Министерство образования и науки Российской Федерации

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования “Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет)“

В. С. Асланов, А. В. Алексеев

Концепции математического моделирования механических систем и процессов

Электронное учебное пособие

Самара 2010

УДК 531
Концепции математического моделирования механических систем и процессов: Учебное пособие / *Асланов В. С.*, *Алексеев А. В.* Самар. гос. аэрокосм. ун-т. Самара, 2010. 179 с.

Излагаются универсальные методологические подходы, позволяющие безотносительно к конкретным областям приложений строить адекватные математические модели изучаемых объектов. Представлены методы и примеры построения и анализа математических моделей для различных задач механики, физики, биологии, экономики, социологии на основе использования фундаментальных законов природы, вариационных принципов, иерархических цепочек, метода аналогий. Учебное пособие написано на основе лекционного курса «Концепции математического моделирования механических систем и процессов», для студентов старших курсов, обучающихся по направлению 010800 – «Механика и математическое моделирование» в Самарском государственном аэрокосмическом университете. Пособие может быть полезно при выполнении курсовых работ, при дипломном проектировании, а также аспирантам и специалистам, занимающимся составлением и исследованием математических моделей сложных систем и процессов.

ISBN □□□□□□□

©В. С. Асланов, А. В. Алексеев, 2010
©Самарский государственный
аэрокосмический университет, 2010

Оглавление

Введение **5**

1 Основные понятия математического моделирования. Простейшие модели **10**
1.1 Фундаментальные законы природы 11
1.2 Вариационные принципы 19
1.3 Приминение аналогий при построении моделей 23
1.4 Иерархический подход к получению моделей 26
1.5 О нелинейности математических моделей 30
1.6 Предварительные выводы 33

2 Вариационные принципы и математические модели **36**
2.1 Общая схема принципа Гамильтона 37
2.2 Третий способ получения модели шарик-пружина 39
2.3 Колебания маятника в поле силы тяжести 41

2.4 Заключение 45

3 Применение аналогий. Универсальность математических моделей 47
3.1 Динамика скопления амеб 48
3.2 Случайный марковский процесс 55
3.3 Примеры аналогий между объектами из разных сфер 66

4 Иерархический подход к получению моделей 74
4.1 Различные варианты действия заданной внешней силы 75
4.2 Движение точки крепления, пружина на вращающемся стержне 77
4.3 Учет сил трения 79
4.4 Два типа нелинейных моделей системы шарик-пружина . . . 83
4.5 Заключение 87

5 Получение моделей из закона сохранения вещества 89
5.1 Поток частиц в трубе 89
5.2 Основные предположения о гравитационном режиме течения грунтовых вод 94
5.3 Баланс массы в элементе грунта 95
5.4 Замыкание закона сохранения массы 99
5.5 О некоторых свойствах уравнения Буссинеска 101

6 Получение моделей из закона сохранения энергии 106
6.1 Предварительные сведения о процессах теплопередачи 107

6.2 Вывод закона Фурье из молекулярно-кинетических представлений . . . 109
6.3 Уравнение баланса тепла . . . 113
6.4 Постановка типичных краевых условий для уравнения теплопроводности . . . 117
6.5 Об особенностях моделей теплопередачи . . . 121

7 Совместное применение нескольких фундаментальных законов 125
7.1 Предварительные понятия газовой динамики . . . 126
7.2 Уравнение неразрывности для сжимаемого газа . . . 127
7.3 Уравнения движения газа . . . 129
7.4 Уравнение энергии . . . 132
7.5 Уравнения газовой динамики в лагранжевых координатах . . . 134
7.6 Краевые условия для уравнений газовой динамики . . . 138
7.7 Некоторые особенности моделей газовой динамики . . . 141

8 Модели трудноформализуемых объектов 146
8.1 Организация рекламной кампании . . . 146
8.2 Боевые действия двух армий . . . 152

9 Применение методов подобия 160
9.1 Анализ размерностей и групповой анализ моделей . . . 160
9.2 Автомодельные (самоподобные) процессы . . . 168
Список литературы . . . 179

Введение

Невозможно представить себе современную науку без широкого применения математического моделирования. Сущность этой методологии состоит в замене исходного объекта его «образом» — математеческой моделью — и дальнейшем изучении модели с помощью реалзуемых на компьютерах вычислительно-логических алгоритмов. Этот «третий метод» познания, конструирования, проектирования сочетает в себе многие достоинства как теории, так и эксперимента. Работа не с самим объектом (явлением, процессом), а с его моделью дает возможность безболезненно, относительно быстро и без существенных затрат исследовать его свойства и поведение в любых мыслимых ситуациях (преимущества теории). В то же время вычислительные (компьютерные, симуляционные, имитационные) эксперименты с моделями объектов позволяют, опираясь на мощь современных вычислительных методов и технических инструментов информатики, подробно и глубоко изучать объекты в достаточной полноте, недоступной чисто теоретическим подходам (преимущества эксперимента). Неудивительно, что методология математи-

ческого моделирования бурно развивается, охватывая все новые сферы — от разработки технических систем и управления ими до анализа сложнейших экономических и социальных процессов. Элементы математического моделирования использовались с самого начала появления точных наук, и не случайно, что некоторые методы вычислений носят имена таких корифеев науки, как Ньютон и Эйлер, а слово «алгоритм» происходит от имени средневекового арабского ученого Аль-Хорезми. Второе «рождение» этой метолологии пришлось на конец 40-х—начало 50-х годов XX века и было обусловлено по крайней мере двумя причинами. Первая из них — появление ЭВМ (компьютеров), хотя и скромных по нынешним меркам, но тем не менее избавивших ученых от огромной по объему рутинной вычислительной работы. Вторая — беспрецедентный социальный заказ — выполнение национальных программ СССР и США по созданию ракетно-ядерного щита, которые не могли быть реализованы традиционными методами. Математическое моделирование справилось с этой задачей: ядерные взрывы и полеты ракет и спутников были предварительно «осуществлены» в недрах ЭВМ с помощью математических моделей и лишь затем претворены на практике. Этот успех во многом определил дальнейшие достижения методологии, без применения которой в развитых странах ни один крупномасштабный технологический, экологический или экономический проект теперь всерьез не рассматривается (сказанное справедливо и по отношению к некоторым социально-политическим проектам). Сейчас математическое моделирование вступает в третий принципиально важный этап своего развития, «встраиваясь» в структуры так называемого информационного общества. Впечатляющий прогресс средств переработки, передачи и хранения информации

отвечает мировым тенденциям к усложнению и взаимному проникновению различных сфер человеческой деятельности. Без владения информационными «ресурсами» нельзя и думать о решении все более укрупняющихся и все более разнообразных проблем, стоящих перед мировым сообществом. Однако информация как таковая зачастую мало что дает для анализа и прогноза, для принятия решений и контроля за их исполнением. Нужны надежные способы переработки информационного «сырья» в готовый «продукт», т. е. в точное знание. История методологии математического моделирования убеждает: она может и должна быть интеллектуальным ядром информационных технологий, всего процесса информатизации общества. Технические, экологические, экономические и иные системы, изучаемые современной наукой, больше не поддаются исследованию (в нужной полноте и точности) обычными теоретическими методами. Прямой натурный эксперимент над ними долог, дорог, часто либо опасен, либо попросту невозможен, так как многие из этих систем существуют в «единственном экземпляре». Цена ошибок и просчетов в обращении с ними недопустимо высока. Поэтому математическое (шире — информационное) моделирование является неизбежной составляющей научно-технического прогресса. Сама постановка вопроса о математическом моделировании какого-либо объекта порождает четкий план действий. Его можно условно разбить на три этапа: модель — алгоритм — программа (см. схему). На первом этапе выбирается (или строится) «эквивалент» объекта, отражающий в математической форме важнейшие его свойства — законы, которым он подчиняется, связи, присущие составляющим его частям, и т. д. Математическая модель (или ее фрагменты) исследуется теоретическими методами, что позволяет получить важные предваритель-

ные знания об объекте. Второй этап — выбор (или разработка) алгоритма для реализации модели на компьютере. Модель представляется в форме, удобной для применения численных методов, определяется последовательность вычислительных и логических операций, которые нужно произвести, чтобы найти искомые величины с заданной точностью. Вычислительные алгоритмы должны не искажать основные свойства модели и, следовательно, исходного объекта, быть экономичными и адаптирующимися к особенностям решаемых задач и используемых компьютеров. На третьем этапе создаются программы, «переводящие» модель и алгоритм на доступный компьютеру язык. К ним также предъявляются требования экономичности и адаптивности. Их можно назвать «электронным» эквивалентом изучаемого объекта, уже пригодным для непосредственного испытания на «экспериментальной установке» — компьютере. Создав триаду «модель—алгоритм—программа», исследователь получает в руки универсальный, гибкий и недорогой инструмент, который вначале отлаживается, тестируется в «пробных» вычислительных экспериментах. После того как адекватность (достаточное соответствие) триады исходному объекту удостоверена, с моделью проводятся разнообразные и подробные «опыты», дающие все требуемые качественные и количественные свойства и характеристики объекта. Процесс моделирования сопровождается улучшением и уточнением, по мере необходимости, всех звеньев триады. Будучи методологией, математическое моделирование не подменяет собой математику, физику, биологию и другие научные дисциплины, не конкурирует с ними. Наоборот, трудно переоценить его синтезирующую роль. Создание и применение триады невозможно без опоры на самые разные методы и подходы — от качественного анализа нелинейных мо-

делей до современных языков программирования. Оно дает новые дополнительные стимулы самым разным направлениям науки. Рассматривая вопрос шире, напомним, что моделирование присутствует почти во всех видах творческой активности людей различных «специальностей» — исследователей и предпринимателей, политиков и военачальников. Привнесение в эти сферы точного знания помогает ограничить интуитивное умозрительное «моделирование», расширяет поле приложений рациональных методов. Конечно же, математическое моделирование плодотворно лишь при выполнении хорошо известных профессиональных требований: четкая формулировка основных понятий и предположений, апостериорный анализ адекватности используемых моделей, гарантированная точность вычислительных алгоритмов и т. д. Если же говорить о моделировании систем с участием «человеческого фактора», т. е. трудноформализуемых объектов, то к этим требованиям необходимо добавить аккуратное разграничение математических и житейских терминов (звучащих одинаково, но имеющих разный смысл), осторожное применение уже готового математического аппарата к изучению явлений и процессов (предпочтителен путь «от задачи к методу», а не наоборот) и ряд других. Решая проблемы информационного общества, было бы наивно уповать только на мощь компьютеров и иных средств информатики. Постоянное совершенствование триады математического моделирования и ее внедрение в современные информационно-моделирующие системы — методологический императив. Лишь его выполнение дает возможность получать так нужную нам высокотехнологичную, конкурентоспособную и разнообразную материальную и интеллектуальную продукцию.

Глава 1

Основные понятия математического моделирования. Простейшие модели

Рассмотрим некоторые подходы к построению простейших математических моделей, иллюстрирующие применение фундаментальных законов природы, вариационных принципов, аналогий, иерархических цепочек. Несмотря на простоту, привлекаемый материал даст возможность начать обсуждение таких понятий, как адекватность моделей, их «оснащение», нелиней-

ность, численная реализация и ряда других принципиальных вопросов математического моделирования.

1.1. Фундаментальные законы природы

Наиболее распространенный метод построения моделей состоит в применении фундаментальных законов природы к конкретной ситуации. Эти законы общепризнаны, многократно подтверждены опытом, служат основой множества научно-технических достижений. Поэтому их обоснованность не вызывает сомнений, что, помимо всего прочего, обеспечивает исследователю мощную психологическую поддержку. На первый план выдвигаются вопросы, связанные с тем, какой закон (законы) следует применять в данном случае и как это делать.

Сохранение энергии. Этот закон известен почти двести лет и занимает, пожалуй, наиболее почетное место среди великих законов природы. Полагаясь на него, эксперт по баллистике, желающий быстро определить скорость револьверной пули и не имеющий поблизости специальной лаборатории, может воспользоваться относительно простым устройством типа маятника — груза, подвешенного на легком жестком и свободно вращающемся стержне (рис. 1.1). Пуля, застрявшая в грузе, сообщит системе «пуля— груз» свою кинетическую энергию, которая в момент наибольшего отклонения стержняот вертикали полностью перейдет в потенциальную энергию системы. Эти

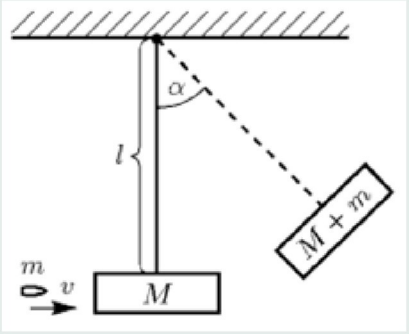


Рис. 1.1. Пример вставки рисунка в текст

трансформации описываются цепочкой равенств

$$\frac{mv^2}{2} = (M+m)\frac{V^2}{2} = (M+m)gl(1-\cos\alpha)$$

Здесь $mv^2/2$ — кинетическая энергия пули массы га, имеющей скорость v, — масса груза, V — скорость системы «пуля—груз» сразу после столкновения, g — ускорение свободного падения, l — длина стержня, α — угол наибольшего отклонения. Искомая скорость определяется формулой

$$v = \sqrt{\frac{2(M+m)gl(1-\cos\alpha)}{m}} \tag{1.1}$$

которая будет вполне точной, если не учитываемые нами потери энергии на разогрев пули и груза, на преодоление сопротивления воздуха, разгон

стержня и т. д. невелики. Это, на первый взгляд, разумное рассуждение на самом деле неверно. Процессы, происходящие при «слипании» пули и маятника, уже не являются чисто механическими. Поэтому примененный для вычисления величины V закон сохранения механической энергии несправедлив: сохраняется полная, а не механическая энергия системы. Он дает лишь нижнюю границу для оценки скорости пули.

Сохранение материи. Именно этим соображением руководствуется школьник, решающий задачу о заполнении бассейна водой, втекающей и вытекающей из двух труб. Конечно же, область применения этого закона несравненно шире.

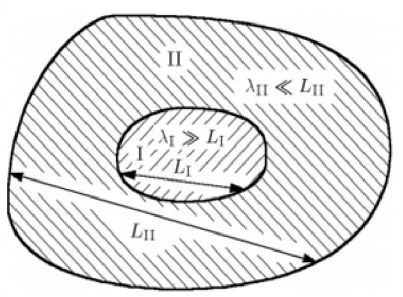


Рис. 1.2. Схема областей распада

Пусть, например, имеется небольшое количество радиоактивного вещества (урана), окруженного толстым слоем «обычного» материала (свинца), — ситуация типичная либо при хранении делящихся материалов, либо при

их использовании в энергетике (1.2). Под словом «небольшой» подразумевается упрощающее обстоятельство, а именно то, что все продукты распада, не испытывая столкновений с атомами вещества, беспрепятственно покидают область I. Другими словами, длина свободного пробега продуктов распада λ_I в первом веществе значительно больше характерных размеров самого материала L_I, т. е. $\lambda_I >> L_I$. Слова «толстый слой» означают, что в согласии с целями хранения продукты деления полностью поглощаются в области II. Это гарантируется при выполнении противоположного условия $\lambda_{II} << L_{II}$, где λ_{II} — длина пробега продуктов распада во втором веществе, L_{II} — его характерный размер. Итак, все, что вылетает из области I, поглощается в области II, и суммарная масса обоих веществ со временем не меняется. Это и есть закон сохранения материи, примененный к данной ситуации. Если в начальный момент времени $t = 0$ массы веществ были равны $M_I(0)$ и $M_{II}(0)$, то в любой момент времени справедлив баланс

$$M_I(0) + M_{II}(0) = M_I(t) + M_{II}(t). \tag{1.2}$$

Одного уравнения (1.2), очевидно, недостаточно для определения текущих значений двух масс — $M_I(t)$ и $M_{II}(t)$. Для замыкания математической формулировки необходимо привлечь дополнительное соображение о характере распада. Оно гласит, что скорость распада (число атомов, распадающихся в единицу времени) пропорционально общему числу атомов радиоактивного вещества. За небольшое время dt между моментами t и $t+dt$ всего распадется

$$N_I(t + dt) - N_I(t) = -\alpha N_I(t + \xi dt)$$

атомов. Здесь вторично использован закон сохранения вещества, но приме-

нительно не ко всему процессу, а к отрезку времени dt. В этом уравнении, описывающем баланс атомов, в правой части стоит знак минус (вещество убывает), а величина $N_I(t + \xi dt)$ отвечает некоторому среднему значению числа атомов за рассматриваемое время. Перепишем его в дифференциальной форме:

$$\frac{dN_I(t)}{dt} = -\alpha N_I(t).$$

Учитывая, что, $M_I(t) = \mu_I N_I(t)$, где μ_I — атомный вес вещества I, получаем

$$\frac{dM_I(t)}{dt} = -\alpha M_I(t). \tag{1.3}$$

При самопроизвольной радиоактивности любой атом имеет некоторую не зависящую от состояния окружающего вещества вероятность распада. Поэтому чем больше (меньше) самого радиоактивного вещества, тем больше (меньше) выделяется продуктов распада в единицу времени. Коэффициент пропорциональности $\alpha > 0$ (постоянная распада) определяется конкретным веществом.

Уравнения (1.2), (1.3) вместе с условиями $\lambda_I \gg L_I$, $\lambda_{II} \ll L_{II}$, а также величинами α, $M_I(0)$, $M_{II}(0)$ и составляют математическую модель рассматриваемого объекта.

Интегрируя (1.3), получаем, что масса делящегося материала убывает по экспоненциальному закону

$$M_I(t) = M_I(0)e^{-\alpha t},$$

и при $t \to \infty$ в области I вещество полностью исчезает.

Так как суммарная масса в соответствии с (1.2) остается постоянной, то в области II количество вещества растет:

$$M_{II}(t) = M_{II}(0) + M_I(0) - M_I(0)e^{-\alpha t} = M_{II}(0) + M_I(0)(1 - e^{-\alpha t}),$$

и при $t \to \infty$ продукты распада полностью переходят из области I в область II.

Сохранение импульса. Неподвижно стоящая в безветренную погоду на поверхности озера лодка начнет двигаться вперед, если сделать несколько шагов от ее носа к корме. Так проявляет себя закон сохранения импульса, утверждающий: полный импульс системы, не испытывающей действия внешних сил, сохраняется. На передвижение гребца лодка реагирует смещением в противоположную сторону.

Принцип реактивного движения положен в основу многих замечательных технических устройств, например, ракеты, выводящей на орбиту вокруг Земли искусственный спутник, для чего ей требуется развить скорость примерно 8 км/с. Простейшая математическая модель движения ракеты получается из закона сохранения импульса в пренебрежении сопротивлением воздуха, гравитацией и другими силами, исключая, конечно, тягу реактивных двигателей.

Пусть продукты сгорания ракетного топлива покидают расположенные в кормовой части выхлопные сопла со скоростью u (для современных топлив величина u равна 3-5 км/с). За малый промежуток времени dt между моментами t и $t + dt$ часть топлива выгорела, и масса ракеты изменилась на величину dm. Изменился также импульс ракеты, однако суммарный импульс системы «ракета плюс продукты сгорания» остался тем же, что и в

момент t, т. е.

$$m(t)v(t) = m(t+dt)v(t+dt) - dm[v(t+\xi dt) - u],$$

где $v(t)$ — скорость ракеты, $v(t+\xi dt)-u$ $(0 < \xi < 1)$ — средняя за промежуток dt скорость истекающих из сопел газов (обе скорости берутся относительно Земли). Первый член в правой части этого равенства - импульс ракеты в момент $t + dt$, второй — импульс, переданный истекающим газом за время dt.

Учитывая, что $m(t + dt) = m(t) + (dm/dt)dt + O(dt^2)$, закон сохранения импульса можно переписать в виде дифференциального уравнения

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{dm}{dt}u,$$

в котором член $-(dm/dt)u$, очевидно, не что иное, как сила тяги ракетных двигателей, и которое, будучи преобразованным к виду

$$\frac{dv}{dt} = -u\frac{d(\ln m)}{dt},$$

легко интегрируется:

$$v(t) = v_0 + u\ln\left(\frac{m_0}{m(t)}\right),$$

где v_0, m_0 - соответственно скорость и масса ракеты в момент $t = 0$. Если $v_0 = 0$, то максимальная скорость ракеты, достигаемая при полном сгорании топлива, равна

$$v = u\ln\left(\frac{m_0}{m_p + m_s}\right). \tag{1.4}$$

Здесь m_p — полезная масса (масса спутника), m_s — структурная масса (масса собственно ракетной конструкции — топливных баков, двигателей, систем управления и т. д.).

Простая формула Циолковского (1.4) позволяет сделать фундаментальный вывод о конструкции ракеты для космических полетов. Введем величину $\lambda = \frac{m_s}{m_0 - m_p}$, которая характеризует при $m_p = 0$ отношение структурной и начальной масс ракеты. Тогда для практически реальных значений $\lambda = 0,1$, $u = 3$ км/с получаем при $m_p = 0$

$$v = u \ln(1/\lambda) = 7 \text{ км/с}$$

Отсюда следует, что даже в самой идеальной ситуации (полезная масса равна нулю, отсутствуют гравитация и сопротивление воздуха и т. д.) ракета рассматриваемого типа не способна достичь первой космической скорости. Тем самым необходимо использовать многоступенчатые ракеты — вывод, к которому пришли основоположники космонавтики.

Данный пример иллюстрирует также своего рода принцип «наибольшего благоприятствия», часто используемый на начальной стадии математического моделирования сложных объектов: если объект, поставленный в наилучшие условия, не в состоянии достичь требуемых характеристик, то надо изменить сам подход к объекту либо смягчить требования к нему; если же требования в принципе достижимы, то следующие шаги связаны с исследованием влияния на объект дополнительных осложняющих факторов.

1.2. Вариационные принципы

Еще один подход к построению моделей, по своей широте и универсальности сопоставимый с возможностями, даваемыми фундаментальными законами, состоит в применении так называемых *вариационных принципов*. Они представляют собой весьма общие утверждения о рассматриваемом объекте (системе, явлении) и гласят, что из всех возможных вариантов его поведения (движения, эволюции) выбираются лишь те, которые удовлетворяют определенному условию. Обычно согласно этому условию некоторая связанная с объектом величина достигает экстремального значения при его переходе из одного состояния в другое.

Допустим, автомобиль, движущийся с постоянной скоростью v, должен попасть из точки A в точку B и при этом коснуться некоторой прямой линии C (рис. 1.3). Водитель автомобиля очень торопится и выбирает из множества траекторий путь, требующий минимальных затрат времени. Представим затраченное время как функцию величины α — угла между прямой и отрезком пути от точки A до прямой:

$$t(\alpha) = \frac{a}{v \sin \alpha} + \frac{b}{v \sin \beta(\alpha)}$$

Здесь a и b — длины перпендикуляров, опущенных из точек A и B на прямую, $\beta(\alpha)$ - угол между прямой и отрезком пути из точки касания до точки B.

Условие экстремальности $t(\alpha)$ по аргументу α означает, что

$$\left.\frac{dt(\alpha)}{d\alpha}\right|_{\alpha=\alpha_{ext}} = 0,$$

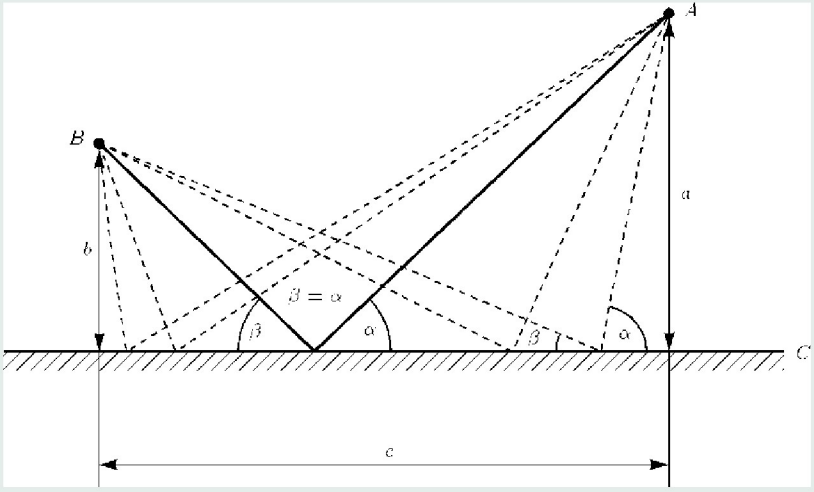


Рис. 1.3. различные траектории движения автомобиля

или

$$\frac{a\cos\alpha}{\sin^2\alpha}+\frac{b\cos\beta(\alpha)}{\sin^2\beta(\alpha)}\frac{d\beta}{d\alpha}=0. \tag{1.5}$$

Для любых значений α справедливо равенство

$$c=\frac{a}{\operatorname{tg}\alpha}+\frac{b}{\operatorname{tg}\beta(\alpha)},$$

где c - расстояние между проекциями точек A и B на прямую (одинаковое

для всех траекторий). Дифференцируя его, получаем соотношение

$$\frac{a}{\sin^2\alpha} + \frac{b}{\sin^2\beta(\alpha)}\frac{d\beta}{d\alpha} = 0, \tag{1.6}$$

которое вместе с условием минимальности (1.5) означает

$$\cos\alpha = \cos\beta(\alpha),$$

т. е. равенство углов α и β.

Далее нетрудно найти сами значения α_{min}, t_{min} через заданные величины a, b, c. Однако сейчас для нас важно другое - условие минимальных затрат времени привело к выбору соответствующей траектории по правилу «угол падения равен углу отражения». Но ведь такому закону подчиняется и ход светового луча, попадающего на отражающую поверхность! Может быть, и в общем случае лучи света движутся по траекториям, обеспечивающим быстрейшее попадание сигнала из одной точки в другую? Да, именно так и происходит согласно известному вариационному принципу Ферма, опираясь на который, можно получить все основные законы геометрической оптики.

Покажем это, рассмотрев преломление лучей на границе двух сред (рис. 1.4). Свет, выходящий из точки A, движется в первой среде со скоростью v_a, преломляется и, переходя через линию раздела, двигается во второй среде со скоростью v_b и попадает в точку B. Если α - угол падения луча, а $\beta(\alpha)$ - угол его преломления, то время прохождения из A в B равно

$$t(\alpha) = \frac{a}{v_a\sin\alpha} + \frac{b}{v_b\sin\beta(\alpha)}.$$

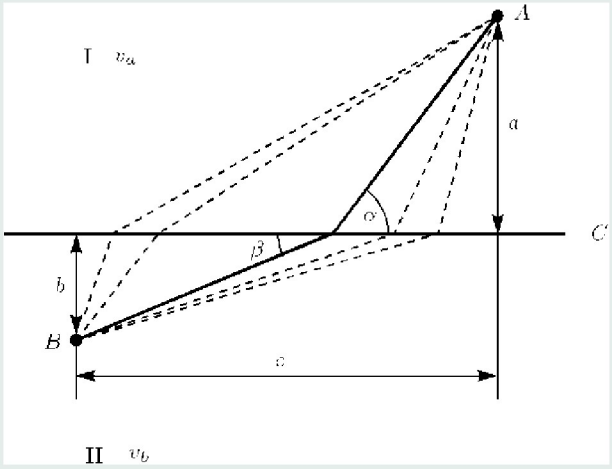


Рис. 1.4. Возможные траектории световых лучей

Условие минимальности $t(\alpha)$ записывается в виде (ср. с (1.5))

$$\frac{a\cos\alpha}{v_a\sin\alpha}+\frac{b\cos\beta(\alpha)}{v_b\sin\beta(\alpha)}\frac{d\beta}{d\alpha}=0,$$

а продифференцированное по α условие постоянства величины c попрежнему выражается формулой (1.6). Здесь величины a, b, c имеют тот же смысл, что и в предыдущем случае. Исключая из последней формулы производную

$d\beta/d\alpha$, приходим к равенству

$$\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \frac{v_a}{v_b}, \tag{1.7}$$

т. е. к известному закону преломления света.

Сформулированные применительно к какому-либо классу явлений вариационные принципы позволяют единообразно строить соответствующие математические модели. Их универсальность выражается также в том, что, используя их, можно в определенной степени отвлекаться от конкретной природы процесса. Так, водитель автомобиля, следующий принципу «минимального времени» и желающий попасть из точки A, находящейся на песчаной почве (одна скорость), в точку B, расположенную на травянистом лугу (другая скорость), обязан поехать не по прямой, соединяющей A и B, а по ломанной траектории, сделав необходимое «преломление» на линии, разделяющей песок и траву.

1.3. Приминение аналогий при построении моделей

В огромном числе случаев при попытке построить модель какого-либо объекта либо невозможно прямо указать фундаментальные законы или вариационные принципы, которым он подчиняется, либо, с точки зрения наших сегодняшних знаний, вообще нет уверенности в существовании подобных законов, допускающих математическую формулировку. Одним из пло-

дотворных подходов к такого рода объектам является использование аналогий с уже изученными явлениями. Что, казалось бы, общего между радиоактивным распадом и динамикой популяций, в частности изменением численности населения нашей планеты? Однако на простейшем уровне такая аналогия вполне просматривается, о чем свидетельствует одна из простейших моделей популяций, называемая *моделью Мальтуса.* В ее основу положено простое утверждение - скорость изменения населения со временем t пропорциональна его текущей численности $N(t)$, умноженной на сумму коэффициентов рождаемости $\alpha(t) \geqslant 0$ и смертности $\beta(t) \leqslant 0$. В результате приходим к уравнению

$$\frac{dN(t)}{dt} = [\alpha(t) - \beta(t)]N(t), \tag{1.8}$$

весьма похожему на уравнение радиоактивного распада и совпадающего с ним при $\alpha < \beta$ (если α и β постоянные). Это неудивительно, так как при их выводе использовались одинаковые соображения. Интегрирование уравнения (1.8) дает

$$N(t) = N(0) \exp\left(\int_{t_0}^{t} [\alpha(t) - \beta(t)]dt\right),$$

где $N(0) = N(t = t_0)$ - начальная численность.

На рис.1.5 приведены графики функции $N(t)$ при постоянных α и β (разным подобным друг другу кривым соответствуют разные t_0 - значения времени начала процесса). При $\alpha = \beta$ численность остается постоянной, т. е. в этом случае решением уравнения является равновесная величина

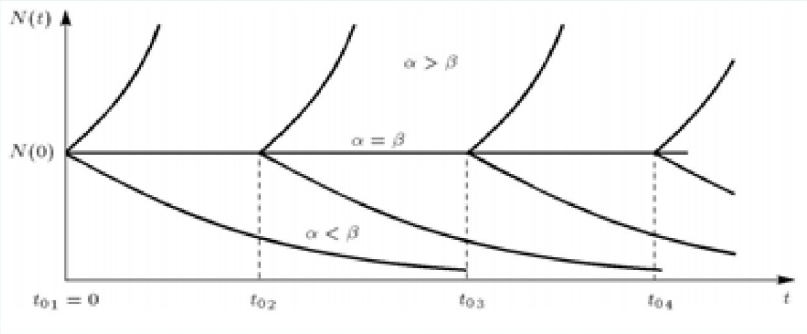


Рис. 1.5. Изменение численности популяции со временем в модели Мальтуса

$N(t) = N(0)$. Равновесие между рождаемостью и смертностью неустойчиво в том смысле, что даже небольшое нарушение равенства $\alpha = \beta$ приводит с течением времени ко все большему отклонению функции $N(t)$ от равновесного значения $N(0)$. При $\alpha < \beta$ численность населения убывает и стремится к нулю при $t \to \infty$, а при $\alpha > \beta$ растет по некоторому экспоненциальному закону, обращаясь в бесконечность при $t \to \infty$. Последнее обстоятельство и послужило основанием для опасений Мальтуса о грядущем перенаселении Земли со всеми вытекающими отсюда последствиями.

Как в данном примере, так и в ряде рассмотренных выше случаев можно указать немало очевидных ограничений применимости построенной модели. Конечно же, сложнейший процесс изменения численности населения, зави-

сящий к тому же от сознательного вмешательства самих людей, не может описываться какими-либо простыми закономерностями. Даже в идеальном случае изолированной биологической популяции предложенная модель не отвечает реальности в полной мере хотя бы из-за ограниченности ресурсов, необходимых для ее существования.

Сделанное замечание тем не менее нисколько не умаляет роли аналогий в построении математических моделей очень сложных явлений. Применение аналогий основано на одном из важнейших свойств моделей – их универсальности, т. е. их приложимости к объектам принципиально различной природы. Так, предположения типа «скорость изменения величины пропорциональна значению самой величины (или некоторой функции от нее)» широко используются в далеких друг от друга областях знаний.

1.4. Иерархический подход к получению моделей

Лишь в редких случаях бывает удобным и оправданным построение математических моделей даже относительно простых объектов сразу во всей полноте, с учетом всех факторов, существенных для его поведения. Поэтому естествен подход, реализующий принцип «от простого — к сложному», когда следующий шаг делается после достаточно подробного изучения не очень сложной модели. При этом возникает цепочка (*иерархия*) все более полных моделей, каждая из которых обобщает предыдущие, включая их в качестве частного случая.

Построим такую иерархическую цепочку на примере модели многоступенчатой ракеты. Как было установлено, реальная одноступенчатая ракета неспособна развить первую космическую скорость. Причина этого — затраты горючего на разгон ненужной, отработавшей части структурной массы. Следовательно, при движении ракеты необходимо периодически избавляться от балласта. В практической конструкции это означает, что ракета состоит из нескольких ступеней, отбрасываемых по мере их использования.

Пусть m_i — общая масса i-й ступени, λm_i — соответствующая структурная масса (при этом масса топлива равна величине $(1-\lambda)m_i$), m_p — масса полезной нагрузки. Величины λ и скорость истечения газов u одинаковы для всех ступеней. Возьмем для определенности число ступеней $n = 3$. Начальная масса такой ракеты равна

$$m_0 = m_p + m_1 + m_2 + m_3.$$

Рассмотрим момент, когда израсходовано все топливо первой ступени и масса ракеты равна величине

$$m_p + \lambda m_1 + m_2 + m_3.$$

Тогда по формуле (1.4) первоначальной модели скорость ракеты равна

$$v_1 = u \ln \left(\frac{m_0}{m_p + \lambda m_1 + m_2 + m_3} \right).$$

После достижения скорости v_1 структурная масса λm_1 отбрасывается и включается вторая ступень. Масса ракеты в этот момент равна

$$m_p + m_2 + m_3.$$

Начиная с этого момента и до момента полного выгорания топлива второй ступени, ничто не мешает пользоваться уже построенной моделью, применив ее к рассматриваемому случаю. Все рассуждения о сохранении суммарного импульса и соответствующие выкладки остаются в силе (следует только учесть, что у ракеты уже есть начальная скорость v_1). Тогда по формуле (1.4) после выгорания топлива во второй ступени ракета достигает скорости

$$v_2 = v_1 + u \ln \left(\frac{m_p + m_2 + m_3}{m_p + \lambda m_2 + m_3} \right).$$

Такие же рассуждения применимы и к третьей ступени ракеты. После отключения ее двигателей скорость ракеты равна

$$v_3 = v_2 + u \ln \left(\frac{m_p + m_3}{m_p + \lambda m_3} \right).$$

Эту цепочку нетрудно продолжить для любого числа ступеней и получить соответствующие формулы. В случае же $n = 3$ для окончательной скорости имеем

$$\frac{v_3}{u} = \ln \left\{ \left(\frac{m_0}{m_p + \lambda m_1 + m_2 + m_3} \right) \left(\frac{m_p + m_2 + m_3}{m_p + \lambda m_2 + m_3} \right) \left(\frac{m_p + m_3}{m_p + \lambda m_3} \right) \right\},$$

или, вводя величины $\alpha_1 = \frac{m_0}{m_p + m_2 + m_3}$, $\alpha_2 = \frac{m_p + m_2 + m_3}{m_p + m_3}$, $\alpha_3 = \frac{m_p + m_3}{m_p}$, получаем

$$\frac{v_3}{u} = \ln \left\{ \left(\frac{\alpha_1}{1 + \lambda(\alpha_1 - 1)} \right) \left(\frac{\alpha_2}{1 + \lambda(\alpha_2 - 1)} \right) \left(\frac{\alpha_3}{1 + \lambda(\alpha_3 - 1)} \right) \right\}.$$

Данное выражение симметрично по отношению к величинам α_1, α_2, α_3, и нетрудно показать, что его максимум достигается в симметричном случае, т. е. при $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$. При этом для $i = 3$

$$\alpha = \frac{1-\lambda}{P-\lambda}, \quad P = \exp\left(-\frac{v_3}{3u}\right).$$

Произведение $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = \alpha^3$ равно, как легко проверить, отношению m_0/m_p, или

$$\alpha^3 = \frac{m_0}{m_p} = \left(\frac{1-\lambda}{P-\lambda}\right)^3.$$

Для многоступенчатой ракеты, аналогично, имеем

$$\frac{m_0}{m_p} = \left(\frac{1-\lambda}{P-\lambda}\right)^n, \quad P = \exp\left(-\frac{v_n}{nu}\right), \tag{1.9}$$

где n — число ступеней.

Проанализируем формулу (1.9). Примем $v_n = 10.5$ км/с, $\lambda = 0.1$.Тогда для n =2, 3, 4 получаем $m_0 = 149m_p$, $m_0 = 77m_p$, $m_0 = 65m_p$ соответственно. Это значит, что двухступенчатая ракета пригодна для выведения на орбиту некоторой полезной массы (однако при одной тонне полезного груза необходимо иметь ракету весом 149 тонн). Переход к третьей ступени уменьшает массу ракеты почти в два раза (но, конечно же, усложняет ее конструкцию), а четырехступенчатая ракета не дает заметного выигрыша по сравнению с трехступенчатой.

Построение иерархической цепочки позволило относительно просто прийти к этим важным выводам. Иерархия математических моделей часто строится и по противоположному принципу «от сложного к простому». В этом

случае реализуется путь «сверху вниз» — из достаточно общей и сложной модели при соответствующих упрощающих предположениях получается последовательность все более простых (но имеющих уменьшающуюся область применимости) моделей.

1.5. О нелинейности математических моделей

Простота рассмотренных выше моделей во многом связана с их *линейностью.* В математическом плане это важное понятие означает, что справедлив *принцип суперпозиции*, т. е. любая линейная комбинация решений (например, их сумма) также является решением задачи. Пользуясь принципом суперпозиции, нетрудно, найдя решение в каком-либо частном случае, построить решение в более общей ситуации. Поэтому о качественных свойствах общего случая можно судить по свойствам частного — различие между двумя решениями носит лишь количественный характер. Например, увеличение в два раза скорости истечения ракетного топлива ведет также к двукратному увеличению скорости ракеты, уменьшение угла падения светового луча на отражающую поверхность означает такое же изменение угла отражения и т. д. Другими словами, в случае линейных моделей отклик объекта на изменение каких-то условий пропорционален величине этого изменения.

Для *нелинейных явлений*, математические модели которых не подчиняются принципу суперпозиции, знание о поведении части объекта еще не гарантирует знания поведения всего объекта, а его отклик на изменение усло-

вий может качественно зависеть от величины этого изменения. Так, уменьшение угла падения луча света на границу раздела двух сред приводит к уменьшению угла преломления, но только до определенного предела. Если угол падения становится меньше критического (см. формулу (1.7)), то происходит качественное изменение — свет перестает проникать через границу раздела во вторую среду, если она менее плотная, чем первая. Тем самым преломление света — пример нелинейного процесса.

Большинство реальных процессов и соответствующих им математических моделей нелинейны. Линейные же модели отвечают весьма частным случаям и, как правило, служат лишь первым приближением к реальности. Например, популяционные модели сразу становятся нелинейными, если принять во внимание ограниченность доступных популяции ресурсов. При их выводе считается, что:

1) существует «равновесная» численность популяции N_p, которую может обеспечить окружающая среда;

2) скорость изменения численности популяции пропорциональна самой численности, умноженной (в отличие от модели Мальтуса) на величину ее отклонения от равновесного значения, т. е.

$$\frac{dN}{dt} = \alpha\left(1 - \frac{N}{N_p}\right)N, \quad \alpha > 0. \tag{1.10}$$

Член $(1 - N/N_p)$ в этом уравнении обеспечивает механизм «насыщения» численности — при $N < N_p$ ($N > N_p$) скорость роста положительна (отрицательна) и стремится к нулю, если $N \to N_p$.

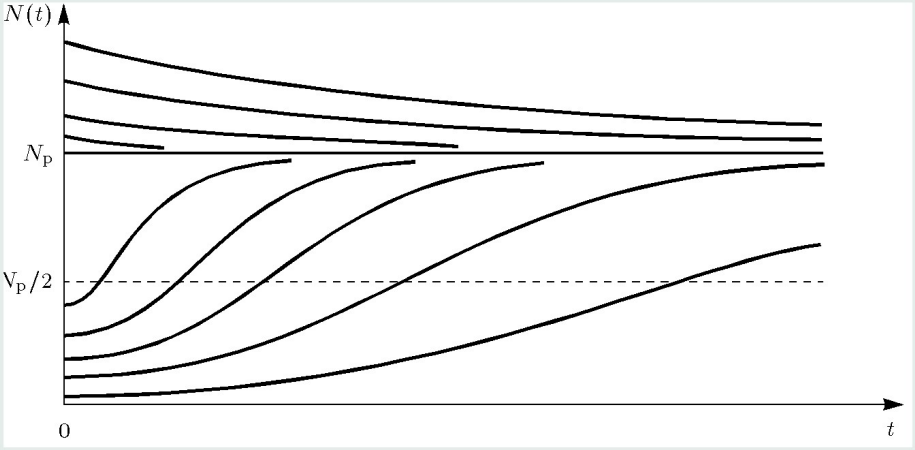


Рис. 1.6. Логистические кривые, соответствующие различным значениям начальной численности $N(0)$

Представляя уравнение (1.10) в виде

$$\frac{dN}{N_p - N} + \frac{dN}{N} = \alpha dt$$

и интегрируя его, получаем

$$-\ln(N_p - N) + \ln N = \alpha t + C.$$

Помтоянная интегрирования определяется из условия $N(t = 0) = N(0)$, т.е.

$C = \ln((N_p - N(0))^{-1} N(0))$. В результате находим

$$N = N_p \frac{N(0)}{N_p - N(0)} e^{\alpha t} - N \frac{N(0)}{N_p - N(0)} e^{\alpha t}$$

или, в окончательном виде,

$$N(t) = \frac{N_p N(0) e^{\alpha t}}{N_p - N(0)(1 - e^{\alpha t})}.$$

Поведение функции $N(t)$ описывается так называемой *логистической кривой* (рис. 1.6). При любом $N(0)$ численность стремится к равновесному значению N_p, причем тем медленней, чем величина $N(t)$ ближе к $N(0)$. Тем самым равновесие, в отличие от случая модели (1.8), устойчиво.

Логистическая модель более реалистично отражает динамику популяции в сравнении с моделью Мальтуса, но сама она с необходимостью становится нелинейной и поэтому более сложной. Заметим, что предположения о механизмах насыщения используются при построении многих моделей в различных областях знаний.

1.6. Предварительные выводы

Процесс построения моделей может быть условно разбит на следующие этапы.

1. Конструирование модели начинается со словесно-смыслового описания объекта или явления. Помимо сведений общего характера о природе объекта и целях его исследования эта стадия может содержать также некоторые

предположения (невесомый стержень, толстый слой вещества, прямолинейное распространение световых лучей и т. д.). Данный этап можно назвать формулировкой предмодели.

2. Следующий этап — завершение идеализации объекта. Отбрасываются все факторы и эффекты, которые представляются не самыми существенными для его поведения. Например, при составлении баланса материи не учитывался, ввиду его малости, дефект масс, которым сопровождается радиоактивный распад. По возможности идеализирующие предположения записываются в математической форме, с тем чтобы их справедливость поддавалась количественному контролю.

3. После выполнения первых двух этапов можно переходить к выбору или формулировке закона (вариационного принципа, аналогии и т. п.), которому подчиняется объект, и его записи в математической форме. При небходимости используются дополнительные сведения об объекте, также записываемые математически (например, постоянство величины c для всех траекторий лучей света, вытекающее из геометрии задачи). Следует иметь в виду, что даже для простых объектов выбор соответствующего закона отнюдь не тривиальная задача.

4. Завершает формулировку модели ее «оснащение». Например, необходимо задать сведения о начальном состоянии объекта (скорость ракеты и ее массу в момент $t = 0$) или иные его характеристики, без знания которых невозможно определить поведение объекта. И, наконец, формулируется цель исследования модели (найти закон преломления света, достичь понимания закономерностей изменения популяции, определить требования к конструкции ракеты, запускающей спутник, и т. д.).

5. Построенная модель изучается всеми доступными исследователю методами, в том числе со взаимной проверкой различных подходов. В отличие от рассматриваемых простейших случаев, большинство моделей не поддаются чисто теоретическому анализу, и поэтому необходимо широко использовать вычислительные методы. Это обстоятельство особенно важно при изучении нелинейных объектов, так как их качественное поведение заранее, как правило, неизвестно.

6. В результате исследования модели не только достигается поставленная цель, но и должна быть установлена всеми возможными способами (сравнением с практикой, сопоставлением с другими подходами) ее адекватность — соответствие объекту и сформулированным предположениям. Неадекватная модель может дать результат, сколь угодно отличающийся от истинного, и должна быть либо отброшена, либо соответствующим образом модифицирована.

Глава 2

Вариационные принципы и математические модели

Дадим упрощенную формулировку вариационного принципа Гамильтона для механической системы. На его основе выведем уравнения движения шарика на пружине и маятника в поле сил тяжести. Сопоставим результаты получения моделей из фундаментальных законов и из вариационного принципа.

2.1. Общая схема принципа Гамильтона

Пусть имеется механическая система, формального и строго определения которой пока давать не будем, имея в виду, однако, что все элементы такой системы и взаимодействие между ними определяются законами механики (один из простейших примеров — система «шарик—пружина»). Введем понятие *обобщенных координат* $q(t)$, полностью определяющих положение механической системы в пространстве. Величина $q(t)$ может быть декартовой координатой (например, координата r в системе «шарик—пружина»), радиусом-вектором, угловой координатой, набором координат материальных точек, составляющих систему, и т. д. Величину dq/dt естественно назвать *обобщенной скоростью* механической системы в момент времени t. Набор величин $q(t)$ и dq/dt определяет состояние механической системы во все моменты времени.

Для описания механической системы вводится *функция Лагранжа*, построение которой — отдельный вопрос. В простейших случаях функция Лагранжа имеет ясный смысл и записывается в виде

$$L(q, dq/dt) = T - \Pi, \tag{2.1}$$

где T, Π — кинетическая и потенциальная энергии системы соответственно.

Введем далее величину $S[q]$, называемую *действием*:

$$S[q] = \int_{t_1}^{t^2} L\left(q, \frac{dq}{dt}\right) dt, \tag{2.2}$$

Интеграл (2.2), очевидно, является функционалом от обобщенной координаты $q(t)$, т. е. функции $q(t)$, заданной на отрезке $[t_1, t_2]$, он ставит в соответствие некоторое число S (действие).

Принцип Гамильтона для механической системы гласит: если система движется по законам механики, то $q(t)$ — стационарная функция для $S[q]$, или

$$\frac{d}{d\varepsilon} S[q + \varepsilon\varphi]_{\varepsilon=0} = 0. \tag{2.3}$$

Фигурирующая в *принципе наименьшего действия* (2.3) функция $\varphi(t)$ — некоторая пробная функция, обращающаяся в нуль в моменты t_1, t_2 и удовлетворяющая тому условию, что $q(t) + \varepsilon\varphi(t)$ — возможная координата данной системы (в остальном $\varphi(t)$ произвольна).

Смысл принципа (2.3) в том, что из всех априори мыслимых (допускаемых) траекторий (движений) системы между моментами t_1, t_2 выбирается (реализуется) движение, доставляющее минимум функционалу действия (отсюда происходит и название принципа). Функция $\varepsilon\varphi(t)$ называется *вариацией* величины $q(t)$.

Итак, схема применения принципа Гамильтона (2.3) для построения моделей механических систем состоит в следующем: определяются обобщенные координаты $q(t)$ и обобщенные скорости dq/dt системы, строятся функция Лагранжа $L(q, dq/dt)$ и функционал действия $S[q]$, минимизация которого на вариациях $\varepsilon\varphi(t)$ координаты $q(t)$ и дает искомую модель.

2.2. Третий способ получения модели шарик-пружина

Воспользуемся принципом Гамильтона для построения модели движения шарика, соединенного с пружиной. В качестве обобщенной координаты системы естественно выбрать обычную эйлерову координату шарика $r(t)$. Тогда обобщенная скорость $dr/dt = v(t)$ — обычная скорость шарика. Функция Лагранжа (2.1), равная $L = T - \Pi$, записывается через значения кинетической и потенциальной энергии системы:

$$L = \frac{m(dr/dt)^2}{2} - k\frac{r^2}{2}.$$

Для величины действия получаем выражение

$$S[r] = \int_{t_1}^{t_2} L\left(r, \frac{dr}{dt}\right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{m}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - \frac{k}{2}r^2\right] dt.$$

Теперь, в соответствии со схемой предыдущего пункта, вычислим действие на вариациях $\varepsilon\varphi(t)$ координаты $r(t)$:

$$S[r+\varepsilon\varphi] = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{m}{2}\left(\frac{d(r+\varepsilon\varphi)}{dt}\right)^2 - \frac{k}{2}(r+\varepsilon\varphi)^2\right] dt.$$

Последнюю формулу необходимо продифференциировать по ε (учитывая, что функции r, φ, dr/dt, $d\varphi/dt$ от ε не зависят):

$$\frac{d}{d\varepsilon}S[r+\varepsilon\varphi] = \frac{d}{d\varepsilon}\frac{1}{2}\int\limits_{t_1}^{t_2}\left[m\left\{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + 2\varepsilon\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt} + \varepsilon^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right\} - k\{r^2 + 2\varepsilon r\varphi + \varepsilon^2\varphi^2\}\right]dt =$$

$$= \int\limits_{t_1}^{t_2}\left[m\left\{\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt} + \varepsilon\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right\} - k\{r\varphi + \varepsilon\varphi^2\}\right]dt,$$

и положить в ней $\varepsilon = 0$

$$\frac{d}{d\varepsilon}S[r+\varepsilon\varphi]\bigg|_{\varepsilon=0} = \int\limits_{t_1}^{t_2}\left[m\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt} - kr\varphi\right]dt.$$

Правая часть этого выражения (равного нулю в согласии с принципом Гамильтона — см. (2.3)) с помощью интегрирования ее первого члена по частям и с учетом того, что $\varphi = 0$ в моменты t_1, t_2, преобразуется к виду

$$\frac{d}{d\varepsilon}S[r+\varepsilon\varphi]\bigg|_{\varepsilon=0} = -\int\limits_{t_1}^{t_2}\varphi\left[m\frac{d^2r}{dt^2} + kr\right]dt = 0.$$

Поскольку пробная функция $\varphi(t)$, фигурирующая в формулировке принципа наименьшего действия, произвольна, то часть выражения, стоящая под

знаком интеграла в квадратных скобках, должна быть равна нулю во все моменты времени $t_1 < t < t_2$:

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = -kr,$$

т. е. движение системы должно описываться уравнением, получаемым из закона Ньютона (первый способ) и закона сохранения энергии (второй способ). Все три подхода оказываются эквивалентными.

2.3. Колебания маятника в поле силы тяжести

Приведем несколько более сложный пример применения принципа Гамильтона с подробным рассмотрением начальной стадии построения модели - описанием механической системы.

Пусть на неподвижном шарнире подвешен маятник - груз массы m, находящийся на конце стержня длины l (рис. 2.1). Шарнир считается идеально гладким в том смысле, что в нем не происходят потери энергии на трение. Неподвижность шарнира означает, что от него энергия в систему «стержень—груз» не поступает, такой шарнир неспособен совершить над ней какую-либо работу. Стержень считается невесомым и абсолютно жестким, т. е. его кинетическая и потенциальная энергии равны нулю, а груз не может совершать движений вдоль оси стержня. Груз имеет небольшие размеры по сравнению с длиной стержня (материальная точка), ускорение свободного падения g постоянно, сопротивлением воздуха пренебрегается, колебания

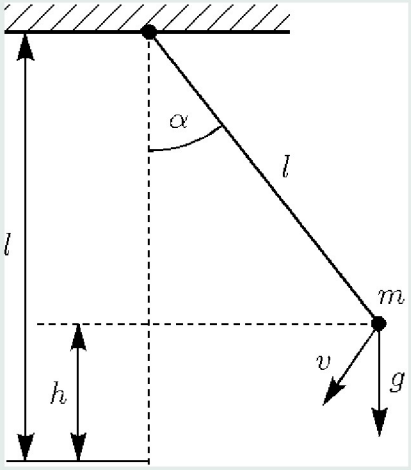


Рис. 2.1. Схема маятника

происходят в фиксированной вертикальной плоскости (для чего, очевидно, вектор начальной скорости груза должен лежать в этой плоскости).

После всех этих упрощающих предположений ясно, что положение маятника определяется лишь одной обобщенной координатой, в качестве которой выберем угол $\alpha(t)$ отклонения стержня от вертикали. Обобщенная скорость в данном случае — угловая скорость $d\alpha/dt$.Кинетическая энергия системы дается формулой

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(l\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}ml^2\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2,$$

а потенциальная энергия выражением

$$\Pi = mgh = -mg(l\cos\alpha - l),$$

где h — отклонение маятника от наинизшего положения по вертикали. В дальнейших выкладках величину mgl в Π опустим, так как потенциальная энергия определяется с точностью до постоянной.

Теперь нетрудно вычислить функцию Лагранжа (2.1) и действие (2.2):

$$L\left(\alpha, \frac{d\alpha}{dt}\right) = ml\left[\frac{1}{2}l\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + g\cos\alpha\right],$$

$$S[\alpha] = ml\int\limits_{t_1}^{t_2}\left[\frac{1}{2}l\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + g\cos\alpha\right]dt.$$

Находя действие на вариациях $\alpha + \varepsilon\varphi(t)$:

$$S[\alpha+\varepsilon\varphi(t)] = ml\int\limits_{t_1}^{t_2}\left[\frac{1}{2}l\left(\frac{d\alpha}{dt} + \varepsilon\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + g\cos(\alpha+\varepsilon\varphi)\right]dt =$$

$$= ml\int\limits_{t_1}^{t_2}\left[\frac{1}{2}l\left\{\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + 2\varepsilon\frac{d\alpha}{dt}\frac{d\varphi}{dt} + \varepsilon^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right\} + g\cos(\alpha+\varepsilon\varphi)\right]dt,$$

дифференцируя его по ε и полагая $\varepsilon = 0$, получаем

$$\frac{d}{d\varepsilon} S[r + \varepsilon\varphi]\Big|_{\varepsilon=0} = ml \int_{t_1}^{t_2} \left[l \frac{d\alpha}{dt} \frac{d\varphi}{dt} - \varphi g \sin\alpha \right] dt = 0.$$

Как и в предыдущих пунктах, интегрируем первый член выражения в скобках по частям и, учитывая, что $\varphi(t) = 0$ в моменты t_1, t_2, приходим к следующему уравнению:

$$ml \int_{t_1}^{t_2} \varphi \left[l \frac{d^2\alpha}{dt^2} + g \sin\alpha \right] dt = 0,$$

которое в силу произвольности $\varphi(t)$ может удовлетворяться лишь если для всех $t_1 < t < t_2$ справедливо

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin\alpha. \tag{2.4}$$

Заметим, что уравнение колебаний маятника (2.4) в отличие от уравнения движения шарика на пружине нелинейно. Это обстоятельство связано с более сложной геометрией системы «стержень—груз», а именно: ускорение, испытываемое грузом, не пропорционально координате, как в случае закона Гука, а является более сложной функцией отклонения от положения равновесия (угла α). Если же эти отклонения малы, то $\sin\alpha \approx \alpha$, и модель малых колебаний линейна:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{g}{l} \alpha.$$

Они описываются формулой

$$\alpha = A\sin\omega t + B\cos\omega t,$$

где $\omega = \sqrt{g/l}$ - собственная частота малых колебаний, а величины A, B определяются через $\alpha(t=0)$, $\frac{d\alpha}{dt}(t=0)$.

2.4. Заключение

Примеры использования принципа Гамильтона для построения моделей механических систем рисуют весьма четкую программу действий, в общем виде описанную в пункте 1 данной главы. Универсальность, строго формализованные последовательные процедуры, не зависящие от деталей конкретной системы, безусловно, весьма привлекательная черта вариационных принципов. В приведенных выше простых случаях модели могут быть относительно легко получены и иными способами. Однако для многих других, более сложных объектов, вариационные принципы оказываются фактически единственным методом построения моделей. Так, например, механические части большинства робототехнических устройств состоят из большого количества разнообразных элементов, связанных между собой различными способами. Их математические модели включают большое число уравнений, единообразно получаемых в основном с помощью вариационных принципов. Этот подход успешно применяется также и для систем иной природы (физических, химических, биологических), для которых формулируются соответствующие общие утверждения о характере их эволюции (поведения).

То обстоятельство, что принцип Гамильтона и другие подходы дают совпадающие модели, естественно, поскольку они описывают один и тот же исходный объект. Разумеется, такое совпадение гарантировано только при одних и тех же исходных предположениях об объекте. Если его идеализация (как один из первых этапов построения модели) проводится одинаково, то разные способы получения моделей должны давать тождественные результаты. Пусть, например, в системе «шарик—пружина» появляется дополнительная сила некоторого внешнего воздействия на шарик F_1. Тогда из второго закона Ньютона нетрудно получить уравнение движения шарика

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = -kr + F_1.$$

Применяя принцип Гамильтона к такой системе, необходимо учесть наличие этой силы. Очевидно, что определения обобщенной координаты, обобщенной скорости и кинетической энергии T остаются неизменными. В то же время выражение для потенциальной энергии существенно изменяется на величину, равную работе, произведенной этой силой над системой:

$$\Pi = k\frac{r^2}{2} + \int_0^r F_1 dr = k\frac{r^2}{2} + F_1 r.$$

Проводя аналогичные пункту 2 выкладки с соответствующим образом измененными величинами L и q, нетрудно убедиться в том, что принцип Гамильтона дает написанное выше уравнение с внешней силой F_1.

Глава 3

Применение аналогий. Универсальность математических моделей

Построим математические модели динамики скопления амеб и случайного марковского процесса. Поведение «живой» материи (амебы) и «нематериальной» величины (плотность вероятности) опишем теми же параболическими уравнениями, что и явления «мертвой» природы. Рассмотрим также аналогии между некоторыми механическими или физическими объектами и экономическими процессами.

3.1. Динамика скопления амеб

Амеба - одноклеточный организм размером около десяти микрон (10^{-3} см), обитающий в почве и передвигающийся в ней с помощью ложноножек, т. е. частей своего тела. Питаются амебы в основном бактериями, поглощая их вместе с землей (если пищи достаточно, то амебы размножаются делением на две части). Из наблюдений и эксперимента известно, что динамика развития их сообщества - достаточно большого количества амеб, находящихся на небольшом расстоянии друг от друга, - бывает достаточно сложной. Например, в зависимости от внешних условий амебы могут собираться в огромные (до сотен тысяч штук) скопления, которые начинают двигаться как единое целое, хотя индивидуальность каждой амебы сохраняется. Замечено, что это макроскопическое «организованное» движение происходит в направлении к более высокой концентрации некоторого химического вещества, вырабатываемого самими амебами. Математическая модель динамики скопления амеб базируется на следующих предположениях:

1)расстояние между амебами мало в сравнении с размерами их скоплений (сотни микрон), их можно рассматривать как «сплошную среду» и вводить концентрацию $N(x, y, z, t)$ - число амеб в единице объема;

2)процесс одномерный, т. е. концентрация амеб и другие величины являются функциями только координаты и времени t;

3)амебы не рождаются и не умирают в процессе макроскопического движения, т. е. характерное время движения (несколько часов) мало по отношению к характерным временам размножения и жизни амеб;

4)индивидуальное движение амеб при отсутствии стимулирующих внеш-

них воздействий (пища, тепло и т. д.) беспорядочно, хаотично; выделенных направлений нет и каждая амеба может с равной вероятностью двигаться как вправо, так и влево;

5)если в среде есть «притягивающее» химическое вещество, то к собственному неупорядоченному движению амеб добавляется их направленное движение в область с большей плотностью этого вещества.

Составим уравнение баланса амеб в элементе среды dx за время dt, используя «закон сохранения» их числа (предположение 3)). В этом случае общее число амеб в объеме dx (площадь поперечного сечения единична) изменяется лишь из-за разности потока амеб $W(x,t)$ на левой и правой границах элемента. Величина $W(x,t)$ понимается в обычном смысле: это число амеб, пересекающих единичную поверхность за единичное время. Искомое уравнение выглядит так:

$$[\bar{N}(x,t+dt) - \bar{N}(x,t)]dx = [\bar{W}(x,t) - \bar{W}(x,t+dt)]dt,$$

где $\bar{N}$, $\bar{W}$ - некоторые средние значения величин на малых промежутках dx, dt. Устремляя dx и dt к нулю, приходим к дифференциальному уравнению баланса числа амеб

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\frac{\partial W}{\partial x}.$$

Величина $W = W_c + W_d$ складывается из двух составляющих, W_c и W_d. Часть W_c общего потока формируется за счет хаотического движения амеб, и поэтому по аналогии с законом Фурье для процесса диффузии тепла его можно записать через градиент их концентрации:

$$W_c = -\mu\frac{\partial N}{\partial x},$$

где $\mu > 0$ - некоторый коэффициент, характеризующий рассматриваемую «среду». Эту формулу для W_c и величину μ нетрудно получить из более подробного анализа процесса на микроуровне, используя те же рассуждения, которые применялись для явлений передачи тепла. При получении выражения для составляющей W_d, описывающей направленный поток амеб, будем считать, что величина W_d тем больше, чем больше градиент плотности «притягивающего» вещества:

$$W_d = \eta N \frac{\partial \rho}{\partial x}.$$

Здесь $\eta > 0$ — некоторая постоянная, $\rho(x,t)$ — плотность вещества, а множитель N перед градиентом означает, что при заданном градиенте величины ρ составляющая потока W_d пропорциональна концентрации амеб в данной точке. Объединяя выражения для W_c, W_d и подставляя их в уравнение баланса, получаем

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial N}{\partial x} - \eta N \frac{\partial \rho}{\partial x}\right). \tag{3.1}$$

В уравнении (3.1) две неизвестных функции — N и ρ. Поэтому необходимо получить, пользуясь законом сохранения вещества, уравнение баланса для величины ρ. При этом следует учесть, что скорость выделения химического вещества пропорциональна концентрации амеб. Будем учитывать также распад вещества, скорость которого, естественно, пропорциональна его концентрации (аналогично процессу радиоактивного распада). Таким образом, в единицу времени в единичном объеме появляется и исчезает количе-

ство вещества, равное

$$f = \alpha N - \beta\rho,$$

где $\alpha > 0$, $\beta > 0$ — константы, характеризующие соответственно скорость его выделения амебами и скорость распада (в этом состоит отличие модели для вещества от модели для амеб, в которой они не умирают и не рождаются). Изменение плотности вещества в элементарном объеме среды происходит также и вследствие разности его потоков на левой и правой границах элемента. Оно диффундирует в среде из мест с большей концентрацией в места с меньшей концентрацией подобно тому, как тепло распространяется от более нагретых участков теплопроводной среды к менее нагретым. Это движение создает, согласно *закону Фика*, поток W_ρ, равный

$$W_\rho = -D\frac{\partial\rho}{\partial x},$$

где $D > 0$ — коэффициент диффузии (вывод закона Фика аналогичен выводу закона Фурье). Итак, уравнение баланса вещества имеет вид

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\frac{\partial W_\rho}{\partial x} + f,$$

или, учитывая выражения для W_ρ и f,

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = D\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2} + \alpha N - \beta\rho. \tag{3.2}$$

Уравнения (3.1), (3.2) вместе со входными данными μ, η, α, β, D служат моделью динамики скопления амеб при сделанных выше предположениях.

Для однозначного определения решения, т. е. функций $N(x,t)$, $\rho(x,t)$, необходимо, как обычно, знать соответствующие начальные и граничные условия. Наиболее просто они выглядят в случае задачи Коши, когда процесс рассматривается в неограниченном пространстве $-\infty < \ < \infty$; тогда достаточно задать в момент $t = 0$ начальную концентрацию амеб $N(x,0) = N_0(x)$ и плотность вещества $\rho(x,0) = \rho_0(x)$.

Уравнения (3.1), (3.2) взаимосвязаны: в первое из них входит величина ρ, во втором фигурирует величина N. Система (3.1), (3.2) нелинейна из-за наличия члена $\eta N \partial\rho/\partial x$ в скобках, стоящих в правой части (3.1). Рассматриваемые соответственно относительно концентраций амеб N и плотности вещества ρ уравнения (3.1) и (3.2), как нетрудно видеть, принадлежат к параболическому типу.

Если амебы не выделяют «притягивающего» вещества и $\rho(x,t) = 0$, то (3.1) переходит в уравнение теплопроводности (или диффузии)

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 N}{\partial x^2},$$

что легко объяснить, поскольку в потоке W остается лишь составляющая W_c, соответствующая беспорядочному, ненаправленному движению амеб. Когда амебы по каким-то причинам перестают выделять вещество, коэффициент α в (3.2) становится равным нулю, и с этого момента уравнение (3.2) принимает вид (диффузия с распадом)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} - \beta \rho \tag{3.3}$$

и сводится простой заменой также к уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Из-за нелинейности системы (3.1), (3.2) сконструировать ее общее решение нельзя, и поэтому определение пространственно-временной динамики скопления амеб — весьма непростая задача. Однако она значительно облегчается, если изучаются малые отклонения от постоянного во времени и по пространству решения $N \equiv N_0$, $\rho \equiv \rho_0$, т. е. когда нелинейная задача становится линейной. Такое решение существует лишь при соотношении

$$\alpha N_0 = \beta \rho_0,$$

означающем, что выделение вещества и его распад уравновешивают друг друга.

Линеаризованная в окрестности постоянного решения система (3.1), (3.2) (ср. с уравнением акустических колебаний) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{N}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial \tilde{N}}{\partial x} - \eta N_0 \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial x}\right), \\ \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} &= D\frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial x^2} + \alpha\tilde{N} - \beta\tilde{\rho}, \end{aligned} \tag{3.4}$$

где $\tilde{N}$ и $\tilde{\rho}$ — малые возмущения ($\tilde{N} << N_0$, $\tilde{\rho} << \rho_0$). Ее общее решение для неограниченного пространства $-\infty < x < \infty$ (в этом случае нет необходимости удовлетворять граничным условиям) можно построить в виде суммы

частных решений (гармоник)

$$\tilde{N} = C_1 \sin kx e^{\gamma t}, \quad \tilde{\rho} = C_2 \sin kx e^{\gamma t},$$

где $k > 0$ — волновое число, C_1, C_2 — константы. Для частных решений должны выполняться соотношения

$$\begin{aligned} C_1(\gamma + \mu k^2) &= C_2 \eta N_0 k^2, \\ C_2(\gamma + \beta + Dk^2) &= C_1 \alpha, \end{aligned} \tag{3.5}$$

связывающие длину волны гармоники $\lambda = 2\pi/k$ с величиной γ - ее инкрементом (или декрементом), характеризующим нарастание или затухание возмущения со временем. Исключая C_1 и C_2 из (3.5), получаем относительно γ квадратное уравнение

$$\gamma^2 + b\gamma + c = 0, \tag{3.6}$$

где $b = \beta + k^2(\mu + D)$, $c = \mu k^2(\beta + Dk^2) - \eta\alpha N_0 k^2$. Оба корня уравнения (3.6) отрицательны тогда и только тогда, когда $c > 0$, т. е. при выполнении неравенства

$$\mu(\beta + Dk^2) > \eta\alpha N_0. \tag{3.7}$$

Если имеет место (3.7), то для любых значений k амплитуда возмущений с любой длиной волны уменьшается с течением времени, и постоянное решение устойчиво. Неравенство (3.7) заведомо выполнено при

$$\mu\beta > \eta\alpha N_0 \text{ (или } \mu > \eta\rho_0),$$

т. е. для фиксированных параметров задачи при достаточно малых концентрациях амеб (и плотностях «притягивающего» вещества). В противном случае возможна неустойчивость постоянного решения (если в начальном спектре возмущений найдутся длинноволновые гармоники с небольшими значениями k, растущие со временем), порождающая более сложную картину эволюции скопления амеб. Разумеется, линеаризованная модель не дает исчерпывающей картины процесса, но из нее можно извлечь ряд сведений, полезных для более полного исследования.

3.2. Случайный марковский процесс

Типичным примером подобного процесса служит движение помещенной в жидкость маленькой твердой частицы, совершающей хаотические перемещения под действием беспорядочных столкновений с молекулами жидкости (броуновское движение). Ее положение в любой момент времени $t \geqslant t_0$ задается координатами x, y, z трехмерного пространства $\mathbb{R}^3$. В дальнейшем для упрощения выкладок будем рассматривать одномерное движение, т. е. случайные блуждания броуновской частицы вдоль оси x, $x \in \mathbb{R}^1$.

Случайный процесс называется марковским, если по положению точки x в момент времени t однозначно определяется вероятность ее нахождения в произвольный момент $t' > t$ в некоторой части (в любом измеримом подмножестве E) пространства $\mathbb{R}^1$. Другими словами, это процесс без последействия, когда события, случившиеся в промежутке времени между t и t', не влияют на положение точки в момент t'.

Марковский процесс полностью характеризуется функцией

$$p(t, x, t', x'),\ x \in \mathbb{R}^1,$$

называемой *плотностью вероятности* в точке x', зная которую, нетрудно вычислить вероятность

$$p(t, x, t', E) = \int\limits_{E(x')} p(x, t, x', t')dx'$$

нахождения частицы в некоторой окрестности $E(x')$ точки x' в момент времени t'.

Очевидно, что для функции p выполнено условие нормировки

$$\int\limits_{\mathbb{R}^1} p(x, t, t', x')dx' = 1, \tag{3.8}$$

т. е. в любой момент частица обязательно находится в какой-либо точке пространства $\mathbb{R}^1$.

При построении модели марковского процесса существенным образом используется предположение о его *сильной непрерывности.* Считается, что частица за малые промежутки времени Δt может получить заметные приращения координаты $\Delta x \geqslant \delta$ лишь с малой веро- ятностью. Это значит, что для любого $\delta > 0$

$$\int\limits_{|x'-x|\geqslant\delta} p(t - \triangle t, x, t, x')dx' = o(\Delta t),$$

или в эквивалентной записи,

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int\limits_{|x'-x|\geqslant\delta} p(t-\Delta t,x,t,x')dx'=0. \tag{3.9}$$

Предполагается также, что для любых $\delta>0$ существуют равномерные по x пределы

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int\limits_{|x'-x|<\delta} (x'-x)p(t-\Delta t,x,t,x')dx'=b, \tag{3.10}$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int\limits_{|x'-x|<\delta} (x'-x)^2p(t-\Delta t,x,t,x')dx'=2a>0. \tag{3.11}$$

Эти предположения имеют следующую интерпретацию: вероятность для частицы находиться в момент t в интервале $|x'-x|<\delta$ пропорциональна Δt (уменьшается с уменьшением промежутка времени, прошедшего от начального момента $t-\Delta t$, что естественно) и обратно пропорциональна некоторой «средней» величине размера интервала $|x'-x|$ (и его квадрату, что также естественно). Величины a и b зависят, вообще говоря, от точки x и момента t, т. е. $a=a(x,t)$, $b=b(x,t)$, но для простоты здесь рассматривается частный случай, когда a и b — постоянные.

Наконец, последнее используемое ниже предположение состоит в том, что для любых t, x, t', x' существуют непрерывные частные производные

функции p по x

$$\frac{\partial p}{\partial x},\ \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}. \tag{3.12}$$

Основное свойство рассматриваемого процесса выражается *тождеством Маркова*

$$p(t,x,t',x') = \int\limits_{\mathbb{R}^1} p(x,t,\bar{t},\bar{x})p(\bar{t},\bar{x},t',x')d\bar{x}, \tag{3.13}$$

где $t < \bar{t} < t'$ — некоторый момент времени в промежутке от t до t', а $\bar{x}$ — координата частицы в момент $\bar{t}$, $t < \bar{t} < t'$, некоторая промежуточная точка при движении от точки x до точки x'. Смысл тождества (3.13) проясняется при рассмотрении перехода из точки x в точку x' как последовательности двух переходов — сначала из точки x в точку $\bar{}$, а затем из точки $\bar{x}$ в точку x' (на рис. 3.1 показаны возможные комбинации этих переходов, причем промежуточные перемещения изображены штриховыми линиями, а основной переход — сплошными). Вероятность события, состоящего из двух последовательных независимых событий, равна произведению вероятностей каждого события, поэтому под интегралом в (3.13) стоит произведение соответствующих величин. Интеграл берется по всем возможным промежуточным точкам $\bar{x} \in \mathbb{R}^1$.

Для рассматриваемого процесса тождество Маркова играет роль своеобразного «фундаментального закона», связывая некоторым образом значения функции p в точках t, x и t', x'. С его помощью вычислим сначала разность величин p в моменты $t - \Delta t$ и t:

$$p(t-\Delta t,x,t',x') - p(t,x,t',x') =$$

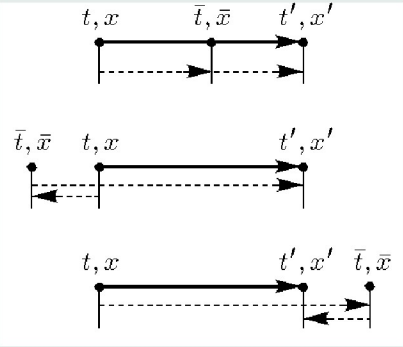


Рис. 3.1. Комбинации переходов

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^1} p(t-\Delta t, x, t, \bar{x}) p(t, \bar{x}, t', x') d\bar{x} - p(t, x, t', x') \int\limits_{\mathbb{R}^1} p(t-\Delta t, x, t, \bar{x}) d\bar{x}.$$

Первому члену в левой части этого равенства отвечает (см. (3.13)) первый интеграл в его правой части, а второму — тождественный ему член, умноженный на интеграл, который согласно условию нормировки (3.8) равен единице. Множитель $p(t, x, t', x')$ не зависит от $\bar{x}$, и поэтому, внося его под знак интеграла, перепишем равенство в виде

$$p(t-\Delta t, x, t', x') - p(t, x, t', x') =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^1} [p(t, \bar{x}, t', x') - p(t, x, t', x')] p(t-\Delta t, x, t, \bar{x}) d\bar{x}.$$

Поделим теперь в этом равенстве обе его части на Δt и разобъем интеграл на два - по области $|\bar{x}-x| \geqslant \delta$ и $|\bar{x}-x| < \delta$:

$$\frac{p(t-\Delta t,x,t',x') - p(t,x,t',x')}{\Delta t} = I_1 + I_2, \tag{3.14}$$

$$I_1 = \frac{1}{\Delta t} \int\limits_{|x'-x|\geqslant\delta} [p(t,\bar{x},t',x') - p(t,x,t',x')]p(t-\Delta t,x,t,\bar{x})d\bar{x},$$

$$I_2 = \frac{1}{\Delta t} \int\limits_{|x'-x|<\delta} [p(t,\bar{x},t',x') - p(t,x,t',x')]p(t-\Delta t,x,t,\bar{x})d\bar{x}.$$

Интеграл I_1 в силу свойства сильной непрерывности (3.9) стремится к нулю при $\Delta t \to 0$ (первый сомножитель в подынтегральном выражении не зависит от Δt и не влияет на поведение I_1 при $\Delta t \to 0$).

Интеграл I_2 преобразуем, раскладывая с учетом (3.12) первый сомножитель по степеням $(\bar{x}-x)$:

$$I_2 = \frac{1}{\Delta t} \int\limits_{|x'-x|<\delta} \frac{\partial p(t,x,t',x')}{\partial x}(\bar{x}-x)p(t-\Delta t,x,t,\bar{x})d\bar{x} +$$

$$+\frac{1}{\Delta t} \int\limits_{|x'-x|<\delta} \frac{1}{2}\frac{\partial^2 p(t,x,t',x')}{\partial x^2}(\bar{x}-x)^2 p(t-\Delta t,x,t,\bar{x})d\bar{x} +$$

$$+\frac{1}{\Delta t} \int\limits_{|x'-x|<\delta} o[(\bar{x}-x)^2]\frac{1}{2}\frac{\partial^2 p(t,x,t',x')}{\partial x^2} p(t-\Delta t,x,t,\bar{x})d\bar{x}.$$

Устремим в этом равенстве Δt к нулю, замечая, что частные производные функции p, стоящие под знаком интеграла, не зависят от x. Вынося их из-под интеграла, для первых двух членов получим, в силу предположений (3.10), (3.11), что их пределы соответственно равны

$$b\frac{\partial p(t,x,t',x')}{\partial x},\ a\frac{\partial^2 p(t,x,t',x')}{\partial x^2},$$

а третье слагаемое представим в виде

$$\bar{\varepsilon}(\bar{x}-x)\frac{1}{2}\frac{\partial^2 p(t,x,t',x')}{\partial x^2}\frac{1}{\Delta t}\int\limits_{|x'-x|<\delta}(\bar{x}-x)^2 p(t-\Delta t,x,t,\bar{x})d\bar{x}$$

где $\bar{\varepsilon}(\bar{x}-x)$ - среднее значение функции $\varepsilon(\bar{x}-x)$, причем по определению величины $o[(\bar{x}-x)^2]$ имеем $\bar{\varepsilon}(\bar{x}-x)\to 0$ при $\delta\to 0$. Осуществим в последнем выражении предельный переход сначала при $\delta\to 0$. Этот предел, очевидно, равен нулю при любых $\Delta t>0$. Поэтому его предел при $\Delta t\to 0$ также равен нулю. Наконец, предел левой части (3.14) при $\Delta t\to 0$ равен производной функции p по времени. Суммируя эти результаты, получаем из (3.14) *уравнение Колмогорова* для плотности вероятности, справедливое для всех $t>t_0$, $-\infty<x<\infty$:

$$\frac{\partial p(t,x,t',x')}{\partial t}=a\frac{\partial^2 p(t,x,t',x')}{\partial x^2}+b\frac{\partial p(t,x,t',x')}{\partial x}. \qquad (3.15)$$

Уравнение (3.15) — линейное параболическое уравнение. Этими же свойствами обладают и его обобщения. Например, в случае, когда величины b и

a в (3.10), (3.11) зависят от t, x, аналог уравнения (3.15) имеет вид

$$\frac{\partial p}{\partial t} = a(t,x)\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + b(t,x)\frac{\partial p}{\partial x}. \tag{3.16}$$

Если же точка x принадлежит n-мерному пространству, т. е. $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, то для функции p справедливо следующее обобщение (3.15), (3.16):

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)\frac{\partial^2 p}{\partial x_i\,\partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(t,x)\frac{\partial p}{\partial x_i}, \tag{3.17}$$

где $b_i(t,x)$ и $a_{ij}(t,x)$ вычисляются по формулам (3.10), (3.11), но в (3.10) вместо сомножителя $(x' - x)$ берется величина $(x' - x)_i$, а в (3.11) вместо $(x' - x)^2$ фигурирует выражение $(x' - x)_i(x' - x)_j$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Заметим, что (3.17) отнюдь не формальное обобщение (3.15), (3.16). Случайные марковские процессы могут протекать не только в реальном физическом пространстве (броуновское движение), но и в так называемом фазовом пространстве. Они характерны для многих технических и иных систем, состояние которых описывается совокупностью фазовых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, число которых может быть значительно больше трех.

Простейший вариант уравнения Колмогорова получается из (3.15) при $b = 0$:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = a\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}, \tag{3.18}$$

и представляет собой *уравнение теплопроводности* (или диффузии).

Однако между математическими моделями теплопередачи и случайного марковского процесса есть существенная разница. При выводе уравнения

(3.15) для функции $p(t,x)$ использовались (в отличие от вывода уравнения теплопроводности) условия сильной непрерывности (3.9) - (3.11). Это приводит к тому, что функция $p(t,x)$ не может быть любым решением уравнения Колмогорова. Она оказывается так называемым *фундаментальным решением уравнений* (3.15)-(3.18).

Проще всего пояснить это свойство функции $p(t,x)$ в случае простейшего уравнения (3.18). Пусть функция $u(t,x)$ - решение уравнения (3.18), определенное при $t > t_0$, $-\infty < x < \infty$ и удовлетворяющее заданному начальному условию

$$u(t,x) \to u_0(x) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad t \to t_0. \tag{3.19}$$

Тогда, если $p(x,t,t',x')$ - фундаментальное решение (3.18), то функция $u(t,x)$ находится по формуле

$$u(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^1} p(t,x,t',x')u_0(x')dx'. \tag{3.20}$$

То, что $u(t,x)$, задаваемая в виде (3.20), - решение (3.18), нетрудно установить дифференцированием. Свойство (3.19) доказывается с помощью разбиения интеграла в (3.20):

$$u(t,x) = \int\limits_{|x'-x|<\delta} p(t,x,t',x')u_0(x')dx' + \int\limits_{|x'-x|\geqslant\delta} p(t,x,t',x')u_0(x')dx'$$

При $t = t0$ точка имеет координату x, и поэтому по свойству сильной непрерывности вероятность ее нахождения при $t' \to t \to t_0$ в области $|x'-x| \geqslant \delta$

нулевая, т. е. $p(t,x,t',x') \to 0$ при $t' \to t_0$. Следовательно, из последней формулы получаем

$$\lim_{t'\to t_0} \int\limits_{\mathbb{R}^1} p(t,x,t',x')u_0(x')dx' = \lim_{t'\to t_0} \int\limits_{|x'-x|<\delta} p(t,x,t',x')u_0(x')dx'.$$

Используя условие нормировки (3.8) при $t' \to t_0$, $x' \to x$ и учитывая независимость левого предела в последней формуле от δ, получаем

$$\lim_{t'\to t_0} \int\limits_{\mathbb{R}^1} p(t,x,t',x')u_0(x')dx' = u_0(x),$$

т. е. формулу (3.19).

Тот факт, что функция $p(t,x)$ не любое, а именно фундаментальное решение уравнения Колмогорова (для уравнений (3.15)—(3.17) доказательство аналогично), не является дефектом рассматриваемой модели, а отражает естественное свойство случайного марковского процесса. Действительно, в начальный момент $t = t_0$ блуждающая точка имеет некоторую координату x_0, и поэтому $p(x,t_0) = 0$ при $x \neq x_0$. В то же время из условия (3.8) при $t' = t = t_0$ следует, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^1} p(x,t_0)dx = 1,$$

т. е. начальнми данными для уравнения (3.18) (и уравнений (3.15)—(3.17)) служит δ-функция. Решения задачи Коши для линейных параболических

уравнений с таким начальным условием являются их фундаментальными решениями. Простейший пример - функция мгновенного точечного источника тепла для уравнения теплопроводности, даваемая простой формулой и имеющая те же свойства, что и функция $p(t,x)$. Для более общих уравнений (3.15)-(3.17) не существует столь простых представлений их фундаментальных решений. Однако то обстоятельство, что величина $p(t,x)$ подчиняется уравнению Колмогорова и является его фундаментальным решением, существенно используется при исследовании объектов, в которых протекают случайные марковские процессы, в частности в задачах управления такими объектами.

Итак, параболические уравнения — один из примеров универсальности математических моделей (табл. 3.2.1). Они описывают широкий круг процессов совершенно различной природы. Отметим, что параболические уравнения часто связываются с хаотическими неупорядоченными явлениями (теплопередача, диффузия и т. д.). Однако они применимы и ко многим процессам, которые рассматриваются как детерминированные (движение грунтовых вод, фильтрация газа в пористой среде и т. д.).

Универсальность математических моделей — отражение единства окружающего нас мира и способов его описания. Поэтому методы и результаты, разработанные и накопленные при математическом моделировании одних явлений, относительно легко, «по аналогии», могут быть перенесены на широкие классы совсем других процессов.

Таблица 3.2.1. Универсальность математических моделей. Параболические уравнения

Объект (процесс)	Основные положения и законы
Движение грунтовых вод	Сохранение массы, закон Дарси
Теплопередача; диффузия вещества	Сохранение энергии, закон Фурье; сохранение массы, закон Фика
Движение скопления амеб	Сохранение числа амеб, хаотичность движения амеб в отсутствие "притягивающего"вещества
Случайный марковский процесс	Тождество Маркова, сильная непрерывность процесса
Динамика распределения власти в иерархии	Законопослушность, постулат о механизмах перераспределения власти в иерархии

3.3. Примеры аналогий между объектами из разных сфер

Особое значение «метод аналогий» имеет при математическом моделировании трудноформализуемых объектов, для которых фундаментальные законы, вариационные принципы и иные общие и математически строгие утверждения либо неизвестны, либо вообще не существуют. К таким объектам относятся, например, системы с заметным вмешательством людей, в

частности экономические системы.

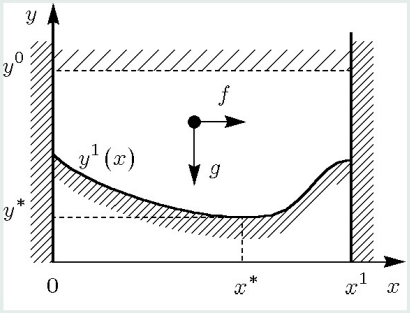


Рис. 3.2. Точка в потенциальном поле

Одна из важных механико-экономических аналогий - аналогия между равновесием материальной частицы в потенциальном поле внешних сил и выбором оптимального плана производства. Рассмотрим ради простоты ее частный случай. Пусть единичная масса (точка на рис. 3.2) находится в поле силы тяжести и может занимать, вообще говоря, любое положение в области пространства, ограниченного снизу твердой идеальной поверхностью. Уравнение поверхности дается зависимостью $y^1(x) \geqslant 0$, где x, y - соответственно горизонтальная и вертикальная координаты частицы, $y^1(x)$ - гладкая функция. Очевидно, что величина y - расстояние частицы от оси абсцисс - подчиняется неравенству

$$y \geqslant y^1(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant x^1. \tag{3.21}$$

Поле силы тяжести потенциально, т. е. существует функция (потенциал) $P(x, y)$ такая, что компоненты ее градиента определяют внешнюю силу, действующую на материальную частицу в данной точке поля. В рассматриваемой ситуации

$$gradP = (0, -g),$$

где g - ускорение свободного падения (горизонтальная компонента, естественно, равна нулю). Следовательно, потенциал дается формулой

$$P = -gy, \tag{3.22}$$

в которой опущена несущественная аддитивная постоянная.

Изменение потенциала при перемещениях частицы в поле силы тяжести равно работе A, совершаемой этой силой, и определяется только начальным и конечным положением частицы (в данном случае только координатой y):

$$A = \int_{x_1,y_1}^{x_2,y_2} dP = P(x_2, y_2) - P(x_1, y_1) = P(y_2) - P(y_1). \tag{3.23}$$

Точка $x*$, $y*$ называется *положением равновесия*, если частица, помещенная в нее и меющая нулевую скорость, остается в ней любое время (при наложенных связях (3.21) и внешней силе $grad\, P(x*, y*)$). Потенциал в точке равновесия достигает своего экстремального значения. Это свойство хорошо иллюстрирует рис. 3.2, где равновесными являются точки минимума функции $y_1(x)$ (в них сила тяжести уравновешивается реакцией опоры). Любое *виртуальное* (не противоречащее связям (3.21)) малое смещение частицы

из этих точек приведет к тому, что над нею будет совершена, как видно из (3.23), отрицательная работа, и потенциал уменьшится (если перемещение полностью или частично осуществляется по поверхностям $y^1(x)$, $x = 0$, $x = x^1$, то, поскольку они считаются идеальными и силы трения отсутствуют, а их реакция перпендикулярна перемещению, это не сказывается на величине работы). Во всех других точках области $y \geqslant y^1(x)$, $0 \leqslant x \leqslant x^1$ потенциал (3.22) не достигает своего максимального значения.

Итак, поиск устойчивого положения равновесия сводится к решению задачи

$$P(x, y) \to \max \quad \text{при} \quad y \geqslant y^1(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant x^1. \tag{3.24}$$

Закон покоя Мопертюи (3.24) аналогичным образом формулируется и для общих механических систем, точки равновесия которых находятся не столь просто, как в приведенном случае. Например, если на частицу действуют, кроме силы тяжести, другие потенциальные силы, то точки равновесия отнюдь не обязаны совпадать с точками минимумов функции $y^1(x)$.

В экономической интерпретации задача (3.24) называется *задачей нелинейного программирования* и часто возникает при планировании производства.

Пусть некоторое предприятие выпускает продукцию (кирпичи), объем которой обозначим x, $0 \leqslant x \leqslant x^1$. Для производства предприятию необходимо затратить некоторый ресурс (глину), остаток которого после выполнения плана обозначим y (начальный ресурс равен y^0 и считается независящим от величины плана x, $y^0 \leqslant y \leqslant 0$). Известно, что производство происходит при

некоторых ресурсных ограничениях сверху, т. е.

$$y^0 \leqslant y \leqslant y^1(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant x^1, \tag{3.25}$$

где $y^1(x)$ - минимальное количество неиспользованных ресурсов, которое предприятие по технологическим, финансовым или иным причинам обязано иметь в своем распоряжении после выполнения плана x ($y^1(x)$ считается заданной гладкой функцией x).

В упрощенной постановке прибыль $P(x, y)$ равна разности между стоимостью выпущенной продукции fx и стоимостью затраченных ресурсов $g(y - y^0)$:

$$P(x, y) = fx + g(y^0 - y), \tag{3.26}$$

где f, g - цена единицы продукции и ресурса соответственно (остальные затраты считаются несущественными).

Задача планирования производства состоит в том, чтобы выбрать план $x*$, выполнение которого дает максимальную прибыль (3.26) при ресурсных ограничениях (3.25):

$$P(x, y) \to \max \quad \text{при} \quad y^0 \leqslant y \leqslant y^1(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant x^1. \tag{3.27}$$

Формулировки, подобные (3.27), справедливы для весьма общих задач планирования.

Для получения полной аналогии несколько усложним задачу о равновесии материальной частицы. Введем дополнительно к силе тяжести потенциальную внешнюю силу (см. рис. 3.2), действующую на частицу в направлении оси x и равную по величине f. Например, для заряженной частицы эта

сила появляется при наличии соответствующего электрического поля. Тогда потенциал есть

$$P(x, y) = fx + gy,$$

что с точностью до несущественной аддитивной постоянной совпадает с (3.26). Завершает аналогию введение идеальной твердой поверхности $y = y^0$, ограничивающей движение материальной частицы сверху; тогда (3.21) примет вид (3.25) (с учетом того, что затраты всегда считаются отрицательными).

Итак, задачи (3.24) и (3.27) полностью аналогичны и имеют совпадающие решения $x*$, $y*$. Заметим, что механико-экономические аналогии имеют место не только для общих формулировок проблем, но и для многих содержательных конкретных понятий (сила - предельная прибыль, реакция связей - предельные издержки и т. д.). На плане $x*$, $y*$ (*оптимальном плане*) максимального значения достигает не только экономический аналог потенциала - прибыль, но также еще одна величина, которой ставится в соответствие уже не механическое, а термодинамическое понятие, - энтропия. Известно, что предоставленная самой себе термодинамическая система, например, газ в изолированном сосуде, с наибольшей вероятностью переходит в состояние с наименьшей упорядоченностью параметров, характеризующих составляющие ее частицы (атомы, молекулы). В этом состоянии система находится в равновесии, ее параметры одни и те же во всех ее точках. Поэтому не существует какого-либо способа различить (упорядочить) ее части друг относительно друга: достигается наибольший (в сравнении с другими возможными состояниями) беспорядок — «хаос». Мерой этого беспорядка служит энтропия, являющаяся функцией состояния системы и принимающая

максимальное значение, когда система находится в равновесии.

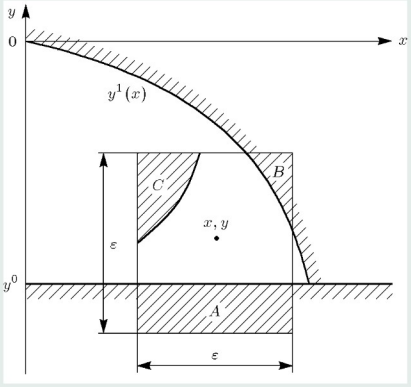


Рис. 3.3. Области выбора планов

Для некоторого произвольного неоптимального плана $(x, y) \neq (x*, y*)$ из задачи (3.27) рассмотрим ε-окрестность всех соседних планов $(\bar{x}, \bar{y})$ (т. е. выполнено $|\bar{x}-x| < \varepsilon$, $|\bar{y}-y| < \varepsilon$). Поскольку план$(x, y)$ неоптимален, то в его ε-окрестности всегда существует непустое множество планов, которые: либо не удовлетворяют ресурсным ограничениям (области A и B на рис. 3.3); либо не имеют преимущества по прибыли в сравнении с планом (x,y) (область C на рис. 3.3); либо обладают обоими этими свойствами. Это означает, что в окрестности точки (x,y) можно провести частичное упорядочение планов друг относительно друга, так как известна процедура предпочтения одних планов другим. Объем множества этих «плохих» планов V зависит от x, y,

ε и, очевидно, всегда меньше обема ε-окрестности:

$$V(x, y, \varepsilon) < V_\varepsilon = \varepsilon^2.$$

Рассмотрим теперь ε-окрестность оптимального плана $(x*,\ y*)$. В отличие от случая плана $(x,\ y)$ все планы из этой области менее предпочтительны по отношению к $(x*,\ y*)$ (либо по ресурсным ограничениям, либо по величине прибыли, имеющей максимум в точке $(x*,\ y*)$). В этом случае объем «плохих» планов равен объему всей ε-окрестности:

$$V(x*, y*, \varepsilon) = V_\varepsilon.$$

Введем функцию

$$E(x, y, \varepsilon) = \frac{V(x, y, \varepsilon)}{V_\varepsilon},$$

которая служит мерой упорядоченности различных состоянии данной системы. Чем «ближе» точка $(x,\ y)$ к «равновесному» оптимальному состоянию $(x*,\ y*)$, тем больше значение функции E. Очевидно, что $E < 1$ при всех $(x, y) \neq (x*, y*)$ и достигает своего максимального значения $E = 1$ в точке $(x*, y*)$. Она и является экономическим аналогом энтропии в рассматриваемой задаче.

Так же, как и механические аналогии, термодинамические аналогии справедливы для многих весьма общих экономических систем и широко применяются при их исследовании.

Глава 4

Иерархический подход к получению моделей

Для движения шарика, соединенного с пружиной, построим иерархическую цепочку моделей по принципу «снизу вверх». Последовательно введем новые усложняющие факторы и дадим их математическое описание.

4.1. Различные варианты действия заданной внешней силы

Пусть на шарик действует известная внешняя сила $F(r,t)$, зависящая от времени и положения шарика. Она может порождаться полем тяготения, иметь электрическое или магнитное происхождение и т. д. Из второго закона Ньютона сразу получаем, что по сравнению с базовой моделью колебаний

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = -kr \tag{4.1}$$

в правой части уравнения (4.1) появляется дополнительный член:

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = -kr + F(r,t). \tag{4.2}$$

Простейший вариант уравнения (4.2) отвечает постоянной силе $F(r,t) = F_0$. Проведя замену $\bar{r} = r - F_0/k$, получаем для $\bar{r}$

$$m\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = -k\bar{r},$$

т. е. постоянная сила не вносит изменений в процесс колебаний за тем исключением, что координата нейтральной точки, в которой сила, действующая на шарик, равна нулю, сдвигается на величину F_0/k.

Гораздо более сложная картина движения может порождаться зависящей от времени силой $F(t)$. Рассмотрим для определенности периодическую

внешнюю силу $F(t) = F_0 \sin \omega_1 t$:

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = -kr + F(t) = -kr + F_0 \sin \omega_1 t. \tag{4.3}$$

Решение линейного уравнения (4.3) находится как сумма общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения (4.3), которое будем искать в виде

$$r_1(t) = C \sin \omega_1 t. \tag{4.4}$$

Подстановкой этого выражения в (4.3) находим

$$C = \frac{F_0}{k - m\omega_1^2} = \frac{F_0}{m(\omega^2 - \omega_1^2)},$$

где $\omega = \sqrt{k/m}$ частота колебаний пружины в отсутствие внешних сил, или собственная частота системы. В итоге для общего решения (4.3) имеем

$$r(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t + \frac{F_0}{m(\omega^2 - \omega_1^2)} \sin \omega_1 t.$$

Итак, внешняя сила $F(t)$ приводит не только к появлению в системе дополнительных колебаний с частотой ω_1, но и к возникновению резонанса — неограниченному росту амплитуды колебаний при $\omega_1 \to \omega$.

4.2. Движение точки крепления, пружина на вращающемся стержне

Резонанс в системе может быть вызван также благодаря действию сил инерционного происхождения. Пусть точка крепления пружины движется по заданному закону $r_0(t) = f(t)$. Тогда в системе координат, связанной с этой точкой, на шарик действует, помимо натяжения пружины, сила инерции, равная $ma(t)$, где $a(t)$ — ускорение, обусловленное движением системы координат, $a(t) = d^2f/dt^2$. В этой системе координат движение шарика описывается уравнением

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = -kr + F(t),$$

где $F(t) = -ma(t) = -md^2f/dt^2$ — некоторая заданная функция времени. Как и в предыдущем случае, при соответствующем периодическом движении точки крепления в системе возникает резонанс.

При более сложной геометрии силы инерции системы могут зависеть не только от времени t, но и от координаты r. Если пружина надета на стержень, движущийся с угловой скоростью $\omega(t)$, то центробежная сила инерции равна $F = mv^2(t)/R = m\omega^2(t)R$, где $v(t) = \omega(t)R$, $R = R_0 + r$, R_0 — длина пружины в ненагруженном состоянии, r — отклонение шарика от нейтрального положения, $r > -R_0$. Уравнение движения шарика принимает вид

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = -kr + F(r,t), \tag{4.5}$$

где $F(r,t) = m\omega^2(t)(R_0 + r)$, или

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = -(k - m\omega^2(t))r + m\omega^2(t)R_0,$$

причем, очевидно, при $r \ll R_0$ линейное уравнение (4.5), общее решение которого здесь не выписывается в силу его громоздкости, переходит в уравнение вида (4.3) с $F(t) = -m\omega^2(t)R_0$.

Однако в данном случае резонанс невозможен, так как внешняя сила всегда направлена в одну сторону и не в состоянии раскачать систему.

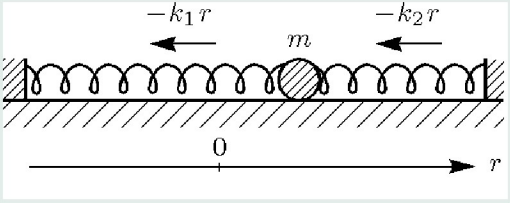


Рис. 4.1. Шарик на двух пружинах

Заметим, что усложненная по сравнению с исходным случаем геометрия отнюдь не всегда означает более сложное поведение объекта. Рассмотрим, например, шарик, прикрепленный к двум пружинам с жесткостью k_1 и k_2 (рис. 4.1). Начало координат поместим в точку, где силы, действующие на шарик со стороны обеих пружин, уравновешивают друг друга (при этом должно соблюдаться некоторое условие на параметры системы, чтобы шарик не мог упираться в одну из точек крепления). По закону Гука при отклонении r на шарик со стороны левой пружины действует сила $-k_1 r$, а со

стороны правой — сила $-k_2 r$ (обе силы направлены в одну сторону, так как при растяжении первой пружины вторая пружина, наоборот, сжимается). В итоге приходим к такому же уравнению, как и в случае одной пружины,

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = -k_1 r - k_2 r = -kr,$$

но с увеличенной жесткостью $k = k_1 + k_2$, складывающейся из жесткостей обеих пружин.

4.3. Учет сил трения

В рассматриваемой системе силы трения могут появляться по крайней мере из-за двух причин. Первая из них — неидеальность поверхностей шарика и плоскости, по которой он движется. В этом случае сила трения равна $F = k_1 P$, где k_1 — коэффициент трения, $P = mg$ — вес шарика. Она всегда направлена против движения шарика, ее знак противоположен знаку скорости шарика $v = dr/dt$, т. е. Движение шарика подчиняется уравнению

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = -kr - k_1 mg\, sign\, \frac{dr}{dt}, \tag{4.6}$$

которое внешне похоже на уравнение (4.2) с постоянной силой $F(r,t) = F_0$. Однако из-за знакопеременности силы оно не сводится к стандартному уравнению колебаний. Это обстоятельство служит выражением того, что уравнения (4.1) и (4.6) описывают существенно разные процессы. В частности,

амплитуда колебаний шарика в последнем случае уменьшается со временем. В этом нетрудно убедиться, переписав (4.6) в виде

$$m\frac{dv}{dt} + kr = -k_1 mg\, sign\, v,$$

умножив обе части этого выражения на v:

$$mv\frac{dv}{dt} + krv = -k_1 mg\, sign\, v \cdot v,$$

и с учетом того, что $v = dr/dt$, получим

$$\frac{m}{2}\frac{dv^2}{dt} + \frac{k}{2}\frac{dr^2}{dt} = -k_1 mg\, sign\, v \cdot v.$$

Последнее уравнение эквивалентно уравнению

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2} + k\frac{r^2}{2}\right) = -k_1 mg\, sign\, v \cdot v. \tag{4.7}$$

Принимая во внимание, что в левой части (4.7) под знаком производной стоит сумма кинетической и потенциальной энергии системы $E(t) = T(t) + \Pi(t)$, а правая часть (4.7) при $v \neq 0$ отрицательна, имеем

$$\frac{dE(t)}{dt} < 0,\ v \neq 0\ \left(\frac{dE(t)}{dt} = 0,\ v = 0\right),$$

т. е. полная энергия $E(t)$ убывает со временем. Поскольку в моменты достижения шариком максимальной амплитуды $r_m(t)$ его скорость (и кинетическая энергия T) равна нулю, то в эти моменты $\Pi = kr_m^2(t)/2 = E(t)$, и в силу

убывания $E(t)$ амплитуда $|r_m(t)|$ - убывающая функция времени. Более подробно рассмотрим результат действия силы трения иного происхождения, возникающей из-за сопротивления среды, в которой движется шарик (воздуха, воды и т. д.). В этом случае сила трения не постоянна, а существенно зависит от скорости движения. Эта зависимость описывается известной формулой Стокса.

$$F = -\mu v = -\mu \frac{dr}{dt},$$

где коэффициент $\mu > 0$ определяется размерами шарика, плотностью среды, ее вязкостью и т. д. Уравнение движения в вязкой среде имеет вид

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = -kr + F(v) = -kr - \mu\frac{dr}{dt}. \tag{4.8}$$

Найдем общее решение линейного уравнения (4.8), избавившись предварительно от члена с первой производной. Подстановка в (4.8) замены $r(t) = \bar{r}(t)e^{\alpha t}$ дает для новой функции $\bar{r}(t)$ уравнение

$$m\left(e^{\alpha t}\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} + 2\alpha e^{\alpha t}\frac{d\bar{r}}{dt} + \alpha^2 e^{\alpha t}\bar{r}\right) = -k\bar{r}e^{\alpha t} - \mu e^{\alpha t}\frac{d\bar{r}}{dt} - \mu\alpha e^{\alpha t}\bar{r}.$$

Сократив в нем множитель $e^{\alpha t}$ и положив $\alpha = -\mu/(2m)$, придем к уравнению

$$m\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = -\left(k - \frac{\mu^2}{4m}\bar{r}\right) = -k_1\bar{r}. \tag{4.9}$$

В отличие от уравнения (4.1) первый множитель в правой части (4.9) может менять знак в зависимости от значений параметров k, μ, m системы,

что с учетом связи $r(t) = e^{\alpha t}\bar{r}(t)$ приводит к существенно иному ее поведению относительно стандартного случая. При малой вязкости, т. е. при $k - \mu^2/(4m) = k_1 > 0$ решение $\bar{r}(t)$ дается известной формулой, и для $r(t)$ имеем

$$r = \bar{r}e^{\alpha t} = e^{-t\mu/(2m)}(A\sin\omega t + B\cos\omega t),$$

где $\omega = (k_1/m)^{1/2}$, а константы A, B находятся через r_0, v_0. В системе происходят затухающие со временем колебания с частотой ω.

Если $k_1 = 0$, то величина $d\bar{r}/dt$ постоянна, или, что тоже самое, $\bar{r}(t) = ct + c_1$. Для $r(t)$ с учетом начальных данных получаем

$$r(t) = e^{-t\mu/(2m)}(ct + c_1) = e^{-t\mu/(2m)}\left(\left(v_0 + \frac{\mu r_0}{2m}\right)t + r_0\right).$$

В данном случае колебания отсутствуют благодаря подавляющему действию сил вязкого трения. Система может лишь один раз пройти точку $r = 0$, для чего необходимо и достаточно выполнения условий $v_0 < -\mu r_0/(2m)$, $r_0 > 0$ или $v_0 > -\mu r_0/(2m)$, $r_0 < 0$, т. е. начальная скорость шарика должна быть достаточно велика и направлена к точке $r = 0$. При этом, очевидно, скорость шарика $v(t) = dr/dt$ может менять знак лишь один раз.

Наконец, при большой вязкости действие силы трения настолько значительно, что для любых r_0, v_0 шарик «застревает» в среде, никогда не проходя точку $r = 0$, а лишь односторонне приближаясь к ней при $t \to \infty$. Действительно, при $k_1 < 0$ решение уравнения (4.9) знакопостоянно (предположение о противном сразу же приводит к противоречию с уравнением), следовательно, величина $r(t)$ также не меняет знак. Поведение функции $r(t)$

при $t \to \infty$ можно понять из свойств первого интеграла уравнения (4.9)

$$m\left(\frac{d\bar{r}}{dt}\right)^2 = -k_1\bar{r}^2 + const,$$

который нетрудно получить, умножая обе части (4.9) на $d\bar{r}/dt$ и интегрируя один раз по t. Предположения о том, что $\bar{r}(t) \to \infty$ или $\bar{r}(t) \to C_1$ при $t \to \infty$ противоречат последнему равенству. Остается единственный вариант $\bar{r}(t) \to 0$, $t \to \infty$, и, таким образом, $r(t) \to 0$, $t \to \infty$. Итак, движение системы в вязкой среде отличается большим по отношению к идеальной ситуации разнообразием, причем во всех случаях оно происходит с затуханием.

4.4. Два типа нелинейных моделей системы шарик-пружина

Формула Стокса справедлива, строго говоря, только для установившихся движений, когда действие постоянной внешней силы уравновешивается силой вязкого трения так, что в итоге тело перемещается с постоянной скоростью. Вполне возможны ситуации, при которых сила сопротивления вязкой среды при малых скоростях меньше, а при больших скоростях больше, чем вычисляемая по формуле Стокса; например, $F(v) = -\mu v|v|^\alpha$, где $\mu > 0$, $\alpha > -1$. Тогда искомая величина $r(t)$ определяется из уравнения

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = -kr + F(v) = -kr - \mu v|v|^\alpha. \qquad (4.10)$$

Уравнение (4.10), в отличие от всех рассмотренных ранее моделей, нелинейно, и его решение выписать, вообще говоря, нельзя (хотя можно провести достаточно детальное изучение системы и в нелинейном случае, в частности, установить, пользуясь приемом, применявшимся для уравнения (4.6), затухающий характер движения системы). Поэтому ограничимся здесь приближенным анализом поведения системы в двух ее предельных положениях — в окрестности точек $v = 0$ и $r = 0$. Оба положения, очевидно, не могут достигаться одновременно, так как это означало бы, что система покоится.

Если $v(t_0) = 0$ (здесь момент t_0 — один из моментов достижения максимальной амплитуды r_0), то вторым членом в правой части уравнения (4.10) можно пренебречь по сравнению с первым, и оно принимает вид

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = -kr_0.$$

Поскольку рассматривается малая окрестность $\triangle t$ около момента t_0, то пренебрегается также отклонением $\triangle r$ в сравнении с r_0. Учитывая, что $v(t_0) = 0$, получаем

$$\triangle r = r - r_0 = -\frac{1}{2}\frac{k}{m}r_0(t - t_0)^2,$$

т. е. шарик движется с постоянным (в первом приближении) ускорением, так как на него действует лишь сила натяжения пружины, постоянная в окрестности точки $r = r_0$, а сила трения равна нулю.

При $r(t_0) = 0$ (t_0 — один из моментов прохождения системой начала координат, если, конечно, точка $r = 0$ достигается хотя бы один раз) первый

член в правой части мал по сравнению со вторым, и

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = -\mu v_0|v_0|^\alpha$$

Здесь также пренебрегается отклонением $\triangle v$ от значения $v_0 = v(t_0)$ ввиду его малости. Так как $r(t_0) = 0$, то из последнего уравнения следует

$$\triangle r = r = \frac{-\mu v_0|v_0|^\alpha}{2m}(t-t_0)^2 + v_0(t-t_0).$$

Значит, и в этом положении система испытывает постоянное (в первом приближении) ускорение, определяемое лишь силой трения, поскольку натяжение пружины равно нулю. Данный вывод вполне очевиден и справедлив для всех положений системы, хотя ускорение шарика при $v \neq 0$, $r \neq 0$ определяется уже совместным действием обеих сил. Исключение составляет лишь точка, где $kr_0 = -\mu v_0|v_0|^\alpha$, когда правая часть уравнения (4.10) обращается в нуль и первый член в ускорении системы в этот момент $t = t_0$ равен нулю. Разлагая $r(t)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $t = t_0$:

$$r(t) = r(t_0) + \frac{dr}{dt}(t_0)(t-t_0) + \frac{1}{2}\frac{d^2r}{dt^2}(t_0)(t-t_0)^2 + \frac{1}{6}\frac{d^3r}{dt^3}(t_0)(t-t_0)^3 + \ldots,$$

где точками обозначены члены более высокого порядка малости, и принимая во внимание, что $\frac{d^2r}{dt^2}(t=t_0) = 0$, находим

$$\triangle r = r(t) - r_0 = \frac{dr}{dt}(t_0)(t-t_0) + \frac{1}{6}\frac{d^3r}{dt^3}(t_0)(t-t_0)^3 + \ldots,$$

т. е. в главном члене ускорение системы в окрестности точки $t = t_0$ не постоянно, а является линейной функцией времени.

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = -k(r)r, \tag{4.11}$$

где, разумеется, $k(r) > 0$. Например, если $k(r) = k_0/(1 + |r|)$, то пружина мягкая. Уравнение (4.11) нелинейное так же, как и (4.10), но достаточно очевидны по крайней мере два различия между (4.10) и (4.11). В отличие от (4.10), можно выписать (неявное) решение для (4.11) с двукратным использованием квадратуры. Кроме того, переписывая (4.11) в виде

$$m\frac{dr}{dt}\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{dr}{dt}k(r)r = \frac{dr}{dt}\frac{d}{dt}\int\limits_0^r k(r')r'dr' = -\frac{d}{dt}\left(\int\limits_0^r k(r')r'dr'\right),$$

учитывая, что левая часть этого выражения равна $mvdv/dt = mdv^2/dt$, и интегрируя его по t, получаем

$$T + \Pi = m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \int\limits_0^r k(r')r'dr' = const > 0. \tag{4.12}$$

Это означает *консервативность* движения, описываемого моделью (4.11), или постоянство полной энергии системы. Существование первого интеграла (4.12) позволяет установить общий со случаем линейной системы факт - колебательный характер изучаемого движения. Действительно, из (4.12) следует ограниченность функций $v(t) = dr/dt$ и $r(t)$ при любых $t > 0$. Решение

не имеет предела при $t \to \infty$, так как при $v(t \to \infty) \to v_\infty \neq 0$ это противоречило бы ограниченности функции $r(t)$ при $t \to \infty$, для $v(t \to \infty) \to v_\infty = 0$ невозможно, чтобы $r(t \to \infty) \to r_\infty \neq 0$ - тогда из (4.11) следовала бы неограниченность величины $v(t)$ при $t \to \infty$ (случай же $v_\infty = r_\infty = 0$ противоречит (4.12)). Тем самым шарик колеблется. Он неограниченное число раз проходит точку $r = 0$ (в противном случае величина $r(t)$ была бы знакоопределенной вместе с ускорением d^2r/dt^2 (см. (4.11)) и $v \to \infty$, $t \to \infty$).

4.5. Заключение

Приведенные в этом параграфе построения демонстрируют иерархическую цепочку моделей системы «шарик—пружина», получающихся одна из другой при последовательном отказе от предположений, идеализирующих изучаемый объект. В одних случаях усложнение не вносит ничего нового в поведение системы (постоянная внешняя сила, шарик на двух пружинах), в других ее свойства меняются существенным образом. Путь «от простого к сложному» дает возможность поэтапно изучать все более реалистичные модели и сравнивать их свойства.

Существует и другой путь построения и изучения моделей — «от общего к частному». Из результатов данного параграфа очевидно: достаточно общее уравнение движения системы «шарик—пружина» записывается в виде

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = -k(r,t)r + F\left(r, t, \frac{dr}{dt}\right), \quad k > 0,$$

где k и F могут быть разнообразными функциями своих аргументов. Опираясь на эту общую модель, можно, проводя соответствующие конкретизации, последовательно получать и изучать более простые модели. Например, зависимость k от r и t отвечает следующему после (4.5) уравнению и уравнению (4.11), зависимость F от r, t — наличию внешней силы или силы инерции (уравнения (4.2), (4.3), (4.5)), а от dr/dt — сопротивлению среды (уравнения (4.6), (4.8), (4.10)). Данный подход также широко применяется, в том числе и потому, что позволяет сразу установить некоторые общие свойства объекта,конкретизируя и дополняя их в более частных ситуациях.

Глава 5

Получение моделей из закона сохранения вещества

На основе составления баланса массы вещества и некоторых дополнительных соображений построим модели потока невзаимодействующих частиц и движения грунтовых вод в пористой среде. Опишем ряд свойств полученных моделей и обсудим их возможные обобщения.

5.1. Поток частиц в трубе

В цилиндрической трубе с поперечным сечением S (рис. 5.1) движутся частицы вещества (пылинки, электроны). Скорость их движения $u(t) > 0$

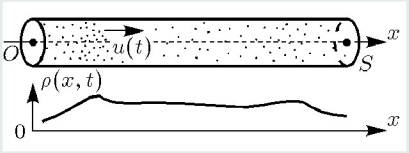


Рис. 5.1. Схема потока частиц в трубе

вдоль оси x, вообще говоря, изменяется со временем. Например, заряженные частицы могут ускоряться или замедляться под действием электрического поля. Для построения простейшей модели рассматриваемого движения введем следующие предположения:

а) частицы между собой не взаимодействуют (не сталкиваются, не притягиваются и т. д.). Для этого, очевидно, плотность частиц должна быть достаточно малой (в этом случае заряженные частицы не только не сталкиваются, но и не оказывают друг на друга влияния из-за большого расстояния между ними);

б) начальная скорость всех частиц, находящихся в одном и том же поперечном сечении с координатой x, одинакова и направлена вдоль оси x;

в) начальная плотность частиц также зависит только от координаты x;

г) внешние силы, действующие на частицы, направлены вдоль оси x.

Предположение а) означает, что скорость частиц может изменяться лишь под действием внешних сил, предположения б)-г) обеспечивают одномерность процесса переноса, т. е. зависимость искомой плотности потока частиц только от координаты x и времени $t \geqslant 0$.

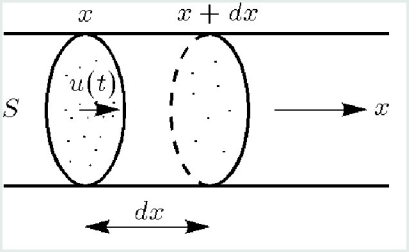


Рис. 5.2. Схема потока частиц в трубе

Итак, по заданной начальной плотности $\rho(x, t = 0) = \rho_0(x)$ необходимо найти плотность частиц $\rho(x, t)$ в любой момент времени для любых x (скорость движения $u(t)$ задана). Прибегнем к закону сохранения массы, подсчитав баланс вещества в малом элементе трубы от x до $x + dx$ за время dt (рис. 5.2). Слева в элементарный объем входит количество вещества с массой, равной

$$Su(t)dt\rho(x, t + \xi dt), \quad 0 \leqslant \xi \leqslant 1,$$

где $Su(t)dt$ - объем вошедшего за промежуток времени dt вещества. Через правое сечение элемента за то же время выходит масса, равная

$$Su(t)dt\rho(x + dx, t + \bar{\xi}dt), \quad \bar{\xi} \neq \xi, \quad 0 \leqslant \bar{\xi} \leqslant 1,$$

т. е. суммарное изменение массы равно

$$dm = Su(t)(\rho(x, t + \xi dt) - \rho(x + dx, t + \bar{\xi}dt))dt.$$

В силу малости промежутка dt скорость $u(t)$ считается постоянной. Величины $\rho(x, t+\xi dt)$ и $\rho(x+dx, t+\bar{\xi}dt)$ - средние по времени значения плотности в сечениях x и $x+dx$.

Другой способ подсчета изменений в фиксированном объеме Sdx очевиден из смысла величины $\rho(x,t)$:

$$dm = Sdx(\rho(x+\eta dx, t+dt) - \rho(x+\bar{\eta}dx, t)), \quad 0 < \eta, \bar{\eta} < 1,$$

где $\rho(x+\eta dx, t+dt)$ и $\rho(x+\bar{\eta}dx, t)$ - средние по пространству значения плотности в моменты t и $t+dt$.

Приравнивая оба полученные для dm выражения и устремляя dx и dt к нулю, приходим к уравнению для $\rho(x,t)$, отвечающему закону сохранения массы,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x}u(t) = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \tag{5.1}$$

с начальным условием

$$\rho(x,0) = \rho_0(x), \quad -\infty < x < \infty. \tag{5.2}$$

Величина ρu (*поток вещества*, или *поток массы*) равна количеству вещества, проходящему в единицу времени через единичную поверхность поперечного сечения трубы. Как видно из (5.1), скорость изменения плотности вещества со временем в любом сечении определяется «скоростью» изменения потока вещества по координате x. Схожим свойством обладают многие модели, отвечающие законам сохранения и описывающие совсем другие процессы.

В случае постоянной скорости $u(t) = u_0$ приходим к простейшему линейному уравнению в частных производных

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0. \tag{5.3}$$

Его общее решение нетрудно найти, приняв во внимание, что уравнение (5.3) имеет характеристики - линии $x = u_0 t + C$, на которых значения искомой функции постоянны во времени, т. е. $\rho(x = u_0 t + C, t) = \rho_c$, или, в эквивалентной записи,

$$\rho(x, t) = \rho(x + u_0(t - t_0), t_0), \quad t - t_0 \geqslant 0.$$

Выбирая $t_0 = 0$, получим

$$\rho(x, t) = \rho(\xi) = \rho(x + u_0 t). \tag{5.4}$$

Интеграл (5.4) и является общим решением уравнения (5.3). Из формулы (5.4) и начальных данных (5.2) легко найти искомую функцию, причем она зависит не по отдельности от переменных x, t, а от их комбинации $\xi = x + u_0 t$ (*бегущая волна*). Пространственный профиль плотности без искажений переносится вдоль потока (рис. 5.3) с постоянной скоростью (уравнение (5.3) называют также *уравнением переноса*). Это основное свойство решения уравнения (5.3) несколько модифицируется в случае, когда скорость частиц зависит от времени - профиль плотности переносится за равные промежутки времени на разные расстояния. Если же по каким-то причинам скорость потока зависит от плотности ($u = u(\rho)$), то уравнение (5.1) становится нелинейным, и поведение его решения может иметь качественно иной характер.

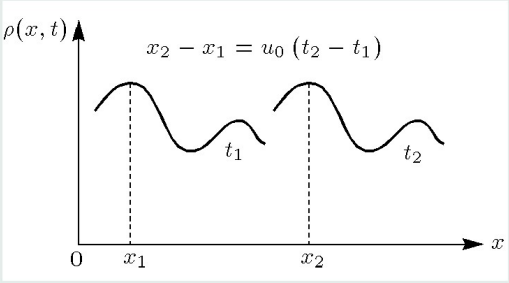


Рис. 5.3. Профиль плотности жидкости

5.2. Основные предположения о гравитационном режиме течения грунтовых вод

Пористая среда представляет собой пласт водопроницаемого материала (песок, глина), ограниченного снизу грунтом, не пропускающим воду (гранит), а сверху — поверхностью земли (рис. 5.4). Если из-за интенсивной работы артезианских скважин или в результате обильных осадков уровень воды в каком-либо месте слоя изменяется, то под действием силы тяжести начинается движение жидкости, выравнивающее ее свободную поверхность.

Для описания этого процесса введем прежде всего ряд предположений:

1) вода рассматривается как несжимаемая жидкость с постоянной плотностью ρ;

2) толщина пласта много меньше его ширины и длины;

3) подстилающая поверхность не имеет разрывов и изломов, задающая ее известная функция $H(x, y)$ - достаточно гладкая функция своих аргументов;

4) свободная поверхность воды $h = h(x, y, t)$ плавно меняется с изменением координат x, y;

5) грунтовые воды нигде не выходят на поверхность земли, причемна свободной поверхности жидкости давление постоянно;

6) грунт однороден, т. е. его физико-механические свойства не зависят от аргументов x, y, z.

Первое предположение вполне естественно, поскольку в рассматриваемом процессе не могут достигаться давления, способные заметно изменять плотность воды. Остальные предположения упрощающие. Например, второе предположение (тонкий пласт) означает, что течение жидкости двумерное и все его характеристики не зависят от координаты z, последние два предположения позволяют построить модель, единообразную во всех точках грунта, и т. д. Вместе с тем предположения 1)-6) отнюдь не выхолащивают сути процесса, так как они выполняются в большом количестве реальных ситуаций.

5.3. Баланс массы в элементе грунта

Выделим в пласте элементарный объем, образующийся в результате пересечения вертикальной призмы $ABCD$ подстилающей и свободной поверхностями грунта. Поскольку размеры призмы dx и dy малы, а функции H и h гладкие (предположения 3), 4)), то получившееся тело с хорошей степенью

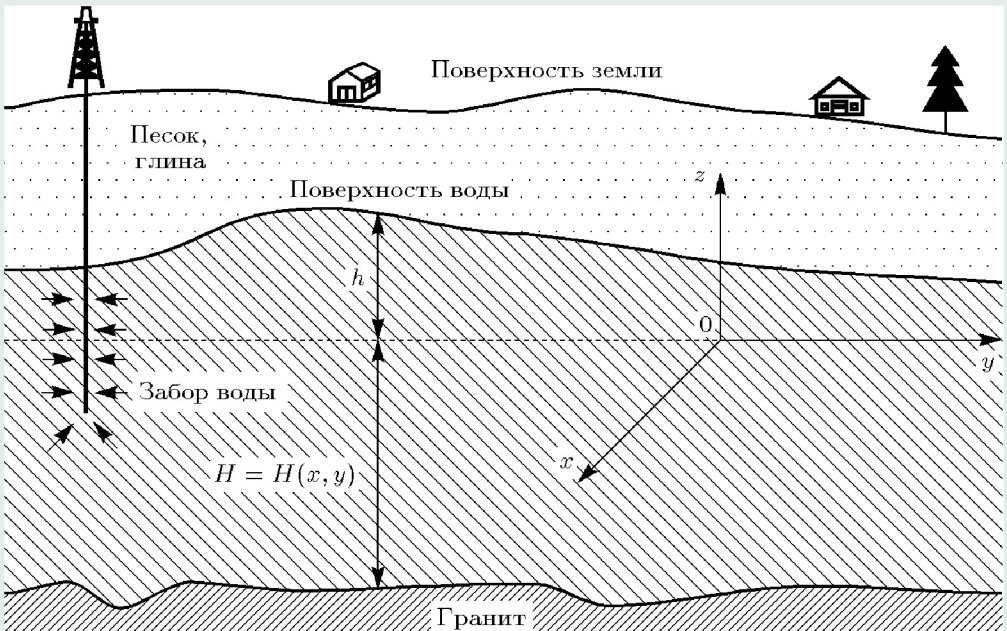


Рис. 5.4. Среда проистекания грунтовых вод

точности можно считать параллелепипедом. Введем неизвестные функции $v = v(x, y, t)$ и $u = u(x, y, t)$ - составляющие скорости жидкости вдоль осей x, y (рис. 5.5).

Подсчитаем количества жидкости, входящей в параллелепипед и выхо-

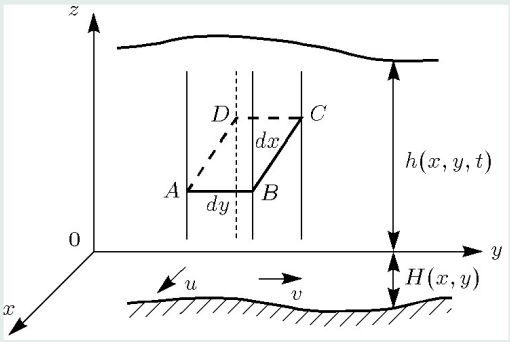


Рис. 5.5. Элементарный объем грунтовых вод

дящей из него за промежуток времени dt.

Через грань DC в элемент грунта входит масса воды, равная объему прошедшей через нее жидкости, умноженному на плотность ρ, т. е. величина

$$\rho u(H+h)dydt,$$

а через грань AB выходит масса воды

$$\rho u(H+h)dydt + \left(\frac{\partial}{\partial x}[\rho u(H+h)]dx\right)dydt.$$

В этом выражении по сравнению с предыдущим добавляется член, описывающий приращение функции $\rho u(H+h)$ при переходе от плоскости x к плоскости $x+dx$. Сама же величина $\rho u(H+h)$, как и в пункте 1, имеет смысл потока массы (вещества).

Итак, при движении жидкости вдоль оси x в элементе dx грунта накапливается масса

$$-\frac{\partial}{\partial x}[\rho u(H+h)]dxdydt.$$

Проводя аналогичные рассуждения для граней AD и BC, получаем изменение массы воды за счет ее движения вдоль оси y:

$$-\frac{\partial}{\partial y}[\rho v(H+h)]dxdydt.$$

Поскольку вдоль оси z в элемент грунта жидкость не втекает и не вытекает из него (снизу - подстилающий пласт, а через свободную поверхность нет потока вещества), то суммарное изменение массы воды в элементе грунта равно

$$-\left(\frac{\partial}{\partial x}[\rho u(H+h)]+\frac{\partial}{\partial y}[\rho v(H+h)]\right)dxdydt. \tag{5.5}$$

Общее количество жидкости в параллелепипеде равно его объему, умноженному на плотность ρ и на коэффициент пористости $m<1$ (так как часть объема занята грунтом):

$$m\rho(H+h)dxdy.$$

Изменение массы воды в элементе за время dt, очевидно, равно

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}[\rho m(H+h)]dxdy\right)dt.$$

Учитывая, что $dH/dt = 0$, $d\rho/dt = 0$, из последнего выражения получаем

$$m\rho\frac{\partial h}{\partial t}dxdydt \tag{5.6}$$

и, приравнивая (5.5) к (5.6), приходим к *уравнению неразрывности*, выражающему закон сохранения массы в рассматриваемом процессе:

$$m\rho\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}[\rho u(H+h)] - \frac{\partial}{\partial y}[\rho v(H+h)]. \tag{5.7}$$

В уравнении (5.7) скорость изменения рассматриваемой величины (в данном случае массы) со временем определяется дивергенцией потока этой величины - свойство, характерное для многих моделей, получаемых из законов сохранения.

С учетом того, что $\partial\rho/\partial x \equiv 0$, $\partial\rho/\partial y \equiv 0$, уравнение (5.7) переписывается в более простой форме:

$$m\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}[u(H+h)] - \frac{\partial}{\partial y}[v(H+h)]. \tag{5.8}$$

5.4. Замыкание закона сохранения массы

Уравнение (5.8) содержит три неизвестных величины - h, u, v. Следовательно, для замыкания модели необходимо привлечь какие-то дополнительные соображения о характере процесса. Их дает полуэмпирический *закон Дарси*

$$u = -\mu\frac{\partial p}{\partial x}, \quad v = -\mu\frac{\partial p}{\partial y}, \tag{5.9}$$

где $p(x, y, t)$ - давление в жидкости, $\mu > 0$ - коэффициент, определяемый свойствами грунта. Согласно закону Дарси компоненты скорости течения жидкости пропорциональны соответствующим компонентам градиента давления. Заметим, что по своему физическому смыслу градиент давления - это сила (отнесенная к единице объема). В то же время по второму закону Ньютона действующая на тело сила пропорциональна его ускорению, а не скорости, как в законе Дарси. Однако данное противоречие кажущееся, так как при течении через грунт (фильтрации) жидкость преодолевает сопротивление его частиц, в отличие от свободного течения.

В формулах (5.9) используется новая неизвестная величина - давление жидкости. Ее связь с уже введенными величинами нетрудно найти, приняв предположение о медленном и почти горизонтальном течении воды. Тогда динамической составляющей давления можно пренебречь и вычислять его по чисто гидростатическому закону как давление, создаваемое столбом жидкости:

$$p(x, y, z, t) = \rho g(h(x, y, t) - z) + const,$$

где $const$ - давление на поверхности жидкости (например, атмосферное), g - ускорение свободного падения.

Подставляя последнюю формулу в (5.9), получаем

$$u = -\mu\rho g\frac{\partial h}{\partial x}, \quad v = -\mu\rho g\frac{\partial h}{\partial y}, \tag{5.10}$$

и, используя (5.10) в уравнении неразрывности (5.8), окончательно приходим

к уравнению движения грунтовых вод

$$\frac{\partial h}{\partial t} = k\frac{\partial}{\partial x}\left[(H(x,y)+h)\frac{\partial h}{\partial x}\right] + k\frac{\partial}{\partial y}\left[(H(x,y)+h)\frac{\partial h}{\partial y}\right], \qquad (5.11)$$

$$k = \frac{\mu\rho g}{m},$$

или к *уравнению Буссинеска*, содержащему лишь одну неизвестную функцию $h(x,y,t)$.

5.5. О некоторых свойствах уравнения Буссинеска

Уравнение (5.11) нестационарное (искомая функция h зависит от t), двумерное (h зависит от x и y), относящееся к параболическому типу. Оно неоднородное, так как функция H зависит от x, y, и нелинейное, поскольку в его правой части присутствуют члены вида $(hh_x)_x$ и $(hh_y)_y$. В сравнении с уравнением (5.1) уравнение Буссинеска — гораздо более сложный математический объект. В силу нелинейности его общее решение не может быть найдено аналитически, однако относительно нетрудно получить некоторые вполне содержательные частные решения, которые служат также тестами при разработке численных методов для уравнения (5.11).

Для построения завершенной модели движения грунтовых вод необходимо знать входные данные для уравнения (5.11): форму подстилающей

поверхности $H(x,y)$, коэффициент k и краевые условия, задающие функцию h в начальный момент времени и на границах пласта (и, быть может, в некоторых выделенных областях пласта, например, на артезианской скважине). Отметим только, что простейшим вариантом формулировки краевых условий для уравнения (5.11) является задание лишь начального условия - функции $h(x,y,t)$ в момент $t=0$:

$$h(x,y,t=0)=h_0(x,y),\ \ -\infty<x<\infty,\ \ -\infty<y<\infty.$$

Такая постановка отвечает *задаче Коши* для уравнения (5.11), решаемого, естественно, также в области $-\infty<x<\infty$, $-\infty<y<\infty$. В задаче Коши по известному распределению уровня грунтовых вод h_0 находится функция h для всех $t>0$.

Рассмотрение пласта бесконечных размеров, конечно же, идеализация. Однако если изучается течение в небольшой центральной области пласта на относительно небольшом промежутке времени, то влиянием границ пласта можно пренебречь, и решение задачи Коши описывает вполне реальный процесс.

Отметим также, что некоторые краевые условия были фактически неявно введены в модель при выводе уравнения Буссинеска. Предположение о непроницаемости пласта было использовано при получении уравнения баланса, а без предположения 5) о «зазоре» между поверхностью земли и поверхностью грунтовых вод (т. е. когда вся жидкость находится в пористой среде) нельзя было бы использовать закон Дарси во всей рассматриваемой области. Разумеется, выполнение этих и других предположений должно контролироваться при изучении данного объекта на основе построенной модели.

При введении дополнительных предположений общая модель упрощается. Так, если по каким-то причинам решение не зависит от времени t (стационарный процесс), то приходим к эллиптическому уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[(H+h)\frac{\partial h}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[(H+h)\frac{\partial h}{\partial y}\right]=0, \tag{5.12}$$

для решения которого, естественно, не требуется задание функции h в начальный момент. В простейшем случае (5.12) превращается в *уравнение Лапласа.* Если подстилающая поверхность горизонтальна ($H(x,y)=H_0=const$), то уравнение Буссинеска становится однородным:

$$\frac{\partial h}{\partial t}=k\frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial h}{\partial x}\right)+k\frac{\partial}{\partial y}\left(h\frac{\partial h}{\partial y}\right).$$

При дополнительном предположении об одномерности течения, когда искомое решение зависит лишь от одной пространственной переменной, например, координаты x, приходим к уравнению

$$\frac{\partial h}{\partial t}=k\frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial h}{\partial x}\right), \tag{5.13}$$

называемому также *одномерным уравнением типа нелинейной теплопроводности* или одномерным уравнением изотермической фильтрации. Одномерными являются, например, течения в пластах, сильно вытянутых по одному из направлений, так что изменением величин вдоль поперечного сечения пласта можно пренебречь (если через ограничивающие его в поперечных

направлениях поверхности жидкость не протекает). Наконец, самая простая модель течения грунтовых вод дается *уравнением теплопроводности* (или *уравнением диффузии вещества*)

$$\frac{\partial h}{\partial t} = kH_0 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}, \tag{5.14}$$

получающимся при условии $h \ll H_0$, т.е. для малых изменений уровня жидкости по сравнению с толщиной пласта.

Последние три уравнения относятся к параболическому типу, причем уравнение (5.14) линейное и существуют хорошо известные методы получения его общего решения. Разумеется, кроме перечисленных возможны и другие упрощения исходной модели, например двумерное уравнение (5.13).

Из уравнения Буссинеска относительно нетрудно получить и более сложные модели, когда неверны некоторые из сформулированных в пункте 2 предположений. В частности, во многих случаях грунт неоднороден, т. е. $m = m(x, y)$, $\mu = \mu(x, y)$, и необходимо учитывать поступление жидкости в пласт в результате осадков. Тогда обобщение уравнения Буссинеска имеет вид

$$\frac{m(x,y)}{\rho g}\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu(x,y)(H+h)\frac{\partial h}{\partial x}\right] - \\ - \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu(x,y)(H+h)\frac{\partial h}{\partial y}\right] + q(x,y,t), \tag{5.15}$$

где $q(x, y, t)$ характеризует мощность осадков в точке x, y в момент времени t.

Итак, применение фундаментального закона сохранения массы позволило получить разнообразные модели рассматриваемых процессов. Различие между моделями определяется типом полученных уравнений (гиперболический, параболический, эллиптический), их пространственно-временными характеристиками (стационарное, нестационарное, одномерное, многомерное), наличием или отсутствием нелинейностей, а также постановкой краевых условий. Таким образом, в зависимости от конкретных свойств объекта и дополнительных предположений, основываясь на одном и том же фундаментальном законе, можно получить совершенно различные математические модели. С другой стороны одни и те же математические модели могут, в силу своей универсальности, отвечать объектам совершенно разной природы.

Глава 6

Получение моделей из закона сохранения энергии

Закон сохранения энергии вместе с некоторыми дополнительными предположениями применим для построения моделей распространения тепла в сплошной среде. Сформулируем типичные краевые задачи для уравнений теплопередачи. Обсудим некоторые физические и математические свойства полученных моделей.

6.1. Предварительные сведения о процессах теплопередачи

Тепловая энергия, или тепло — это энергия хаотического движения атомов или молекул вещества. Обмен теплом между различными участками материала называется *теплопередачей*, а сами материалы, обладающие хорошо выраженным свойством теплопередачи, - *теплопроводными.* К ним относятся, например, металлы, в которых тепловая энергия переносится в основном свободными электронами, некоторые газы и т. д. Процессы передачи тепла рассматриваются в условиях так называемого *локального термодинамического равновсия* (ЛТР). Понятие ЛТР для газов вводится при $\lambda \ll L$, т. е. когда длина свободного пробега частиц вещества много меньше характерных размеров рассматриваемого объекта (*сплошная среда*). ЛТР подразумевает также, что процессы изучаются при временах, больших, чем τ(время между столкновениями частиц), и на размерах, больших, чем λ. Тогда в областях вещества, размеры которых превосходят величину λ (но много меньше величины L), устанавливается равновесие и для них можно ввести средние величины плотности, скорости теплового движения частиц и т. д. Эти локальные величины (разные в разных точках среды) при сформулированных предположениях находятся из равновесного максвелловского распределения частиц. К ним относится и *температура* T, определяющая среднюю кинетическую энергию частиц:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{3}{2}kT,$$

где m - масса частицы, v - средняя скорость хаотического движения, k - постоянная Больцмана (в случае так называемого больцмановского газа).

Связанная с хаотическим движением частиц энергия вещества (внутренняя энергия) определяется через температуру с помощью величины *удельной теплоемкости* $c(\rho, T)$, а именно

$$c(\rho, T) = \frac{\partial \varepsilon(\rho, T)}{\partial T}, \quad c(\rho, T) > 0,$$

где $\rho = mn$ - плотность вещества (n - число частиц в единице объема), $\varepsilon(\rho, T)$ - *внутренняя энергия единицы массы.* Другим словами, теплоемкость - это энергия, которую надо сообщить единице массы вещества, чтобы увеличить его температуру на один градус.

Наиболее простое выражение для теплоемкости получается в случае *идеального газа* (газа, частицы которого взаимодействуют лишь при непосредственном столкновении и, подобно биллиардным шарам, без потери суммарной кинетической энергии). Если в некотором объеме идеального газа содержится N частиц, то их полная внутренняя энергия есть

$$E = N\frac{mv^2}{2} = \frac{3}{2}NkT = \frac{3}{2}M\frac{k}{m}T,$$

где $M = Nm$ - суммарная масса частиц, а удельная внутренняя энергия, или энергия на единицу массы, дается формулой

$$\varepsilon = \frac{E}{M} = \frac{3}{2}\frac{k}{m}T,$$

т. е. теплоемкость идеального газа равна $3k/(2m)$ и не зависит от величин ρ, T.

В общем случае связь между внутренней энергией и температурой более сложная. Например, помимо кинетической энергии движущихся частиц, внутренняя энергия содержит составляющую, связанную с потенциальной энергией их взаимодействия, зависящей от среднего расстояния r между ними. В свою очередь $r \approx (n)^{-1/3} = (\rho/m)^{-1/3}$, где n - число частиц в единице объема, т. е. ε зависит от плотности ρ. Поэтому в теории теплопередачи величины ε (или, что то же самое, c) являются, вообще говоря, функциями от ρ и T. Их конкретный вид определяется свойствами рассматриваемой среды.

6.2. Вывод закона Фурье из молекулярно-кинетических представлений

Для получения математической модели теплопередачи необходимо, помимо описанных в пункте 1 понятий, ввести важное понятие потока тепла. *Потоком тепла* (или тепловой энергии) в данной точке называется количество тепла, переносимое в единицу времени через единичную поверхность, помещенную в данную точку вещества. Очевидно, что поток тепла - векторная величина (поскольку она в общем случае зависит от ориентации единичной поверхности в пространстве).

Выделим в среде точку с координатами x, y, z и вычислим компоненты потока W тепла по соответствующим осям (величины W_x, W_y, W_z). Расположим площадку единичной величины (штриховая линия на рис. 6.1) перпен-

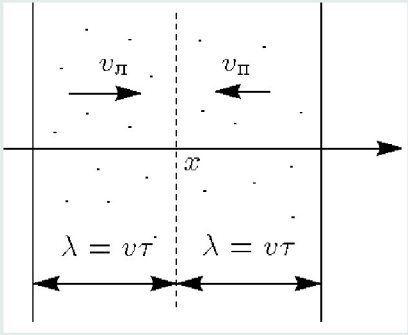


Рис. 6.1. Схема движения частиц

дикулярно оси x. Частицы, движущиеся вдоль оси x, пересекают ее справа налево и слева направо с равной вероятностью. Однако если температуры частиц (а, следовательно, и их кинетические энергии) разные по правую и левую стороны площадки, то в единицу времени через нее справа и слева переносятся разные энергии. Разность этих энергий и формирует поток тепла вдоль оси x. Выделим на рис. 6.1 области, отстоящие на расстояние $\lambda = v\tau$ от площадки справа и слева. Из частиц, находящихся в правой области, примерно 1/6 часть движется налево, так как все шесть направлений (вверх — вниз, вперед — назад, направо — налево) равновероятны. За время τ эта часть частиц с необходимостью пересечет площадку и перенесет энергию, равную

$$\frac{1}{6} n\lambda \frac{m v_П^2}{2},$$

где v_Π - скорость частиц в правой области (величины n, λ считаются в первом приближении равными по обе стороны площадки). Аналогично, частицы из левой области переносят энергию

$$\frac{1}{6}n\lambda\frac{mv_\Lambda^2}{2},$$

где v_Λ - скорость частиц слева от площадки. Разность этих энергий, отнесенная к единице времени, представляет собой величину

$$W_x = \frac{1}{6}nv\left(\frac{mv_\Lambda^2}{2} - \frac{mv_\Pi^2}{2}\right) = \frac{mnv}{6}(\varepsilon_\Lambda - \varepsilon_\Pi),$$

где ε_Λ, ε_Π - внутренняя энергия вещества соответственно слева и справа от площадки, а в качестве v берется средняя между v_Λ и v_Π скорость частиц. В первом приближении величины ε_Λ, ε_Π можно выразить через величину ε (энергию в точке x, т. е. на площадке) следующим образом:

$$\varepsilon_\Pi = \varepsilon + \lambda\frac{\partial\varepsilon}{\partial x} = \varepsilon + \lambda c\frac{\partial T}{\partial x},$$

$$\varepsilon_\Lambda = \varepsilon - \lambda\frac{\partial\varepsilon}{\partial x} = \varepsilon - \lambda c\frac{\partial T}{\partial x}.$$

Подставляя эти формулы в выражение для W_x, получаем

$$W_x = -\chi\frac{\partial T}{\partial x}, \tag{6.1}$$

где $\chi = \rho c\lambda v/3$.

Проводя такие же рассуждения для компонент W_y, W_z, приходим к выражениям

$$W_y = -\chi \frac{\partial T}{\partial y}, \quad W_z = -\chi \frac{\partial T}{\partial z}. \tag{6.2}$$

Объединение (6.1) и (6.2) дает *закон Фурье*

$$W = -\chi \, grad \, T. \tag{6.3}$$

Величина χ называется *коэффициентом теплопроводности.* Заметим, что коэффициент теплопроводности зависит в общем случае от плотности и температуры вещества:

$$\chi = \frac{\rho c \lambda v}{3}, \tag{6.4}$$

поскольку не только теплоемкость c, но и длина свободного пробега λ также может быть функцией от ρ, T. Так, например, в газе, находящемся в обычных условиях, тепло переносится молекулами (молекулярная теплопроводность). Для величины λ в этом случае справедливо $\lambda \sim 1/\rho$, а так как $v \sim \sqrt{T}$, то из (6.4) имеем $\chi_m \sim \sqrt{T}$ (теплоемкость считается постоянной). В плазме (где основную роль в переносе тепла играют электроны) длина пробега электрона зависит от ρ, T, так что $\lambda \sim T^2 \rho^{-1}$, и для величины χ_e справедливо $\chi_e \sim T^{5/2}$ (c - постоянная).

Итак, закон Фурье гласит: поток тепла пропорционален градиенту температуры. Так как тепловая энергия непосредственно связана с температурой, то в определенном смысле можно считать, что «поток» температуры пропорционален градиенту самой температуры. Совершенно таким же свойством обладает близкий по сущности процесс диффузии вещества (закон

Фика). Аналогичную интерпретацию можно придать закону Дарси из, хотя движение грунтовых вод по своей природе принципиально отличается от процесса диффузии тепла (и закон Дарси не имеет столь относительно простого теоретического обоснования, как законы Фурье и Фика).

6.3. Уравнение баланса тепла

Применим закон сохранения энергии для математического описания процесса теплопередачи. Будем при этом считать, что внутренняя энергия вещества изменяется лишь благодаря механизму теплопроводности, т. е. другие виды энергии полагаем несущественными (например, пренебрегаем изменением внутренней энергии за счет химических реакций или за счет работы сил давления, сжимающих некоторый объем газа, и т. д.).

Выделим в теплопроводной среде элементарный кубик со сторонами dx, dy, dz (рис. 6.2) и приведем подсчет изменения содержащейся в нем тепловой энергии за малый промежуток времени dt. По сделанным предположениям это изменение может быть вызвано лишь разностью потоков тепла, входящих и выходящих через разные грани кубика. Так, потоки вдоль оси x приводят к уменьшению или увеличению внутренней энергии объема на величину

$$[W_x(x, y, z, t) - W_x(x + dx, y, z, t)]dydzdt,$$

где $dxdy$ - площадь грани, перпендикулярной оси x. В этой формуле считается, что W_x как функция времени не сильно изменяется за промежуток dt, и можно взять ее значение в момент t. Точно таким же образом вычисляются

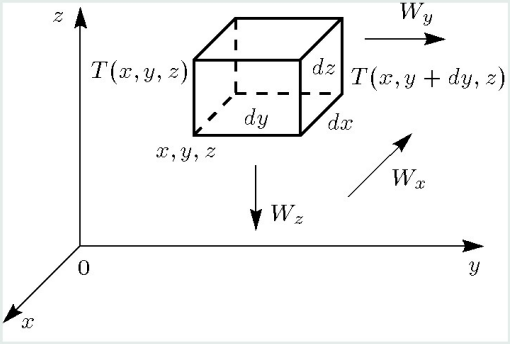


Рис. 6.2. Элементарный куб и потоки энергии

изменения внутренней энергии по осям y, z:

$$[W_y(x,y,z,t) - W_y(x,y+dy,z,t)]dxdydt,$$

$$[W_z(x,y,z,t) - W_z(x,y,z+dz,t)]dxdydt,$$

Суммарное изменение энергии $\Delta E = E(t+dt) - E(t)$ есть

$$\Delta E = -div\, W dxdydzdt.$$

С другой стороны, величину ΔE можно выразить через изменение температуры объема и через его теплоемкость по формуле

$$\Delta E = (T(t+dt) - T(t))c(\rho,t)\rho dxdydz,$$

в которой из-за малости объема берутся некоторые средние по нему значения температуры и плотности.

Приравнивая два последних выражения друг другу и устремляя dt к нулю, получаем *общее уравнение, описывающее распространение тепла:*

$$C\frac{\partial T}{\partial t} = div(\chi grad\, T) \tag{6.5}$$

имеющее в развернутой форме вид

$$C\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\chi\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\chi\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\chi\frac{\partial T}{\partial z}\right), \tag{6.6}$$

где $C = \rho c$.

Уравнение (6.6) - нестационарное, трехмерное (функция T зависит от времени t и трех пространственных переменных x, y, z) уравнение параболического типа. Оно неоднородное, так как теплоемкость, коэффициент теплопроводности и плотность могут быть, вообще говоря, разными в разных точках вещества, и нелинейное, поскольку функции c и χ могут зависеть от температуры T (т. е. от искомого решения). При дополнительных предположениях о характере процесса теплопередачи уравнение (6.6) может упрощаться. Так, если процесс стационарный, т. е. температура не зависит от времени, то (6.6) превращается в уравнение *эллиптического типа*

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\chi\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\chi\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\chi\frac{\partial T}{\partial z}\right) = 0, \tag{6.7}$$

а если функции c, x не зависят от температуры, то (6.6) становится линейным параболическим уравнением, которое в случае однородной среды (x, c, p не

зависят от x, y, z) принимает вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k_0 \Delta T \tag{6.8}$$

где величина $k_0 = \chi/c$ называется *коэффициентом температуропроводности.* Для уравнения (6.8) относительно нетрудно выписать общее решение.

В одномерном случае (температура зависит лишь от t и x) из (6.6) получаем

$$C\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\chi\frac{\partial T}{\partial x}\right). \tag{6.9}$$

Уравнение (6.9) сводится к уравнению типа нелинейной теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right). \tag{6.10}$$

при допущении, что $\partial c/\partial x \equiv 0$, $\partial \chi/\partial x \equiv 0$. Наконец, если $\chi = \chi_0$, $c = c_0$, где χ_0, c_0 - постоянные, то из (6.10) получается уравнение теплопроводности - простейшее уравнение параболического типа

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{6.11}$$

Как и в случае уравнения Буссинеска, из основного уравнения (6.6) можно получить различные обобщения, соответствующие более сложным, чем рассмотреные выше, механизмам теплопередачи. Так, для неизотропной сре-

ды (т. е. когда коэффициенты теплопроводности разные по разным направлениям) с энерговыделением вместо (6.6) имеем

$$C\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\chi_x \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\chi_y \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\chi_z \frac{\partial T}{\partial z}\right) + f(x, y, z, t, T), \quad (6.12)$$

где χ_x, χ_y, χ_z - коэффициенты в законе Фурье (6.3) по осям x, y, z, а функция f - мощность выделения (или поглощения) энергии. Неизотропность, например, в случае электронной теплопроводности, может вызываться достаточно сильным магнитным полем, затрудняющим движение переносчиков тепла поперек силовых линий поля, а выделение энергии может быть связано с идущими в веществе химическими реакциями или протеканием электрического тока.

Все полученные в данном пункте уравнения выведены с помощью фундаментального закона сохранения энергии и закона Фурье (ср. с выводом уравнения Буссинеска). Вместе с заданными функциями c, χ, ρ и краевыми условиями они представляют собой замкнутые математические модели процесса теплопередачи.

6.4. Постановка типичных краевых условий для уравнения теплопроводности

Для простоты будем рассматривать одномерные процессы теплопроводности. Они имеют место, например, в длинном и тонком металлическом

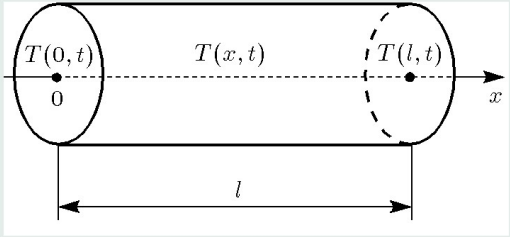


Рис. 6.3. Распространение тепла в стержне

стержне (рис. 6.3), нагреваемом с одного из торцов, при условии, что стержень изотропен, его начальная температура в любом поперечном сечении не зависит от y, z (это же свойство должно соблюдаться и на торцах стержня), а потерями тепла с боковой поверхности можно пренебречь. Будем считать также, что теплоемкость стержня постоянна. Тогда температура зависит только от x и t, и ее распределение вдоль стержня в различные моменты времени описывается уравнением

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(T)\frac{\partial T}{\partial x}\right), \tag{6.13}$$

справедливым при $0 < x < l$, $t > 0$. Для определения функции $T(x,t)$, т. е. решения, достаточно задать начальную температуру стержня:

$$T(x, t=0) = T_0(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{6.14}$$

и знать температуру на концах стержня в любой момент времени:

$$T(0,t) = T_1(t),\ T(l,t) = T_2(t),\ \ t > 0. \tag{6.15}$$

Задача (6.13)-(6.15) называется *первой краевой задачей* для параболического уравнения (6.13) *на отрезке* $x \in [0,1]$. Физически условие (6.15) соответствует тому, что на концах стержня с помощью каких-то внешних источников тепла поддерживается определенная температура, зависящая, вообще говоря, от времени.

Если же на торцах стержня задаются вместо (6.15) потоки тепла как функции времени:

$$-k(T(0,t))\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0} = W_1(t),\ k(T(l,t))\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=l} = W_2(t),\ t > 0, \tag{6.16}$$

то такая задача называется *второй краевой задачей на отрезке* $[0,l]$. Данная ситуация реализуется, например, когда торцы стержня нагреваются лучами лазерного света известной мощности.

Более сложный (нелинейный) вариант условий на торцах отвечает сильно нагретому и поэтому излучающему энергию стержню, не контактирующему с какими-либо телами. Тогда в единицу времени стержень теряет на своих границах (торцах) энергию, равную $\sigma T^4(0,t)$ и $\sigma T^4(l,t)$ соответственно, и вместо (6.15) или (6.16) получаются условия

$$\sigma T^4(0,t) = k(T(0,t))\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0},\ \sigma T^4(l,t) = -k(T(l,t))\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=l},\ t > 0, \tag{6.17}$$

где $\sigma > 0$.

Возможны также и иные виды краевых условий, соответствующие иным физическим ситуациям. Разумеется, допустимы различные комбинации условий (6.15)-(6.17), например, на левом конце известна температура, а на правом поток тепла, и т. д.

Разнообразие постановок краевых условий для уравнений теплопередачи связано и с различными идеализациями исходной задачи (6.13)-(6.15). При анализе распространения тепла около одного из торцов длинного стержня в течение сравнительно короткого времени влиянием другого торца можно пренебречь. Вместо (6.15) достаточно задать лишь одно из условий (для определенности на левом конце):

$$T(0,t) = T_1(t), \quad t > 0, \tag{6.18}$$

и решать уравнение в области $x > 0$ ((6.13), (6.14), (6.18) - *первая краевая задача в полупространстве*).

Обсуждавшаяся уже на примере уравнения Буссинеска задача Коши рассматривается во всем пространстве $-\infty < x < \infty$. Для уравнения (6.13) задается лишь начальное распределение температуры. Такая постановка вполне разумна, когда рассматриваются процессы в центральной части стержня и влияние обоих торцов можно считать несущественным.

Для многомерных уравнений теплопроводности постановка краевых условий по сравнению с одномерным случаем существенно не меняется: на границах области задаются либо температура, либо поток тепла, либо какие-то более сложные их комбинации, а также (в момент $t = 0$) начальное распределение температуры. Заметим, что в случае стационарного уравнения (6.7) задаются лишь граничные условия. Краевые условия для уравнения

движения грунтовых вод из вполне аналогичны описанным в этом пункте (при этом аналогами температуры и потока тепла в уравнении Буссинеска служат уровень грунтовых вод и поток массы).

6.5. Об особенностях моделей теплопередачи

Наиболее простая из всех обсуждавшихся выше задач теплопроводности - задача о стационарном процессе для уравнения (6.11) на отрезке $[0, l]$:

$$k_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ T(0) = T_1, \ T(l) = T_2.$$

Ее решение — линейная функция координаты x:

$$T(x) = \frac{T_2 - T_1}{l} x + T_2, \ \ 0 < x < l. \tag{6.19}$$

Решение (6.19) имеет вполне очевидный физический смысл. Действительно, при стационарном процессе потоки тепла, входящие в любое поперечное сечение стержня и выходящие из него, равны (иначе температура в сечении менялась бы). Поэтому поток должен быть постоянен в любой точке x, что по закону Фурье (6.3) при $\chi = \chi_0 = const$ возможно лишь при линейном «профиле» температуры.

Вместе с тем применение закона Фурье приводит к появлению одного не имеющего физического смысла эффекта, характерного для уравнений параболического типа. Поясним его, рассмотрев для уравнения (6.11), решаемого

во всем пространстве $-\infty < x < \infty$, задачу о так называемом *мгновенном точечном источнике тепла.* Требуется найти распределение температуры при всех $t > 0$, $-\infty < x < \infty$, вызванное выделением в момент $t = 0$ в плоскости $x = 0$ некоторого количества тепла Q_0. Начальная температура считается равной нулю: $T(x, 0) = T_0(x) \equiv 0$, $-\infty < x < \infty$. Такая постановка - идеализация реального процесса, справедливая при выполнении соответствующих условий (например, по центру холодного стержня пропускается мощный поперечный импульс электрического тока, действующего очень короткое время и затрагивающего малый участок металла). Решение поставленной таким образом задачи дается формулой

$$T(x,t) = \frac{Q_0}{2\sqrt{\pi k_0 t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4k_0 t}\right), \ t > 0, \tag{6.20}$$

что проверяется непосредственной подстановкой в уравнение (6.11). Симметричная функция (6.20) в силу известного равенства

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}$$

обладает свойством

$$\int_{-\infty}^{\infty} T(x,t)dx = Q_0, \ t > 0,$$

так что закон сохранения энергии выполняется. В то же время согласно (6.20) температура в любой точке пространства в любой момент $t > 0$ отлична от нуля. Тем самым модель (6.11) и многие другие модели теплопередачи

описывают процессы с бесконечной скоростью распространения возмущений (температура при $t = 0$ была нулевой для всех x).

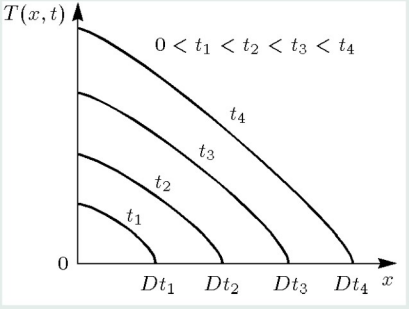


Рис. 6.4. Распространение температуры

Этого недостатка лишены (но лишь при определенных условиях) уравнения типа нелинейной теплопроводности (6.10). Для модели (6.10) с $k(T) = k_0(T^\sigma)$, $\sigma > 0$ рассмотрим процесс распространения тепла в полупространство $x > 0$ при заданной на границе температуре: $T(0,t) = T_1(t)$. Начальная температура среды считается нулевой: $T(x,0) = T_0(x) \equiv 0$, $x \geqslant 0$. Частное решение этой задачи, отвечающее граничному закону

$$T_1(t) = \left(\frac{\sigma D^2}{k_0} t\right)^{1/\sigma}, \quad t > 0,$$

имеет вид бегущей волны, распространяющейся от границы вглубь вещества

не с бесконечной, а с конечной скоростью $D > 0$ (рис. 6.4):

$$T(x,t) = \begin{cases} \left(\frac{\sigma D}{k_0} t\right)^{1/\sigma} (Dt - x)^{1/\sigma}, & x \leqslant Dt, \\ 0, & x > Dt, \end{cases} \quad t > 0. \tag{6.21}$$

Однако это свойство реализуется лишь при распространении тепла в холодную среду и теряется в случае отличной от нуля начальной температуры вещества.

Описанный дефект, связанный с неприменимостью закона Фурье (и закона Дарси в случае уравнения Буссинеска) в окрестности фронта распространения тепловой энергии, не препятствует широкому применению параболических уравнений (из (6.20) видно, что доля энергии, содержащейся в веществе при достаточно больших значениях x, ничтожно мала в сравнении с полной энергией Q_0). Они служат хорошим примером универсальности математических моделей, описывая большое количество разнообразных процессов, имеющих принципиально разную природу.

Глава 7

Совместное применение нескольких фундаментальных законов

Законы сохранения массы, импульса, энергии используем для построения математической модели, описывающей течение сжимаемого газа.

7.1. Предварительные понятия газовой динамики

Заметное изменение плотностей жидкостей и твердых тел может достигаться лишь при огромных давлениях в десятки и сотни тысяч атмосфер и выше. Газообразные среды гораздо легче подвергаются сжатию: при перепаде давления в одну атмосферу плотность газа, первоначально находившегося при атмосферном давлении, уменьшается или увеличивается на величину, сопоставимую с начальной его плотностью.

В газовой динамике, изучающей движение сжимаемых сред под действием каких-либо внешних сил или сил давления самого вещества, считается выполненным неравенство $\lambda \ll L$, где λ - длина свободного пробега, L - характерные размеры области рассматриваемого течения (сплошная среда). Считается также выполненной гипотеза о ЛТР. В условиях ЛТР сжимаемую среду можно рассматривать как совокупность большого числа жидких частиц с размерами, много большими λ, но много меньшими, чем L. Для каждой такой частицы, связанной с небольшой фиксированной массой среды, вводятся характеризующие ее средние величины - плотность ρ, давление p, температура T, внутренняя энергия ε и т. д., а также скорость $\vec{v}$ ее макроскопического движения как единого целого. Все эти величины в общем случае зависят от трех пространственных переменных x, y, z и времени t.

В дальнейшем будем также предполагать отсутствие в среде процессов теплопередачи, вязкого трения, источников и стоков энергии, например, излучения, и, кроме того, отсутствие внешних объемных сил и источников

(стоков) массы в веществе.

7.2. Уравнение неразрывности для сжимаемого газа

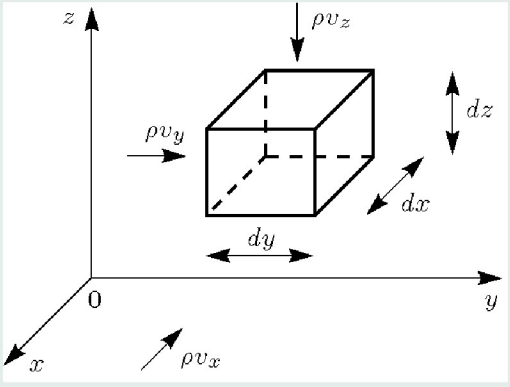


Рис. 7.1. Элементарный куб

Применим рассуждения, аналогичные тем, что использовались для вывода уравнений неразрывности, для течения грунтовых вод и процесса теплопередачи. Рассмотрим в некоторой области пространства, занятой движущимся газом, элементарный кубик со сторонами dx, dy, dz и подсчитаем

в нем баланс массы за время dt (рис. 7.1). Здесь v_x, v_y, v_z - компоненты скорости по соответствующим осям.

По оси x через грань с координатой x в кубик за время dt поступает масса газа, равная

$$\rho v_x dydzdt,$$

поскольку величина ρv_x не что иное, как поток массы по направлению оси x. За то же самое время из грани с координатой $x + dx$ вытекает масса

$$[\rho v_x + d(\rho v_x)]dydzdt,$$

где через $d(\rho v_x)$ обозначено приращение потока массы при переходе от координаты x к координате $x + dx$. Суммируя оба последних выражения и учитывая, что

$$d(\rho v_x) = \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x)dx,$$

получаем величину изменения массы в кубике за время dt благодаря движению газа вдоль оси x:

$$dm_x = -\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x)dxdydzdt. \tag{7.1}$$

Точно таким же образом находим изменения массы за счет движения по осям y, z:

$$\begin{aligned} dm_y &= -\frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y)dxdydzdt, \\ dm_z &= -\frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z)dxdydzdt. \end{aligned} \tag{7.2}$$

В фиксированном объеме кубика изменение находящейся в нем массы газа выражается также через изменение его плотности со временем:

$$dm = \frac{\partial \rho}{\partial t} dt dx dy dz. \tag{7.3}$$

Суммируя dm_x, dm_y, dm_z и приравнивая результат к dm, получаем из (7.1)-(7.3) искомое уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div} \rho \vec{v} = 0, \tag{7.4}$$

выражающее закон сохранения массы вещества применительно к движению сжимаемого газа. По своей форме и смыслу (скорость изменения величины определяется дивергенцией потока этой величины) оно вполне аналогично уравнению неразрывности, уравнению распротранения тепла и закону сохранения излучения.

Однако аналогия с течением грунтовых вод на этом заканчивается. При свободном движении газа его динамика определяется лишь силами давления самого газа, в отличие от движения жидкости, испытывающей сопротивление частиц грунта.

7.3. Уравнения движения газа

Для их получения применим второй закон Ньютона к элементарной жидкой частице, имеющей в некоторый момент t форму кубика с гранями dx, dy, dz (рис. 7.2). Жидкая частица - это перемещающийся в пространстве

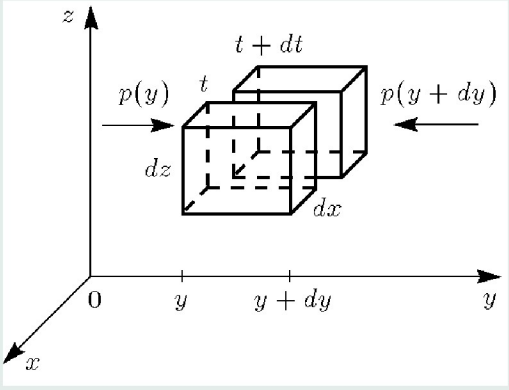


Рис. 7.2. Элементарное перемещение жидкой частицы

и меняющий свою форму объем, содержащий в разные моменты времени t одни и те же атомы и молекулы газа. Тем самым его масса dm постоянна. Для простоты вывода будем считать, что за короткое время dt кубик не меняет своей формы и смещается по всем направлениям на расстояние, много меньшее его размеров.

Определим сначала силу, действующую на кубик, например в направлении оси y. Она, очевидно, равна разности давлений на левой и правой гранях, умноженной на их площади (иных сил по предположению нет):

$$F_y = [p(x, y, z, t) - p(x, y + dy, z, t)]dxdz.$$

Сила F_y равна ускорению жидкой частицы в направлении y, умноженному

на ее массу $dm = \rho dxdydz$:

$$F_y = \frac{dv_y}{dt}\rho dxdydz. \tag{7.5}$$

Заменяя в первом выражении для F_y разность давлений через производную от давления по y и приравнивая его к (7.5), приходим к уравнению, описывающему движение газа вдоль оси y:

$$\rho\frac{dv_y}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial y}. \tag{7.6}$$

Точно так же получаем уравнения движения по направлениям x, z:

$$\rho\frac{dv_x}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x}, \tag{7.7}$$

$$\rho\frac{dv_z}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial z}, \tag{7.8}$$

имеющие, как и (7.6), очевидный физический смысл. В векторной форме уравнения (7.6)-(7.8) имеют вид

$$\rho\frac{d\vec{v}}{dt} = -\mathrm{grad}p. \tag{7.9}$$

Поясним, что в (7.6)-(7.9) через df/dt обозначена полная (субстанциональная, т. е. связанная с фиксированными частицами газа) производная по времени какой-либо величины, характеризующей данную неизменную массу газа.

Раскрыв df/dt через частные производные по x и t в соответствии с правилом $df/dt = \partial f/\partial t + (\vec{v}\mathrm{grad})f$, придем к *уравнениям движения Эйлера*

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\mathrm{grad})\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\mathrm{grad}p. \tag{7.10}$$

Будучи записаны покоординатно, они принимают вид

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \tag{7.11}$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_y}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}, \tag{7.12}$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}. \tag{7.13}$$

В отличие от течения грунтовых вод, градиенты давления в уравнениях движения газа (7.6)—(7.13) определяют компоненты ускорения вещества, а не компоненты его скорости (ср. с законом Дарси).

Уравнения (7.4), (7.11)—(7.13) содержат пять неизвестных величин - ρ, p, v_x, v_y, v_z. Для их замыкания естественнее всего использовать закон сохранения энергии.

7.4. Уравнение энергии

Для его получения используем ту же упрощенную схему, что и в предыдущем пункте: будем рассматривать изменение внутренней энергии фикси-

рованной массы газа dm за короткий промежуток времени dt. Так как по сделанным допущениям в веществе отсутствует теплопроводность, вязкость и источники (стоки) энергии, то это изменение вызывается лишь работой сил давления на гранях кубика при его сжатии или расширении.

Работа давления, связанная с движением граней объема вдоль оси x, очевидно, равна

$$dA_x = p(v_x(x) - v_x(x + dx))\, dt\, dy\, dz,$$

где слагаемые в скобках можно, отбрасывая члены второго порядка малости, переписать через производую $\partial v_x/\partial x$ и получить

$$dA_x = -p\frac{\partial v_x}{\partial x}\, dx\, dy\, dz\, dt.$$

Здесь p - среднее давление в элементарном объеме. Аналогично,

$$dA_y = -p\frac{\partial v_y}{\partial y}\, dx\, dy\, dz\, dt,$$

$$dA_z = -p\frac{\partial v_z}{\partial z}\, dx\, dy\, dz\, dt.$$

Полная работа, совершенная над газом за время dt, есть

$$dA = dA_x + dA_y + dA_z = -p\,\mathrm{div}\,\vec{v}\, dx\, dy\, dz\, dt.$$

Она равна изменению внутренней энергии объема, т. е.

$$dA = \rho d\varepsilon dx dy dz,$$

ε - удельная внутренняя энергия. Приравняв оба выражения для dA и устремив к нулю dt, окончательно получим

$$\rho\frac{d\varepsilon}{dt} + p\mathrm{div}\vec{v} = 0, \tag{7.14}$$

где $d\varepsilon/dt$ - полная (субстанциональная) производная внутренней энергии по времени.

Заметим, что с помощью уравнений неразрывности и движения уравнение (7.14) приводится, подобно (7.4), к *дивергентному виду*

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\varepsilon + \frac{\rho v^2}{2}\right) = -\mathrm{div}\left[\rho\vec{v}\left(\varepsilon + \frac{v^2}{2}\right) + p\vec{v}\right]. \tag{7.15}$$

Слева в (7.15) стоит производная от полной (внутренней и кинетической) энергии газа в данной точке пространства.

Так как термодинамические свойства вещества предполагаются известными, то ε - известная функция уже введенных величин p и ρ, и уравнение (7.14) либо (7.15) дает недостающую связь для определения искомых газодинамических величин.

7.5. Уравнения газовой динамики в лагранжевых координатах

В полученных моделях течение газа характеризуется зависимостью величин от декартовых координат x, y, z и времени t. Этот способ описания

(*эйлеров подход*) трактует движение среды с точки зрения неподвижного стороннего наблюдателя и удобен, например, при изучении обтекания газом моделей летательных аппаратов в аэродинамических трубах. В *лагранжевом подходе* координата связывается не с определенной точкой пространства, а с определенной, фиксированной частицей вещества - жидкой частицей. Лагранжевы координаты удобны, например, при анализе некоторых внутренних процессов, протекающих в частице, скажем, химических реакций, скорость которых определяется не пространственным положением частицы, а ее температурой и плотностью. Лагранжев подход может быть полезен и по другим причинам: он, например, неявно использовался в предыдущих пунктах для упрощенного вывода уравнений движения и энергии (рассматривалась жидкая частица в виде кубика).

Особенно наглядную и простую форму газодинамические уравнения в лагранжевых координатах имеют в одномерном случае. Действительно, взяв в направлении оси x столб единичного сечения, левая граница которого подвижна и связана с фиксированными частицами вещества, можно ввести лагранжеву координату по правилу

$$m(x) = \int_{x_0}^{x} \rho(x,t)dx, \;\; dm = \rho dx \tag{7.16}$$

где $x_0(t)$ - координата частиц столба на его левом конце, $x(t)$ - текущая координата (в качестве частицы с координатой $x_0(t)$ можно выбрать частицу около твердой стенки, ограничивающей газ, или у границы с пустотой, если таковые имеются). Величина $m(x)$ - масса столба между точками x_0, x.

Связь (7.16) дает наиболее естественный и простой способ введения лагранжевой переменной (называемой в этом случае массовой координатой). Теперь все газодинамические величины трактуются как зависящие не от x, t, а от m, t. Получим для них уравнения движения из одномерных уравнений в эйлеровой форме

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho}{\partial t} + v\frac{\partial \rho}{\partial x} = -\rho\frac{\partial v}{\partial x},\\
&\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},\\
&\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + v\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = -\frac{p}{\rho}\frac{\partial v}{\partial x}.
\end{aligned} \tag{7.17}$$

Выражения, стоящие в (7.17) слева, это уже вводившиеся субстанциональные производные, описывающие изменение со временем величин, относящихся к фиксированной массовой координате m. Тогда, используя (7.16), из (7.17) получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{\rho} + v\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial m}, \tag{7.18}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial m}, \tag{7.19}$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -p\frac{\partial v}{\partial m}. \tag{7.20}$$

Здесь $\partial/\partial t$ - субстанциональная производная по времени от соответствующих величин. Физическая трактовка уравнений движения (7.19) и энергии

(7.20) та же, что и в эйлеровых координатах (в отличие от уравнения неразрывности (7.18)). Последнее представляет собой очевидное свойство: объем (а с ним и плотность) фиксированной жидкой частицы изменяется со временем благодаря разности скоростей на ее границах.

С помощью (7.19) уравнение энергии можно записать в дивергентном виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon + \frac{v^2}{2}\right) = -\frac{\partial}{\partial m}(\rho v), \tag{7.21}$$

где слева стоит производная по времени относительно полной энергии частицы.

Если решение лагранжевых уравнений найдено, в частности, найден удельный объем $V(m,t) = 1/\rho(m,t)$, то зависимость газодинамических функций от эйлеровой координаты находится из квадратуры (см. (7.16))

$$dx = V(m,t)dm, \;\; x(m,t) = \int\limits_0^m V(m,t)dm + x_0(t).$$

С помощью таких же рассуждений нетрудно получить лагранжевы уравнения в случае цилиндрической и сферической симметрии, когда газодинамические величины зависят лишь от одной пространственной координаты r (r - расстояние от оси или от центра симметрии) и от времени t. Они также имеют весьма простой и наглядный вид, чего нельзя сказать о двумерном и трехмерном случае.

Несмотря на разные формы записи, эйлеровы и лагранжевы уравнения газовой динамики обладают, естественно, аналогичными свойствами, явля-

ясь нелинейными гиперболическими уравнениями в частных производных (нестационарными и в общем случае многомерными). На их основе получаются более сложные модели движения сжимаемых сред, включающие дополнительные физические процессы. Так, для газа, обладающего теплопроводностью, участвующей в процессе переноса энергии, уравнения неразрывности (7.18) и движения (7.19) остаются в силе, а уравнение энергии приобретает вид

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -p\frac{\partial v}{\partial m} - \frac{\partial W}{\partial m}, \tag{7.22}$$

где $W = -\chi\rho\partial T/\partial m$ - поток тепла, $\chi = \chi(\rho, T)$ - коэффициент теплопроводности. Внутренняя энергия жидкой частицы такого газа изменяется не только за счет работы сил давления, но и из-за наличия теплопередачи. Более простые, чем (7.18)-(7.20), модели газовой динамики получаются при соответствующих дополнительных предположениях.

7.6. Краевые условия для уравнений газовой динамики

Наиболее наглядна их постановка в случае одномерного течения газа, описываемого уравнениями (7.18)-(7.20). Рассмотрим такое течение в трубе, внутри которой помещен газ, ограниченный справа и слева непроницаемыми твердыми стенками - поршнями (рис. 7.3). Частицам, находящимся у левой стенки, припишем координату $m = 0$; тогда координата частиц у правой стенки равна $m = M$, где M - полная масса газа между поршнями в столбе

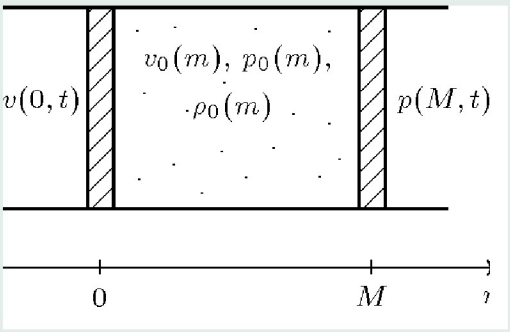


Рис. 7.3. Течение ограниченного газа в трубе

единичного сечения. Внутренние частицы имеют координату $0 < m < M$. Уравнения (7.18)-(7.20) рассматриваются в области $0 < m < M$ и при $t > 0$.

Для определения течения при всех $0 < m < M$ и $t > 0$ необходимо задать:

1) начальные условия, т. е. состояние газа в момент $t = 0$,

$$v(m,0) = v_0(m),\ p(m,0) = p_0(m),\ \rho(m,0) = \rho_0(m), \qquad (7.23)$$

$$0 \leqslant m \leqslant M;$$

в (7.23) вместо p или ρ можно, пользуясь уравнениями состояния среды, задавать начальную температуру $T(m,0) = T_0(m)$;

2) граничные условия, т. е. зависимость от времени газодинамических величин на границах $m = 0$, $m = M$, например, закон изменения давления

$$p(0,t) = p_1(t),\ p(M,t) = p_2(t),\ \ t > 0, \qquad (7.24)$$

или закон изменения скорости поршней (т. е. их траекторию в эйлеровых координатах, так как $\partial x/\partial t = v$)

$$v(0,t) = v_1(t),\ v(M,t) = v_2(t),\ \ t > 0, \tag{7.25}$$

Знание краевых условий (7.23) и (7.24) (либо (7.25)) полностью определяет однозначное решение рассматриваемой *задачи о поршне.*

В качестве граничных условий допускаются также различные комбинации (7.24) и (7.25), когда на левой границе поддерживается известное давление $p_1(t)$, а на правой задается известная скорость $v_2(t)$ (или наоборот, как на рис. 7.3).

Если интересоваться лишь течением в окрестности одного из поршней, считая влияние второго поршня несущественным, то достаточно задать лишь одно из условий (7.24) (или (7.25)), например, при $m = 0$, и условие (7.23) при всех $m > 0$ (газ занимает полупространство, ограниченное слева поршнем).

Наконец, граничные условия (7.24) или (7.25) вообще не задаются, когда влиянием границ на движение газа в центральной области можно пренебречь (рассматривая процесс при достаточно малых временах). Тогда из исходной задачи для уравнений (7.18)—(7.20) получается задача Коши - задача об эволюции со временем некоторого первоначального распределения газодинамических величин, заданного в неограниченном пространстве. При этом начальные данные (7.23) определены для всех $-\infty < m < \infty$, а уравнения решаются в области $-\infty < m < \infty$, $t > 0$.

Важный класс краевых условий - условия на границе с вакуумом. Пусть сильно сжатый газ, имеющий высокое давление, начинает истекать в сравнительно разреженную среду, находящуюся при низком давлении. Идеали-

зируя этот процесс, можно считать давление и плотность в пространстве, в которое истекает газ, равными нулю, т. е. задавать условие $p_1(t) = 0$, $t > 0$, либо $p_2(t) = 0$, $t > 0$ (либо $p_1(t) = p_2(t) = 0$, $t > 0$), в зависимости от конкретной постановки задачи.

7.7. Некоторые особенности моделей газовой динамики

Для пояснения этих особенностей предварительно упростим уравнения (7.18)—(7.20), используя два обстоятельства. Первое из них - отсутствие в среде (по предположению) потерь энергии за счет теплопроводности, вязкости, излучения, внешних источников и стоков энергии и т. д. С термодинамической точки зрения это означает, что процесс адиабатический и энтропия S каждой фиксированной жидкой частицы со временем не меняется. Тогда уравнение энергии (7.20) можно переписать в эквивалентной форме

$$\frac{\partial S}{\partial t} = 0. \tag{7.26}$$

В этом нетрудно убедиться, также чисто формально применяя второе начало термодинамики

$$T\,dS = d\varepsilon + p\,dV \tag{7.27}$$

к жидкой частице.

Второе обстоятельство - особенная простота выражения энтропии через давление и плотность в случае идеального газа:

$$S = C_V \ln p\rho^{-\gamma} + S_0, \tag{7.28}$$

где $\gamma > 1$ - показатель адиабаты, равный отношению удельной теплоемкости при постоянном давлении (C_p) и постоянном объеме (C_V), S_0 - несущественная константа.

Из (7.26) с учетом (7.28) имеем

$$\frac{\partial p\rho^{-\gamma}}{\partial t} = 0,$$

что эквивалентно выражению

$$p\rho^{-\gamma} = \varphi(m), \tag{7.29}$$

означающему независимость от времени энтропии любой частицы газа. Функция $\varphi(m)$ описывает распределение энтропии по массе газа, определяемое по заданным в момент $t = 0$ функциям $p_0(m)$, $\rho_0(m)$.

Используя интеграл (7.29) вместо дифференциального уравнения (7.20), сведем (7.18), (7.19) к дифференциальному уравнению второго порядка относительно плотности:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial m}\left(a_0 \rho^{\gamma+1} \frac{\partial \rho}{\partial m}\right), \tag{7.30}$$

где $a_0 = \gamma\varphi_0$, а постоянная φ_0 - энтропия, предполагаемая не зависящей также и от массовой координаты (случай изэнтропического течения).

Гиперболичность уравнения (7.30) и тем самым уравнений газовой динамики легко установить не прибегая к вычислению характеристик, а получив его линейный аналог. Для этого рассмотрим малые возмущения газодинамических величин в окрестности постоянного решения $\rho(m,t) \equiv \rho_0$. Представляя возмущенное решение в виде $\rho(m,t) = \rho_0 + \bar{\rho}$ и предполагая малыми как сами возмущения, так и их производные, из (7.30) получаем уравнение для $\bar{\rho}$ (черточку опускаем):

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial m^2}. \tag{7.31}$$

Линейное уравнение (7.31) полностью аналогично уравнению колебаний струны, имеющему, как известно, гиперболический тип. Оно описывает распространение малых (звуковых) возмущений в газе (*уравнение акустики*) со скоростью звука $c_0 = \sqrt{\gamma p_0/\rho_0}$ и, в силу линейности, для него нетрудно найти общее решение.

Еще одно упрощение уравнений (7.18), (7.19), (7.29) получается в предположении о том, что течение имеет характер простой волны, т. е. любые газодинамические величины являются функциями какой-то одной выбранной величины, например плотности. Из (7.18), (7.19), (7.29) и с учетом того, что $v = v(\rho)$, получаем

$$-\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial \rho}{\partial t} = v_\rho \frac{\partial \rho}{\partial m}, \quad v_\rho \frac{\partial \rho}{\partial t} = -a_0 \rho^{\gamma-1} \frac{\partial \rho}{\partial m},$$

где v_ρ - производная скорости по плотности. Исключая из последних урав-

нений величину v_ρ, приходим к *уравнению Хопфа*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sqrt{a_0}\rho^{\frac{\gamma+1}{2}}\frac{\partial \rho}{\partial m} = 0. \tag{7.32}$$

Уравнение (7.32) первого порядка, но оно содержит типичную газодинамическую нелинейность, и поэтому служит хорошей моделью для изучения нелинейных эффектов, характерных для течений сжимаемого газа. Самый яркий из них - «градиентная катастрофа», заключающаяся в появлении в волнах сжатия бесконечных градиентов газодинамических величин, несмотря на то, что в начальный момент времени все функции являются гладкими.

Поясним это понятие следующими простыми рассуждениями. Уравнение Хопфа может быть записано в характеристическом виде

$$\left(\frac{d\rho}{dt}\right)_s = 0. \tag{7.33}$$

Здесь индекс s означает, что полная производная по времени берется вдоль характеристики - линии в координатах m, t, на которой значение решения (плотности) остается постоянным во все моменты. Раскрывая (7.33) в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{dm_s(t)}{dt}\frac{\partial \rho}{\partial m} = 0, \tag{7.34}$$

где $m_s(t)$ - значение координаты m для данной характеристики в разные моменты времени, и сравнивая (7.32) и (7.34), находим уравнение характеристики

$$m_s(t) = \sqrt{a_0}\rho^{\frac{\gamma+1}{2}}t + m_s(0).$$

Из этого выражения видно, что состояния с большим значением плотности распространяются по массе газа с большей скоростью, чем состояния с меньшей плотностью, и в какой-то момент времени «догоняют» последние. В решении образуется неоднозначность, его градиенты в точке «слияния» состояний с разными плотностями неограниченно возрастают.

«Градиентная катастрофа» - нелинейный эффект. Он не возникает в линейном уравнении (7.31) и линейном уравнении переноса, получающемся из (7.32) при рассмотрении малых возмущений в окрестности постоянного решения. Существование этого эффекта приводит к необходимости рассматривать разрывные решения уравнений газовой динамики (заметим, что при прохождении разрыва через жидкую частицу ее энтропия изменяется). В этом состоит важное отличие нелинейных гиперболических уравнений от параболических.

Глава 8

Модели трудноформализуемых объектов

8.1. Организация рекламной кампании

Фирма начинает рекламировать новый товар или услугу. Разумеется, что прибыль от будущих продаж должна с лихвой покрывать издержки на дорогостоящую кампанию. Ясно, что вначале расходы могут превышать прибыль, поскольку лишь малая часть потенциальных покупателей будет информирована о новинке. Затем, при увеличении числа прдаж, уже возможно рассчитывать на заметную прибыль, и, наконец,наступит момент, когда рынок насытится, и рекламировать товар далее станет бессмысленно.

Модель рекламной кампании основывается на следующих основных предположениях. Считается, что величина dN/dt - скорость изменения со временем числа потребителей, узнавших о товаре и готовых купить его (t - время, прошедшее с начала рекламной кампании, $N(t)$ - число уже информированных клиентов), - пропорциональна числу покупателей, еще не знающих о нем, т. е. величине $\alpha_1(t)(N_0-N(t))$, где N_0 - общее число потенциальных платежеспособных покупателей, $\alpha_1(t) > 0$ характеризует интенсивность рекламной кампании (фактически определяемую затратами на рекламу в данный момент времени). Предполагается также, что узнавшие о товаре потребители тем или иным образом распространяют полученную информацию среди неосведомленных, выступая как бы дополнительными рекламными «агентами» фирмы. Их вклад равен величине $\alpha_2(t)N(t)(N_0 - N(t))$ и тем больше, чем больше число агентов. Величина $\alpha_2(t) > 0$ характеризует степень общения покупателей между собой (она может быть установлена, например, с помощью опросов).

В итоге получаем уравнение

$$\frac{dN}{dt} = [\alpha_1(t) + \alpha_2(t)N(t)](N_0 - N). \tag{8.1}$$

При $\alpha_1(t) \gg \alpha_2(t)N(t)$ из (8.1) получается модель типа модели Мальтуса, при противоположном неравенстве - уравнение логистической кривой

$$\frac{dN}{d\tau} = N(N_0 - N), \quad d\tau = \alpha_2(t)dt.$$

Полученная аналогия вполне понятна, так как при построении данной модели и модели роста численности популяции использовалась одна и та

же идея «насыщения»: скорость роста со временем какой-либо величины пропорциональна произведению текущего значения этой величины $N(t)$ на разность $N_0 - N(t)$ между ее равновесным (популяция) либо предельным (покупатели) и текущим значениями.

Аналогия между обоими процессами заканчивается, если в какойто момент времени величина $\alpha_1 + \alpha_2 N$ становится нулевой или даже отрицательной (для этого необходимо, чтобы один или оба коэффициента $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$ стали отрицательными). Подобный негативный эффект довольно часто встречается в рекламных кампаниях различного рода и должен побудить их организаторов либо изменить характер рекламы, либо вовсе отказаться от дальнейшей пропаганды. Мероприятия по увеличению популярности товара могут, в зависимости от значений величин $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$, $N(t)$, направляться на улучшение результатов как прямой (параметр α_1), так и косвенной (параметр α_2) рекламы.

Модель (8.1) лишена очевидного недостатка, присущего логистическому уравнению. Действительно, оно не имеет решений, обращающихся в нуль в конечный момент времени (из соответствующей формулы для $N(t)$ следует, что $N(t) \to 0$ при $t \to \infty$). Применительно к рекламе это означало бы, что часть покупателей еще до начала кампании уже знает о новом товаре. Если же рассмотреть модель (8.1) в окрестности точки $N(t = 0) = N(0) = 0$ ($t = 0$ - момент начала кампании), считая, что $N \ll N_0$, $\alpha_2(t)N \ll \alpha_2(t)$, то уравнение (8.1) принимает вид

$$\frac{dN}{dt} = \alpha_1(t)N_0$$

и имеет решение

$$N(t) = N_0 \int_0^t \alpha_1(t)\, dt, \tag{8.2}$$

удовлетворяющее естественному начальному условию при $t = 0$.

Из (8.2) относительно легко вывести соотношение между рекламными издержками и прибылью в самом начале кампании. Обозначим через p величину прибыли от единичной продажи, какой бы она была без затрат на рекламу. Считаем для простоты, что каждый покупатель приобретает лишь одну единицу товара. Коэффициент $\alpha_1(t)$ по своему смыслу - число равнозначных рекламных действий в единицу времени (например, расклейка одинаковых афиш). Через s обозначим стоимость элементарного акта рекламы. Тогда суммарная прибыль есть

$$P = pN(t) = pN_0 \int_0^t \alpha_1(t)\, dt, \tag{8.3}$$

а произведенные затраты

$$S = s \int_0^t \alpha_1(t)\, dt.$$

Прибыль превосходит издержки при условии $pN_0 > s$, и если реклама действенна и недорога, а рынок достаточно емок, то выигрыш достигается с первых же моментов кампании (в реальности между оплатой рекламы, рекламным действием и последующей покупкой имеет место так называемый

лаг - временная задержка, которая может быть учтена в более полных моделях). При не слишком эффективной или дорогой рекламе фирма на первых шагах несет убытки. Однако это обстоятельство, вообще говоря, не может служить основанием для прекращения рекламы. Действительно, выражение (8.3) и полученное с его помощью условие $pN_0 > s$ справедливы лишь при малых значениях $N(t)$, когда функции P и S растут со временем по одинаковым законам. При увеличении $N(t)$ отброшенные в (8.1) члены становятся заметными, в частности усиливается действие косвенной рекламы. Поэтому функция $N(t)$ может стать более «быстрой» функцией времени, чем в формуле (8.3). Этот нелинейный эффект в изменении величины $N(t)$ при неизменном темпе роста издержек дает возможность скомпенсировать финансовую неудачу начальной стадии кампании.

Поясним данное утверждение в частном случае уравнения (8.1) с постоянными коэффициентами α_1, α_2. Заменой

$$\bar{N} = \alpha_1/\alpha_2 + N$$

оно сводится к логистическому уравнению

$$\frac{d\bar{N}}{dt} = \alpha_2 \bar{N}(\bar{N}_0 - \bar{N}), \quad \bar{N}_0 = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} + N_0, \tag{8.4}$$

имеющему решение

$$\bar{N}(t) = [1 + (\bar{N}_0\alpha_2/\alpha_1 - 1)\exp(-\bar{N}_0\alpha_2 t)]^{-1}. \tag{8.5}$$

При этом $\bar{N}_0 = \alpha_1/\alpha_2$, так что $N(0) = 0$, и начальное условие выполняется. Из (8.4) видно, что производная функции $\bar{N}(t)$ и, следовательно, функции

$N(t)$ может при $t > 0$ быть больше ее начального значения (при условии $\bar{N}_0 > 2\alpha_1/\alpha_2$ или $N_0 > \alpha_1/\alpha_2$). Максимум производной достигается при $\bar{N} = \bar{N}_0/2$, $N = (\alpha_1/\alpha_2 + N_0)/2$:

$$\left(\frac{d\bar{N}}{dt}\right)_m = \left(\frac{dN}{dt}\right)_m = \alpha_2 \frac{\bar{N}_0^2}{4} = \alpha_2 \frac{(\alpha_1/\alpha_2 + N_0)^2}{4}.$$

В этот период для текущей, т. е. получаемой в единицу времени прибыли имеем

$$P_m = p\frac{dN}{dt} = p\alpha_2 \frac{\bar{N}_0^2}{4} = \alpha_2 \frac{(\alpha_1/\alpha_2 + N_0)^2}{4}.$$

Вычитая из P_m начальную текущую прибыль $P_0 = p(dN/dt)_{t=0} = \alpha_1 N_0$ (см. (8.2)), получаем

$$P_m - P_0 = p\frac{(\alpha_1/\sqrt{\alpha_2} - \sqrt{\alpha_2}N_0)^2}{4},$$

т. е. разница между начальной и максимальной текущей прибылью может быть весьма значительной. Суммарный экономический эффект от кампании (его необходимым условием является, очевидно, выполнение неравенства $P_m = p(\alpha_1/\sqrt{\alpha_2} - \sqrt{\alpha_2}N_0)^2/4 > \alpha_1 s$) определяется всем ее ходом, характеристики которого вычисляются из (8.4), (8.5) с помощью квадратуры.

Как следует из (8.4), начиная с некоторого момента, продолжать рекламу становится невыгодно. Действительно, при $\bar{N}(t)$, близких к $\bar{N}_0$, уравнение (8.4) записывается в виде

$$\frac{d\bar{N}}{dt} = \alpha_2 \bar{N}_0(\bar{N}_0 - \bar{N}). \tag{8.6}$$

Его решение стремится при $t \to \infty$ к предельному значению $\bar{N}_0$ (а функция $N(t)$ - к N_0) по медленному экспоненциальному закону. В единицу времени появляется ничтожно малое число новых покупателей, и поступающая прибыль при любых условиях не может покрыть продолжающихся издержек.

Аналогичные характеристики вычисляются для уравнения (8.1) и различных его обобщений, широко используемых также для описания внедрения технологических и иных новшеств.

8.2. Боевые действия двух армий

В противоборстве могут принимать участие как регулярные армии, так и партизанские соединения. Главной характеристикой соперников в рассматриваемых моделях являются численности сторон $N_1(t) \geqslant 0$ и $N_2(t) \geqslant 0$. Если в какой-то момент времени одна из численностей обращается в нуль, то данная сторона считается потерпевшей поражение (притом, что в этот момент численность другой стороны положительна).

В случае действий между регулярными частями динамика их численности определяется тремя факторами:

1) скоростью уменьшения состава из-за причин, непосредственно не связанных с боевыми действиями (болезни, травмы, дезертирство);

2) темпом потерь, обусловленных боевыми действиями противоборствующей стороны (которые в свою очередь определяются качеством ее стратегии и тактики, уровнем морального духа и профессионализмом бойцов, вооружениями и т. д.);

3) скоростью поступления подкреплений, которая считается некоторой заданной функцией времени.

При этих предположениях для $N_1(t)$, $N_2(t)$ получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dN_1}{dt} &= -\alpha_1(t)N_1 - \beta_2(t)N_2 + \gamma_1(t), \\ \frac{dN_2}{dt} &= -\alpha_2(t)N_2 - \beta_1(t)N_1 + \gamma_2(t), \end{aligned} \tag{8.7}$$

из которой при заданных функциях α_i, β_i, γ_i, $i = 1, 2$, и начальных значениях $N_1(0)$, $N_2(0)$ однозначно определяется решение в любой момент времени $t > 0$. В (8.7) коэффициенты $\alpha_{1,2} \geqslant 0$ характеризуют скорости потерь в силу обычных (не боевых) причин, $\beta_{1,2} \geqslant 0$ - темпы потерь из-за действий соперника, $\gamma_{1,2} \geqslant 0$ - скорости поступления подкреплений.

Война между регулярными и партизанскими частями описывается другой моделью. Главное отличие в том, что нерегулярные соединения в сравнении с армейскими менее уязвимы, так как действуют скрытно, зачастую оставаясь невидимыми для соперника, вынужденного действовать неизбирательно, по площадям, занимаемым партизанами. Поэтому считается, что темп потерь партизан, проводящих свои операции в разных местах на некоторой известной территории, пропорционален не только численности армейских соединений $N_1(t)$, но и численности самих партизан $N_2(t)$, т. е. определяется членом вида $\beta_1(t)N_1N_2$. В результате модель становится нелинейной:

$$\begin{aligned} \frac{dN_1}{dt} &= -\alpha_1(t)N_1 - \beta_2(t)N_2 + \gamma_1(t), \\ \frac{dN_2}{dt} &= -\alpha_2(t)N_2 - \beta_1(t)N_1N_2 + \gamma_2(t). \end{aligned} \tag{8.8}$$

В (8.8) все величины имеют тот же смысл, что и в (8.7). Изучим модели (8.7), (8.8) (*модели Ланчестера*) в частном случае: $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ (стороны не получают подкреплений и как бы предоставлены самим себе); $\alpha_1 = \text{const}$, $\alpha_2 = \text{const}$; $\beta_1 = \text{const}$, $\beta_2 = \text{const}$ (последнее означает, в частности, что у противников всегда найдется достаточное количество вооружений, которое может использоваться годными к несению службы бойцами).

Модель (8.7) становится автономной и принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{dN_1}{dt} &= -\alpha_1 N_1 - \beta_2 N_2, \\ \frac{dN_2}{dt} &= -\alpha_2 N_2 - \beta_1 N_1. \end{aligned} \tag{8.9}$$

Из уравнений (8.9) видно, что в данном случае численности сторон с течением времени могут только убывать. Каков временной характер этого процесса и какая сторона потерпит поражение? Чтобы выяснить этот вопрос, введем еще одно упрощение (вполне оправданное для краткосрочных кампаний): положим $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Другими словами, потери сторон определяются лишь действиями противника. Система (8.9) упрощается:

$$\frac{dN_1}{dt} = -\beta_2 N_2, \quad \frac{dN_2}{dt} = -\beta_1 N_1. \tag{8.10}$$

и легко находится ее интеграл

$$\beta_1 N_1^2(t) - \beta_2 N_2^2(t) = \beta_1 N_1^2(0) - \beta_2 N_2^2(0) = C. \tag{8.11}$$

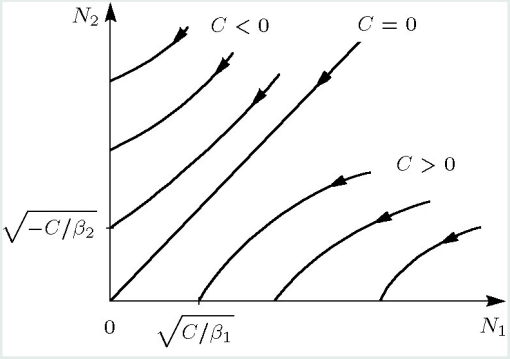


Рис. 8.1. Изменение численности противников

Из (8.11) однозначно определяется победитель (рис. 8.1). При $C > 0$ побеждает первая армия, при $C < 0$ - вторая, в случае $C = 0$ стороны уничтожают друг друга одновременно, и победителя нет. Смысл этих результатов вполне ясен из вида константы в (8.11). Для победы важна не только численность сторон в начале боевых действий ($N_1(0)$, $N_2(0)$), но и их выучка, качество их вооружений и т. д. (т. е. коэффициенты β_1, β_2). Так, если $C > 0$, то из (8.11) следует

$$\beta_1 N_1^2(0) > \beta_2 N_2^2(0),$$

и для достижения победы второй стороне следует либо увеличить начальную численность, либо улучшить качество боевых действий, либо то и другое одновременно. Заметим, что эффект от увеличения коэффициента β_2 меньше, чем от такого же увеличения числа $N_2(0)$, которое входит в последнее неравенство (так называемый квадратичный закон боевых действий) во второй степени.

Дифференцируя первое из уравнений (8.10) и принимая во внимание второе, получаем уравнение для $N_1(t)$

$$\frac{d^2N_1}{dt^2} = \beta_1\beta_2 N_1. \tag{8.12}$$

Из (8.12) с учетом начальных условий $N_1(t=0) = N_1(0)$ и $dN_1/dt(t=0) = -\beta_2 N_2(0)$ находим численность первой армии как функцию времени:

$$N_1(t) = N_1(0)\,\mathrm{ch}\,\sqrt{\beta_1\beta_2}t - \sqrt{(\beta_2/\beta_1)N_2(0)}\,\mathrm{sh}\,\sqrt{\beta_1\beta_2}t, \tag{8.13}$$

зная которую, нетрудно найти и функцию $N_2(t)$.

Рассмотрим теперь действия регулярной армии против партизан в тех же упрощающих предположениях, что и в предыдущем случае. Модель (8.8) приобретает вид

$$\frac{dN_1}{dt} = -\beta_2(t)N_2, \quad \frac{dN_2}{dt} = -\beta_1(t)N_1N_2. \tag{8.14}$$

Численности сторон, как и прежде, убывают со временем, но по другому закону. Умножим первое уравнение (8.14) на $\beta_1 N_1$, второе - на β_2 и вычтем

второе получившееся уравнение из первого. В итоге придем к уравнению

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\beta_1}{2}N_1^2(t) - \beta_2 N_2(t)\right] = 0,$$

имеющему интеграл

$$\frac{\beta_1}{2}N_1^2(t) - \beta_2 N_2(t) = \frac{\beta_1}{2}N_1^2(0) - \beta_2 N_2(0) = C_1. \qquad (8.15)$$

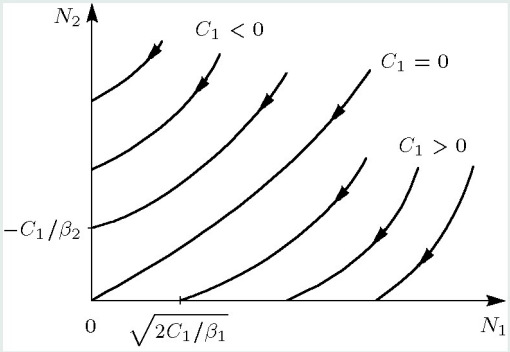


Рис. 8.2. Изменение численности противников

Изучим фазовые траектории системы (8.14) с помощью интеграла (8.15). Из рис. 8.2 видно, что при $C_1 > 0$ побеждает армия, при $C_1 < 0$ - партизаны, а при $C_1 = 0$ победителя нет. Так же, как и при действии регулярных частей, победа обеспечивается не только начальной численностью, но и боевой

выучкой и качеством оружия. Пусть, например, $C_1 > 0$, т. е.

$$\frac{\beta_1}{2} N_1^2(0) > \beta_2 N_2(0). \tag{8.16}$$

Тогда партизанам необходимо обеспечить увеличение коэффициента β_2 и повысить свою начальную численность $N_2(0)$ на соответствующую величину, иначе они обречены на поражение. Причем это увеличение с ростом величины $N_1(0)$ должно расти не линейно, а пропорционально второй степени $N_1(0)$ (*параболический закон боевых действий*). Можно сказать, что в некотором смысле регулярные соединения находятся в более выгодном положении, поскольку неравенство (8.16) для них достигается при меньшем росте начальной численности, чем противоположное (8.16) неравенство для численности партизан.

Поведение функций $N_1(t)$, $N_2(t)$ во времени находится из (8.14) с использованием интеграла (8.15). Так, для $N_1(t)$ имеем

$$\frac{dN_1}{dt} = C_1 - \frac{\beta_1}{2} N_1^2,$$

что эквивалентно уравнению

$$\frac{dN_1}{C_1 - \beta_1 N_1^2/2} = dt \tag{8.17}$$

Интегрируя (8.17), нетрудно найти $N_1(t)$ и затем $N_2(t)$ как неявные функции времени.

В заключение отметим, что рассмотренные здесь простейшие модели соперничества соответствуют системам обыкновенных дифференциальных

уравнений второго порядка (в общем случае неавтономных и нелинейных), широко распространенным при описании многих естественнонаучных объектов. Это закономерно, так как использованные при построении подходы (насыщение, пропорциональность темпов роста величины значению этой величины и др.) аналогичны подходам, применяемым в механике, физике, химии.

Глава 9

Применение методов подобия

Дадим характеристику способов упрощения математических моделей, основанных на свойствах их симметрии. Приведем описание самоподобных (автомодельных) явлений. Исследуем некоторые автомодельные процессы для нелинейных параболических и гиперболических уравнений.

9.1. Анализ размерностей и групповой анализ моделей

Одно из фундаментальных свойств природных, технологических, многих экономических и социальных объектов - симметрия (подобие, повто-

ряемость, воспроизводимость) - находит свое отражение в их математических моделях. Наличие какого-либо вида симметрии у изучаемого явления означает большую простоту объекта в сравнении с его менее симметричным аналогом. На этом основываются широко применяемые методы упрощения математических моделей и, следовательно, методы упрощения их анализа. Они состоят в понижении порядка системы уравнений, образующих модель, в уменьшении числа переменных, от которых зависят искомые величины, или числа постоянных параметров, определяющих процесс, и т. д. (так, симметрия функции трех переменных относительно этих переменных позволила найти максимально возможное значение скорости трехступенчатой ракеты).

Типичный подход к использованию свойств симметрии - анализ размерности величин, входящих в модель. Часть характеристик объектов измеряется в каких-либо единицах, имеющих непосредственный (механический, физический, экономический и т. д.) смысл. Например, масса в граммах, температура в градусах Кельвина, валовый национальный продукт в рублях. Такие величины называются *размерными*, их численное значение зависит от выбора единиц измерения. Среди них выделяются величины с независимой (основной) размерностью, или *размерно независимые* величины. Например, если для описания механических явлений используется система единиц СГС (сантиметр, грамм, секунда), то размерности длины x, массы m и времени t независимы и не выражаются одна через другую. В отличие от них размерность кинетической энергии $T = mv^2/2$ определяется через размерности основных величин по формуле $[T] = [m][x]^2[t]^{-2} = \text{г} \cdot \text{см}^2 \cdot \text{с}^2$, называемой *формулой размерности* (здесь $v = dx/dt$, через символ $[f]$ обозначается размерность величины f). Такие величины называются *размерно зависимыми.*

Напомним, что явления и процессы могут описываться также и безразмерными величинами, скажем, отношением длины водоносного пласта к его ширине, показателем степени в формуле, дающей зависимость коэффициента теплопроводности от температуры, годовым банковским процентом и т. п.

Системы единиц измерения можно выбирать по-разному, причем связи между величинами, характеризующими объект (получаемые из законов природы или иных соображений), не должны изменяться при изменении единиц измерения. Например, второй закон Ньютона $F = ma$ (F - сила, a - ускорение) в системе СИ записывается точно так же, как и в системе СГС. Инвариантность явлений и процессов по отношению к изменению единиц измерения находит свое воплощение в так называемой П-теореме.

Пусть имеется функциональная связь

$$a = F(a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n) \tag{9.1}$$

между $n+1$ размерными величинами $a, a_1, \ldots, a_n$, где величины $a_1, a_2, \ldots, a_k$ имеют независимую размерность, и пусть эта связь не зависит от выбора системы единиц измерения (величина a искомая, а остальные задаваемые).

Тогда связь (9.1) может быть записана как

$$\Pi = F(\underbrace{1, \ldots, 1}_{k}, \underbrace{\Pi_1, \ldots, \Pi_{n-k}}_{n-k}), \tag{9.2}$$

т. е. в виде соотношения между $n+1-k$ величинами $\Pi, \Pi_1, \ldots, \Pi_{n-k}$, представляющими собой безразмерные комбинации из $n+1$ размерных величин $a, a_1, \ldots, a_n$.

При этом величины $\Pi, \Pi_1, \ldots, \Pi_{n-k}$ связаны с $a, a_1, \ldots, a_n$ простыми соотношениями

$$\begin{aligned} a &= \Pi a_1^{m_1} a_2^{m_2} \ldots a_k^{m_k}, \\ a_{k+1} &= \Pi_1 a_1^{l_1} a_2^{l_2} \ldots a_k^{l_k}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n &= \Pi_{n-k} a_1^{p_1} a_2^{p_2} \ldots a_k^{p_k}. \end{aligned} \tag{9.3}$$

Здесь показатели степеней $m_1, \ldots, m_k; l_1, \ldots, l_k; \ldots; p_1, \ldots, p_k$ те же, что и в соответствующих формулах размерностей для размерно зависимых величин $a, a_1, \ldots, a_n$, например в формуле $[a] = [a_1]^{m_1}[a_2]^{m_2} \ldots [a_k]^{m_k}$. Доказательство П-теоремы основано на инвариантности связи (9.1) относительно единиц измерения. Прежде всего проведем *обезразмеривание* соотношения (9.1), исходя их того, что любая размерно независимая величина a_i, $i = 1, \ldots, k$, может быть представлена в виде $a_i = \bar{a}_i \alpha_i$. Здесь безразмерный коэффициент $\bar{a}_i$ - числовое значение величины a_i в применяемой системе единиц, а сомножитель α_i имеет размерность a_i и характеризует масштаб измерения (десятки или сотни фунтов, сотни или тысячи градусов, миллионы или миллиарды рублей и т. д.). Числовые значения безразмерных множителей для размерно зависимых величин $a, a_{k+1}, \ldots, a_n$ вычисляются с использованием *масштабных множителей* α_i, $i = 1, \ldots, k$, по правилу

$$\bar{a} = \frac{a}{\alpha_1^{m_1} \alpha_2^{m_2} \ldots \alpha_k^{m_k}}, \ \bar{a}_{k+1} = \frac{a_{k+1}}{\alpha_1^{l_1} \alpha_2^{l_2} \ldots \alpha_k^{l_k}}, \ \bar{a}_n = \frac{a_n}{\alpha_1^{p_1} \alpha_2^{p_2} \ldots \alpha_k^{p_k}},$$

непосредственно следующему из формул размерностей для каждой из них. Соотношение (9.1) можно трактовать также и как связь между числовыми

значениями величин $a, a_1, \ldots, a_n$ (т. е. связь между безразмерными величинами $\bar{a}, \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n$), не зависящую, по предположению, от единиц измерения. Таким образом, для любых наборов масштабных множителей α_i справедливо

$$\bar{a} = F(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_k, \bar{a}_{k+1}, \ldots, \bar{a}_n),$$

или

$$\frac{a}{\alpha_1^{m_1}\alpha_2^{m_2}\ldots\alpha_k^{m_k}} = \\ = F\left(\frac{a_1}{\alpha_1}, \frac{a_2}{\alpha_2}, \ldots, \frac{a_k}{\alpha_k}, \frac{a_{k+1}}{\alpha_1^{l_1}\alpha_2^{l_2}\ldots\alpha_k^{l_k}}, \ldots, \frac{a_n}{\alpha_1^{p_1}\alpha_2^{p_2}\ldots\alpha_k^{p_k}}\right).$$

Положим теперь $\alpha_1 = a_1$, $\alpha_2 = a_2$, …, $\alpha_k = a_k$. Другими словами, выберем масштабные множители так, чтобы в полученной системе единиц измерения величины $\bar{a}_1, \ldots \bar{a}_k$ тождественно равнялись единице. Тогда из последнего соотношения немедленно вытекают формулы (9.2) и (9.3). Применение П-теоремы снижает число величин, фигурирующих в описании объекта, и дает явный способ представления искомой величины a (и величин $a_{k+1}, \ldots, a_n$) через $\Pi, \Pi_1, \ldots, \Pi_{n-k}$ и $a_1, \ldots, a_k$. Он «безразличен» к конкретному виду функциональной зависимости (9.1), требуется лишь достаточная гладкость функции F.

В частности, если $n = k$, то, как сразу следует из (9.2), $\Pi = \text{const}$, и

$$a = \text{const} \cdot a_1^{m_1} a_2^{m_2} \ldots a_k^{m_k},$$

т. е. для решения получается простое выражение через задаваемые параметры (чтобы знать точное значение a, остается определить константу). Пусть,

например, известно, что период колебания маятника T не зависит от его начального отклонения и скорости, а определяется лишь его длиной l, массой m и ускорением свободного падения g. Функциональная связь $T = T(l, m, g)$ содержит четыре размерных величины, три из которых имеют независимые размерности. Выберем в качестве таковых T, l и m, тогда для размерности g будем иметь $[g] = [l][T]^{-2}$, или $[T] = [l]^{1/2}[g]^{-1/2}$, откуда

$$T = \text{const} \cdot \sqrt{l/g}.$$

С точностью до безразмерного множителя данная формула совпадает с полученной из решения уравнения колебаний маятника (попутно выясняется, что их период не зависит от m).

Заметим, что безразмерные параметры, характеризующие объект, при вариации единиц измерения не изменяются и поэтому в П-теореме не фигурируют.

Процедура обезразмеривания (*масштабирования*) всегда полезна при изучении математических моделей, поскольку может дать важную предварительную информацию об объекте.

Получаемые с помощью П-теоремы безразмерные величины $\Pi_1, \ldots, \Pi_{n-k}$ можно назвать *параметрами* (*критериями*) *подобия* в том смысле, что разные по своим масштабам, но одинаковые по сущности явления и процессы ведут себя качественно одинаково при заданном наборе параметров $\Pi_1, \ldots, \Pi_{n-k}$ (и одинаково изменяются при их изменении).

Инвариантность моделей по отношению к системе единиц измерения - частный случай более общих свойств их симметрии. Наиболее хорошо разработанный и широко применяемый подход, использующий подобие моде-

лей, основан на так называемом *инвариантно-групповом методе* исследования дифференциальных уравнений. Действительно, большинство дифференциальных уравнений, представляющих собой составную часть математических моделей многих явлений, остаются неизменными (*инвариантными*) при некоторых преобразованиях входящих в них независимых переменных и искомых функций.

Например, уравнение теплопередачи

$$c\frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(\chi \cdot \operatorname{grad} T) \tag{9.4}$$

инвариантно к «сдвигу» времени $t' = t + t_0$ и, если функции c и χ не зависят от $\vec{r}$, к «сдвигу» координат $\vec{r}' = \vec{r} + \vec{r}_0$. В частном случае $c = c_0$, $\chi = \chi_0 T^\sigma$, т. е. при степенной зависимости коэффициента теплопроводности от температуры, (9.4) не меняет своего вида при преобразованиях «растяжения—сжатия»: $t' = \alpha t$, $\vec{r}' = \beta\vec{r}$, $T' = \gamma T$ (числа α, β, γ должны подчиняться некоторой связи).

Аналогичными свойствами обладают, как легко видеть, одномерные уравнения газовой динамики для идеального политропного газа

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\rho}\right) = \frac{\partial v}{\partial m}, \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial m}, \frac{\partial}{\partial t}(p\rho^{-1}) = 0, \tag{9.5}$$

записанные в массовых координатах. Нетрудно убедиться, что в том или ином виде инвариантность присуща большинству построенных моделей.

Рассмотренные выше преобразования переменных и различные их комбинации и обобщения относятся к классу так называемых точечных пре-

образований, или преобразований Ли (производные от величин не преобразуются). Пусть они к тому же удовлетворяют некоторым дополнительным условиям (представляют собой группу). Тогда дифференциальное уравнение, допускающее группу Ли, может быть упрощено: либо понижается его порядок, либо уменьшается число независимых переменных, определяющих искомые функции. Одна из целей группового анализа - определение всех групп преобразований, допускаемых данным уравнением или системой уравнений, и соответствующих этим группам так называемых *инвариантных решений* уравнений. С точки зрения исследования математических моделей важны, прежде всего, не сложная и громоздкая процедура группового анализа, а его конечные итоги применительно к конкретному уравнению (для большинства базовых математических моделей эти результаты получены).

Подчеркнем также, что этот метод изучает свойства дифференциального уравнения как такового, т. е. свойства лишь части модели исходного объекта (без других входных данных, например без краевых условий). Поэтому пригодность получаемых на его основе тех или иных инвариантных решений для описания конкретного явления должна исследоваться дополнительно. В отличие от группового анализа, теория размерностей (ее можно рассматривать как применение частного случая групповой симметрии, сводящейся к растяжению-сжатию единиц измерения) и вытекающая из нее П-теорема оперируют с моделью во всей ее полноте.

9.2. Автомодельные (самоподобные) процессы

Среди инвариантных решений дифференциальных уравнений выделяется важный класс *самоподобных*, или *автомодельных* решений. К ним принято относить широко используемые решения типа бегущей волны, степенные автомодельные решения и экспоненциальные автомодельные решения.

Убедимся в полезности построения и анализа автомодельных решений для исследования математических моделей. В качестве первого примера рассмотрим решения типа бегущей волны для системы уравнений (9.5). Они ищутся в виде

$$\rho(m,t) = \rho(\xi) = \rho(m - Dt),$$
$$v(m,t) = v(\xi) = v(m - Dt),$$
$$p(m,t) = p(\xi) = p(m - Dt),$$

где $D > 0$ - некоторая постоянная. Подставляя эти выражения в (9.5) с заменой для единообразия третьего уравнения дивергентным уравнением энергии, получим вместо уравнений в частных производных систему трех обыкновенных дифференциальных уравнений

$$D\frac{d}{d\xi}\frac{1}{\rho} + \frac{dv}{d\xi} = 0,\ -D\frac{dv}{d\xi} + \frac{dp}{d\xi} = 0,\ -D\frac{d}{d\xi}\left(\varepsilon + \frac{v^2}{2}\right) + \frac{d}{d\xi}(pv),$$

где $\varepsilon(\xi) = \varepsilon(m - Dt)$ - внутренняя энергия газа ($\varepsilon = \varepsilon(p,\rho)$). Интегрируя их в произвольных пределах ξ_0, ξ_1, убеждаемся в том, что бегущая волна

отвечает течениям, в которых сохраняются три интеграла:

$$D\frac{1}{\rho}+v=C_\rho,\ -Dv+p=C_p,\ D\varepsilon+D\frac{v^2}{2}-pv=C_\varepsilon. \tag{9.6}$$

В случае непрерывных течений интегралы (9.6) дают единственное решение - постоянные при всех ξ значения ρ, v, p, ε.

Нетривиальный результат получается, если учесть, что уравнения газовой динамики благодаря существованию в них «градиентной катастрофы» могут допускать *разрывные решения*. Пусть разрыв функций $\rho(\xi)$, $v(\xi)$, $p(\xi)$ расположен в точке $\xi=0$. В областях $\xi>0$, $\xi<0$, т. е. справа и слева от него, течение, очевидно, постоянно и характеризуется наборами величин ρ_0, v_0, p_0 и ρ_1, v_1, p_1 (см. рис. 9.1, на котором решение изображено как функция координаты m в моменты времени t_1, t_2, t_3; $t_1<t_2<t_3$). Скачок газодинамических параметров не произволен. Покажем это, анализируя смысл написанных выше интегралов (справедливых также и для разрывных течений).

Описываемый автомодельным решением разрыв движется по массе газа с постоянной скоростью D. Неизменность массовой скорости обеспечивает равенство потока вещества $I_\rho=D$, «втекающего» с одной стороны разрыва и «вытекающего» с другой его стороны. Нарушение этого естественного физического требования означало бы появление или исчезновение при переходе через него какого-то количества вещества. Поток «втекающей» массы равен, по определению, $I_{\rho_0}=D=\rho_0(u-v_0)$, а «вытекающей» $I_{\rho_1}=D=\rho_1(u-v_1)$, где u - эйлерова скорость движения разрыва, причем $u-v_0>0$ и $u-v_1>0$. Первый интеграл (9.6), как следует из равенства $I_\rho=I_{\rho_0}=I_{\rho_1}$, представля-

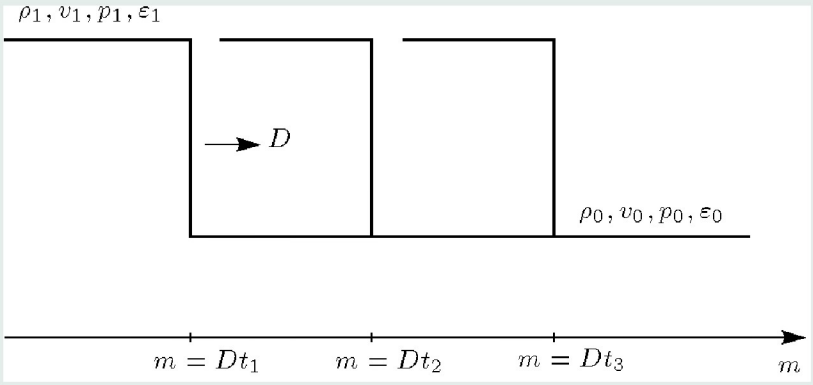


Рис. 9.1. Движение волны с разрывом

ет собой тождество $u = u$. Обратимся ко второму интегралу (9.6), записав его для величин с индексами 0 и 1:

$$C_{p_0} = p_0 + \rho_0(u - v_0)^2 - I_\rho u \equiv I_{p_0} - I_\rho u,$$

$$C_{p_1} = p_1 + \rho_1(u - v_1)^2 - I_\rho u \equiv I_{p_1} - I_\rho u.$$

Фигурирующие в этих равенствах величины I_{p_0}, I_{p_1} суть потоки импульса I_p справа и слева от разрыва. Поскольку $C_p = C_{p_0} = C_{p_1}$, то они также равны: $I_p = I_{p_0} = I_{p_1}$. Иначе при переходе через бесконечно тонкую поверхность разрыва частицы вещества получали бы приращение импульса, что возможно лишь при наличии действующих на нем бесконечно больших сил.

Наконец, третий интеграл (9.6) после несложных выкладок записывается по обе стороны разрыва в виде

$$C_{\varepsilon_0} = I_{\varepsilon_0} - u\left(I_{p_0} + I_{\rho_0}\frac{u}{2}\right), C_{\varepsilon_1} = I_{\varepsilon_1} - u\left(I_{p_1} + I_{\rho_1}\frac{u}{2}\right),$$

где $I_\varepsilon = \rho(u-v)\varepsilon + \rho(u-v)v^2/2 + p(u-v)$ - поток энергии. Поскольку в бегущей волне величина C_ε постоянна и, как уже установлено выше, постоянны величины I_ρ, I_p, то также постоянен поток энергии I_ε, что означает равенство $I_{\varepsilon_0} = I_{\varepsilon_1}$. Энергия, «втекающая» в разрыв, равна «вытекающей» из него энергии (противное означало бы существование внутри него источников энергии бесконечной интенсивности).

Учитывая результаты, следующие из анализа интегралов (9.6), приходим к выводу о непрерывности потоков массы, импульса и энергии при переходе через поверхность разрыва газодинамических параметров:

$$I_{\rho_0} = I_{\rho_1}, \quad I_{p_0} = I_{p_1}, \quad I_{\varepsilon_0} = I_{\varepsilon_1}.$$

Заметим, что этот вывод справедлив также и в случае $D = 0$ (*контактный разрыв*).

Для движущегося по массе газа разрыва (*ударной волны*) из установленных равенств нетрудно найти при известной скорости D *условия Гюгонио* - однозначную связь между величинами до и после скачка. Эти условия можно также получить и с помощью непосредственного вычисления потоков по обе стороны ударной волны. Однако автомодельные решения типа бегущей волны в силу их свойств позволяют автоматически получать условия Гюгонио для большого числа моделей сплошных сред, в частности для ситуаций,

когда скачок происходит не в бесконечно тонком слое, а имеет пространственную протяженность, обусловленную всегда присутствующими в веществе диссипативными процессами. При этом уравнения для бегущей волны описывают еще и структуру переходного слоя.

Заметим, что условия Гюгонио допускают как скачки сжатия, когда давление, плотность и внутренняя энергия газа за ударной волной возрастают, так, формально, и скачки разрежения. Последние, однако, могут реализовываться лишь при наличии в среде соответствующих физических процессов, например, специального типа химических реакций.

Самоподобность, или автомодельность, построенного решения хорошо видна на рис. 9.1: оно без изменений воспроизводится в различные моменты времени на различных участках вещества. Решение понимается в обобщенном смысле, поскольку оно удовлетворяет дифференциальным уравнениям (9.5) лишь в областях непрерывного течения. Рассматриваемое в области $-\infty < m < \infty$, оно представляет собой одно из *обобщенных решений* задачи Коши для уравнений газовой динамики. Если же в какой-либо точке с фиксированной массовой координатой, скажем, в точке $m = 0$, задаются соответствующие граничные условия, то его можно трактовать как решение в области $m > 0$ задачи о поршне, вдвигающемся с постоянной скоростью в среду с постоянными параметрами.

Изучим теперь степенное автомодельное решение для частного случая уравнения (9.4)

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k_0 T^{\sigma}\frac{\partial T}{\partial x}\right), \tag{9.7}$$

описывающего распространение тепла в неограниченной среде ($-\infty < x <$

∞) от мгновенного точечного источника. В момент $t = 0$ в точке $x = 0$ выделяется количество тепла Q_0. Данная постановка полностью совпадает с постановкой аналогичной задачи, рассмотренной ранее, с той разницей, что коэффициент теплопроводности (точнее, *температуропроводности*) $k(T) = k_0 T^\sigma$, $\sigma > 0$, не постоянен, а является растущей степенной функцией температуры.

Для нахождения автомодельного решения используем П-теорему. Очевидно, оно зависит от четырех определяющих параметров x, t, k_0, Q_0, т. е. $T = T(x, t, k_0, Q_0)$. Данное равенство связывает пять размерных величин, три из которых имеют независимые размерности. Следовательно, согласно П-теореме оно сводится к функциональной зависимости $\Pi = F(\Pi_1)$ между двумя безразмерными величинами, Π, Π_1.

Выберем в качестве размерно зависимых величины Q_0, x, t. Тогда из уравнения (9.7) для k_0 следует формула размерности $[k_0] = [Q_0]^{-\sigma}[x]^{\sigma-2}/[t]$. Формулу размерности $[T] = [Q_0]/[x]$ для T получаем из условия

$$Q_0 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} T(x,t)dx, \quad t \geqslant 0,$$

означающего сохранение первоначально выделившейся энергии в неограниченной среде без источников и стоков тепла. Из П-теоремы и формул размерности имеем

$$\Pi = T(x,t)xQ_0^{-1}, \quad \Pi_1 = k_0 t x^{-(2+\sigma)} Q_0^\sigma$$

и с учетом связи $\Pi = F(\Pi_1)$,

$$T(x,t)xQ_0^{-1} = F(k_0 t x^{-(2+\sigma)} Q_0^{\sigma}).$$

Перепишем последнее равенство, вводя обозначение $\xi = \Pi_1^{-1/(\sigma+2)}$:

$$T(x,t) = Q_0 x^{-1} F(\Pi_1) = Q_0 x^{-1} \Phi(\xi) = Q_0^{\frac{2}{2+\sigma}} k_0^{-\frac{1}{2+\sigma}} t^{-\frac{1}{2+\sigma}} \xi \Phi(\xi),$$

или, обозначая $\xi\Phi(\xi)$ через $f(\xi)$,

$$T(x,t) = Q_0^{\frac{2}{2+\sigma}} k_0^{-\frac{1}{2+\sigma}} t^{-\frac{1}{2+\sigma}} f(\xi),\ \xi = Q_0^{-\frac{2}{2+\sigma}} k_0^{-\frac{1}{2+\sigma}} t^{-\frac{1}{2+\sigma}} x. \qquad (9.8)$$

Безразмерный инвариант ξ называется *автомодельной переменной*, функция $f(\xi)$ - *безразмерной функцией* (представителем) температуры, размерный множитель перед $f(\xi)$ в (9.8) — масштабным множителем. *Фиксированным автомодельным состоянием* называется состояние, соответствующее фиксированной автомодельной координате $\xi = \xi_0$.

Анализ размерностей дает возможность получить ценную предварительную информацию о процессе, не находя полностью решения задачи. Так, темп изменения со временем решения в точке $\xi = \xi_0$, в частности, в точке $\xi = 0$, определяется лишь масштабным множителем. Поэтому в начале координат $x = 0$ ($\xi = 0$) температура убывает по заранее известному закону

$$T(0,t) \sim t^{-\frac{1}{2+\sigma}} f(0).$$

Также заранее известна скорость роста со временем координаты x для состояния $\xi = \xi_0$:

$$x(\xi_0) \sim t^{\frac{1}{2+\sigma}} \xi_0.$$

Если принять $T(0,t)$ за характерную температуру нагретой области, а $x(\xi_0)$ - за ее характерный размер, то их произведение $T(0,t)\cdot x(\xi_0)$ не зависит от времени, что согласуется с условием постоянства тепловой энергии Q_0, содержащейся в среде.

Подставив (9.8) в (9.7) и проведя дифференцирование, получим нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка относительно $f(\xi)$:

$$\frac{f}{2+\sigma}+\xi\frac{f'}{2+\sigma}=-(f^\sigma f')'.$$

Преобразуем его к виду

$$\frac{1}{(2+\sigma)}(\xi f)'+(f^\sigma f')'=0$$

и один раз проинтегрируем:

$$\frac{1}{(2+\sigma)}\xi f+f^\sigma f'=C_1.$$

Здесь $C_1=0$, так как при $\xi=0$ решение считается ограниченным ($f(0)<\infty$), гладким и, по построению, симметричным, т. е. $f'(0)=0$. При $C_1=0$ переменные в последнем уравнении разделяются и оно легко интегрируется:

$$f(\xi)=\left[(\xi_\Phi-\xi^2)\frac{\sigma}{2(2+\sigma)}\right]^{1/\sigma},\ |\xi|\leqslant\xi_\Phi.$$

Поскольку полученная формула при $|\xi|>\xi_\Phi$ дает отрицательные значения, то в этой области $f(\xi)$ полагается равной нулю (решение в точках $|\xi|=\xi_\Phi$

"сшивается"с тривиальным решением). Величина $\xi_\Phi = \xi_\Phi(\sigma) > 0$ определяется из равенства

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi)d\xi = \int\limits_{-\xi_\Phi}^{\xi_\Phi} f(\xi)d\xi$$

- безразмерного аналога условия постоянства энергии в среде

$$\xi_\Phi = \left[\frac{(2+\sigma)^{\sigma+1}2^{1-\sigma}}{\sigma\pi^{\sigma/2}}\frac{\Gamma^\sigma(1/2+1/3)}{\Gamma^\sigma(1/\sigma)}\right]^{\frac{1}{\sigma+2}},$$

где Γ - гамма-функция.

Используя (9.8), приходим к окончательному виду решения задачи о мгновенном точечном источнике тепла в нелинейной среде:

$$T(x,t) = \begin{cases} Q_0^{\frac{2}{2+\sigma}} k_0^{-\frac{1}{2+\sigma}} t^{-\frac{1}{2+\sigma}} \left(\left[1 - \frac{x^2}{x_\Phi^2}\right]\frac{\xi_\Phi\sigma}{2(2+\sigma)}\right)^{1/\sigma}, & |x| \leqslant x_\Phi(t), \\ 0, & |x| > x_\Phi(t). \end{cases} \qquad (9.9)$$

Здесь $x_\Phi(t) = \xi_\Phi(Q_0^\sigma k_0)^{1/(2+\sigma)} t^{1/(2+\sigma)}$.

Решение (9.9) обобщенное, так как при достаточно больших σ его производные по x и t в точках $|x| = x_\Phi(t)$ не существуют и в них оно не удовлетворяет уравнению (9.7) в классическом смысле. Однако естественное физическое требование непрерывности потока тепла $W(x,t) = -k_0 T^\sigma \partial T/\partial x$ в точках $|x| = x_\Phi(t)$ выполняется (противное означало бы наличие в этих точках источников или стоков энергии бесконечной интенсивности).

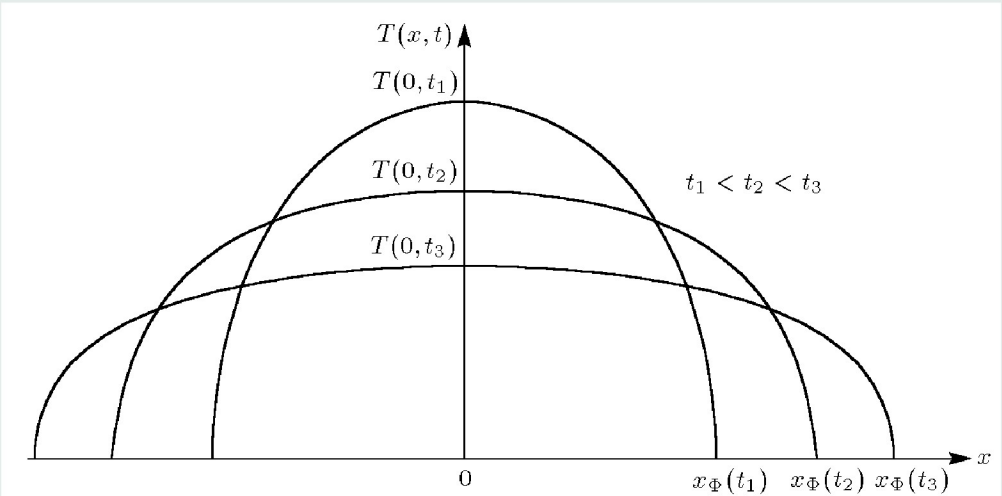


Рис. 9.2. Волновое распространение тепла

Распространение тепла происходит в виде *волны*, охватывающей со временем все новые и новые участки вещества (рис. 9.2). Она движется по среде с конечной скоростью. *Фронт волны* - точка, отделяющая нагретую часть пространства от холодной, - продвигается по закону $x_\Phi(t) \sim t^{\frac{1}{2+\sigma}}$, отвечая одновременно как фиксированному автомодельному состоянию $\xi = \xi_\Phi$,так и фиксированному физическому состоянию $T(x_\Phi(t), t) = 0$.

Самоподобие решения (9.9) имеет несколько иное геометрическое выражение, чем в предыдущем примере. Кривые на рис. 9.2 можно совместить в

одну (в функцию $f(\xi)$) после их «автомодельной обработки» - соответствующих преобразований растяжения-сжатия как аргументов x, t, так и функции $T(x,t)$.

Особую роль автомодельные решения играют для нелинейных моделей как важные частные решения, раскрывающие те или иные свойства объектов. Их изучение способствует выработке своего рода элементарного языка нелинейных явлений (ударная волна, тепловая волна и т. д.). Однако этим их значение далеко не ограничивается. При определенных условиях они служат *промежуточными асимптотиками* для большого класса формально неавтомодельных процессов. Очевидно, что выделение тепловой энергии в какой-то части вещества не может быть ни мгновенным, ни точечным. Тем не менее ее распространение в среде (с $k(T) = k_0 T^\sigma$, $\sigma > 0$), достаточно холодной в момент $t = 0$, по истечении достаточно большого времени и при достаточно больших значениях $x_\Phi(t)$ с хорошей точностью описывается решением (9.9). Детали начальной стадии «забываются», и процесс «выходит» на самоподобный режим (на промежуточную асимтотику).

Литература

1. *Самарский А. А., Михайлов А. П.* Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. - М.:Наука. Физматлит, — 1997. — 320 с.

2. *Амелькин В. В.* Дифференциальные уравнения в приложениях. - М.: Наука. — 1987. — 160 с.

3. *Базыкин А. Д.* Математическая биофизика взаимодействующих популяций. — М.:Наука. — 1985. — 182 с.

4. *Белоцерковский О. М.* Численное моделирование в механике сплошных сред. — М.:Наука. — 1994. — 442 с.

5. *Седов Л. И.* Методы подобия и размерности в механике. — М.:Наука, 1981. — 448 с.