$

а над Землей:

$$H = h + \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} . \quad (9)$$

Радиус кривизны траектории определяется из соотношения

$$R = \frac{v^2}{a_n} .$$

В точке А

$$v = v_A = v_x, \quad a_n = g ,$$

поэтому

$$R_A = \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g} . \quad (10)$$

В точке В

$$R_B = \frac{v_B^2}{a_n} .$$

Из рис. видно, что $a_n = g \sin \beta$, $\sin \beta = \frac{v_x}{v_B}$, тогда

$$R_B = \frac{v_B^3}{g v_0 \cos \alpha} . \quad (11)$$

Здесь

$$v_B = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 \cos^2 \alpha + (v_0 \sin \alpha - g\tau)^2} .$$

Ответ: $\tau = 3 \text{ с}$, $v_0 = 20 \text{ м/с}$, $H = 12 \text{ м}$, $v_B = 20,8 \text{ м/с}$,

$$R_A = 20 \text{ м}, \quad R_B = 67 \text{ м}.$$

Глава 2

ДИНАМИКА ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Динамика изучает движение тел под действием приложенных к ним сил.

§6. Законы И. Ньютона

Первый закон Ньютона (закон инерции)

Существуют такие системы отсчета, относительно которых поступательно движущееся тело сохраняет свою скорость постоянной, если на него не действуют другие тела или действия их скомпенсированы. Такие системы отсчета называются инерциальными.

Явление сохранения скорости тел постоянной называется инерцией.

Действие одних тел на другие характеризуется силой.

Сила - это мера взаимодействия двух тел, в результате которого тела приобретают ускорение или деформируются. Сила - векторная величина.

Свойство тел сохранять при отсутствии внешнего воздействия состояние покоя или равномерного и прямолинейного движения называют инертностью. Инертность тел характеризуется скалярной величиной, постоянной для данного тела (в классической механике Ньютона), называемой массой тела.

Второй закон Ньютона

В инерциальной системе отсчета ускорение $\vec{a}$, с которым движется тело, прямо пропорционально силе $\vec{F}$, действующей на тело, и обратно пропорционально массе тела m :

$$\vec{a} = \vec{F} / m . \quad (1.36)$$

Направление ускорения совпадает с направлением силы.

Если на тело действует несколько сил (n , например), то второй закон Ньютона можно записать в виде

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = m \vec{a} .$$

А не cai a NE neea eci a?uacny a iu?oiiao (l), 1l = 1eai/n².
Уравнение (1.36), записанное в дифференциальном виде:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$$

называют основным уравнением динамики материальной точки. В зависимости от постановки задачи решение основного уравнения динамики проводится в векторной форме или в проекциях на координатные оси.

Различают основную и обратную задачи динамики. В основной задаче по заданным силам и начальным условиям определяется состояние механической системы. Содержанием обратной задачи является определение закона движения по заданному параметру движения и начальным условиям.

Третий закон Ньютона

При взаимодействии двух тел возникают две силы, которые равны по модулю, направлены в противоположные стороны вдоль прямой, соединяющей тела:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}, \quad (1.37)$$

где $\vec{F}_{12}$ - сила, с которой первое тело действует на второе;

$\vec{F}_{21}$ - сила, с которой второе тело действует на первое.

Эти силы не уравновешиваются, так как приложены к разным телам.

Принцип независимости действия сил: если на материальную точку массой m_i одновременно действует несколько сил, то каждая из них сообщает материальной точке ускорение $\vec{a}_i = \vec{F}_i / m_i$ так, как будто другие силы не действуют.

По современным представлениям все явления, протекающие во Вселенной, обусловлены четырьмя видами *фундаментальных взаимодействий*: сильными, электромагнитными, слабыми и гравитационными. *Сильные взаимодействия* обеспечивают существование атомных ядер и проявляются в действии ядерных сил. *Электромагнитные взаимодействия* обуславливают существование атомов, молекул и макротел. *Слабые взаимодействия* характерны для элементарных частиц. *Гравитационные взаимодействия* проявляются в виде сил всемирного тяготения.

Силы, рассматриваемые в классической механике, имеют элек-

ромагнитную (силы упругости, силы трения) и гравитационную природу (силы тяготения, силы тяжести).

В механике Ньютона состояние материальной точки в момент времени t определяется из решения основного уравнения динамики по известным в начальный момент времени координатам и проекциям скорости. Это положение называется *механическим детерминизмом*.

§7. Силы в механике

При изучении движения тел необходимо знать силы, действующие на тело, и их зависимость от различных величин.

Силы тяготения (гравитационные силы) возникают в результате взаимного притяжения тел и подчиняются закону всемирного тяготения:

$$F = Gm_1m_2 / r^2. \quad (1.38)$$

Сила взаимного притяжения F двух материальных точек прямо пропорциональна произведению их масс, обратно пропорциональна квадрату расстояния r между ними и направлена вдоль прямой, соединяющей материальные точки.

В уравнении (1.38) $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 / (\text{кг} \cdot \text{с})^2$ - гравитационная постоянная.

Силой тяжести материальной точки называется сила $m\vec{g}$, равная векторной разности между силой $\vec{F}$ тяготения этой материальной точки к Земле и центробежной силой $\vec{F}_{\text{ц}}$, обуславливающей участие материальной точки в суточном вращении Земли. Под действием силы тяжести все тела падают с постоянным для данной местности ускорением свободного падения $\vec{g}$. Ускорение свободного падения не зависит от массы падающего тела и изменяется с широтой местности в пределах от $9,78 \text{ м/с}^2$ на экваторе до $9,83 \text{ м/с}^2$ на полюсах.

Весом тела $\vec{P}$ называется сила, с которой тело, вследствие его притяжения к Земле, действует на опору или подвес. Вес тела приложен к опоре или подвесу.

Невесомость - это состояние системы, при котором отсутствует давление частей системы друг на друга. В состоянии невесомости тела не оказывают давления на окружающие их тела. Например, при свободном падении тело находится в состоянии невесомости.

Состояние невесомости тела может наступить при движении в лифте, если кабина лифта опускается с ускорением, равным g .

Силы упругости возникают при деформации тел.

Деформация - это изменение формы или объема тела под действием силы.

Упругими называются деформации, которые полностью исчезают после прекращения действия деформирующих сил.

Для небольших упругих деформаций справедлив закон Р. Гука¹: *сила упругости F прямо пропорциональна величине деформации x :*

$$F = -kx, \quad (1.39)$$

где k - коэффициент упругости (жесткость), $[k] = \text{Н/м}$.

Сила трения скольжения возникает при относительном перемещении двух соприкасающихся тел. Она не зависит от площади поверхностей соприкосновения трущихся тел и пропорциональна силе нормального давления N , прижимающей поверхности друг к другу:

$$F_{\text{тр}} = \mu N, \quad (1.40)$$

где μ - коэффициент трения скольжения, зависящий от состояния соприкасающихся поверхностей.

Сила трения направлена по касательной к трущимся поверхностям в сторону, противоположную движению тела.

Сила трения возникает не только при скольжении одной поверхности по другой, но и при попытках вызвать такое скольжение. В этом случае она называется силой трения покоя.

Сила трения покоя $F_{\text{тр.п}}$ равна по модулю внешней силе, которую прикладывают к телу, пытаясь сдвинуть его с места. Она может принимать любые значения от нуля до силы трения скольжения $F_{\text{тр}}$:

$$0 \leq F_{\text{тр.п}} \leq F_{\text{тр}}.$$

§8. Импульс тела. Закон сохранения импульса

Рассмотрим движение тела массой m под действием внешних сил. По второму закону Ньютона $\vec{F} = m\vec{a}$, где $\vec{F}$ - геометрическая

сумма внешних сил, $\vec{a}$ - ускорение, сообщаемое телу. Так как ускорение $\vec{a} = d\vec{v} / dt$, то

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{d\vec{p}}{dt}. \quad (1.41)$$

В уравнении (1.41) произведение массы тела на его скорость ($m\vec{v}$) называется *импульсом тела $\vec{p}$* . Согласно уравнению (1.41) второй закон Ньютона сформулируется следующим образом: скорость изменения импульса тела равна силе, действующей на тело. Это наиболее общая формулировка основного закона динамики поступательного движения.

Импульс тела - величина векторная. Вектор импульса совпадает по направлению с вектором скорости.

Единица измерения импульса в системе СИ килограмм - метр в секунду (кгм/с).

Рассмотрим механическую систему, состоящую из n поступательно движущихся тел. Используя второй закон Ньютона (1.41), запишем систему уравнений:

$$\frac{d(m_1\vec{v}_1)}{dt} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \dots + \vec{F}_{1n} + \vec{F}_1,$$

$$\frac{d(m_2\vec{v}_2)}{dt} = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} + \dots + \vec{F}_{2n} + \vec{F}_2,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\frac{d(m_n\vec{v}_n)}{dt} = \vec{F}_{n1} + \vec{F}_{n2} + \dots + \vec{F}_{n(n-1)} + \vec{F}_k.$$

Силы $\vec{F}_{12}, \vec{F}_{13}, \vec{F}_{1n}, \vec{F}_{21}, \dots, \vec{F}_{n(n-1)}$, возникающие в результате взаимодействия между телами данной системы, называются *внутренними*. Силы $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_k$, с которыми на тела данной системы действуют тела других систем, называются *внешними*.

Сложив левые и правые части уравнений, получим

¹Роберт Гук (1635-1703)-английский физик.

$$\sum \frac{d(m_i \vec{v}_i)}{dt} = \sum \vec{F}_{\text{внутр}} + \sum \vec{F}_{\text{внеш}}$$

или

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F}_{\text{внутр}} + \sum \vec{F}_{\text{внеш}},$$

где $\frac{d\vec{p}}{dt}$ - изменение импульса системы,

$\sum \vec{F}_{\text{внутр}}$ - сумма внутренних сил,

$\sum \vec{F}_{\text{внеш}}$ - сумма внешних сил.

На основании третьего закона Ньютона $\sum \vec{F}_{\text{внутр}} = 0$, поэтому

данное уравнение запишем в виде $d\vec{p}/dt = \sum \vec{F}_{\text{внеш}}$.

Изменение импульса системы тел определяется суммой внешних сил, действующих на систему. Это закон изменения импульса системы тел.

Если система замкнута, то $\sum \vec{F}_{\text{внеш}} = 0$ и уравнение примет вид $d\vec{p}/dt = 0$ или $d\vec{p} = 0$.

А это значит, что

$$\vec{p} = \text{const}. \quad (1.42)$$

Получен закон сохранения импульса системы тел: полный (суммарный) импульс замкнутой системы тел остается постоянным по величине и направлению.

Закон сохранения импульса справедлив лишь в замкнутой системе, когда на тела не действуют никакие силы. Однако его можно применять: 1) если сумма внешних сил, действующих на систему

тел, не равна нулю, т.е. $\sum \vec{F}_i \neq 0$, но равна нулю сумма проекций всех внешних сил на какую-либо ось (например, ось x), тогда проекция импульса системы на эту ось $p_x = \text{const}$; 2) если $\sum \vec{F}_i \neq 0$, а взаимодействие тел кратковременно и импульс внешних сил существенно не изменяет импульса тела.

Закон сохранения импульса связан с однородностью пространства и является фундаментальным законом природы.

§9. Центр масс. Закон движения центра масс

Точка C (рис. 6), положение которой можно определить радиусом-вектором

$$\vec{r}_c = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_n \vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i, \quad (1.43)$$

называется *центром масс* системы. Масса

i -й частицы системы обозначена m_i , $\vec{r}_i$ - радиус-вектор, определяющий положение i -й частицы, m - масса системы.

Дифференцируя по времени уравнение (1.43), найдем скорость движения центра масс:

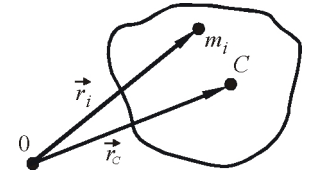


Рис. 6

$$\vec{v}_c = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n \vec{p}_i = \frac{\vec{p}}{m}, \quad (1.44)$$

где $\vec{v}_i$ - скорость; $\vec{p}_i$ - импульс i -й частицы; $\vec{p}$ - импульс системы.

Из уравнения (1.44) следует, что импульс системы равен произведению ее массы на скорость движения центра масс:

$$\vec{p} = m \vec{v}_c. \quad (1.45)$$

Подставив выражение (1.45) в уравнение (1.41), получим уравнение движения центра масс:

$$\frac{d}{dt}(m \vec{v}_c) = m \frac{d\vec{v}_c}{dt} = m \vec{a}_c = \vec{F}, \quad (1.46)$$

где $\vec{a}_c$ - ускорение центра масс.

Из уравнения (1.46) можно сделать вывод, что *центр масс системы движется так же, как материальная точка, масса которой равна массе данной системы, и на которую действует сила, равная результирующей всех внешних сил, приложенных к системе.* Для замкнутой системы результирующая сила $\vec{F} = 0$, значит, $\vec{a}_c = 0$, т.е. центр масс замкнутой системы движется прямолинейно и равномерно или покоится.

§10. Энергия, работа, мощность

Универсальной количественной мерой движения и взаимодействия всех видов материи является *энергия*.

Различают виды энергии: механическая, внутренняя, электромагнитная, ядерная и др. В процессе взаимодействия тел энергия может переходить из одного вида в другой. Например, при трении тела нагреваются, при этом механическая энергия переходит во внутреннюю. Изменение вида энергии связано с совершением работы.

Механическая работа - это физическая величина, равная скалярному произведению двух векторов, силы $\vec{F}$ и перемещения $\vec{S}$. Для элементарной работы можно записать выражение

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{S} = F \cdot dS \cos \alpha = F_S dS, \quad (1.47)$$

где F_S - проекция силы на направление перемещения, α - угол между векторами силы и перемещения.

Если $\alpha = 0$, то $dA = FdS$ - максимальная величина; если $\alpha = 90^\circ$, то $A = 0$; если $\alpha = 180^\circ$, то $dA = -FdS$ - работа отрицательная (работа сил сопротивления).

Работа, совершаемая внешними силами над системой, считается положительной; работа, совершаемая самой системой, считается отрицательной.

Для расчета работы переменной силы ($\vec{F} \neq \text{const}$) при перемещении частицы от S_1 до S_2 надо проинтегрировать уравнение (1.47):

$$A = \int_{S_1}^{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{S}. \quad (1.48)$$

Работа на отрезке пути от точки 1 до точки 2 численно равна площади фигуры 012С (рис. 7).

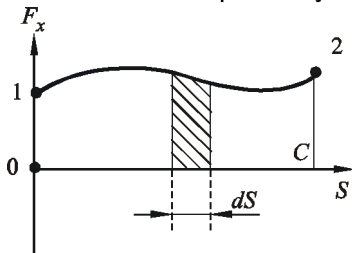


Рис. 7

В системе СИ работа и энергия измеряются в джоулях (Дж), 1 Дж = 1 Н·м.

Консервативной называют силу, работа которой определяется начальным и конечным положением тела и не зависит от пути, по которому оно двигалось.

Консервативными являются силы тяготения, силы упругости. Системы, в которых действуют только консервативные силы, называются консервативными или *потенциальными системами*.

Силы, приводящие к рассеиванию энергии, называются *диссипативными* (силы трения, силы сопротивления и т.д.).

Вычислим работу упругой силы, действующей, например, при растяжении пружины. Сила упругости F и удлинение пружины x связаны зависимостью, определяемой законом Гука (1.39):

$$F = -kx.$$

Элементарная работа dA при бесконечно малом удлинении пружины dx будет равна

$$dA = \vec{F} d\vec{x} = |\vec{F}| |d\vec{x}| \cos 180^\circ = -|\vec{F}| |d\vec{x}| = -kx dx. \quad (1.49)$$

Интегрируя уравнение (1.49), найдем работу, совершаемую упругой силой при растяжении пружины:

$$A = - \int_{x_1}^{x_2} kx dx = - \left(\frac{kx_2^2}{2} - \frac{kx_1^2}{2} \right). \quad (1.50)$$

Из выражения (1.50) следует, что работа сил упругости зависит только от начального x_1 и конечного x_2 положений пружины, а значит, силы упругости являются консервативными.

Согласно уравнению (1.50) работа, совершаемая внешней силой при растяжении пружины на величину x , равна

$$A = \frac{kx^2}{2}, \quad (1.51)$$

если принять $x = 0$ у недеформированного тела.

Мощностью N называется физическая величина, равная работе, совершаемой в единицу времени:

$$N = \frac{dA}{dt} = \frac{\vec{F} d\vec{S}}{dt} = \vec{F} \frac{d\vec{S}}{dt} = \vec{F} \vec{v}. \quad (1.52)$$

Мощность равна скалярному произведению двух векторов: силы $\vec{F}$ и скорости перемещения частицы $\vec{v}$.

В системе СИ мощность измеряется в ваттах (Вт), 1 Вт = 1 Дж/с.

§11. Кинетическая и потенциальная энергия

Кинетическая энергия E_k - это физическая скалярная величина, являющаяся мерой механического движения тел.

Пусть тело массой m движется под действием внешней силы $\vec{F}$ с ускорением $\vec{a} = d\vec{v}/dt$.

Сила $\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$, а элементарная работа данной силы на перемещение $d\vec{S}$ равна

$$dA = \vec{F}d\vec{S} = m \frac{d\vec{v}}{dt} d\vec{S} = m d\vec{v} \frac{d\vec{S}}{dt} = m\vec{v} d\vec{v}.$$

Так как $d\left(\frac{m\vec{v}^2}{2}\right) = \frac{1}{2} m \cdot 2\vec{v} d\vec{v} = m\vec{v} d\vec{v}$, то $dA = d\left(\frac{m\vec{v}^2}{2}\right)$.

Интегрируем полученное выражение:

$$\int_1^2 dA = \int_{v_1}^{v_2} d\left(\frac{mv^2}{2}\right), \quad A_{12} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}.$$

Здесь

$$\frac{mv^2}{2} = E_k \quad (1.53)$$

- кинетическая энергия тела.

Таким образом, работа внешней силы $\vec{F}$ идет на увеличение кинетической энергии тела.

Отметим, что приращение кинетической энергии (в отличие от импульса) определяется работой не только внешних, но и внутренних сил.

Механическая энергия, зависящая от взаимного расположения тел или отдельных его частей и их положения во внешнем силовом поле, называется *потенциальной энергией*.

Мерой потенциальной энергии является работа потенциальных сил, осуществляющих взаимодействие между телами или частями тел.

Рассмотрим перемещение частицы массой m в поле силы тяжести из точки 1 в точку 2 (рис. 8). Работа A_{12} , согласно (1.47), равна

$$A_{12} = \vec{F}_T \vec{S}_{12} = m\vec{g} \vec{S}_{12},$$

где $\vec{F}_T = m\vec{g}$ - сила тяжести.

Проекция вектора перемещения $\vec{S}_{12}$ на направление силы тяжести равна разности высот $(h_1 - h_2)$:

$$A_{12} = mg(h_1 - h_2) = -mgh. \quad (1.54)$$

Величина $mgh = E_p$ называется потенциальной энергией силы тяжести.

Таким образом, тело, поднятое на высоту h , обладает потенциальной энергией E_p , которая определяется начальным и конечным положениями тела. Высота h отсчитывается от нулевого уровня, выбираемого произвольно. Из соотношения (1.54) следует, что работа силы тяжести равна убыли потенциальной энергии системы, т.е. $dA = -dE_p$.

Потенциальной энергией обладают упругодеформированные тела (растянутый или сжатый стержень, сжатая или растянутая пружина).

В этом случае потенциальная энергия зависит от взаимного расположения частей тела.

Чтобы растянуть пружину на величину x согласно формуле (1.51) нужно совершить работу

$$A = \frac{kx^2}{2}.$$

Эта работа идет на увеличение потенциальной энергии пружины:

$$E_p = kx^2/2. \quad (1.55)$$

Установим *связь между потенциальной энергией и силой*.

Пусть имеется консервативная система, в которой материальная точка движется в направлении оси x . При перемещении точки на величину dx силы поля совершают работу

$$dA = F_x dx,$$

которая равна убыли потенциальной энергии, т.е. $dA = -dE_p$.

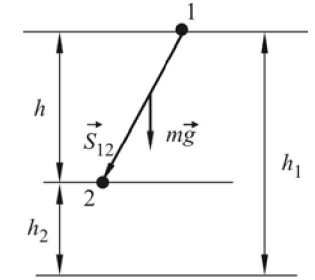


Рис. 8

Таким образом, $F_x dx = -dE_p$, откуда $F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x}$. Для компонент силы по осям y и z можно аналогично записать:

$$F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z}.$$

Так как вектор силы $\vec{F} = \vec{i}F_x + \vec{j}F_y + \vec{k}F_z$, получим

$$\vec{F} = -\left(\vec{i}\frac{\partial E_p}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial E_p}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial E_p}{\partial z}\right) = -\nabla E_p = -\text{grad } E_p, \quad (1.56)$$

где ∇ - оператор У. Гамильтона¹ (оператор набла).

Вектор с компонентами $\partial E_p / \partial x$, $\partial E_p / \partial y$, $\partial E_p / \partial z$, где E_p - скалярная функция координат x , y , z , называется *градиентом* потенциальной энергии и обозначается $\text{grad } E_p$.

Направление вектора градиента совпадает с направлением оси, вдоль которой скалярная функция (в данном случае E_p) возрастает с наибольшей скоростью.

Следовательно, консервативная сила равна градиенту потенциальной энергии, взятому со знаком минус.

§12. Закон сохранения энергии

Полная механическая энергия системы E равна сумме кинетической и потенциальной энергий:

$$E = E_k + E_p. \quad (1.57)$$

Рассмотрим случай, когда в замкнутой системе действуют только консервативные силы. Элементарная работа этих сил dA сопровождается изменением кинетической dE_k и одновременно равным по значению, но противоположным по знаку изменением потенциальной энергии dE_p системы:

$$dA = dE_k = -dE_p.$$

Отсюда

$$dE_k + dE_p = d(E_k + E_p) = dE = 0,$$

т.к. для замкнутых систем $dA = 0$. Следовательно,

$$d(E_k + E_p) = 0$$

или

$$E = E_k + E_p = \text{const}. \quad (1.58)$$

В замкнутой системе, в которой действуют только консервативные силы, полная механическая энергия со временем не изменяется. Это закон *сохранения энергии в механике*. При наличии в системе диссипативных сил полная механическая энергия системы уменьшается, переходя во внутреннюю энергию тел системы.

Все процессы преобразования энергии подчиняются *закону сохранения и превращения энергии: энергия системы может переходить из одного вида в другой, перераспределяться между телами системы, но полная энергия в изолированной системе всегда остается постоянной*.

Закон сохранения механической энергии связан с *однородностью времени* и является фундаментальным законом природы.

§13. Соударение тел

Ударом называется совокупность явлений, возникающих за очень короткий промежуток времени при столкновении тел. Удар называется *абсолютно упругим*, если после соударения тела сами восстанавливают свою форму и размеры. Если после удара тела не восстанавливают свою первоначальную форму, то такой удар называется *абсолютно неупругим*.

Удар называется *прямым и центральным*, если тела при соударении двигались вдоль прямой, проходящей через их центры.

Рассмотрим соударение двух однородных шаров, движущихся поступательно при отсутствии действия внешних сил.

Абсолютно неупругий прямой центральный удар двух шаров

Пусть шары массами m_1 и m_2 имели до удара скорости $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$. Запишем закон сохранения импульса:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{u}, \quad (1.59)$$

где $\vec{u}$ - скорость шаров после удара. При абсолютно неупругом ударе закон сохранения механической энергии не выполняется, т.к. часть механической энергии во время удара переходит во внутреннюю энергию или другие формы энергии. Закон сохранения энергии для этого случая можно записать в виде

¹ Уильям Роуан Гамильтон - ирландский математик.

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \left(\frac{m_1 + m_2}{2} \right) u^2 + E_{\text{деф}}, \quad (1.60)$$

где $E_{\text{деф}}$ - потеря механической энергии тел при деформации.

Из уравнений (1.59) и (1.60) найдем скорость шаров после соударения:

$$\vec{u} = (m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2) / (m_1 + m_2) \quad (1.61)$$

и энергию, пошедшую на деформацию шаров:

$$E_{\text{деф}} = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_1 - v_2)^2. \quad (1.62)$$

Если скорость $v_2 = 0$, то $u = m_1 v_1 / (m_1 + m_2)$, а

$$E_{\text{деф}} = m_1 m_2 v_1^2 / 2(m_1 + m_2),$$

и если при этом $m_2 \gg m_1$, то энергия деформации $E_{\text{деф}}$ приблизительно равна кинетической энергии ударяющего тела:

$$E_{\text{деф}} = \frac{m_1 v_1^2}{2}$$

Таким образом, для получения наибольшей деформации, например при ковке детали, масса наковальни (неподвижного тела) должна быть гораздо больше массы молота.

Абсолютно упругий прямой центральный удар двух шаров

При таком ударе кинетическая энергия переходит полностью или частично в потенциальную энергию упругой деформации. Затем тела восстанавливают первоначальную форму, отталкивая друг друга. В итоге потенциальная энергия упругой деформации снова переходит в кинетическую энергию и тела разлетаются со скоростями, величина и направление которых определяется законом сохранения энергии и законом сохранения импульса:

$$m_1 v_1^2 / 2 + m_2 v_2^2 / 2 = m_1 u_1^2 / 2 + m_2 u_2^2 / 2, \quad (1.63)$$

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2, \quad (1.64)$$

где m_1 и m_2 - массы шаров; v_1 и v_2 - скорости шаров до удара; u_1 и u_2 - скорости шаров после удара.

Уравнения (1.63) и (1.64) приведем к виду

$$m_1 (\vec{v}_1 - \vec{u}_1) = m_2 (\vec{u}_2 - \vec{v}_2), \quad (1.65)$$

$$m_1 (v_1^2 - u_1^2) = m_2 (u_2^2 - v_2^2),$$

или $m_1 (v_1 + u_1)(v_1 - u_1) = m_2 (v_2 + u_2)(u_2 - v_2)$.

Так как все векторы, входящие в уравнение (1.65), коллинеарны, после преобразований запишем $\vec{v}_2 + \vec{u}_2 = \vec{v}_1 + \vec{u}_1$, откуда $\vec{u}_2 = \vec{v}_1 + \vec{u}_1 - \vec{v}_2$. Решая полученное уравнение и уравнение (1.65), находим

$$\vec{u}_1 = [2m_2 \vec{v}_2 + (m_1 - m_2) \vec{v}_1] / (m_1 + m_2), \quad (1.66)$$

$$\vec{u}_2 = [2m_1 \vec{v}_1 + (m_2 - m_1) \vec{v}_2] / (m_1 + m_2). \quad (1.67)$$

Рассмотрим частные случаи.

1. Массы соударяющихся шаров равны: $m_1 = m_2$, из уравнений (1.66) и (1.67) следует, что $\vec{u}_1 = \vec{v}_2$ и $\vec{u}_2 = \vec{v}_1$, т.е. шары при соударении обмениваются скоростями и если один (например, второй) до соударения покоился, то после удара он будет двигаться с той же скоростью, с которой двигался первый шар, а первый шар после удара останавливается.

2. Шар массой m_1 налетает на неподвижную стенку. Массу стенки можно считать бесконечно большой, тогда шар меняет свою скорость на противоположную.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 5. Невесомый блок закреплен на вершине наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол α . Через блок переброшена нерастяжимая нить, к концам которой прикреплены тела 1 и 2 массами m_1 и m_2 . Коэффициент трения между телом 1 и наклонной плоскостью равен μ . Массы блока и нити пренебрежимо малы, трения в блоке нет. Считая, что в начальный момент тела 1 и 2 неподвижны, найти отношение масс m_1 / m_2 , при котором тело 2 начнет опускаться.

Дано: $\alpha, ?$ m_1, m_2 $\frac{m_2}{m_1} = ?$	Решение: Рассмотрим силы, действующие на тела 1 и 2. Спроектируем их на выбранные координатные оси и запишем второй закон Ньютона в виде системы скалярных уравнений. Для тела 1
--	---

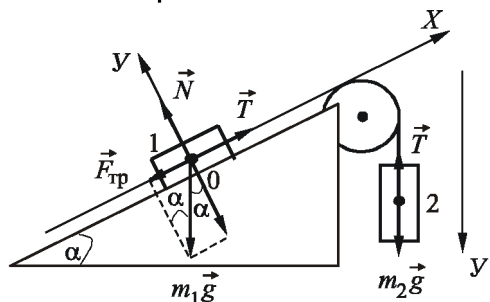


Рис. к задаче 5

учесть, что

$$a_{1x} = a_{2y} = a,$$

так как нить нерастяжима.

$$F_{\text{тр}} = \mu N = \mu m_1 g \cos \alpha. \quad (4)$$

Решая систему (1) - (4), находим:

$$a = g \frac{(m_2 - \mu m_1 \cos \alpha - m_1 \sin \alpha)}{m_1 + m_2}. \quad (5)$$

Разделим в формуле (5) числитель и знаменатель на m_1 .

Тогда

$$a = g \frac{\left[\frac{m_2}{m_1} - \mu \cos \alpha - \sin \alpha \right]}{1 + \frac{m_2}{m_1}}. \quad (6)$$

Очевидно, чтобы тело 2 опускалось, ускорение должно быть положительным. Это будет выполняться, когда в формуле (6)

$$\frac{m_2}{m_1} > (\sin \alpha + \mu \cos \alpha).$$

Ответ: $\frac{m_2}{m_1} > (\sin \alpha + \mu \cos \alpha).$

Задача 6. Частица движется вдоль оси X по закону: $x = \alpha t^2 - \beta t^3$, где α и β - положительные постоянные. В момент $t = 0$ сила, действующая на частицу, равна F_0 . Найти значения силы F_x в точках поворота и в момент, когда частица окажется в точке $x = 0$.

Дано: $x = \alpha t^2 - \beta t^3$ F_0 $F_1 = ?, F_2 = ?$	Решение: Запишем второй закон Ньютона: $F_x = m a_x.$ Для нахождения силы необходимо определить ускорение a_x :
---	---

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 2\alpha t - 3\beta t^2,$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = 2\alpha - 6\beta t. \quad (2)$$

Перепишем уравнение (1) с учетом уравнения (2):

$$F_x = m(2\alpha - 6\beta t). \quad (3)$$

Используя начальные условия, когда $t = 0$ и $F_x = F_0$, найдем массу частицы:

$$F_0 = m2\alpha \Rightarrow m = \frac{F_0}{2\alpha} . \quad (4)$$

а) В точке поворота скорость частицы равна

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 0 ,$$

т.е.

$$2\alpha t - 3\beta t^2 = 0 .$$

Это соответствует времени:

$$t_1 = \frac{2\alpha}{3\beta} . \quad (5)$$

Подставим вместо t выражение для t_1 в формулу (3):

$$F_1 = m(2\alpha - 6\beta t_1) = \frac{F_0}{2\alpha} \left(2\alpha - 6\beta \frac{2\alpha}{3\beta} \right) = -F_0 .$$

б) В точке $x = 0$ частица будет находиться в момент времени t_2 , которое определим из закона движения:

$$x = \alpha t_2^2 - \beta t_2^3 = 0 ,$$

$$t_2^2(\alpha - \beta t_2) = 0 .$$

Отсюда

$$t_2 = \frac{\alpha}{\beta} . \quad (6)$$

Подставив время t_2 в формулу (3), получим

$$F_2 = m(2\alpha - 6\beta t_2) = \frac{F_0}{2\alpha} \left(2\alpha - 6\beta \frac{\alpha}{\beta} \right) = -2F_0 .$$

Ответ: $F_1 = -F_0$; $F_2 = -2F_0$.

Задача 7. Небольшое тело A начинает скользить с вершины гладкой сферы радиусом R . Найти угол α между вертикалью и радиусом - вектором, характеризующим положение тела A относительно центра сферы в момент отрыва от нее, а также скорость тела в момент отрыва.

Дано:

R

$v = ?$

$a = ?$

Решение: На тело в точке C действует сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции опоры $\vec{N}$. По второму закону Ньютона

$$m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a} , \quad (1)$$

где $\vec{a} = \frac{v^2}{R}$ - центростремительное ускорение. Проек-

тируя уравнение (1) на нормаль $\vec{n}$ к траектории в данной точке, запишем:

$$mg \cos \alpha - N = m \frac{v^2}{R} . \quad (2)$$

Направление орты $\vec{n}$ выбираем к центру кривизны траектории в данной точке. В момент отрыва $N = 0$, тогда уравнение (2) будет иметь вид

$$mg \cos \alpha = m \cdot \frac{v^2}{R} ,$$

Рис. к задаче 7

$$g \cos \alpha = \frac{v^2}{R} . \quad (3)$$

Значения скорости v в точке C определим из закона сохранения энергии:

$$mgh = \frac{mv^2}{2} , \quad v^2 = 2gh . \quad (4)$$

Из треугольника OBC найдем h :

$$\frac{OB}{R} = \cos \alpha ,$$

где $OB = R - h$,

$$\frac{R - h}{R} = \cos \alpha ,$$

откуда

$$h = R(1 - \cos \alpha) . \quad (5)$$

Подставив уравнение (5) в (4), получим

$$v^2 = 2gR \cdot (1 - \cos \alpha). \quad (6)$$

Из уравнений (3) и (6) найдем угол α :

$$g \cos \alpha = \frac{v^2}{R} = 2g(1 - \cos \alpha),$$

$$3 \cos \alpha = 2, \quad \alpha = \arccos\left(\frac{2}{3}\right). \quad (7)$$

Скорость в момент отрыва определим из уравнений (6) и (7):

$$v = \sqrt{2gR(1 - \cos \alpha)} = \sqrt{\frac{2}{3}gR}.$$

Ответ: $v = \sqrt{\frac{2gR}{3}}, \quad \alpha = \arccos\left(\frac{2}{3}\right).$

Задача 8. Брусок массой $m = 1,5$ кг тянут за нить так, что он движется с постоянной скоростью по горизонтальной плоскости с коэффициентом трения $\mu = 0,2$. Найти угол α , при котором натяжение нити F будет наименьшим. Чему оно равно?

Дано:

$$m = 1,5 \text{ кг}$$

$$\mu = 0,2$$

$$\alpha = ?$$

$$F_{\min} = ?$$

Решение:

Поскольку тело движется с постоянной скоростью, то согласно первому закону Ньютона:

$$\vec{N} + \vec{F} + m\vec{g} + \vec{F}_{\text{тр}} = 0, \quad (1)$$

где $m\vec{g}$ - сила тяжести, $\vec{N}$ - сила реакции плоскости, $\vec{F}_{\text{тр}}$ - сила трения скольжения и $\vec{F}$ - сила, с которой тянут брусок. Спроектируем

уравнение (1) на оси X и Y .

$$\text{ОХ:} \quad F \cos \alpha - F_{\text{тр}} = 0, \quad (2)$$

$$\text{ОУ:} \quad N + F \sin \alpha - mg = 0, \quad (3)$$

где $F_{\text{тр}} = \mu \cdot N$.

Решая совместно уравнения (2) и (3), получим

$$F = \frac{\mu mg}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha}. \quad (4)$$

при котором натяжение нити будет наименьшим, найдем производную $\frac{dF}{d\alpha}$ и приравняем ее нулю:

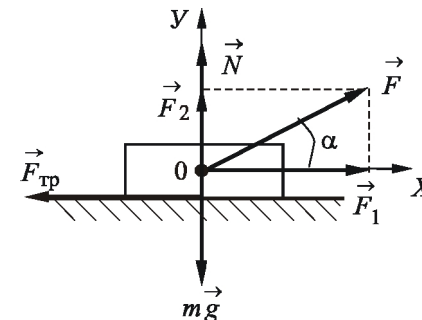


Рис. к задаче 8

$$\frac{dF}{d\alpha} = \left(\frac{\mu mg}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha} \right)' = \frac{\mu mg (\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}{(\cos \alpha + \mu \sin \alpha)^2} = 0,$$

$$\sin \alpha - \mu \cos \alpha = 0, \quad \mu = \operatorname{tg} \alpha,$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} \mu = 11^\circ 20'.$$

Подставив α и данные задачи в уравнение (4), найдем:

$$F_{\min} = 2,9 \text{ Н.}$$

Ответ: $\alpha = 11^\circ 20', \quad F_{\min} = 2,9 \text{ Н.}$

Задача 9. Частица 1 массой m , летящая со скоростью v , сталкивается с неподвижной частицей 2 массой $4m$. После соударения частица 1 движется в противоположном направлении, а 1/4 часть ее первоначальной энергии уходит на нагревание и деформацию. Найти скорости частиц v_1 и v_2 после соударения.

Решение: Запишем законы сохранения импульса (1.42) и энергии (1.58) для упругого удара частицы:

$$\begin{cases} mv = -mv_1 + 4mv_2, \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \frac{mv^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{4mv_2^2}{2} + \frac{1}{4} \frac{mv^2}{2}, \end{cases} \quad (2)$$

где $\frac{1}{4} \frac{mv^2}{2}$ - потенциальная энергия деформации.

Система уравнений (1) и (2) содержит два неизвестных. Выразим v_1 из уравнения (1) и подставим в уравнение (2):

$$v_1 = 4v_2 - v, \quad (3)$$

$$v^2 = (4v_2 - v)^2 + 4v_2^2 + \frac{1}{4}v^2,$$

$$v^2 = 16v_2^2 - 8v_2v + v^2 + 4v_2^2 + \frac{1}{4}v^2,$$

$$20v_2^2 - 8vv_2 + 0,25v^2 = 0. \quad (4)$$

Решая квадратное уравнение (4), находим:

$$v_2 = 0,36v.$$

Подставляя v_2 в формулу (3), определим:

$$v_1 = 0,44v.$$

Ответ: $v_2 = 0,36v$; $v_1 = 0,44v$.

Задача 10. В стальной кубик массой $M=1$ кг, находившийся в покое на горизонтальной поверхности, попадает стальной шарик массой $m=10$ г, летевший горизонтально со скоростью $v_1 = 10^3$ м/с, и упруго отражается обратно. Определить, какой путь L после удара пройдет кубик до остановки, если коэффициент трения между кубиком и горизонтальной поверхностью $\mu=0,2$.

Дано:

$$M = 1 \text{ кг}$$

$$m = 10^{-2} \text{ кг}$$

$$v_1 = 10^3 \text{ м/с}$$

$$\mu = 0,2$$

$$L = ?$$

Решение:

Запишем закон сохранения импульса в проекции на ось OX :

$$mv_1 = -mv_2 + Mv. \quad (1)$$

Та как удар абсолютно упругий, применим закон сохранения энергии:

$$\frac{mv_1^2}{2} = \frac{mv_2^2}{2} + M\frac{v^2}{2}. \quad (2)$$

Учитывая, что $m \ll M$, и решая систему уравнений (1) и (2), находим:

$$v_2 = v_1;$$

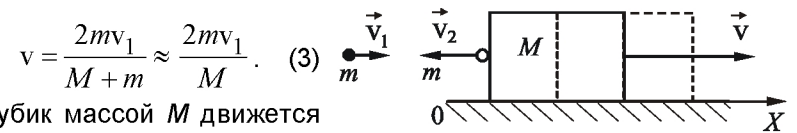


Рис. к задаче 10

Кубик массой M движется с начальной скоростью v по горизонтальной поверхности и вследствие действия сил трения останавливается. Применяя второй закон Ньютона, найдем ускорение a и путь L , который проходит кубик:

$$Ma = \mu \cdot Mg,$$

$$\text{откуда ускорение } a = \mu g, \text{ а путь } L = \frac{v^2}{2a} = \frac{4m^2v_1^2}{M^2 2\mu \cdot g}.$$

Подставив числовые значения, найдем $L = 100$ м.

Ответ: $L = 100$ м.

Задача 11. Два шара массами $m_1 = 10$ кг и $m_2 = 15$ кг подвешены на нитях длиной $L = 2$ м так, что они соприкасаются между собой.

Шар массой m_1 был отклонен на угол $\alpha = 60^\circ$ и выпущен. Определить высоту, на которую поднимутся шары после удара. Удар считать неупругим.

Дано:

$$m_1 = 10 \text{ кг}$$

$$m_2 = 15 \text{ кг}$$

$$L = 2 \text{ м}$$

$$\alpha = 60^\circ$$

$$h_2 = ?$$

Решение:

При отклонении шара 1 на угол α ему была сообщена потенциальная энергия:

$$E_{p1} = m_1gh_1, \quad (1)$$

где $h_1 = L(1 - \cos\alpha)$.

Перед столкновением с шаром 2 он будет обладать кинетической энергией

$$E_{k1} = \frac{m_1v_1^2}{2}. \quad (2)$$

По закону сохранения энергии

$$E_{p1} = E_{k1}.$$

Согласно уравнениям (1), (2) получим

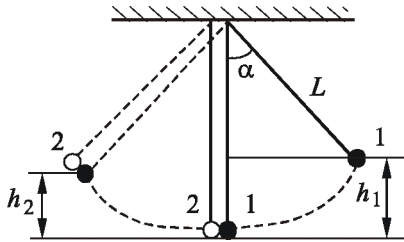


Рис. к задаче 11

$$m_1 g L (1 - \cos \alpha) = \frac{m_1 v_1^2}{2}. \quad (3)$$

Отсюда определим скорость первого шара до удара:

$$v_1 = \sqrt{2gL(1 - \cos \alpha)}. \quad (4)$$

После неупругого соударения оба шара получают одинаковую скорость v_2 , которую определим

из закона сохранения импульса:

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v_2, \\ v_2 = \frac{m_1 \sqrt{2gL(1 - \cos \alpha)}}{m_1 + m_2}. \quad (5)$$

Кинетическая энергия шаров в нижнем положении перейдет в потенциальную энергию при их поднятии (по закону сохранения энергии):

$$E_{k2} = E_{p2}, \\ \frac{(m_1 + m_2) v_2^2}{2} = (m_1 + m_2) g h_2.$$

Отсюда

$$h_2 = \frac{v_2^2}{2g} = \frac{L m_1^2 (1 - \cos \alpha)}{(m_1 + m_2)^2}.$$

После соответствующих вычислений получаем

$$h_2 = 0,16 \text{ м}.$$

Ответ: $h_2 = 0,16 \text{ м}.$

Глава 3 ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

§14. Момент силы. Момент импульса. Закон сохранения момента импульса

Сила $\vec{F}$, приложенная к телу в точке A (рис. 9), положение которой задается радиусом-вектором $\vec{r}$, создает *момент силы* $\vec{M}$ относительно точки O:

$$\vec{M} = [\vec{r} \vec{F}]. \quad (1.68)$$

Направление вектора $\vec{M}$ определяется правилом правого винта. Раскрыв векторное произведение (1.68), получим

$$M = Fr \cdot \sin \alpha = Fl, \quad (1.69)$$

где $l = r \cdot \sin \alpha$ - плечо силы (кратчайшее расстояние от точки O до линии действия силы).

Моментом силы относительно неподвижной оси z называется скалярная величина M_z , равная проекции момента силы $\vec{M}$ относительно какой-либо точки O, лежащей на данной оси z:

$$M_z = [\vec{r} \vec{F}]_z. \quad (1.70)$$

Аналогично выражению (1.68) определяется *момент импульса* материальной точки $\vec{L}_i$ относительно точки O:

$$\vec{L}_i = [\vec{r}, m_i \vec{v}_i] = [\vec{r} \vec{p}_i], \quad (1.71)$$

где $\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$ - момент импульса, $\vec{r}$ - радиус-вектор.

Проекция момента импульса на ось z называется *моментом импульса* относительно оси z:

$$L_{iz} = [\vec{r} \vec{p}_i]_z.$$

Модуль момента импульса можно определить, раскрыв векторное произведение (1.71):

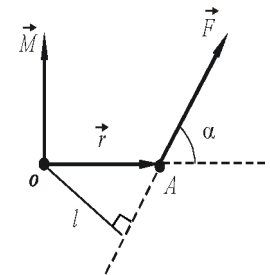


Рис. 9

$$L_i = p_i r \sin \alpha = l p_i, \quad (1.72)$$

где $l_i = r \sin \alpha$ - плечо вектора импульса $\vec{p}_i$.

В системе СИ единицей измерения момента силы является ньютон на метр (Нм), а единицей момента импульса - килограмм-метр в квадрате на секунду ($\text{кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}$).

Момент импульса системы материальных точек

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^n \vec{L}_i = \sum_{i=1}^n [\vec{r} \vec{p}_i]. \quad (1.73)$$

Дифференцируя по времени уравнение (1.73), получим

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^n \left(\left[\frac{d\vec{r}}{dt} \vec{p}_i \right] + \left[\vec{r} \frac{d\vec{p}_i}{dt} \right] \right) = \sum_{i=1}^n \left([\vec{v} \vec{p}_i] + [\vec{r} \vec{F}_i] \right) = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i = \vec{M}, \quad (1.74)$$

где $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$, а $\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_i$, $\vec{M}$ - результирующий момент внешних сил.

Сумма $\sum_{i=1}^n [\vec{v} \vec{p}_i] = 0$, так как векторы $\vec{v}$ и $\vec{p}_i$ направлены по одной прямой в одну сторону.

Выражение (1.74) $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$ называется *уравнением моментов*: производная по времени от момента импульса системы относительно какой-либо точки равна моменту результирующей внешних сил относительно той же точки.

Если система замкнута, то момент внешних сил $\vec{M} = 0$ и

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0, \text{ т.е. } \vec{L} = \text{const}. \quad (1.75)$$

Момент импульса замкнутой системы со временем не изменяется. Будет оставаться постоянным со временем и момент импульса системы относительно произвольной оси z , проходящей через точку O .

Уравнение (1.75) выражает *закон сохранения момента импульса системы*. Этот закон можно вывести, опираясь на второй закон Ньютона и свойство симметрии пространства: его изотропность.

Закон сохранения момента импульса является фундаментальным законом природы.

§15. Момент инерции.

Кинетическая энергия вращающегося тела

Рассмотрим тело массой m , вращающееся вокруг неподвижной оси z (рис. 10). Мысленно разобьем его на систему материальных точек.

Пусть материальная точка A массой m_i отстоит от оси вращения на расстоянии r_i . Скалярная физическая величина J_i , равная произведению массы материальной точки на квадрат расстояния от нее до оси вращения, называется *моментом инерции материальной точки*:

$$J_i = m_i r_i^2. \quad (1.76)$$

Момент инерции тела равен сумме моментов инерций всех материальных точек, из которых состоит тело:

$$J = \sum m_i r_i^2.$$

При непрерывном распределении массы в теле данная сумма сводится к интегралу:

$$J = \int_{(m)} r^2 dm = \int_{(V)} \rho r^2 dV, \quad (1.77)$$

где ρ - плотность тела; dV - объем малого элемента тела массой dm , отстоящего от оси вращения на расстоянии r .

В СИ момент инерции измеряется в килограммах на метр в квадрате ($\text{кг} \cdot \text{м}^2$).

Кинетическая энергия материальной точки определяется по формуле

$$E_{ki} = \frac{m_i v_i^2}{2},$$

где v_i - линейная скорость движения точки.

Если просуммировать кинетические энергии всех n материальных точек, из которых состоит тело, то найдем кинетическую энергию тела:

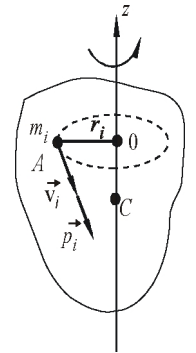


Рис. 10

$$E_k = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2}.$$

Заменив в данном выражении линейную скорость через угловую: $v_i = \omega r_i$, получим формулу для определения кинетической энергии вращающегося тела:

$$E_k = \sum_{i=1}^n \frac{m_i r_i^2 \omega^2}{2} = \sum_{i=1}^n J_i \frac{\omega^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^n J_i = J \frac{\omega^2}{2}, \quad (1.78)$$

где J_i - момент инерции материальной точки, J - момент инерции тела, ω - угловая скорость вращения.

В случае, когда тело совершает одновременно поступательное и вращательное движение (например, шар катится по плоскости), его кинетическая энергия равна сумме кинетических энергий поступательного и вращательного движений:

$$E_k = E_k^{\text{пост}} + E_k^{\text{вращ}} = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}.$$

§16. Моменты инерции некоторых тел

1. Обруч. Ось вращения обруча 00 проходит через центр масс - точку C (рис.11).

Выделим на обруче материальную точку массой m_i , отстоящую на расстоянии R , равном радиусу обруча, от точки C .

Момент инерции материальной точки согласно уравнению (1.76) равен

$$J_i = m_i R^2.$$

Рис. 11

Момент инерции обруча равен сумме моментов инерции материальных точек, из которых состоит обруч:

$$J = \sum_{i=1}^n J_i = R^2 \sum_{i=1}^n m_i = mR^2, \quad (1.79)$$

где $m = \sum_{i=1}^n m_i$ - масса обруча.

2. Диск. Рассмотрим однородный диск (плотность $\rho = \text{const}$), имеющий радиус R , массу m и толщину a , ось вращения 00 которого проходит через центр масс - точку C (рис. 12).

Разобьем мысленно диск на полые concentricкие цилиндры бесконечно малой толщины dr с внутренним радиусом r и внешним радиусом $(r + dr)$. По формуле (1.77) найдем момент инерции диска как сумму моментов инерции малых цилиндров:

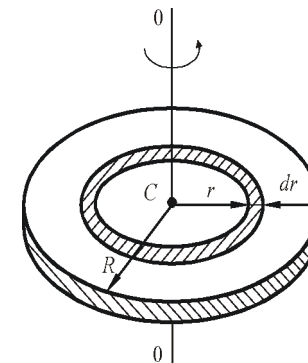


Рис. 12

$$J = \rho \int_{(V)} r^2 dV = \rho \int_{(r)} r^2 2\pi r dr \cdot a = 2\pi \rho a \int_0^R r^3 dr,$$

где $2\pi r dr \cdot a$ - объем малого полого цилиндра.

Интегрируя данное выражение, получим

$$J = 2\pi \rho a \frac{r^4}{4} \Big|_0^R = \frac{1}{2} \pi \rho a R^4 = \frac{1}{2} m R^2. \quad (1.80)$$

Далее без вывода запишем формулы для вычисления моментов инерции некоторых однородных тел, имеющих массу m , когда ось вращения проходит через центр масс.

$$\mathbf{3. Шар:} \quad J = 0,4mR^2, \quad (1.81)$$

где R - радиус шара.

4. Прямой тонкий стержень:

$$J = ml^2/12, \quad (1.82)$$

где l - длина стержня.

Если ось вращения проходит через конец стержня, то

$$J = ml^2/3. \quad (1.83)$$

Момент инерции тела относительно оси, не проходящей через его центр масс, определяется по теореме Я. Штейнера¹:

Момент инерции тела J относительно произвольной оси равен сумме момента инерции этого тела J_c относительно параллельной оси, проходящей через центр масс, и произведения массы тела m на квадрат расстояния a между осями:

$$J = J_c + ma^2. \quad (1.84)$$

§17. Основной закон динамики вращательного движения.

Работа и мощность при вращательном движении

Рассмотрим вращение твердого тела вокруг неподвижной оси (см. рис. 10). Мысленно разобьем тело на материальные точки массой m_i , находящиеся от оси вращения на расстоянии $\vec{r}_i$. Траекториями движения материальных точек являются окружности с радиусом $\vec{r}_i$. Определим момент импульса материальной точки A относительно оси вращения:

$$\vec{L}_{iz} = [\vec{r}_i \vec{p}_i].$$

Модуль

$$|\vec{L}_{iz}| = r_i p_i \sin \frac{\pi}{2} = r_i p_i = m_i v_i r_i.$$

Так как скорость $v_i = \omega r_i$ то

$$L_{iz} = m_i \omega r_i^2 = J_{iz} \omega,$$

где J_{iz} - момент инерции материальной точки относительно оси z , ω - угловая скорость вращения тела.

Момент импульса тела относительно оси z запишется в виде

$$L_z = \sum_{i=1}^n J_{iz} \omega = \omega \sum_{i=1}^n J_{iz} = J_z \omega, \quad (1.85)$$

где J_z - момент инерции тела относительно оси z , n - число материальных точек.

Вектор момента импульса совпадает по направлению с вектором угловой скорости.

¹ Якоб Штейнер(1763-1863)-швейцарский математик.

Согласно (1.85) закон сохранения момента импульса запишется в виде

$$J\omega = \text{const} \text{ или } J_1\omega_1 = J_2\omega_2. \quad (1.86)$$

Если у тела, совершающего вращательное движение, под действием внутренних сил увеличивается момент инерции, то это приводит к уменьшению его угловой скорости вращения, и наоборот.

Законы сохранения момента импульса можно иллюстрировать с помощью скамьи Жуковского¹ (рис. 13). На платформу, которая может вращаться вокруг вертикальной оси, встает человек и вытягивает в стороны руки. Платформа приводится во вращательное движение. При опускании рук вниз уменьшается момент инерции человека ($J_2 < J_1$), а следовательно, увеличивается угловая скорость вращения ($\omega_2 > \omega_1$), так как произведение

$$J\omega = \text{const}.$$

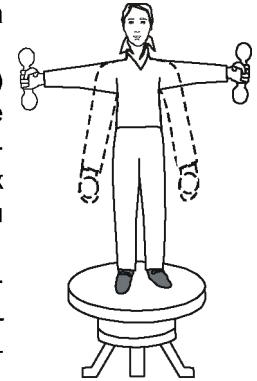


Рис. 13

$$\text{Продифференцируем по времени уравнение (1.85): } \frac{dL_z}{dt} = J_z \frac{d\omega}{dt}.$$

$$\text{Согласно (1.83) } \frac{dL_z}{dt} = M, \text{ а по формуле (1.28) } \frac{d\omega}{dt} = \varepsilon, \text{ откуда}$$

$$\text{угловое ускорение } \varepsilon = M / J_z. \quad (1.87)$$

Уравнение (1.87) называется *основным законом динамики вращательного движения: угловое ускорение при вращательном движении твердого тела прямо пропорционально моменту внешних сил, действующих на тело, и обратно пропорционально моменту инерции тела.*

Найдем формулы для вычисления работы и мощности при вращении тела.

При неподвижной оси вращения потенциальная энергия вращающегося твердого тела не изменяется и работа внешних сил идет на

¹ Жуковский Николай Егорович-(1847-1921)-русский ученый, основоположник аэродинамики.

приращение кинетической энергии тела. Используя уравнение (1.78), для элементарной работы запишем:

$$dA = d\left(\frac{J\omega^2}{2}\right) = \frac{1}{2}J \cdot 2 \cdot \omega d\omega = J\omega d\omega.$$

Согласно (1.85) $J d\omega = dL$, то $dA = \omega dL$, но $dL = Mdt$ (уравнение (1.74)), следовательно, $dA = M\omega dt = Md\varphi$, т.к. $\omega dt = d\varphi$. Отсюда находится работа при вращательном движении:

$$A = \int M d\varphi. \quad (1.88)$$

$$\text{Мощность} \quad N = \frac{dA}{dt} = M \frac{d\varphi}{dt} = M\omega. \quad (1.89)$$

Следовательно, мощность при вращательном движении равна произведению момента внешних сил на угловую скорость вращения.

§18. Гироскопы

Оси вращения твердых тел, не изменяющие своей ориентации в пространстве без воздействия внешних сил, называются *свободными осями*. Свободными осями могут служить три взаимно перпендикулярных оси, проходящие через центр инерции твердого тела. Их также называют *главными осями инерции тела*.

При вращении вокруг любой из главных осей момент импульса $\vec{L}$ тела имеет одинаковое направление с угловой скоростью $\vec{\omega}$ тела

и определяется формулой (1.85): $\vec{L} = J\vec{\omega}$. Причем вектор $\vec{L}$ не зависит от выбора точки на оси вращения.

Гироскопом (волчком) называют массивное симметричное тело, вращающееся с большой скоростью вокруг оси симметрии. Рассмотрим движение волчка, один конец оси вращения которого шарнирно закреплен (точка o на рис.14). Опыт показывает, что при некоторой угловой скорости вращения ω волчок совершает *прецессионное* движение: ось волчка описывает конус вокруг вертикали

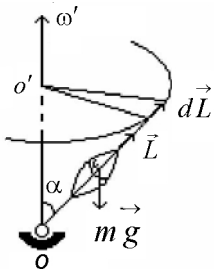


Рис. 14

oo' с угловой скоростью $\omega' \ll \omega$. В результате этого возникает добавочный момент импульса $\vec{L}'$, обусловленный прецессией. Поскольку $\omega' \ll \omega$, моментом импульса $\vec{L}'$ в ряде случаев можно пренебречь. Тогда характер движения волчка определяется поведением вектора $\vec{L} = J\vec{\omega}$. Согласно уравнению моментов (1.74) вектор $\vec{L}$ относительно точки o за время dt получает приращение $d\vec{L}$ (рис.14):

$$d\vec{L} = \vec{M}dt,$$

где $\vec{M}$ - момент силы тяжести $m\vec{g}$ относительно той же точки. Вектор $d\vec{L}$ совпадает по направлению с вектором $\vec{M}$ и перпендикулярен вектору $\vec{L}$. В результате вектор $\vec{L}$, а значит, и ось волчка будут поворачиваться вокруг вертикали oo' , совершая прецессию.

Рассмотрим случай, когда на вращающийся гироскоп действует пара внешних сил $\vec{F}$ (рис.15), создающая относительно центра масс гироскопа C момент $\vec{M}$. Момент сил

и за время dt момент импульса гироскопа $\vec{L}$ получит приращение $d\vec{L} = \vec{M}dt$ (заметим, что $d\vec{L}$ и $\vec{M}$ сонаправлены) и станет равным $\vec{L}' = \vec{L} + d\vec{L}$. Новое положение оси гироскопа будет совпадать с направлением вектора $\vec{L}'$, т.е. ось вращения гироскопа повернется вокруг прямой

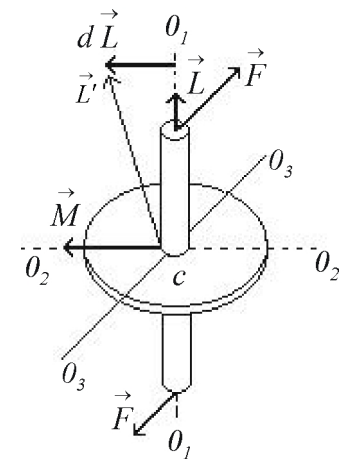


Рис.15

O_3O_3 (а не O_2O_2 , как кажется). Данное явление получило название *гироскопический эффект*.

Чтобы ось гироскопа могла свободно поворачиваться в пространстве, её закрепляют в карданном подвесе. При этом гироскоп приобретает три степени свободы. Свойство гироскопа сохранять направление своей оси в пространстве используется в устройствах автоматического управления движением самолетов (автопилот), ракет, торпед и т.д. Свойство гироскопа прецессировать под действием приложенных сил используется в навигационных приборах: гироскопах, гировертикалях и т.д.

Навигационные гироскопические системы и приборы обладают высокой надежностью и помехоустойчивостью.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 12. К концам невесомой и нерастяжимой нити, перекинутой через блок, прикреплены грузы $m_1 = 300\text{г}$ и $m_2 = 200\text{г}$. Блок, укрепленный на горизонтальной оси, считать однородным диском массой $m_0 = 300\text{г}$. Найти линейное ускорение грузов.

Дано:

$$m_1 = 300\text{г} = 0,3\text{кг}$$

$$m_2 = 200\text{г} = 0,2\text{кг}$$

$$m_0 = 300\text{г} = 0,3\text{кг}$$

$$a = ?$$

Решение:

Заданная система состоит из трех тел, каждое из которых следует рассматривать отдельно. На рис. к задаче показаны силы, действующие на грузы m_1 и m_2 . Тогда второй закон Ньютона для каждого из грузов может быть записан следующим образом:

$$m_1 \vec{a} = \vec{T}_1 + m_1 \vec{g}, \quad (1)$$

$$m_2 \vec{a} = \vec{T}_2 + m_2 \vec{g}. \quad (2)$$

Ускорения грузов считаем равными, но направленными в противоположные стороны. В проекциях на координатную ось ОУ уравнения (1) и (2) примут вид

$$m_1 a = m_1 g - T_1, \quad (3)$$

$$-m_2 a = m_2 g - T_2. \quad (4)$$

Так как масса блока соизмерима с массой грузов, нельзя предположить, что силы, с которыми нить действует на грузы m_1 и m_2 , равны между собой. Вращение блока вызывается действием сил натяжения нити:

$$T'_1 = T_1, \quad T'_2 = T_2.$$

Запишем основное уравнение динамики вращательного движения (1.87) в применении к блоку, считая направление вращения блока против часовой стрелки за положительное:

$$J\varepsilon = T'_1 r - T'_2 r. \quad (5)$$

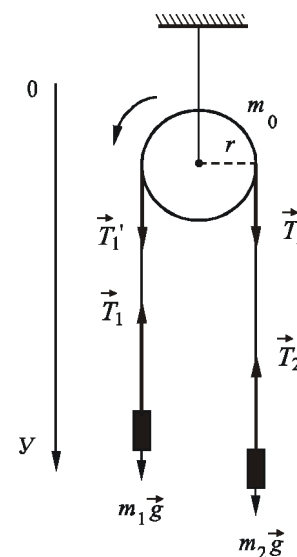


Рис. к задаче 12

В силу того, что нить нерастяжима и, следовательно, линейное ускорение грузов и всех точек нити одинаково равно (при отсутствии проскальзывания нити) касательному ускорению крайних точек обода, справедливо равенство

$$\varepsilon = \frac{a}{r} . \quad (6)$$

Перепишем уравнение (5):

$$\frac{Ja}{r} = T_1 r - T_2 r , \quad (7)$$

где момент инерции диска $J = \frac{m_0 r^2}{2}$.

Решая совместно уравнения (3), (4) и (7), находим:

$$a = \frac{g(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2 + \frac{m_0}{2}} .$$

Ответ: $a = 1,5 \text{ м/с}^2$.

Задача 13. Однородный шар массой m скатывается по наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом. Определить ускорение a_C центра масс.

Дано:
 m

α

$a_C = ?$

Решение: Скатывающееся тело обладает симметрией вращения относительно точки C . Будем предполагать, что при движении не возникает скольжения. Это означает, что скорость тела в точке A равна нулю. На скатывающееся тело действуют сила нормального давления $\vec{N}$, касательная сила трения $\vec{F}_\tau$ и сила тяжести шара $m\vec{g}$. При отсутствии сколь-

жения (чистое качение) сила $\vec{F}_\tau$ есть сила трения покоя или сила трения сцепления. Она может принимать любые значения от 0 до μN . Если $\vec{F}_\tau > \mu N$, то чистое качение невозможно - оно будет сопровождаться скольжением.

Решим задачу двумя способами:

Способ 1. Применим основное уравнение динамики вращательного движения относительно мгновенной оси вращения. При отсутствии скольжения мгновенная ось проходит через точку касания A . Так как мгновенная ось и ось, проходящая через центр масс C , движутся параллельно друг другу, то основное уравнение динамики имеет форму:

$$\frac{J_A d\omega}{dt} = M_A . \quad (1)$$

Или, в соответствии с рисунком:

$$\frac{J_A d\omega}{dt} = mgr \sin \alpha . \quad (2)$$

Сила N выпадает из уравнения, так как она проходит через ось A , и ее момент относительно этой оси равен нулю. Линейная скорость точки C связана со скоростью точки A соотношением

$$v_C = v_A + \omega r .$$

При отсутствии скольжения $v_A = 0$, а поэтому

$$v_C = \omega r .$$

Ускорение центра масс

$$a_C = \frac{dv_C}{dt} = \frac{r d\omega}{dt} . \quad (3)$$

Из уравнений (2), (3) получаем

$$a_C = \frac{mgr^2 \sin \alpha}{J_A} . \quad (4)$$

По теореме Штейнера

$$J_A = J_C + mr^2 , \quad (5)$$

где J_C - момент инерции шара относительно оси, проходящей через его центр.

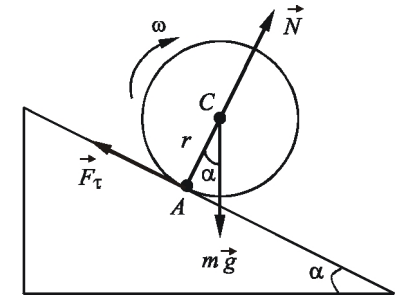


Рис. к задаче 13

Окончательно получаем

$$a_C = \frac{5g \sin \alpha}{7}, \quad (6)$$

т.к. $J_C = \frac{2}{5} m r^2$.

Способ 2. Применим закон сохранения энергии:

$$\frac{1}{2} J_A \omega^2 = mgh, \quad (7)$$

где h - высота, с которой опустилось тело при скатывании из

состояния покоя; $\frac{1}{2} J_A \omega^2$ - кинетическая энергия тела.

Пусть тело прошло вдоль наклонной плоскости путь x , тогда $h = x \cdot \sin \alpha$ и, следовательно:

$$\frac{J_A \omega^2}{2} = \frac{J_A v^2}{2r^2} = mgx \sin \alpha. \quad (8)$$

Найдем из уравнения (8) v :

$$v = \sqrt{\frac{2r^2 mgx \sin \alpha}{J_A}}. \quad (9)$$

Учитывая, что $v = \frac{dx}{dt}$, и разделив переменные, интегрируем соотношение (9):

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{2r^2 mg \sin \alpha}{J_A}} \int_0^t dt, \quad (10)$$

$$2\sqrt{x} = t \sqrt{\frac{2r^2 mg \sin \alpha}{J_A}}.$$

Возведем обе части уравнения (10) в квадрат и найдем x :

$$x = \frac{r^2 mg t^2 \sin \alpha}{2J_A}. \quad (11)$$

Сравнивая формулу (11) с уравнением равноускоренного движения $x = \frac{at^2}{2}$, получаем

$$a_C = \frac{r^2 mg \sin \alpha}{J_A} = \frac{g \sin \alpha}{1 + \frac{J_C}{mr^2}} = \frac{5g \sin \alpha}{7}.$$

Ответ: $a_C = \frac{5}{7} g \sin \alpha$.

Задача 14. На однородный сплошной цилиндр массой M и радиусом R плотно намотана легкая нить, к концу которой прикреплен груз массой m . В момент времени $t = 0$ система пришла в движение. Пренебрегая трением, найти зависимость от времени модуля угловой скорости цилиндра; кинетической энергии всей системы.

Дано: $\begin{array}{l} M, R, m \\ \omega = ? \\ E_k = ? \end{array}$	Решение: Запишем систему уравнений для падающего груза m и вращающегося сплошного цилиндра M: $\begin{cases} \vec{T} R = J \vec{\epsilon}, \\ m\vec{g} + \vec{T} = m\vec{a}. \end{cases} \quad (1)$
---	---

Спроектируем уравнения (1) на ось OY :

$$\begin{cases} T R = J \epsilon, \\ mg - T = ma, \end{cases} \quad (2)$$

где $J = \frac{MR^2}{2}$, а $\epsilon = \frac{a}{R}$.

Совместное решение системы уравнений (2) дает:

$$\epsilon = \frac{2mg}{R(2m + M)}, \quad (3)$$

где $\epsilon = \frac{d\omega}{dt}$.

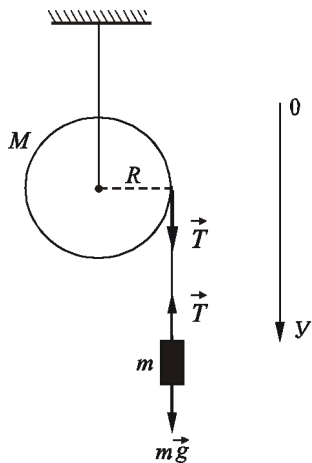


Рис. к задаче 14

Перепишем уравнение (3):

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{2mg}{R(2m+M)} \quad (4)$$

Проинтегрировав уравнение (4), находим модуль угловой скорости:

$$\int_0^\omega d\omega = \frac{2mg}{R(2m+M)} \cdot \int_0^t dt, \quad (5)$$

$$\omega = \frac{2mgt}{R(2m+M)}.$$

Кинетическая энергия системы представляет собой сумму кинетической энергии вращающегося цилиндра и кинетической энергии поступательного движения падающего груза:

$$E_k = \frac{J\omega^2}{2} + \frac{mv^2}{2} \quad (6)$$

Произведем в уравнении (6) замену: ω по формуле (5) и $v = \omega R$. Окончательное выражение для кинетической энергии всей системы будет:

$$E_k = \frac{MR^2}{2} \cdot \frac{4m^2 g^2 t^2}{R^2 (2m+M)^2} + \frac{mR^2}{2} \cdot \frac{4m^2 g^2 t^2}{R^2 (2m+M)^2} =$$

$$= \frac{m^2 g^2 t^2}{2m+M}.$$

Задача 15. На скамье Жуковского (см. рис.13) стоит человек и держит на вытянутых руках гири по 10 кг каждая. Расстояние от каждой гири до оси вращения скамьи $l_1 = 75$ см. Скамья вращается, делая $n_1 = 1$ об/с. Определить скорость вращения скамьи и работу,

которую произведет человек, если он сожмет руки так, что расстояние от каждой гири до оси уменьшится до $l_2 = 20$ см. Момент инерции скамьи с человеком относительно оси вращения

$$J_0 = 2,5 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Дано:

$$m = 10 \text{ кг}$$

$$l_1 = 0,75 \text{ м}$$

$$l_2 = 0,2 \text{ м}$$

$$n_1 = 1 \text{ с}^{-1}$$

$$J_0 = 2,5 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

$$n_2 = ?$$

$$A = ?$$

Решение: При перемещении гирь относительно оси вращения на систему человек - скамья - гири будут действовать внешние силы - силы реакции опоры, линия действия которых проходит через ось вращения. Момент этих сил равен нулю. Следовательно, для системы данных тел будет выполняться закон сохранения моментов импульса. Момент силы тяжести относительно оси скамьи равен нулю. Работу сила тяжести не совершает (гири не смещаются по высоте).

Поскольку момент инерции гирь, а следовательно всей системы, будет уменьшаться, скорость вращения скамьи будет возрастать, возрастает и кинетическая энергия системы.

Увеличение кинетической энергии происходит за счет работы человека. До перемещения гирь момент импульса системы

$$L_1 = (J_0 + 2ml_1^2)\omega_1,$$

после перемещения

$$L_2 = (J_0 + 2ml_2^2)\omega_2,$$

$$\omega = 2\pi n.$$

По закону сохранения момента импульса $L_1 = L_2$, следовательно,

$$(J_0 + 2ml_1^2)2\pi n_1 = (J_0 + 2ml_2^2)2\pi n_2. \quad (1)$$

Из уравнения (1) находим:

$$n_2 = \frac{n_1(J_0 + 2ml_1^2)}{J_0 + 2ml_2^2}.$$

Работа человека равна приращению кинетической энергии системы

$$A = E_{k2} - E_{k1}. \quad (2)$$

Так как начальная кинетическая энергия системы

$$E_{k1} = \frac{1}{2}(J_0 + 2ml_1^2)\omega_1^2,$$

конечная кинетическая энергия системы

$$E_{k2} = \frac{1}{2}(J_0 + 2ml_2^2)\omega_2^2,$$

то
$$A = 2\pi^2 \left[(J_0 + 2ml_2^2)n_2^2 - (J_0 + 2ml_1^2)n_1^2 \right].$$

Ответ: $A = 870 \text{ Дж};$

$$n_2 = 4,2 \text{ с}^{-1}.$$

Глава 4 ГРАВИТАЦИЯ

Взаимное притяжение тел называется гравитационным взаимодействием или *гравитацией*. Гравитация - это универсальное взаимодействие между любыми видами материи.

§19. Законы Кеплера. Гравитационное поле

И. Кеплер¹, основываясь на астрономических наблюдениях, установил три закона:

1. Все планеты движутся вокруг Солнца по замкнутым кривым, представляющим собой эллипс, в одном из фокусов которого находится Солнце.

2. Радиус-вектор $\vec{r}$, проведенный от Солнца С к планете М (рис. 16), за равные промежутки времени описывает равные площади.

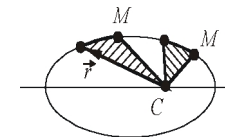


Рис. 16

На рис. 16 эти площади заштрихованы.

3. Квадраты периодов T обращения двух планет вокруг Солнца относятся как кубы больших полуосей их орбит:

$$T_1^2 / T_2^2 = r_1^3 / r_2^3. \quad (1.90)$$

Всякое тело изменяет свойства окружающего пространства - создает вокруг себя гравитационное поле. Под *гравитационным полем* понимают материальный объект природы, который осуществляет взаимодействие тел по закону всемирного тяготения (1.38).

Если в гравитационное поле, образованное телом массой m (рис. 17), внести материальную точку массой m_0 , то на нее будет действовать сила притяжения

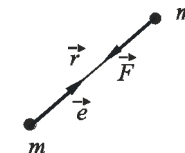


Рис. 17

$$\vec{F} = -G \frac{mm_0}{r^2} \cdot \vec{e},$$

где $\vec{e}$ - орт радиуса-вектора $\vec{r}$. Знак минус показывает, что $\vec{F}$ и $\vec{e}$ направлены в разные стороны.

Физическая величина $\vec{g}$, равная отношению силы притяжения $\vec{F}$

¹Иоганн Кеплер (1571-1630)-немецкий астроном.

к массе материальной точки m_0 , называется *напряженностью гравитационного поля*:

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m_0} = -G \frac{m}{r^2} \cdot \vec{e}. \quad (1.91)$$

Напряженность - векторная величина, являющаяся силовой характеристикой гравитационного поля. Вектор $\vec{g}$ совпадает по направлению с силой, действующей на материальную точку массой m_0 . Напряженность измеряется в метрах на секунду в квадрате (м/с^2).

Поле *однородно*, если напряженность во всех точках поля одинакова.

Найдем работу, совершаемую силами гравитационного поля, по перемещению материальной точки m_0 из положения 1, определяемого $\vec{r}_1$, в положение 2 с радиусом-вектором $\vec{r}_2$ (рис. 18). Элементарная работа

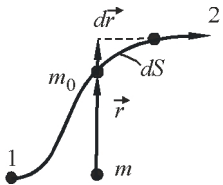


Рис. 18

Знак минус указывает, что сила и перемещение противоположны по направлению. Тогда

$$A_{1-2} = -Gmm_0 \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = G \frac{mm_0}{r_2} - G \frac{mm_0}{r_1}. \quad (1.92)$$

Из формулы (1.92) видно, что работа сил гравитационного поля не зависит от того, каким путем осуществляется процесс перехода из положения 1 в положение 2, а определяется координатами начального и конечного положений точки. Следовательно, гравитационное поле потенциально и работа A_{1-2} равна убыли потенциальной энергии системы:

$$E_{p1} - E_{p2} = - \left(G \frac{mm_0}{r_1} - G \frac{mm_0}{r_2} \right).$$

Если $r_2 \rightarrow \infty$, то $E_{p2} = 0$. Таким образом, потенциальная энергия

$$E_p = -Gmm_0 / r. \quad (1.93)$$

Скалярная физическая величина ϕ , равная отношению потенциальной энергии E_p к массе материальной точки m_0 , называется *потенциалом гравитационного поля*:

$$\phi = E_p / m_0 = -Gm / r. \quad (1.94)$$

Потенциал - энергетическая характеристика поля.

В системе СИ потенциал гравитационного поля измеряется в джоулях на килограмм (Дж/кг).

Установим связь между напряженностью и потенциалом гравитационного поля. Из выражений (1.91) и (1.94) следует, что $\vec{F} = m_0 \vec{g}$, а $E_p = m_0 \phi$.

$$\text{Так как } \vec{F} = -\nabla E_p \text{ (1.56), то } m_0 \vec{g} = -m_0 \nabla \phi,$$

откуда $\vec{g} = -\nabla \phi$. Таким образом,

$$\vec{g} = - \left(\vec{i} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right). \quad (1.95)$$

Напряженность гравитационного поля равна *градиенту потенциала* поля, взятому с противоположным знаком.

Знак минус в уравнении (1.95) показывает, что вектор напряженности гравитационного поля $\vec{g}$ направлен в сторону убывания потенциала ϕ .

§20. Космические скорости

Для того чтобы тело стало спутником Земли, оно должно иметь вполне определенную скорость, называемую *первой космической скоростью* v_1 .

При движении спутника на него действует сила притяжения к Земле:

$$F = GmM / R^2,$$

где m - масса спутника; M, R - масса и радиус Земли соответственно.

Эта сила сообщает спутнику центростремительное ускорение

$$a_y = v_1^2 / R.$$

Применяя второй закон Ньютона, запишем:

$$GmM / R^2 = ma_y \text{ и } GM / R^2 = v_1^2 / R.$$

Отсюда

$$v_1 = \sqrt{GM/R}. \quad (1.96)$$

Подставив в уравнение (1.96) выражение для G , найденное из (1.38), и учитывая, что $F = mg$, получим значение первой космической скорости:

$$v_1 = \sqrt{gR} \approx 8 \cdot 10^3 \text{ м/с}.$$

Вторая космическая скорость v_2 - это наименьшая скорость, которую надо сообщить телу, чтобы оно преодолело земное притяжение и стало спутником Солнца. Для этого необходимо, чтобы кинетическая энергия тела была равна работе, совершаемой против сил притяжения Земли:

$$\frac{mv_2^2}{2} = \int_R^\infty G \frac{mM}{r^2} dr = GMm/R,$$

откуда

$$v_2 = \sqrt{2GM/R} = \sqrt{2Rg} \approx 11 \text{ км/с}. \quad (1.97)$$

Третья космическая скорость v_3 - это скорость, которую необходимо сообщить телу, чтобы оно вышло за пределы Солнечной системы. Она определяется из соотношения

$$\frac{mv_3^2}{2} = G \frac{mM_\odot}{R_0},$$

где $M_\odot$ - масса Солнца, R_0 - радиус орбиты Земли.

$$v_3 = \sqrt{2GM_\odot/R_0} \approx 42 \text{ км/с}. \quad (1.98)$$

С учетом того, что Земля вращается вокруг своей оси со скоростью 30 км/с, значения третьей космической скорости зависят от направления запуска ракет и изменяются в пределах от 17 до 73 км/с.

§21. Неинерциальные системы отсчета

Неинерциальными называются *системы отсчета (НИСО)*, движущиеся с ускорением относительно инерциальных систем отсчета (ИСО). Пусть имеются две системы отсчета (СО) (рис. 19): K - инерциальная СО, а K' - неинерциальная СО.

Рассмотрим движение материальной точки массой m_0 в K и K' СО.

Из рис. 19 видно, что $\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}'$. (1.99)

Дифференцируя дважды по времени уравнение (1.99), получим

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2\vec{R}}{dt^2} + \frac{d^2\vec{r}'}{dt^2}$$

или

$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}', \quad (1.100)$$

где $\vec{a}$ - ускорение материальной точки в ИСО, $\vec{a}_0$ - ускорение точки O' (начала координат системы K') относительно ИСО, $\vec{a}'$ - ускорение материальной точки в НИСО.

Умножим на массу m_0 правую и левую части уравнения (1.100):

$$m_0\vec{a} = m_0\vec{a}_0 + m_0\vec{a}' \quad \text{или}$$

$$\vec{F} = m_0\vec{a}_0 + m_0\vec{a}',$$

откуда

$$m_0\vec{a}' = \vec{F} - m_0\vec{a}_0, \quad (1.101)$$

где $\vec{F} = m_0\vec{a}$ - сила, с которой дей-

ствуют на материальную точку тела других систем.

Таким образом, относительно НИСО материальная точка ведет себя так, как если бы кроме внешней силы $\vec{F}$ на нее действовала бы еще одна сила: $\vec{F}_i = -m_0\vec{a}_0$, названная *силой инерции*. Сила инерции обусловлена неинерциальностью СО.

В итоге получим

$$m_0\vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}_i. \quad (1.102)$$

Уравнение (1.102), аналогичное по форме второму закону Ньютона, справедливо в НИСО.

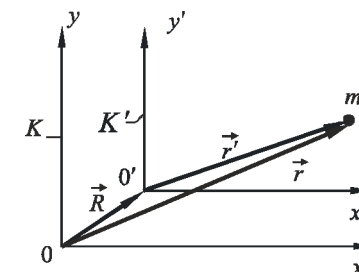


Рис. 19

Пример 1. Шар массой m подвешен на нити к потолку вагона. Если вагон покоится или движется равномерно и прямолинейно, то нить занимает вертикальное положение, так как сила тяжести шара $m\vec{g}$ уравнивается силой реакции нити $\vec{F}$ (рис. 20, а).

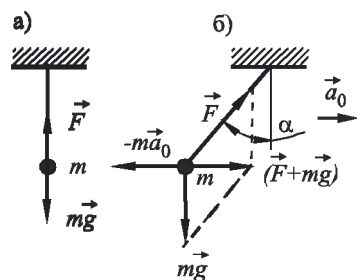


Рис. 20

Как только вагон начнет двигаться поступательно с ускорением $\vec{a}_0$ (рис. 20, б), нить с шаром отклонится от вертикали в противоположную направлению движения сторону на угол α . При этом сила, действующая на шар: $\vec{R} = \vec{F} + m\vec{g}$, уравнивается силой инерции $\vec{F}_i = -m\vec{a}_0$, и относительно вагона шар покоится.

Пример 2. Маятник, представляющий собой шарик массой m , подвешен на нити к штанге, установленной на вращающемся диске (рис. 21, а). При вращении диска шарик отклоняется от вертикали на некоторый угол α (рис. 21, б). В ИСО (относительно пола, на котором закреплен диск) на шарик действует центростремительная сила

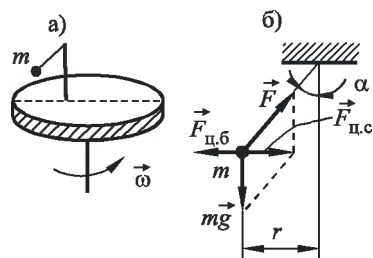


Рис. 21

$$F_{ц.с} = m\omega^2 r = mv^2 / r,$$

перпендикулярная оси вращения, являющаяся равнодействующей силы тяжести

$m\vec{g}$ и реакции нити $\vec{F}$, т.е. $\vec{R} = m\vec{g} + \vec{F}$.

В ИИСО (относительно диска) шарик покоится. Сила $\vec{R}$ уравновешена центробежной силой $\vec{F}_{ц.б}$, которая является силой инерции.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 16. Метеорит падает на Солнце с очень большого расстояния, которое можно считать бесконечно большим. Начальная скорость метеорита пренебрежимо мала. Какую скорость будет иметь метеорит в момент, когда его расстояние от Солнца равно среднему расстоянию Земли от Солнца?

Дано:

$$l_0 = \infty$$

$$l = R = 1,49 \cdot 10^{11} \text{ м}$$

$$M = 1,98 \cdot 10^{30} \text{ кг}$$

$$v = ?$$

Решение: Обозначим начальное расстояние от метеорита до Солнца через l_0 . По закону всемирного тяготения (1.38) найдем силу F , с которой метеорит притягивается к Солнцу, находясь на расстоянии x от него

$$F = G \frac{mM}{x^2}, \quad (1)$$

где m - масса метеорита, а M - масса

Солнца.

При движении метеорита расстояние x уменьшается, следовательно, сила F тоже уменьшается. Найдем работу силы притяжения dA на элементарном перемещении dx :

$$dA = G \frac{mM}{x^2} dx. \quad (2)$$

Работа dA равна убыли потенциальной энергии E_p :

$$dA = -dE_p. \quad (3)$$

Тогда

$$E_p = -\int_{\infty}^R G \frac{mM}{x^2} dx = -GmM \int_{\infty}^R \frac{dx}{x^2} = G \frac{mM}{R}. \quad (4)$$

По закону сохранения энергии

$$E_p = E_k = \frac{mv^2}{2}. \quad (5)$$

Из уравнений (4) и (5) определяется скорость движения метеорита:

$$\frac{mv^2}{2} = G \frac{mM}{R}, \quad v = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = 42,1 \text{ км/с}.$$

Ответ: $v = 42,1 \text{ км/с}$.

Задача 17. Частица массой m в некоторый момент времени находится в точке А на оси длинного тонкого стержня массой M и длиной l на расстоянии a от одного из его концов (см. рис.). Определите напряженность g и потенциал φ гравитационного поля стержня в точке А, а также силу, действующую на частицу в рассматриваемый момент времени.

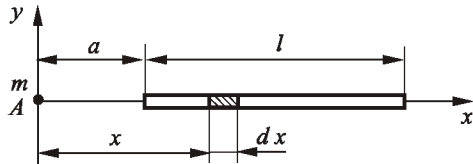


Рис. к задаче 17

Дано:

m
 M
 l
 a

$g = ?$ $\varphi = ?$
 $F = ?$

Решение: Выберем инерциальную систему отсчета, связанную с точкой А. Стержень нельзя считать за материальную точку. Разобьем стержень на бесконечно малые элементы длиной dx , каждый из которых можно принимать за материальную точку.

Выделенный элемент dx имеет массу $dM = Mdx/l$. Найдём напряженность dg и потенциал $d\varphi$ в точке А от выделенного элемента стержня, используя выражение (1.91) и (1.94):

$$dg = G \frac{dM}{x^2} = G \frac{M}{l} \frac{dx}{x^2}, \quad (1)$$

$$d\varphi = -G \frac{dM}{x} = -G \frac{M}{l} \frac{dx}{x}. \quad (2)$$

Для определения g и φ воспользуемся принципом суперпозиции. Так как все элементарные векторы $d\vec{g}$ направлены в одну сторону (вдоль оси x), а $d\varphi$ величина скалярная, то, интегрируя уравнения (1) и (2), получим

$$g = G \frac{M}{l} \int_a^{a+l} \frac{dx}{x^2} = GM/[a(a+l)],$$

$$\varphi = -G \frac{M}{l} \int_a^{a+l} \frac{dx}{x} = G \frac{M}{l} \ln \left(1 + \frac{l}{a} \right).$$

Сила $F = mg = GMm/[a(a+l)]$ и направлена по $\vec{g}$, т.е. совпадает с направлением оси x .

Ответ: $g = GM/[a(a+l)]$,

$$\varphi = G \frac{M}{l} \ln \left(1 + \frac{l}{a} \right),$$

$$F = GMm/[a(a+l)].$$

Задача 18. Тело массой m находится на вершине наклонной плоскости и удерживается силой трения. За какое время t тело спустится с наклонной плоскости, если плоскость станет двигаться в горизонтальном направлении с ускорением $a_0 = 1 \text{ м/с}^2$?

Длина плоскости $l = 1 \text{ м}$, угол наклона к горизонту $\alpha = 30^\circ$, коэффициент трения между телом и плоскостью $\mu = 0,3$.

Дано:

$a_0 = 1 \text{ м/с}^2$
 $l = 1 \text{ м}$
 $\alpha = 30^\circ$
 $\mu = 0,3$

$t = ?$

Решение: Задачу решаем в системе отсчета $хоу$, связанной с наклонной плоскостью. На тело действуют три силы: сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции наклонной плоскости $\vec{N}$ и сила трения покоя $\vec{F}_{\text{тр}}$, которые уравнивают друг друга, и тело покоится.

Как только наклонная плоскость начнет двигаться с ускорением $\vec{a}_0$, указанная система отсчета будет неинерциальной, появится сила инерции $\vec{F}_i = -m\vec{a}_0$ и тело начнет двигаться вниз с ускорением $\vec{a}$.

Время движения

$$t = \sqrt{2l/a} . \quad (1)$$

Для нахождения ускорения a запишем второй закон Ньютона:

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}} + \vec{F}_i = m\vec{a} . \quad (2)$$

Проектируя все векторы уравнения (2) на оси x и y , получим

$$\text{о}x: \quad mg \sin \alpha - F_{\text{тр}} + ma_0 \cos \alpha = ma , \quad (3)$$

$$\text{о}y: \quad -mg \cos \alpha + N + ma_0 \sin \alpha = 0 . \quad (4)$$

Решая систему уравнений (3), (4) с учетом выражения $F_{\text{тр}} = \mu N$, определим ускорение:

$$a = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) + a_0(\cos \alpha + \mu \sin \alpha) . \quad (5)$$

Из уравнений (1) и (5) найдем время движения тела:

$$t = \sqrt{2l/[g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) + a_0(\cos \alpha + \mu \sin \alpha)]} = 0,77 \text{ с} .$$

Ответ: $t = 0,77 \text{ с}$.

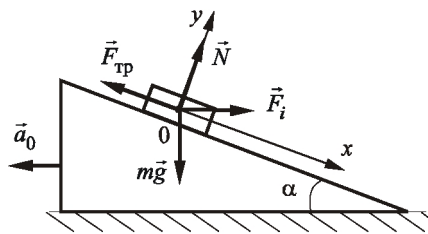


Рис. к задаче 18

Глава 5 ЭЛЕМЕНТЫ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

§22. Преобразования Галилея. Сложение скоростей в классической механике

Принцип относительности Г. Галилея¹, справедливый в классической механике, гласит: *все механические процессы протекают одинаково во всех ИСО, или никакими механическими опытами, проведенными внутри ИСО, невозможно установить, движется система равномерно и прямолинейно или покоится.*

Законы динамики не изменяют своего вида при преобразованиях Галилея, т.е. они инвариантны к преобразованиям Галилея.

Для доказательства этого рассмотрим две ИСО, из которых одна (система K) покоится, а другая (система K') движется относительно первой равномерно и прямолинейно с постоянной скоростью ($\vec{v}$). В момент времени $t = 0$ начала координат обеих систем совпадают (точки O и O' совпадают).

Найдем связь между координатами произвольно взятой материальной точки M в рассматриваемых СО (рис. 22):

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{r}_0 = \vec{r}' + \vec{v}t . \quad (1.103)$$

Запишем уравнение (1.103) в проекциях на оси координат:

$$x = x' + v_x t ,$$

$$y = y' + v_y t ,$$

$$z = z' + v_z t$$

и $t = t'$

$$\text{или} \quad x' = x - v_x t ,$$

$$y' = y - v_y t ,$$

$$z' = z - v_z t$$

$$\text{и} \quad t' = t$$

(1.104)

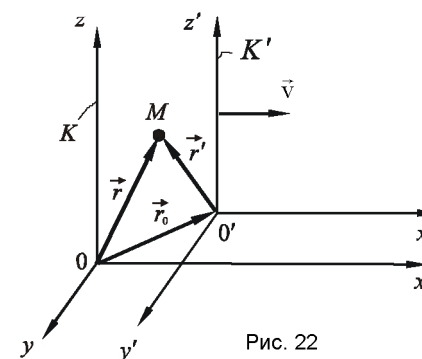


Рис. 22

¹ Галилео Галилей (1564-1642) – итальянский физик и астроном.

Систему уравнений (1.104) называют *преобразованиями координат Галилея*. Если система K' движется вдоль положительного направления оси x , то уравнения (1.104) примут вид

$$\begin{aligned}x &= x' + vt', \\y &= y', \\z &= z'\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}x' &= x - vt, \\y' &= y, \\z' &= z.\end{aligned}\tag{1.105}$$

Принято добавлять к уравнениям (1.105) еще одно уравнение: $t = t'$, так как в классической механике считается, что время не зависит от движения СО.

Дифференцируя по времени уравнение (1.103), найдем *правило сложения скоростей в классической механике*:

$$\vec{u} = \vec{u}' + \vec{v}.$$

Взяв вторую производную по времени от уравнения (1.103), получим, что ускорение материальной точки M в системах K и K' одинаково:

$$\vec{a} = \vec{a}'.$$

Таким образом, если на материальную точку не действуют внешние силы ($\vec{a} = 0$), то и $\vec{a}' = 0$, т.е. материальная точка движется равномерно и прямолинейно или покоится.

А это означает, что система K' также является *ИСО*.

Тем самым подтверждается механический принцип относительности: при переходе от одной *ИСО* к другой законы динамики не изменяют своего вида.

§23. Относительность одновременности

По классическим представлениям взаимодействие тел осуществляется мгновенно, т.е. соблюдается *принцип дальнего действия*. Если в различных точках на поверхности Земли происходят два события одновременно, то они должны протекать одновременно в любых точках Вселенной.

Из астрономических наблюдений известно, что свет, улавливаемый телескопами от различных звезд, излучался ими десятки, а то

и миллионы лет тому назад. Следовательно, событие, происходящее на Звезде и воспринимаемое нами, не является одновременным, так как любой сигнал распространяется с конечной скоростью. Мы не знаем, что происходит в момент приема сигнала на Звезде (может, она давно потухла). Чтобы определить, в какое время произошло событие, надо сверить часы на Звезде с земными часами, т.е. провести *синхронизацию часов*. В повседневной жизни мы периодически проводим синхронизацию часов, сверяя их с сигналами точного времени, передаваемыми по радио из Москвы. И хотя до Самары сигналы точного времени приходят с запаздыванием на 0,003 с, такие погрешности для нас несущественны. Когда же расстояния имеют космические масштабы, эти поправки приобретают большое значение. Если синхронизировать часы в данной системе координат, то такая синхронизация будет справедлива только для данной системы. Однако оказывается невозможным установление времени, одинакового для всех систем координат. Согласно теории Эйнштейна для каждой ИСО, находящейся в относительном движении, существует лишь *собственное время*. Это время показывают часы, покоящиеся в данной системе. Абсолютной одновременности не существует.

§24. Постулаты специальной теории относительности (СТО). Преобразования Лоренца

При рассмотрении движения частиц со скоростью, сравнимой со скоростью света в вакууме ($c \approx 3 \cdot 10^8$ м/с), классическая механика Ньютона оказывается неприменимой.

В 1881 г. американские ученые А. Майкельсон и Э. Морли опытным путем установили, что скорость света остается одинаковой, если свет распространяется в направлении движения Земли или в направлении, ему противоположном или перпендикулярном. Из опыта следовал вывод, что свет распространяется во всех направлениях с одинаковой скоростью независимо от движения источника света и наблюдателя. Это оказалось в противоречии с классическим законом сложения скоростей и преобразованиями Галилея, лежащими в основе механики Ньютона. В СТО классические преобразования координат (преобразования Галилея), позволяющие переходить от одной инерциальной системы отсчета к другой, были заменены преобразованиями Лоренца¹.

¹ Хендрик Антон Лоренц (1853-1928 гг.) – нидерландский физик.

В основе СТО лежат два постулата:

1) *Все физические процессы протекают одинаково во всех инерциальных системах отсчета*; этот постулат называется *принципом относительности А. Эйнштейна*.

2) *Скорость света в вакууме одинакова для всех инерциальных систем отсчета и не зависит от движения источника и приемника света*.

Кроме того, в СТО перешли многие постулаты классической физики: однородность пространства и времени, изотропность пространства, обратимость времени и др.

Из постулатов теории относительности вытекают преобразования Лоренца. При выводе их накладывается еще одно условие: преобразования должны быть линейными. Это условие следует из однородности пространства-времени: все точки пространства и все моменты времени равноценны.

Пусть система координат x', y', z', t' движется относительно системы x, y, z, t (рис. 23) со скоростью $\vec{v}$, направленной вдоль общей для систем оси ox . Определим координаты x', y', z' и время t' некоторого события относительно системы K' , если известны координаты x, y, z и время t этого события в системе K . Допустим, что при $t = 0$ точки o и o' совпадают.

Поскольку движение вдоль осей y и z не происходит, то $y' = y, z' = z$.

Из рис. 23 следует, что точка o' с координатой $x' = 0$ в системе K' движется вдоль оси x системы K со скоростью $\vec{v}$, то есть координата точки в системе K изменяется по закону: $x = vt$. Условие эквивалентно $x - vt = 0$.

Учитывая этот факт и линейность преобразований координат, связь между x' и x должна иметь вид

$$x' = \gamma(x - vt), \quad (1.106)$$

где γ - коэффициент, зависящий от скорости.

С другой стороны, координата $x = 0$ системы K в системе K' изменяется по закону $x' = -vt'$. Выражение $x' + vt'$ должно обращаться в нуль одновременно с координатой x . Для этого преобразование запишется в виде

$$x = \gamma(x' + vt'). \quad (1.107)$$

Так как системы K и K' равноправны, то коэффициент γ один и тот же.

Для определения γ воспользуемся вторым постулатом теории относительности. Предположим, что в момент $t = t' = 0$, когда начала координат o и o' совпадают, посылается вдоль осей x и x' световой сигнал, который вызывает вспышку света на экране. В системе K вспышка характеризуется координатой x и временем t , а в системе K' - координатой x' и временем t' . Так как скорость света с одинакова в обеих системах, то получим уравнения: $x = ct, x' = ct'$. Подставим эти уравнения в формулы (1.106), (1.107):

$$\begin{aligned} ct &= \gamma(ct' + vt') = \gamma t'(c + v), \\ ct' &= \gamma(ct + vt) = \gamma t(c - v). \end{aligned}$$

Перемножив правые и левые части уравнений и поделив их на tt' , получим

$$c^2 = \gamma^2(c^2 - v^2).$$

$$\text{Отсюда } \gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

Подставив значение γ в (1.106-1.107), получим преобразование координат:

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Для нахождения формул преобразования времени исключим из уравнений преобразования координат x' , подставив во второе уравнение значение x' , следующее из первого. Получим уравнение,

$$\text{определяющее зависимость } t' \text{ от } t \text{ и } x: t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Аналогично, подставляя значение x из второго уравнения в первое, находим выражение t через t' и x' :

$$t = \frac{t' + vx'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Выпишем полученные формулы, которые называются *преобразованиями Лоренца*:

$$\begin{aligned} x &= (x' + vt')/\sqrt{1 - v^2/c^2}, & x' &= (x - vt)/\sqrt{1 - v^2/c^2}, \\ y &= y', & y' &= y, \\ z &= z', & z' &= z, \\ t &= (t' + vx'/c^2)/\sqrt{1 - v^2/c^2}, & t' &= (t - vx/c^2)/\sqrt{1 - v^2/c^2}. \end{aligned} \quad (1.108)$$

Из (1.105) и (1.108) видно, что при скорости движения, которая намного меньше скорости света, отношение $v^2/c^2 \ll 1$ и преобразования Лоренца переходят в классические преобразования Галилея. Таким образом, законы механики Ньютона не отвергаются, они рассматриваются как частный случай движения тел с малыми скоростями.

Из преобразований Лоренца (1.108) вытекает ряд следствий:

1. Сокращение длины движущегося тела

Допустим, что вдоль оси x' в движущейся системе K' покоится стержень. Наблюдатель, находящийся в системе K' , определяет длину этого стержня l'_0 (собственная длина) как разность координат его концов:

$$l'_0 = x'_2 - x'_1.$$

Определим длину этого стержня l в системе отсчета K , относительно которой стержень движется со скоростью $\vec{v}$.

Используя преобразования Лоренца (1.108), запишем:

$$x'_1 = \left(\frac{x_1 - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right), \quad x'_2 = \left(\frac{x_2 - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right),$$

$$\text{откуда } l'_0 = x'_2 - x'_1 = \frac{(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{l}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

так как $l = x_2 - x_1$.

Таким образом,

$$l'_0 = \frac{l}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \text{ или } l = l'_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}. \quad (1.109)$$

Стержень, движущийся относительно наблюдателя, кажется ему более коротким, чем в случае, когда стержень относительно него покоится.

Релятивистское сокращение длины, происходящее только в направлении относительного движения, становится заметным при очень больших скоростях. Если, например, тело движется со скоростью $v = 0,8$ скорости света, то согласно формуле (1.109) оно укорачивается до 60% от длины в состоянии покоя.

Сокращение длины движущегося тела носит относительный характер. Если стержень покоится в системе K , то его длина в системе K' выражается формулой (1.109). Поэтому, когда в системах K и K' покоятся одинаковые стержни, то нельзя ставить вопрос: какой из них на самом деле короче? Все зависит от системы отсчета.

2. Замедление хода часов

Пусть часы и наблюдатель находятся в точках x' в движущейся системе отсчета K' . Наблюдатель посылает световой сигнал. Начало светового сигнала t'_1 и конец сигнала t'_2 он фиксирует по своим часам. Длительность сигнала $\Delta t' = t'_2 - t'_1$.

Наблюдатель, находящийся в системе K , принимает этот сигнал в течение промежутка времени $\Delta t = t_2 - t_1$, фиксируя начало и конец сигнала по своим часам. Так как система K' движется, наблюдатель системы K фиксирует начало и конец светового сигнала в различных точках пространства, т.е. $t_1 \neq t_2$, т.к. $x_1 \neq x_2$. Воспользовавшись преобразованиями Лоренца (1.108), сравним интервалы времени $\Delta t'$ и Δt :

$$t_1 = \frac{t'_1 + vx'_1/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad t_2 = \frac{t'_2 + vx'_2/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{(t'_2 - t'_1) + (x'_2 - x'_1)v/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Так как $x'_2 = x'_1 = x'$ (сигнал посылается из одной точки), то

$$\Delta t = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \text{ или } \Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (1.110)$$

Итак, покоящиеся часы дают более длинный интервал времени между событиями, происходящими в движущейся системе отсчета, чем часы, движущиеся вместе с этой системой. Как и изменение длины, это сокращение носит относительный характер.

3. Релятивистский закон сложения скоростей

Предположим, что в системе K' вдоль оси x' движется материальная точка со скоростью $u' = \frac{dx'}{dt'}$.

Найдем скорость этой точки $u = \frac{dx}{dt}$ в системе K . Используя преобразование Лоренца (1.108), запишем:

$$dx = \frac{dx' + v dt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad dt = \frac{dt' + (v/c^2) dx'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

$$\text{Тогда } u = \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + v dt'}{dt' + (v/c^2) dx'}.$$

Поделив числитель и знаменатель правой части уравнения на dt' , получим релятивистский закон сложения скоростей:

$$u = \frac{dx'/dt' + v}{1 + (v/c^2)(dx'/dt')} = \frac{u' + v}{1 + vu'/c^2}. \quad (1.111)$$

Из формулы (1.111) видно, что в случае, когда $v \ll c$, релятивистский закон сложения скоростей переходит в классический: $u = u' + v$.

Если $u' = c$, то $u = (c + v)/(1 + v/c) = c$.

§25. Энергия релятивистской частицы. Закон взаимосвязи массы и энергии

В СТО вводится релятивистская масса частицы m , зависящая от скорости ее движения v :

$$m = m_0 / \sqrt{1 - v^2/c^2}, \quad (1.112)$$

где m_0 - масса частицы, находящейся в покое.

С возрастанием скорости движения частицы, как следует из формулы (1.112), масса тоже увеличивается. Если скорость частицы v стремится к скорости света c , то масса частицы стремится к бесконечности. При малых скоростях, когда $v \ll c$, массы движущейся и покоящейся частиц приблизительно одинаковы.

Основное уравнение релятивистской динамики имеет такой же вид, как и в классической механике Ньютона:

$$\vec{F} = d\vec{p}/dt = d(m\vec{v})/dt, \quad (1.113)$$

только в этом уравнении масса - переменная величина. Здесь $\vec{F}$ - сила, действующая на частицу, $\vec{p}$ - импульс частицы.

Выведем соотношение между массой и энергией (знаменитую формулу А. Эйнштейна). Как известно из классической физики, работа силы $\vec{F}$ на элементарном перемещении $d\vec{r}$ равна приращению кинетической энергии тела: $dE_k = \vec{F} d\vec{r} = \vec{F} \vec{v} dt$, где $\vec{v}$ - скорость.

Подставив в данное выражение основное уравнение релятивистской динамики (1.113) и преобразовав его с учетом того, что $\vec{v} d\vec{v} = v dv$, и формулы (1.112), получим

$$dE_k = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) \vec{v} dt = v d \left(\frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right).$$

Интегрируем полученное выражение считая, что кинетическая энергия покоящейся частицы равна нулю, а ее масса равна m_0 :

$$E_k = \frac{m_o v^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - m_o \int_0^v \frac{v dv}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{m_o v^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + m_o c^2 \sqrt{1-v^2/c^2} \Big|_0^v =$$

$$= \frac{m_o v^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - m_o c^2 = m c^2 - m_o c^2. \quad (1.114)$$

Выражение $E = m c^2$ назвали полной энергией тела, а $E_o = m_o c^2$ - энергией покоя. Если тело покоится и его $E_k = 0$, оно тем не менее обладает энергией покоя.

Запишем уравнение (1.114) с учетом введенных обозначений

$$E_k = E - E_o,$$

$$\text{где } E = m c^2, \quad (1.115)$$

$$E_o = m_o c^2. \quad (1.116)$$

Таким образом, кинетическая энергия релятивистской частицы E_k равна разности полной энергии E и энергии покоя частицы E_o . При скорости движения $v \ll c$ уравнение (1.114) переходит в классическое $E_k \approx m v^2 / 2$.

Энергия покоя $E_o = m_o c^2$ представляет собой внутреннюю энергию тела и включает в себя энергию покоя частиц, из которых состоит тело, кинетическую энергию частиц, обусловленную их движением относительно центра масс и энергию их взаимодействия друг с другом.

Согласно Эйнштейну полная энергия тела, из каких бы видов она не состояла (кинетической, химической, электрической и т.д.), связана с массой этого тела соотношением $E = m c^2$.

Связь между полной энергией и релятивистской массой является фундаментальным законом природы. Изменение энергии тела сопровождается эквивалентным изменением его массы: $\Delta m = \Delta E / c^2$ и наоборот, изменение массы сопровождается изменением его энергии: $\Delta E = c^2 \Delta m$. Это закон взаимосвязи релятивистской массы и энергии.

Если в классической механике масса тела является мерой инертности или гравитационного действия, то релятивистская масса выступает как мера *энергосодержания* тела.

Закон взаимосвязи массы и энергии подтвержден экспериментами в ядерной физике. Например, при образовании атомного ядра из составляющих его нуклонов наблюдается уменьшение массы, которое связано с выделением энергии. Выделившейся энергии связи

$E_{св}$, соответствует масса $\Delta m = E_{св} / c^2$, называемая *дефектом масс*.

Релятивистская теория тяготения, удовлетворяющая принципу относительности А. Эйнштейна, развита в общей теории относительности.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 19. Космический корабль движется с постоянной скоростью

$v = \frac{24}{25}c$ по направлению к центру Земли. Какое расстояние в системе отсчета, связанной с Землей, пройдет корабль за промежуток времени $\Delta t' = 7$ с, отсчитанный по корабельным часам? Вращение Земли и ее орбитальное движение не учитывать.

Дано:

$$v = \frac{24}{25}c$$

$$\Delta t' = 7 \text{ с}$$

$$S = ?$$

Решение: Если на корабле отсчитан промежуток собственного времени $\Delta t'$, то по земным часам согласно уравнению (1.110) будет отсчитан промежуток:

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}.$$

Поэтому $S = v\Delta t$,

$$S = \frac{24}{25} \frac{c\Delta t}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{24}{25} \frac{c\Delta t'}{\sqrt{1 - \left(\frac{24}{25}\right)^2}}$$

здесь

$$c = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Ответ: $S = 72 \text{ м}$.

Задача 20. В ускорителе протоны ускоряются до скоростей, отличающихся на 0,01% от скорости света. Во сколько раз релятивистская масса таких протонов превышает их массу покоя?

Дано:

$$\left(\frac{c-v}{c}\right) 100\% = 0,01\%$$

$$\frac{m}{m_0} = ?$$

Решение: При скоростях движения v , соизмеримых со скоростью света, масса зависит от скорости движения по формуле (1.112):

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (1)$$

где $\beta = \frac{v}{c}$; m_0 - масса покоя.

Так как $\left(\frac{c-v}{c}\right) 100\% = 0,01\%$ (по условию), то

$$1 - \frac{v}{c} = 10^{-4},$$

$$1 - \beta = 10^{-4},$$

$$\beta = 1 - 10^{-4} \approx 1,$$

т.е. мало отличается от единицы. Подкоренное выражение в формуле (1) можно представить в виде

$$1 - \beta^2 = (1 - \beta)(1 + \beta) \approx 2(1 - \beta).$$

Тогда

$$\frac{m}{m_0} \approx \frac{1}{\sqrt{2(1 - \beta)}} \approx 70.$$

Ответ: $\frac{m}{m_0} \approx \frac{1}{\sqrt{2(1 - \beta)}} \approx 70.$

Задача 21. Из астрономических наблюдений установлено, что количество энергии, которое приносит на Землю солнечное излучение за 1 с на площадку 1 м^2 , перпендикулярную солнечным лучам,

составляет около $1,4 \cdot 10^3 \frac{\text{Дж}}{(\text{с} \cdot \text{м}^2)}$. Какую массу каждую секунду теряет

Солнце?

Дано:

$$\frac{\Delta E}{S} = 1,4 \cdot 10^3 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$$

$$\frac{\Delta m}{m} = ?$$

Решение: Суммарная энергия, излучаемая Солнцем за 1 с:

$$\Delta E = 1,4 \cdot 10^3 \cdot 4\pi \cdot R^2,$$

где $R = 1,49 \cdot 10^{11}$ м - расстояние от Земли до Солнца. Согласно формуле (1.115) Солнце ежесекундно теряет массу

$$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2} = 1,4 \cdot 10^3 \frac{4\pi R^2}{c^2}.$$

Вычисления дают:

$$\Delta m = 4,4 \cdot 10^9 \frac{\text{кг}}{\text{с}}.$$

Величина грандиозная с точки зрения земных масштабов, однако по сравнению с массой Солнца эта потеря ничтожно мала и составляет

$$\frac{\Delta m}{m} = 2 \cdot 10^{-21} \text{ - за одну секунду.}$$

Здесь m - масса Солнца.

Ответ: $\frac{\Delta m}{m} = 2 \cdot 10^{-21}.$

Задача 22. Какую работу необходимо совершить, чтобы увеличить скорость частицы с массой покоя m_0 от 0,6 до 0,8 с? Сравнить полученный результат со значением, вычисленным по классической формуле.

Дано:

$$v_1 = 0,6 \text{ с}$$

$$v_2 = 0,8 \text{ с}$$

$$A = ?$$

Решение: Искомая работа равна изменению кинетической энергии:

$$A = E_{k2} - E_{k1},$$

$$\text{где } E_{k1} = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta_1^2}} - 1 \right),$$

$$E_{k2} = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta_2^2}} - 1 \right),$$

$$\text{а } \beta_1 = \frac{v_1}{c}; \quad \beta_2 = \frac{v_2}{c}.$$

Подставляя данные из условия задачи, получим

$$A = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta_2^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_1^2}} \right) = 0,42 m_0 c^2. \quad (1)$$

Соответствующая же работа по классической формуле

$$A = \frac{m_0 v_2^2}{2} - \frac{m_0 v_1^2}{2} = 0,14 m_0 c^2. \quad (2)$$

Из уравнений (1) и (2) видно, что значение работы, рассчитанное по формулам релятивистской механики, оказывается в 3 раза больше значения работы, которое мы получили бы при расчете по формулам классической механики.

Глава 6

МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

§26. Гармонические колебания

Колебаниями называются движения или процессы, точно или приблизительно повторяющиеся во времени. По способу воздействия на колеблющуюся систему колебания делятся на свободные (собственные), вынужденные, автоколебания и параметрические.

Свободными называются колебания системы, предоставленной самой себе после того, как она была выведена из положения равновесия, и не подверженной действию переменных внешних сил.

Вынужденными называются колебания, при которых система подвергается воздействию внешней периодически изменяющейся силы. Если при этом система сама управляет внешним воздействием, то такие вынужденные колебания называются *автоколебаниями*.

Колебания, при которых колеблющаяся величина изменяется со временем по закону синуса или косинуса, называются *гармоническими*.

Любую колебательную систему принято называть *осциллятором*.

Рассмотрим свободные колебания тела на пружине (пружинный маятник). Тело массой m , подвешенное на абсолютно упругой пружине длиной l (рис.24), и жесткостью k способно совершать колебания в вертикальной плоскости. Допустим, что силы сопротивления при колебаниях пренебрежимо малы.

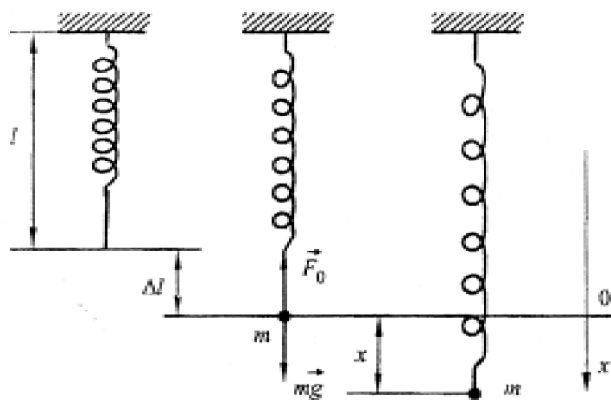


Рис. 24

В положении равновесия сила тяжести тела $m\vec{g}$ уравнивается силой упругости пружины $F_o = k\Delta l$, т.е.

$$mg = k\Delta l, \quad (1.117)$$

где Δl - удлинение пружины после подвески тела. Если внешней силой растянуть пружину на x , то ее удлинение станет равным $(x + \Delta l)$. Тогда проекция результирующей силы F на направление x с учетом выражения (1.117) будет равна

$$F = mg - k(x + \Delta l) = F_o - k(\Delta l + x) = k\Delta l - k(\Delta l + x) = -kx. \quad (1.118)$$

Знак минус в уравнении (1.118) показывает, что смещение x и сила F , действующая на тело, противоположны по направлению.

По второму закону Ньютона сила $F = ma$. Приравняв правую часть уравнения (1.118) к ma , получим

$$ma = -kx$$

или

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0. \quad (1.119)$$

Введем обозначение: отношение $k/m = \omega_0^2$.

С учетом обозначения уравнение (1.119) примет вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0, \quad (1.120)$$

где ω_0 - циклическая частота.

Это соотношение представляет собой однородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка, решением которого являются уравнения вида

$$x = A \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (1.121)$$

или

$$x = A \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (1.122)$$

где A – *амплитуда колебаний* (максимальное смещение колеблющегося тела от положения равновесия), $(\omega_0 t + \varphi_0)$ - фаза колебаний,

φ_0 - начальная фаза в момент времени $t = 0$.

Фаза колебаний – это физическая величина, определяющая по-

положение колеблющейся системы в данный момент времени. Фаза колебаний измеряется в радианах (рад). Таким образом, колебания пружинного маятника осуществляются по закону синуса или косинуса, т.е. являются гармоническими.

Различные состояния системы, совершающей гармонические колебания, повторяются через промежуток времени T , называемый *периодом колебаний*, за который фаза колебаний получает приращение 2π , т.е.

$$[(\omega_0(t+T) + \varphi_0) - (\omega_0 t + \varphi_0)] = 2\pi.$$

Отсюда

$$\omega_0 = 2\pi / T. \quad (1.123)$$

Циклическая частота ω_0 - есть физическая величина, определяющая число колебаний, происходящих за 2π секунд. Здесь T - период колебаний.

Величина, обратная периоду: $\nu = 1/T$, называется *частотой колебаний* (число колебаний, совершаемых в единицу времени).

Период колебаний измеряется в секундах (с), а частота - в герцах ($1 \text{ Гц} = 1/\text{с} = 1\text{с}^{-1}$).

В дальнейшем при исследовании гармонических колебаний будем пользоваться уравнением (1.121).

Скорость колеблющегося тела находится как первая производная смещения x (1.121) по времени t :

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega_0 \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = A\omega_0 \cos\left(\omega_0 t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right), \quad (1.124)$$

а *ускорение* - как вторая производная смещения по времени:

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = -A\omega_0^2 \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi) = -\omega_0^2 x. \quad (1.125)$$

Зависимости x , v и a от времени t графически представлены на рис.25.

Из уравнений (1.121), (1.124) и (1.125) следует, что скорость и ускорение изменяются также по гармоническому закону и с той же циклической частотой ω_0 , фаза скорости колебаний отличается от фазы смещения на $\pi/2$, а фаза ускорения - на π .

Для определения энергии колеблющейся системы воспользуем-

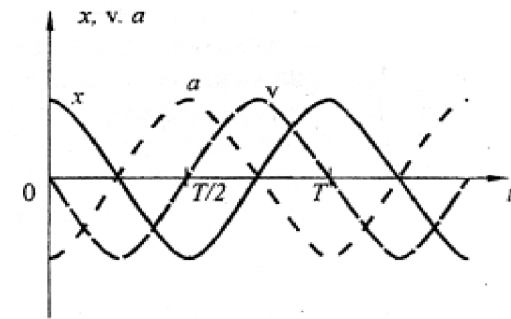


Рис. 25

ся выражениями для потенциальной энергии деформированной пружины (1.55) и кинетической энергии движущегося груза (1.53):

$$E_p = kx^2 / 2 = k \cdot A^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) / 2, \quad (1.126)$$

$$E_k = mv^2 / 2 = m\omega_0^2 \cdot A^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) / 2. \quad (1.127)$$

Суммируя уравнения (1.126) и (1.127) и учитывая выражение $\omega_0^2 = k/m$, найдем полную энергию системы:

$$E = E_p + E_k = A^2 m \omega_0^2 / 2. \quad (1.128)$$

Из формулы (1.128) следует, что полная механическая энергия не изменяется при гармонических колебаниях.

§27. Физический и математический маятники

Физическим маятником называется твердое тело, имеющее ось вращения, не проходящую через центр масс. На рис.26 изображен физический маятник, отклоненный на угол α от положения равновесия.

Разложим силу тяжести маятника $m\vec{g}$ на составляющие $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$.

Сила $\vec{F}_1 = mg \sin \alpha$ создает вращательный момент

$$M = F_1 l = -mgl \sin \alpha \approx -mgl \alpha, \quad (1.129)$$

стремящийся вернуть маятник в положение равновесия.

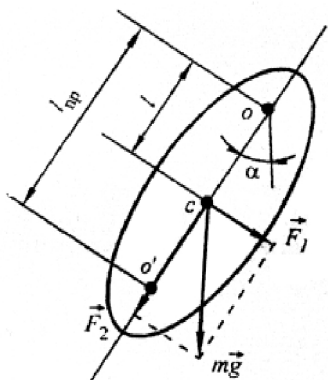


Рис. 26

Знак минус в выражении (1.129) показывает, что смещение и сила противоположны по направлению. При малых углах отклонений $\sin \alpha \approx \alpha$.

Согласно уравнениям (1.28) и (1.87) для углового ускорения ε запишем:

$$\varepsilon = \frac{d^2 \alpha}{dt^2} \text{ и } \varepsilon = M / J ,$$

или

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} = \frac{M}{J} , \quad (1.130)$$

где J - момент инерции маятника относительно оси вращения.

Из выражений (1.129) и (1.130) получим дифференциальное уравнение колебаний физического маятника при малых отклонениях его от положения равновесия:

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \frac{mgl}{J} \alpha = 0$$

или

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \omega_0^2 \alpha = 0 ,$$

где $\omega_0^2 = \frac{mgl}{J}$ - циклическая частота колебаний маятника.

Так как согласно (1.123) $\omega_0 = 2\pi / T$, то период колебаний физического маятника

$$T = 2\pi \sqrt{J / (mgl)} . \quad (1.131)$$

Таким образом, при малых углах отклонений физический маятник совершает гармонические колебания с периодом, определяемым формулой (1.131).

Математическим маятником называется материальная точка, подвешенная на невесомой и нерастяжимой нити. Пусть масса точки

m , а длина нити l . Используя уравнение (1.131), найдем период колебаний T_M математического маятника:

$$T_M = 2\pi \sqrt{ml^2 / (mgl)} = 2\pi \sqrt{l / g} . \quad (1.132)$$

Приведенной длиной l_{np} физического маятника называется длина такого математического маятника, период колебаний которого равен периоду колебаний данного физического маятника. Из сопоставления формул (1.131) и (1.132) для приведенной длины можно получить выражение: $l_{np} = J / (ml)$. Точку O' (рис.26), отстоящую от оси вращения на расстоянии приведенной длины, называют *центром качания* физического маятника. При переносе оси вращения в центр качания период колебаний физического маятника не изменяется.

§28. Сложение гармонических колебаний одного направления

Сложение колебаний выполним с помощью *векторной диаграммы*.

Пусть вектор $\vec{A}$ равномерно вращается с угловой скоростью ω_0 относительно точки O (рис.27), при этом угол φ между осью Ox и вектором непрерывно изменяется со временем:

$$\varphi = \omega_0 t + \varphi_0 ,$$

где φ_0 - начальный угол при $t = 0$.

При вращении проекция конца вектора $\vec{A}$ на ось Ox совершает гармонические колебания:

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0) ,$$

при которых модуль вектора $|\vec{A}|$ является амплитудой, угловая скорость вращения ω_0 - циклической частотой, а угол φ_0 - начальной фазой колебаний.

Рассмотрим несколько случаев сложения двух гармонических колебаний.

1. Складываемые колебания име-

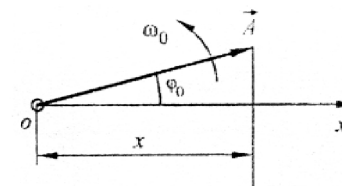


Рис. 27

ют амплитуды A_1 и A_2 , циклические частоты одинаковы $\omega_{01} = \omega_{02} = \omega_0$, а начальные фазы равны φ_1 и φ_2 соответственно:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1),$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_2).$$

Используя векторную диаграмму, в результате сложения получим гармонические колебания, описываемые уравнением

$$x = x_1 + x_2 = A \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad (1.133)$$

где

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)},$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{AC}{OC} = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}$$

определяются из векторной диаграммы (рис.28).

а) Пусть $(\varphi_2 - \varphi_1) = 2k\pi$, где $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ т.е. разность начальных фаз складываемых колебаний равна нулю или кратна 2π .

Тогда $A = A_1 + A_2$,

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \varphi_1 = \operatorname{tg} \varphi_2.$$

Результирующие колебания будут происходить с амплитудой, равной сумме амплитуд складываемых колебаний, и начальной фазой, равной начальной фазе любого из складываемых колебаний.

б) Пусть $(\varphi_2 - \varphi_1) = (2k + 1)\pi$,

где $k = 0, 1, 2, 3, \dots$, а $|A_2| > |A_1|$.

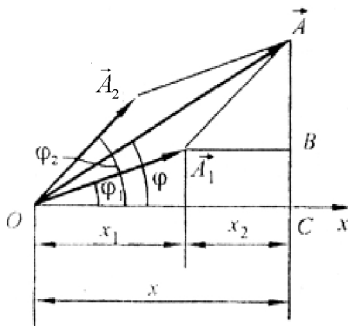


Рис. 28

Тогда

$$A = |A_2 - A_1|, \quad \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \varphi_2.$$

Амплитуда результирующих колебаний будет равна разности амплитуд складываемых колебаний и направлена в сторону большей амплитуды, а начальная фаза равна начальной фазе того из колебаний, амплитуда которого больше.

2. Складываются два колебания, циклические частоты которых $\omega_{01} \neq \omega_{02}$, но разность частот $\Delta\omega_0 = \omega_{02} - \omega_{01}$ очень мала по сравнению с ω_{01} и ω_{02} :

$$x_1 = A \cos \omega_{01} t,$$

$$x_2 = A \cos \omega_{02} t.$$

В результате сложения получим колебания, называемые *биениями*:

$$x = x_1 + x_2 = A \cos \omega_{01} t + A \cos \omega_{02} t = 2A \cos \frac{\omega_{02} - \omega_{01}}{2} t \cos \frac{\omega_{02} + \omega_{01}}{2} t$$

или

$$x = A_{\text{рез}} \cos \omega_{\text{рез}} t, \quad (1.134)$$

где

$$A_{\text{рез}} = \left| 2A \cos \frac{\omega_{02} - \omega_{01}}{2} t \right|, \quad \omega_{\text{рез}} = \frac{\omega_{02} + \omega_{01}}{2}.$$

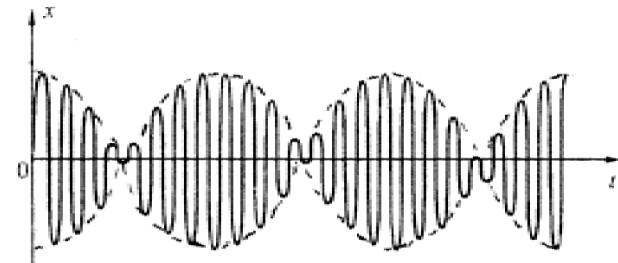


Рис. 29

Результирующие колебания можно рассматривать как приблизительно гармонические с средней частотой $\omega_{рез}$ и амплитудой $A_{рез}$, медленно меняющейся по гармоническому закону (рис.29). Сплошной линией на рис. 29 изображены результирующие колебания, а пунктирной линией – медленно изменяющиеся со временем амплитуды колебаний.

Частота биений тем меньше, чем меньше разность $\Delta\omega_0$, поэтому наблюдение биений позволяет с большой точностью определять равенство частот двух колебаний в момент, когда частота биений падает до нуля. В таком виде метод биений используется для настройки музыкальных инструментов с помощью камертона.

§29. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний

Рассмотрим сложение двух гармонических колебаний, имеющих одинаковую циклическую частоту ω_0 , происходящих во взаимно перпендикулярных направлениях:

$$x = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1),$$

$$y = A_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_2).$$

В результате сложения получаются колебания, траектории которых описываются уравнением эллипса (вывод уравнения опускается):

$$\frac{x^2}{A_1^2} - 2 \frac{xy}{A_1 A_2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + \frac{y^2}{A_2^2} = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (1.135)$$

Ориентация осей эллипса относительно координат x и y зависит от амплитуд A_1 и A_2 и разности фаз $(\varphi_2 - \varphi_1)$.

Рассмотрим несколько частных случаев.

1) Разность начальных фаз складываемых колебаний равна нулю или кратна четному числу π :

$$(\varphi_2 - \varphi_1) = 2k\pi, \text{ где } k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

После подстановки в (1.135) получим

$$\frac{x}{A_1} - \frac{y}{A_2} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{x}{A_1} = \frac{y}{A_2},$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{A_2}{A_1}. \quad (1.136)$$

Точка будет совершать гармонические колебания, направленные вдоль прямой, лежащей в первой и третьей четвертях (рис. 30, а), амплитуда и начальная фаза которых определяются выражениями (1.136).

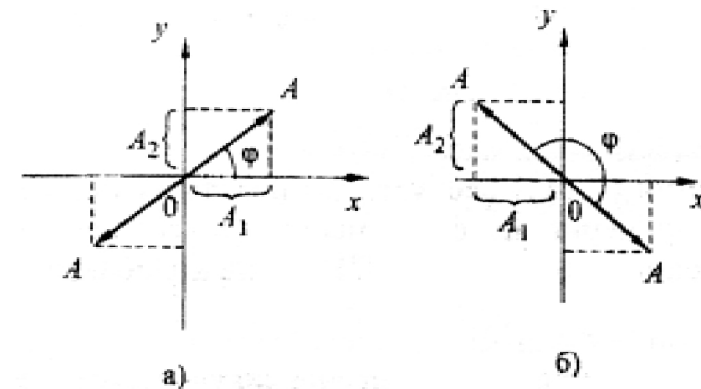


Рис.30

2) Разность начальных фаз складываемых колебаний кратна нечетному числу π :

$(\varphi_2 - \varphi_1) = (2k + 1)\pi$, где $k = 0, 1, 2, 3, \dots$. Из уравнения (1.135) получим

$$\frac{x}{A_1} + \frac{y}{A_2} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{x}{A_1} = -\frac{y}{A_2},$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{A_2}{A_1}.$$

Колебания точки будут совершаться вдоль прямой, лежащей во второй и четвертой четвертях (рис. 30, б).

Изображенные на рис.30 колебания называются *линейно поляризованными*.

Если разность фаз складываемых колебаний

$$(\varphi_2 - \varphi_1) = (2k + 1)\pi / 2,$$

где $k = 0, 1, 2, 3, \dots$, а амплитуды одинаковы: $A_1 = A_2 = A$, то уравнением движения точки будет окружность с радиусом, равным амплитуде A складываемых колебаний: $x^2 + y^2 = A^2$.

Такие колебания называются *циркулярно поляризованными*.

В результате сложения взаимно перпендикулярных колебаний с разными циклическими частотами:

$$x = A_1 \cos(p\omega_0 t + \varphi_1),$$

$$y = A_2 \cos(g\omega_0 t + \varphi_2)$$

траекториями точек являются сложные замкнутые кривые, получившие название *кривых Лиссажу*.

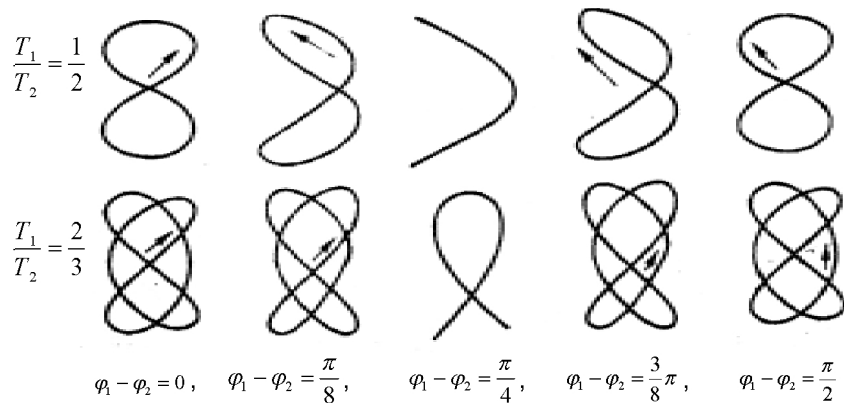


Рис.31

На рис.31 показаны фигуры Лиссажу для некоторых частных случаев.

§30. Затухающие колебания

В реальных условиях на колеблющуюся систему действуют силы сопротивления (трение, например) и колебания со временем затухают.

При небольших скоростях движения сила сопротивления F_c прямо пропорциональна скорости v и направлена в сторону, противоположную движению:

$$F_c = -rv = -r \frac{dx}{dt}.$$

С учетом силы сопротивления дифференциальное уравнение колебаний пружинного маятника примет вид

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{r}{m} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0$$

или

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \cdot \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0, \quad (1.137)$$

где r – коэффициент сопротивления, $\beta = r/(2m)$ – коэффициент затухания.

Уравнение (1.137) имеет решение при $\beta^2 \ll \omega_0^2$:

$$x = A e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi) = A_t \cos(\omega t + \varphi), \quad (1.138)$$

где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ – циклическая частота, $A_t = A \cdot e^{-\beta t}$ – амплитуда затухающих колебаний, A – начальная амплитуда.

На рис.32 показана зависимость (1.138).

Период затухающих колебаний

$$T = 2\pi / \omega = 2\pi / \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}.$$

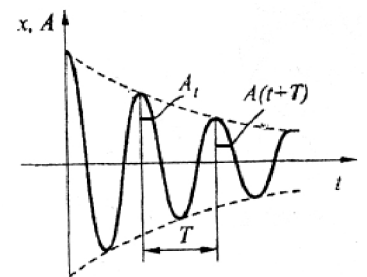


Рис. 32

Натуральный логарифм отношения амплитуд двух последовательных колебаний, отличающихся по времени на один период, называется *логарифмическим декрементом затухания*:

$$\delta = \ln \frac{A_t}{A_{(t+T)}} = \ln \frac{Ae^{-\beta t}}{Ae^{-\beta(t+T)}} = \ln e^{\beta T} = \beta T.$$

Пусть τ - время, в течение которого амплитуда колебаний уменьшается в e раз (*время релаксации*). Тогда $\ln e = \beta\tau$ или $\beta\tau = 1$, а $\beta = 1/\tau$.

Таким образом, *коэффициент затухания* β - это физическая величина, обратная промежутку времени, в течение которого амплитуда колебаний уменьшается в e раз.

Логарифмический декремент затухания δ - это физическая величина, обратная числу колебания N , совершаемых системой за время уменьшения амплитуды в e раз:

$$\delta = \beta T = T/\tau = 1/N.$$

§31 Вынужденные колебания

Колебания пружинного маятника будут незатухающими, если на него воздействовать внешней вынуждающей силой F , изменяющейся, например, по гармоническому закону:

$$F = F_0 \cos \omega t,$$

где ω - частота вынуждающей силы, F_0 - максимальное значение вынуждающей силы.

Применяя второй закон Ньютона, запишем:

$$ma + rv + kx = F_0 \cos \omega t,$$

откуда получим дифференциальное уравнение вынужденных колебаний:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t, \quad (1.139)$$

где $\beta = r/(2m)$ - коэффициент затухания, $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ - собственная циклическая частота.

Выражение (1.139) является линейным неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка. Решение данного уравнения состоит из двух слагаемых: общего решения (1.138) однородного уравнения (1.137), играющего существенную роль только в начальной стадии при установлении колебаний, и частного решения данного неоднородного уравнения:

$$x = A \cos(\omega t + \varphi), \quad (1.140)$$

где

$$A = F_0 / \left(m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2} \right), \quad (1.141)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = 2\beta \omega / (\omega_0^2 - \omega^2).$$

Найдем условие, при котором амплитуда колебаний A имеет максимальное значение, т.е. определим максимум функции (1.141) (минимум ее подкоренного выражения):

$$\frac{d}{d\omega} [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2] = 0.$$

После дифференцирования данного уравнения получим

$$\omega^2 - \omega_0^2 + 2\beta^2 = 0,$$

откуда

$$\omega = \pm \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}.$$

Частота колебаний ω не имеет отрицательных значений, тогда для резонансной частоты, при которой амплитуда колебаний достигает максимума, имеем выражение

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}. \quad (1.142)$$

Явление возрастания амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты вынуждающей силы ω к резонансной частоте $\omega_{\text{рез}}$ называется *механическим резонансом*.

Подставляя выражение (1.142) в уравнение (1.141), найдем резонансную амплитуду:

$$A_{\text{рез}} = F_0 / (2m\beta \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}).$$

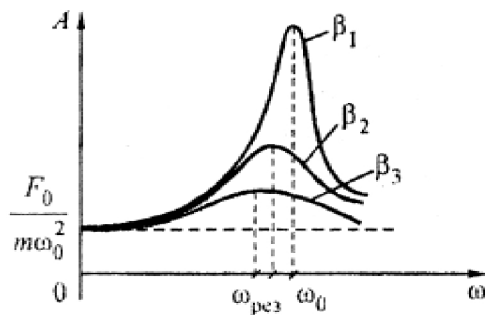


Рис. 33

На рис.33 показаны резонансные кривые при $\beta_1 < \beta_2 < \beta_3$:

- 1) Если $\omega = 0$, то $A = F_0 / (m\omega_0^2)$.
- 2) Если $\beta = 0$ и $\omega = \omega_0$, то амплитуда бесконечно возрастает.
- 3) При $\omega \rightarrow \infty$ амплитуда колебаний стремится к нулю.
- 4) С увеличением коэффициента затухания β амплитуда колебаний уменьшается.

§32. Механические волны в упругой среде

Механические колебания могут распространяться в упругих средах: в твердых телах, в жидкостях и газах.

Волной называется распространение колебаний вещества или поля, происходящее периодически в пространстве и во времени.

При волновом процессе передается состояние колебаний, перенос энергии осуществляется без переноса вещества.

Сплошной называется среда, в которой вещество распределено непрерывно. В упругой среде распространяются упругие колебания, образуя упругие волны: *поперечные* или *продольные*.

Гармонической называется волна, в которой изменение состояния колеблющейся системы происходит по закону синуса или косинуса.

Если в упругой сплошной среде возбудить колебания ее частиц, то вследствие взаимодействия между частицами колебания будут передаваться от одной частицы к другой с некоторой скоростью v . Такая волна называется *бегущей*. При этом частицы среды не увлекаются волной в поступательное движение, а совершают колебания около своих положений равновесия. В поперечной волне частицы колеблются в направлении, перпендикулярном к направлению распространения волны. Скорость распространения поперечной волны определяется по формуле

$$v_n = \sqrt{G/\rho},$$

где G – модуль сдвига, ρ – плотность среды.

В продольной волне частицы вещества колеблются вдоль направления распространения волны. Скорость распространения продольной волны рассчитывается по формуле

$$v_{np} = \sqrt{E/\rho},$$

где E – модуль Юнга.

На рис.34, а показана кривая смещения s из положения равновесия точек с различными значениями координаты x в некоторый момент времени t .

Физическая величина, равная расстоянию между двумя ближайшими частицами, колеблющимися в одинаковой фазе, называется *длиной волны*. Длина волны равна расстоянию, на которое распространяется волна за время, равное периоду T , т.е.

$$\lambda = vT = v/\nu,$$

где ν – частота колебаний.

Волновой поверхностью называется геометрическое место точек, колеблющихся в одинаковой фазе. По форме волновой поверхности волны подразделяются на плоские, сферические и цилиндрические.

Волновой фронт – это геометрическое место точек, до которых доходят колебания в данный момент времени.

§33. Уравнение плоской бегущей волны. Волновое уравнение

Рассмотрим бегущую волну, у которой колебания точек в плоскости $x = 0$ имеют вид

$$s_0 = A \cos(\omega t + \varphi).$$

Пусть τ – время, за которое колебания дойдут до плоскости, где расположена точка В (рис.34, а): $\tau = x/v$. Колебания частиц в точке В

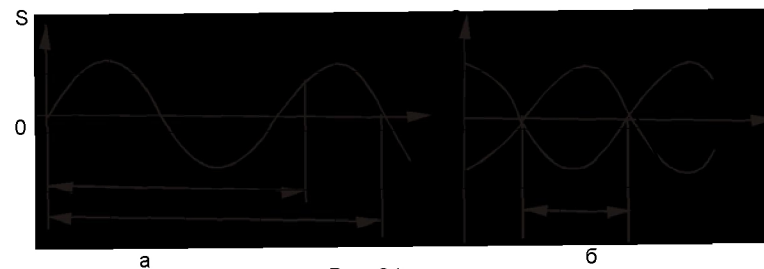


Рис. 34

будут отставать по времени на величину τ от колебаний в плоскости $x = 0$ и, следовательно, имеют вид

$$s_x = A \cos[\omega(t - \tau) + \varphi]. \quad (1.143)$$

Если волна распространяется в сторону, противоположную x , то уравнение запишется в виде

$$s_x = A \cos[\omega(t + \tau) + \varphi]. \quad (1.144)$$

Заменив в уравнениях (1.143) и (1.144) τ на x/v , получим уравнение плоской бегущей волны: .

$$s_x = A \cos \left[\omega \left(t \mp \frac{x}{v} \right) + \varphi \right]. \quad (1.145)$$

Уравнение бегущей волны принято также записывать с использованием волнового числа $k = 2\pi/\lambda$. Так как $\lambda = vT$, то $k = 2\pi/(vT) = \omega/v$. Тогда уравнение (1.145) примет вид

$$s_x = A \cos(\omega t \mp kx + \varphi). \quad (1.146)$$

Допустим, что фаза волны постоянна, т.е.

$$\left[\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) + \varphi \right] = \text{const.} \quad (1.147)$$

Дифференцируя по времени выражение (1.147), получим

$$dt - \frac{dx}{v} = 0,$$

откуда

$$dt = \frac{dx}{v}, \quad v_v = \frac{dx}{dt}.$$

Таким образом, скорость распространения волны v есть скорость перемещения фазы волны. Поэтому ее называют *фазовой скоростью*. Скорость волны определяется физическими свойствами среды, в которой она распространяется. Если имеется зависимость скорости волны от частоты (явление называется *дисперсией* волн), то фазовые скорости волн неодинаковы.

Дифференцируя дважды: по времени t и по координате x уравнение (1.146), имеем:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = -\omega^2 s, \quad (1.148)$$

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = -k^2 s. \quad (1.149)$$

Выразив s из уравнения (1.148) и подставив его в (1.149) с учетом выражения $k = \omega/v$, получим волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}. \quad (1.150)$$

В уравнении (1.150) s - физическая величина, которая характеризует возмущение, распространяющееся со скоростью v .

В общем случае, когда смещение s является функцией x , y , z и t , волновое уравнение (1.150) имеет вид

$$\Delta s = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}, \quad (1.151)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ - оператор П.Лапласа.¹

§34. Стоячие волны

Стоячие волны образуются при наложении двух бегущих навстречу друг другу волн, имеющих одинаковые частоты и амплитуды:

$$\begin{aligned} s_1 &= A \cos(\omega t - kx), \\ s_2 &= A \cos(\omega t + kx). \end{aligned} \quad (1.152)$$

Сложив уравнения (1.152) и учитывая, что $k = 2\pi/\lambda$, получим *уравнение стоячей волны*:

$$s = s_1 + s_2 = 2A \cos kx \cos \omega t = 2A \cos(2\pi x/\lambda) \cos \omega t. \quad (1.153)$$

Из уравнения (1.153) видно, что колебания в стоячей волне имеют ту же частоту ω , а амплитуда $A_{\text{ст}}$ изменяется по гармоническому закону и является функцией координаты x :

¹ Пьер Симон Лаплас (1749-1827) – французский ученый.

$$A_{cm} = 2A \cos(2\pi x / \lambda).$$

Амплитуда $A_{ст}$ достигает максимальных значений в точках, имеющих координаты:

$$\frac{2\pi x}{\lambda} = \pm \pi m, (m = 0, 1, 2, \dots), \quad (1.154)$$

которые называются *пучностями* стоячей волны (рис. 34,б).

В точках пространства, имеющих координаты

$$\frac{2\pi x}{\lambda} = \pm \left(m + \frac{1}{2}\right) \pi, \quad (1.155)$$

амплитуда минимальна. Эти точки называются *узлами* стоячей волны. Из сопоставления выражений (1.154) и (1.155) следует, что расстояние между соседними узлами и соседними пучностями одинаковы и равны $\lambda/2$.

§35. Энергия и интенсивность волны

Предположим, что плоская волна распространяется в упругой среде в направлении оси x . Согласно формуле (1.146) запишем уравнение волны:

$$s = A \cos(\omega t - kx + \varphi).$$

Выделим в среде элементарный объем dV и найдем кинетическую энергию, которой он обладает:

$$dE_k = dm \frac{v^2}{2} = \frac{dm}{2} A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx + \varphi), \quad (1.156)$$

где
$$v = \frac{ds}{dt} = -A\omega \sin(\omega t - kx + \varphi).$$

Так как элементарная масса объема $dm = \rho dV$, то из уравнения (1.156) получим

$$dE_k = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 dV \sin^2(\omega t - kx + \varphi),$$

где ρ - плотность вещества среды.

Если в выделенном объеме действуют только напряжения растяжения-сжатия, то величина потенциальной энергии dE_p будет равна кинетической энергии dE_k , т.е. $dE_p = dE_k$. Тогда для потенциальной энергии запишем:

$$dE_p = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 dV \sin^2(\omega t - kx + \varphi).$$

Полная энергия

$$dE = dE_k + dE_p = \rho A^2 \omega^2 dV \sin^2(\omega t - kx + \varphi).$$

Отношение dE/dV называется *плотностью энергии*:

$$u = \frac{dE}{dV} = \rho A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx + \varphi). \quad (1.157)$$

Из формулы (1.157) видно, что плотность энергии в разных точках среды в каждый момент времени различна. Среднее по времени значение плотности энергии равно

$$\langle u \rangle = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2, \quad (1.158)$$

так как среднее значение

$$\sin^2(\omega t - kx + \varphi) = \frac{1}{2}.$$

Потоком энергии Φ называется скалярная величина, равная количеству энергии, переносимому волной через выделенную поверхность в единицу времени:

$$\Phi = dE / dt. \quad (1.159)$$

В системе СИ поток энергии измеряется в ваттах (Вт).

Плотностью потока энергии волны $\vec{j}$ называется векторная величина, равная потоку энергии, переносимому через единичную площадку, перпендикулярно направлению распространения волны:

$$|\vec{j}| = \frac{d\Phi}{dS} = \frac{dE}{dS dt}. \quad (1.160)$$

Вектор $\vec{j}$ направлен в сторону переноса энергии. В системе СИ плотность потока энергии измеряется в ваттах на квадратный метр

(Вт/м²).

Среднее по времени значение плотности потока энергии называется *интенсивностью волны* в данной точке среды.

Пусть плоская волна распространяется со скоростью v . Выделим на пути распространения волны элементарную площадку dS , перпендикулярную направлению распространения волны и отстоящую от фронта волны на расстоянии, равном длине волны λ . Найдем среднее значение плотности потока энергии через выделенную площадку:

$$\langle \vec{j} \rangle = \frac{dE}{dS \cdot dt} = \frac{\langle u \rangle \cdot dV}{dS \cdot dt} = \frac{\langle u \rangle \cdot dS \cdot \lambda}{dS \cdot T} = \langle u \rangle v \quad (1.161)$$

где T - период колебаний.

Выражение (1.161), записанное в векторной форме:

$$\langle \vec{j} \rangle = \langle u \rangle \vec{v}, \quad (1.162)$$

называют *уравнением Н. Умова*.¹

Формула (1.162) справедлива для плоской, сферической и цилиндрической волн.

§ 36. Звуковые волны

Звуковыми волнами (звуком) называют упругие волны, распространяющиеся в средах и имеющие частоту в пределах от 20 до 20000 Гц. Если частота упругих волн меньше 20 Гц, то такие волны называют *инфразвуком*, если больше 20 кГц, то - *ультразвуком*. Инфра- и ультразвук человеческое ухо не слышит. Звуковая волна, распространяясь в среде, переносит энергию. *Интенсивностью звука* I называется физическая величина, равная средней энергии, переносимой звуковой волной за единицу времени сквозь единицу площади поверхности, расположенной нормально к направлению распространения волны:

$$I = E/(St), \quad (1.163)$$

где E - средняя по времени величина энергии волны; S - площадь поверхности, t - время.

Единица измерения интенсивности звука - ватт на квадратный

метр (Вт/м²).

Человеческое ухо имеет различную чувствительность к звукам разных частот. Для каждой частоты существуют наименьшая и наибольшая интенсивности звука, которые воспринимаются человеческим ухом. Минимальную интенсивность называют *порогом слышимости*, а максимальную - *порогом болевого ощущения*.

Графики зависимости этих интенсивностей приведены на рис. 35.

Громкость звука возрастает с увеличением амплитуды колебаний. Уровень громкости звука L , имеющего интенсивность I , оценивается формулой

$$L = 10 \lg(I/I_0), \quad (1.164)$$

где $I_0 = 10^{-12} \text{ Вт/м}^2$ - интенсивность звука на пороге слышимости.

Уровень громкости измеряют в децибелах (дБ). Тихий разговор составляет по уровню громкости 40 дБ, крик - 80 дБ, шум реактивного двигателя (120-130) дБ.



Рис. 35

Реальные звуки возникают в результате наложения большого числа колебаний разных частот, т.е. обладают *акустическим спектром*. Различают сплошной и линейчатый акустические спектры. При *сплошном спектре* волны частоты простых синусоидальных волн, входящие в ее состав, образуют непрерывную последовательность. Если волна представляет собой набор простых синусоидальных волн с дискретными частотами, то спектр такой волны *является линейчатым*.

Колебания с линейчатым спектром называются *тональными*. Их характеризуют высотой. *Высота* звука определяется наименьшей частотой в спектре. При этом относительная интенсивность других частот (обертонов) определяет *тембр* звука.

Скорость звука в различных средах различна. Так, в воздухе

¹ Николай Алексеевич Умов (1846-1915) - русский физик.

при нормальных условиях она чуть меньше средней скорости теплового движения молекул и составляет 340 м/с, в воде (при 20° С) -1480 м/с, в железе - 5850 м/с.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 23. Частица совершает прямолинейные гармонические колебания по закону синуса. При смещении частицы от положения равновесия на $x_1 = 2,6$ см ее скорость $v_1 = 2,9$ см/с, а при смещении на $x_2 = 3,4$ см скорость частицы $v_2 = 1,9$ см/с. Найдите амплитуду и циклическую частоту колебаний частицы.

Дано:
 $x_1 = 2,6$ см
 $v_1 = 2,9$ см/с
 $x_2 = 3,4$ см
 $v_2 = 1,9$ см/с

Решение: По условию задачи запишем два уравнения, используя формулу (1.122) и принимая $\varphi_0 = 0$:

$$x_1 = A \sin \omega_0 t_1, \quad (1)$$

$$x_2 = A \sin \omega_0 t_2.$$

Найдем скорости колебаний

$A = ? \quad \omega_0 = ?$

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= dx_1/dt_1 = A \omega_0 \cos \omega_0 t_1, \\ v_2 &= dx_2/dt_2 = A \omega_0 \cos \omega_0 t_2. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Представим систему уравнений (1),(2) в виде:

$$x_1/A = \sin \omega_0 t_1, \quad (3)$$

$$x_2/A = \sin \omega_0 t_2, \quad (4)$$

$$v_1/A \omega_0 = \cos \omega_0 t_1, \quad (5)$$

$$v_2/A \omega_0 = \cos \omega_0 t_2. \quad (6)$$

Уравнения (3) и (5) возведем в квадрат и сложим, аналогичную операцию сделаем с уравнениями (4) и (6):

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{x_1}{A} \right)^2 + \left(\frac{v_1}{A \omega_0} \right)^2 &= \sin^2(\omega_0 t_1) + \cos^2(\omega_0 t_1) = 1 \\ \left(\frac{x_2}{A} \right)^2 + \left(\frac{v_2}{A \omega_0} \right)^2 &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Решая систему уравнений (7), находим амплитуду

$$A = \sqrt{\frac{v_1^2 x_2^2 - v_2^2 x_1^2}{v_1^2 - v_2^2}}$$

и циклическую частоту

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{v_1^2 - v_2^2}{x_2^2 - x_1^2}}.$$

Ответ: $A = 3,9$ см, $\omega_0 \approx 1 \text{ с}^{-1}$.

Задача 24. Амплитуда гармонических колебаний материальной точки $A = 2$ см, полная энергия колебаний $E = 3 \cdot 10^{-7}$ Дж. При каком смещении от положения равновесия на колеблющуюся точку действует сила $F = 2,25 \cdot 10^{-5}$ Н?

Дано:

$$E = 3 \cdot 10^{-7} \text{ Дж}$$

$$A = 2 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$

$$F = 2,25 \cdot 10^{-5} \text{ Н}$$

$x = ?$

Решение: Полная энергия гармонических колебаний определяется формулой (1.128):

$$E = \frac{1}{2} m A^2 \omega_0^2, \quad (1)$$

а ускорение формулой (1.125):

$$a = -\omega_0^2 x.$$

Применив второй закон Ньютона, найдем силу, действующую на точку:

$$F = ma = m(-\omega_0^2 x). \quad (2)$$

Произведение $(m\omega_0^2)$ найдем из уравнения (1) и подставим в уравнение (2):

$$F = -x(m\omega_0^2) = -x \frac{2E}{A^2}.$$

Знак «-» указывает на то, что квазиупругая сила F направлена противоположно смещению x .

По модулю
$$x = \frac{FA^2}{2E}.$$

Ответ: $x = 1,5 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$

Задача 25. Амплитуда затухающих колебаний математического маятника за 1 минуту уменьшилась вдвое. Во сколько раз она уменьшится за 3 минуты?

Дано:

$$\frac{A_n}{A_m} = 2$$

$$\tau_1 = 60 \text{ с}$$

$$\tau_2 = 180 \text{ с}$$

$$\frac{A_n}{A_k} = x - ?$$

Решение: Амплитуда затухающих колебаний

изменяется по закону (1.138): $A = A_0 e^{-\beta t}$. Таким образом, можно записать систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} A_n &= A_0 e^{-\beta t} \\ A_m &= A_0 e^{-\beta(t+\tau_1)} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где τ_1 – время, в течение которого амплитуда колебаний уменьшилась вдвое. Разделив в этой системе первое уравнение на второе, получим

$$\frac{A_n}{A_m} = \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+\tau_1)}} = e^{\beta \tau_1},$$

$$2 = e^{\beta \tau_1}. \quad (2)$$

Прологарифмировав уравнение (2), можно определить коэффициент затухания:

$$\ln 2 = \beta \tau_1, \quad \beta = \frac{\ln 2}{\tau_1}. \quad (3)$$

Аналогично запишем вторую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} A_n &= A_0 e^{-\beta t} \\ A_k &= A_0 e^{-\beta(t+\tau_2)} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где τ_2 – время, за которое амплитуда колебаний уменьшится в x раз. Разделив в системе (4) первое уравнение на второе:

$$\frac{A_n}{A_k} = \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+\tau_2)}} = e^{\beta \tau_2},$$

можно определить:

$$x = e^{\beta \tau_2}. \quad (5)$$

Из формул (3) и (5) окончательно получим

$$x = e^{\frac{\tau_2 \ln 2}{\tau_1}}.$$

Ответ: $x = 8.$

Задача 26. В U – образной трубке находится столбик жидкости длиной l , отсчитываемой по оси трубки. При кратковременном изменении давления жидкости в одном из колен уровни жидкости сместились и столбик начал колебаться. Определить частоту колебаний. Трением о стенки пренебречь.

Дано:

$$l$$

$$\omega_0 - ?$$

Решение: Колебания жидкости начнутся под действием силы давления столба жидкости высотой $2x$ (см.рис).

$$F = pS = 2\rho g x S \quad (1)$$

где S – площадь поперечного сечения трубки, p – давление, ρ – плотность жидкости. По второму закону Ньютона

$$ma = -2\rho g S x. \quad (2)$$

Знак минус в уравнении (2) берется потому, что сила давления направлена в сторону, противоположную смещению.

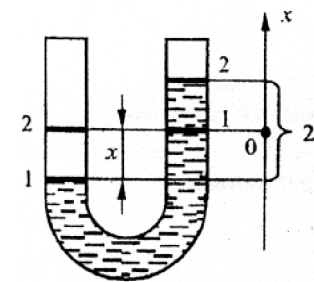


Рис. к задаче 26.

Масса жидкости

$$m = \rho l S . \quad (3)$$

Тогда из уровня (2) и (3) получим

$$a = - \left(\frac{2 \cdot g}{l} \right) x , \quad (4)$$

где a - ускорение (вторая производная смещения x по времени t).

Уравнение можно записать:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{2g}{l} x = 0 .$$

Получим дифференциальное уравнение гармонических колебаний, в котором

$$\left(\frac{2g}{l} \right) = \omega_0^2 ,$$

откуда

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2g}{l}} .$$

Ответ: $\omega_0 = \sqrt{\frac{2g}{l}} .$

Масса жидкости

$$m = \rho l S. \quad (3)$$

Тогда из уровня (2) и (3) получим

$$a = -\left(\frac{2 \cdot g}{l}\right)x, \quad (4)$$

где a - ускорение (вторая производная смещения x по времени t).

Уравнение можно записать:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{2g}{l}x = 0.$$

Получим дифференциальное уравнение гармонических колебаний, в котором

$$\left(\frac{2g}{l}\right) = \omega_0^2,$$

откуда

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2g}{l}}.$$

Ответ: $\omega_0 = \sqrt{\frac{2g}{l}}.$

ЧАСТЬ 2

ОСНОВЫ МОЛЕКУЛЯРНОЙ ФИЗИКИ И ТЕРМОДИНАМИКИ

Глава 7

ОСНОВЫ МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

§37. Понятия и определения

В молекулярной физике и термодинамике изучаются процессы, происходящие в макроскопических телах. *Макроскопическими* называются тела, состоящие из большого числа частиц: молекул и атомов.

Существуют два метода исследования макроскопических тел: статистический и термодинамический. *Статистический метод* изучает макроскопические тела, исследуя свойства частиц, из которых они состоят, и их взаимодействия. В этом методе для описания тел используются усредненные значения динамических характеристик частиц.

Термодинамический метод базируется на трех опытных законах (началах). При этом методе исследования не используются представления о строении тела и характере движения частиц, входящих в него.

Термодинамической системой называется совокупность макроскопических тел, обменивающихся энергией как между собой, так и с внешними телами или системами.

Физические величины, характеризующие термодинамическую систему, называются *параметрами состояния*. Давление, температура, объем, плотность и т.д. являются параметрами состояния системы.

Температура - это физическая величина, характеризующая состояние равновесия системы. Понятие температуры имеет смысл только для равновесных состояний. *Равновесным* называется состояние термодинамической системы, имеющей постоянные во времени параметры при неизменных внешних условиях.

Температура в любой части системы, находящейся в равновесном состоянии, одинакова.

В молекулярной физике и термодинамике для измерения температуры пользуются *абсолютной шкалой* (шкалой Кельвина)¹.

Между абсолютной температурой T и температурой t , измеряемой по шкале Цельсия, существует линейная связь:

$$T = t + 273 \text{ К.}$$

Температура, равная - 273° С (точнее - 273,16° С), называется *абсолютным нулем*. Абсолютный нуль - самая низкая температура. В термодинамике доказывается, что охладить тело до абсолютного нуля невозможно.

Термодинамическая система называется *изолированной*, если она не обменивается с внешней средой ни энергией, ни веществом. Термодинамическая изолированная система находится в равновесном состоянии, если параметры системы при постоянных внешних условиях с течением времени не изменяются.

Реальные процессы не являются равновесными, но могут приближаться к ним, если они достаточно медленные.

Переход термодинамической системы из одного состояния в другое называется *термодинамическим процессом*. Термодинамический процесс сопровождается изменением параметров состояния.

§38. Основные положения молекулярно-кинетической теории

1. Любое вещество состоит из мельчайших частиц - молекул и атомов. Одним из доказательств этого положения является то, что некоторые молекулы можно увидеть в электронный микроскоп.

2. Молекулы и атомы в веществе находятся в состоянии непрерывного теплового движения, причем скорость их движения пропорциональна корню квадратному из абсолютной температуры:

$$v \sim \sqrt{T}.$$

3. Между молекулами вещества существуют силы взаимодействия (притяжения $F_{\text{п}}$ и отталкивания $F_{\text{от}}$), называемые молекулярными силами. Радиус действия молекулярных сил порядка 10^{-9} м.

Силы притяжения с уменьшением расстояния r между молекулами увеличиваются пропорционально $1/r^7$, а силы отталкивания - пропорционально $1/r^{13}$.

На расстоянии r_0 , примерно равном сумме радиусов двух молекул, $F = 0$, т.к. сила притяжения равна по модулю силе отталкивания.

На расстояниях, превышающих r_0 , между молекулами действуют силы притяжения, а на расстояниях меньше r_0 - силы отталкивания (рис. 36).

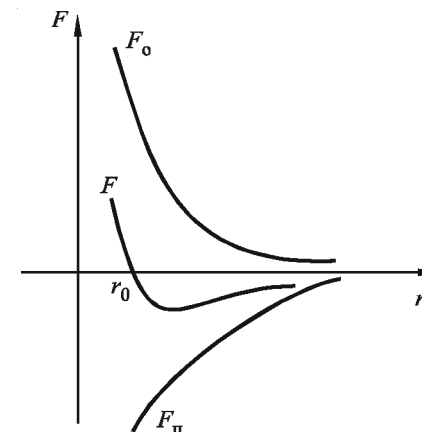


Рис. 36

Явлениями подтверждающими основные положения и выводы молекулярно-кинетической теории, являются, например, броуновское движение и диффузия.

§39. Количество вещества. Масса и размеры молекул

Количеством вещества ν называется физическая величина, равная отношению числа молекул N , содержащихся в веществе, к постоянной Авогадро N_A :

$$\nu = N/N_A. \quad (2.1)$$

Моль - единица количества вещества, в котором содержится столько же структурных элементов, сколько содержится атомов в 0,012 кг изотопа углерода ^{12}C .

В одном моле любого вещества содержится одно и то же число атомов или молекул. Это число называется *постоянной* или *числом А. Авогадро*¹:

$$N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}.$$

Молярной массой называется масса вещества, взятого в количестве одного моля.

Молярная масса равна произведению постоянной Авогадро на массу молекулы m_0 :

$$\mu = m_0 \cdot N_A. \quad (2.2)$$

¹ Уильям Томсон (лорд Кельвин) (1824-1907) - английский физик.

¹ Амедео Авогадро (1776-1856) - итальянский физик.

Единица измерения молярной массы - килограмм на моль (кг/моль).

Число молекул N любого вещества массой m согласно формулам (2.1) и (2.2) равно

$$N = \nu N_A = mN_A/\mu. \quad (2.3)$$

Закон Авогадро: моли любых газов при одинаковых температуре и давлении занимают одинаковые объемы. При нормальных условиях ($p_0 = 1,01325 \cdot 10^5$ Па, $T_0 = 273$ К) объем моля равен

$$V_\mu = 22,41 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{моль}.$$

Размеры молекул и атомов очень малы. Оценим размер молекул воды. Допустим, что молекулы плотно прилегают друг к другу и образуют кубическую ячейку. Тогда объем, занимаемый молекулой

$V_0 = d^3$, а линейный размер молекулы $d = \sqrt[3]{V_0}$. Один моль воды имеет массу $18 \cdot 10^{-3}$ кг и занимает объем $V_\mu = 18 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3/\text{моль}$. Разделив объем моля V_μ на число Авогадро N_A , получим объем, занимаемый молекулой:

$$V_0 = V_\mu / N_A \approx 30 \cdot 10^{-30} \text{ м}^3.$$

Отсюда линейный размер молекулы

$$d = \sqrt[3]{V_0} \approx 0,3 \text{ нм}.$$

Молекулы других веществ имеют такой же порядок величины.

§40. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеального газа

Газ, состоящий из молекул, размерами и взаимодействием которых можно пренебречь (за исключением моментов столкновений), называется *идеальным*.

Мысленно выделим в идеальном газе цилиндрический объем с площадью оснований ΔS (рис. 37). Вычислим давление, оказываемое молекулами газа на площадку ΔS . Будем считать, что соударения молекул абсолютно упругие.

В идеальном газе любые направления движения молекул *равновероятны*. Хаотическое движение

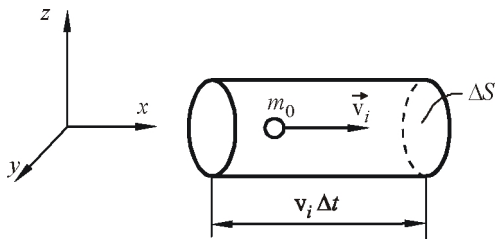


Рис. 37

молекул в выделенном объеме будем рассматривать как движение вдоль координатных осей x , y , z . Вдоль каждой оси движется $1/3$ молекул, половина которых, т.е. $1/6$ часть, движется в положительном направлении оси координат, а вторая половина - в противоположном.

Молекула массой m_0 , двигаясь в положительном направлении оси x со скоростью v_i , ударяется о площадку ΔS и передает ей импульс

$$\Delta p_i = m_0 v_i - (-m_0 v_i) = 2m_0 v_i. \quad (2.4)$$

За промежуток времени Δt о площадку ΔS ударяется $1/6$ часть молекул, которые заключены в объеме цилиндра с площадью оснований ΔS и образующей, равной $v_i \Delta t$. Число таких молекул

$$N_i = \Delta S v_i \Delta t n / 6, \quad (2.5)$$

где $n = N / V$ - число молекул в единице объема.

Из уравнений (2.4) и (2.5) найдем величину импульса, передаваемого площадке:

$$\Delta p = \Delta p_i N_i = 2m_0 v_i \Delta S v_i \Delta t n / 6 = m_0 n v_i^2 \Delta S \Delta t / 3. \quad (2.6)$$

По второму закону Ньютона изменение импульса тела равно импульсу силы $F \Delta t$, т.е.

$$\Delta p = F \Delta t. \quad (2.7)$$

Так как давление $p = F / \Delta S$, учитывая уравнения (2.6) и (2.7), найдем искомую величину давления газа:

$$p = \Delta p / (\Delta S \Delta t) = m_0 n v_i^2 / 3. \quad (2.8)$$

Из уравнения (2.8) видно, что *давление газа на стенку сосуда определяется величиной импульса, приходящегося в единицу времени на единицу площади, и зависит от числа ударов молекул о стенку.*

Молекулы газа в рассматриваемом объеме движутся с разными скоростями: $v_1, v_2, \dots, v_N$, поэтому в уравнении (2.8) вместо скорости v_i следует записывать среднюю квадратичную скорость:

$$\langle v \rangle_{\text{кв}} = \sqrt{(v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_N^2) / N} = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^N v_i^2 \right) / N}, \quad (2.9)$$

которая определяет коллективное действие молекул.

Из уравнений (2.8) и (2.9) получим

$$p = n m_0 \langle v \rangle_{\text{кв}}^2 / 3. \quad (2.10)$$

Уравнение (2.10) можно представить в виде

$$pV = \frac{2}{3} \langle E \rangle, \quad (2.11)$$

где $\langle E \rangle = m \langle v \rangle_{\text{кв}}^2 / 2$ - кинетическая энергия поступательного движения всех молекул, m - масса газа.

Выражение (2.11) называется *основным уравнением молекулярно-кинетической теории идеального газа*: Произведение давления идеального газа на его объем равно 2/3 кинетической энергии поступательного движения молекул газа.

§41. Уравнение состояния идеального газа

Уравнение, определяющее связь между параметрами состояния p , V , T , называется *уравнением состояния*.

Опытным путем была установлена зависимость

$$pV/T = \text{const}. \quad (2.12)$$

Уравнение (2.12) называют *законом Клапейрона*¹. Используя данное уравнение для одного моля газа $V_{0\mu}$, взятого при нормальных условиях ($p_0 = 101,325$ кПа, $T_0 = 273$ К, $V_{0\mu} = 22,41 \cdot 10^{-3}$ м³/моль), можно записать:

$$\text{const} = p_0 V_{0\mu} / T_0.$$

Обозначив постоянную величину за R и подставив в уравнение (2.12) параметры газа при нормальных условиях, найдем ее значение:

$$R = p_0 V_{0\mu} / T_0 = 8,31 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}.$$

Величина R называется *универсальной газовой постоянной*.

Таким образом, для одного моля газа можно записать: $pV_{0\mu} = RT$. Умножив данное уравнение на число молей $\nu = m / \mu$, получим уравнение состояния для произвольной массы газа - *уравнение Клапейрона-Менделеева*².

$$pV = mRT/\mu \quad (2.13)$$

или

$$pV = \nu RT. \quad (2.14)$$

Уравнение (2.14) применимо и для смеси газов, то есть является более общим, чем уравнение (2.13).

Поскольку отношение m/V есть плотность газа ρ , то уравнение (2.13) можно записать:

$$p = \rho RT/\mu. \quad (2.15)$$

Если умножить и поделить правую часть уравнения (2.13) на число Авогадро и учесть, что $R / N_A = k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К - постоянная Больцмана, а выражение $mN_A / V_{\mu} = n$ - число молекул в единице объема, то получим уравнение состояния идеального газа в виде

$$p = nkT. \quad (2.16)$$

Запишем уравнение состояния (2.13) для одного моля газа:

$$pV_{\mu} = RT.$$

Подставив вместо p его значение из уравнения (2.11)

$p = 2n \langle E \rangle / 3$ и расписав $n = N_A / V_{\mu}$, получим выражение для средней кинетической энергии поступательного движения одной молекулы идеального газа:

$$\langle E_{\text{к}} \rangle_o = 3kT/2. \quad (2.17)$$

Как видно из уравнения (2.17), *средняя кинетическая энергия движения молекулы прямо пропорциональна абсолютной температуре*.

*Закон Д. Дальтона*¹. Пусть имеется смесь газов:

$$n = n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_N, \quad (2.18)$$

где n число молекул в единице объема смеси, $n_1, n_2, \dots, n_N$ - число молекул в единице объема первого, второго, ... N -го газов, составляющих смесь.

Используя уравнение (2.16) и (2.18), запишем:

$$p = nkT = kT(n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_N) =$$

$$= kTn_1 + kTn_2 + kTn_3 + \dots + kTn_N = p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_N,$$

где $p_1, p_2, p_3, \dots, p_N$ - парциальные давления газов в смеси.

Парциальным называется давление, которое производил бы газ, входящий в смесь, если бы он один занимал объем, в котором находится смесь, при той же температуре. Таким образом, *давление смеси газов равно сумме парциальных давлений, составляющих данную смесь (закон Дальтона)*.

¹ Б.П. Клапейрон (1799-1864) - французский физик.

² Дмитрий Иванович Менделеев (1834-1907) - русский химик.

¹ Дж. Дальтон (1766-1844) - английский ученый.

§42. Закон распределения молекул по скоростям (закон Д. Максвелла)¹

Молекулы газа, испытывая взаимные столкновения, имеют различные скорости движения. Однако найти число молекул, обладающих определенной скоростью, невозможно, так как число различных значений скоростей бесконечно велико, а число молекул конечно. Поэтому в статистической физике задача ставится по-иному: определяется число молекул, скорости которых находятся в заданном интервале значений скоростей.

Выберем прямоугольную систему координат, вдоль осей которой отложим проекции скоростей молекул v_x, v_y, v_z . Получим трехмерное пространство скоростей (рис. 38). Всякой молекуле в этом пространстве скоростей соответствует точка, которая изображает ее скорость $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$. Интервалу $(v_x, v_x + dv_x)$, $(v_y, v_y + dv_y)$, $(v_z, v_z + dv_z)$ соответствует элементарный объем $dV = dv_x dv_y dv_z$ пространства скоростей, имеющий форму куба. Число точек dn в объеме dV пространства скоростей равно этому объему, умноженному на плотность точек внутри него. Обозначим через $nf(v_x, v_y, v_z)$ число точек, приходящихся на единицу объема пространства скоростей (среднюю плотность точек). Здесь n – общее число молекул газа. Тогда

$$dn = nf(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z. \quad (2.19)$$

Другими словами, dn – это число молекул, проекции скоростей которых лежат в интервале значений от v_x до $v_x + dv_x$, от v_y до $v_y + dv_y$, от v_z до $v_z + dv_z$.

Из математики известно, что вероятность какого-либо события dP равна отношению числа событий с ожидаемым исходом к общему числу возможных событий, если общее число событий сколько угодно велико.

Вероятность того, что проекции скоростей находятся в выбранном интервале скоростей, равна отношению числа молекул с заданным значением скорости к общему числу молекул, т.е.

$$dP = \frac{dn}{n} = f(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z,$$

¹ Джеймс Клерк Максвелл (1831-1879) – великий английский физик.

где $f(v_x, v_y, v_z)$ – функция распределения молекул по скоростям, представляющая собой плотность вероятности. Под плотностью вероятности понимается отношение вероятности к единичному объему пространства скоростей.

Согласно Максвеллу функция распределения $f(v_x, v_y, v_z)$ определяется отношением кинетической энергии молекулы

$$E_o = \frac{m_o v^2}{2} = \frac{m_o}{2} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$$

к средней энергии его теплового движения $\langle E \rangle = \kappa T$, и имеет вид:

$$f(v_x, v_y, v_z) = A \cdot e^{-\frac{m_o v^2}{2\kappa T}},$$

где m_o – масса молекулы,

T – температура газа,

κ – постоянная Больцмана,

e – основание натурального логарифма.

Постоянная величина A , не зависящая от скорости, находится из условия нормировки

$$\int_0^\infty f(v_x, v_y, v_z) dV = 1.$$

$$\text{По расчетам } A = \left(\frac{m_o}{2\pi\kappa T} \right)^{3/2}.$$

Вычислив постоянную A , запишем уравнение для среднего числа частиц, находящихся в заданном интервале:

$$dn = n \left(\frac{m_o}{2\pi\kappa T} \right)^{3/2} e^{-\frac{m_o v^2}{2\kappa T}} dv_x dv_y dv_z. \quad (2.20)$$

На рис. 38 штриховыми линиями выделен шаровой слой радиуса v и толщиной dv . Найдём число молекул, находящихся в шаровом слое и обладающих скоростями, модули которых лежат в интервале от v до $v + dv$.

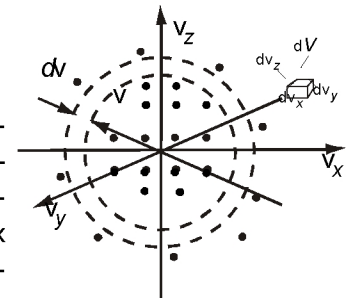


Рис. 38

Для этого в выражении (2.19) объем $dV = dv_x dv_y dv_z$ заменим на объем шарового слоя $4\pi v^2 dv$, получим:

$$dn = n f(v) 4\pi v^2 dv = n \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} 4\pi v^2 dv.$$

Отсюда находится функция распределения молекул по скоростям – *распределение Максвелла*:

$$f(v) = \frac{dn}{n dv} = 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} v^2. \quad (2.21)$$

Полученное распределение молекул по скоростям является статистическим законом, который реализуется в определенных условиях.

Из уравнения (2.21) видно, что вид функции зависит от температуры и рода газа. Отношение $\frac{dn}{n}$ находится из формул (2.20) и (2.21):

$$\frac{dn}{n} = 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} \cdot e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} \cdot v^2 dv. \quad (2.22)$$

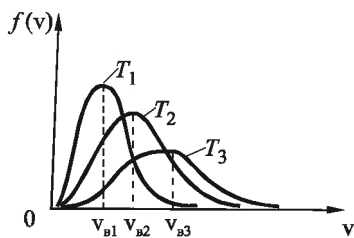


Рис. 39

Графики функций $f(v)$ для различных температур показаны на рис. 39. При повышении температуры $T_3 > T_2 > T_1$ вся кривая смещается вправо и становится положе, т.е. увеличивается число молекул с большими скоростями. Функция обращается в ноль при $v = 0$ и при $v \rightarrow \infty$: в газе отсутствуют неподвижные молекулы и нет молекул с бесконечно большими скоростями. Функция $f(v)$ имеет максимум при скорости, равной v_B , которая называется *наиболее вероятной скоростью*. Наиболее вероятная скорость определяется из условия экстремума функции $f(v)$:

$$\frac{d}{dv} \left(v^2 e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} \right) = 2v \left(1 - \frac{m_0 v^2}{2kT} \right) \cdot e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} = 0.$$

Значения $v = 0$ и $v = \infty$ соответствуют минимуму функции. Для наиболее вероятной скорости получим

$$v_B = \sqrt{2kT/m_0} = \sqrt{2RT/\mu}. \quad (2.23)$$

Следует заметить, что количество молекул в рассматриваемом объеме не остается постоянным, а испытывает колебания около некоторого среднего значения. Такие случайные, хаотические изменения числа молекул и других физических величин называются *флуктуациями*. Флуктуациями плотности воздуха в атмосфере Земли объясняется, например, голубой цвет неба.

Используя распределение Максвелла (2.22), можно найти среднюю арифметическую скорость движения молекул:

$$\langle v \rangle = \sqrt{8kT/(\pi m_0)} = \sqrt{8RT/(\pi \mu)}, \quad (2.24)$$

среднюю квадратичную скорость:

$$\langle v \rangle_{\text{кв}} = \sqrt{3kT/m_0} = \sqrt{3RT/\mu}. \quad (2.25)$$

Введем обозначение: $u = v/v_B$, тогда $du = \frac{dv}{v_B}$, а $v^2 = u^2 v_B^2 = 2RTu^2/m_0$. Подставляя данные выражения в формулу (2.22), получим *закон распределения Максвелла через относительные скорости*:

$$\frac{dn}{n} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} u^2 du. \quad (2.26)$$

Опыт О. Штерна. Опытная проверка распределения Максвелла и определение скоростей движения молекул были выполнены физиком Штерном в 1920 году. На рис. 40 показана схема экспериментальной установки. Платиновая проволока 1, натянутая вдоль оси цилиндра 2, покрывалась тонким слоем серебра. По проволоке пропусклся электрический ток. При этом проволока нагревалась, атомы серебра испарялись и, вылетая через щель в цилиндре 2, попадали на внутреннюю поверхность цилиндра 3, давая на ней изображение щели А. Воздух из цилиндров заранее откачивался. При вращении цилиндров 2 и 3 вокруг общей оси атомы серебра осаждались на некотором расстоянии x от точки А, давая размытое изображение щели.

По толщине слоя серебра, осажженного на цилиндре 2, проводилась оценка распределения молекул по скорости.

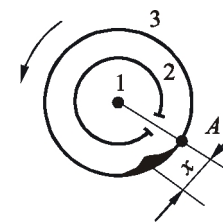


Рис. 40

Зная радиусы цилиндров 2 и 3, угловую скорость их вращения, измеряя температуру проволоки и расстояние x , рассчитывались скорости движения атомов серебра.

Опыт Штерна подтвердил достоверность распределения Максвелла.

§43. Барометрическая формула. Распределение Л. Больцмана

Мысленно выделим в атмосфере Земли вертикальный столб (рис. 41). Молекулы воздуха в выделенном объеме, двигаясь хаотически, испытывают воздействие гравитационного поля Земли. В результате чего давление газа с высотой уменьшается. Предположим, что плотность воздуха $\rho = \text{const}$, температура газа постоянная, а гравитационное поле однородно. Пусть на высоте $h = 0$ давление p_0 , на высоте h давление p , на высоте $h + dh$ давление равно $p - dp$ (так как давление с высотой убывает).

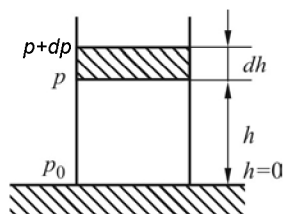


Рис. 41

По закону Б. Паскаля¹ давление dp в тонком слое воздуха равно

$$dp = -\rho g dh. \quad (2.27)$$

Из уравнения состояния (2.15) найдем плотность газа: $\rho = p\mu/(RT)$ и, подставив в формулу (2.27), получим

$$dp = -\frac{p\mu g}{RT} dh,$$

откуда после разделения переменных запишем:

$$-\frac{dp}{p} = \frac{\mu g}{RT} dh.$$

Возьмем интеграл от полученного выражения:

$$-\int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = \frac{\mu g}{RT} \int_0^h dh, \quad \ln \frac{p}{p_0} = -\frac{\mu g}{RT} h$$

или

$$p = p_0 e^{-\frac{\mu gh}{RT}}. \quad (2.28)$$

¹ Блез Паскаль (1623-1662) - французский ученый.

Уравнение (2.28) называется *барометрической формулой*. С помощью барометрической формулы можно определить давление атмосферы на известной высоте h , зная температуру и давление у поверхности Земли. В авиации эта формула используется для определения высоты полета

$$h = \frac{RT \ln p_0 / p}{\mu g}.$$

Воспользовавшись уравнением (2.16), барометрическую формулу приведем к виду

$$n = n_0 e^{-\mu gh/(RT)}, \quad (2.29)$$

где n и n_0 концентрации молекул на высоте h и у поверхности Земли соответственно.

По формуле (2.2) $\mu = m_0 N_A$, а $R = k N_A$, то

$$n = n_0 e^{-m_0 gh/(kT)}. \quad (2.30)$$

Так как $m_0 gh = E_p$ - потенциальная энергия в гравитационном поле, то формулу (2.30) запишем в виде

$$n = n_0 e^{-E_p/(kT)}.$$

Получили распределение молекул (частиц) во внешнем потенциальном поле, называемое *распределением Больцмана*¹: в состоянии теплового равновесия плотность газа (концентрация молекул), подверженного действию внешнего поля, больше там, где меньше потенциальная энергия его молекул.

Больцмановское распределение молекул по энергиям изображено графически на рис 42.

Распределение Больцмана является универсальным законом. Оно справедливо для любых частиц, находящихся в потенциальном силовом поле.

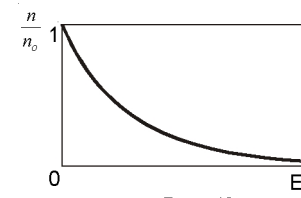


Рис. 42

¹ Людвиг Больцман (1844-1906) - австрийский физик.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 27. Посередине откачанной и запаянной с обеих сторон горизонтальной трубки длиной 1 м находится столбик ртути длиной 20 см. Если трубку поставить вертикально, то столбик ртути переместится вниз на расстояние 10 см. До какого давления откачана трубка?

Дано:

$$L = 1 \text{ м}$$

$$L_0 = 0,2 \text{ м}$$

$$\Delta L = 0,1 \text{ м}$$

$$p_1 = ?$$

Решение: На рис. показаны два положения трубки:

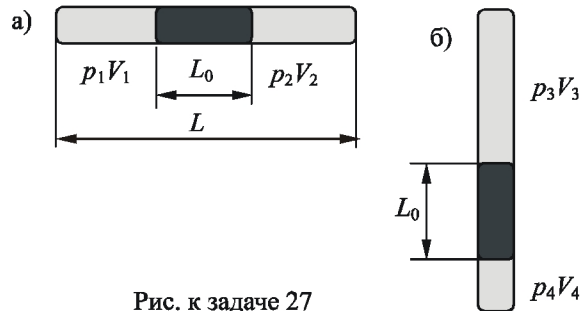


Рис. к задаче 27

а) - горизонтальное, б) - вертикальное.

Температура воздуха не меняется, т.е. имеем дело с изотермическим процессом ($T = \text{const}$):

(p_1V_1) и (p_2V_2) - начальные состояния газа (рис. а);

(p_3V_3) и (p_4V_4) - соответственно конечные состояния газа (рис. б).

По закону Бойля - Мариотта запишем:

$$(p_1V_1) = (p_3V_3), \quad (1)$$

$$(p_2V_2) = (p_4V_4). \quad (2)$$

В положении (а) ртуть находится в равновесии, расположена симметрично относительно трубки, поэтому можно записать еще одно уравнение:

$$(p_1V_1) = (p_2V_2). \quad (3)$$

Тогда

$$(p_3V_3) = (p_4V_4), \quad (4)$$

где

$$V_3 = \left(\frac{L - L_0}{2} + \Delta L \right) S = 0,5S;$$

$$V_4 = \left(\frac{L - L_0}{2} - \Delta L \right) S = 0,3S.$$

Давление p_4 равно сумме давлений: p_3 , создаваемого верхним столбиком воздуха (рис. б), и давления столбика ртути высотой L_0 :

$$p_4 = p_3 + \rho g L_0,$$

где ρ - плотность ртути.

Подставим V_3, V_4 и p_4 в уравнение (4):

$$p_3 0,5S = (p_3 + \rho g L_0) 0,3S.$$

Откуда получим

$$p_3 = \frac{3}{2} \rho g L_0. \quad (5)$$

По формуле (1) определим:

$$p_1 = \frac{p_3 V_3}{V_1}, \quad (6)$$

где

$$V_1 = \frac{L - L_0}{2} S = 0,4S.$$

Подставляя p_3, V_3, V_1 в уравнение (6), вычислим первоначальное давление:

$$p_1 = \left(\frac{15}{8} \right) \rho g L_0,$$

$$p_1 = \left(\frac{15}{8} \right) \cdot 13,6 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 0,2 = 0,05 \cdot 10^6,$$

$$[p] = \left[\frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot \text{м} \right] = \left[\frac{\text{Н}}{\text{м}^2} \right] = \text{Па}.$$

Ответ: $p_1 = 0,05 \text{ МПа}.$

Задача 28. В баллоне емкостью 110 л помещено $m_1 = 0,8$ г водорода и $m_2 = 1,6$ г кислорода. Определить давление смеси на стенки сосуда, если температура окружающей среды $t = 27^\circ \text{C}$.

Дано:

$$V = 110 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$$

$$m_1 = 0,8 \cdot 10^{-3} \text{ кг}$$

$$m_2 = 1,6 \cdot 10^{-3} \text{ кг}$$

$$T = 273 + 27 = 300 \text{ К}$$

$$p_{\text{см}} = ?$$

Решение: Согласно закону Дальтона давление смеси равно сумме парциальных давлений:

$$p_{\text{см}} = p_1 + p_2.$$

Из уравнения (2.13) Менделеева-Клапейрона найдем p_1 - парциальное давление водорода:

$$p_1 = \frac{m_1}{V \mu_1} RT \quad (1)$$

и p_2 - парциальное давление кислорода:

$$p_2 = \frac{m_2}{V \mu_2} RT. \quad (2)$$

Молярные массы водорода $\mu_1 = 2 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$, кислорода

$\mu_2 = 32 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$. Используя уравнения (1) и (2), найдем:

$$p_{\text{см}} = \frac{RT}{V} \left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2} \right),$$

$$[p] = \left[\frac{\text{Дж}}{(\text{моль} \cdot \text{К})} \cdot \text{К} \cdot \frac{1}{\text{м}^3} \cdot \text{моль} \right] = \left[\frac{\text{Н}}{\text{м}^2} \right] = \text{Па}.$$

Произведем вычисления:

$$p_{\text{см}} = \frac{8,31 \cdot 300}{110 \cdot 10^{-3}} \left(\frac{0,8 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-3}} + \frac{1,6 \cdot 10^{-3}}{32 \cdot 10^{-3}} \right) = 1,02 \cdot 10^4.$$

Ответ: $1,02 \cdot 10^4 \text{ Па}$.

Задача 29. Азот находится под давлением $p = 1$ атм при температуре $T = 300 \text{ К}$. Найти относительное число молекул азота, модули скоростей которых лежат в интервале скоростей от $\langle v \rangle$ до $\langle v \rangle + dv$,

где $dv = 1 \frac{\text{м}}{\text{с}}$. Внешние силы отсутствуют.

Дано:

$$p = 10^5 \text{ Па}$$

$$T = 300 \text{ К}$$

$$dv = 1 \text{ м/с}$$

$$\frac{dn}{n} = ?$$

Решение: При давлении $p = 1$ атм и температуре $T = 300 \text{ К}$ азот можно считать идеальным газом. В отсутствии внешних сил молекулы идеального газа подчиняются закону распределения Максвелла (2.21):

$$f(v) = \frac{dn}{ndv} = 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 \cdot e^{-\frac{m_0 v^2}{2 \cdot kT}}.$$

Таким образом, относительное число молекул азота, модули скоростей которых лежат в интервале скоростей $\langle v \rangle$ до $\langle v \rangle + dv$, можно определить по формуле (2.22)

$$\frac{dn}{n} = 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 \cdot e^{-\frac{m_0 \cdot v^2}{2kT}} \cdot dv. \quad (1)$$

Выражение (1) справедливо, если интервал скоростей dv столь мал, что изменением функции распределения $f(v)$ на этом интервале скоростей можно пренебречь, считая ее приближенно постоянной. В нашем случае интервал $dv = 1 \text{ м/с}$ мал по сравнению со значением средней арифметической скорости (2.24):

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} \approx 475 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Подставив в (1) значение средней арифметической скорости (2.24), получаем решение задачи в общем виде:

$$\frac{dn}{n} = \frac{8\sqrt{2}}{\pi} \left(\frac{m_0}{\pi kT} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{4}{\pi}} \cdot dv. \quad (2)$$

Массу молекулы азота определим по формуле

$$m_0 = \frac{\mu}{N_A},$$

где $\mu = 28 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$; $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$.

Произведя вычисления по формуле (2), получим

$$\frac{dn}{n} = 1,9 \cdot 10^{-3}.$$

Ответ: 0,19 %.

Задача 30. Барометр в кабине летящего самолета все время показывает одинаковое давление $p = 80 \text{ кПа}$, благодаря чему летчик считает высоту полета h неизменной. Однако температура воздуха изменилась на $\Delta T = 1 \text{ К}$. Какую ошибку Δh в определении высоты допустил летчик? Считать, что температура не зависит от высоты и что у поверхности Земли давление $p_0 = 100 \text{ кПа}$.

Дано:

$$p_0 = 10^5 \text{ Па}$$

$$p = 8 \cdot 10^4 \text{ Па}$$

$$\Delta T = 1 \text{ К}$$

$$\mu = 29 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$$

$$\Delta h = ?$$

Решение: Воспользуемся барометрической формулой (2.28):

$$p = p_0 \cdot e^{-\frac{\mu gh}{RT}}.$$

Барометр в самолете может показывать неизменное давление p при различных температурах T_1 и T_2 за бортом только в том случае, если самолет находится на различных

высотах h_1 и h_2 . Запишем барометрическую формулу для этих двух случаев:

$$\begin{aligned} p &= p_0 \cdot e^{-\frac{\mu gh_1}{RT_1}}, \\ p &= p_0 \cdot e^{-\frac{\mu gh_2}{RT_2}}. \end{aligned} \quad (1)$$

Найдем отношение давлений $\frac{p_0}{p}$ в уравнениях (1), и обе части полученных равенств прологарифмируем:

$$\begin{aligned} \ln \frac{p_0}{p} &= \frac{\mu gh_1}{RT_1}, \\ \ln \frac{p_0}{p} &= \frac{\mu gh_2}{RT_2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Из соотношений (2) выразим высоты h_1 и h_2 и найдем их разность:

$$\Delta h = h_2 - h_1 = \frac{R \ln \left(\frac{p_0}{p} \right)}{\mu g} (\Delta T).$$

Произведем вычисления:

$$\Delta h = \frac{8,3 \cdot \ln \left(\frac{10^5}{8 \cdot 10^4} \right)}{29 \cdot 10^{-3} \cdot 10} \cdot 1 = 6,5.$$

Сделаем проверку размерности:

$$[\Delta h] = \frac{[R] \cdot [T]}{[\mu] \cdot [g]} = \frac{\frac{\text{Дж}}{(\text{моль} \cdot \text{К})} \cdot \text{К}}{\frac{\text{кг}}{\text{моль}} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}^2}} = \frac{\text{Дж} \cdot \text{К} \cdot \text{моль} \cdot \text{с}^2}{\text{моль} \cdot \text{К} \cdot \text{кг} \cdot \text{м}} = \frac{\text{Дж}}{\text{Н}} = \text{м}.$$

Ответ: $\Delta h = 6,5 \text{ м}$.

Глава 8 Явления переноса в газах

§44. Средняя длина свободного пробега молекул

Молекулы газа, находясь в тепловом хаотическом движении, непрерывно сталкиваются друг с другом. Под *столкновением* молекул понимается процесс, при котором скорости движения молекул изменяются по модулю и по направлению. Кратчайшее расстояние между центрами молекул при их столкновении называется *эффективным диаметром молекул* σ .

От одного столкновения до другого молекулы проходят некоторое расстояние, называемое *длиной свободного пробега* молекулы λ . Так как эти расстояния различны, то принято говорить о *средней длине свободного пробега молекулы* $\langle \lambda \rangle$.

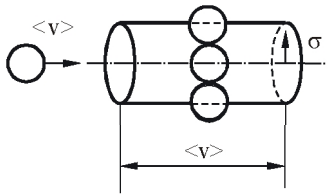


Рис. 43

Пусть молекулы представляют собой шарики с диаметром, равным σ . Мысленно выделим в газе цилиндрический объем с радиусом $r = \sigma$ и длиной образующей, равной средней арифметической скорости движения молекул $\langle v \rangle$ (рис. 43). Допустим, что все

молекулы в выделенном объеме неподвижны и только одна молекула движется по оси цилиндра со скоростью $\langle v \rangle$.

За 1 секунду эта молекула пройдет путь, равный $\langle v \rangle$. Тогда объем выделенного цилиндра $V = \pi \sigma^2 \langle v \rangle$. Движущаяся молекула ударит те молекулы, центры которых лежат в выделенном объеме, т.е. $\langle z \rangle = \pi \sigma^2 \langle v \rangle n$, где n - число молекул в единице объема, а $\langle z \rangle$ - среднее число столкновений молекулы в единицу времени. Поскольку реально все молекулы движутся, то вместо $\langle v \rangle$ в полученное выражение следует подставить $v_{\text{отн}} = \sqrt{2} \langle v \rangle$, т.е.

$$\langle z \rangle = \sqrt{2} \pi \sigma^2 \langle v \rangle n. \quad (2.31)$$

Разделив средний путь, проходимый молекулой за 1 секунду, на число столкновений $\langle z \rangle$, получим среднюю длину свободного пробега

$$\langle \lambda \rangle = \frac{\langle v \rangle}{\langle z \rangle} = \frac{1}{\sqrt{2} \pi \sigma^2 n}. \quad (2.32)$$

Найдем n из уравнения состояния (2.16) и подставим его значение в формулу (2.32):

$$n = p/(kT),$$

$$\langle \lambda \rangle = kT / (\sqrt{2} \pi \sigma^2 p). \quad (2.33)$$

Как видно из выражения (2.33), с увеличением температуры газа $\langle \lambda \rangle$ тоже возрастает, так как увеличивается число молекул с большими скоростями. С ростом давления $\langle \lambda \rangle$ уменьшается, поскольку возрастает число соударений молекул.

§45. Опытные законы явлений переноса

Особые *необратимые* процессы, возникающие в термодинамически неравновесных системах, называются явлениями *переноса*. К ним относятся: *диффузия* (перенос массы), *теплопроводность* (перенос энергии) и *вязкость* или *внутреннее трение* (перенос импульса).

1. *Диффузией* называется явление проникновения соприкасающихся веществ друг в друга. Процесс диффузии возникает в веществе - газе, жидкости или твердом теле.

Для однородного газа в одномерном процессе явление диффузии описывается законом А. Фика¹:

$$dm = -D \frac{dp}{dx} dS dt, \quad (2.34)$$

где dm - масса газа, переносимого за время dt через площадку dS в направлении нормали x к площадке, dp/dx - градиент плотности, D - коэффициент диффузии. Знак минус в уравнении (2.34) показывает, что перенос массы происходит в направлении убывания плотности, т.е. направление переноса массы и направление градиента плотности противоположны.

¹ Адольф Фик (1829-1901) - немецкий ученый.

Молекулярно-кинетическая теория газов для коэффициента диффузии дает следующее выражение:

$$D = \frac{1}{3} \langle \lambda \rangle \langle v \rangle.$$

Так как $\langle \lambda \rangle = kT / (\sqrt{2} \pi \sigma^2 p)$, а $\langle v \rangle = \sqrt{8RT / (\pi \mu)}$, получаем, что коэффициент диффузии $D \sim T^{3/2} / (p \sqrt{\mu})$. Таким образом, с увеличением температуры диффузия в газах ускоряется, с ростом давления - замедляется. Диффузия в газах с тяжелыми молекулами протекает медленнее.

2. *Теплопроводностью* называется явление переноса внутренней энергии из одного слоя газа в другой. Процесс теплопроводности возникает при наличии разности температур в различных слоях газа.

Для одномерного процесса справедлив закон Ж. Фурье¹:

$$dQ = -\gamma \frac{dT}{dx} dS dt, \quad (2.35)$$

где dQ - количество энергии, переносимое за время dt через площадку dS в направлении нормали x к этой площадке в сторону уменьшения температуры; γ - коэффициент теплопроводности, dT/dx - градиент температуры. Знак минус показывает, что направление переноса

энергии противоположно направлению градиента температуры ($\frac{dT}{dx}$ направлен в сторону увеличения T).

Из молекулярно-кинетической теории для коэффициента теплопроводности можно получить следующее выражение:

$$\gamma = \frac{1}{3} \langle \lambda \rangle \langle v \rangle c_v \rho,$$

где ρ - плотность газа, c_v - удельная теплоемкость газа при постоянном объеме. Анализ данного выражения показывает, что с увеличением температуры теплопроводность газа возрастает и не зависит от давления.

3. *Внутреннее трение (вязкость)* возникает между двумя слоями газа или жидкости, перемещающимися параллельно друг другу с разными по модулю скоростями. Причиной внутреннего трения в газах является перенос импульса из одного слоя в другой.

В случае одномерного процесса явление вязкости описывается законом И. Ньютона:

$$dF = \eta \frac{du}{dx} dS, \quad (2.36)$$

где dF - сила внутреннего трения, действующая на площадку dS , du/dx - градиент скорости движения слоев в направлении x , перпендикулярном площадке dS , η - коэффициент динамической вязкости.

Согласно молекулярно-кинетической теории

$$\eta = \frac{1}{3} \langle \lambda \rangle \langle v \rangle \rho,$$

где $\langle v \rangle$ - средняя скорость теплового движения молекул, $\langle \lambda \rangle$ - средняя длина свободного пробега молекул, ρ - плотность газа.

Коэффициент динамической вязкости не зависит от давления газа. Вязкость газов растет с повышением температуры пропорционально $\sqrt{T}$.

Примечание. Вязкость жидкости с увеличением температуры уменьшается. В жидкости вязкость определяется силами взаимодействия молекул.

Коэффициенты D , γ и η связаны соотношениями $\eta = \rho D$, $\gamma = \eta c_v$.

По численным значениям коэффициентов переноса можно приблизительно оценить среднюю длину свободного пробега молекул газа при различных условиях.

¹ Жан Батист Жозеф Фурье (1768-1830) - французский ученый.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 31. При температуре 0°C и некотором давлении средняя длина свободного пробега молекул кислорода равна $9,5 \cdot 10^{-8}\text{ м}$. Чему равно среднее число столкновений в 1 секунду молекул кислорода, если сосуд откачать до $0,01$ первоначального давления? Температура остается неизменной.

Дано:

$$T = 273\text{ K}$$

$$\langle \lambda_1 \rangle = 9,5 \cdot 10^{-8}\text{ м}$$

$$p_2 = 0,01 p_1$$

$$\langle z \rangle = ?$$

Решение: Среднее число столкновений в секунду молекул кислорода находится по формуле:

$$\langle z \rangle = \frac{\langle v \rangle}{\langle \lambda \rangle}, \quad (1)$$

$$\text{где } \langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}};$$

$$\langle \lambda \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 n}. \quad (2)$$

Запишем среднюю длину свободного пробега $\langle \lambda \rangle$ для двух состояний. Для этого из формулы (2.16) найдем n и подставим в уравнение (2):

$$\langle \lambda_1 \rangle = \frac{kT_1}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 p_1}, \quad (3)$$

$$\langle \lambda_2 \rangle = \frac{kT_1}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 p_2}. \quad (4)$$

Разделив уравнение (3) на уравнение (4), получим

$$\langle \lambda_2 \rangle = \langle \lambda_1 \rangle \cdot \left(\frac{p_1}{p_2} \right).$$

Тогда по формуле (1) найдем

$$\langle z \rangle = \frac{\langle v \rangle}{\langle \lambda_2 \rangle} = \frac{\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}}{\langle \lambda_1 \rangle \frac{p_1}{p_2}}. \quad (5)$$

По условию: $\frac{p_1}{p_2} = 100$; $\mu = 32 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$.

Подставляя данные в (5), получим

$$\langle z \rangle = \frac{\sqrt{\frac{8 \cdot 8,3 \cdot 273}{3,14 \cdot 32 \cdot 10^{-3}}}}{9,5 \cdot 10^{-8} \cdot 100} = 4,5 \cdot 10^7.$$

Проверим размерность:

$$[z] = \frac{[R]^{\frac{1}{2}} \cdot [T]^{\frac{1}{2}} \cdot [\mu]^{-\frac{1}{2}}}{[\lambda]} = \left[\frac{\text{Дж} \cdot \text{К}}{(\text{моль} \cdot \text{К})} \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\left[\frac{\text{кг}}{\text{моль}} \right]^{-\frac{1}{2}}}{\text{м}} = \sqrt{\frac{\text{Дж}}{\text{кг}}} = \frac{1}{\text{с}} = \text{с}^{-1}.$$

Ответ: $4,5 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}$.

Задача 32. Углекислый газ и озон находятся при одинаковых давлениях и температурах. Найдите для этих газов отношения: а) коэффициентов диффузии; б) вязкостей; в) теплопроводностей. Диаметры молекул газов считать одинаковыми.

Дано:

$$\mu_1 = 44 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$$

$$\mu_2 = 28 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$$

$$i_1 = 6, \quad i_2 = 5$$

$$D_1 / D_2 = ?$$

$$\eta_1 / \eta_2 = ?$$

$$\gamma_1 / \gamma_2 = ?$$

Решение: а) Коэффициент диффузии

$$D = \frac{1}{3} \langle v \rangle \langle \lambda \rangle = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} \cdot \frac{kT}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 p}.$$

Так как диаметры молекул $\sigma_1 = \sigma_2$, то

$$\frac{D_1}{D_2} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}} = 0,8.$$

б) Коэффициент динамической вязкости

$$\eta = \frac{1}{3} \langle v \rangle \langle \lambda \rangle \rho,$$

где $\rho = p\mu / (RT)$.

Тогда
$$\eta = D \cdot \frac{p\mu}{RT},$$

$$\frac{\eta_1}{\eta_2} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}} \cdot \frac{\mu_1}{\mu_2} = \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}} = 1,25.$$

в) Коэффициент теплопроводности

$$\gamma = \frac{1}{3} \langle v \rangle \langle \lambda \rangle \rho c_v = \eta c_v,$$

где $c_v = \frac{i}{2} \frac{R}{\mu}$ - удельная теплоемкость газа, i - число степеней свободы молекул (см. § 49).

Таким образом,

$$\gamma = \eta c_v = \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}} \cdot \frac{i_1}{i_2} \cdot \frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{i_1}{i_2} \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}} = 0,96.$$

Ответ: 0,8; 1,25; 0,96.

Глава 9 ПЕРВОЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ

§46. Внутренняя энергия идеального газа

Под *числом степеней свободы* i понимается число независимых параметров, определяющих положение тела в пространстве. Так, положение материальной точки в пространстве определяется координатами x, y, z , следовательно, материальная точка имеет три степени свободы - поступательные. Положение твердого тела в пространстве определяется координатами его центра масс x, y, z и углами φ, θ, ψ (рис. 44). Следовательно, твердое тело имеет шесть степеней свободы: три поступательные (x, y, z) и три вращательные (φ, θ, ψ).

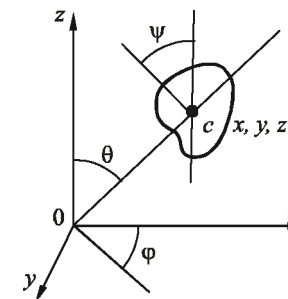


Рис. 44

Система, состоящая из n материальных точек, не связанных друг с другом, имеет $3n$ степеней свободы. Две жестко связанные между собой материальные точки имеют пять степеней свободы: три поступательные x, y, z , определяющие положение центра масс (точка c , рис. 45) и две вращательные (вокруг осей y и z). Вращение материальных точек вокруг оси x лишено смысла.

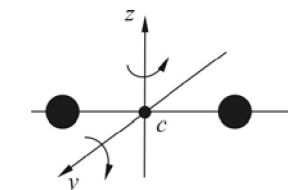


Рис. 45

Следовательно, каждая жесткая связь уменьшает число степеней свободы на единицу: без жесткой связи система двух материальных точек имеет шесть степеней свободы: $3n = 3 \cdot 2 = 6$, с одной жесткой связью - пять степеней свободы.

При определении числа степеней свободы молекул атомы, из которых они состоят, рассматриваются как материальные точки.

Каждая молекула независимо от общего числа ее степеней свободы имеет три поступательные степени свободы. Согласно формуле (2.17) на все три поступательные степени свободы приходится энергия

$\langle E \rangle = 3kT/2$. Следовательно, на одну степень свободы приходится энергия в три раза меньше, т.е. $1/2 kT$. Таким образом, на каждую степень свободы, будь то поступательная, вращательная или

колебательная, в среднем приходится одинаковая кинетическая энергия, равная $1/2 kT$. Данное утверждение называется *законом равнораспределения энергии по степеням свободы*.

Тогда средняя энергия молекул

$$\langle E \rangle = \frac{i}{2} kT, \quad (2.37)$$

где $i = i_{\text{пост}} + i_{\text{вращ}} + 2i_{\text{кол}}$ - суммарное число степеней свободы молекулы, состоящее из поступательных, вращательных и колебательных степеней. Заметим, что число колебательных степеней в этой сумме удваивается, так как колебательное движение связано с наличием как кинетической, так и потенциальной энергии, т.е. обладает удвоенной энергоемкостью.

Внутренняя энергия тела - это физическая величина, равная сумме кинетических энергий беспорядочного движения всех частиц тела (молекул, атомов и т.д.) и потенциальных энергий частиц, обусловленных силами их межмолекулярного взаимодействия.

Во внутреннюю энергию не входят энергия движения тела как целого (его кинетическая энергия) и потенциальная энергия, которой может обладать тело в каком-либо силовом поле (гравитационном, магнитном и т.д.).

Для идеального газа внутренняя энергия представляет собой кинетическую энергию хаотического теплового движения его молекул.

Используя выражение (2.37), для внутренней энергии одного моля идеального газа запишем:

$$U_{\mu} = \langle E \rangle \cdot N_A = \frac{i}{2} kT \cdot N_A = \frac{i}{2} RT,$$

где N_A - число Авогадро, R - универсальная газовая постоянная.

Внутренняя энергия U произвольно взятой массы идеального газа m определяется формулой

$$U = \frac{m}{\mu} \frac{i}{2} RT,$$

а изменение внутренней энергии

$$dU = \frac{m}{\mu} \frac{i}{2} R dT. \quad (2.38)$$

Внутренняя энергия является *однозначной функцией состояния системы*, т.е. зависит только от параметров состояния p, V, T и т.д. и не зависит от способа, каким это состояние достигнуто.

Внутренняя энергия возрастает при увеличении температуры тела, так как при этом возрастает кинетическая энергия частиц. Если холодное тело соприкасается с горячим, то внутренняя энергия холодного тела увеличивается, а горячего - уменьшается. Этот процесс происходит до тех пор, пока температуры тел не сравняются.

Количеством теплоты называется физическая величина, равная внутренней энергии, перешедшей от одного тела к другому при их контакте или излучении.

Количество теплоты измеряется в джоулях (Дж).

Внутреннюю энергию тела можно увеличить, если телу передать какое-либо количество теплоты или над телом совершить работу. При нагревании тела массой m от температуры t_1 до t_2 ему необходимо передать количество теплоты

$$Q = cm(t_2 - t_1), \quad (2.39)$$

где c - удельная теплоемкость вещества.

Удельной теплоемкостью называется физическая величина, равная количеству теплоты, которое нужно сообщить 1 кг вещества для изменения его температуры на 1К. Удельная теплоемкость измеряется в джоулях на килограмм-кельвин (Дж / (кг·К)).

Теплоемкостью тела называется физическая величина C , равная отношению количества теплоты, сообщаемой телу, к изменению температуры тела:

$$C = Q / \Delta T. \quad (2.40)$$

Теплоемкость тела измеряется в джоулях на кельвин (Дж/К).

Энергия, переданная термодинамической системе внешними телами при их силовом взаимодействии, называется *работой*. В процессе совершения работы от одного тела к другому передается энергия *упорядоченного движения*. При передаче теплоты энергия *хаотического движения* одной системы переходит к другой системе.

§47. Работа в термодинамике

При расширении газа совершается работа. Допустим, что газ заключен в сосуд, отделен от окружающего пространства невесомым поршнем и занимает объем V_1 (рис. 46). Давление газа в сосуде уравновешено давлением атмосферы p (процесс изобарный). Повысим

температуру газа под поршнем. Тогда газ, расширяясь, поднимет поршень на величину Δh , совершая работу

$$A = F\Delta h,$$

где $F = pS$ - сила давления атмосферы, S - площадь поршня. Следовательно, работа

$$A = pS\Delta h = p\Delta V,$$

где $\Delta V = V_2 - V_1$ - изменение объема газа при нагревании.

Если поршень передвигается на бесконечно малое расстояние dh , то при этом производится работа $dA = pdV$. Полная работа, совершаемая газом при изменении его объема от V_1 до V_2 , определяется интегрированием:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV. \quad (2.41)$$

Давление p - величина всегда положительная. При расширении газа $dV > 0$, газ совершает положительную работу. Если газ сжимается, то $dV < 0$ и работа $A < 0$. В этом случае положительную работу над газом совершают внешние силы.

§48. Первое начало термодинамики

Первый закон (начало) термодинамики является законом сохранения и превращения энергии в тепловых процессах.

При переходе системы из одного состояния в другое внутренняя энергия системы изменяется. Это изменение (в общем случае) происходит за счет теплообмена с другими системами или при совершении работы.

Первый закон термодинамики гласит: *изменение внутренней энергии системы ΔU при ее переходе из одного состояния в другое равно сумме работы A' внешних сил и количества теплоты Q , переданного системе:*

$$\Delta U = A' + Q.$$

Если вместо работы A' внешних сил рассматривать работу системы над внешними телами $A = -A'$, то первый закон термодинамики примет вид

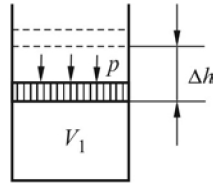


Рис. 46

$$Q = \Delta U + A. \quad (2.42)$$

Количество теплоты, переданное системе, расходуется на увеличение внутренней энергии системы и на совершение системой работы над внешними телами.

В дифференциальной форме выражение (2.42) будет иметь вид

$$d'Q = dU + d'A, \quad (2.43)$$

где dU - бесконечно малое изменение внутренней энергии, $d'A$ - элементарная работа, $d'Q$ - бесконечно малое изменение количества теплоты. Если dU является полным дифференциалом, то $d'A$ и $d'Q$ не являются полными дифференциалами (поэтому символы dQ и dA снабжены штрихами).

Интеграл $\int_1^2 dU = U_2 - U_1$ равен разности значений функции U в состояниях 2 и 1 и не зависит от пути совершения процесса.

Интегралы $\int_1^2 d'A = A_{1-2}$ и $\int_1^2 d'Q = Q_{1-2}$ зависят от того, по какому пути протекает процесс, т.е. A_{1-2} не равно $A_2 - A_1$ и Q_{1-2} не равно $Q_2 - Q_1$.

Если термодинамическая система возвращается в первоначальное состояние, то $dU = 0$ и согласно первому началу термодинамики (2.43) $d'Q = d'A$, т.е. *невозможно создать вечный двигатель первого рода, который совершал бы большую работу, чем количество энергии, подведенное извне к системе.*

§49. Кинетическая теория теплоемкостей

В § 46 дано понятие теплоемкости тела и удельной теплоемкости.

Однако при расчете процессов в газах чаще пользуются понятием молярной теплоемкости. *Молярной теплоемкостью* называется физическая величина c^μ , равная отношению количества теплоты, полученного веществом, к числу молей этого вещества и изменению его температуры:

$$c^\mu = dQ / \left(\frac{m}{\mu} \cdot dT \right). \quad (2.44)$$

Молярные и удельные теплоемкости связаны соотношением: $c^u = c_\mu$, где μ – молярная масса.

Различают молярную теплоемкость при постоянном объеме - c_V и молярную теплоемкость при постоянном давлении - c_p .

Пусть имеется один моль газа при постоянном объеме, т.е. $V = \text{const}$. Запишем первое начало термодинамики:

$$d'Q = dU + d'A.$$

Так как $d'A = p d'V$, а $d'V = 0$, то $d'Q = dU$. Согласно (2.38)

$d'Q = \frac{i}{2} R dT$, по формуле (2.44) определим молярную теплоемкость при постоянном объеме:

$$c_V = \frac{d'Q}{dT} = \frac{i}{2} R. \quad (2.45)$$

Пусть имеется один моль газа при постоянном давлении, т.е. $p = \text{const}$. Тогда

$$d'Q = dU + d'A = \frac{i}{2} R dT + p dV = \frac{i}{2} R dT + R dT,$$

$$c_p = \frac{d'Q}{dT} = \frac{i}{2} R + R = c_V + R. \quad (2.46)$$

Сопоставляя выражения (2.45) и (2.46), получим уравнение Ю.Р. Майера¹:

$$c_p = c_V + R. \quad (2.47)$$

Молярная теплоемкость измеряется в джоулях на моль-кельвин (Дж / (моль·К)).

Из выражений (2.45) и (2.46) следует, что молярные теплоемкости зависят только от числа степеней свободы молекул и не зависят от температуры. Данное утверждение справедливо в широком диапазоне температур только для одноатомного идеального газа.

§50. Изопроцессы в газах

Изопроцессами называются равновесные процессы, при протекании которых один из основных параметров состояния остается постоянным.

Изотермический процесс подчиняется закону Бойля-Мариотта: в изотермическом процессе, протекающем при постоянной температуре ($T = \text{const}$), произведение давления p данной массы газа на его объем V есть величина постоянная:

$$p_1 V_1 = p_2 V_2 = \dots = p_0 V_0 \quad \text{или} \quad pV = \text{const}.$$

Графиком процесса в p, V координатах является гипербола (рис. 47), которую в физике называют *изотермой*. С повышением температуры газа изотерма удаляется от начала координат.

Применим первое начало термодинамики к изотермическому процессу:

$$d'Q = dU + d'A,$$

$$\text{но } dU = \frac{m}{\mu} c_V dT.$$

При $T = \text{const}$ $dU = 0$, следовательно, $d'Q = d'A$. Все тепло, подведенное к термодинамической системе в изотермическом процессе, идет на совершение системой работы против внешних сил.

Найдем работу изотермического расширения газа, используя уравнение (2.13), (2.43):

$$A_{1-2} = \int_1^2 p dV = \int_1^2 \frac{m}{\mu} RT \frac{dV}{V} = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{p_2}{p_1}. \quad (2.48)$$

На графике (рис. 47) работа изображается площадью заштрихованной фигуры $abcd$.

Все медленно протекающие процессы приближенно можно считать изотермическими.

Изохорический процесс подчиняется закону Шарля: в изохорическом процессе, протекающем при постоянном объеме ($V = \text{const}$), отношение давления данной массы газа к его абсолютной температуре есть величина постоянная:

$$p_1 / T_1 = p_2 / T_2 = \dots = p_0 / T_0 \quad \text{или} \quad p / T = \text{const}.$$

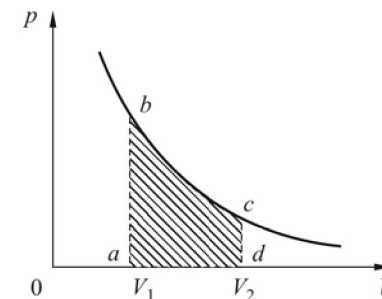


Рис. 47

¹ Юлиус Роберт Майер (1814-1878) - немецкий врач.

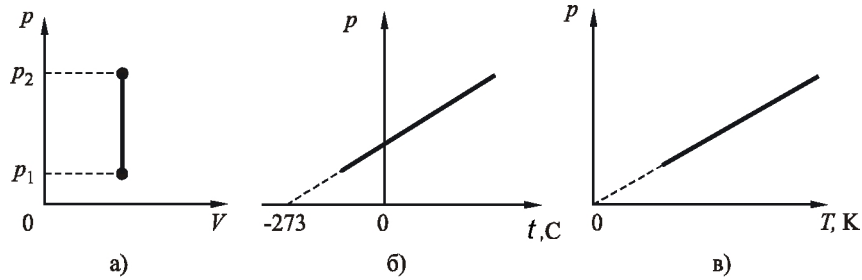


Рис. 48

На рис. 48 представлены графики изохорического процесса в различных координатах.

Применим к изохорическому процессу первое начало термодинамики:

$$d'Q = dU + d'A.$$

Так как $V = \text{const}$,

$$d'A = p dV = 0.$$

В изохорическом процессе газ работу над внешними телами не совершает. Сообщаемая газу теплота идет на увеличение внутренней энергии:

$$d'Q = dU.$$

Но $dU = \frac{m}{\mu} c_V dT$, интегрируя данное выражение, получим

$$U_2 - U_1 = \frac{m}{\mu} c_V (T_2 - T_1). \quad (2.49)$$

Используя уравнение Майера (2.47), представим c_V в виде

$$\frac{c_V R}{R} = \frac{c_V R}{c_p - c_V} = \frac{R}{\gamma - 1},$$

где $\gamma = c_p / c_V$ - показатель адиабаты. Тогда из уравнения (2.49) для изменения внутренней энергии запишем:

$$U_2 - U_1 = \frac{m}{\mu} \frac{R}{\gamma - 1} (T_2 - T_1) = \frac{p_2 V - p_1 V}{\gamma - 1} = \frac{V}{\gamma - 1} (p_2 - p_1).$$

Изобарический процесс подчиняется закону Гей-Люссака: в изобарическом процессе, протекающем при постоянном давлении ($p = \text{const}$), отношение объема данной массы газа к его абсолютной температуре есть величина постоянная:

$$V_1 / T_1 = V_2 / T_2 = \dots V_0 / T_0$$

или

$$V / T = \text{const}.$$

Графики изобарического процесса изображены на рис. 49.

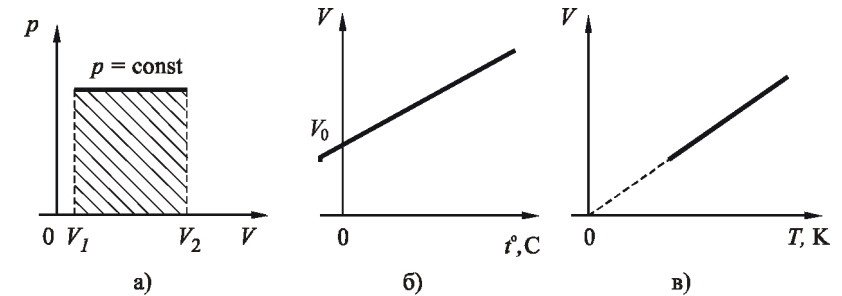


Рис. 49

Применим к изобарическому процессу первое начало термодинамики:

$$d'Q = dU + d'A = dU + p dV = d(U + pV)^*$$

или

$$d'Q = \frac{m}{\mu} c_V dT + p dV.$$

Количество подведенной теплоты

$$\begin{aligned} Q_{1-2} &= \frac{m}{\mu} c_V (T_2 - T_1) + p(V_2 - V_1) = \frac{m}{\mu} c_V (T_2 - T_1) + \frac{m}{\mu} R (T_2 - T_1) = \\ &= \frac{m}{\mu} (T_2 - T_1) (c_V + R) = \frac{m}{\mu} c_p (T_2 - T_1). \end{aligned}$$

* Функцию состояния $H = U + pV$ называют *энтальпией* (тепловой функцией).

Работа газа в изобарическом процессе $d'A = p dV$ или $A_{1-2} = pV_2 - pV_1$ и определяется площадью заштрихованного прямоугольника (рис. 49, а).

Применив уравнение состояния (2.13), получим

$$A_{1-2} = \frac{m}{\mu} R(T_2 - T_1). \quad (2.50)$$

Если разность температур $(T_2 - T_1) = 1 \text{ К}$, то для одного моля газа $\left(\frac{m}{\mu} = 1\right)$ работа $A_{1-2} = R$.

Отсюда вытекает физический смысл R : *универсальная газовая постоянная численно равна работе изобарического расширения одного моля идеального газа при его нагревании на один кельвин.*

Адиабатический процесс подчиняется уравнению Пуассона. Процесс, протекающий без теплообмена с внешней средой, называется адиабатическим. Все быстро протекающие процессы приближенно можно считать адиабатическими. В отсутствие теплообмена с внешней средой $d'Q = 0$.

Запишем первое начало термодинамики:

$$d'Q = dU + d'A.$$

Подставим в него выражения для внутренней энергии

$$dU = \frac{m}{\mu} c_V dT \text{ и работы } d'A = p dV :$$

$$d'Q = \frac{m}{\mu} c_V dT + p dV, \text{ т.к. } d'Q = 0, \text{ то}$$

$$p dV = -\frac{m}{\mu} c_V dT. \quad (2.51)$$

Возьмем дифференциал от обеих частей уравнения состояния идеального газа

$$pV = \frac{m}{\mu} RT,$$

получим

$$p dV + V dp = \frac{m}{\mu} R dT. \quad (2.52)$$

Просуммируем уравнения (2.51) и (2.52), предварительно умножив (2.51) на R/c_V , получим

$$p dV + V dp + \frac{p dV R}{c_V} = 0$$

или

$$p dV \left(1 + \frac{R}{c_V}\right) + V dp = 0. \quad (2.53)$$

Используя уравнение Майера (2.47), преобразуем выражение

$$1 + \frac{R}{c_V} = 1 + \frac{c_p - c_V}{c_V} = \frac{c_p}{c_V} = \gamma.$$

С учетом этого выражение (2.53) запишется в виде

$$\gamma p dV + V dp = 0.$$

Поделим полученное уравнение на произведение pV :

$$\gamma \frac{dV}{V} + \frac{dp}{p} = 0.$$

Интегрируя данное уравнение в пределах от V_1 до V_2 и от p_1 до p_2 , а затем потенцируя его, получим *уравнение Пуассона*:

$$p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma$$

или

$$pV^\gamma = \text{const}. \quad (2.54)$$

Применив уравнение состояния, выражение (2.54) можно привести к виду

$$TV^{\gamma-1} = \text{const}, \quad Tp^{-\frac{1-\gamma}{\gamma}} = \text{const}. \quad (2.55)$$

На рис. 50 представлены две кривые: 1 - адиабата, 2 - изотерма. Как видно из рисунка, адиабата идет круче, чем изотерма.

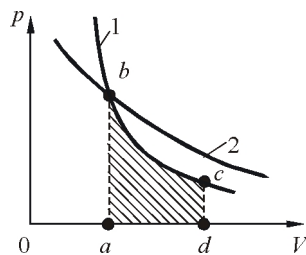


Рис. 50

Согласно первому началу термодинамики работа в адиабатическом процессе $d'A = -dU$, так как $d'Q = 0$. Тогда

$$A_{1-2} = -\frac{m}{\mu} c_V (T_2 - T_1) = \frac{m}{\mu} \frac{R}{\gamma - 1} (T_1 - T_2) = \frac{p_1 V_1 - p_2 V_2}{\gamma - 1} =$$

$$= \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1} \left(1 - \frac{p_2 V_2}{p_1 V_1} \right) = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1} \left[1 - \frac{p_2 V_2^\gamma}{p_1 V_1^\gamma} \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right] = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right].$$

По уравнению состояния $p_1 V_1 = \frac{m}{\mu} R T_1$, следовательно, работа

$$A_{1-2} = \frac{m}{\mu} \frac{R T_1}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right]. \quad (2.56)$$

Работа в адиабатическом процессе совершается за счет уменьшения внутренней энергии газа. Если над газом производят работу внешние силы, сжимая его, то внутренняя энергия и температура газа возрастают.

Работа в p - V координатах определяется площадью фигуры $abcd$, заштрихованной на рис. 50.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 33. Найти среднюю кинетическую энергию $\langle E_B \rangle$ вращательного движения одной молекулы кислорода при температуре $T = 350 \text{ К}$, а также кинетическую энергию E_K вращательного движения всех молекул кислорода, масса которого $m = 4 \text{ г}$.

Дано:

$$\mu = 32 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$$

$$T = 350 \text{ К}$$

$$m = 4 \cdot 10^{-3} \text{ кг}$$

$$\langle E_B \rangle = ? \quad E_K = ?$$

Решение: На каждую степень свободы молекулы газа приходится одинаковая средняя энергия $E_1 = \frac{1}{2} kT$. Так

как вращательному движению двухатомной молекулы (молекула кислорода - двухатомная) соответствуют две степени свободы, то средняя энергия вращательного движения молекулы кислорода

$$\langle E_B \rangle = 2 \frac{1}{2} kT = kT. \quad (1)$$

Кинетическая энергия вращательного движения всех молекул заданного количества газа

$$E_K = \langle E_B \rangle N, \quad (2)$$

где N - число молекул газа, которое можно определить по формуле

$$N = N_A \frac{m}{\mu}.$$

Тогда

$$E_K = N_A \frac{m}{\mu} \langle E_B \rangle.$$

Произведем вычисления:

$$\langle E_B \rangle = kT = 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 350 \text{ Дж} = 4,83 \cdot 10^{-21} \text{ Дж},$$

$$E_K = 6,02 \cdot 10^{23} \cdot \frac{4 \cdot 10^{-3}}{32 \cdot 10^{-3}} \cdot 4,83 \cdot 10^{-21} \text{ Дж} = 364 \text{ Дж}.$$

Ответ: $\langle E_B \rangle = 4,83 \cdot 10^{-21} \text{ Дж}$, $E_K = 364 \text{ Дж}$.

Задача 34. 12 г газа занимают объем $4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$ при температуре 7°С . После нагревания газа при постоянном давлении его плотность стала равна $6 \cdot 10^{-4} \text{ г/см}^3$. До какой температуры нагрели газ?

Дано:

$$m = 12 \cdot 10^{-3} \text{ кг}$$

$$V_1 = 4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$$

$$T_1 = 273 + 7 = 280 \text{ К}$$

$$\rho_2 = 0,6 \text{ кг/м}^3$$

$$T_2 = ?$$

Решение: Запишем уравнение Менделеева - Клапейрона для двух состояний газа:

$$\begin{cases} p_1 V_1 = \frac{m}{\mu} R T_1, \\ p_2 V_2 = \frac{m}{\mu} R T_2. \end{cases} \quad (1)$$

Процесс изобарный ($p_1 = p_2 = p = \text{const}$), а плотность газа после нагревания

$$\rho_2 = \frac{m}{V_2}. \quad (2)$$

С учетом уравнения (2) приведем систему уравнений (1) к виду

$$\begin{cases} p V_1 = \frac{m}{\mu} R T_1, \\ p = \frac{m}{V_2} \frac{R T_2}{\mu}, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} p V_1 = \frac{m}{\mu} R T_1, \\ p = \rho_2 R \frac{T_2}{\mu}. \end{cases} \quad (3)$$

Из уравнений (3) найдем

$$T_2 = \frac{m T_1}{V_1 \rho_2}.$$

Произведем вычисления и проверку размерности:

$$T_2 = \frac{12 \cdot 10^{-3} \cdot 280}{4 \cdot 10^{-3} \cdot 0,6} = 1400,$$

$$[T] = \left[\frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot \text{К} \cdot \frac{\text{м}^3}{\text{кг}} \right] = \text{К}.$$

Ответ: 1400 К.

Задача 35. Кислород массой $m = 2 \text{ кг}$ занимает объем $V_1 = 1 \text{ м}^3$ и находится под давлением $p_1 = 0,2 \text{ МПа}$. Газ был нагрет сначала при постоянном давлении до объема $V_2 = 3 \text{ м}^3$, а затем при постоянном объеме до давления $p_3 = 0,5 \text{ МПа}$. Найти изменение ΔU внутренней энергии газа, совершенную им работу A и теплоту Q , переданную газу. Построить график процесса.

Дано:

$$m = 2 \text{ кг}$$

$$V_1 = 1 \text{ м}^3$$

$$p_1 = 0,2 \cdot 10^6 \text{ Па}$$

$$V_2 = 3 \text{ м}^3$$

$$p_3 = 0,5 \cdot 10^6 \text{ Па}$$

$$\mu = 32 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$$

$$i = 5 \text{ (двухатомный газ)}$$

$$\Delta U = ? \quad A = ? \quad Q = ?$$

Решение: График процесса приведен на рис. к задаче. Изменение внутренней энергии газа, согласно формуле (2.38), можно определить:

$$\Delta U = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} R \Delta T, \quad (1)$$

где $\Delta T = T_3 - T_1$ - разность температур газа в конечном и начальном состояниях.

Эти температуры найдем из уравнения Менделеева - Клапейрона:

$$\begin{cases} T_1 = \frac{p_1 V_1 \mu}{m R}, \\ T_3 = \frac{p_3 V_2 \mu}{m R}. \end{cases} \quad (2)$$

Из уравнений (2) найдем ΔT и подставим в уравнение (1):

$$\Delta U = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} R (p_3 V_2 - p_1 V_1) \frac{\mu}{m R}$$

$$\text{или} \quad \Delta U = \frac{i}{2} (p_3 V_2 - p_1 V_1).$$

Произведем вычисления:

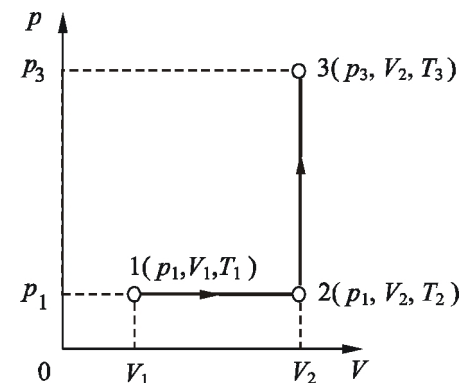


Рис. к задаче 35

$$\Delta U = \frac{5}{2} \cdot (0,5 \cdot 10^6 \cdot 3 - 0,2 \cdot 10^6 \cdot 1) \text{ Дж} = 3,24 \cdot 10^6 \text{ Дж} = 3,24 \text{ МДж}.$$

Полная работа газа, совершаемая на участке 1-2-3:

$$A = A_{1-2} + A_{2-3}.$$

Работа газа, нагреваемого при постоянном объеме, равна нулю, т.е.

$$A_{2-3} = 0.$$

Следовательно, полная работа, совершаемая газом:

$$A = A_{1-2} = p_1(V_2 - V_1). \quad (3)$$

После вычислений получим

$$A = 0,2 \cdot 10^6(3 - 1) \text{ Дж} = 0,4 \cdot 10^6 \text{ Дж} = 0,4 \text{ МДж}.$$

Согласно первому началу термодинамики (2.42) теплота Q , переданная газу, равна:

$$Q = \Delta U + A.$$

Таким образом:

$$Q = (3,24 + 0,4) \text{ МДж} = 3,64 \text{ МДж}.$$

Ответ: $\Delta U = 3,24 \text{ МДж}$, $A = 0,4 \text{ МДж}$, $Q = 3,64 \text{ МДж}$.

Глава 10

ВТОРОЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ

§51. Круговые обратимые и необратимые процессы.

Цикл Карно

Круговыми называются процессы (циклы), при которых термодинамическая система после ряда изменений возвращается в исходное состояние. В p - V координатах круговые процессы изображаются в виде замкнутых кривых.

Круговой процесс называется *обратимым*, если система, выведенная из какого-либо состояния, вновь возвращается в это состояние и при этом не происходит никаких изменений в окружающей среде. Процесс, не удовлетворяющий этим условиям, называется *необратимым*. Любой равновесный процесс является обратимым.

Работа газа за цикл в p - V координатах определяется площадью, охватываемой замкнутой кривой. Цикл называется *прямым*, если эта работа положительна. Прямой цикл используется в тепловых машинах. Если работа за цикл отрицательна, то цикл называется *обратным*. Обратный цикл используется в холодильных машинах.

Тепловым двигателем называют устройство, преобразующее теплоту в работу. К тепловым двигателям относятся паровые турбины, двигатели внутреннего сгорания, реактивные и ракетные двигатели.

Тепловой двигатель состоит из нагревателя, рабочего тела и охладителя (рис. 51). В нагревателе, имеющего температуру T_H , газ, нагреваясь, расширяется. При этом совершается положительная работа A . Однако далеко не

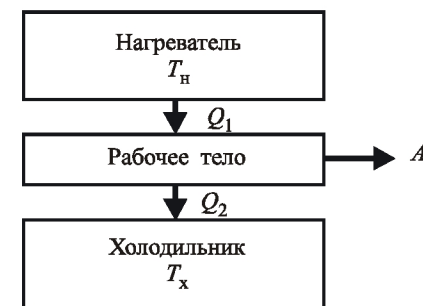


Рис. 51

вся теплота Q_1 превращается в работу. Значительная ее часть Q_2 выбрасывается в холодильник, который имеет температуру T_x . Роль нагревателя в двигателях внутреннего сгорания выполняет цилиндр, в котором происходит сгорание топлива, а роль холодильника - окружающая атмосфера, куда выбрасываются выхлопные газы.

Согласно закону сохранения энергии работа, совершаемая тепловым двигателем, равна

$$A = Q_1 - Q_2.$$

Коэффициентом полезного действия η теплового двигателя называется физическая величина, равная отношению работы A , совершаемой двигателем, к количеству теплоты Q_1 , полученному от нагревателя:

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}. \quad (2.57)$$

Французский физик С. Карно¹ показал, что наиболее экономным является идеальный обратимый цикл, состоящий из двух изотерм и двух адиабат, получивший название цикла Карно. Рассмотрим прямой цикл Карно, в котором в качестве рабочего тела используется идеальный газ (рис. 52). На кривых стрелками показано направление процесса.

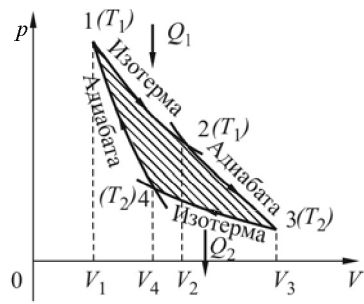


Рис. 52

Кривая 1-2 - изотермическое расширение газа ($T_1 = \text{const}$).

Чтобы поддерживать в процессе расширения температуру T_1 постоянной, к газу подводится теплота Q_1 .

Кривая 2-3 - адиабатическое расширение газа. Согласно уравнению Пуассона (2.55) запишем:

$$T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1}. \quad (2.58)$$

Кривая 3-4 - изотермическое сжатие, протекающее при температуре $T_2 = \text{const}$. Чтобы поддерживать температуру T_2 постоянной, от газа отбирается теплота Q_2 .

Кривая 4-1 - адиабатическое сжатие газа, определяется уравнением (2.55):

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_4^{\gamma-1}. \quad (2.59)$$

Используя формулы (2.48) и (2.56), найдем работу A , совершаемую газом в цикле Карно:

$$A = A_{1-2} + A_{2-3} + A_{3-4} + A_{4-1} = \frac{m}{\mu} R T_1 \ln \frac{V_2}{V_1} + \frac{m}{\mu} c_V (T_1 - T_2) + \frac{m}{\mu} R T_2 \ln \frac{V_4}{V_3} - \frac{m}{\mu} c_V (T_1 - T_2) = \frac{m}{\mu} R T_1 \ln \frac{V_2}{V_1} + \frac{m}{\mu} R T_2 \ln \frac{V_4}{V_3}. \quad (2.60)$$

Поделив уравнения (2.58) на (2.59), получим

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}.$$

Тогда выражение (2.60) примет вид

$$A = \frac{m}{\mu} R T_1 \ln \frac{V_2}{V_1} - \frac{m}{\mu} R T_2 \ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{\mu} R (T_1 - T_2) \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (2.61)$$

Таким образом, работа газа в цикле Карно определяется разностью температур нагревателя и холодильника и зависит от расширения газа.

Согласно первому началу термодинамики количество теплоты Q_1 , подведенное от нагревателя, равно работе расширения газа в изотермическом процессе 1-2:

$$Q_1 = A_{1-2} = \frac{m}{\mu} R T_1 \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (2.62)$$

Подставив выражения (2.61) и (2.62) в формулу (2.57), найдем КПД цикла Карно:

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{A}{A_{1-2}} = \frac{\frac{m}{\mu} R (T_1 - T_2) \ln \frac{V_2}{V_1}}{\frac{m}{\mu} R T_1 \ln \frac{V_2}{V_1}} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}. \quad (2.63)$$

¹ Никола Леонар Сади Карно (1796-1833) - французский физик.

Таким образом, КПД цикла Карно определяется только температурами нагревателя и холодильника: с увеличением температуры нагревателя или с уменьшением температуры холодильника коэффициент полезного действия тепловой машины возрастает.

§52. Неравенство Клаузиуса. Энтропия

Напомним, что внутренняя энергия dU в отличие от работы газа $d'A$ является функцией состояния.

При рассмотрении цикла Карно отмечалось, что не вся теплота Q_1 , подведенная к системе, превращается в работу. Значительная ее часть Q_2 передается холодильнику.

Прямой и обратный переходы в цикле Карно сопровождаются неодинаковыми количествами поглощенного и выделенного тепла, т.е. количество теплоты зависит от способа осуществления перехода. Таким образом, количество теплоты, так же как и работа, не является функцией состояния системы.

Количество теплоты Q_1 не равно Q_2 , но отношения этих теплот к температурам, при которых они были подведены или отведены, численно равны друг другу, только имеют противоположные знаки:

$$\left| \frac{Q_1}{T_1} \right| = \left| \frac{Q_2}{T_2} \right| \text{ или } \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0.$$

Отношение $\frac{Q}{T}$ называют *приведенной теплотой*.

Для обратимого цикла Карно алгебраическая сумма приведенных теплот равна нулю. Это положение справедливо для любого обратимого кругового процесса. В общем случае сумму приведенных теплот можно записать в виде

$$\oint_{\text{обр}} \frac{d'Q}{T} = 0.$$

Если интеграл, взятый по замкнутому контуру, равен нулю, то выражение $d'Q/T$, стоящее под знаком интеграла, представляет собой полный дифференциал некоторой функции S , не зависящей от пути протекания процесса, т.е.

$$\left(\frac{d'Q}{T} \right)_{\text{обр}} = dS. \quad (2.64)$$

Функцию S впервые ввел Р. Клаузиус¹ и назвал ее *энтропией*.

В системе СИ энтропия измеряется в джоулях на кельвин (Дж/К).

Если в термодинамической системе выполняется необратимый круговой процесс, то

$$\oint_{\text{необр}} \frac{d'Q}{T} < 0, \quad (2.65)$$

т.е. энтропия системы возрастает.

Выражение (2.65) называют *неравенством Клаузиуса*.

Свойства энтропии:

1. Энтропия является функцией состояния, так как зависит только от начальных и конечных параметров состояния системы и не зависит от пути протекания процесса.

2. Энтропия определяется с точностью до произвольной постоянной.

3. Энтропия S системы, состоящей из n частей, равна алгебраической сумме энтропий S_i каждой части, т.е.

$$S = \sum_{i=1}^n S_i.$$

4. В теплоизолированной системе при протекании обратимого процесса энтропия не меняется. Поэтому равновесные адиабатические процессы называют *изоэнтропийными процессами*.

5. При постоянном объеме энтропия является непрерывно возрастающей функцией внутренней энергии системы.

Из первого начала термодинамики при $dV = 0$ следует: $d'Q = dU$.

Тогда $dS = \frac{dU}{T}$, но температура всегда положительна. Значения приращений dS и dU имеют одинаковые знаки.

6. Энтропия замкнутой теплоизолированной системы, в которой протекают реально осуществляемые необратимые тепловые процессы, всегда возрастает.

¹ Рудольф Юлиус Эмануэль Клаузиус (1822-1888) - немецкий физик.

Рассмотрим для примера изменение энтропии при изотермическом ($T = \text{const}$) расширении идеального газа. Из первого начала термодинамики следует:

$$d'Q = dU + d'A = pdV, \quad \text{т. к.} \quad dU = 0.$$

Выразим давление газа p из уравнения Менделеева-Клапейрона: $p = mRT/(\mu V)$ и подставим в уравнение первого начала термодинамики:

$$d'Q = \frac{m}{\mu} RT \frac{dV}{V}.$$

$$\text{Тогда } dS = \frac{d'Q}{T} = \frac{m}{\mu} R \frac{dV}{V}.$$

После интегрирования найдем изменение энтропии:

$$S_2 - S_1 = \frac{m}{\mu} R \ln \frac{V_2}{V_1},$$

где индекс 1 относится к первоначальному состоянию газа, а 2 - к состоянию после расширения. Так как при расширении газа $V_2 > V_1$, то и $S_2 > S_1$, т.е. при протекании изотермического расширения газа (необратимого процесса) энтропия возрастает.

Возрастание энтропии приводит к росту внутреннего беспорядка в системе. До расширения газ занимал малую часть пространства и скорости движения молекул были до некоторой степени упорядочены. После расширения скорости молекул распределяются хаотически.

Таким образом, беспорядок возникает самопроизвольно и ему соответствует большая энтропия.

§53. Энтропия и вероятность

Под *термодинамической вероятностью состояния* ω_i понимается число микросостояний, соответствующих данному i -му состоянию макросистемы. Отношение ω_i к полному числу возможных микросостояний макросистемы называют вероятностью (математической) i -го состояния:

$$P_i = \frac{\omega_i}{\sum \omega_i}.$$

Пусть в замкнутом объеме, имеющем проницаемую перегородку, делящую объем на две равные части, находятся четыре молекулы. Обозначим их цифрами: 1, 2, 3 и 4 молекула. Составим таблицу 2 возможных состояний системы четырех молекул с указанием путей реализации этих состояний.

Таблица 2

Состояние системы		Пути реализации состояний		Термодинамическая вероятность ω
Число молекул слева	Число молекул справа	Номера молекул слева	Номера молекул справа	
0	4	-	1, 2, 3, 4	1
1	3	1 2 3 4	2, 3, 4 1, 3, 4 1, 2, 4 1, 2, 3	4
2	2	1,2 1,3 1,4 2,3 2,4 3,4	3,4 2,4 2,3 1,4 1,3 1,2	6
3	1	2, 3, 4 1, 3, 4 1, 2, 4 1, 2, 3	1 2 3 4	4
4	0	1, 2, 3, 4	-	1

Наиболее вероятным является состояние, когда в рассматриваемом объеме справа и слева будет находиться по две молекулы, т.е. состояние с наибольшей термодинамической вероятностью (в рассматриваемом примере $\omega = 6$).

В статистической физике доказывается, что

$$S = k \ln \omega, \quad (2.66)$$

где k - постоянная Больцмана.

Таким образом, энтропия характеризует вероятность состояния системы. Состояние системы, осуществляемое небольшим числом способов, называется *упорядоченным*, а многими способами - *беспорядочным*.

Поскольку в реальных необратимых процессах энтропия возрастает, то ее называют *мерой беспорядка* в системе.

При абсолютном нуле температуры должна наблюдаться максимальная степень упорядоченности в системе, т.е. термодинамическая вероятность $\omega = 1$, значит, согласно (2.66) энтропия $S = 0$. При стремлении к нулю температуры тела энтропия его также стремится к нулю. Данное утверждение является *теоремой В. Нернста*¹ (третьим началом термодинамики).

§54. Второе начало термодинамики

Все реальные процессы, протекающие в природе, сопровождаются теплообменом и трением, а поэтому являются необратимыми.

Второй закон термодинамики определяет направление процессов, выражая тем самым их необратимость. Существует несколько формулировок второго закона термодинамики. Приведем некоторые из них: *"Невозможен процесс, единственным результатом которого является передача теплоты от холодного тела к горячему"* (Р. Клаузиус).

Не следует думать, что второе начало термодинамики совсем запрещает переход теплоты от холодного тела к горячему. Конечно нет. Примером являются холодильные установки, в которых наблюдается такой процесс. Только данный переход не является *единственным* результатом процесса, так как при этом компрессор холодильника совершает работу над рабочей жидкостью - фреоном.

У. Томсон дал следующую формулировку второго начала термодинамики: *"Невозможен процесс, единственным результатом которого является совершение работы за счет охлаждения одного тела"*.

Формулировка Л. Больцмана: *"В макроскопической замкнутой системе процессы протекают таким образом, что вероятность конечного состояния не может быть меньше вероятности начального состояния"*.

Может показаться, что эта формулировка противоречит процессу изотермического расширения газа, при котором вся теплота,

полученная от нагревателя, превращается в работу. Однако это превращение не является *единственным* результатом процесса, так как газ изменяет объем.

Закон возрастания энтропии - *энтропия изолированной термодинамической системы возрастает* - также является одной из формулировок второго начала термодинамики.

Второй закон термодинамики имеет статистический смысл: он выполняется только для систем, имеющих большое число частиц. При малом числе частиц наблюдаются существенные отклонения от этого закона.

§55. Реальные газы. Уравнение Ван-дер-Ваальса

Уравнение состояния Менделеева-Клапейрона (2.13) выводилось без учета объемов молекулы (молекулы идеального газа принимались за материальные точки) и их взаимодействия друг с другом и малоприспособно для реальных газов.

Голландский физик Я. Ван-дер-Ваальс¹ предложил уравнение состояния реального газа, введя в уравнение (2.13) поправки, учитывающие собственный объем молекул и силы межмолекулярного взаимодействия:

$$\left(p + \frac{a}{V_\mu^2}\right)(V_\mu - b) = RT, \quad (2.67)$$

где V_μ - объем моля газа, a и b - поправки Ван-дер-Ваальса, определяемые экспериментально для каждого реального газа, p - давление газа, T - абсолютная температура.

Поправка b учитывает наличие сил отталкивания молекул (их собственный объем), поправка a учитывает действие сил притяжения между молекулами, что приводит к появлению добавочного внутреннего давления.

Для произвольной массы газа уравнение (2.67) преобразуется к виду

$$\left(p + \frac{v^2 a}{V^2}\right)\left(\frac{V}{v} - b\right) = RT \quad \text{или} \quad (p + v^2 a/V^2)(V - vb) = vRT, \quad (2.68)$$

где $v = m/\mu$ - количество вещества, V - объем газа.

¹ Вальтер Нернст (1864-1941) - немецкий ученый.

¹ Ян Дидерик Ван-дер-Ваальс (1837-1923) - нидерландский физик.

Заметим, что уравнение Ван-дер-Ваальса также является приближенным. Это уравнение пригодно лишь для грубой оценки состояния реального газа.

§56. Изотермы реальных газов. Фазовые переходы

Раскрыв скобки в уравнении (2.67) и умножив его на V_μ^2 , получим кубическое уравнение относительно молярного объема:

$$pV_\mu^3 - (pb + RT)V_\mu^2 + aV_\mu - ab = 0. \quad (2.69)$$

Коэффициенты уравнения (2.69) зависят от давления, температуры и природы газа. В зависимости от их значений уравнение имеет один или три действительных корня. На рис. 53 представлены изотермы Ван-дер-Ваальса ($T_1 < T_2 < T_K < T_3$).

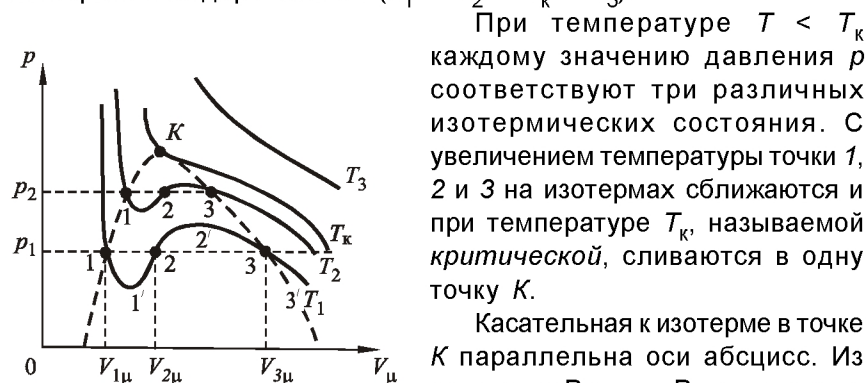


Рис. 53

При температуре $T < T_K$ каждому значению давления p соответствуют три различных изотермических состояния. С увеличением температуры точки 1, 2 и 3 на изотермах сближаются и при температуре T_K , называемой *критической*, сливаются в одну точку K .

Касательная к изотерме в точке K параллельна оси абсцисс. Из уравнения Ван-дер-Ваальса можно получить значения параметров состояния в критической точке:

$$V_{\mu,K} = 3b, \quad p_K = a / (27b^2),$$

$$T_K = 8a / (27bR).$$

Впервые опытным путем изотермы реального газа (углекислоты) были получены английским физиком Т. Эндрюсом. Эти кривые имеют существенные различия с теоретическими изотермами Ван-дер-Ваальса только в области 1-2-3 (рис. 53). На опытных изотермах волнообразные теоретические кривые сменились прямолинейными участками, параллельными оси абсцисс, соединяющими точки 1, 2 и 3. Участок кривой 3'-3 соответствует состоянию ненасыщенного пара, 3-2' - пересыщенного пара.

Эти участки, а также участок 1-1' при известных условиях можно получить опытным путем. И только участок кривой 1'-2', на котором с увеличением давления объем растет, в действительности не наблюдается.

Колоколообразная кривая (рис. 53, 54), проведенная через точки 1, 3 и K , ограничивает области двухфазных состояний вещества. Фазой в термодинамике называется совокупность частей системы, имеющих одинаковые свойства.

На рис. 54 показаны области равновесных состояний вещества «ж-п» - область двухфазных состояний: жидкость-пар. Буквой «ж» обозначена область однородных жидких состояний, «п» - область пара, «г» - газообразное состояние.

Состояние пара отличается от газообразного тем, что при изотермическом сжатии вещество данного состояния претерпевает процесс ожижения.

При температурах, равных критической и выше, вещество становится вновь однородным при любых давлениях. Если температура выше критической, то вещество нельзя перевести в жидкое состояние.

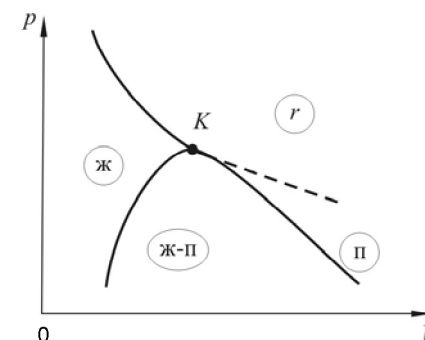


Рис. 54

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 36. Тепловая машина с идеальным газом в качестве рабочего вещества совершает обратимый цикл, состоящий из изобары 1-2, адиабаты 2-3 и изотермы 3-1 (см. рис.). Найти КПД машины как функцию максимальной T_1 и минимальной T_2 температуры рабочего вещества, используемого в этом цикле.

Дано:

T_1

T_2

$\eta = ?$

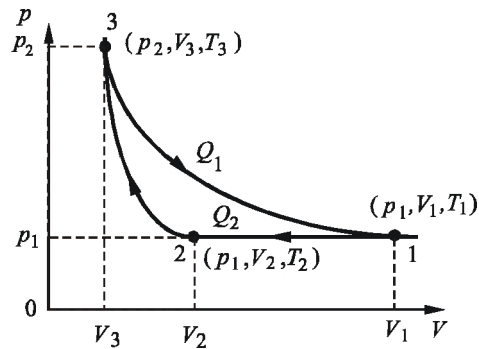


Рис. к задаче 36

Решение: Так как участок 3-1 - изотерма, то температура $T_3 = T_1$. Коэффициент полезного действия (КПД) цикла (2.57)

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}. \quad (1)$$

На участке 3-1 рабочее вещество получает количество теплоты

$$Q_1 = \frac{m}{\mu} RT_1 \ln \left(\frac{V_1}{V_3} \right). \quad (2)$$

На участке 1-2 происходит изобарное сжатие, рабочее вещество отдает количество теплоты холодильнику:

$$Q_2 = \frac{m}{\mu} c_p (T_2 - T_1) = -\frac{m}{\mu} c_p (T_1 - T_2). \quad (3)$$

На этом участке объем газа уменьшается от V_1 до V_2 . Согласно закону Гей-Люссака для изобарного процесса температура тоже уменьшается, т.е. $T_2 < T_1$.

Для определения КПД цикла подставим выражения (2) и (3) в формулу (1):

$$\eta = \frac{\frac{m}{\mu} RT_1 \ln \left(\frac{V_1}{V_3} \right) - \frac{m}{\mu} c_p (T_1 - T_2)}{\frac{m}{\mu} RT_1 \ln \left(\frac{V_1}{V_3} \right)}. \quad (4)$$

Температуры и объемы газа, совершающего изобарный процесс, связаны между собой соотношением

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2}, \quad (5)$$

а при адиабатном процессе соотношением (2.55):

$$\frac{V_2}{V_3} = \left(\frac{T_3}{T_2} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}. \quad (6)$$

Перемножим левые и правые части уравнений (5) и (6):

$$\frac{V_1}{V_3} = \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}. \quad (7)$$

Подставим выражение (7) в формулу (4):

$$\eta = \frac{RT_1 \ln \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - c_p (T_1 - T_2)}{RT_1 \ln \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}$$

или

$$\eta = 1 - \frac{c_P(T_1 - T_2)}{RT_1 \left(\frac{\gamma}{\gamma - 1} \right) \ln \left(\frac{T_1}{T_2} \right)} \quad (8)$$

Формулу (8) можно упростить, заменив $\gamma = \frac{c_P}{c_V}$ и используя уравнение (2.47) Майера:

$$\eta = 1 - \frac{T_1 - T_2}{T_1 \ln \left(\frac{T_1}{T_2} \right)},$$

Ответ: $\eta = \frac{T_1 \ln \left(\frac{T_1}{T_2} \right) - (T_1 - T_2)}{T_1 \ln \left(\frac{T_1}{T_2} \right)}$.

Задача 37. Найти изменение энтропии ΔS , если 30 г льда i ?aa?au a? oa i a?. l a?aeui ay oai i a?aoa? a euaa -40 °C, а температура пара 100° C. Теплоемкости воды и льда считать постоянными, а все процессы - происходящими при атмосферном давлении.

Дано:

$$m = 3 \cdot 10^{-2} \text{ кг}$$

$$T_0 = 233 \text{ K}, T_n = 373 \text{ K}$$

$$c_L = 2,1 \cdot 10^3 \frac{\text{Дж}}{(\text{кг} \cdot \text{K})}$$

$$c_B = 4,2 \cdot 10^3 \frac{\text{Дж}}{(\text{кг} \cdot \text{K})}$$

$$\lambda = 3,35 \cdot 10^5 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}}$$

$$r = 22,6 \cdot 10^5 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}}$$

$$\Delta S = ?$$

Решение: Найдем отдельно изменение энтропии - при нагревании льда от -40° C до 0° C, плавлении льда, при нагревании образовавшейся из льда воды до 100° C, превращении воды в пар при 100° C.

Полное изменение энтропии выразится суммой изменений энтропии ΔS_i для каждого из перечисленных процессов.

Изменение энтропии определяется формулой (2.65):

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{d'Q}{T} \quad (1)$$

При бесконечно малом изменении dT температуры нагреваемого тела затрачивается количество теплоты

$$dQ_1 = c m dT, \quad (2)$$

где c - удельная теплоемкость; m - масса тела.

Найдем формулу для вычисления изменения энтропии при нагревании льда, подставив уравнение (2) в (1):

$$\Delta S_1 = \int_{T_0}^{T_1} \frac{c_L m dT}{T} = c_L m \ln \left(\frac{T_1}{T_0} \right),$$

где $T_1 = 273 \text{ K}$.

После вычислений получим

$$\Delta S_1 = 2,1 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 10^{-2} \cdot \ln \left(\frac{273}{233} \right) \frac{\text{Дж}}{\text{K}} = 0,998 \cdot 10 \frac{\text{Дж}}{\text{K}} = 9,98 \frac{\text{Дж}}{\text{K}} \quad (3)$$

При вычислении по формуле (1) изменения энтропии во время таяния льда температура T выносится за знак интеграла как постоянная величина:

$$dQ_2 = \lambda m,$$

где λ - удельная теплота плавления льда.

$$\Delta S_2 = \int_1^2 \frac{dQ_2}{T_1} = \frac{Q_2}{T_1} = \frac{m \lambda}{T_1}.$$

Произведем вычисления:

$$\Delta S_2 = \frac{3 \cdot 10^{-2} \cdot 3,35 \cdot 10^5}{273} \frac{\text{Дж}}{\text{K}} = 36,8 \frac{\text{Дж}}{\text{K}} \quad (4)$$

Найдем следующую формулу для вычисления изменения энтропии при нагревании воды, полученной из льда, до 100° C.

$$\Delta S_3 = \int_{T_1}^{T_n} dQ_3 = \int_{T_1}^{T_n} \frac{c_B m dT}{T} = c_B m \ln \left(\frac{T_n}{T_1} \right),$$

где $T_n = 373 \text{ K}$.

Проведем вычисления:

$$\Delta S_3 = 4,2 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 10^{-2} \cdot \ln\left(\frac{373}{273}\right) \frac{\text{Дж}}{\text{К}} = 39,3 \frac{\text{Дж}}{\text{К}}. \quad (5)$$

Превращение воды в пар происходит при постоянной температуре, поэтому при вычислении изменения энтропии в формуле (1) выносим T за знак интеграла:

$$Q_4 = rm,$$

где r - удельная теплота испарения воды.

$$\Delta S_4 = \int_1^2 \frac{dQ_4}{T_n} = \frac{Q_4}{T_n} = \frac{rm}{T_n}.$$

Вычислим ΔS_4 :

$$\Delta S_4 = \frac{22,6 \cdot 10^5 \cdot 3 \cdot 10^{-2}}{373} \frac{\text{Дж}}{\text{К}} = 180 \frac{\text{Дж}}{\text{К}}. \quad (6)$$

Полное изменение энтропии :

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3 + \Delta S_4,$$

$$\Delta S = 266 \frac{\text{Дж}}{\text{К}}.$$

Ответ: $266 \frac{\text{Дж}}{\text{К}}.$

Глава 11 ЖИДКОЕ И ТВЕРДОЕ СОСТОЯНИЯ

§57. Поверхностное натяжение жидкости

Согласно молекулярно-кинетической теории каждая молекула жидкости испытывает притяжение со стороны других молекул. При удалении молекул друг от друга силы притяжения быстро уменьшаются. На расстоянии порядка $\sim 10^{-9}$ м, называемом *радиусом молекулярного действия* r , силами молекулярного притяжения можно пренебречь ввиду их малости.

Рассмотрим отдельную молекулу A (рис. 55), находящуюся внутри жидкости. Если провести вокруг этой молекулы сферу радиусом r , то силы притяжения со стороны молекул, заключенных в данной сфере, будут направлены в разные стороны и их равнодействующая сила будет равна нулю.

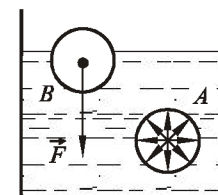


Рис. 55

Выделим молекулу B , находящуюся на расстоянии меньше r от поверхности жидкости. Снова проведем сферу радиусом r вокруг молекулы. Как видно из рис. 55, часть этой сферы выйдет за пределы жидкости.

В связи с тем, что концентрация молекул газа над жидкостью мала, равнодействующая сил молекулярного притяжения $\vec{F}$, действующих на молекулу B , не будет равна нулю. Эта равнодействующая направлена внутрь жидкости. Таким образом, молекулы поверхностного слоя жидкости оказывают на жидкость давление, которое называют *молекулярным давлением*. Жидкость оказывается сжатой. Поэтому жидкости мало сжимаемы при внешнем воздействии.

Молекулы жидкости в поверхностном слое за счет сил межмолекулярного взаимодействия обладают большей потенциальной энергией по сравнению с другими молекулами. Чтобы молекула из глубины жидкости переместилась к ее поверхности, необходимо совершить работу против сил, действующих в поверхностном слое. Эта работа совершается за счет уменьшения кинетической энергии теплового движения молекулы и расходуется на увеличение ее потенциальной энергии.

Итак, молекулы в поверхностном слое жидкости обладают дополнительной поверхностной энергией ΔE . Величина энергии ΔE тем больше, чем больше поверхность жидкости.

Для увеличения поверхности жидкости необходимо совершить работу ΔA против сил поверхностного натяжения:

$$\Delta A = \sigma \Delta S,$$

откуда

$$\sigma = \frac{\Delta A}{\Delta S}, \quad (2.70)$$

где ΔS - приращение площади поверхностного слоя жидкости.

Поверхностное натяжение σ равно отношению работы, которую необходимо совершить, чтобы увеличить поверхность жидкости площадью ΔS , к площади этой поверхности.

Если поверхность жидкости ограничена каким-либо замкнутым контуром, то на нее будут действовать силы, стремящиеся сократить эту поверхность. Эти силы называются *силами поверхностного натяжения*.

Поверхностным натяжением σ называется физическая величина, равная отношению силы F , действующей на участок контура поверхности, к длине l этого участка:

$$\sigma = F / l. \quad (2.71)$$

Поверхностное натяжение измеряется в джоулях на квадратный метр (Дж/м²) или в ньютонах на метр (Н/м).

§58. Смачивание. Капиллярные явления

Можно наблюдать, как легко капля воды растекается по поверхности стола, прилипая к нему, а капля ртути свободно перекатывается с одного места на другое, образуя шарик. При этом молекулы ртути преодолевают не только силу тяжести, но и силу притяжения к молекулам стола. Следовательно, силы притяжения молекул ртути друг к другу сильнее, чем к молекулам стола.

В первом случае жидкость *смачивает* поверхность твердого тела, а во втором - *не смачивает*. Без каких-либо внешних воздействий капелька ртути принимает сферическую форму. Стремление поверхности жидкости к сокращению приводит к тому, что давление под выпуклой поверхностью больше, а под вогнутой меньше, чем под плоской. Силы поверхностного натяжения создают *добавочное*

давление p (в случае выпуклой поверхности - положительное, а при вогнутой - отрицательное). Вычислим давление p для сферической поверхности.

Пусть радиус сферы r увеличивается на малую величину Δr . При этом поверхность сферы увеличивается на величину $\Delta S = 8\pi r \Delta r$, а объем - на величину $\Delta V = 4\pi r^2 \Delta r$. Найдем работу ΔA по увеличению объема:

$$\Delta A = p \Delta V = 4\pi r^2 p \Delta r.$$

Для образования новой поверхности ΔS требуется совершить работу

$$\Delta A_1 = \Delta S \cdot \sigma = 8\pi r \sigma \Delta r.$$

Приравняв ΔA и ΔA_1 , найдем величину добавочного давления:

$$p = 2\sigma / r. \quad (2.72)$$

Для поверхности любой формы добавочное давление можно рассчитать по формуле П. Лапласа:

$$p = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right),$$

где R_1 и R_2 - радиусы кривизны поверхности.

Жидкость может смачивать поверхность одного тела и не смачивать поверхность другого. Например, вода смачивает стекло, дерево, но не смачивает парафин. Ртуть смачивает поверхности металлов, но не смачивает стекло, дерево и т.д.

Если опустить в воду тонкие стеклянные трубки разного диаметра (капилляры), то жидкость в капиллярах поднимется на разную высоту. Чем тоньше капилляр, тем на большую высоту поднимется жидкость. Если взять жидкость, не смачивающую трубку, например ртуть, то уровень жидкости в капилляре будет ниже уровня жидкости в сосуде (рис. 56, а). Наблюдаемые явления изменения высоты уровней жидкости в капиллярах получили название *капиллярных явлений*.

Если жидкость смачивает трубку (рис. 56, б), то поверхность жидкости в трубке (мениск) имеет вогнутую форму, если не смачивает - выпуклую (рис. 56, а). Под вогнутой поверхностью образуется отрицательное добавочное давление, и жидкость поднимается вверх по капилляру до тех пор, пока это давление не уравнивается высотой столба жидкости в капилляре (гидростатическим давлением).

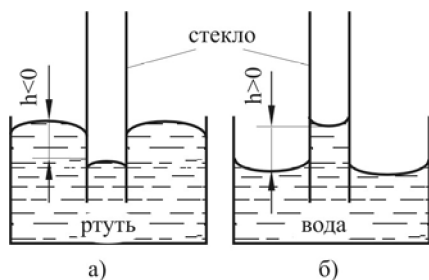


Рис. 56

Найдем высоту подъема жидкости h в капилляре. Пусть жидкость смачивает капилляр радиусом r (рис. 56), образуя вверх вогнутый мениск. Наименьший радиус кривизны мениска $\approx r$. Как следует из уравнения (2.72), добавочное давление $p \approx 2\sigma / r$. Тогда величина направленной вверх силы

$$F = 2\sigma S / r,$$

где S - площадь поперечного сечения трубки.

Эта сила уравнивается силой тяжести столбика жидкости $mg = h\rho gS$, т.е. $F = mg$ или

$$2\sigma S / r = h\rho gS, \quad (2.73)$$

где ρ - плотность жидкости.

Из уравнения (2.73) находим

$$h = 2\sigma / (\rho r g). \quad (2.74)$$

Для несмачивающей жидкости мениск выпуклый и добавочное давление дает силу, направленную вниз. Уровень жидкости в капиллярной трубке при этом будет ниже уровня жидкости в сосуде на величину h , определяемую формулой (2.74).

§59. Элементы динамики жидкостей и газов.

Уравнение неразрывности

Жидкости и газы являются текучими средами: если на частицы жидкости или газа действуют сдвигающиеся внешние силы, то частицы будут перемещаться до тех пор, пока не исчезнут или не уравниваются эти силы. Внутренние силы не могут остановить это движение, но могут его замедлять. Тормозящие силы, возникающие между слоями движущейся жидкости или газа, называются *силами вязкого трения*.

Жидкость, в отличие от газа, считается средой несжимаемой, иногда и газ до определенных границ можно рассматривать как несжимаемый.

Рассмотрим течение жидкости по трубе с переменным сечением. Уравнение неразрывности выводится на основании закона сохранения

массы и невозможности разрыва жидкости и образования в ней пустот (отсюда происходит название закона).

Рассмотрим жидкость в объеме V между сечениями S_1 и S_2 (рис. 57).

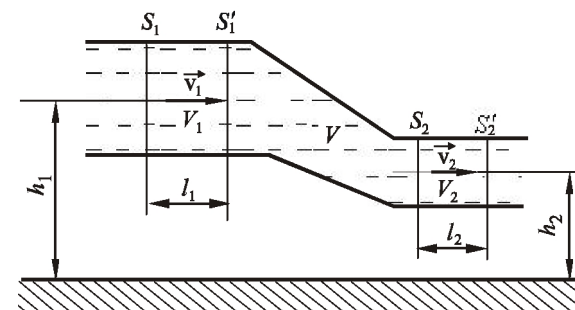


Рис. 57

Так как жидкость несжимаемая и в ней не могут образовываться пустоты, то масса жидкости между сечениями S_1 и S_2 не может измениться. За время Δt жидкость пройдет через сечение S_1 и переместится на расстояние

$$l_1 = v_1 \Delta t.$$

В объем V втечет жидкость, имеющая объем

$$V_1 = l_1 S_1 = S_1 v_1 \Delta t, \quad (2.75)$$

масса которой

$$m_1 = \rho V_1 = \rho S_1 v_1 \Delta t. \quad (2.76)$$

Здесь ρ - плотность жидкости, v_1 - ее скорость в сечении S_1 .

Аналогично для сечения S_2 получим

$$V_2 = l_2 S_2 = S_2 v_2 \Delta t, \quad (2.77)$$

$$m_2 = \rho V_2 = \rho S_2 v_2 \Delta t. \quad (2.78)$$

Так как масса жидкости в объеме V не может измениться, то

$$m_1 = m_2. \quad (2.79)$$

Подставив в (2.79) уравнения (2.75)-(2.78), получим

$$S_1 l_1 = S_2 l_2, \quad (2.80)$$

т.е.

$$V_1 = V_2, \quad (2.81)$$

$$S_1 v_1 = S_2 v_2 = \text{const.} \quad (2.82)$$

Соотношение (2.82) называется *уравнением неразрывности* для несжимаемой жидкости: *произведение скорости течения несжимаемой жидкости на ее поперечное сечение есть величина постоянная.*

§60. Уравнение Бернулли

Уравнение Д. Бернулли¹ выводится из закона сохранения энергии для *идеальной* (без вязкости) жидкости для стационарных течений. *Стационарным* называется течение, при котором скорость жидкости в каждой точке течения не меняется со временем. Для реальных жидкостей уравнением Бернулли можно пользоваться, если у них малая вязкость.

Рассмотрим жидкость, движущуюся по трубе между сечениями S_1 и S_2 (рис. 57). Так как течение стационарное, то кинетическая энергия жидкости в объеме V между сечениями S_1 и S_2 не изменится. А так как труба неподвижная, то не изменится и потенциальная энергия жидкости в этом объеме. Таким образом, полная механическая энергия рассматриваемого объема жидкости в момент времени t будет равна

$$E_1 = E_V + m_1 g h_1 + m_1 v_1^2 / 2, \quad (2.83)$$

а в конце промежутка времени Δt

$$E_2 = E_V + m_2 g h_2 + m_2 v_2^2 / 2, \quad (2.84)$$

где E_V - энергия жидкости в объеме V . В сечении S_1 жидкость, которая находится слева от этого сечения, совершит работу

$$A_1 = p_1 S_1 l_1 = p_1 V_1, \quad (2.85)$$

которая пойдет на увеличение энергии жидкости между сечениями S_1 и S_2 . В свою очередь, эта жидкость совершит работу в сечении S_2

$$A_2 = p_2 S_2 l_2 = p_2 V_2, \quad (2.86)$$

что уменьшит ее энергию на эту величину. Здесь p_1 и p_2 - давления жидкости в объемах V_1 и V_2 соответственно. В результате получим

$$E_2 - E_1 = A_1 - A_2 \text{ или } E_2 + A_2 = E_1 + A_1. \quad (2.87)$$

Подставив в уравнение (2.87) соотношения (2.83)-(2.86), получим

$$E_V + m_2 g h_2 + m_2 v_2^2 / 2 + p_2 V_2 = E_V + m_1 g h_1 + m_1 v_1^2 / 2 + p_1 V_1. \quad (2.88)$$

Учитывая, что $m_1 = m_2$, и поделив уравнение (2.88) на $V_1 = V_2$, получим уравнение Бернулли:

$$\rho v_2^2 / 2 + \rho g h_2 + p_2 = \rho v_1^2 / 2 + \rho g h_1 + p_1. \quad (2.89)$$

Оно выполняется для любых точек стационарного течения идеальной жидкости.

В технике величина $\rho g h$ называется *гидростатическим напором* (давлением); $\rho v^2 / 2$ - *гидродинамическим* (скоростным) напором; p - *статическим давлением*, а их сумма $\rho v^2 / 2 + \rho g h + p$ - *полным давлением*.

Частные случаи:

1. Пусть жидкость покоится, т.е. $v_1 = v_2 = 0$. Тогда из уравнения (2.89) получим

$$p_2 = p_1 + \rho g (h_1 - h_2);$$

$$p_2 - p_1 = \Delta p,$$

отсюда

$$\Delta p = \rho g (h_1 - h_2) = \rho g h. \quad (2.90)$$

В *покоящейся* жидкости *изменение статического давления равно гидростатическому напору*. Так как в неподвижной жидкости силы вязкости отсутствуют, то уравнение (2.90) верно и для реальных жидкостей.

2. Пусть труба, по которой течет жидкость, горизонтальная, т.е. $h_1 = h_2$. Тогда из уравнения (2.89) имеем

$$\rho v_2^2 / 2 + p_2 = \rho v_1^2 / 2 + p_1. \quad (2.91)$$

Пусть $v_2 > v_1$, тогда $p_2 < p_1$. В *горизонтальной трубе давление меньше там, где скорость потока больше* (сужение трубы). Уравнение Бернулли используется для объяснения явлений в различных технических устройствах.

§61. Применение уравнения Бернулли

1. Подъемная сила крыла самолета

Происхождение подъемной силы крыла самолета было объяснено выдающимся русским ученым Н.Е. Жуковским. В деталях теория довольно сложна. Приведем ее в упрощенном виде.

Профиль крыла самолета (рис. 58) имеет такую форму, что скорость обтекающего потока воздуха относительно крыла внизу

¹ Даниил Бернулли (1700-1782) - швейцарский ученый.

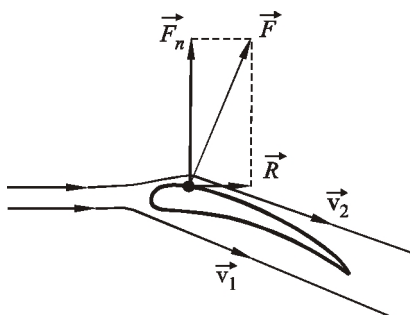


Рис. 58

меньше, а сверху больше: $v_2 > v_1$. Поэтому давление под крылом больше, чем над крылом: $p_1 > p_2$. Это приводит к избыточной силе $\vec{F}$, которую можно разложить на две составляющие: подъемную силу $\vec{F}_n$ и силу сопротивления $\vec{R}$.

Таким же образом объясняется происхождение подъемной

силы у кораблей на подводных крыльях.

2. Измерение скорости течения жидкости и газа

Рассмотрим схему, изображенную на рис. 59. Применяя уравнение Бернулли для впаянных в трубку 1 тонких вертикальных трубок 2 и 3, получим для каждой из них:

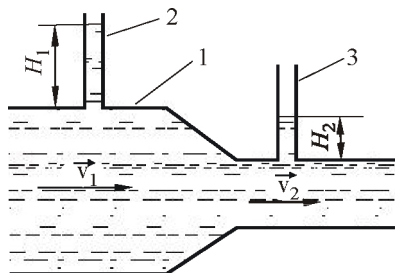


Рис. 59

$$\begin{aligned} p_1 &= \rho g H_1, \\ p_2 &= \rho g H_2. \end{aligned} \quad (2.92)$$

В широкой части давление больше, поэтому и высота поднятия жидкости больше.

Используя уравнение Бернулли для горизонтальной трубы (2.91) и уравнение (2.92), получим

$$v_2^2 - v_1^2 = 2(p_1 - p_2)/\rho = 2g(H_1 - H_2). \quad (2.93)$$

Таким образом, если известна скорость течения в одной точке (пусть v_1), то измерив манометром разность давлений или разность высот жидкости в трубках, которые и являются в этом случае манометрами, по формуле (2.93) можно определить скорость течения v_2 .

Подобным методом можно измерять скорость самолета относительно воздуха (рис. 60).

За борт самолета выводится тонкая трубка, называемая трубкой А. Пито¹. Трубка Пито присоединяется к дифференциальному манометру, измеряющему разность давлений: полного - с помощью внутреннего канала 1 и статического - с помощью канала 2. Разность этих давлений есть динамический напор $\rho v^2/2$.

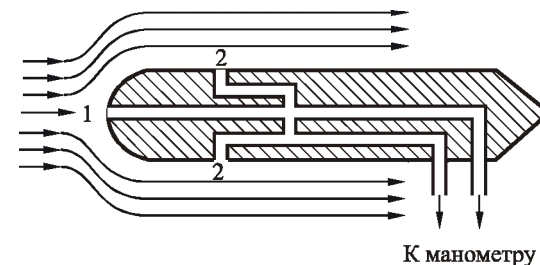


Рис. 60

Если манометр проградуировать в величинах скорости, учитывая изменение плотности воздуха, то получим прибор для измерения скорости полета самолета.

§62. Твердые тела.

Кристаллические и аморфные тела

Твердые тела, в которых молекулы, атомы и ионы расположены упорядоченно, образуя периодически повторяющуюся структуру, называются *кристаллами*. Кристаллические тела *анизотропны*, т.е. их физические свойства - сжимаемость (упругость), теплопроводность, электропроводность и т.д. - зависят от направления в кристалле. Анизотропия свойств кристаллических тел обусловлена упорядоченным расположением частиц, из которых они состоят. При таком расположении частиц межатомные расстояния и силы взаимодействия между частицами разные.

Кристаллические тела чаще всего встречаются в виде *поликристаллов*, представляющих собой множество беспорядочно ориентированных, сросшихся воедино кристалликов. В целом твердом поликристалле анизотропия, присущая отдельному кристаллику, не обнаруживается.

При некоторых специальных условиях кристаллизации можно получить большие однородные кристаллы - *монокристаллы*.

¹ Анри Пито (1695-1771) - французский геометр и инженер.

Монокристалл имеет периодически повторяющуюся внутреннюю структуру во всем объеме.

Мельчайшие частицы вещества - атомы, ионы, молекулы - в кристалле размещаются в узлах пространственной решетки, состоящей из большого числа *элементарных кристаллических ячеек*. В этом смысле говорят о *дальнем порядке* в твердых телах. Размещение частиц в элементарной ячейке зависит от действующих на них межатомных сил.

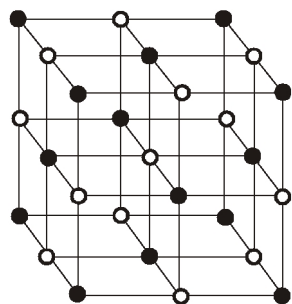


Рис. 61

Кристаллическая решетка, образованная положительными и отрицательными ионами (ионная решетка), показана на рис. 61. Связь между частицами в решетке в основном обусловлена силами кулоновского взаимодействия.

Кристаллическая решетка обладает различными видами симметрии. *Симметрией решетки* называют ее свойство совмещаться с собой при некоторых пространственных перемещениях. Существует 14 типов решеток, различающихся по виду симметрии.

Твердые тела, физические свойства которых одинаковы по всем направлениям, называются *аморфными телами* (стекло, янтарь, смола и т.д.). Аморфные тела *изотропны*, что объясняется беспорядочностью расположения частиц, составляющих тела.

§63. Механические свойства твердых тел

Деформацией называется изменение объема или формы твердых тел при нагревании или при воздействии внешних сил. При деформации в телах возникают внутренние силы, препятствующие смещению частиц тела и стремящиеся вернуть его в первоначальное состояние.

Деформации называются *упругими*, если они исчезают после прекращения действий внешних сил. Деформации, в результате которых происходит необратимая перестройка кристаллической решетки, называются *пластическими*.

Пусть l - первоначальная величина, характеризующая размер тела (например его длину), а Δl - абсолютное изменение этой

величины. Отношение $\Delta l / l = \varepsilon$ является мерой деформации и называется *относительной деформацией тела*.

На рис. 62 показан график зависимости напряжения σ от относительного удлинения $\varepsilon = \Delta l / l$ при растяжении тела.

В области 0-1 упругие деформации подчиняются закону Р. Гука¹: напряжение σ , возникающее под действием внешних сил, прямо пропорционально относительной деформации ε :

$$\sigma = E \varepsilon = E \Delta l / l,$$

где E - модуль Юнга.

Максимальное напряжение $\sigma_{\max}$, после снятия которого тело еще способно восстановить первоначальную форму и объем, называется *пределом упругости*. Пределу упругости на графике соответствует точка 2.

При дальнейшем увеличении напряжения возникают остаточные деформации (участок 2-3), затем удлинение деформированного тела происходит без увеличения внешней нагрузки (участок 3-4). Точка 3 на графике соответствует *пределу текучести*.

Наибольшее напряжение, которое выдерживает тело не разрушаясь, называется *пределом прочности* (точка 5). На практике, чтобы избежать разрушения какой-либо детали, ее проектируют с запасом прочности.

Отношение

$$\sigma_{\text{проч}} / \sigma_{\text{доп}} = n \quad (2.94)$$

называется *запасом прочности*. Здесь $\sigma_{\text{проч}}$ - предел прочности материала, $\sigma_{\text{доп}}$ - допустимое напряжение.

При растяжении и сжатии тел происходит изменение их поперечных размеров.

Диаграмма напряжений (рис. 62) для реальных твердых тел зависит от многих факторов. Например, при кратковременном действии сил твердое тело может проявлять себя как хрупкое, а при длительном воздействии слабых сил является текучим.

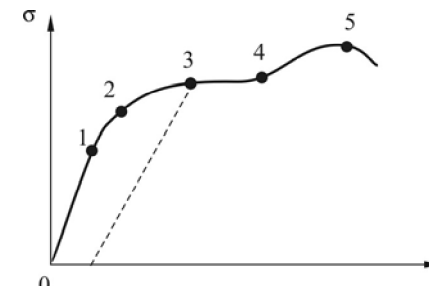


Рис. 62

¹ Роберт Гук (1635-1703) - английский физик.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	3
ВВЕДЕНИЕ	4
ЧАСТЬ 1. ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ	7
Глава 1. КИНЕМАТИКА	7
§1. Механическое движение. Кинематическое уравнение движения	7
§2. Скорость движения	9
§3. Ускорение	11
§4. Движение тела, брошенного под углом к горизонту	13
§5. Вращение тела вокруг неподвижной оси	15
Примеры решения задач	20
Глава 2. ДИНАМИКА ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ	27
§6. Законы И. Ньютона	27
§7. Силы в механике	29
§8. Импульс тела. Закон сохранения импульса	30
§9. Центр масс. Закон движения центра масс	33
§10. Энергия, работа, мощность	34
§11. Кинетическая и потенциальная энергия	36
§12. Закон сохранения энергии	38
§13. Соударение тел	39
Примеры решения задач	42
Глава 3. ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА	51
§14. Момент силы. Момент импульса. Закон сохранения момента импульса	51
§15. Момент инерции. Кинетическая энергия вращающегося тела	53
§16. Моменты инерции некоторых тел	54
§17. Основной закон динамики вращательного движения. Работа и мощность при вращательном движении	56
§18. Гироскопы	58
Примеры решения задач	61
Глава 4. ГРАВИТАЦИЯ	69
§19. Законы Кеплера. Гравитационное поле	69
§20. Космические скорости	71
§21. Неинерциальные системы отсчета	72
Примеры решения задач	75
Глава 5. ЭЛЕМЕНТЫ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ	79
§22. Преобразования Галилея. Сложение скоростей в классической механике	79
§23. Относительность одновременности	80
§24. Постулаты специальной теории относительности (СТО). Преобразования Лоренца	81
§25. Энергия релятивистской частицы. Закон взаимосвязи массы и энергии	87

Примеры решения задач	90
Глава 6. МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ	94
§26. Гармонические колебания	94
§27. Физический и математический маятники	97
§28. Сложение гармонических колебаний одного направления	99
§29. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний	102
§30. Затухающие колебания	105
§31. Вынужденные колебания	106
§32. Механические волны в упругой среде	108
§33. Уравнение плоской бегущей волны. Волновое уравнение	110
§34. Стоячие волны	111
§35. Энергия и интенсивность волны	112
§36. Звуковые волны	114
Примеры решения задач	116
ЧАСТЬ 2. ОСНОВЫ МОЛЕКУЛЯРНОЙ ФИЗИКИ И ТЕРМОДИНАМИКИ	121
Глава 7. ОСНОВЫ МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА	121
§37. Понятия и определения	121
§38. Основные положения молекулярно-кинетической теории	122
§39. Количество вещества. Масса и размеры молекул	123
§40. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеального газа	124
§41. Уравнение состояния идеального газа	126
§42. Закон распределения молекул по скоростям (закон Максвелла)	128
§43. Барометрическая формула. Распределение Больцмана	132
Примеры решения задач	134
Глава 8. ЯВЛЕНИЯ ПЕРЕНОСА В ГАЗАХ	140
§44. Средняя длина свободного пробега молекул	140
§45. Опытные законы явлений переноса	141
Примеры решения задач	144
Глава 9. ПЕРВОЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ	147
§46. Внутренняя энергия идеального газа	147
§47. Работа в термодинамике	149
§48. Первое начало термодинамики	150
§49. Кинетическая теория теплоемкостей	151
§50. Изопроцессы в газах	152
Примеры решения задач	159
Глава 10. ВТОРОЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ	163
§51. Круговые обратимые и необратимые процессы. Цикл Карно	163
§52. Неравенство Клаузиуса. Энтропия	166
§53. Энтропия и вероятность	168
§54. Второе начало термодинамики	170

§55. Реальные газы. Уравнение Ван-дер-Ваальса	171
§56. Изотермы реальных газов. Фазовые переходы	172
Примеры решения задач	174
Глава 11. ЖИДКОЕ И ТВЕРДОЕ СОСТОЯНИЯ	179
§57. Поверхностное натяжение жидкости	179
§58. Смачивание. Капиллярные явления	180
§59. Элементы динамики жидкостей и газов.	
Уравнение неразрывности	182
§60. Уравнение Бернулли	184
§61. Применение уравнения Бернулли	185
§62. Твердые тела. Кристаллические и аморфные тела	187
§63. Механические свойства твердых тел	188

Учебное издание

Рогачев Николай Михайлович

КУРС ФИЗИКИ

Книга 1

Механика

Молекулярная физика

Редактор: Т. К. К р е т и н и н а

Компьютерный набор, верстка, графика И.И. Спиридоновой

Подписано в печать 22.05.06 г. Формат 60х84 1/16.

Бумага офсетная. Печать офсетная.

Усл. печ. л.11,2. Усл кр.-отт. 11,3. Уч.-изд.л. 12,0.

Тираж 800 экз. Заказ . Арт. С-23/2006.

Самарский государственный аэрокосмический университет.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

РИО Самарского государственного аэрокосмического университета.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.