



МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

Л.И. Калакутский, С.А. Акулов, А.А. Федотов

Основы импульсной импедансометрии биологических тканей

Электронное учебное пособие

САМАРА
2011

УДК 57.087
ББК 32.811.3
К 17

Авторы: **Калакутский Лев Иванович,**
Акулов Сергей Анатольевич,
Федотов Александр Александрович

Рецензент: декан радиотехнического факультета,
к.т.н., доцент Кудрявцев Илья Александрович

Калакутский, Л. И. Основы импульсной импедансометрии биологических тканей [Электронный ресурс] : электрон. учеб. пособие / **Л. И. Калакутский**, С. А. Акулов, А. А. Федотов; Минобрнауки России, Самар. гос. аэрокосм. ун-т им. С. П. Королева (нац. исслед. ун-т). – Электрон. текстовые и граф. дан. (2,86 Мбайт). – Самара, 2011. – 1 эл. опт. диск (CD-ROM).

В электронном учебном пособии рассмотрены общие принципы построения метода импульсной импедансометрии биологических тканей, приводится подробное описание функциональной идентификации биологических тканей, основанной на преобразовании характеристик объекта, приведены примеры применения метода импульсной импедансометрии для нахождения моделей подкожных тканей и многокомпонентных суспензий.

Электронное учебное пособие предназначено для магистрантов, обучающихся по направлению 201000.68 «Биотехнические системы и технологии» по дисциплине «Биологические системы и технологии» в 9 семестре.

Разработано на кафедре радиотехники и медицинских диагностических систем радиотехнического факультета.

© Самарский государственный аэрокосмический университет, 2011

СОДЕРЖАНИЕ

<u>Предисловие</u>	4
<u>Раздел 1 Общие принципы импульсной импедансометрии биологических тканей</u>	7
1.1 <u>Общие сведения о биоимпедансном анализе</u>	7
1.2 <u>Функциональная идентификация биологических тканей</u>	12
1.3 <u>Общий подход к функциональной идентификации систем</u>	15
1.4 <u>Методы функциональной идентификации биологических тканей, основанные на преобразовании характеристик объекта</u>	19
1.5 <u>Определение передаточной функции системы на основе анализа ее частотной характеристики</u>	31
1.6 <u>Импульсная импедансометрия в моделировании процессов распространения тока в биологических тканях</u>	41
1.7 <u>Определение передаточной функции системы на основе анализа ее переходной функции</u>	47
<u>Раздел 2. Идентификация биоэлектрического импеданса в пространстве состояний электрических схем замещения</u>	52
2.1 <u>Моделирование биологических тканей методом пространства состояний</u>	52
2.2 <u>Биоэлектрический импеданс при распространении тока в тканях в случае чрескожной электронейростимуляции</u>	61
<u>Раздел 3 Электрические эквивалентные схемы замещения биологических тканей, отражающие их структурные свойства</u>	66
3.1 <u>Модель подкожных тканей</u>	66
3.2 <u>Модель многокомпонентных суспензий</u>	73
<u>Заключение</u>	83
<u>Литература</u>	84

Предисловие

Развитие теории биоэлектрического импеданса живых тканей открывает новые возможности в описании процессов жизнедеятельности организма человека. В рамках данной проблемы актуальной задачей является моделирование биоэлектрического импеданса в широкой полосе частот. Дисперсионные свойства биологических тканей позволяют сделать вывод о структурном составе тканей, что является важным для создания неинвазивных средств исследования свойств биологических тканей.

Так, применение биоимпедансных исследований возможно на клеточном уровне, где становится возможным манипуляция и отбор клеток из образца в зависимости от их вращения, расположения и формирования клеточной цепи. Контроль этих процессов производится с помощью биоимпедансных измерений. Известный во всём мире метод Коултера позволяет производить подсчёт клеток в клеточной суспензии путём измерения их удельного сопротивления. Вместе с быстрым подсчётом числа клеток появляется также возможность характеризовать их в зависимости от формы, объёма и сопротивления.

Биоимпедансные исследования тела человека зависят от морфологии и удельного сопротивления отдельных органов, поэтому с использованием больших поверхностных электродов, становится возможным измерение импеданса сегмента тела и полного объёма жидкости тела, внеклеточного и внутриклеточного баланса, мышечной и жировой массы. Области применения данного метода различны: спортивная медицина, пищевая оценка, оценка баланса жидкости, например, при гемодиализе.

Успешное развитие получают сейчас импедансная кардиография и томография, позволяющие получить измерение сердечного выброса, а также картирование распределения импеданса в объеме под электродами при использовании большого количества электродов. Импедансная кардиография основана на том, что амплитуда изменения импеданса измеряется как функция от удара сердца. Форма волны изменения импеданса схожа с кривой кровяного давления в аорте. Посредством добавления информации о пациенте становится возможным оценить объем сердечного выброса и силу сердечного удара.

Наиболее перспективным в плане создания измерительных средств определения биоимпеданса представляется импульсная импедансометрия, основанная на функциональной идентификации биологических тканей в классе моделей импеданса, позволяющий определить частотные характеристики биоэлектрического импеданса. Наибольший интерес в этом аспекте вызывает аппарат функциональной идентификации применительно к задаче синтеза резистивно-емкостных эквивалентов схем замещения, а также методика представления моделей биологических тканей в пространстве состояний во временной области.

Значительный интерес представляет создание методики синтеза схем замещения тканей, описывающих параметры структурного состава моделируемых объектов.

В настоящей работе рассмотрены биотехнические принципы, лежащие в основе построения импульсной импедансометрии биологических тканей.

В **первом** разделе рассмотрены общие принципы функциональной идентификации биологических тканей в классе моделей биоэлектрического импеданса и разработка элементов теории импульсной импедансометрии.

Во **втором** разделе приведены результаты разработки элементов теории идентификации биоэлектрического импеданса исследуемых тканей в

пространстве состояний, позволяющие перейти к электрическим схемам замещения.

В **третьем** разделе рассмотрено применение импульсной импедансометрии для синтеза электрических эквивалентных схем замещения, отражающих структурные свойства биологических тканей, показана зависимость параметров эквивалентных схем и параметров структурного состава тканей. В этом разделе использованы результаты, полученные к.т.н. Акуловым С.А.

Предназначено для студентов аэрокосмических вузов обучающихся по направлению «Биотехнические системы и технологии» и изучающих вопросы разработки новых методов построения биотехнической диагностической аппаратуры.

Раздел 1 Общие принципы импульсной импедансометрии биологических тканей

1.1 Общие сведения о биоимпедансном анализе.

Первое упоминание об исследовании электрической проводимости биологических объектов принято относить к работам В. Томсона, датированным 1880г. Основополагающие результаты в этой области были получены в начале и середине XX века [1]. К ним относятся установление типичных значений удельного сопротивления и диэлектрической проницаемости тканей, органов и жидких сред живого организма, а также выявление и частичное объяснение зависимости проводимости и диэлектрической проницаемости биологических жидкостей и клеточных суспензий от частоты зондирующего тока. С этими достижениями связаны имена Г. Фрике, [К. Коула \[2\]](#) , [Б.Н. Тарусова \[3\]](#), [Г. Шванна \[2\]](#) и других исследователей.

Названия и обозначения величин, непосредственно измеряемых при биоимпедансометрии, заимствованы из теории электрических цепей переменного тока.

Импедансом называют полное электрическое сопротивление тканей. Эта величина имеет две компоненты: активное и реактивное сопротивление. Активное, или омическое, сопротивление характеризует способность тканей к тепловому рассеянию электрического тока. Реактивное сопротивление характеризуется смещением фазы тока относительно напряжения за счёт ёмкостных свойств клеточных мембран, способных накапливать электрический заряд на своей поверхности. Этот процесс практически не связан с выделением мощности. В большинстве работ, относящихся к изучению электрических

свойств макро биологических тканей, используется диапазон частот до единиц мегагерц, в данном диапазоне индуктивная компонента реактивного сопротивления считается пренебрежимо малой и не рассматривается.

Основными проводниками электрического тока в организме являются ткани с высоким содержанием воды и растворёнными в ней электролитами.

В [таблице 1.1](#) приведены типичные значения удельного электрического сопротивления некоторых биологических тканей для частоты тока 50кГц.

Из таблицы видно, что по сравнению с другими тканями организма жировые и костные ткани имеют существенно более низкую электропроводность. Различия удельного сопротивления можно объяснить, прежде всего, разным содержанием жидкости и электролитов в органах и тканях.

Важным свойством биологических тканей является зависимость их удельной проводимости и относительной диэлектрической проницаемости от частоты тока. В этом смысле принято говорить, что указанные электрические свойства биологических тканей обладают дисперсией.

На рис. 1.1 показан типичный график относительной диэлектрической проницаемости тканей мышц как функции частоты. Аналогичная зависимость от частоты имеет место для удельного электрического сопротивления. Данные зависимости характеризуются наличием трёх различных механизмов релаксации (областей дисперсии), обозначаемых как α , β и γ . С точки зрения биоимпедансного анализа, с целью получения информации, например, о компонентном составе тела человека, наибольший интерес представляет область β -дисперсии, соответствующая частоте тока в интервале от 1кГц до 1МГц.

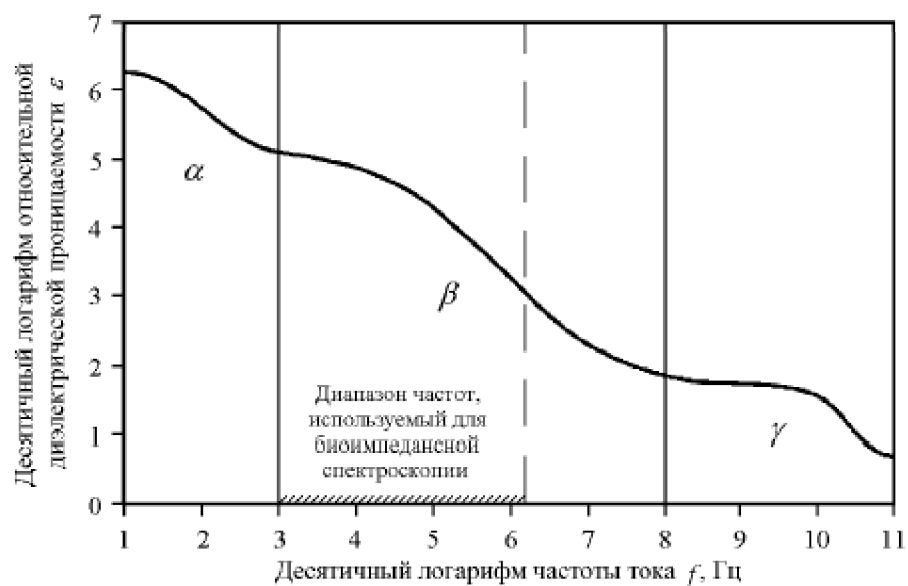


Рис. 1.1 График относительной диэлектрической проницаемости тканей мышц как функции частоты

Таблица 1.1. Типичные значения удельного электрического сопротивления, Омм, некоторых биологических тканей

Спинномозговая жидкость	0,65
Кровь	1,5
Нервно-мышечная ткань	1,6
Лёгкие без воздуха	2,0
Мозг (серое вещество)	2,8
Скелетные мышцы	3,0
Печень	4,0
Кожа	5,5
Мозг (белое вещество)	6,8
Лёгкие при выдохе	7,0
Жировая ткань	15
Лёгкие при вдохе	23
Костная ткань	150

Удельное сопротивление биологических тканей, определяемое для заданной частоты тока, может существенно изменяться под влиянием физиологических и патофизиологических факторов. Почки и лёгкие изменяют электропроводность при различном крове и воздушно наполнении, мышечные ткани — при различной степени сокращения мышц, кровь и лимфа — при изменении концентрации белков и электролитов, очаги повреждения (по сравнению с нормальной тканью) — в результате отёков или ишемий различной природы, опухолей и других причин. Это позволяет использовать биоимпедансометрию для количественной оценки состояния органов и систем организма при различных заболеваниях, а также для выявления изменений в тканях, вызываемых лекарственными, ортостатическими, физическими и другими нагрузками.

Наибольшее развитие получил биоимпедансный анализ для определения состава тела человека. Начало практического применения биоимпедансометрии для этих целей принято связывать с работами французского анестезиолога А.Томассета. Он первым использовал данные биоимпедансного анализа для изучения динамики общей и внеклеточной жидкости и предложил рассчитывать объёмы этих жидкостей пропорционально отношению квадрата длины тела пациента и импеданса между тыльными сторонами кисти и диагонально расположенной стопы на частотах 1000кГц и 5кГц.

Биоимпедансные приборы для оценки состава тела человека выпускаются в настоящее время серийно в развитых странах и имеют коммерческий успех. В России выпускается аппаратура для биоимпедансометрии: анализатор водных секторов организма [ABC-01](#) научно-техническим центром “Медасс” (г. Москва) [4] . Прибор ориентирован на применение в диетологии, спортивной медицине, реаниматологии, интенсивной терапии, нефрологии, эндокринологии и в других областях медицины. Принцип его работы основан на использовании зависимости электрического

сопротивления тканей на низкой и высокой частоте (20 и 500кГц) от объёмов клеточной и внеклеточной жидкости.

Как и в случае антропометрии, формулы для определения состава тела на основе биоимпедансного анализа обладают свойством популяционной специфичности. Для повышения точности оценок состава тела некоторые формулы наряду с характеристиками импеданса и длины тела содержат дополнительные параметры, такие как пол, возраст, масса тела и этническая принадлежность.



Рис. 1.2 Прибор «Спрут-К» для медико-биологических исследований на Международной космической станции для мониторинга изменений состава тела в условиях невесомости

Портативный анализатор «Спрут-К», разработанный НТЦ «Медасс» совместно с Институтом медико-биологических проблем, используется в медико-биологических исследованиях на Международной космической станции и для мониторинга изменений состава тела в условиях невесомости (рис.1.2) [\[1\]](#).

1.2 Функциональная идентификация биологических тканей.

Для моделирования биологических объектов справедливо классическое определение идентификации, данное Л.Заде: «Идентификация состоит в отыскании по входным и выходным данным некой системы - эквивалентной ей системы из некоторого заданного класса» [5].

Эквивалентность модели предполагает ее объективное соответствие с моделируемым объектом, а также способность замещать объект, давать информацию, допускающую опытную проверку.

Особенностью моделирования биологических тканей является формализация исследуемых физиологических процессов в виде, совместимом с описанием измерительных, технических звеньев системы.

Для решения этой задачи целесообразно при описании биологических тканей выбирать атрибуты, характеризующие взаимодействие биологических и измерительных звеньев, например, входные, выходные переменные, собственные параметры, что позволяет получить описание биологического объекта в форме совместимой с описанием технических средств. Тогда при описании технических звеньев становится возможным использование соответствующих атрибутов биологического звена.

Построение моделей биологических тканей, отличающихся сложностью и многосвязностью, осуществляется методами функциональной и структурной идентификации [6].

Функциональная идентификация позволяет описать поведение объекта путем анализа результатов его тестирования, т.е. воздействия на него с помощью стимула и рассмотрения зарегистрированной вызванной реакции.

Для функциональной идентификации необходимо наличие экспериментальных данных о поведении тканей при различных входных

воздействиях. Объект представляется в виде “черного ящика”, а целью исследования чаще всего является определение его передаточных характеристик. Причем вид тестирующего воздействия и его параметры определяют вид получаемой передаточной характеристики.

Тестирование объекта на определенном уровне биологической иерархии определяет уровень получаемой модели.

Например, в неврологической диагностике при определении уровня нейромышечной проводимости тестирование нейромышечной передачи осуществляется с помощью электрических стимулов подобных естественной биоэлектрической активности. Это определяет описание процесса преобразования стимулирующего воздействия в характеристики мышечного сокращения, по которым определяется диагностический показатель нейромышечной передачи - пороговая интенсивность стимула.. Физико-химические процессы образования медиаторов нейромышечной передачи в этой модели не описываются.

Структурная идентификация дает возможность установить, как взаимодействуют отдельные компоненты тканей в процессе формирования их свойств. Структурная идентификация связана с изучением, механизмов функционирования, способов организации и внутреннего строения биологических тканей.

Одним из возможных путей исследования структурной организации биологических звеньев является физиологическое изучение объекта, представление его в виде отдельных составляющих, описание биофизических и биохимических механизмов функционирования этих составляющих.

Функциональная идентификация предусматривает определение передаточной функции объекта, не давая информации о внутреннем строении. Однако, по мере того, как становится возможным наблюдение большего числа переменных, описывающих состояние объекта, могут выявляться скрытые ранее компоненты. Объект может быть разбит на части, т.е. может быть

произведена декомпозиция “черного ящика”. Таким образом, возможно чередование функциональной и структурной идентификации объекта.

Функциональная идентификация может быть реализована с помощью методов, основанных на воздействии на ткань с помощью тест-сигналов, позволяющих определить ее передаточную функцию.

В качестве тестирующих сигналов используются синусоидальное, ступенчатое, импульсное или шумовое воздействие.

Анализ реакций, вызванных тест - воздействием, с помощью методов, основанных на время - частотном преобразовании, позволяет найти частотную характеристику, далее передаточную функцию тканей и перейти к описанию тканей в виде дифференциальных уравнений.

Метод пространства состояний позволяет представить модель, полученную в виде передаточной функции, в виде системы дифференциальных уравнений первой степени, часто имеющих вполне определенный биофизический смысл. Интерпретация этих уравнений с помощью камерных моделей позволяет в ряде случаев моделирования биологических объектов перейти к структурному моделированию, описывающему механизмы происходящих процессов.

Таким образом, результатом идентификации биологических тканей является получение описания их функционирования в виде совместимом с описанием измерительных технических звеньев для формирования модели тканей в целом.

1.3 Общий подход к функциональной идентификации биологических тканей

Рассмотрим общий случай функциональной идентификации биологических тканей, когда определены ее вход и выход и известна реакция системы на тестирующее воздействие.

Для стационарной системы, то есть системы, обладающей характеристиками, неизменными в течение определенного периода времени реакции системы на один и тот же стимул повторяют друг друга, по крайней мере, на протяжении времени ее изучения. Определим в этом случае модель биологических тканей.

Для линейной системы выполняется принцип суперпозиции, согласно которому реакция системы на действие несколько стимулов, подаваемых на ее вход, может быть найдена как сумма реакций, наблюдаемых в ответ на каждый стимул в отдельности.

То есть, если реакция системы на одиночный стимул $x_i(t)$ равна:

$$y_i(t), \quad (1.1)$$

то реакция системы на стимул $x_\Sigma = \sum_1^n a_i x_i(t)$,

где a_i - постоянный коэффициент,

равна:

$$y_\Sigma = \sum_{i=1}^n a_i y_i(t) \quad (1.2)$$

Покажем, что в линейном случае поведение системы можно описать с помощью функционала, содержащего импульсную переходную функцию $h(\tau)$ [7]:

$$y(t) = \int_0^t h(\tau) x(t - \tau) d\tau \quad (1.3)$$

В общем виде, импульсная переходная функция $h(t)$ представляет собой реакцию системы на входное воздействие в виде дельта функции:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (1.4)$$

Покажем справедливость (1.3) для произвольного непрерывного входного воздействия $x(t)$.

Представим входное воздействие в виде отсчетов, следующих в моменты времени t_k , т.е. последовательности импульсов вида дельта функции с весовыми коэффициентами, отстоящими друг относительно друга на время Δt .

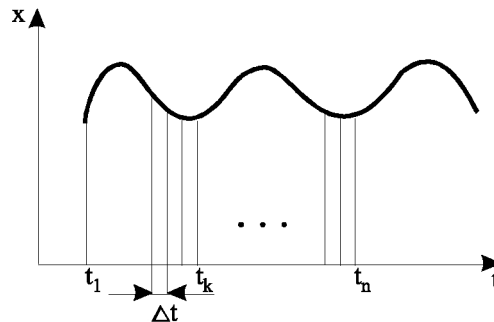


Рисунок 1.3 - Представление входного воздействия в виде отсчетов

Тогда можно записать:

$$x(t) = \sum_{k=0}^n a_k \delta(t - t_k), \quad (1.5)$$

где для дискретных отсчетов

$$\delta(t - t_k) = \begin{cases} 1/\Delta t & t = t_k \\ 0 & t \neq t_k \end{cases}; \quad a_k = x(t_k) \Delta t$$

здесь Δt - шаг отсчета, $x(t_k)$ - амплитуда отсчета

Поскольку для линейной системы справедлив принцип суперпозиции, соответствующая реакция системы может быть записан в виде:

$$y(t) = \sum a_k h(t - t_k) \quad (1.6)$$

Входную переменную можно представить в виде суммы большого числа следующих друг за другом прямоугольных импульсов длительностью Δt .

$$x(t) = \sum_{k=0}^n x(k\Delta t) \Delta t \delta(t - k\Delta t) \quad (1.7)$$

Тогда на интервале от нулевого до произвольного момента времени $t = n\Delta t$

реакция системы может быть представлена в виде:

$$y(t) = \sum_0^n x(k\Delta t) \Delta t h(t - k\Delta t) \quad (1.8)$$

Обозначая, $k\Delta t = \tau$ и переходя от конечного шага отсчетов $\Delta t \rightarrow d\tau$ $d\tau \rightarrow 0$, имеем:

$$y(t) = \int_0^t x(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (1.9)$$

Реакция системы в момент времени t равна сумме реакций на импульсы, составляющие входной сигнал.

Сдвинув переменную интегрирования на $(-t)$, выражение (1.9) можно привести к виду [\(1.3\)](#):

$$y(t) = \int_0^t h(\tau) x(t - \tau) d\tau$$

Для всех систем, подчиняющихся принципу причинности, при $\tau < 0$, $h(\tau) = 0$,

т.е. стимул (причина) вызывает реакцию (следствие).

Таким образом, если для биологических тканей известна импульсная переходная функция, то реакцию биологических тканей на любое воздействие можно определить с помощью выражения интеграла свертки [\(1.3\)](#).

Следовательно, для биологических тканей определение импульсной переходной функции $h(\tau)$ эквивалентно идентификации системы.

Импульсная переходная функция может быть определена в ходе экспериментального исследования биологических тканей по результатам тестирования, т.е. путем подачи на вход воздействия в виде, например, дельта функции и регистрации реакции системы. Для этой цели может быть использован прямоугольный импульс воздействия, длительность которого согласована с постоянной времени исследуемых процессов в системе.

1.4 Методы функциональной идентификации биологических тканей, основанные на преобразовании характеристик объекта.

Основной целью функциональной идентификации биологических тканей, является отыскание вида функционального преобразования, устанавливающего зависимость между наблюдаемыми выходными реакциями и входными воздействиями (рис. 1.4).

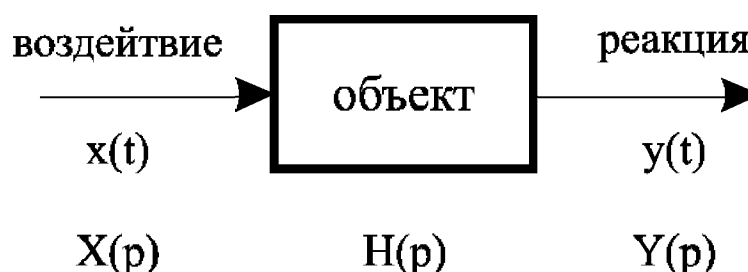


Рисунок 1.4 – Функциональная идентификация объекта

Эта зависимость представляет собой математическую модель объекта, которая может быть записана в виде дифференциальных уравнений, описывающих стационарный режим и динамику поведения объекта.

Решение задачи идентификации биологических тканей с использованием преобразования импульсной характеристики объекта основано на

- получении в результате тестирования объекта экспериментальных данных (импульсной характеристики),
- определении по полученным данным частотной характеристики исследуемого объекта,
- определении передаточной функции исследуемого объекта.

Дальнейшее преобразование передаточной функции позволяет перейти к модели объекта в требуемой форме, например, в виде дифференциальных уравнений, связывающих атрибуты рассматриваемой системы.

Для идентификации биологических тканей применимы экспериментальные методы определения частотных характеристик, основанные на тестировании с помощью импульсных, ступенчатых, гармонических входных воздействий, а также сигналов типа белого шума.

В случае изучения линейных стационарных систем для идентификации достаточно определить одну из возможных характеристик биологических тканей:

- импульсную переходную функцию $h(t)$, наблюдаемую как реакцию системы на воздействие в виде дельта функции:

$$y(t) \begin{cases} = h(t) \\ x(t) = \delta(t) \end{cases} \quad \delta(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases} \quad (1.10)$$

- переходную функцию $g(t)$, наблюдаемую как реакцию системы на воздействие в виде единичной функции:

$$y(t) \begin{cases} = g(t) \\ x(t) = 1(t) \end{cases} \quad 1(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (1.11)$$

- частотную характеристику $H(j\omega)$, определяемую при входном синусоидальном воздействии

$$x(t) = x_0 \sin(\omega t + \varphi_0)$$

как отношение выходного сигнала $y(j\omega)$ к входному.

Для экспериментального исследования биологических тканей из трех типов входных воздействий - ступенчатое часто оказывается наиболее приемлемым. Формирование такого сигнала может осуществляться без выделения биологических тканей из состава объекта путем, например, включения или выключения воздействия постоянного уровня интенсивности.

Для реализации синусоидального входного сигнала требуется формирование гармонического воздействия с регулируемой частотой, что является гораздо более трудной задачей.

Формирование сигнала в виде дельта функции затруднено из-за ограничений по амплитуде воздействия, обусловленных проявлением нелинейных свойств биологических тканей при высоких интенсивностях воздействия.

Переход от временных характеристик объекта определенных в результате тестирования к частотным характеристикам объекта может быть осуществлен с помощью преобразования Фурье. Если $x(t)$ апериодическая функция, то преобразование Фурье имеет вид:

$$F\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp(-j\omega t) dt \quad (1.12)$$

Функция $x(t)$ должна быть абсолютно интегрируемой:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < \infty$$

Применимость время - частотного преобразования к сигналам вида (1.10-1.11) реализуется добавлением множителя вида:

$$\exp(-\sigma t)$$

При некотором, даже не очень большом значении σ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp(-\sigma t) dt < \infty \quad (1.13)$$

Таким образом, приходим к общему случаю время - частотного преобразования - преобразованию Лапласа:

$$L\{x(t)\} = x(p) = \int_0^{\infty} x(t) \exp(-pt) dt, \quad (1.14)$$

где $p = (\sigma + j\omega)$

Ступенчатый входной сигнал можно рассматривать при таком преобразовании как асимптотически спадающую ступеньку, а синусоидальный - как слабо демпфированный.

Использование частотной характеристики системы для ее идентификации основано на использовании общей модели линейной системы вида [\(1.13\)](#):

$$y(t) = \int_0^t h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

Правую часть выражения при $t \rightarrow \infty$ можно записать как свертку функций:

$$y(t) = h(t)*x(t) \quad (1.15)$$

Изображение по Лапласу свертки имеет вид произведения изображений:

$$Y(p) = H(p) \cdot X(p) \quad (1.16)$$

где $H(p) = L\{h(t)\}$ - передаточная функция системы,

$$X(p) = L\{x(t)\},$$

$$Y(p) = L\{y(t)\}.$$

Уравнение (1.16) в форме преобразования Фурье имеет вид:

$$Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega) \quad (1.17)$$

где $H(j\omega) = A(\omega) + jB(\omega)$ -частотная характеристика системы.

Модуль частотной характеристики (амплитудная частотная характеристика) равен:

$$|H(j\omega)| = \sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)}$$

Фазовая частотная характеристика равна:

$$\varphi(\omega) = \text{Arg}[H(j\omega)] = \text{arctg}[B(\omega)/A(\omega)]$$

Таким образом, выражение частотной характеристики устанавливает связь между входным и выходным сигналом, который можно подать на исследуемый объект в частотной области.

Рассмотрим получение частотной характеристики системы при использовании различных тест воздействий подаваемых на вход объекта.

а) Пусть входной сигнал задан в виде синусоидального колебания:

$$x(t) = x_0 \exp(pt) \quad (1.18)$$

Тогда из выражения (1.13) при $t \rightarrow \infty$ получим:

$$y(t) = x_0 \int_0^{\infty} h(\tau) \exp(p(t - \tau)) d\tau = x(t) \int_0^{\infty} h(\tau) \exp(-p\tau) d\tau \quad (1.19)$$

Отсюда отношение преобразований Лапласа правой и левой части (входного и выходного сигналов), являющееся передаточной функцией системы может быть представлено в виде:

$$\frac{Y(p)}{X(p)} = \int_0^{\infty} h(\tau) \exp(-p\tau) d\tau \quad (1.20)$$

Если в соотношении (1.20) в качестве аргумента преобразования Лапласа подставить комплексную переменную $j\omega$, то получится установившееся значение частотной характеристики системы:

$$H(j\omega) = \int_0^{\infty} h(\tau) \exp(-j\omega\tau) d\tau \quad (1.21)$$

Поскольку импульсная переходная функция системы должна быть равна 0 при $t < 0$, то нижний предел интегрирования можно продлить до $-\infty$, тогда

$$H(j\omega) = Y(j\omega) / X(j\omega) \quad (1.22)$$

Таким образом, установившееся значение частотной характеристики системы тождественно отношению выходного и входного синусоидального сигнала системы

б) в случае использования для идентификации объекта входного воздействия в виде дельта функции в соответствии с выражением

$$y(t) = h(t) * x(t) \quad Y(p) = H(p) \cdot X(p)$$

имеем:

$$H(p) = L\{h(t)\} / L\{\delta(t)\} = L\{h(t)\}, \quad H(j\omega) = F\{h(t)\}$$

Таким образом, установившееся значение частотной характеристики системы равно преобразованию Фурье от импульсной переходной функции системы.

в) в случае использования для идентификации объекта ступенчатого входного воздействия вида

$$x(t) = 1(t)$$

аналогично имеем:

$$H(p) = L\{g(t)\}/L\{1(t)\} = pL\{g(t)\} = L\left\{\frac{d}{dt}g(t)\right\}$$

или, переходя к комплексному аргументу:

$$H(j\omega) = j\omega F\{g(t)\} \quad (1.23)$$

Таким образом, установившееся значение частотной характеристики системы равно преобразованию Фурье от производной переходной функции системы.

Рассмотрим пример, показывающий использование время частотного преобразования для определения частотной характеристики системы.

Пусть система имеет передаточную функцию

$$H(p) = 1/(Tp + 1).$$

Найдем частотную характеристику системы.

Зададим входной сигнал в виде дельта функции:

$$x(t) = \delta(t), \quad X(p) = 1,$$

тогда в соответствии с [\(1.16\)](#)

$$Y(p) = H(p).$$

Реакцию системы, представляющую собой импульсную переходную функцию, можно определить в виде:

$$y(t) = h(t) = L^{-1}\{1/(Tp + 1)\} = \frac{1}{T} \exp(-t/T)$$

Определим частотную характеристику системы, воспользовавшись:

$$H(j\omega) = F\{y(t)\}/F\{x(t)\}.$$

$$F\{y(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} \exp(-t/T) \exp(-j\omega t) dt = \frac{1}{j\omega T + 1}$$

$$F\{x(t)\} = F\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \exp(-j\omega t) dt = \lim_{\theta \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^{\theta} \frac{1}{\theta} \exp(-j\omega t) dt + \int_{\theta}^{\infty} 0 dt \right] = 1$$

Тогда,

$$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega T + 1},$$

сопоставление данного результата и заданной передаточной функции показывает, что они тождественны при переходе к Фурье-виду.

Если система тестируется сигналом типа единичной функции

$$x(t) = 1(t), \quad X(p) = \frac{1}{p}, \quad Y(p) = \frac{1}{p} H(p).$$

то $y(t) = g(t)$

Реакция системы, представляющая собой переходную функцию, определится как

$$g(t) = L^{-1}\{1/p(Tp+1)\} = 1 - \exp(-t/T)$$

Частотная характеристика системы может быть найдена как в предыдущем случае:

$$F\{y(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} [(1 - \exp(-t/T)) \exp(-j\omega t)] dt = \frac{1}{j\omega(1 + j\omega T)}$$

$$F\{x(t)\} = F\{1(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\sigma t) \exp(-j\omega t) dt \bigg|_{\sigma \rightarrow 0} = \frac{1}{j\omega},$$

$$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega T + 1},$$

что соответствует результату полученному выше.

В общем случае, как это следует из (1.17), частотная характеристика может быть определена как частное от деления преобразований Фурье, примененных к выходной реакции и, соответственно, входному воздействию, однако, это не всегда удобно и может привести к неоправданно большим вычислительным затратам.

Частотная характеристика системы легко получается в цифровом виде, если к импульсной переходной функции или переходной функции, которые представлены в виде массива экспериментальных данных, применить цифровое преобразование Фурье.

В то же время следует отметить, что реальные тест - воздействия, применяемые для исследования объекта в методах идентификации с использованием преобразования Фурье, должны содержать все частотные компоненты, представляющие интерес при анализе частотной характеристики системы.

При использовании реальных тест - воздействий, моделирующих дельта функцию и единичную функцию (например, воздействий в виде прямоугольных импульсов с конечными параметрами), необходимо учитывать их конечный частотный спектр, в отличие от бесконечного спектра идеальных тест сигналов.

Для случая ступенчатых воздействий расхождение спектров идеальной ступеньки и тест - импульса возникает, в основном, из-за конечной длительности времени установления амплитуды воздействия (фронта).

Длительность фронта зависит от частотных свойств формирователя воздействия, в частности, определяется спадом его частотной характеристики в области высоких частот.

Зададим ступенчатое воздействие с конечным фронтом в виде:

$$x(t) = \begin{cases} A_0(1 - \exp(-t/T_\phi)) & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}, \quad (1.24)$$

где A_0 - амплитуда стимула,

T_ϕ - постоянная времени процесса формирования фронта воздействия.

Нетрудно видеть, что при $A_0 = 1$, $T_{\text{тм}} \rightarrow 0$, $x(t) \rightarrow 1(t)$.

Огибающую спектра ступенчатого воздействия, заданного в виде [\(1.24\)](#), можно найти с помощью преобразования Лапласа:

$$S(p) = L\{x(t)\} = L\{1 - \exp(-t/T_\phi)\} = \frac{1}{p(1 + pT_\phi)}$$

$$S(j\omega) = \frac{A_0}{j\omega(1 + j\omega T_{\text{тм}})} \quad (1.25)$$

Тогда модуль спектра запишется в виде:

$$S(\omega) = \frac{A_0}{\omega \sqrt{1 + \omega^2 T_\phi^2}} \quad (1.26)$$

Действительно, при $T_\phi \rightarrow 0$, $A_0 \rightarrow 1$,

$$S(\omega) \rightarrow \frac{1}{\omega}, \quad (1.27)$$

Таким образом, при укорочении фронта воздействия модуль спектра воздействия стремится к модулю спектра единичной функции.

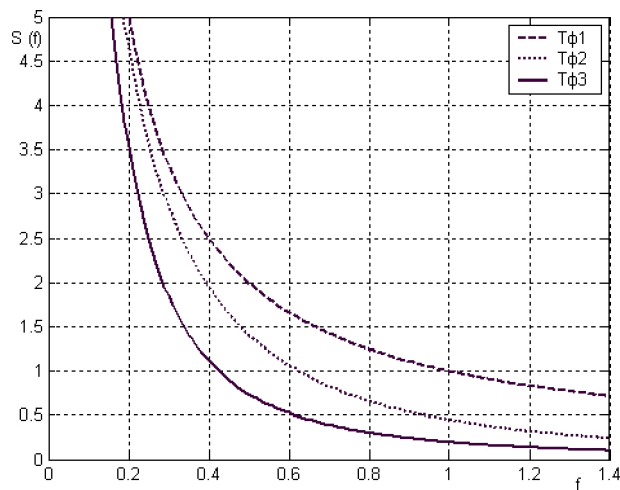


Рисунок 1.5 – Огибающие спектра ступенчатого воздействия ($T_{\phi 1} = 0$, $T_{\phi 2} > 0$, $T_{\phi 3} > T_{\phi 2}$)

Зависимость огибающей спектра ступенчатого стимула от длительности его фронта показывает, что с увеличением фронта доля спектральных составляющих ступенчатого стимула в области высоких частот уменьшается по сравнению со случаем единичной функции.

Ослабление компонент спектра в области высоких частот снижает точность регистрации высокочастотных составляющих реакции тестируемой системы, вследствие погрешностей регистрирующего устройства.

Данные погрешности можно учесть путем задания допустимой величины ослабления спектральных компонент в спектре реального стимула по сравнению со спектром единичного воздействия.

Можно определить верхнюю граничную частоту, до которой можно идентифицировать систему с заданной погрешностью с помощью преобразования Фурье, используя для тестирования стимул с конечным временем нарастания.

Сопоставляя выражения для огибающих спектра [\(1.26\)](#), [\(1.27\)](#), получим:

$$N_{\dot{y}} = \frac{S_{\dot{y}}(\omega)}{S_{y_{\square}}(\omega)} = \sqrt{1 + \omega_{\%}^2 T_{\text{TM}}^2}, \quad (1.28)$$

откуда при $N_{\dot{y}} \gg 1$

$$f_e = N_{\dot{y}} / 2\pi T_{\phi}$$

В случае использования для тестирования системы воздействий моделирующих дельта функцию, расхождения спектров идеального и реального стимулов обусловлено конечной амплитудой и длительностью используемого прямоугольного воздействия.

Зададим прямоугольное воздействие в виде:

$$x(t) = \begin{cases} A_0/t_u & 0 \leq t \leq t_u \\ 0 & t_u < t < 0 \end{cases} \quad (1.29)$$

где A_0 - амплитуда стимула, t_u - длительность стимула

При $A_0 = 1$, $t_u \rightarrow 0$, $x(t) \rightarrow \delta(t)$.

Представим прямоугольный стимул в виде суммы двух единичных функций, сдвинутых на длительность импульса:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A_0[1(t) - 1(t - t_u)] / t_u$$

$$L\{x(t)\} = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p} e^{-pt_u} \right) \frac{A_0}{t_u}$$

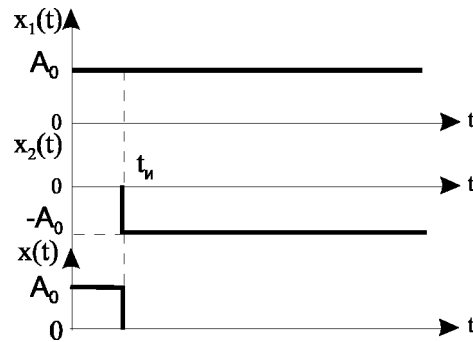


Рисунок 1.6 – Прямоугольный стимул, моделирующий дельта функцию
Огибающая спектра стимула запишется в виде:

$$S(j\omega) = \frac{A_0}{j\omega t_u} (1 - \exp(-t_u j\omega))$$

Модуль спектра примет вид:

$$S(\omega) = \frac{A_0}{t_u \omega} |1 - \cos \omega t_u + j \sin \omega t_u| = \frac{A_0}{t_u \omega} \cdot 2 \sin \frac{\omega t_u}{2} = A_0 \frac{\sin \frac{\omega t_u}{2}}{\frac{\omega t_u}{2}} \quad (1.30)$$

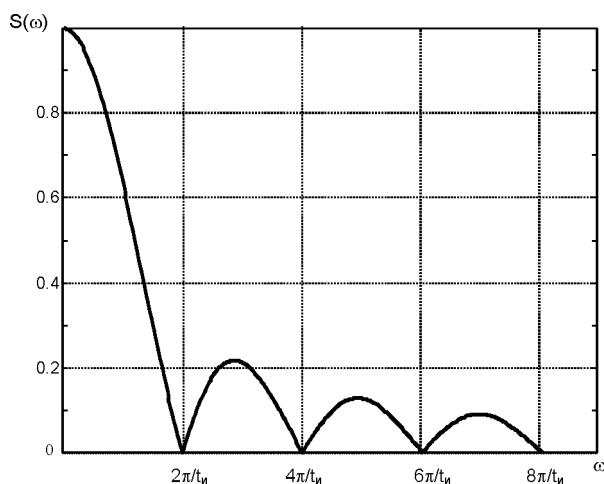


Рисунок 1.7 – Огибающая спектра прямоугольного стимула

Нетрудно видеть, что при уменьшении величины длительности стимула модуль его спектра стремиться к модулю спектра дельта функции.

Частотные компоненты стимула конечной длительности имеют неравномерность, усиливающуюся при приближении к частоте $\omega = 2\pi/t_u$.

Для фиксированной частоты спектра эта неравномерность возрастает с увеличением длительности стимула.

Аналогично случаю ступенчатого стимула, идентификация системы с заданной точностью при использовании для тестирования прямоугольного стимула, имеющего конечную длительность, возможна лишь до некоторой верхней граничной частоты f_e .

Верхняя граничная частота идентификации системы может быть найдена по допустимому ослаблению частотных компонент, определяемому погрешностями регистрирующего устройства.

$$N_{don} = S_{\delta(t)}(\omega) / S_{umr}(\omega),$$

если $N_{\delta(t)} = 10, \quad f_e = 0,9/t_u$ (1.31)

Если учесть, что реальный прямоугольный стимул имеет конечную величину фронта, то, анализируя аналогично случаю ступенчатого стимула, получим для выражения [\(1.28\)](#) дополнительный множитель вида:

$$(1 + \omega^2 T_\phi^2)^{-1/2}.$$

Таким образом, учет конечной величины фронта импульсного тест - воздействия вводит еще более жесткие ограничения на выбор верхней граничной частоты идентификации системы с помощью реального прямоугольного стимула.

1.5 Определение передаточной функции системы на основе анализа ее частотной характеристики

Следующим шагом в функциональной идентификации биологических тканей является определение передаточной функции исследуемого объекта по известной частотной характеристике.

Частотная характеристика объекта может быть определена в результате регистрации реакции объекта на синусоидальный входной сигнал при изменении его частоты или путем обработки с помощью время – частотного преобразования реакции системы на входные воздействия в виде импульсного тест стимула.

Существует ряд методов для определения передаточной функции по известной частотной характеристике.

Наиболее простым и наглядным методом является графоаналитический метод идентификации Боде [9].

Метод основан на представлении искомой передаточной функции в виде произведения передаточных функций элементарных звеньев, имеющих известные частотные характеристики, аппроксимирующие частотную характеристику исследуемого объекта.

Передаточная функция стационарной линейной системы может быть записана в виде:

$$H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0} \quad (1.32)$$

Для физически реализуемых систем $m < n$.

В случае $p = 0$

$$H(p) = H(0) = \frac{b_0}{a_0} = K_0,$$

где K_0 - статический коэффициент усиления системы.

Полюсы передаточной функции являются отрицательными, так как частотная характеристика может быть измерена только у устойчивых систем.

Числитель и знаменатель передаточной функции можно представить в виде произведения многочленов, имеющих вещественные, нулевые или комплексно-сопряженные корни:

$$H(p) = \frac{K_0 p^q \prod_{i=1}^{\ell} (T_i p + 1) \prod_{g=1}^r (T_g p^2 + 2T_g \xi_g p + 1)}{p^{\alpha} \prod_{h=1}^{\beta} (T_h p + 1) \prod_{k=1}^{\gamma} (T_k^2 p^2 + 2T_k \xi_k p + 1)}, \quad (1.33)$$

где $q + \ell + 2r = m$, $\alpha + \delta + 2\gamma = n$

$T_{i,h}$ - постоянная времени звеньев первого порядка;

$T_{g,k}$ - период собственных колебаний звеньев второго порядка;

$\xi_{g,k}$ - декремент затухания звеньев второго порядка.

Числитель и знаменатель выражения (1.33) состоят из трех типов сомножителей: степеней переменной p , линейных двучленов и квадратных трехчленов, получаемых объединением сомножителей с комплексно-сопряженными корнями.

При переходе к частотной характеристике путем замены $p \rightarrow j\omega$ и логарифмировании, амплитудная (АЧХ) и фазовая (ФЧХ) частотная характеристики системы приобретают вид:

$$\begin{aligned} \lg|H(j\omega)| = & \lg K + q \lg|j\omega| + \sum_{i=1}^{\ell} \lg|j\omega T_i + 1| + \sum_{g=1}^r \lg|1 - \omega^2 T_g^2 + j\omega 2T_g \xi_g| - \\ & - \alpha \lg|j\omega| - \sum_{h=1}^{\beta} \lg|j\omega T_h + 1| - \sum_{k=1}^{\gamma} \lg|1 - \omega^2 T_k^2 + j\omega 2T_k \xi_k| \end{aligned} \quad (1.34)$$

$$\begin{aligned} \varphi(\omega) = \operatorname{Arg}[H(j\omega)] = & q \frac{\pi}{2} + \sum_{i=1}^{\ell} \operatorname{Arg}(j\omega T_i + 1) + \sum_{g=1}^r \operatorname{Arg}(1 - \omega^2 T_g^2 + 2T_g \xi_g j\omega) - \\ & - \alpha \frac{\pi}{2} - \sum_{h=1}^{\beta} \operatorname{Arg}(j\omega T_h + 1) - \sum_{k=1}^{\gamma} \operatorname{Arg}(1 - \omega^2 T_k^2 + 2T_k \xi_k j\omega) \end{aligned} \quad (1.35)$$

Таким образом, в рассматриваемой области выражения для АЧХ и ФЧХ системы можно рассматривать как алгебраическую сумму соответствующих выражений для характеристик элементарных звеньев.

Метод идентификации системы с помощью частотных диаграмм Боде основан на том, что график частотной характеристики системы, представленный в логарифмическом масштабе, аппроксимируют кусочно-линейной ломанной (т.е. суммой прямых), участки которой соответствуют графикам (асимптотам) частотных характеристик элементарных звеньев.

Тогда передаточную функцию системы можно представить в виде произведения передаточных функций звеньев, графики частотных характеристик которых использованы для аппроксимации частотной характеристики системы.

Использование диаграмм Боде для моделирования физиологических систем оказывается целесообразным, так как в большинстве случаев (например, при исследовании сенсорных систем) наблюдается логарифмическое преобразование стимулов в ответную реакцию.

В диаграммах Боде используется логарифмический масштаб по усилению:

$$K[\text{дБ}] = 20 \lg K[\text{отн.ед.}]$$

$$\text{и частоте} \quad 1[\text{декада}] = \lg 10[\text{отн.ед.}]$$

Тогда, прямые, аппроксимирующие графики АЧХ и ФЧХ элементарных звеньев имеют определенный вид.

$$\text{а) Статическое звено вида:} \quad H(p) = K$$

Выражение для АЧХ, соответствующее данной передаточной функции запишется в виде:

$$20 \lg |H(j\omega)| = K [\text{дБ}]$$

График АЧХ представляет собой прямую, параллельную оси частот.

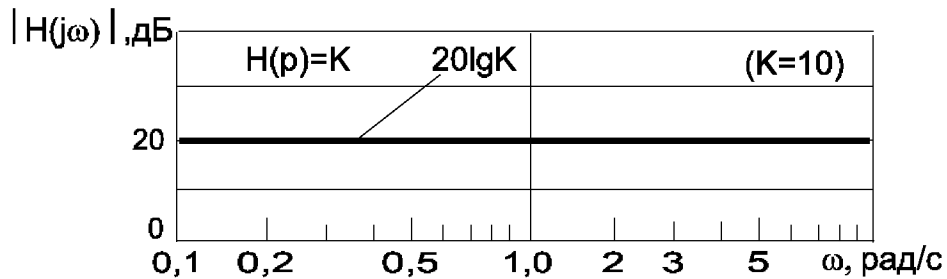


Рисунок 1.8 – График АЧХ статического звена

б) Звено первого порядка имеет передаточную функцию вида:

$$H(p) = (1 + pT)^{\pm 1}$$

АЧХ звена первого порядка может быть записана в виде:

Для

$$H(p) = (1 + pT) \quad H(j\omega) = (1 + j\omega T)$$

тогда

$$20 \lg |H(j\omega)| = 20 \lg (1 + \omega^2 T^2)^{1/2}$$

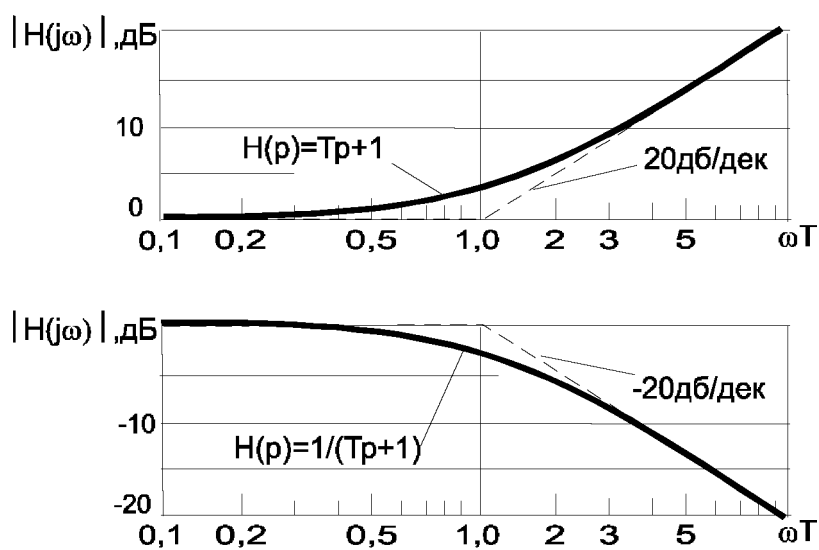


Рисунок 1.9 –Графики АЧХ звеньев первого порядка

В области нижних частот: $\omega T \ll 1$

$$20 \lg(1 + \omega^2 T^2)^{1/2} \rightarrow 20 \lg 1 = 0 [\text{дБ}]$$

В области верхних частот: $\omega T \gg 1$

$$20 \lg(1 + \omega^2 T^2)^{1/2} \rightarrow 20 \lg \omega T$$

График АЧХ может быть аппроксимирован асимптотами:

в области нижних частот – осью частот,

в области верхних частот – прямой, проходящей через точку $[1, 0]$, с углом наклона равным 20 дБ/дек.

Положение точки сопряжения асимптот на оси частот указывает на частоту среза и постоянную времени звена, определяемые из условия: $\omega T = 1$ тогда $|H(j\omega)| = 3 \text{ дБ}$.

ФЧХ звена первого порядка вида $H(j\omega) = (1 + j\omega T)$

может быть записана как:

$$\varphi(\omega) = \arg(1 + j\omega T)$$

$$\varphi(\omega) = \arctg(\omega T)$$

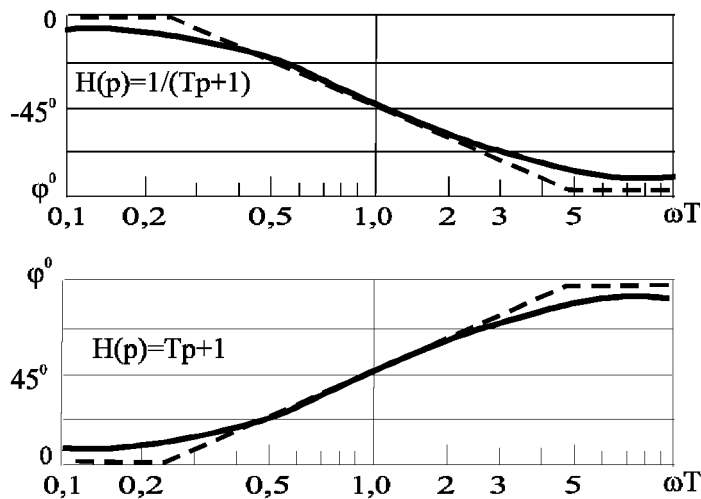


Рисунок 1.10 – ФЧХ звена первого порядка

График ФЧХ проходит через точку $[\pi/4, 1]$ и может быть аппроксимирован асимптотами:

в области нижних частот – осью частот,
 в области верхних частот – прямой, параллельной оси частот и отстоящей от нее на $\pi/2$.

в) Звено **второго порядка** вида:

$$H(p) = (T^2 p^2 + 2T\xi p + 1)^{\pm 1}$$

Амплитудная частотная характеристика звена второго порядка для случая

$$H(p) = (T^2 p^2 + 2T\xi p + 1)^{-1}$$

может быть записана в виде:

$$H(j\omega) = (1 - \omega^2 T^2 + j\omega 2T\xi)^{-1}$$

$$20 \lg |H(j\omega)| = 20 \lg [(1 - \omega^2 T^2)^2 + (2\omega T\xi)^2]^{-1/2}$$

ФЧХ звена второго порядка может быть записана в виде:

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{-2\omega T\xi}{1 - \omega^2 T^2}$$

В области нижних частот: $\omega T \ll 1$

$$20 \lg |H(j\omega)| \rightarrow 20 \lg 1 = 0 [\text{дБ}] \quad \varphi(\omega) = 0$$

В области верхних частот: $\omega T \gg 1$

$$20 \lg |H(j\omega)| \rightarrow 20 \lg (\omega T)^{-2} = -40 \lg \omega T \quad \varphi(\omega) = -\pi$$

График АЧХ может быть аппроксимирован асимптотами:

- в области нижних частот – осью частот,
- в области верхних частот – прямой, проходящей через точку $[1,0]$, с углом наклона равным 40 дБ/дек.

Положение на оси частот точки сопряжения асимптот указывает на частоту среза и постоянную времени звена.

$$\omega T = 1$$

$$20 \lg |H(j\omega)| = 20 \lg \left[\frac{1}{2\xi\omega T} \right] \quad \varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2}$$

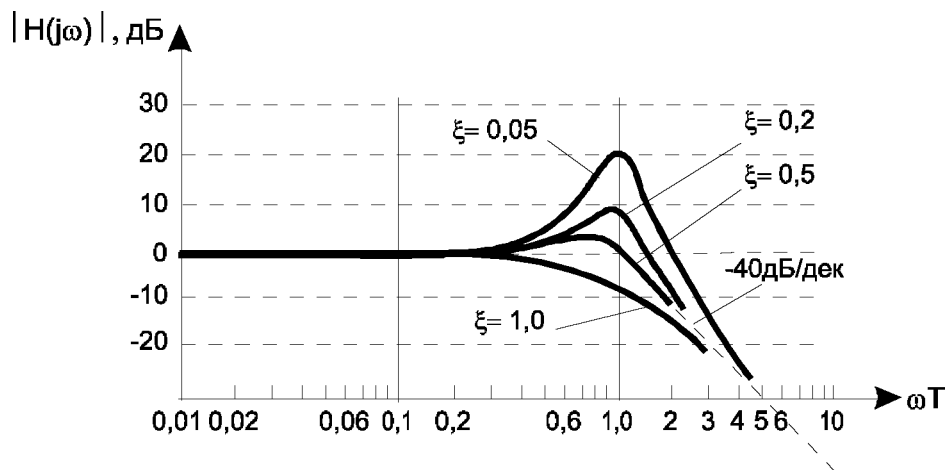


Рисунок 1.11 - АЧХ звена второго порядка

График ФЧХ проходит через точку $[-\pi/2, 1]$ и может быть аппроксимирован асимптотами:

- в области нижних частот – осью частот,
- в области верхних частот – прямой, параллельной оси частот и отстоящей от нее на величину $-\pi$.

В области средних частот АЧХ и ФЧХ зависят от величины декремента затухания ξ .

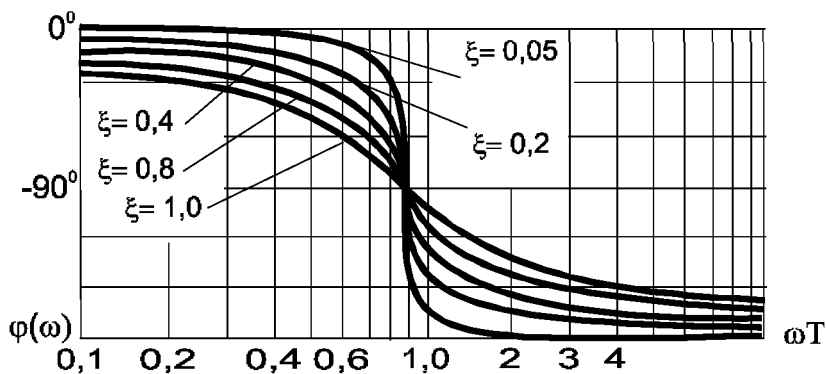


Рисунок 1.12 – ФЧХ звена второго порядка

Аппроксимация полученных на основе эксперимента частотных характеристик исследуемого объекта характеристиками элементарных звеньев позволяет осуществить приближенную идентификацию любой устойчивой линейной системы.

Для минимально фазовых систем, передаточная функция которых не имеет нулей и полюсов в правой полуплоскости для идентификации достаточна только амплитудно-частотная характеристика.

Таким образом, если на основе метода импульсной импедансометрии определена частотная характеристика системы и требуется найти ее передаточную функцию, то необходимо сначала представить графики АЧХ и ФЧХ в логарифмическом масштабе, затем аппроксимировать графики характеристик набором асимптот для АЧХ и ФЧХ элементарных звеньев, установить частоты среза и записать передаточную функцию системы в виде разложения Боде.

Графоаналитический метод Боде для определения передаточной функции системы обладает наглядностью, но достаточно трудоемок. Метод позволяет легко определить порядок передаточной функции системы, однако частоты среза определяются приближенно.

Более точные результаты определения передаточной функции по известной частотной характеристике дают вычислительные методы, реализуемые в виде машинных алгоритмов расчета коэффициентов передаточной функции.

Пусть частотная характеристика получена в виде:

$$H(j\omega) = R(\omega) + jI(\omega)$$

где $R(\omega)$ и $I(\omega)$ – числовые массивы

Найдем передаточную функцию в виде:

$$H(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + 1} \quad (1.36)$$

В качестве примера вычислительных методов рассмотрим метод подгонки E.Levy.

Частотная характеристика системы, соответствующая данному виду передаточной функции может быть представлена в виде:

$$\hat{H}(j\omega) = \frac{b_m(j\omega)^m + \dots + b_1 j\omega + b_0}{a_n(j\omega)^n + \dots + a_1 j\omega + 1} = \frac{\alpha + j\omega\beta}{\sigma + j\omega\tau} = \frac{N(\omega)}{D(\omega)} \quad (1.37)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha &= b_0 - b_2\omega^2 + b_4\omega^4 - \dots \\ \beta &= b_1 - b_3\omega^3 + b_5\omega^5 - \dots \\ \sigma &= 1 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4 - \dots \\ \tau &= a_1 - a_3\omega^3 + a_5\omega^5 - \dots \end{aligned} \quad (1.38)$$

Машинные алгоритмы подгонки заключаются в подборе таких значений неизвестных коэффициентов $a_i; b_i$, при которых сумма квадратов отклонений значений $\hat{H}(j\omega)$ от экспериментально полученных значений частотной характеристики системы $H(j\omega)$ была бы минимальной.

Тогда для любой выбранной частоты ω_i ошибка подгонки равна

$$\varepsilon(\omega_i) = H(j\omega_i) - \hat{H}(j\omega_i) = H(j\omega_i) - \frac{N(\omega_i)}{D(\omega_i)} \quad (1.39)$$

Задача подгонки состоит в минимизации этой ошибки в каждой выбранной точке частотной характеристики.

При использовании для решения задачи метода наименьших квадратов необходимо минимизировать сумму квадратов ошибок, путем приравнявая к нулю частных производных от этой суммы по каждому из неизвестных коэффициентов. Это приводит к системе линейных алгебраических уравнений, однако, при высоких порядках передаточной функции задача становится трудной.

Е. Levy модифицировал метод наименьших квадратов с целью упрощения вычислений.

Умножим обе части соотношения (1.39) на $D(\omega_i)$:

$$D(\omega_i)\varepsilon(\omega_i) = D(\omega_i)H(j\omega_i) - N(\omega_i) = A(\omega_i) + jB(\omega_i)$$

Квадрат модуля этого выражения равен

$$|D(\omega_i)\varepsilon(\omega_i)|^2 = A^2(\omega_i) + B^2(\omega_i)$$

Определим новую функцию ошибок как

$$E = \sum_{i=1}^k |D(\omega_i) \varepsilon(\omega_i)|^2 = \sum_{i=1}^k [A^2(\omega_i) + B^2(\omega_i)] \quad (1.40)$$

Здесь

$$A(\omega_i) = \operatorname{Re} \{ D(\omega_i) H(j\omega_i) - N(\omega_i) \} = \operatorname{Re} \{ (\sigma_i + j\omega_i \tau_i)(R(\omega_i) + jI(\omega_i)) - (\alpha_i + j\omega_i \beta_i) \} = \\ = \sigma_i R(\omega_i) - \omega_i \tau_i I(\omega_i) - \alpha_i$$

$$B(\omega_i) = I_m \{ D(\omega_i) H(j\omega_i) - N(\omega_i) \} = \omega_i \tau_i R(\omega_i) + \sigma_i I(\omega_i) - \omega_i \beta_i$$

$$E = \sum_{i=1}^k \left[(\sigma_i R(\omega_i) - \omega_i \tau_i I(\omega_i) - \alpha_i)^2 + (\omega_i \tau_i R(\omega_i) + \sigma_i I(\omega_i) - \omega_i \beta_i)^2 \right] \quad (1.41)$$

Функционал (1.41) можно продифференцировать по каждому из коэффициентов a_i, b_i и приравнять полученные производные к нулю.

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial b_0} &= \sum_{i=1}^k 2(\sigma_i R(\omega_i) - \omega_i \tau_i I(\omega_i) - \alpha_i)(-1) = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial b_1} &= \sum_{i=1}^k 2(\omega_i \tau_i R(\omega_i) + \sigma_i I(\omega_i) - \omega_i \beta_i)(-\omega_i) = 0 \\ &\vdots \end{aligned} \quad (1.42)$$

Подстановка выражений приводит к системе линейных алгебраических уравнений решаемых относительно a_i, b_i .

Рассмотренный метод имеет недостаток, заключающийся в том, что для определения уравнений ошибок должен быть заранее известен порядок передаточной функции системы. Поэтому метод прямой подгонки удобно сочетать с графоаналитическим методом Боде.

1.6 Импульсная импедансометрия в моделировании процессов распространения тока в биологических тканях.

Рассмотрим моделирование процессов распространения тока в биологических тканях.

Определение частотной характеристики импеданса биологических тканей при прохождении электрического тока можно представить как задачу идентификации электрических свойств биологических тканей в классе моделей неоднородных проводников. В этом заключается суть метода импульсной импедансометрии. Модели, связывающие напряжение и ток, протекающий по проводнику, можно представить в виде эквивалентной электрической схемы замещения, составленной из цепочки элементов с определенным характером сопротивления (в данном случае, активным и емкостным). Подобные цепочки, представляющие физические модели импеданса биологических тканей, можно использовать, в частности, в качестве эквивалентов нагрузки для испытаний и настройки выходных каскадов электростимуляционной и другой физиотерапевтической аппаратуры [9].

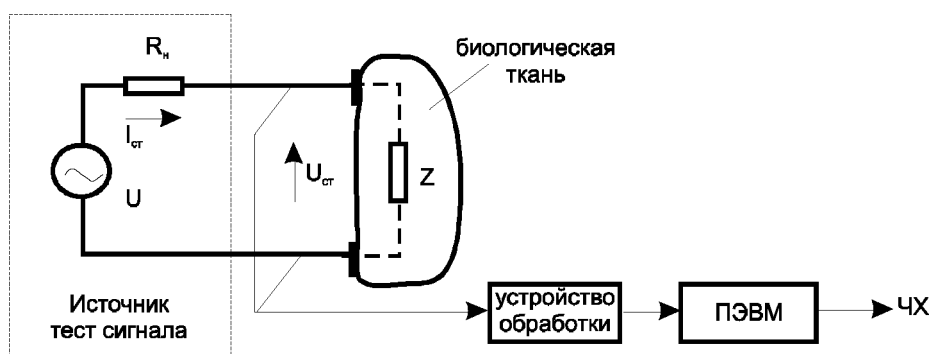


Рисунок 1.13 – Схема метода импульсной импедансометрии

Для функциональной идентификации биологических тканей в рассматриваемом классе моделей неоднородных проводников целесообразно

выбрать в качестве входной переменной ток в цепи электродов, а выходной - стимулирующее напряжение на электродах.

Частотная характеристика импеданса биологических тканей может быть найдена путем тестирования объекта тест сигналом вида единичной функции, регистрации вызванной реакции, и ее преобразовании в частотную область с помощью цифрового преобразования Фурье. Затем, используя метод Боде, можно перейти от частотной характеристики к передаточной функции объекта, которая в данном случае при выбранных атрибутах модели имеет смысл операторной формы импеданса биологической ткани:

$$Z(p) = V(p)/I(p) \quad (1.43)$$

где $V(p)$ - напряжение стимула в операторной форме,

$I(p)$ - стимулирующий ток в операторной форме.

В качестве тест сигнала для идентификации системы целесообразно выбрать ток ступенчатой формы, прикладываемый к электродам, расположенным на исследуемом участке биологической ткани. Такой сигнал формируется путем включения тока постоянной амплитуды от источника тока и его можно рассматривать как модель воздействия единичной функции. Тогда напряжение, регистрируемое на электродах можно рассматривать как переходную функцию объекта:

$$\text{если} \quad I_{\text{нз}} = I_0 l(t) \quad (1.44)$$

$$\text{то} \quad V_{\text{нз}} = g(t)$$

Искомая частотная характеристика импеданса биологических тканей может быть определена в соответствии с (1.23):

$$Z(j\omega) = j\omega F\{V_{cm}(t)\} \quad (1.45)$$

Рассмотрим требования к аппаратуре, используемой для тестирования объекта и регистрации его ответной реакции.

Для выполнения условия тестирования [\(1.44\)](#) источник тест сигнала должен формировать ступенчатый ток с параметрами, не зависящими от величины сопротивления нагрузки.

То есть источник сигнала должен работать в режиме генератора тока, что требует, чтобы его внутреннее сопротивление было во много раз больше сопротивления исследуемой биологической ткани.

$$R_T \gg |Z| \quad (1.46)$$

В рассматриваемом случае моделирования процессов чрескожной электронейростимуляции, воздействие электрическим током осуществляется с помощью электродов достаточно большой площади (до 100 кв.см), которые с целью уменьшения переходного сопротивления покрываются электропроводным гелем.

В этом случае сопротивление биологических тканей в широком диапазоне частот не превышает значения 10 кОм. Тогда учитывая условие (1.46) внутреннее сопротивление источника тест сигнала можно выбрать равным или превышающим значение 200 кОм.

В тоже время, сопротивление источника сигнала совместно с емкостью измерительной схемы определяют длительность фронта формируемого ступенчатого тест сигнала, что вносит погрешности в определение частотной характеристики на высоких частотах.

Частотный диапазон определения характеристик биологической ткани задается, исходя из характеристик стимулирующего воздействия, и ограничивается верхней граничной частотой.

Из соотношения, связывающего требование к фронту ступенчатого тест сигнала [\(1.28\)](#), допустимое искажение спектральных составляющих тест сигнала и граничную частоту, можно получить допустимое значение величины емкости измерительной схемы.

Емкостная составляющая сопротивления измерительной схемы складывается из выходной емкости источника тест сигнала, емкости соединительных проводов, электродов и входной емкости устройства регистрации.

$$T_{\phi} = N_{ait} / 2\pi f \hat{a}$$

$$\text{При } N_{don} \leq 10 \quad f_s = 100 \text{ кГц} \quad T_{\phi} = 16 \text{ мкс} \quad R_{вх} \gg R_z$$

$$C_{изм} = T_{\phi} / R_{\Gamma}$$

В рассматриваемом случае $C_{изм} \leq 80 \text{ нФ}$, что может быть обеспечено относительно простыми измерительными средствами.

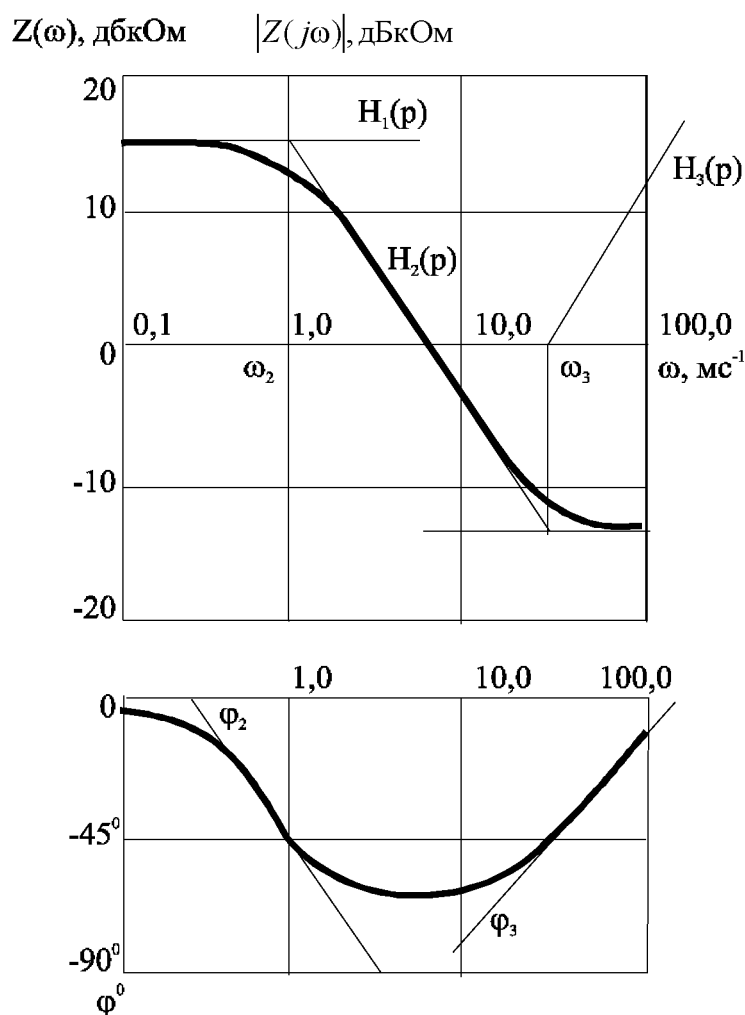


Рисунок 1.14 – АЧХ и ФЧХ исследуемого участка биологической ткани

Действительно, входная емкость регистрирующей аппаратуры для измерений в области средних частот обычно составляет не более 20пФ, а конструктивная емкость - не более 10пФ.

Таблица 1.2 Результаты расчета ЧХ (промежуточные значения опущены)

ω	0,1	1,0	10	100
Z, дБ*кОм	14,4	11,4	-4,8	-12,3
Φ , градус	-5,4	-45,2	-59,6	-11,2

В результате тестирования участка биологической ткани ступенчатым стимулом, обработки экспериментальных данных и расчета на ПЭВМ частотной характеристики можно построить в логарифмическом масштабе АЧХ и ФЧХ исследуемого объекта (рис.1.14).

Для определения передаточной функции исследуемого объекта, выражающей операторную форму импеданса биологической ткани, необходимо в соответствии с методом Боде аппроксимировать полученную частотную характеристику набором асимптот, соответствующих графикам частотных характеристик элементарных звеньев, и определить частоты среза.

График частотной характеристики исследуемого участка биологических тканей можно аппроксимировать несколькими асимптотами.

Первая асимптота - прямая параллельная оси частот, проходящая на уровне 14,4 дБкОм - соответствует передаточной функции $H_1(p)$ в области низких частот

$$H_1(p) = K = 14,4 \text{ дБкОм} = 5,22 \text{ кОм}$$

Вторая асимптота - прямая с наклоном -20 дБ/дек - соответствует передаточной функции $H_2(p)$ в области средних частот

$$H_2(p) = (1 + T_2 p)^{-1}$$

$$\text{где } T_2 = \omega_2^{-1}$$

Частота среза ω_2 соответствует точке пересечения асимптот, аппроксимирующих частотную характеристику в области низких и средних частот:

$$\omega_2 = 1 \text{мс}^{-1} \quad T_2 = 1 \text{мс}$$

Для получения на графике АЧХ в области высоких частот прямой, параллельной оси частот, проходящей на уровне $-12,3$ дБ кОм необходимо введение третьего звена $H_3(p)$, имеющего асимптоту в виде прямой с наклоном $+20$ дБ/дек:

$$H_3(p) = (1 + T_3 p)$$

$$\text{где } T_3 = \omega_3^{-1}$$

Частота среза ω_3 соответствует точке пересечения асимптот, аппроксимирующих частотную характеристику в области средних и высоких частот

$$\omega_3 = 20 \text{мс}^{-1} \quad T_3 = 0,05 \text{мс}$$

Передаточная функция исследуемого объекта равна произведению передаточных функций элементарных звеньев

$$Z(p) = H_1(p)H_2(p)H_3(p)$$

$$Z(p) = \frac{5,22(1 + 0,05p)}{1 + p} [\text{кОм}] \quad (1.47)$$

Для графика ФЧХ получаем набор асимптот и частот среза повторяющий анализ АЧХ.

1.7 Определение передаточной функции системы на основе графического анализа переходных функций

Передаточная функция системы может быть определена путем непосредственного анализа формы графической записи переходной функции исследуемого объекта, представляющей собой реакцию системы на тестовое воздействие.

Подобно методу Боде в частотной области, здесь имеется набор графиков переходных функций соответствующих реакциям элементарных звеньев на тестовое воздействие.

Идентификация в данном случае сводится к определению вида и параметров передаточной функции, которой соответствует переходная функция, аппроксимирующая графическую запись реакции объекта.

Такой подход используется для приближенной идентификации систем первого и второго порядков и апериодических систем высшего порядка.

А) Звено первого порядка.

Передаточная функция звена может быть записана в виде:

$$H(p) = \frac{K}{1 + pT}, \quad (1.48)$$

Импульсная переходная функция данного звена имеет вид:

$$h(t) = \frac{K}{T} \exp(-t/T),$$

В этом нетрудно убедиться.

$$H(j\omega) = F\{h(t)\} = \int_0^{+\infty} \frac{K}{T} \exp(-t/T) \exp(-j\omega t) dt = \frac{K}{1 + j\omega T}$$

$$j\omega \rightarrow p,$$

$$\text{тогда } H(p) = \frac{K}{1 + pT}.$$

Переходная функция системы имеет вид:

$$g(t) = K(1 - \exp(-t/T)),$$

то соответствующая передаточная функция может быть определена аналогично:

$$H(j\omega) = F\left\{\frac{d}{dt} g(t)\right\} = F\left\{\frac{K}{T} \exp(-t/T)\right\},$$

и далее получаем тот же результат, что и в предыдущем случае.

Графический анализ переходной функции системы первого порядка позволяет получить значения статического коэффициента передачи K и постоянной времени T .

Величину постоянной времени можно получить на основании анализа записи переходной функции как отрезок времени, за который график переходной функции достигает 63% своей установившейся величины.

Действительно, из (93) для $t = T$ получаем:

$$g(t) = K(1 - \exp(-1)) \approx 0,63K$$

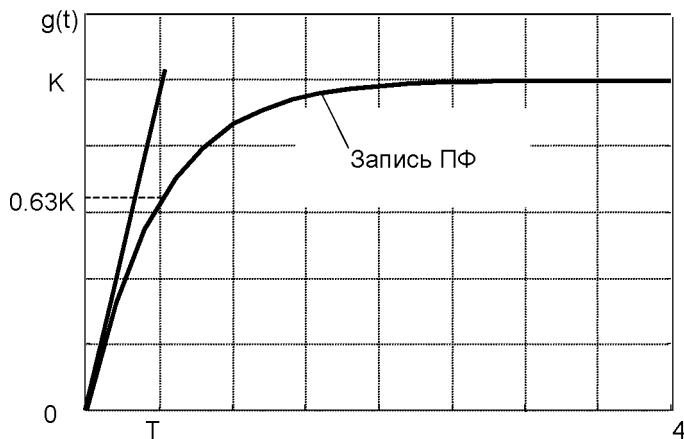


Рисунок 1.15 – Графическая идентификация системы первого порядка по записи переходной функции

Или другим путем:

$$\left. \frac{d}{dt} g(t) = \frac{K}{T} \exp(-t/T) \right|_{t=0} = K/T$$

Таким образом, в данном случае, постоянную времени звена первого порядка можно определить по точке на оси времени, соответствующей пересечению двух прямых. Первой - касательной, проведенной к графику переходной функции на начальном участке, и второй, соответствующей установившемуся уровню коэффициента передачи.

Особенностью использования для идентификации записи импульсной переходной функции системы является необходимость экстраполяции кривой в области малых времен. Это вызвано тем, что из-за конечных параметров тест сигнала график импульсной переходной функции не начинается с величины K/T .

Аналогично случаю переходной функции, постоянная времени звена первого порядка может быть найдена по уровню $0,37K/T$ или с помощью метода касательной в области малых времен (рис.1.16).

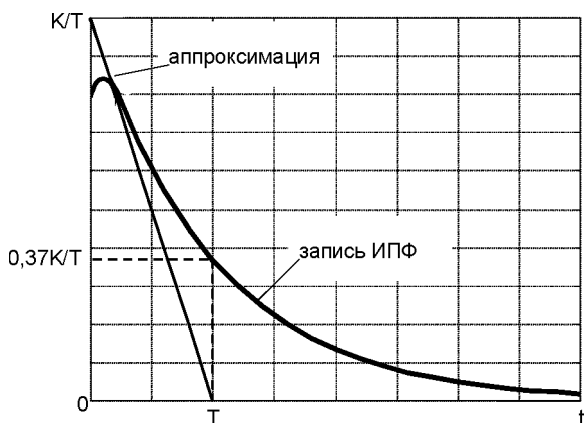


Рисунок 1.16 - Графическая идентификация системы первого порядка по записи импульсной переходной функции

Б) Аперриодическое звено второго порядка.

Передаточная функция такой системы может быть записана в виде:

$$H(p) = \frac{A_1}{(1 + pT_1)} + \frac{A_2}{(1 + pT_2)} \quad (1.49)$$

Если график переходной функции исследуемой системы можно аппроксимировать суммой экспонент:

$$g(t) = A_1 + A_2 - A_1 \exp(-t/T_1) + A_2 \exp(-t/T_2) \quad , \quad (1.50)$$

Для идентификации системы необходимо аппроксимировать запись ее переходной функции зависимостями вида:

$$\alpha(t) = -A_1 \exp(-t/T_1); \quad \beta(t) = -A_2 \exp(-t/T_2)$$

и затем определить параметры экспонент.

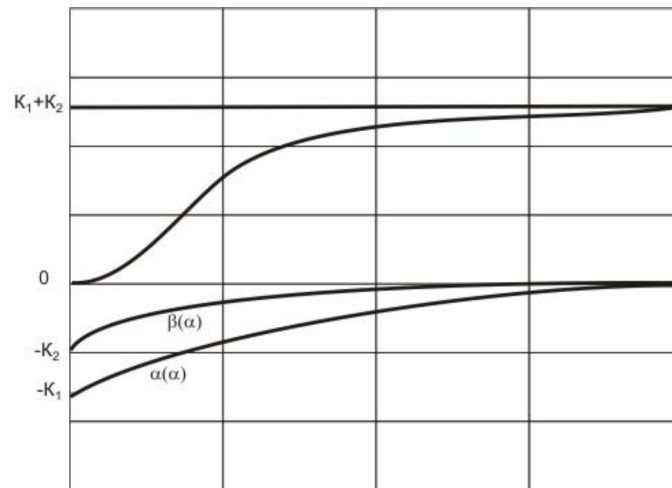


Рисунок 1.17 - Графическая идентификация аperiodической системы второго порядка по записи переходной функции

В) Колебательное затухающее звено второго порядка.

Передаточная функция системы может быть записана в виде:

$$H(p) = \frac{K}{T^2 p^2 + 2T\xi p + 1}, \quad (1.51)$$

где $0 < \xi < 1$.

График переходной функции исследуемой системы можно аппроксимировать выражением

$$g(t) = K \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \exp(-\xi \frac{t}{T}) \sin(\frac{t}{T} \sqrt{1-\xi^2} + \varphi) \right], \quad (1.52)$$

$$\varphi = \arctg \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}, \quad \omega_{cob} = \frac{1}{T} \sqrt{1-\xi^2}$$

ω_{cob}, ξ - определяется графически по виду аппроксимируемого процесса или по известной зависимости $\delta = f(\xi)$, (рис. 1.18);

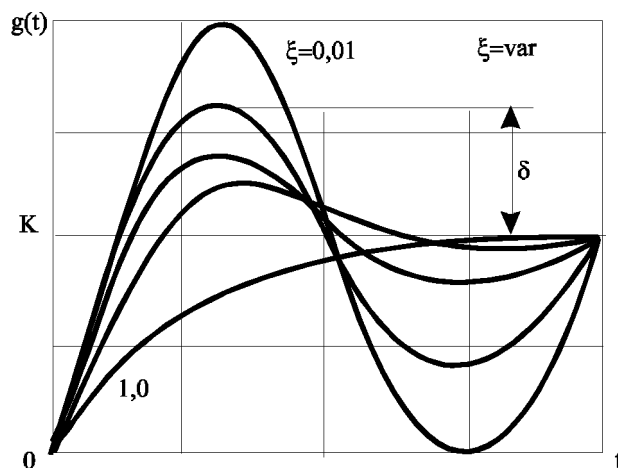


Рисунок 1.18 - Графическая идентификация колебательной системы второго порядка по записи переходной функции

Г) Для графической идентификации апериодических систем высокого порядка может быть использован метод обобщенной передаточной функции. Согласно этому методу передаточная функция с n различными постоянными времени может быть аппроксимирована передаточной функцией n -ого порядка с обобщенной постоянной времени $T_{об}$:

$$H(p) = \frac{K}{(1 + T_1 p)(1 + T_2 p) \dots (1 + T_n p)} \approx \frac{K}{(1 + p T_{об})^n} \quad (1.53)$$

Задача идентификации сводится к определению обобщенной постоянной времени и порядка передаточной функции. Для этой цели можно использовать нормированные графики и номограммы, приводимые в соответствующей литературе.

2. Идентификация биоэлектрического импеданса в пространстве состояний электрических схем замещения

2.1 Моделирование биологических тканей методом пространства состояний

Моделирование биологических объектов с помощью методов функциональной идентификации часто приводит к передаточным функциям, определяющим описание поведения системы в виде дифференциальных уравнений высокого порядка.

Это обусловлено сложной динамикой процессов, происходящих в биологических системах, связанных со структурным и функциональным разнообразием компонентов системы, участвующих в формировании механизмов ее поведения. В частности, для физиологических систем организма человека характерным является одновременная работа нескольких групп биологических регуляторов, обладающих различным быстроедействием и неодинаковым числом степеней свободы.

Так, например, регуляция артериального давления крови находится под влиянием вегетативной нервной системы и эндокринно-гуморальных факторов. В подобных случаях для моделирования системы удобно воспользоваться методом пространства состояний, позволяющим представить линейное дифференциальное уравнение высокого порядка, описывающее динамику системы, в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка относительно некоторых искусственно вводимых переменных, называемых переменными состояния, с помощью которых можно охарактеризовать состояние системы.

В биологии и медицине понятие состояния формировалось как качественное определение обобщенной характеристики системы, связанное с ее показателями. Так, наблюдение за изменением физиологических параметров организма пациента (температурой, ЧСС, артериальным

давлением, сатурацией крови кислородом и т.п.) позволяет судить об отклонении параметров от нормы и классифицировать клиническое состояние пациента по степени тяжести. В экологии понятие состояния системы связывают с какой-либо интегральной характеристикой Среды, например, токсичностью, мутагенностью, канцерогенностью и т.п.

В теории систем под состоянием динамической системы понимается минимальный набор данных, который необходимо задать в некоторый момент времени, чтобы в рамках математического описания системы можно было предсказать поведение системы в любой последующий момент времени.

Использование данного понятия состояния системы позволяет в рамках моделирования биологических систем методом пространства состояний строго определить вектор состояния, полностью описывающий поведение системы. Переменные состояния модели, имеющие формальное математическое выражение, которое получается, например, при разложении дифференциального уравнения высокого порядка на систему уравнений состояния, могут иметь вполне определенный биофизический или физиологический смысл. Такой подход позволяет наиболее полно описать моделируемую систему, а в ряде случаев, с помощью методов структурной идентификации представить механизмы, лежащие в основе поведения системы.

Выбор переменных состояния при моделировании системы зависит от функционального класса исследуемых моделей. Так при моделировании физиологических систем организма, являющихся биологическими звеньями терапевтических БТС, модель, описывающую связь параметров лечебного воздействия и диагностических показателей пациента, можно отнести к классу моделей объектов управления. Тогда вектор состояния модели можно сформировать из внутренних параметров физиологической системы, характеризующих биофизические механизмы процессов лечебного воздействия. Это позволяет получить адекватное описание процессов в

биологическом звене с точки зрения анализа алгоритмов управления, формирования эффективных параметров воздействия, выбора структуры технических звеньев БТС и их характеристик.

Описание модели в пространстве состояний дается в форме уравнений «вход - состояние – выход» [10]:

$$\begin{cases} \dot{Z} = AZ + BX \\ Y = CZ + DX \end{cases} \quad (2.1)$$

где X - вектор входных воздействий, Y - вектор выходных реакций,
 Z - вектор состояния, A, B, C, D - матрицы коэффициентов.

Первое уравнение системы (2.1) дифференциальное, оно определяет состояние системы, т.е. задает ее динамические свойства. Второе уравнение - алгебраическое, определяет выходную реакцию системы через ее текущее состояние. Компоненты вектора состояния - переменные состояния определяются на выходах интеграторов схемы модели, соответствующей уравнениям (2.1).

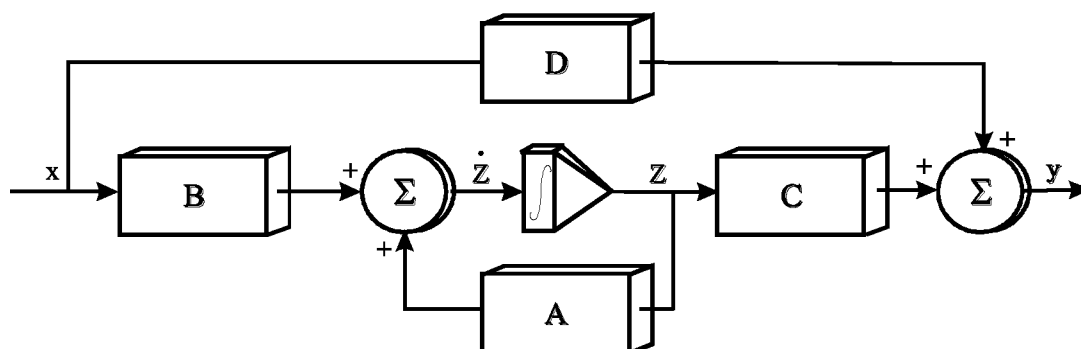


Рисунок 2.1 – Блок – схема модели, соответствующей уравнениям «вход - состояние – выход»

Для биологических систем представление переменных состояния в виде фазовых координат оказывается удобным, так как позволяет представить широкий класс моделей, описывающих соотношения темпов и уровней компонентов системы. К подобным моделям можно отнести описание

процессов обмена, накопления и расходования вещества и энергии в открытых системах.

Задание уровней компонентов в рассматриваемых системах оказывается достаточным для определения темпов происходящих в них процессов, при условии, что имеется описание модели системы и условий Среды, в которой она находится. Таким образом, вектор состояния системы полностью описывает поведение системы и характеризует ее состояние.

При решении задачи об идентификации свойств биологических тканей в пространстве электрических схем замещения распространение электрического тока будет описываться дифференциальными уравнениями, связывающими заряд, ток и напряжение на биологической ткани. Переменной состояния в этом случае является заряд, входной переменной – ток, протекающий через ткань, а выходной – напряжение на ткани.

Представление модели системы в виде блок-схемы, отвечающей уравнениям состояния [\(2.1\)](#), позволяет наглядно изобразить взаимосвязь между переменными состояния, а использование правил преобразования подобных схем - найти наиболее близкое выражение для дальнейшей структурной идентификации системы.

В ряде случаев разложение дифференциального уравнения системы высокого порядка на систему уравнений состояния, описывающих элементарные биологические регуляторы, позволяет с помощью структурной идентификации описать механизмы, лежащие в основе поведения исследуемой системы.

Матричная запись уравнений состояния [\(2.1\)](#) позволяет применять стандартный аппарат теории управления для исследования системы. Например, для оценки важнейших свойств системы - управляемости и наблюдаемости, показывающих адекватность выбора переменных состояния, могут быть использованы матричные процедуры.

Система является управляемой, если она может быть переведена из любого состояния $z_0(t_0)$ в момент времени $t = t_0$ в любое другое желаемое состояние $z_1(t)$ за конечный интервал времени $\tau = t_1 - t_0$ путем приложения входного воздействия $x(t)$, $t \in (t_0, t_1)$. Понятие управляемости системы предполагает чувствительность любой состояния системы к воздействию входного сигнала.

Понятие наблюдаемости системы определяет влияние каждого состояния системы на выходной сигнал. Система является наблюдаемой, если все ее состояния можно непосредственно или косвенно получить по выходному вектору. Если в выбранных переменных состояние система не наблюдаема, то она не может быть идентифицирована в данном пространстве состояний.

Для исследования управляемости и наблюдаемости системы, записанной в виде (97), может быть использован критерий Гильберта, для проверки которого уравнение состояния приводится к каноническому виду:

$$\begin{cases} \dot{Z}^* = A^* Z^* + B^* X \\ Y = C^* Z^* \end{cases} \quad (2.2)$$

где $Z^* = \vee Z$ - преобразованный вектор состояния,

здесь $\vee$ - матрица собственных векторов, $B^* = \vee^{-1} B$,
 $C^* = C \vee$,

$A^* = \vee^{-1} A \vee$ - диагонализированная матрица A .

Условием управляемости является отсутствие нулевой строки в матрице B^* , условием наблюдаемости - отсутствие нулевого столбца в матрице C^* .

Эти условия связаны с тем, что каноническое преобразование матриц уравнения состояния [\(2.1\)](#), приводит к системе уравнений состояния (2.2), в которой каждая производная канонической переменной состояния зависит только от соответствующей канонической переменной и от входных сигналов.

Построение модели исследуемой системы в пространстве состояний осуществляется путем преобразования описания системы, полученного в результате функциональной идентификации в форме передаточной функции исследуемого объекта.

Разложение передаточной функции системы на элементарные дроби позволяет представить модель системы в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка относительно переменных состояния.

Рассмотрим систему с одним входом и одним выходом, передаточная функция которой может быть представлена в виде отношения многочленов:

$$H(p) = N(p) / D(p) \quad (2.3)$$

Если предположить, что корни знаменателя различны, то для $D(p)$ можно записать:

$$D(p) = (p - a_1)(p - a_2) \dots (p - a_n) \quad (2.4)$$

Тогда передаточная функция системы может быть представлена в виде:

$$H(p) = d_0 + \frac{c_1}{p - a_1} + \frac{c_2}{p - a_2} + \dots + \frac{c_n}{p - a_n} \quad (2.5)$$

где $d_0 = \lim_{p \rightarrow \infty} H(p)$.

Постоянные коэффициенты c_i могут быть найдены по правилам разложения многочленов на элементарные дроби:

$$c_i = N(p) / D'(p) \Big|_{p = a_i}$$

или

$$c_i = [(p - a_i)N(p) / D(p)] \Big|_{p = a_i};$$

Тогда передаточная функция рассматриваемой системы примет вид:

$$H(p) = Y(p) / X(p) = d_0 + \sum_1^n c_i (p - a_i)^{-1}$$

$$Y(p) = d_0 X(p) + \sum_1^n c_i (p - a_i)^{-1} X(p) \quad (2.6)$$

Для образования n -мерного вектора состояния, имеющего оригиналом систему дифференциальных уравнений первой степени, выберем переменные состояния:

$$z_i(p) = X(p) / (p - a_i)$$

Уравнения состояния модели для системы с одним входом и одним выходом в операторной форме запишутся в виде:

$$z_i(p)p = a_i z_i(p) + X(p)$$

или в матричном виде во временной области:

$$\dot{Z} = AZ + x, \quad (2.7)$$

$$\text{где } Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & a_n \end{bmatrix}$$

Уравнение выхода модели принимает вид:

$$y = \sum_1^n c_i z_i + d_0 x \quad (2.8)$$

Объединяя уравнения получим систему «вход – состояние - выход»:

$$\begin{cases} \dot{Z} = AZ + x \\ y = CZ + d_0 x \end{cases} \quad (2.9)$$

где $C = [c_1 \dots c_n]$.

Система имеет канонический вид, так как $\square$ - диагональная матрица. По рассмотренным критериям система (2.9) является управляемой и наблюдаемой. Схема моделирования системы (рис.2.2) может быть представлена в виде параллельного соединения ветвей, содержащих интеграторы.

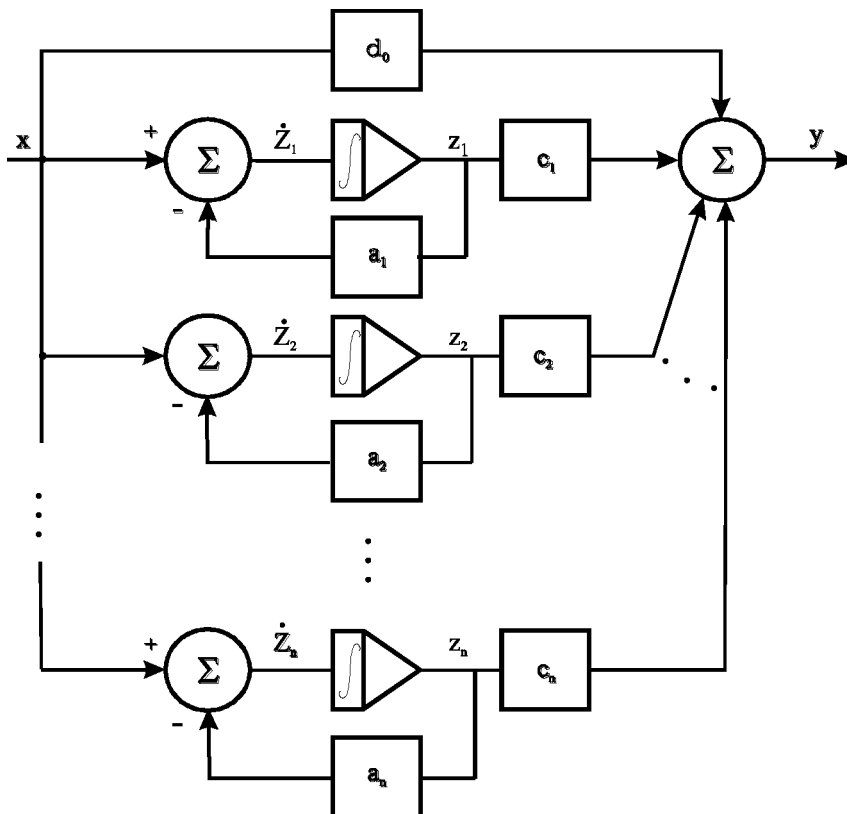


Рисунок 2.2– Модель системы, имеющей передаточную функцию [вида \(2.5\)](#)

Конкретный смысл переменных состояния может быть определен при структурной идентификации системы на основе априорных данных о взаимодействии ее компонент.

Сопоставляя характеристики элементов системы с решениями уравнения состояния, можно придать переменным состояния определенный биофизический смысл и интерпретировать внутренние механизмы функционирования системы.

Так, например, при моделировании функциональных систем организма отдельные уравнения состояния, описывающие аperiodические процессы, могут быть представлены как описание элементарных регуляторов, связывающее темпы поступления афферентной информации и уровни биохимических медиаторов опосредующих протекающие процессы.

В случае если передаточная функция системы имеет более сложный вид, чем [выражение \(2.5\)](#) то схема моделирования усложняется. Так, например, существование в [выражении \(2.3\)](#) дополнительных кратных корней, приводит аналогичным способом к схеме последовательно-параллельного соединения ветвей, содержащих интеграторы.

2.2 Биоэлектрический импеданс при распространении тока в тканях

Рассмотрим моделирование биоэлектрического импеданса при распространении тока в тканях в случае чрескожной электронейростимуляции как задачу идентификации биологического объекта в пространстве состояний методом преобразования известной передаточной функции системы.

Идентификацию участка пассивной биологической ткани, заключенного в промежутке между стимулируемыми электродами, необходимо провести в классе моделей неоднородных проводников электрического тока [\[11\]](#).

В разделе в результате функциональной идентификации модели получено выражение для передаточной функции системы, представляющей собой импеданс тканей в операторной [форме \(1.47\)](#):

$$H(p) = 5,2(1 + 0,05p)/(1 + p).$$

С точки зрения пространства состояний данная передаточная функция описывает односвязную систему с одной переменной состояния.

Для получения уравнений состояния необходимо разложить выражение для передаточной функции на элементарные дроби.

В соответствии с [\(2.5\) - \(2.7\)](#) получим:

$$H(p) = d_0 + C_1/(p - a_1),$$

$$d_0 = \lim_{p \rightarrow \infty} H(p) = 0,26,$$

$$a_1 = -1,$$

$$H(p) = \frac{0,26(p + 20)}{(p + 1)},$$

$$C_1 = 0,26(-1 + 20) = 4,94,$$

$$H(p) = 0,26 + \frac{4,94}{(p + 1)}$$

По условиям задачи идентификации в качестве входной переменной принят стимулирующий ток - $I[mA]$, выходной переменной – напряжение - $U[B]$ на электродах, время - $t [ms]$.

Тогда уравнение модели в форме «вход – состояние – выход» принимает вид:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = a_1 z_1 + x \\ y = C_1 z_1 + d_0 x \end{cases} \quad (2.10)$$

По критерию Гильберта система является наблюдаемой и управляемой.

Схема модели содержит один интегратор, выход которого определяет переменную состояния (рис. 2.3).

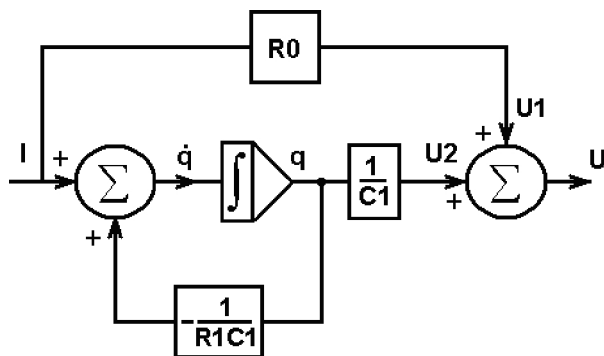


Рисунок 2.3 – Схема моделирования импеданса пассивных биологических тканей

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = (-1)z_1 + I \\ U = 4,94z_1 + 0,26I \end{cases}$$

Полученная модель позволяет на основании данных об электрических свойствах биологических тканей определить электрическую эквивалентную схему биоэлектрического импеданса.

Как следует из уравнения состояния (2.10) и схемы модели, выходное напряжение модели складывается из суммы двух составляющих: без инерционной (статической), формируемой в верхней ветви второго сумматора, (рис.2.3) и инерционной - в нижней его ветви. Первая составляющая

получается путем умножения выходного тока на постоянный коэффициент, что может быть представлено прохождением тока через резистор (рис.2.4а)

$$U_1 = IR_0$$

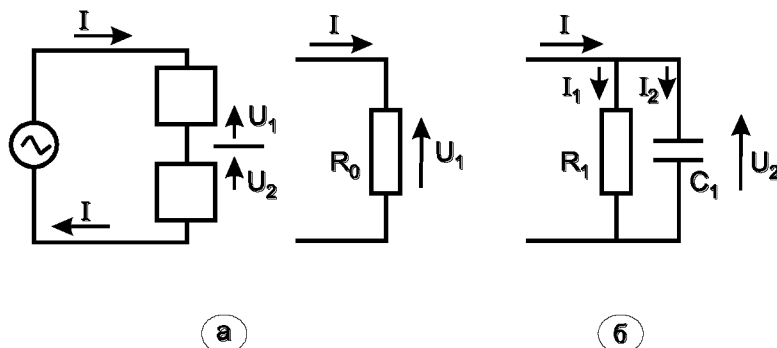


Рисунок 2.4 – Модель импеданса тканей (а), включающая статическую (б) и инерционную (в) составляющую

Вторая составляющая выходного напряжения выражается через переменную состояния:

$$\begin{cases} U_2 = 4,94z_1 \\ \dot{z}_1 = (-1)z_1 + I \end{cases} \quad (2.11)$$

Из уравнений следует, что переменная состояния имеет размерность электрического заряда.

В цепях обладающих активно-емкостной проводимостью тока, процесс накопления заряда является инерционным процессом.

Действительно, для цепочки параллельно соединенных активного резистора и емкости имеем (рис. 2.4б):

$$I = I_1 + I_2 = \frac{U_2}{R_1} + C_1 \frac{dU_2}{dt},$$

Перейдем к выражению для заряда:

$$U_2 = q/C_1$$

Тогда

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{R_1 C_1} = I,$$

что при замене $q \rightarrow z_1$, совпадает с уравнением состояния (2.11).

Следовательно, система уравнений (2.11) описывает процесс формирования напряжения на эквивалентной RC-цепи (рис.2.4б).

Из второго уравнения системы получаем:

$$R_1 C_1 = 1[\text{мс}] \quad (2.12)$$

В стационарном режиме (соответствующем протеканию по цепи постоянного тока) из уравнений (2.10) имеем:

$$\dot{z}_1 = 0, \quad U = 4,94I + 0,26I = I(4,94 + 0,26)$$

Первое слагаемое в скобке соответствует резистору

$$R_1 = 4,94 \text{ кОм}.$$

Второе слагаемое соответствует резистору

$$R_0 = 0,26 \text{ кОм}$$

Величину емкости C_1 , можно определить из соотношения (2.12):

$$C_1 = R_1 C_1 / R_1 = 0,2[\text{мкФ}]$$

Таким образом, эквивалентная электрическая схема импеданса биологических тканей может быть представлена в виде цепочки, состоящей из двух последовательно соединенных звеньев: резистора R_0 и соединенных параллельно резистора R_1 и емкости C_1 (рис.2.5).

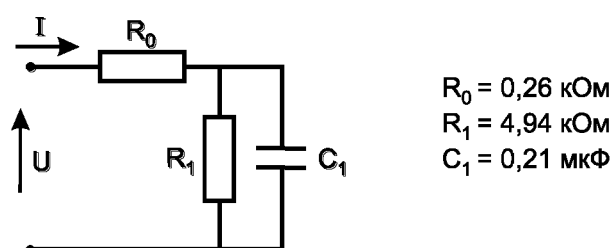


Рисунок 2.5 – Электрическая эквивалентная схема биоэлектрического импеданса

Электрическая эквивалентная схема импеданса биологических тканей может быть использована при построении фантома биологической ткани необходимого для подключения в качестве нагрузки к

выходным каскадам аппаратуры для испытаний электростимуляционной аппаратуры.

Раздел 3. Электрические эквивалентные схемы замещения биологических тканей, отражающие их структурные свойства.

3.1 Модель подкожных тканей

Исследование структурного состава биологических объектов может быть проведено с помощью анализа электрического импеданса в широком диапазоне частот. Для этого частотные свойства исследуемого объекта могут быть представлены в виде эквивалентных схем замещения в пространстве активных и резистивно-активных проводимостей. Такое представление соответствует закономерностям распространения тока в биологических средах, которые описывают явление ионной проводимости и явление разделения зарядов на клетках и клеточных структурах, обуславливающее сдвиг фаз между током и напряжением на этих структурах. Таким образом, идентификация составляющих импеданса в области элементарных RC-ячеек эквивалентных схем приводит к исследованию структурного состава биологических тканей.

Клетка является основой построения биологических тканей. Мембрана клетки (рисунок 3.1) обеспечивает градиент ионной концентрации между внутренней и внешней областями. Этот электрический градиент создает мембранный потенциал необходимый для ее жизнедеятельности – поддержания метаболических процессов, обмена информацией, репродуктивных процессов. Мембрана клетки для поддержания электрического градиента обладает свойствами электрического изолятора, нарушение которого ведет к ее гибели.

В норме мембрана клетки состоит из слоя непроводящего липида расположенного между двумя слоями проводящих молекул белка. Мембрана

представляет собой проницаемый барьер, отделяющий внутриклеточные и внеклеточные компоненты [12].

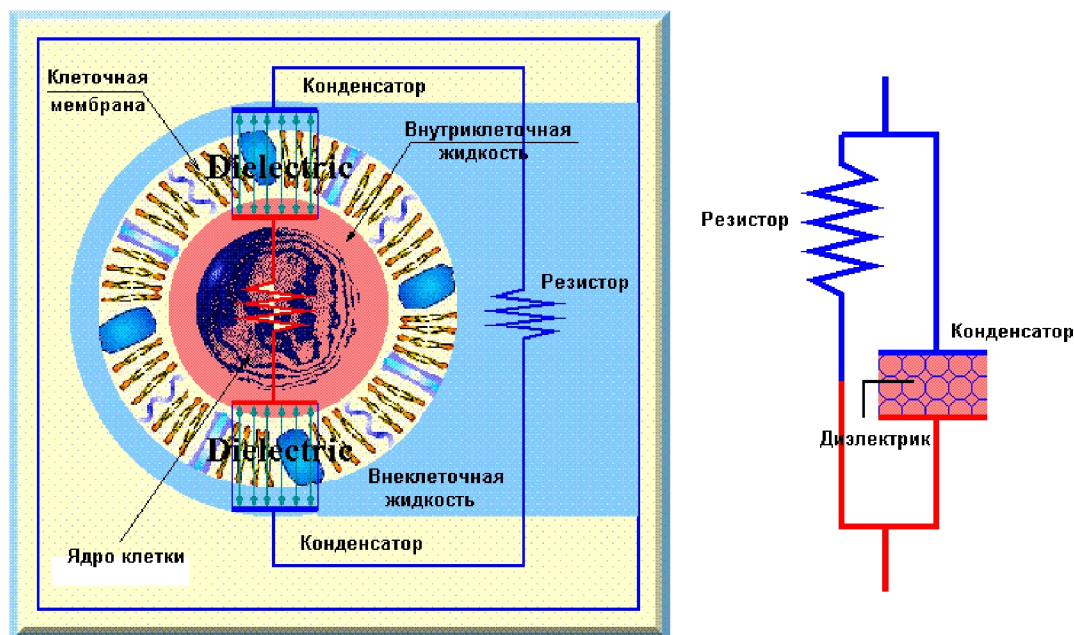


Рисунок 3.1 – Электрическая эквивалентная схема клетки

Когда электрический ток приложен к среде, содержащей клетки, часть тока проходит через белковые каналы, заряжая внутреннюю поверхность клеточной мембраны. Это позволяет в простейшем случае представить клетку в виде параллельной модели. С помощью параллельной модели можно описать электрические свойства клеток. Могут быть выделены два пути распространения тока – через клетки и через внеклеточную среду, которые могут иметь электрический аналог - емкость и резистор.

Изменение показателей анализа биоимпедансных свойств тканей в зависимости от частоты подчиняется определенным закономерностям. На низких частотах (менее 100 Гц) ток не проникает через клеточную мембрану и проходит только через внеклеточную жидкость, внутриклеточная жидкость не участвует в его проведении. На высоких частотах (более 100 Гц) внутриклеточная жидкость также вносит вклад в проведение тока, и он

распространяется как по внеклеточному, так и по внутриклеточному пространству.

Параллельная модель (рисунок 3.1) недостаточно полно отражает импедансные свойства биологических объектов. Поэтому для описания частотных характеристик импеданса биологических объектов применяется модель Фрике-Морзе [\[13\]](#) (рисунок 3.2). В соответствии с этой моделью внеклеточная и внутриклеточная жидкость представляют собой проводники, а мембраны клеток – диэлектрики, определяющие электрическую емкость. Емкость пропорциональна величине фазового сдвига.

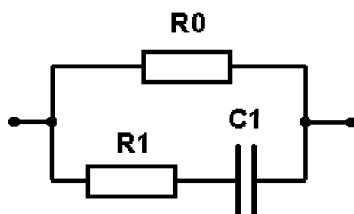


Рисунок 3.2 – Модель Фрике-Морзе

Вклад емкостного сопротивления в импеданс на низких и высоких частотах стремится к нулю, поскольку на низких частотах токе не проникает через мембрану, а на высоких – мембраны не препятствуют прохождению тока. Частота, на которой емкостная составляющая импеданса достигает максимального значения, называется характеристической. Величина R_0 соответствует сопротивлению только внеклеточной жидкости, т.к. на низких частотах внутриклеточная жидкость в проведении тока не участвует. Величина R_1 соответствует сопротивлению внутриклеточной жидкости.

Описанная выше модель Фрике-Морзе может быть преобразована в более удобную для анализа модель [\[14\]](#).

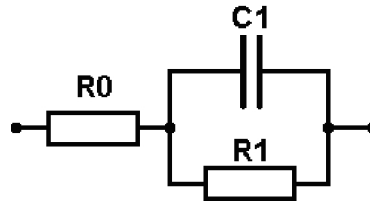
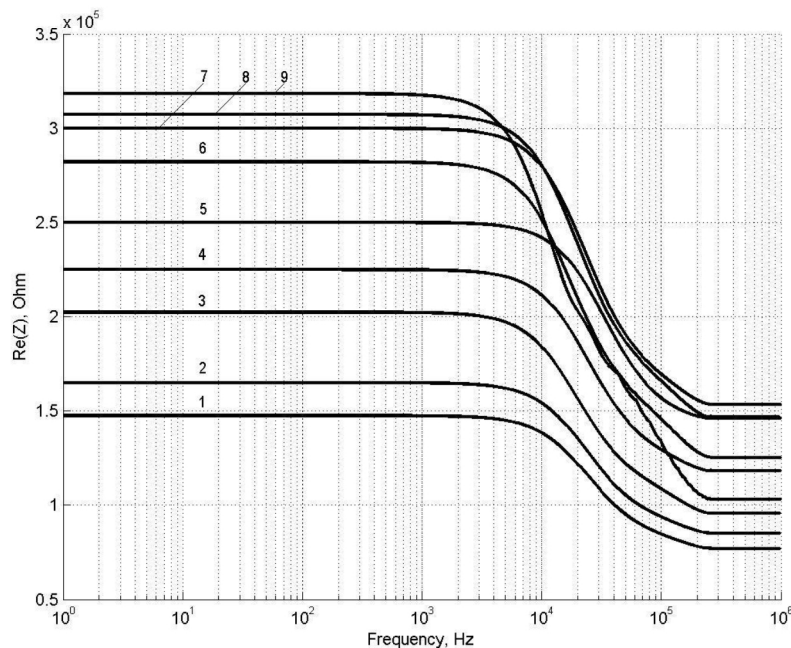


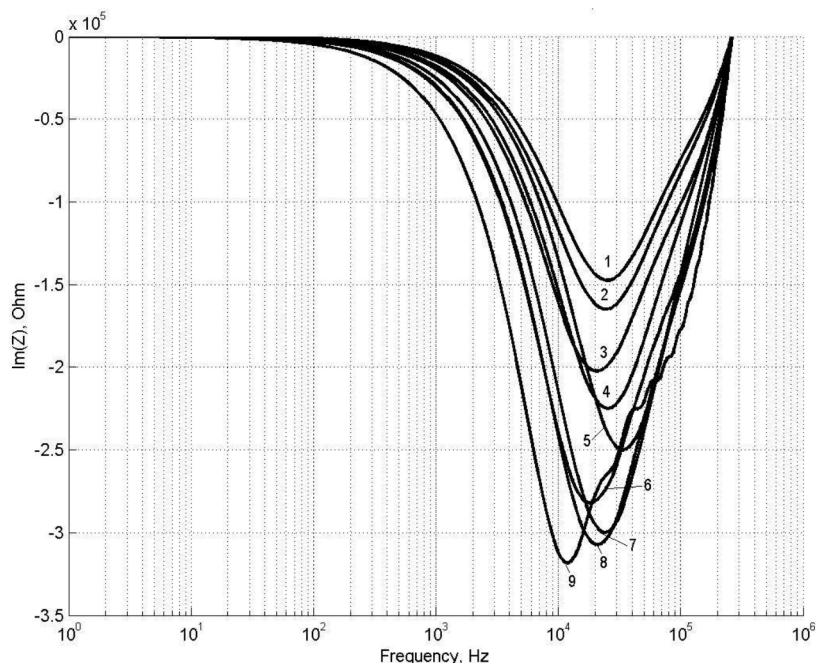
Рисунок 3.3 – Модель, сводимая к модели Фрике-Морзе

Для определения переходной функции исследуемые участки биологической ткани по методике импульсной импедансометрии тестировались ступенчатым током $I = 0,1 \text{ мА}$, площадь тестирующих электродов $S = 2 \text{ см}^2$. Выходное сопротивление генератора тестирующих импульсов составляло 88 кОм, длительность тестирующего импульса: $T_H = 30 \text{ мс}$, длительность фронта тестирующего импульса: $T_\phi = 5,34 \text{ мкс}$.



1 – лоб, 2 – шея, 3 – брюшина, 4 – дельтовидная мышца, 5 – голень,
6 – бицепс, 7 – икроножная мышца, 8 – предплечье, 9 – кисть

Рисунок 3.4 – Зависимость активной составляющей импеданса от частоты для различных участков ткани



1- лоб, 2 – шея, 3 – брюшина, 4 – дельтовидная мышца, 5 – голень, 6 – бицепс, 7 – икроножная мышца, 8 – предплечье, 9 – кисть
2-

Рисунок 3.5 – Зависимость реактивной составляющей импеданса от частоты для различных участков ткани

Частотные характеристики активной и реактивной составляющих биоэлектрического импеданса подкожных тканей показаны на рисунках 3.4, 3.5.

Для определения передаточной функции использовался алгоритм модифицированного метода прямой подгонки Леви.

На основании методики синтеза электрической эквивалентной схемы замещения была получена модель биоэлектрического импеданса подкожных тканей в пространстве состояний.

Схема моделирования электрического импеданса различных участков подкожных тканей в пространстве состояний, может быть представлена в виде, показанном на [рисунке 2.3](#). Данной модели соответствует эквивалентная схема замещения, показанная на [рисунке 2.5](#).

Параметры модели для различных участков ткани приведены в таблице 3.1.

Таблица 3.1 – Параметры эквивалентной схемы замещения биоэлектрического импеданса различных участков биологической ткани

	R0, Ом	R1, Ом	C1, мкФ
Голень	2800	25000	0,016
Икроножная мышца	2300	30000	0,06
Брюшина	1300	20000	0,11
Предплечье	2000	30000	0,075
Шея	1300	16500	0,1
Бицепс	1600	28250	0,09
Дельтовидная мышца	1840	22550	0,073
Кисть	1150	32250	0,065
Лоб	1200	29500	0,05

Исследование структурного состава биологических объектов может быть проведено с помощью разработанных методик путем анализа биоэлектрического импеданса в широком диапазоне частот. Для этого частотные свойства исследуемого объекта могут быть представлены в виде эквивалентных схем замещения в пространстве активных и резистивно-активных проводимостей. Такое представление соответствует закономерностям распространения тока в биологических средах, которые описывают явление ионной проводимости и явление разделения зарядов на клетках и клеточных структурах, обуславливающее сдвиг фаз между током и напряжением на этих структурах. Таким образом, идентификация составляющих импеданса в области элементарных RC-ячеек эквивалентных схем приводит к исследованию структурного состава биологических тканей.

Для многокомпонентных суспензий синтез эквивалентных схем по известной частотной характеристике может быть произведен методом пространства состояний. Таким образом, экспериментально определенным частотным характеристикам биологических тканей могут быть поставлены в

соответствие электрические эквивалентные схемы замещения, значения отдельных элементов которых будут зависеть от искомым параметров системы. Метод пространства состояний позволяет перейти от эквивалентной схемы замещения к уравнениям состояния и, наоборот, в то время, как переход к уравнениям состояния может быть осуществлен путем преобразования частотной характеристики с целью получения передаточной функции.

Моделирование биоэлектрического импеданса исследуемого объекта может быть осуществлено в следующей последовательности. По методике импульсной импедансометрии находятся частотные характеристики действительной и мнимой составляющих биоэлектрического импеданса исследуемого объекта. Путем использования методов функциональной идентификации отыскивается передаточная функция исследуемого объекта, соответствующая операторному импедансу. На основании передаточной функции системы осуществляется ее моделирование в пространстве состояний, а полученной модели ставится в соответствие электрическая эквивалентная схема замещения, значения параметров которой могут нести информацию о структурном составе исследуемого объекта.

Моделирование биоэлектрического импеданса в пространстве состояний путем преобразования передаточной функции (в роли которой выступает операторный импеданс) осуществляется следующим образом. Разложение операторного импеданса системы на элементарные дроби позволяет представить модель биоэлектрического импеданса в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка относительно переменных состояния, в роли, которой выступает заряд. При этом, в качестве входной переменной используется ток I , пропускаемый через исследуемый объект, в качестве выходной переменной используется напряжение U , регистрируемое на исследуемом объекте.

3.3 Модель многокомпонентной суспензии

В качестве примера использования методики импульсной импедансометрии с целью оценки структурного состава ткани рассмотрим идентификацию импеданса однокомпонентной суспензии, частотные характеристики которой полученные методом импульсной импедансометрии, приведены на рисунках 3.6, 3.7.

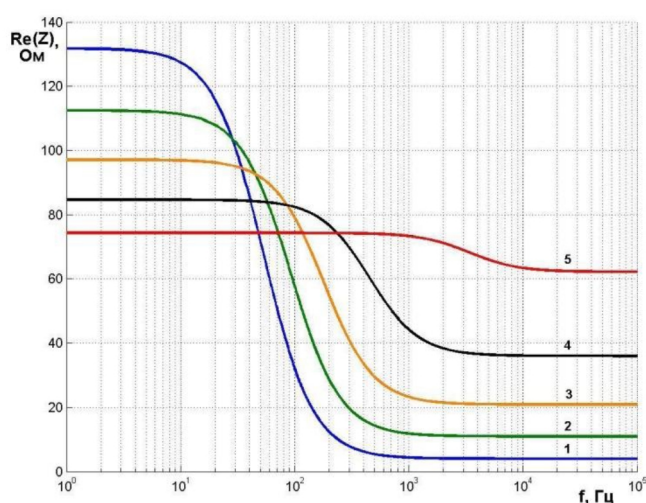


Рисунок 3.6 – Зависимость действительной составляющей импеданса однокомпонентной суспензии от частоты для различных концентраций частиц: 1 – 0.85, 2 – 0.65, 3 – 0.45, 4 – 0.25, 5 – 0.05.

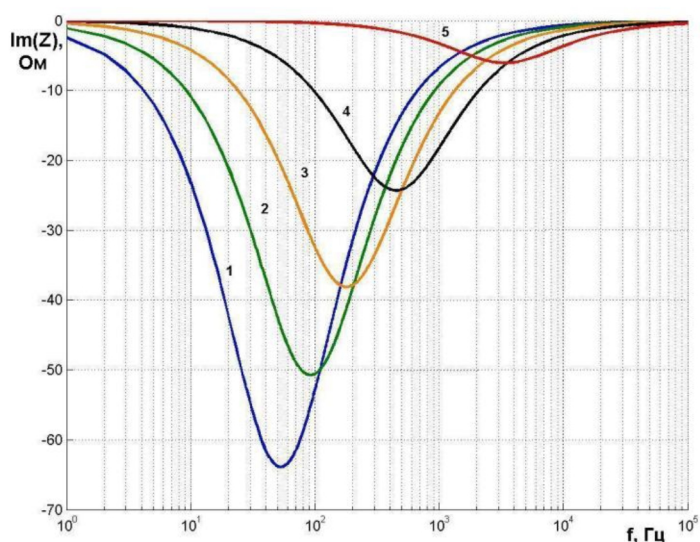


Рисунок 3.7 – Зависимость мнимой составляющей импеданса однокомпонентной суспензии от частоты для различных концентраций частиц: 1 – 0.85, 2 – 0.65, 3 – 0.45, 4 – 0.25, 5 – 0.05.

Посредством использования метода прямой подгонки Леви, была проведена функциональная идентификация импеданса исследуемой суспензии с целью получения операторного импеданса (передаточной функции) исследуемой суспензии. Был получен следующий вид передаточной функции

$$Z(p) = \frac{0.012p + 4.212}{0.00006p + 0.01}$$

Данный операторный импеданс может быть представлен в виде отношения многочленов:

$$Z(p) = N(p) / D(p)$$

Корни знаменателя различны, тогда:

$$D(p) = (p - a_1)$$

$$a_1 = -166$$

Передаточная функция представляется в виде:

$$Z(p) = d_0 + \frac{f_1}{p - a_1}$$

где $d_0 = \lim_{p \rightarrow \infty} Z(p) = 200$.

Постоянные коэффициенты f_i находим по правилам разложения многочленов на элементарные дроби:

$$f_1 = 166667$$

Тогда передаточная функция примет вид:

$$Z(p) = U(p) / I(p) = 200 + \frac{166667}{p + 166.7}$$

Для образования n -мерного вектора состояния, имеющего оригиналом систему дифференциальных уравнений первой степени, выберем переменные состояния:

$$q_i(p) = I(p) / (p - a_i)$$

Уравнения состояния модели для системы с одним входом и одним выходом в операторной форме запишутся в виде:

$$q_i(p)p = a_i q_i(p) + I(p)$$

или в матричном виде во временной области:

$$q' = Aq + I$$

$$\text{где } q = \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & a_n \end{bmatrix}$$

Уравнение выхода модели принимает вид:

$$U = \sum_1^n f_i q_i + d_0 I = f_1 q_1 + d_0 I$$

Объединяя уравнения, получим систему «вход – состояние - выход»:

$$\begin{cases} q'_1 = a_1 q_1 + I \\ U = f_1 q_1 + d_0 I \end{cases}$$

$$f_1 = \frac{1}{C_1}$$

$$d_0 = R_0$$

$$a_1 = -\frac{1}{R_1 C_1}$$

Схема моделирования системы представлена на [рисунке 2.3](#).

Данной модели соответствует эквивалентная схема замещения, показанная на [рисунке 2.5](#)

Зависимости параметров эквивалентной схемы замещения электрического импеданса однокомпонентной суспензии от объемной концентрации сферических частиц рисунке 3.8.

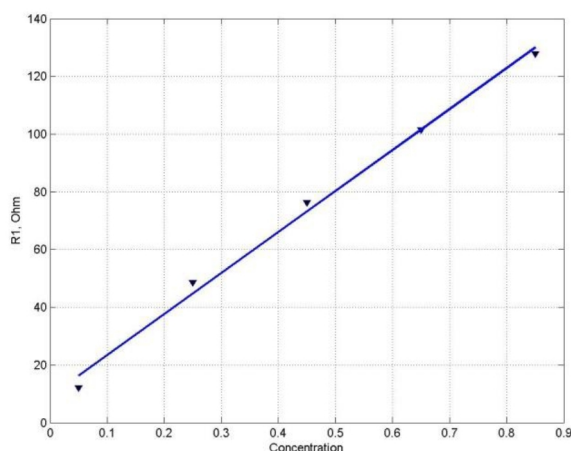


Рисунок 3.8 – Зависимость параметра R1 эквивалентной схемы от объемной концентрации сферических частиц однокомпонентной суспензии.

Полученные зависимости параметров эквивалентной схемы замещения биоэлектрического импеданса однокомпонентной суспензии от объемной концентрации сферических частиц и радиуса частиц показывают, что значения параметров R и C эквивалентной схемы зависят от параметров исследуемого объекта, что свидетельствует о возможности использования разработанной методики в оценке параметров структурного состава биологических тканей.

Частотные характеристики активной и реактивной составляющих импеданса двухкомпонентной суспензии при изменении концентрации одного из компонентов показаны на рисунке 3.9 и 3.10.

Изменение концентрации одной из размерных компонент приводит к изменению той части частотной характеристики импеданса, которая «ответственна» за эту компоненту.

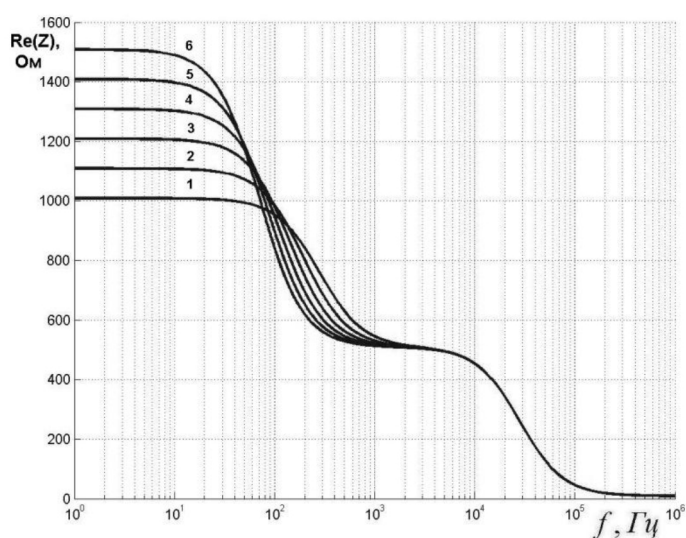


Рисунок 3.9– Зависимость активной составляющей импеданса двухкомпонентной суспензии частиц радиусами 100 и 10 мкм от частоты; концентрации суспензий: 1 – 0.05 и 0.05, 2 – 0.05 и 0.06, 3 – 0.05 и 0.07, 4 – 0.05 и 0.08, 5 – 0.05 и 0.09, 6 – 0.05 и 0.1.

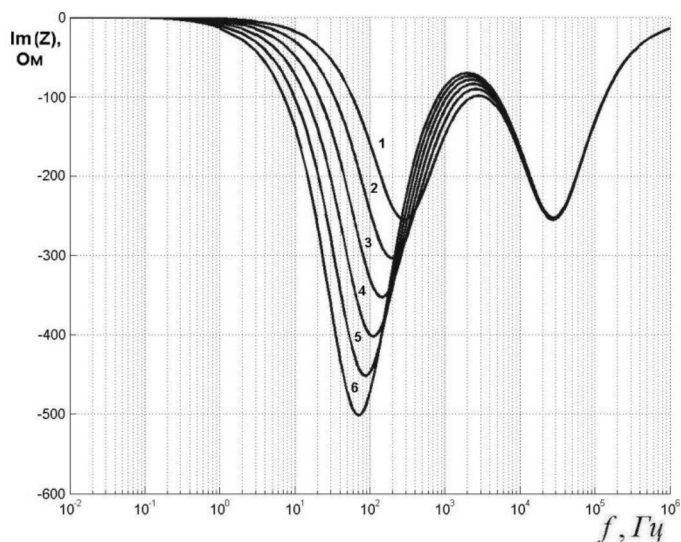


Рисунок 3.10 – Зависимость реактивной составляющей импеданса двухкомпонентной суспензии частиц радиусами 100 и 10 мкм от частоты; концентрации суспензий: 1 – 0.05 и 0.05, 2 – 0.05 и 0.06, 3 – 0.05 и 0.07, 4 – 0.05 и 0.08, 5 – 0.05 и 0.09, 6 – 0.05 и 0.1.

Рассмотрим частотные характеристики суспензии с двухкомпонентной дисперсной фазой, приведенные на рисунках 3.11, 3.12.

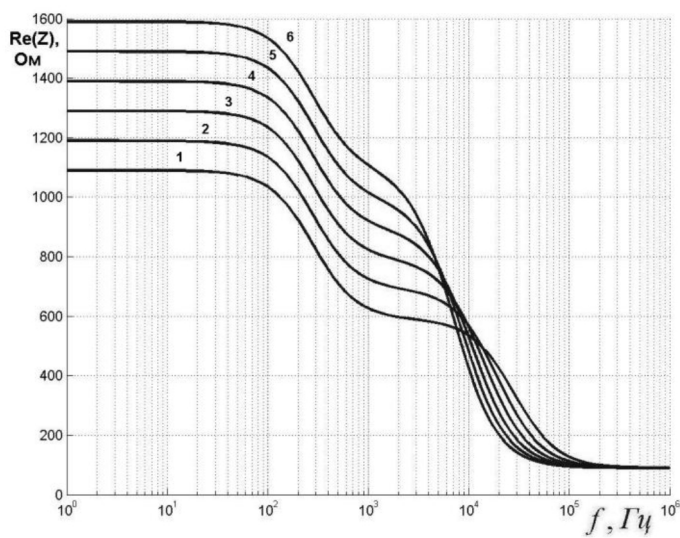


Рисунок 3.11 – Зависимость активной составляющей импеданса двухкомпонентной суспензии частиц радиусами 10 и 1 мкм от частоты; концентрации суспензий: 1 – 0.05 и 0.05, 2 – 0.05 и 0.06, 3 – 0.05 и 0.07, 4 – 0.05 и 0.08, 5 – 0.05 и 0.09, 6 – 0.05 и 0.1.

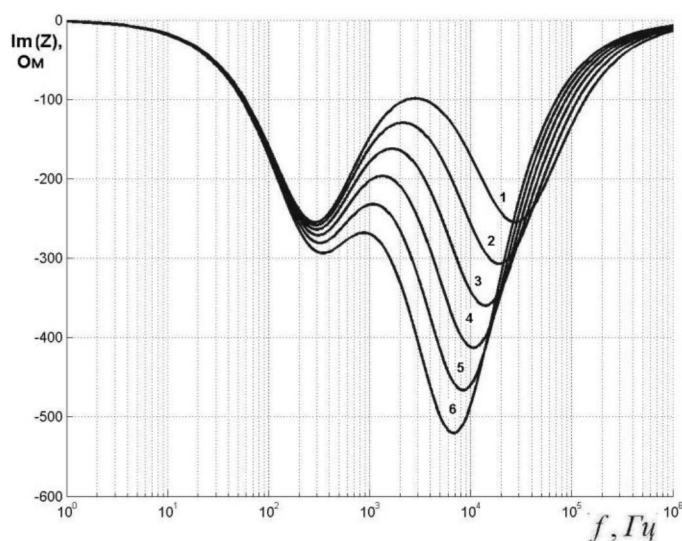


Рисунок 3.12 – Зависимость реактивной составляющей импеданса двухкомпонентной суспензии частиц радиусами 10 и 1 мкм от частоты; концентрации суспензий: 1 – 0.05 и 0.05, 2 – 0.05 и 0.06, 3 – 0.05 и 0.07, 4 – 0.05 и 0.08, 5 – 0.05 и 0.09, 6 – 0.05 и 0.1.

Таким образом, частотные характеристики импеданса многокомпонентных биологических жидкостей, в частности суспензий, имеют различный вид при изменении размеров частиц, а также их структурного состава. Непосредственное исследование частотных характеристик для оценки структурного состава суспензий затруднено из-за сложной зависимости от частоты. В то же время частотные характеристики суспензий могут быть описаны с помощью эквивалентных схем замещения, имеющих компоненты R и C , причем отдельные элементы этих эквивалентных схем могут быть использованы для оценки компонентного состава и концентрации [9].

Была проведена функциональная идентификация импеданса исследуемой суспензии с целью получения операторного импеданса (передаточной функции) исследуемой суспензии. Был получен следующий вид передаточной функции

$$Z(p) = \frac{0.000012p^2 + 4.212p + 1700}{0.00000006p^2 + 0.00601p + 1}.$$

Данный операторный импеданс может быть представлен в виде отношения многочленов:

$$Z(p) = N(p) / D(p).$$

Корни знаменателя различны, тогда:

$$\begin{aligned} D(p) &= (p - a_1)(p - a_2) \\ a_1 &= -166 \\ a_2 &= -100000 \end{aligned}.$$

Передаточная функция представляется в виде:

$$Z(p) = d_0 + \frac{f_1}{p - a_1} + \frac{f_2}{p - a_2},$$

$$\text{где } d_0 = \lim_{p \rightarrow \infty} Z(p) = 200.$$

Постоянные коэффициенты f_i находим по правилам разложения многочленов на элементарные дроби:

$$\begin{aligned} f_1 &= 166667 \\ f_2 &= 50000000 \end{aligned}.$$

Тогда передаточная функция примет вид:

$$Z(p) = U(p) / I(p) = 200 + \frac{166667}{p + 166.7} + \frac{50000000}{p + 100000}.$$

Для образования n -мерного вектора состояния, имеющего оригиналом систему дифференциальных уравнений первой степени, выберем переменные состояния:

$$q_i(p) = I(p) / (p - a_i).$$

Уравнения состояния модели для системы с одним входом и одним выходом в операторной форме запишутся в виде:

$$q_i(p)p = a_i q_i(p) + I(p)$$

или в матричном виде во временной области:

$$q' = Aq + I,$$

где $q = \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} a_1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & a_n \end{bmatrix}$.

Уравнение выхода модели принимает вид:

$$U = \sum_1^n f_i q_i + d_0 I = f_1 q_1 + f_2 q_2 + d_0 I.$$

Объединяя уравнения получим систему «вход – состояние - выход»:

$$\begin{cases} q_1' = a_1 q_1 + I \\ q_2' = a_2 q_2 + I \\ U = f_1 q_1 + f_2 q_2 + d_0 I \end{cases}, \quad f_1 = \frac{1}{C1} \quad f_2 = \frac{1}{C2} \quad d_0 = R0,$$

$$a_1 = -\frac{1}{R1C1} \quad a_2 = -\frac{1}{R2C2}.$$

Схема моделирования системы (рисунок 3.13) может быть представлена в виде параллельного соединения ветвей, содержащих интеграторы. Данной модели соответствует эквивалентная схема замещения, показанная на рисунке 3.14.

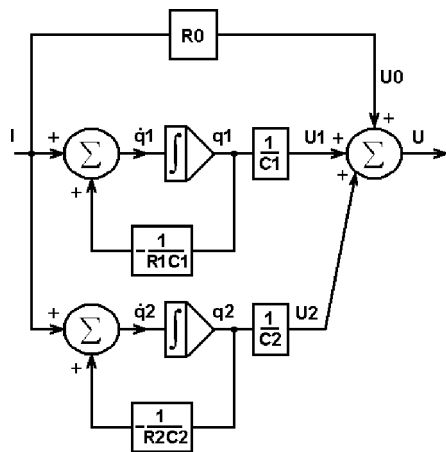


Рисунок 3.13 - Схема моделирования импеданса двухкомпонентной суспензии в пространстве состояний

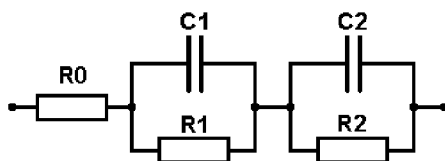


Рисунок 3.14 – Электрическая эквивалентная схема замещения двухкомпонентной суспензии

Зависимости величин параметров R_1 , R_2 , C_1 от концентрации сферических частиц в двухкомпонентной суспензии приведены на рисунках 3.15-3.17.

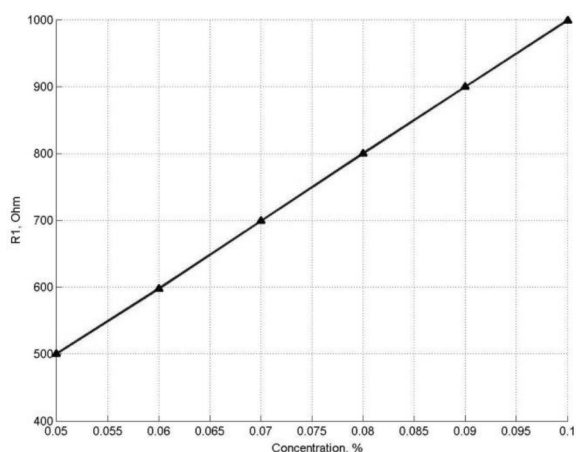


Рисунок 3.15 - Зависимость величины параметра R_1 от концентрации сферических частиц радиусом 1 мкм

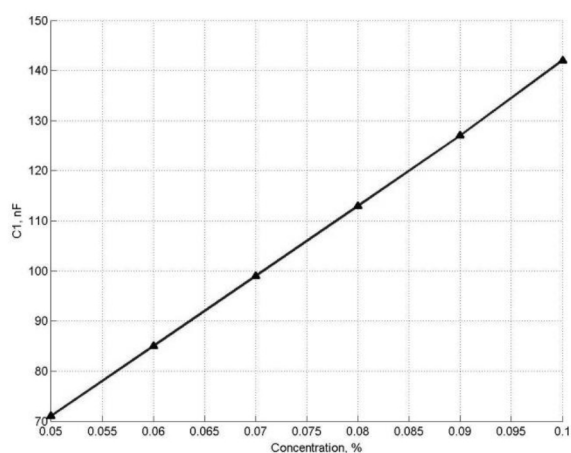


Рисунок 3.16 - Зависимость величины параметра C_1 от концентрации сферических частиц радиусом 1 мкм

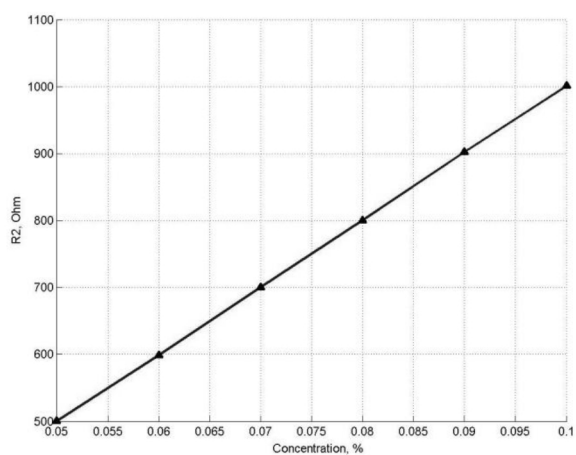


Рисунок 3.17 - Зависимость величины параметра R_2 от концентрации сферических частиц радиусом 10 мкм

Зависимость величин параметров R_1 , R_2 , C_1 от концентрации сферических частиц в двухкомпонентной суспензии имеет линейный характер. С ростом концентрации частиц суспензии изменяются значения параметров эквивалентной схемы. Таким образом, структурный состав суспензии может быть определен с помощью данной методики.

Заключение

Импульсная импедансометрия биологических тканей основанная на подходе, базирующемся на методике функциональной идентификации биологических тканей в классе моделей биоэлектрического импеданса, позволяет исследовать частотные характеристики биоэлектрического импеданса связанные с структурным составом исследуемых тканей.

Идентификации биоэлектрического импеданса тканей в пространстве моделей, описываемых электрическими эквивалентными схемами замещения в виде множества элементарных параллельных ячеек, представляющих соединение активного сопротивления и емкости позволяют представить биоэлектрический импеданс в виде электрической эквивалентной схемы замещения, элементы которой могут моделировать свойства отдельных компонент исследуемого объекта.

Развитие метода импульсной импедансометрии позволяет перейти от частотной характеристики, полученной с помощью обработки экспериментальных данных путем использования время - частотного преобразования, к выражению для передаточной функции и далее с помощью аппарата пространства состояний к получению значений параметров модели, т. е. решить задачу идентификации биоэлектрического импеданса.

Метод импульсной импедансометрии, при использовании в построении диагностических средств, обладает неоспоримыми преимуществами, главным из которых является малое время воздействия тестирующим током на биологический объект. Это открывает новые возможности в разработке средств импедансной кардиографии томографии, а также мониторинной аппаратуры.

Литература

1. Мартиросов, Э.Г. Технологии и методы определения состава тела человека [Текст]/ Э.Г. Мартиросов, Д.В. Николаев, С.Г. Руднев. – М.: Наука, 2006. – 248 с. [В текст](#)
2. Kenneth R. Foster, HERMAN P. SCHWAN: A Scientist and Pioneer in Biomedical Engineering [Текст]/Annu. Rev. Biomed. Eng. 2002. 4:1–27 [В текст](#)
3. <http://www.lomonosov-fund.ru/enc/ru/encyclopedia:0131742:article> , Фонд знаний Ломоносов [В текст](#)
4. Бакайкина, Л.А. Измерение параметров биоимпеданса во время тренировок [Текст]/ Л.А. Бакайкина, А.В. Смирнов// Материалы 12 научно-практической конференции "Диагностика и лечение нарушений регуляции сердечно-сосудистой системы".-М.-2010, С. 149-153 [В текст](#)
5. Гроп Д. Методы идентификации систем. - [Текст]/ Д. Гроп.– М.: Мир, 1979. – 302 с. [В текст](#)
6. Льюнг, Л. Идентификация систем. Теория для пользователя [Текст]: Пер. с англ. /Под ред. Я.З. Цыпкина. – М.: Наука, 1991. – 432 с. [В текст](#)
7. Мармарелис П.В. Анализ физиологических систем. [Текст]/П.И. Мармарелис, В.П. Мармарелис. – М.: Мир, 1983. – 400 с. [В текст](#)
8. Эйкхофф, П. Современные методы идентификации систем [Текст]: [Пер. с англ.] /П. Эйкхофф, А. Ванечек, Е. Савараги. – М.: Мир, 1983. – 400 с. [В текст](#)
9. Калакутский, Л.И. Моделирование биоэлектрического импеданса методом синтеза эквивалентных схем замещения [Текст]/ Л.И. Калакутский, С.А. Акулов//Биомедицинские технологии и радиоэлектроника. – 2007. – № 7. – С. 33-37. [В текст](#)
10. Деруссо, П. Пространство состояний в теории управления [Текст]/П. Деруссо, Р. Рой, Ч. Клоуз. – М.: Наука, 1970. – 620 с. [В текст](#)
11. Калакутский, Л.И. Синтез электрической модели ткани при чрескожной электронейростимуляции [Текст]/ Л.И. Калакутский, С.А.

Акулов//Известия ТРТУ. Тематический выпуск. МИС. - Таганрог: Изд-во ТРГУ, 2004. - №5.- С. 73-74.

[В ТЕКСТ](#)

12. Grimnes, S. Bioimpedance and bioelectricity basics [Текст]: /Grimnes, S Martinsen O. - London, Academic Press, 2000. 265 p.

[В ТЕКСТ](#)

13. Fricke H. The Maxwell-Wagner dispersion in a suspension of ellipsoids[Текст]/ Fricke H.// *J. Phys. Chem.* 1993; 57: 934-937

[В ТЕКСТ](#)

14. Schwan H. P. Dielectric properties of tissues and biological materials: a critical review. [Текст]/ Foster K. R., Schwan H. P. // *CRC Crit. Rev. Biomed. Eng.* 1989; 17(1):25-104.

[В ТЕКСТ](#)



HERMAN P. SCHWAN (1915–2005) ученый в области биомедицинской инженерии.

Родился 7 августа 1915 в г. Аахене, Германия в семье учителя математики и физики. Блестяще окончил гимназию в Геттингене в 1934г. Подвергался нападкам и преследованиям со стороны нацистов за свои политические взгляды.

Учился на факультетах математики и физике в университетах Геттингема, Франкфурта и Вроцлава.

В марте 1937 года, устроился на работу в Telefunken в Берлине, где был поставлен на работу по тестированию радиоприемников.

В том же 1937г. он познакомился с известным русским биофизиком Б.Раевским и начал работу во Франкфурте под его руководством. К этому времени относятся работы по технике измерения частотных характеристик биологических тканей.

Он получил степень доктора философии в области биофизики в университете Франкфурта в 1940 году с отличием, и опубликовал несколько статей о диэлектрических свойствах тканей. Позднее, Шванн также изучал диэлектрические свойства тканей на гигагерцовых частотах. Эта работа привела к его второй докторской степени в 1946 году.

Шванн был назначен исполняющим обязанности директора института, который вскоре был переименован как Институт биофизики Макс Планка. Он служил в этой должности до своего отъезда в Соединенные Штаты в 1947 году.

В Филадельфии Шванн работал в лаборатории авиационной медицины и в Университете Пенсильвании, где провел всю оставшуюся жизнь.

Его первоначальное назначение было в медицинской школе (в основном в отделе физической медицины и реабилитации), работа с врачами по

проблемам, связанным с физическими аспектами медицины и использовании электрических свойств биотканей. В 1952 году он получил дополнительное назначение в школу электротехники Мура, и был назначен начальником его электромедицинского отделения. В 1961 году он стал председателем высшей группы по биомедицинской электронике, подготовив тем самым одним из первых выпускников в этой области. Он ушел в отставку, как Заслуженный профессор в 1983 году.

Шван получил много наград за свою карьеру. Он получил несколько почетных докторских званий (Университет Пенсильвании, 1986; Университета Куопио, Финляндия, 2000; и университета города Грац, 2001). Он был награжден премией Борис Раевского по биофизике (1974), IEEE медалью Эдисона (1983), премией AIEE (1983), Centennial медалью IEEE (1984), и премией Дарсонваля (1985), а также первой премией Международной федерации по медицинской и биологической физике.



Тарусов Борис Николаевич, биофизик, профессор, автор гипотезы о ведущей роли свободнорадикальных реакций перекисного окисления липидов в развитии патологических процессов в клетке
Годы жизни: 1900 — 1977

Борис Николаевич Тарусов – известный советский биофизик, ученый и педагог, сыграл выдающуюся роль в становлении и развитии биофизической школы в нашей стране. Он стал создателем в декабре 1953 года первой в Советском Союзе кафедры биофизики на биологическом факультете Московского государственного университета.

Борис Николаевич Тарусов родился в семье учителей 7 декабря 1900 г. в г. Петроков, Петроковской губернии Российской империи (ныне – г. Пётркув-Трыбунальский, Лодзинское воеводство, Польша). После окончания средней школы Б.Н. Тарусов с 1920 г. по 1923 г. закончил биологическое отделение Одесского университета, по специальности «физиология человека и животных». Уже в студенческие годы Борис Николаевич активно и увлеченно участвовал в научно-исследовательских работах в лаборатории учеников И.П.Павлова профессора Б.П. Бабкина и профессора Е.П.Синельникова. После окончания университета до 1926 года Б.Н. Тарусов служил на Черноморском флоте, после чего поступил в аспирантуру на кафедру зоологии, где он работал под руководством профессоров Д.К.Третьякова и Д.Л.Рубинштейна. Предметом его исследований были физические процессы и физико-химические механизмы, лежащие в основе жизнедеятельности организмов, их способности приспосабливаться к изменениям окружающей среды, в том числе к изменениям осмотического давления водной среды. В этой работе Б.Н. Тарусов открыл новое явление – состояние осмотического анабиоза. Он нашел также количественные физико-химические критерии эвгигалинности и стеногалинности ряда морских организмов. Эти работы можно отнести к успешно развивавшемуся в 20-х годах направлению в биологии, названному биологической физикохимией.

По окончании аспирантуры Борис Николаевич становится научным сотрудником Всеукраинского института бальнеологии в Одессе и занимается выяснением факторов, определяющих лечебное действие грязей. В 1931г. Б.Н.Тарусов переехал в Москву и работал в ряде институтов АН СССР, АМН СССР И Минздрава СССР. Его работы в этот период посвящены главным образом действию физических факторов на биологические объекты и выявлением физических закономерностей, характерных для живых тканей и резко изменяющихся при отмирании. Теоретические изыскания и экспериментальные данные, полученные Б.Н. Тарусовым, сыграли большую роль в объяснении механизмов действия УКВ и были использованы в медицине при разработке методов глубокой диатермии. Важные закономерности были им установлены при изучении прохождения электрического тока через живые ткани. Была четко выявлена связь электрических параметров, например, диэлектрической константы, дисперсии электропроводности, с физиологическим состоянием ткани. Эти работы имели и большой практический выход.

Борис Николаевич предложил удобный показатель для оценки жизнеспособности тканей – коэффициент поляризации, представляющий собой отношение сопротивлений ткани, измеренных на частотах 104 и 106 Гц. Сам Борис Николаевич широко использовал этот показатель при изучении действия ядов, токсических веществ, бактериальных токсинов, при развитии воспалительных процессов. Этот показатель использовал П.К. Анохин для оценки качества материала для пересадки нервов, его использовал в своих теоретических работах Д.Н. Насонов.

Кинетический подход, оказавшийся чрезвычайно эффективным, был использован Б.Н. Тарусовым при изучении действия на биологические объекты физических факторов, в первую очередь ионизирующей радиации. Проблему биофизических механизмов биологического действия ионизирующей радиации Борис Николаевич Тарусов разрабатывал более 20 лет совместно со многими сотрудниками, аспирантами и студентами, защищены десятки кандидатских и ряд докторских диссертаций.

Последние 16 лет жизни Борис Николаевич посвятил исследованию сверхслабого свечения, одного из наиболее интересных свойств живых тканей. Сверхслабое свечение тканей мышц было зарегистрировано Б.Н. Тарусовым в 1961 году, и с этого момента начинаются широкие и планомерные исследования природы сверхслабого свечения тканей животных и растений, поиски путей практического использования этого явления.

Борис Николаевич был также одним из первых исследователей биофизических процессов при злокачественном росте у животных. Было показано, что с помощью регистрации сверхслабого свечения можно оценить

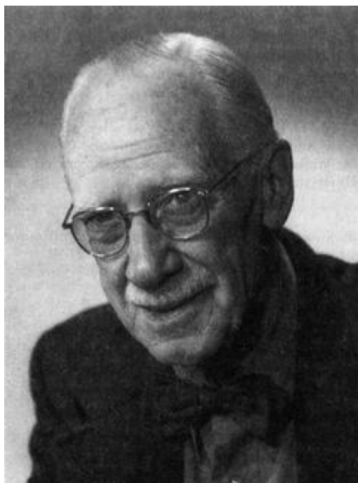
изменения нормального процесса окисления в опухолевых тканях, прежде всего в липидах, изменения соотношения антиоксидантов в нормальных тканях животного-опухоленосителя и растущей опухоли.

Работы Бориса Николаевича Тарусова по исследованию биологической роли свободнорадикального окисления в норме и при развитии патологических процессов были отмечены Государственной премией СССР (1983).

Борис Николаевич Тарусов был организатором биофизического образования в Советском Союзе. Он творчески подходил к созданию кафедры биофизики и вложил в это немалую часть своей души. Вначале он набрал небольшой творческий коллектив педагогов-энтузиастов, с помощью которых развернул организационную работу. Надо было разработать учебный план, определить круг и объем знаний, необходимых для студентов, специализирующихся по биофизике. В течение первых лет работы были разработаны программы теоретических курсов и практических занятий, семинаров и коллоквиумов, определен вклад фундаментальных дисциплин – физики, химии, математики – в биофизическое образование.

Б.Н. Тарусов уделял огромное внимание созданию учебных руководств и учебников. Под его научным руководством и с непосредственным участием было создано первое учебное руководство «Биофизика» (1968). Свои взгляды на учебный процесс Б.Н. Тарусов излагал в статьях, в докладах на союзных и международных конференциях и конгрессах, на курсах повышения квалификации заведующих кафедрами и преподавателей биофизики.

Борис Николаевич любил работать с молодежью и создал на кафедре подлинно творческую атмосферу. Он любил своих учеников и относился к ним с уважением, и они отвечали ему взаимностью. И не только потому, что он был крупным талантливым ученым, но и потому, что он был личностью – обаятельной, яркой и своеобразной, принципиальным, честным и на редкость доброжелательным человеком.



Kenneth Cole (1900 – 1984) американский биофизик, известный как пионер в приложении физики в биологии. Коул окончил Оберлин колледж в 1922 году и получил степень доктора философии по физике в Корнеловском университете в 1926 году. Он работал в General Electric лаборатории в Скенектади, штат Нью-Йорк.

Кеннет был зачислен в штат из Колумбийского университета в 1937 году и оставался там до 1946 года. Он также был связан с Пресвитерианской больницей и с Фондом перспективных исследований Гуггенхайма в Принстонском университете и Университете Чикаго.

С 1949 по 1954 год он был техническим директором Научно-исследовательского института Морской медицины в Бетесде, штат Мэриленд. В 1954 году он стал начальником лаборатории биофизики Национального института неврологических заболеваний.

Коул известен работами в области моделирования биологических тканей. Он заинтересовался электрической схемой для анализа и синтеза частотно-зависимых импедансных свойств клеток. Его ранняя работа включала обширные экспериментальные диэлектрические исследования на клеточных суспензиях. Коул в статьях 1941-1942 г. (написанных в соавторстве со своим братом Робертом) предложил то, что сейчас называют универсальной, Коул-Коула функцией, которая описывает диэлектрические релаксации.

Коул добился достижений, которые привели к "теории натрия" передачи нервных импульсов, развитие которой послужило основой для работы А.Ходжкина и Э. Хаксли, удостоенной в 1947 году Нобелевской премии.

Он был награжден Национальной медалью науки в 1967 году. В 1972 году он стал членом Лондонского королевского общества. Биофизическое общество Соединенных Штатов наградило Коула медалью за успехи в изучении клеточных мембран.



Биоимпедансный анализ (биоимпендансная диагностика на анализаторе «АВС-01 Медасс») – это уникальный метод функциональной диагностики, позволяющий получить объективные данные о составе тела человека.

Импедансметрия очень популярна в ведущих клиниках Европы. В России анализ состава тела на анализаторе «АВС-01 Медасс» рекомендован к применению в практике диетологов, спортивных врачей и врачей других специальностей Институтом Питания РАМН.

Принцип работы анализатора основан на измерении электрического сопротивления тканей организма – биоимпеданса, по которому количественно оцениваются различные компоненты тела.

Импедансметрия определяет:

- жировую и безжировую массы
- процентное содержание жира в организме
- индекс массы тела (показатель, используемый для оценки степени ожирения или истощения)
- основной обмен веществ (ккал)
- активную клеточную массу (мышцы, органы, мозг и нервные клетки)
- количество внеклеточной, внутриклеточной и общей жидкости
- соотношение Na/K

Диагностика состава тела важна при:

- прогнозировании риска развития сахарного диабета, атеросклероза, гипертонической болезни, ожирения и остеопороза
- составлении программ похудения
- оценке эффективности лечения ожирения и отеков
- определении уровня общей работоспособности
- оценке адаптации к факторам среды обитания
- определении резервов организма
- прогнозировании спортивных результатов

Методика исследования проста, не инвазивна и безопасна. За 1 час до диагностики необходимо исключить прием пищи и воды, за сутки - алкоголя. Возраст, пол, рост, вес, объем талии, бедер и запястья заносятся в компьютер со специальной программой. Исследование проводится в положении лежа на кушетке. К руке и ноге подсоединяются электроды, подключенные к анализатору. После окончательных замеров программа обрабатывает данные.

Результаты обследования фиксируются в протоколах с комментариями и рекомендациями, содержат сравнительные (с результатами предыдущих измерений, сохраненных в базе данных) графики динамики основных параметров состава тела:

Индекс массы тела - отношение массы тела к площади поверхности тела. Определяет соответствие веса росту, дает возможность не только определить избыток, но и недостаток питания.

Жировая масса организма. Жир для организма важнейшее депо энергии, жирорастворимых витаминов (А,Д,Е,К) и жирных кислот. Поэтому определенная доля жира в организме необходима. Слишком большое количество жира становится фактором риска возникновения многих заболеваний: атеросклероза и/или инфаркта миокарда.

Тощая масса (безжировая) составляет примерно 75-85% от веса. К ней относится все то, что не является жиром: мышцы, все органы, мозг и нервы, кости и все жидкости, находящиеся в организме. Тощая масса является необходимым показателем для оценки основного обмена веществ, потребления энергии организмом для расчета суточного рациона питания.

Основной обмен веществ (ккал) - это количество энергии, расходуемой в организме за сутки на поддержание его функционирования. Основной обмен связан с активной клеточной массой. Чем она больше, тем больше энергии расходуется на обмен веществ, кровообращение и выполнение других жизненно необходимых функций.

Активная клеточная масса (масса клеток тела) является частью массы тела без жира. Она состоит из мышц, органов, мозга и нервных клеток. Для того, чтобы активная клеточная масса играла роль мотора организма, ее нужно правильно питать. Очень важно при снижении веса терять именно жир и сохранять неизменной активную клеточную массу. Поэтому необходимо, чтобы ваша активная клеточная масса поддерживалась благодаря физической активности и сбалансированному питанию.

Процентная доля активной клеточной массы. Очень маленькая и очень большая процентная доля активной клеточной массы вызывает чувство голода. Низкий показатель процентной доли АКМ может служить указателем на недостаточность питания.

Скелетно-мышечная масса тела служит мерой адаптационного резерва организма и составляет в среднем 30-40% веса.

Общая жидкость – это показатель содержания воды в организме. Жидкость бывает внутриклеточная, внеклеточная (кровь, плазма, лимфа) и

связанная (в отечных тканях). Используя полученные результаты, можно с большой точностью определить нужное именно Вам количество выпиваемой жидкости, а также необходимость приема мочегонных средств.

Фазовый угол биоимпеданса – параметр, отражающий состояние клеток организма, уровень общей работоспособности и интенсивности обмена веществ. По величине данного показателя определяется биологический возраст (соответствие физических параметров фактическому возрасту).

Биоимпедансная диагностика позволит грамотно достигнуть оптимального баланса между количеством жировой массы, мышечной массы и воды в организме в процессе лечения и физических нагрузок, подобрать суточный рацион питания, разработать индивидуальную программу коррекции массы тела исключительно за счет воды и жиров, а не мышечной массы.