

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА»

С.Н. ХОНИНА, В.В. КОТЛЯР, В.А. СОЙФЕР

ЛАЗЕРНЫЕ МОДОВЫЕ ПУЧКИ С ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫМИ СВОЙСТВАМИ

*Утверждено Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия*

САМАРА
Издательство СГАУ
2006

УДК 535.4, 535.8

ББК 22.343

X77



**Инновационная образовательная программа
«Развитие центра компетенции и подготовка
специалистов мирового уровня в области аэрокос-
мических и геоинформационных технологий»**

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук, проф. *В.В. Ивахник*
д-р физ.-мат. наук, проф. *И.П. Завершинский*

X77 Хонина С.Н. **Лазерные модовые пучки с замечательными свойствами:** учеб.
пособие / *С.Н. Хонина, В.В. Котляр, В.А. Сойфер* – Самара: Изд-во Са-
мар. гос. аэрокосм. ун-та, 2006. – 108 с.: ил.

ISBN 5-7883-0475-X

В данном пособии рассмотрены различные свойства самовоспроизведения многомодовых лазерных пучков и методы расчета фазовых дифракционных оптических элементов, предназначенных для формирования таких пучков. Особенно подробно рассмотрены свойства инвариантности, периодического повторения и поступательного вращения многомодовых пучков Гаусса-Эрмита, Гаусса-Лагерра и Бесселя. Для конкретных типов модовых пучков выводятся условия самовоспроизведения, разрабатываются методы и алгоритмы расчета фазовых оптических элементов, выполняется численное моделирование действия рассчитанных элементов, которое затем сравнивается с экспериментальными результатами.

Предназначено для студентов, проходящих подготовку по магистерской программе «Оптические информационные технологии» в рамках направления 010600, а также по специальности (направлению) «Прикладные математика и информатика» 010501, 010500.

УДК 535.4, 535.8
ББК 22.343

ISBN 5-7883-0475-X

© Хонина С.Н., Котляр В.В., Сойфер В.А., 2006
© Самарский государственный
аэрокосмический университет, 2006

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Некоторые типы световых пучков с периодическими свойствами	4
2. Фазовые формирователи световых полей с продольной периодичностью	13
3. Алгоритм расчета ДОЭ для генерации вращающихся многомодовых пучков Бесселя.....	26
4. Формирование пары вращающихся бездифракционных пучков с помощью бинарного фазового ДОЭ	32
5. ДОЭ для формирования многомодовых пучков Гаусса-Лагерра	42
6. Вращение световых многомодовых пучков Гаусса-Лагерра в свободном пространстве и волокне	54
Моды в свободном пространстве	54
Моды в градиентном волокне.....	58
7. Формирование вращающихся пучков Гаусса-Лагерра с помощью фазовой бинарной дифракционной оптики	62
8. Обобщенные эрмитовы световые пучки в свободном пространстве	70
9. Формирование мод Гаусса – Эрмита с помощью бинарных ДОЭ.....	83
10. Самовоспроизведение многомодовых пучков Гаусса – Эрмита ...	92
Заключение.....	101
Список специальных терминов.....	103
Список контрольных вопросов	104
Литература	105

1. НЕКОТОРЫЕ ТИПЫ СВЕТОВЫХ ПУЧКОВ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ СВОЙСТВАМИ

Периодическое самовоспроизведение изображений известно в оптике с 1836 года после работы Х.Ф. Тальбота, в которой он рассматривал световые пучки, формируемые планарными масками, имеющими поперечно-периодическую функцию пропускания (линейные и скрещенные решетки) [1]. С тех пор явление самовоспроизведения когерентного светового пучка, имеющего поперечную периодичность, на определенных расстояниях при распространении (продольная периодичность) называется *эффектом Тальбота*. Для некогерентного пучка это явление называется *эффектом Лай* [2].

Затем в 1881 году Рэлей показал, что для наблюдения хорошего самовоспроизведения решеток, они должны освещаться монохроматическим коллимированным пучком, и вывел формулу для расстояния (получившего впоследствии название *период Тальбота*), на котором решетка повторится первый раз [3]:

$$d = \frac{2a^2}{\lambda}, \quad (1)$$

где a — период решетки, λ — длина волны освещающего пучка. Последующие работы касались в основном вариаций в свойствах решеток (фазовые, прямоугольные).

Таким образом, исторически первыми были отмечены периодические свойства световых полей, состоящих из конечного числа плоских волн.

В [4] было показано, что линейные решетки могут формировать периодически повторяющиеся изображения, отличающиеся от самого объекта. Затем в [5-7] были получены выражения для распределения светового поля на долях периода Тальбота (1). Так, прямоугольная решетка с периодом $a \times a$ и с функцией пропускания:

$$f(x, y, 0) = f(x + pa, y + qa, 0) = \sum_{n,m} F_{n,m} \exp\left[i 2\pi \frac{nx + my}{a}\right], \quad (2)$$

где $F_{n,m}$ — пространственный спектр $f(x, y)$, в приближении Френеля формирует на расстоянии z световое поле с амплитудой:

$$f(x, y, z) = \exp(ikz) \sum_{n,m} F_{n,m} \exp\left[i 2 \pi \frac{nx + my}{a}\right] \exp\left[-i 2 \pi \frac{(n^2 + m^2) z}{d}\right], \quad (3)$$

где d – период Тальбота (1). На расстояниях кратных периоду $z=ld$ ($\exp[-i 2 \pi (n^2 + m^2) l] = 1$) происходит повторение распределения интенсивности светового поля:

$$\begin{aligned} |f(x, y, z)|_{z=ld}^2 &= \\ &= \left| \exp(ikld) \sum_{n,m} F_{n,m} \exp\left[i 2 \pi \frac{nx + my}{a}\right] \right|^2 = |f(x, y, 0)|^2, \end{aligned} \quad (4)$$

то есть решетка самовоспроизводится. На расстоянии, равном половине периода d (при $l=1/2$), получится копия решетки, сдвинутая на половину поперечного периода a :

$$\begin{aligned} f(x, y, z)|_{z=d/2} &= \\ &= \exp(ikd/2) \sum_{n,m} F_{n,m} \exp\left[i 2 \pi \frac{nx + my}{a}\right] \exp[-i\pi(n^2 + m^2)] = \\ &= \exp(ikd/2) f(x + a/2, y + a/2, 0), \end{aligned} \quad (5)$$

а на расстоянии $4q$ долей периода d получим:

$$\begin{aligned} f(x, y, z)|_{z=d/4q} &= \exp(ikd/4q) \frac{\exp(-i\pi/2)}{2q} \int_{s,r} e^{i\pi \frac{(s^2 + r^2)}{2q}} f(x + sa/2q, y + ra/2q, 0) ds dr. \end{aligned} \quad (6)$$

То есть, на расстояниях, составляющих доли периода Тальбота, происходит сложение сдвинутых копий первоначального изображения.

В 1967 году У.Д. Монтгомери показал, что объект с бесконечной апертурой будет самовоспроизводиться при распространении, если его спектр лежит на кольцах зонной пластинки [8]. Исходя из интегрального представления решения уравнения Гельмгольца:

$$f(\mathbf{x}, z) = \int_{R^2} F(\xi) \exp[iK(\xi)z] \exp(i 2 \pi \mathbf{x} \xi) d\xi, \quad (7)$$

где $F(\xi)$ – Фурье-образ функции $f(\mathbf{x})$, $K(\xi) = k\sqrt{1 - (\lambda\xi)^2}$, $\xi = (\xi, \eta)$ – вектор пространственных частот, k – волновое число, и ставя условие

самоповторения на расстоянии d с точностью до комплексной константы:

$$f(\mathbf{x}, d) = wf(\mathbf{x}, 0) \quad \mathbf{x}, w = \text{const}, \mathbf{x} = (x, y), \quad (8)$$

Монтгомери получил следующее выражение для пространственных частот:

$$\frac{d}{\lambda} \sqrt{1 - (1/\lambda)^2} \sqrt{m(\xi)}, \quad (9)$$

где $m(\xi)$ – целое число, зависящее от ξ .

Разделив спектр $F(\xi)$ на два типа, можно выделить два типа самовоспроизведения

а) «Слабое» самовоспроизведение: пространственные частоты ξ объекта $f(\mathbf{x})$, для которых $F(\xi) \neq 0$, лежат внутри круга радиуса $R \ll 1/\lambda$. Тогда самоповторение на расстоянии d происходит, если

$$|\xi| = \sqrt{\frac{2}{\lambda d}} \sqrt{m(\xi)}, \quad (10)$$

т. е., пространственные частоты лежат на кольцах зонной пластинки с радиусами $R_m = \sqrt{2\lambda d m}$.

Для поперечно-периодических объектов $f(\mathbf{x} + \mathbf{a}_n) = f(\mathbf{x})$ пространственные частоты будут дискретными:

$$|\mathbf{b}_n| = \sqrt{\frac{2}{\lambda d}} \sqrt{m(\mathbf{n})}, \quad (11)$$

откуда, в частности, для периодического по одной координате объекта $f(x + na, y) = f(x, y)$, $m(n) = n^2$, получается формула Рэлея (1).

б) «Сильное» самовоспроизведение: пространственные частоты ξ объекта $f(\mathbf{x})$, для которых $F(\xi) \neq 0$, лежат внутри круга радиуса вплоть до $1/\lambda$. Тогда самоповторение на расстоянии d происходит, если

$$|\xi|^2 + \left(\frac{m(\xi)}{d} - \frac{1}{\lambda} \right)^2 = \left(\frac{1}{\lambda} \right)^2, \quad (12)$$

что представляет собой уравнение окружности радиуса $1/\lambda$ с центром в точке $(0, 1/\lambda)$.

Для $d \ll \lambda$ получается набор окружностей в частотной плоскости:

$$|\xi|^2 = \frac{2m(\xi)}{\lambda d}. \quad (13)$$

Учитывая, что $\mathbf{x} = (x, y)$, $\xi = (\xi, \eta)$, $|\xi| = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$, перепишем (7) в скалярной форме:

$$f(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi, \eta) \exp \left[i k z \sqrt{1 - \lambda^2 (\xi^2 + \eta^2)} \right] \times \\ \times \exp \left[i 2 \pi (x \xi + y \eta) \right] d \xi d \eta. \quad (14)$$

На расстоянии d произойдет самовоспроизведение, если выполнено (10) или (13):

$$\xi^2 + \eta^2 = \frac{2m}{\lambda d}. \quad (15)$$

Подставляя (15) в (14), получим:

$$f(x, y, z) = \exp \left[i k z \sqrt{1 - \frac{2m\lambda}{d}} \right] \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi_m, \eta_m) \times \\ \times \exp \left[i 2 \pi (x \xi_m + y \eta_m) \right] d \xi_m d \eta_m = \exp(i \beta_m z) f(x, y), \quad (16)$$

где $\beta_m = k \sqrt{1 - 2m\lambda/d}$, а $f(x, y)$ – поперечно-периодическая функция.

Пусть в полярных координатах $\mathbf{x} = (r, \varphi)$, $\xi = (\rho, \theta)$ спектр имеет частоты только на одном кольце $F(\rho, \theta) = A_m(\theta) \delta(\rho - \sqrt{2m/\lambda d})$, тогда вместо (16) получим формулу для комплексной амплитуды пучков с продольной периодичностью:

$$f(r, \varphi, z) = \exp(i \beta_m z) \int_0^{2\pi} A_m(\theta) \exp \left[i 2 \pi r \sqrt{2m/\lambda d} \cos(\varphi - \theta) \right] d \theta = \\ = \exp(i \beta_m z) \int_0^{2\pi} A_m(\theta) \exp[i r \alpha_m \cos(\varphi - \theta)] d \theta, \quad (17)$$

где $A_m(\theta)$ – некоторая комплексная функция, $\alpha_m = 2\pi\sqrt{2m/\lambda d}$. Причем, легко видеть, что $\alpha_m^2 + \beta_m^2 = k^2$. При $A_m(\theta) = \exp(i m \theta)$ из (17) следует, что $f(r, \varphi) = 2\pi(i)^m J_m(\alpha_m r) \exp(i m \varphi)$, которая уже не является поперечно-периодической функцией ($J_m(x)$ – функция Бесселя m -го порядка).

Таким образом, был определен еще один тип самовоспроизводящихся функций – моды Бесселя. Методы формирования этих мод рассматриваются в разделах 2-4.

В [9] Монтгомери обобщил результаты, полученные в [8]. Рассматривая собственные функции оператора распространения

$$D_z f = w f, \quad (18)$$

где

$$D_z f = \mathbf{T} f(\mathbf{u}) D_z(\mathbf{x} - \mathbf{u}) d\mathbf{u}, \quad (19)$$

$$D_z(\mathbf{x}) = \mathbf{T} \exp[i K(\xi) z] \exp(i 2\pi \mathbf{x} \xi) d\xi, \quad (20)$$

он показал, что в случае *бесконечной апертуры* дискретный спектр этих функций пуст. Могут существовать поля только с непрерывным спектром. И для самовоспроизведения таких полей энергия спектра должна концентрироваться на кольце или наборе колец:

$$\exp[i K(\xi) z] = w. \quad (21)$$

В случае же *конечной апертуры* (что соответствует введению черного экрана с отверстием Σ) дискретный спектр не пуст, и существуют собственные функции оператора:

$$B_z A f = w f, \quad |w| < 1, \quad (22)$$

где

$$B_z A f = \int_{\Sigma} f(\mathbf{u}) B_z(\mathbf{x} - \mathbf{u}) d\mathbf{u}, \quad (23)$$

$$B_z(\mathbf{x}) = \int_{|\xi| \leq \frac{1}{\lambda}} \exp[i K(\xi) z] \exp(i 2\pi \mathbf{x} \xi) d\xi. \quad (24)$$

Искать самовоспроизводящуюся функцию f предлагается через собственные функции ϕ_n :

$$f = \sum_n C_n \phi_n, \quad (25)$$

$$B_0 A \phi_n = \lambda_n \phi_n, \quad (\phi_n, \phi_k) = \delta_{n,k}, \quad (26)$$

решая матричное уравнение

$$M_z L C = w C, \quad (27)$$

где M_z – матрица элементов $m_{n,k} = (B_z \phi_n, \phi_k)$, Λ – диагональная матрица собственных значений λ_n , C – вектор коэффициентов C_n .

Известно [10], что в случае квадратной апертуры свойствами ϕ_n обладают вытянутые сфероидальные функции.

В [11] была показана взаимосвязь поперечной и продольной периодичности световых полей. Так, световое поле, созданное эталоном Фабри-Перо с расстоянием между зеркалами Δ самовоспроизводится с периодом $d=2\Delta$ и имеет спектр, состоящий из колец. При Δ равном целому числу полуволн:

$$\Delta = N \frac{\lambda}{2}, \quad N - \text{целое}, \quad (28)$$

получается спектр с кольцами, имеющими радиусы в пространственно-частотной плоскости:

$$\rho_m = \sqrt{\frac{m}{\lambda \Delta}} = \sqrt{\frac{2m}{\lambda d}}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (29)$$

Если выбрать только первые два кольца, получится спектр $\delta(\rho) + \delta(\rho - \rho_1)$, что соответствует при $z=0$ амплитуде $1 + J_0(2\pi\rho_1 r)$, где $J_0(x)$ – функция Бесселя нулевого порядка.

Полученные Монтгомери результаты были обобщены для случая частично-когерентных полей в [8]. Исходя из того, что взаимная корреляционная функция частично-когерентного светового поля удовлетворяет паре уравнений Гельмгольца:

$$\begin{aligned} (C_1^2 + k^2)W(x_1, y_1, x_2, y_2, z) &= 0, \\ (C_2^2 + k^2)W(x_1, y_1, x_2, y_2, z) &= 0, \end{aligned} \quad (30)$$

и, накладывая условие инвариантности распространения указанного поля,

$$W(x_1, y_1, x_2, y_2, z) = W(x_1, y_1, x_2, y_2, 0), \quad z \neq 0, \quad (31)$$

было получено, что спектр взаимной корреляционной функции при $z=0$ (в полярных координатах)

$$\mathfrak{Z}[W(x_1, y_1, x_2, y_2, 0)] = A(r_1, \varphi_1, r_2, \varphi_2) = S(r_1, \varphi_1, \varphi_2) \delta(r_1 - r_2) \quad (32)$$

не коррелирован по радиальной составляющей.

Вращающиеся при распространении световые поля можно считать инвариантными с точностью до поворота или инвариантными во вращающейся системе координат. В [12] *вращающиеся волны* определяются как движущиеся волны, распространяющиеся кругами, но имеющие модовую структуру (или дискретный спектр) стоячих волн. В [12, 13] выделены два типа вращающихся волн:

цилиндрические:

$$f(r, \varphi, z, t) = H_m^{(\pm)}(\alpha r) \exp(i\beta z + im\varphi - i\omega t), \quad (7.33)$$

где $H_m^{(\pm)}(x) = J_m(x) \pm iN_m(x)$, $H_m^{(\pm)}(x)$ – функция Ханкеля, $J_m(x)$ – функция Бесселя, $N_m(x)$ – функция Неймана и

сферические:

$$f(R, \theta, \varphi, t) = P_l^m(\cos \theta) h_l^{(\pm)}(\alpha R) \exp(im\varphi - i\omega t), \quad (34)$$

где $h_l^{(\pm)}(x) = j_l(x) \pm in_l(x)$, $h_l^{(\pm)}(x)$ – сферическая функция Ханкеля, $j_l(x)$ – сферическая функция Бесселя, $n_l(x)$ – сферическая функция Неймана, $P_l^m(x)$ – функция Лежандра.

Хотя описанные функции несут в себе вращательный момент $\exp(im\varphi)$, их вращение не наблюдаемо, так как интенсивность таких функций радиально-симметричная. Чтобы сформировать вращающийся световой пучок, наблюдаемый визуально, необходима композиция

хотя бы из двух таких функций. В [13,14] рассматривается композиция двух функций $J_n(\alpha r)\exp(in\varphi)$ и $J_m(\beta r)\exp(im\varphi)$, которая при $n \neq m$ вращается как единое целое, делая полный оборот на расстоянии:

$$\Delta z_{2\pi} \approx 4\pi k \frac{n-m}{\alpha^2 - \beta^2}, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad (35)$$

и имеет период повторения картины поперечной интенсивности равный

$$\Delta z \approx \frac{4\pi k}{\alpha^2 - \beta^2}, \quad (36)$$

что связано с симметрией интенсивности порядка $(n-m)$.

Общее условие периодичности бесселевых пучков и их вращения как единого целого для композиции из более, чем двух составляющих рассматривается в разделах 2 и 3.

В [15, 16] рассматривается еще один тип функций, несущих в себе вращательный момент, и представляющих собой гауссовы пучки:

$$f(x, y) = \exp\left[-\frac{x^2 + y^2}{\sigma^2}\right] \times \prod_{m=0}^M \prod_{p_m=1}^{P_m} \left[(x - x_{p_m}) + i(y - y_{p_m})\right]^m \prod_{q_m=1}^{Q_m} \left[(x - x_{q_m}) + i(y - y_{q_m})\right]^m, \quad (37)$$

где P_m – число положительных вращательных моментов:

$$(x - x_{p_m}) + i(y - y_{p_m}) = r \exp(i\varphi) - r_{p_m} \exp(i\varphi_{p_m}),$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{y}{x}\right), \quad r_{p_m} = \sqrt{x_{p_m}^2 + y_{p_m}^2}, \quad \varphi_{p_m} = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{y_{p_m}}{x_{p_m}}\right), \quad (38)$$

а Q_m – число отрицательных вращательных моментов:

$$(x - x_{q_m}) + i(y - y_{q_m}) = r \exp(-i\varphi) - r_{q_m} \exp(-i\varphi_{q_m}), \quad (39)$$

(x_{p_m}, y_{p_m}) и (x_{q_m}, y_{q_m}) – центры соответствующих воронок.

В [17] получено условие сохранения структуры многомодового пучка Гаусса-Лагерра с точностью до масштаба и поворота при распространении в свободном пространстве. Композиция

$$f(x, y) = \sum_{n,m} C_{n,m} \Psi_{n,m}(x, y), \quad (40)$$

где

$$\Psi_{n,m}(x, y) = \exp(-x^2 - y^2) (x + i \operatorname{sgn}(m)y)^{|m|} L_n^{|m|}(2x^2 + 2y^2) \quad (41)$$

будет вращаться, если

$$2n + |m| + \mu m = \gamma - 1, \quad (42)$$

$L_n^m(x)$ – полином Лагерра, μ, γ – константы.

Интересно, что все упомянутые выше световые моды свободного пространства можно получить как решение изопериметрической задачи [18], то есть из условия минимума некоторого функционала, который пропорционален параметру расходимости светового пучка. В этом случае моды оказываются такими состояниями, которые при прочих равных условиях (заданной энергии и радиуса пучка) обеспечивают минимальную расходимость и максимальную яркость в фокальной плоскости линзы.

Вариационная задача поиска пучков с минимальной расходимостью при заданных значениях энергии и радиуса пучка или диафрагмы приводит к явным выражениям для известных четырех типов световых мод свободного пространства: Гаусса-Эрмита, Гаусса-Лагерра, Бесселя и косинусоидальных [19]. Эти моды описываются амплитудно-фазовыми функциями. Методы получения чисто фазовой функции пропускания ДОЭ, согласованной с модами свободного пространства будут рассмотрены в следующих разделах.

2. ФАЗОВЫЕ ФОРМИРОВАТЕЛИ СВЕТОВЫХ ПОЛЕЙ С ПРОДОЛЬНОЙ ПЕРИОДИЧНОСТЬЮ

Из упомянутых в разделе 1 световых мод пучки Бесселя вызывают особый интерес благодаря свойству распространяться в свободном пространстве практически без дифракции. Проблеме формирования таких пучков посвящено много научных работ.

Так, в работах [20, 21] изучался световой пучок, описываемый функцией Бесселя первого рода нулевого порядка, а в [22] — пучок, амплитуда которого пропорциональна произведению функции Бесселя на функцию Гаусса. В [23, 24] рассмотрены бездифракционные пучки высших порядков, описываемые функциями Бесселя произвольного порядка. Их называют бесселевыми модами [25]. Они распространяются, например, внутри сердцевины круглого оптического волокна со ступенчатым показателем преломления, а также появляются на выходе резонатора с круглыми плоскими зеркалами одинакового радиуса.

В работе [26] получено общее выражение для комплексной амплитуды бездифракционных пучков, которые при распространении не изменяются. Разработан итеративный алгоритм [27], с помощью которого можно рассчитывать фазовые ДОЭ, формирующие световые пучки с произвольной композицией бесселевых мод.

Такие ДОЭ работают по типу винтового аксикона [14], обеспечивая инвариантные свойства сформированного пучка на расстоянии, пропорциональном радиусу ДОЭ и обратно пропорциональном углу наклона плоских волн пространственного спектра поля. Дифракционное расширение диаметра пучка компенсируется за счет притока энергии из периферийных областей ДОЭ. То есть, с увеличением расстояния z от ДОЭ до рассматриваемой плоскости растет и радиус зоны (кольца) ДОЭ, которая отвечает за формирование светового поля на этой плоскости.

Пучки с продольной периодичностью возникают в случае, когда несколько (не менее двух) конических волн с различными углами

при вершине конуса распространяются вдоль оптической оси. В результате их интерференции вдоль оптической оси образуется интерференционная картина, амплитуда модуляции которой примерно постоянная на отрезке от ДОО до расстояния инвариантности, о котором говорилось выше. При этом волна, распространяясь вдоль оптической оси, в своем поперечном сечении испытывает периодические изменения. Минимальный период интерференционной картины будет определяться максимальной разностью углов наклона различных конических волн.

Вопросы, связанные с решением задач синтеза фазовых оптических элементов, генерирующих волны с заданным продольным, в частности, продольно-периодическим, распределением интенсивности рассматривались в [28-30]. Предложенные в этих работах алгоритмы позволяют рассчитывать фазовые ДОО типа линзы со сферической aberrацией, которая увеличивает размер фокального пятна. Такие ДОО формируют заданное продольное распределение интенсивности на малом участке оптической оси.

В данном разделе рассматривается итеративный алгоритм расчета ДОО типа обобщенных аксиконов, формирующих волны с продольной периодичностью, обладающие модовым характером. Пусть комплексная амплитуда монохроматического светового поля $U(x,y,z)$, удовлетворяет уравнению Гельмгольца (см. 13) при $n = 1$:

$$(\nabla^2 + k^2) U(x,y,z) = 0, \quad (43)$$

∇^2 – дифференциальный оператор Лапласа, k – волновое число. Если комплексная амплитуда приводима в цилиндрических координатах

$$U(x,y,z) = U_1(r) U_2(\varphi) U_3(z),$$

то частное решение уравнения (7.43) можно записать в виде [31]:

$$U_{qm}(r, \varphi, z) = e^{qz} J_m\left(r\sqrt{k^2 + q^2}\right) e^{im\varphi}, \quad (44)$$

где (r, φ) – поперечные полярные координаты светового поля, q – постоянная разделения, $J_m(x)$ – функция Бесселя m -го порядка. Постоян-

ную разделения q можно найти из требования периодичности амплитуды волны вдоль оси z :

$$U(r, \varphi, z+z_0)=U(r, \varphi, z), \quad (45)$$

где z_0 – период. Из условия (45) следует возможность представления амплитуды светового поля функциональным рядом Фурье:

$$U(r, \varphi, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_n(r, \varphi) \exp\left(\frac{i 2 \pi n z}{z_0}\right), \quad (46)$$

где

$$U_n(r, \varphi) = \frac{1}{z_0} \int_0^{z_0} U(r, \varphi, z) \exp\left(-\frac{i 2 \pi n z}{z_0}\right) dz. \quad (47)$$

Сравнивая выражения (7.44) и (7.46), получим явный вид функции $U_n(r, \varphi)$:

$$U_n(r, \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m J_m\left(r \sqrt{k^2 + q_n^2}\right) e^{im\varphi}, \quad (48)$$

где $q_n = i 2 \pi n / z_0$.

Таким образом, общий вид функции $U(r, \varphi, z)$, обладающей продольной периодичностью в соответствии с условием (45), должен быть следующим:

$$U(r, \varphi, z) = \sum_{n, m=-\infty}^{\infty} C_m J_m(k r \bar{\rho}_n) \exp\left\{\frac{i 2 \pi n z}{z_0} + i m \varphi\right\}, \quad (49)$$

где $\bar{\rho}_n = \sqrt{1 - (n / z_0)^2}$, $\lambda = 2\pi/k$ – длина волны. Требование положительности подкоренного выражения для $\bar{\rho}_n$ ограничивает число слагаемых в сумме (49) по индексу n :

$$|n| \leq z_0 / \lambda. \quad (50)$$

Слагаемые в уравнении (49) при $|n| > z_0 / \lambda$ будут пропорциональны модифицированным функциям Бесселя $I_m(k r \bar{\rho}_n)$, которые расходятся при стремлении r к бесконечности. Эти нефизические слагаемые исключаются из рассмотрения.

Следуя работе [26], из условия продольной периодичности $U(r, \varphi, z)$ по модулю

$$|U(r, \varphi, z+z_0)| = |U(r, \varphi, z)|, \quad (51)$$

можно получить отличное от (49) выражение вида:

$$U(r, \varphi, z) = \sum_{n=n_1}^{n_2} U_n(r, \varphi) \exp \left\{ i 2 \pi z \left(\frac{\sigma_0}{\lambda} + \frac{n}{z_0} \right) \right\}, \quad (52)$$

где

$$U_n(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_n(\theta) \exp[-i k r \rho_n \cos(\varphi - \theta)] d\theta, \quad (53)$$

$$\rho_n = \sqrt{1 - (\sigma_0 + n\lambda / z_0)^2}, \quad (54)$$

$\sigma_0 = \cos \alpha_0$, α_0 – минимальный угол наклона плоских волн пространственного спектра для данного поля, n_1 и n_2 находятся из условия положительности подкоренного выражения в уравнении (54):

$$n_1 = -\left[\sigma_0 \frac{z_0}{\lambda} \right], \quad n_2 = \left[(1 - \sigma_0) \frac{z_0}{\lambda} \right], \quad (55)$$

где [...] – знак целой части числа.

В уравнении (53) произвольная функция $F_n(\theta)$ описывает угловую зависимость спектра плоских волн саморепродуцирующегося пучка. Подставив в (53) выражение для разложения этой периодической функции в ряд Фурье

$$F_n(\theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_{m,n} \exp(i m \theta) \quad (56)$$

и, используя интегральное представление для функции Бесселя, получаем:

$$U(r, \varphi, z) = \exp(i k \sigma_0 z) \sum_{n=n_1}^{n_2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_{m,n} J_m(k r \rho_n) \exp \left\{ \frac{i 2 \pi n z}{z_0} + i m \varphi \right\}. \quad (57)$$

Из сравнения уравнений (49) и (57) видно, что при $\sigma_0 = 0$ они функционально тождественны. Световые поля, представленные в (57), являются более широким семейством полей, чем те, которые представленные в (49), так как условие (51) более слабое, чем условие (45).

Из (57) также видно, что в световое поле с продольной периодичностью $U(r, \varphi, z)$ вносят отличный от нуля вклад плоские волны, волновые векторы которых лежат на конических поверхностях с образующими, наклоненными к оси z под углами

$$\cos \alpha_n = \cos \alpha_0 + n \lambda / z_0, \quad n \in [n_1, n_2]. \quad (58)$$

Далее на основе уравнения (57) рассматриваются алгоритмы расчета фазовых ДОЭ.

Рассмотрим полную систему ортогональных функций в круге радиуса R [25]:

$$\Omega_{m,n}(r, \varphi) = A_{m,n} J_m \left(\frac{r}{R} \gamma_{m,n} \right) \exp(i m \varphi), \quad (59)$$

где

$$A_{m,n} = \left\{ \sqrt{\pi R} J'_m(\gamma_{m,n}) \right\}^{-1}, \quad (60)$$

$J'_m(x)$ – производная функции Бесселя, $\gamma_{m,n}$ – корни функции Бесселя:

$$J_m(\gamma_{m,n}) = 0, \quad \gamma_{-m,n} = \gamma_{m,-n} = \gamma_{-m,-n} = \gamma_{m,n}.$$

Условие ортогональности функций (59) имеет вид:

$$\int_0^R \int_0^{2\pi} \Omega_{m,n}(r, \varphi) \cdot \Omega_{p,q}^*(r, \varphi) \cdot r \, dr \, d\varphi = \delta_{m,p} \delta_{n,q}. \quad (61)$$

Любую непрерывную и ограниченную в круге функцию $U(r, \varphi)$ можно разложить по базису (59):

$$U(r, \varphi) = \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} C_{m,n} \Omega_{m,n}(r, \varphi). \quad (62)$$

Для того, чтобы сформировать световое поле $U(r, \varphi, z)$ из уравнения (57), следует при $z=0$ сформировать световое поле с комплексной амплитудой вида:

$$U_0(r, \varphi) = \sum_{n=n_1}^{n_2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \bar{C}_{m,n} J_m(kr \rho_n) \exp(i m \varphi). \quad (63)$$

Сравнивая уравнения (62) и (63), находим, что в ряде (63) только те коэффициенты $\overline{C}_{m,n}$ отличны от нуля, для которых выполняется условие:

$$kR\rho_n = \gamma_{m,n}. \quad (64)$$

Заметим, что корни функции Бесселя перемежаются согласно неравенствам $0 < \gamma_{m,1} < \gamma_{m+1,1} < \gamma_{m,2} < \gamma_{m+1,2} < \gamma_{m,3} \dots$

Разложение (62) с условием (64) позволяет организовать итеративную процедуру расчета фазового ДОЭ, генерирующего световое поле с продольной периодичностью. Выбор величины периода z_0 и параметров σ_0 , λ , R определяет значения величин ρ_n , n_1 , n_2 с помощью уравнений (54) и (55). Далее, введя обозначение для p -ой оценки искомой фазы комплексной функции пропускания ДОЭ:

$$S_p(r, \varphi) = \arg U_0^{(p)}(r, \varphi), \quad p = 0, 1, 2, \dots,$$

получим итеративный алгоритм ее расчета:

$$S_{p+1}(r, \varphi) = \arg \left\{ \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} B_{m,n} \exp[i \arg C_{m,n}^{(p)}] \Omega_{m,n}(r, \varphi) \right\}, \quad (65)$$

$$C_{m,n}^{(p)} = \int_0^R \int_0^{2\pi} \exp[i S_p(r, \varphi)] \cdot \Omega_{m,n}^*(r, \varphi) \cdot r \, dr \, d\varphi, \quad (66)$$

$$B_{m,n} \neq 0 \text{ при } Rk\rho_n = \gamma_{m,n}, \quad (67)$$

где $B_{m,n}$ – неотрицательные числа, которые задаются произвольно и определяют вид поперечного распределения интенсивности светового поля. Алгоритм (65)-(67) обладает свойством релаксации ошибки, т. е., можно показать, что для любого p имеет место неравенство:

$$\sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \left(|C_{m,n}^{(p+1)}| - B_{m,n} \right)^2 \leq \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \left(|C_{m,n}^{(p)}| - B_{m,n} \right)^2. \quad (68)$$

Заметим, однако, что алгоритм (65)-(67) не позволяет рассчитывать фазовые ДОЭ, формирующие продольно-периодические световые по-

ля с заданным поперечным распределением интенсивности. Вид поперечного распределения интенсивности является не входной, а выходной функцией для данного алгоритма.

Рассмотрим алгоритм для расчета ДОЭ, формирующих радиальные волны с продольной периодичностью и с заданным поперечным распределением интенсивности вдоль оси. Алгоритм основан на разложении амплитуды радиального поля в ряд по ортогональным базисным функциям

$$Q_{m,n}(r, z) = D_{m,n} J_m \left(\frac{r}{R} \right) \exp \left[i 2 \pi \frac{z}{z_0} + \frac{1}{2} \frac{z}{z_0} \right] \quad (69)$$

где

$$D_{m,n} = \left\{ \sqrt{z_0} R J'_m(g_{m,n}) \right\}^{-1},$$

$$U(r, z) = \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \bar{C}_{m,n} Q_{m,n}(r, z). \quad (70)$$

Вместо (65), (66) (уравнение (67) сохраняется) запишем аналогичные уравнения для итеративного поиска фазы светового поля $T_p(r, z) = \arg U^{(p)}(r, z)$:

$$T_{p+1}(r, z) = \arg \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} B_{m,n} \exp \left[i \arg \bar{C}_{m,n}^{(p)} \right] Q_{m,n}(r, z), \quad (71)$$

$$\bar{C}_{m,n}^{(p)} = \frac{1}{R} \frac{1}{z_0} \int_0^R \int_0^{z_0} \sqrt{I_0(r, z)} \exp \left[i T_p(r, z) \right] Q_{m,n}^*(r, z) r dr dz, \quad (72)$$

где $I_0(r, z)$ – заданное периодическое (с периодом z_0) радиальное распределение интенсивности вдоль оси z , причем при $z = 0$, функция $I_0(r)$ описывает интенсивность освещающего пучка, $B_{m,n}$ – произвольные неотрицательные числа, от которых зависит вид фазы и скорость сходимости алгоритма. Фаза радиального ДОЭ, полученная за p шагов алгоритма (67), (71)-(72), равна функции $T_p(r, z=0)$.

Пример 1

Расчет ДОЭ [32], формирующих продольно-периодические поля, производился с помощью алгоритма (65)-(67). Параметры расчета выбирались следующие: $R=6$ мм, $\lambda=1,06$ мкм, $z_0=20$ мм, $\rho_0=0,01$ мм. При этих параметрах модовый характер светового поля, прошедшего ДОЭ, сохраняется приблизительно на расстоянии [14, 20]

$$z_1 = R r_0^{-1}, \quad (73)$$

где ρ_0 – максимальное значение параметра ρ_n в уравнении (54). Это расстояние тем меньше, чем больше отличных от нуля слагаемых в сумме (62).

На рис. 1 показаны распределения нормированной интенсивности на оптической оси для ДОЭ, который получен при выборе отличным от нуля одного первого коэффициента суммы (62). Это единственное слагаемое пропорционально функции Бесселя нулевого порядка $J_0(kr\rho_0)$.

Распространение такого поля вдоль оси z рассчитывалось с помощью преобразования Френеля, которое, в свою очередь, вычислялось с помощью алгоритма быстрого преобразования Фурье. На рис. 1а показана кривая интенсивности вдоль оси в пределах от 100 мм до 700 мм, а на рис. 2а показано в полутонах поперечное распределение интенсивности в координатах (ρ, z) в пределах по оси z от 300 до 380 мм. Черный цвет соответствует максимальному значению интенсивности. Полутоновые нормированные распределения интенсивности в координатах (ρ, z) приведены для амплитудно-фазового (рис. 2а) и фазового (рис. 2б) ДОЭ, рассчитанных итеративным алгоритмом с одним слагаемым суммы (62). Радиальное сечение фазы этого ДОЭ приведено на рис. 1в.

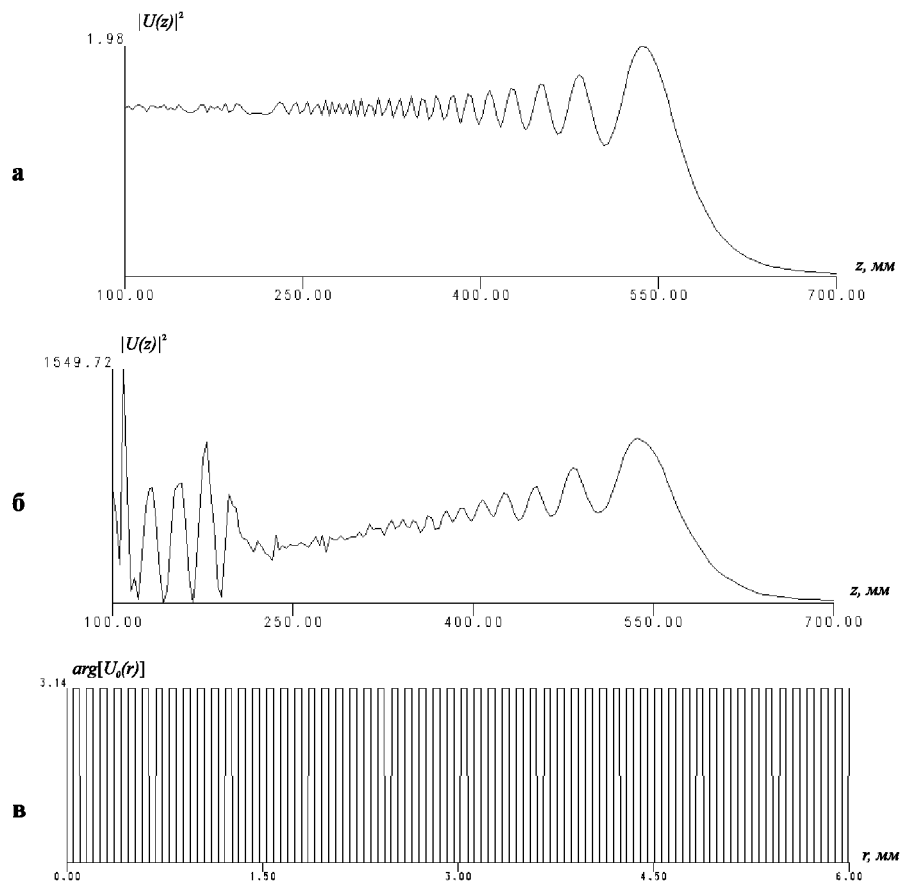


Рис. 1. Распределения интенсивности вдоль оси z для амплитудно-фазового (а) и фазового (б) ДОЭ, рассчитанных итеративным алгоритмом с одним слагаемым суммы (62), а также радиальное сечение фазы этого ДОЭ (в)

Из рисунков 1 и 2 видно, что бесселевый пучок сохраняется по форме, испытывая только колебания интенсивности с постоянной амплитудой на оптической оси до расстояния оцениваемого по формуле (73) $z=300$ мм. Далее по мере распространения пучка, из-за конечности апертуры ДОЭ, амплитуда осцилляций нарастает, и при $z>550$ мм осевая интенсивность пучка монотонно спадает, что означает начало дифракционной расходимости пучка. Радиус бесселевого пучка был равен около 0,02 мм.

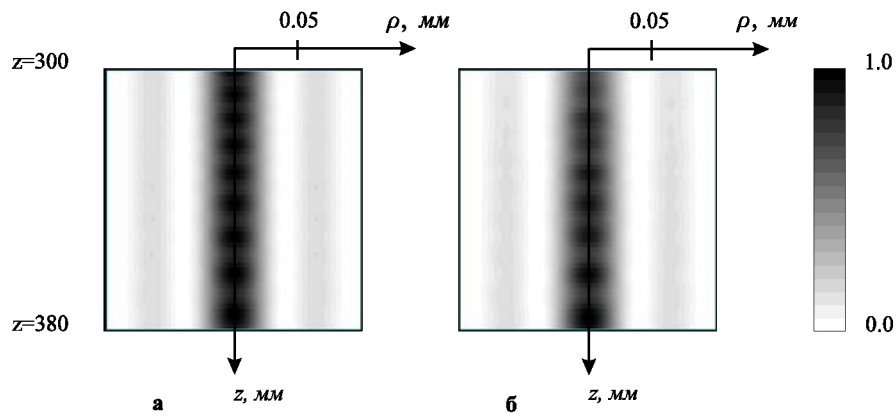


Рис. 2. Полутоновые нормированные распределения интенсивности в координатах (ρ, z) для амплитудно-фазового (а) и фазового (б) ДОО, рассчитанных итеративным алгоритмом с одним слагаемым суммы (62)

На рисунках 1б и 2б показаны аналогичные кривые распределения интенсивности для оптического элемента, полученного из предыдущего ДОО с заменой амплитуды на единичную и без изменения фазы. Фактически такой ДОО представляет собой фазовый бинарный акси-кон. Из рисунков 1б и 2б видно, что хотя амплитуда осцилляций интенсивности вдоль оси увеличивается, модовый характер пучка, то есть распространение без изменения вида, сохраняется. Понятно, что выбором только одного слагаемого в сумме (62) получить продольно периодическое поле нельзя. Для этого требуется хотя бы два слагаемых отличных от нуля.

Пример 2

На рисунке 3 показаны осевые распределения нормированной интенсивности для амплитудно-фазового (а) и только фазового (б) ДОО, рассчитанных по методу (65)-(67), если отличны от нуля коэффициенты с номерами $m=0$, $n=0$, 1, и радиальное сечение фазы этого ДОО (в). Видно, что световое поле обладает продольной периодичностью с периодом $z_0 = 20$ мм на расстоянии около 400 мм ($R=6$ мм, $\lambda=1,06$ мкм). Из рисунке 3б видно, что фазовый ДОО также имеет вдоль оптической

оси чередование максимумов и минимумов интенсивности через каждые 20 мм, хотя амплитуда модуляции света в каждом периоде меняется (растет).

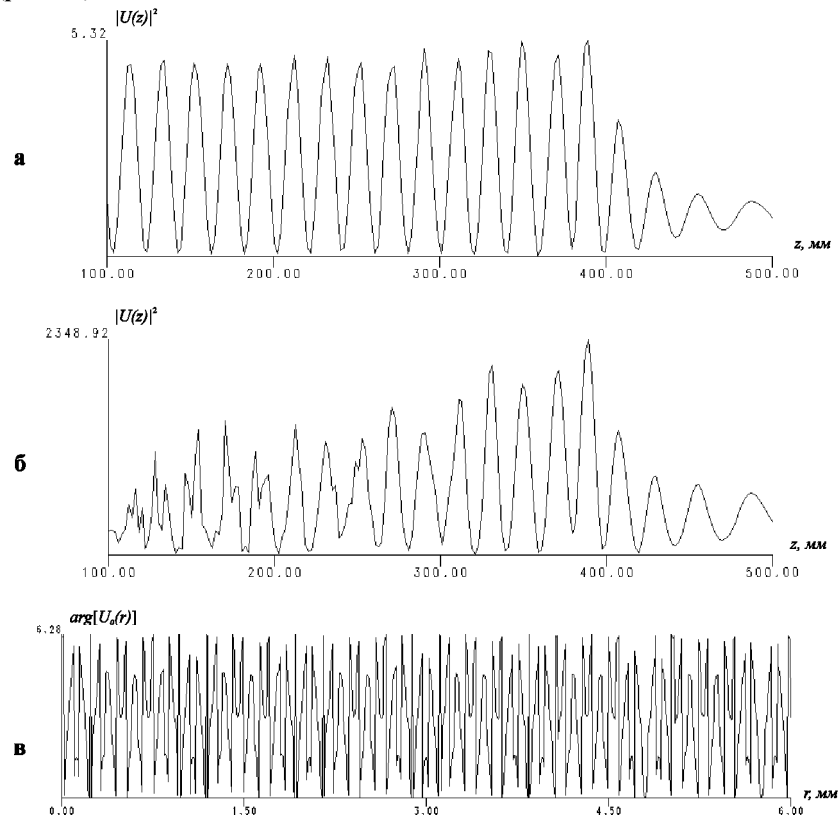


Рис. 3. Распределения интенсивности вдоль оси для амплитудно-фазового (а) и фазового (б) ДОЭ, рассчитанных итеративным алгоритмом с двумя первыми слагаемыми суммы (62), а также радиальное сечение фазы этого ДОЭ (в)

На рис. 4 показаны полутоновые нормированные распределения интенсивности в координатах (ρ, z) в диапазоне $|\rho| < 0,1$ мм, $295 \text{ мм} < z < 375 \text{ мм}$, сформированные амплитудно-фазовым (а) и фазовым (б) ДОЭ. Заметим, что в этом и предыдущем случаях фаза ДОЭ была радиально симметричной: $m=0$ (рис. 1в, 3в).

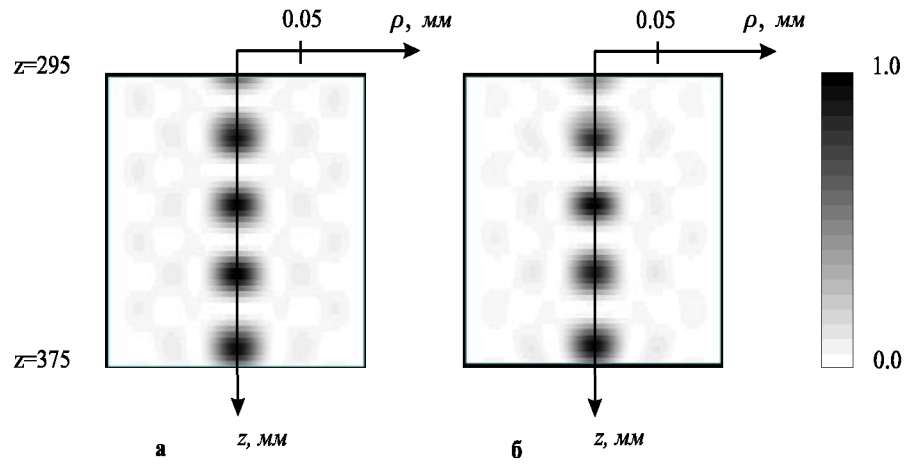


Рис. 4. Полутонные нормированные распределения интенсивности в координатах (ρ, z) для амплитудно-фазового (а) и фазового (б) ДОО, рассчитанных итеративным алгоритмом с двумя первыми слагаемыми суммы (62)

Пример 3

В этом примере фаза ДОО уже не будет радиальной (рис. 5в). В этом случае отличными от нуля выбирались коэффициенты с номерами $m=1, n=0, 1, 2, 3$. Из рисунков 5 и 6 видно, что характер периодичности поля усложняется, и расстояние, на котором проявляется модовый характер поля, сокращается с 400 мм (рис. 3а) до 300 мм (рис. 5а). Поперечное распределение интенсивности носит кольцевой характер (рис. 6 а, б): на оптической оси – нулевая интенсивность. На рис. 5 показаны кривые интенсивности при $\rho=0,02$ мм.

Число итераций, при котором наступает стагнация сходимости алгоритма, то есть не происходит заметного изменения ошибки, пропорционально числу ненулевых слагаемых ряда (62). Так, при выборе одного или двух коэффициентов ряда (62), ошибка (68) устанавливается за одну - две итерации, при выборе 4-х коэффициентов – за 5-6 итераций.

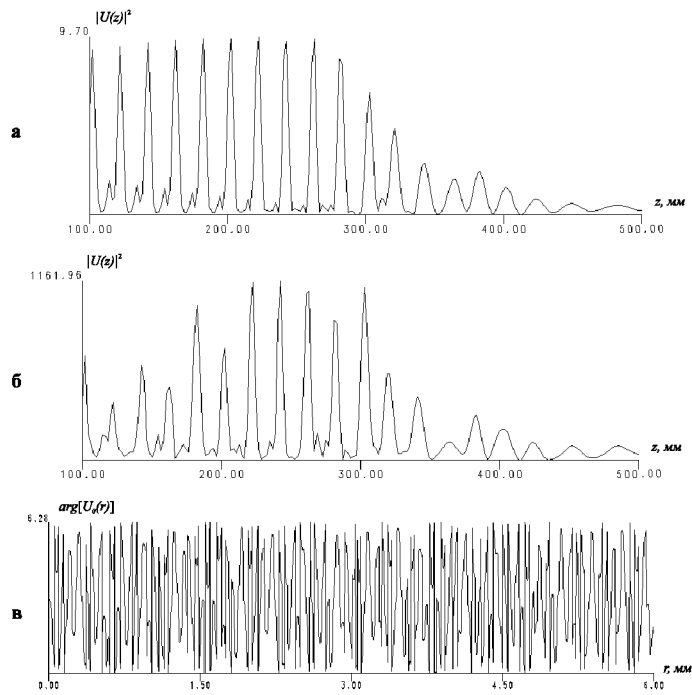


Рис. 5. Распределения интенсивности вдоль оси для амплитудно-фазового (а) и фазового (б) ДОЭ, рассчитанных итеративным алгоритмом с четырьмя первыми слагаемыми суммы (62), а также радиальное сечение фазы этого ДОЭ (в)

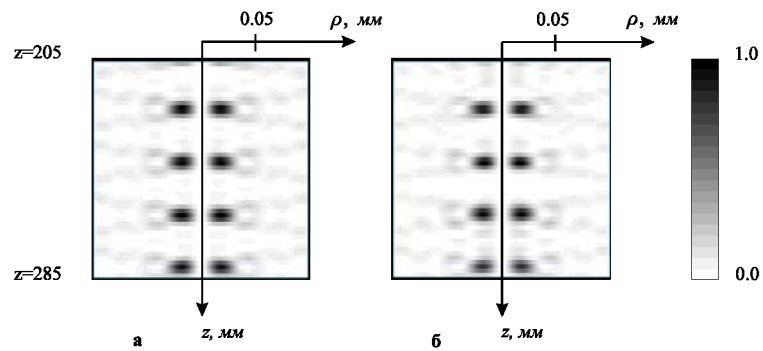


Рис. 6. Полутоновые нормированные распределения интенсивности в координатах (ρ, z) для амплитудно-фазового (а) и фазового (б) ДОЭ, рассчитанных итеративным алгоритмом с четырьмя первыми слагаемыми суммы (62)

3. АЛГОРИТМ РАСЧЕТА ДОЭ ДЛЯ ГЕНЕРАЦИИ ВРАЩАЮЩИХСЯ МНОГОМОДОВЫХ ПУЧКОВ БЕССЕЛЯ

В предыдущем разделе рассмотрен подкласс световых полей с продольной периодичностью, обладающих коническим спектром плоских волн, названных многомодовыми пучками Бесселя. В данном разделе выяснены условия, при которых наблюдается вращение поперечного сечения бесселевых пучков, а также предложен градиентный алгоритм для расчета фазовых ДОЭ, формирующих такие световые поля.

Эффект вращения поперечного сечения бесселевого пучка объясняется тем, что в результате распространения двух конических волн с различными углами при вершинах конусов и с различными «винтовыми» составляющими возникает интерференционная картина, которая вращается вдоль оптической оси. При распространении более двух таких волн характер интерференционной картины усложняется, и для получения пучка, поперечное сечение которого вращается как единое целое, необходимо наложить определенные условия на параметры конических волн.

Из уравнения (57) следует, что если отличные от нуля коэффициенты $C_{m,n}$ имеют одинаковый номер $n = n_0$, то волна распространяется без дифракции и без изменения вида, как бесселева мода:

$$U(r, \varphi, z) = \exp\left(ik\sigma_0 z + i\frac{2\pi n_0 z}{z_0}\right) \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m J_m(kr\rho_0) e^{im\varphi}, \quad (74)$$

где $C_m = C_{m,n_0}$, $\rho_0 = \rho_{n_0}$.

Продольная периодичность светового поля (57) имеет место, когда хотя бы два слагаемых с различными номерами n_1 и n_2 отличны от нуля. Вращение поперечного сечения светового пучка, представленного в (57), является частным случаем продольной периодичности и обеспечивается согласованным выбором отличных от нуля слагаемых с разными номерами n и m . Для получения условия вращения пучка вместо (57) запишем выражение для интенсивности:

$$I(r, \varphi, z) = \sum_{n, m=-\infty}^{\infty} |C_{m,n} J_m(kr \rho_n)|^2 + \quad (75)$$

$$+ 2 \sum_{m, n=-\infty}^{\infty} \sum_{m', n'=-\infty}^{\infty} |C_{m,n} C_{m',n'}| J_m(kr \rho_n) J_{m'}(kr \rho_{n'}) \cos \Phi_{m,n}^{m',n'}(r, \varphi),$$

$$\Phi_{m,n}^{m',n'}(r, \varphi) = \arg C_{m,n} - \arg C_{m',n'} + \frac{2\pi(n-n')z}{z_0} + (m-m')\varphi. \quad (76)$$

Из (76) следует, что вид функции $I(r, \varphi + \Delta\varphi, z + \Delta z)$ не изменится при условии

$$\frac{m - m'}{n - n'} = A, \quad n \neq n', \quad m \neq m', \quad (77)$$

где A – постоянная величина, $\Delta\varphi, \Delta z$ – малые произвольные приращения величин φ и z . Из (77) следует, что если в (57) отличны от нуля только два слагаемых, то при любых значениях их номеров $n \neq n', m \neq m'$ пучок будет вращаться вокруг оси распространения. Из (77) также следуют менее общие, но более удобные для использования условия вращения пучка:

$$\frac{m}{n} = A, \quad (78)$$

$$m - n = A. \quad (79)$$

При выполнении условия (77), (78) или (79) с изменением расстояния на величину Δz значение интенсивности $I(r, \varphi, z)$ в уравнении (75) не изменится при выборе величины угла $\varphi + \Delta\varphi$, где

$$\Delta\varphi = -2\pi \frac{\Delta z}{Az_0}. \quad (80)$$

Так как Δz и $\Delta\varphi$ произвольные, то это означает наличие вращения пучка при распространении.

Из уравнения (80) видно, что если A^{-1} – целое число, то на длине периода z_0 будет совершаться целое число оборотов при вращении пучка. А направление вращения (левое или правое) определяется знаком постоянной A .

Рассмотрим ортогональный базис собственных функций колебаний круглой тонкой мембраны с радиусом R [33], который описывается уравнениями (59), (60).

Функцию пропускания ДОЭ $U_0(r, \varphi)$ можно искать как линейную комбинацию функций (59). Модули коэффициентов при этом считаются заданными, а их аргументы являются свободными параметрами. Модуль самой функции пропускания $|U_0(r, \varphi)|$ также задан и имеет смысл амплитуды освещающего ДОЭ пучка. Данная линейная комбинация имеет вид:

$$U_0(r, \varphi) = \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} C_{m,n} \Omega_{m,n}(r, \varphi), \quad (81)$$

при условии, что

$$kR\rho_n = \gamma_{m,n}. \quad (82)$$

Задачу поиска фазы функции $U_0(r, \varphi)$ и, соответственно, аргументов C_{mn} в сумме (81) можно сформулировать как задачу минимизации квадратичного критерия:

$$K = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \left[|U_0(r, \varphi)| - \left| \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} C_{m,n} \Omega_{m,n}(r, \varphi) \right| \right]^2 r \, dr \, d\varphi. \quad (83)$$

Градиентный метод минимизации критерия (83) нетрудно построить, используя результаты работы [34]. При этом итеративная процедура поиска аргументов коэффициентов $v_{m,n} = \arg C_{m,n}$, будет выглядеть следующим образом:

$$v_{m,n}^{(p+1)} = v_{m,n}^{(p)} + \tau_p \frac{\partial K}{\partial v_{m,n}^{(p)}}, \quad (84)$$

$$\frac{\partial K}{\partial v_{m,n}^{(p)}} = 2 \left| C_{m,n} \overline{C_{m,n}^{(p)}} \right| \sin \left(v_{m,n}^{(p)} - \overline{v_{m,n}^{(p)}} \right), \quad (85)$$

$$\overline{C_{m,n}} = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} F(r, \varphi) \Omega_{m,n}^*(r, \varphi) r \, dr \, d\varphi, \quad (86)$$

$$F(r, \varphi) = (U_0(r, \varphi) \left(\frac{U(r, \varphi)}{(U(r, \varphi))} - U(r, \varphi) \right), \quad (87)$$

$$U(r, \varphi) = \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} C_{m,n} \Omega_{m,n}(r, \varphi), \quad (88)$$

где $\bar{v}_{m,n} = \arg \bar{C}_{m,n}$, p – номер итерации. Модули $|C_{m,n}|$ задаются произвольно и являются параметрами задачи, от которых зависит вид поперечного сечения формируемого пучка.

Шаг τ_p в уравнении (84), следуя работе [34], можно представить в виде:

$$\tau_p = \frac{K}{K_p}, \quad (89)$$

$$\bar{K}_p = - \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial K}{\partial v_{m,n}^{(p)}} \right|^2. \quad (90)$$

Этот итеративный алгоритм отличается от алгоритмов (65)-(66) и (71)-(72).

Итеративным алгоритмом рассчитывались фазовые оптические элементы, формирующие световые поля, состоящие эффективно (на 80-90%) из двух-трех мод Бесселя.

Пример 4

Пример бездифракционного пучка или стабильной моды Бесселя показан на рис. 7 в левом столбце. Параметры расчета следующие: $\lambda=1,06$ мкм, $z_0=20$ мм, $R=1$ мм, $\sigma_0=0,01$. На рис. 7 в левом столбце показаны: бинарная фаза ДОЭ (a1), формирующего световой пучок, эффективно состоящий из двух слагаемых в уравнении (57) с номерами (m, n) : $(-3, -3)$, $(3, -3)$. Так как оба слагаемых имеют одинаковый номер $n=-3$, то согласно уравнению (74) пучок при распространении не изменяет свою структуру. Это видно из рис. 7, на котором в левом столбце показаны распределения поперечной

интенсивности данного пучка (негатив) на расстояниях z : 25 мм (b_1), 30 мм (e_1), 35 мм (z_1), 40 мм (d_1), 45 мм (e_1).

Пример светового поля, с продольной периодичностью показан в среднем столбце на рис. 7. Параметры расчета: $\lambda=1,06$ мкм, $z_0=20$ мм, $R=3$ мм, $\sigma_0=0,02$. В уравнении (57) сохранялись отличными от нуля только три слагаемых с номерами (m, n) : $(-2, -3)$, $(0, -1)$, $(2, -2)$. При этом условия вращения (77) и (78) не соблюдаются. На рис. 7 показаны: полутонная фаза такого ДОЭ (a_2) (черный цвет – 2π , белый – 0) и поперечные распределения интенсивности (негатив), сформированные на расстояниях z : 90 мм (b_2), 95 мм (e_2), 100 мм (z_2), 105 мм (d_2), 110 мм (e_2).

В правом столбце рис. 7 показан пример вращающегося многомодового пучка Бесселя. Параметры расчета: $\lambda=1,06$ мкм, $z_0=20$ мм, $R=2$ мм, $\sigma_0=0,015$. В уравнении (57) отличными от нуля выбирались только три слагаемых с номерами (m, n) : $(-3, -3)$, $(-1, -1)$, $(1, 1)$. Условия вращения (77) и (78) для данных номеров соблюдаются. На рис. 7 в правом столбце показаны полутонная фаза ДОЭ (a_3), формирующего световой пучок, эффективно содержащий три моды Бесселя, поперечные распределения интенсивности которого (негатив) показаны на расстояниях z : 70 мм (b_3), 75 мм (e_3), 80 мм (z_3), 85 мм (d_3), 90 мм (e_3). Из рисунка видно, что имеет место вращение пучка при его распространении, но также видно, что происходят некоторые изменения вида картины поперечного сечения пучка, обусловленные интерференцией трех главных мод (около 90% энергии) с модами высших порядков.

Поперечные картины дифракции на рис. 7 вычислялись с помощью преобразования Френеля, которое, в свою очередь, вычислялось с помощью алгоритма быстрого преобразования Фурье.

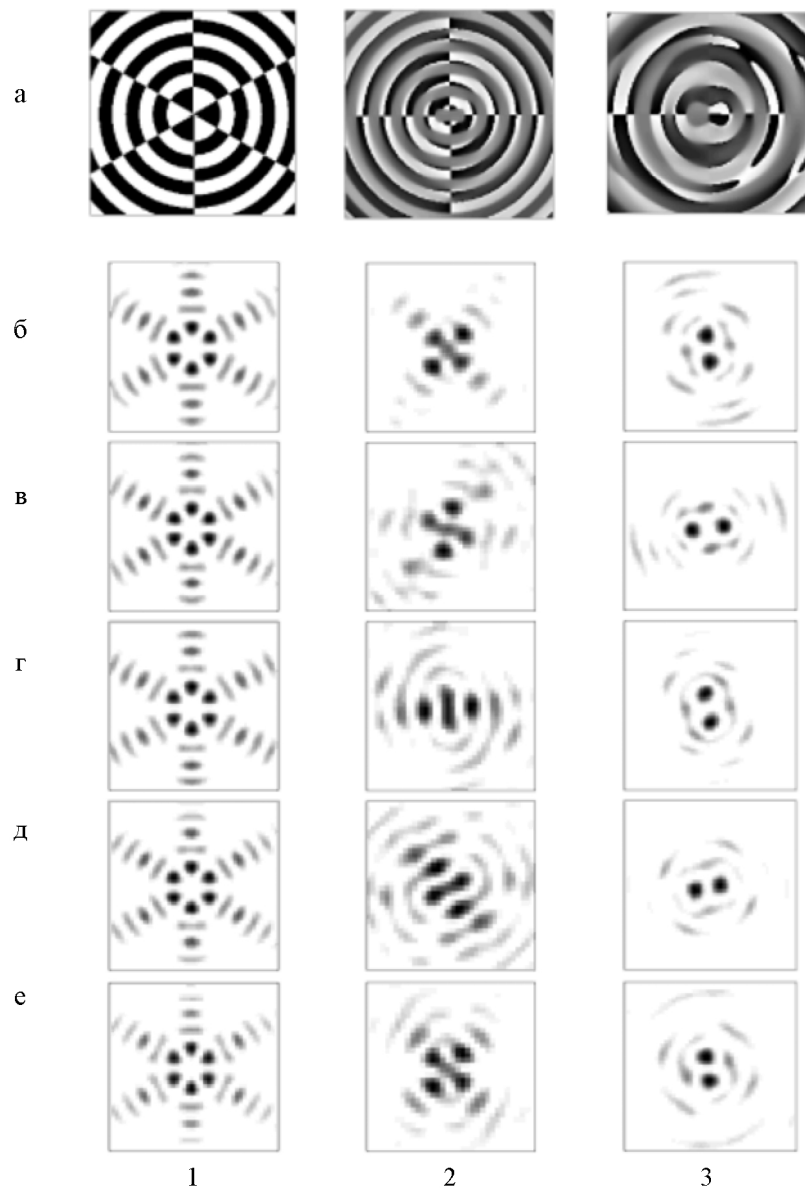


Рис. 7. Итеративно рассчитанные фазы ДОЭ (а1 – а3) и поперечные сечения многомодовых бesselевых пучков (б1 – е3), генерируемых такими ДОЭ

4. ФОРМИРОВАНИЕ ПАРЫ ВРАЩАЮЩИХСЯ БЕЗДИФРАКЦИОННЫХ ПУЧКОВ С ПОМОЩЬЮ БИНАРНОГО ФАЗОВОГО ДОЭ

Из предыдущих разделов ясно, что если пространственный спектр когерентного светового поля состоит из конечного набора узких концентрических колец, то такое поле будет самовоспроизводиться через равные расстояния вдоль оси распространения [8]. Частным случаем таких световых полей являются бездифракционные бесселевы пучки, комплексная амплитуда которых является суперпозицией функций Бесселя первого рода с угловыми гармониками [20, 35, 36]. Заметим, что такие бездифракционные световые поля можно сформировать и для частично-когерентного света [37, 38]. Так как идеальные самовоспроизводящиеся световые поля имеют бесконечные размеры и энергию, то для их практического формирования требуется использовать аподизацию, например, гауссовой апертурой [22, 39]. Для формирования стабильных (период саморепродукции равен нулю) бездифракционных бесселевых пучков можно использовать: интерферометр Фабри-Перо [11, 40]; узкую кольцевую щель в экране, расположенном на фокусном расстоянии перед сферической линзой [21]; бинарные амплитудные голограммы с несущей пространственной частотой [24, 41]; а также амплитудные [42] и фазовые [43, 44] дифракционные аксиконы.

Чтобы сформировать стабильный многомодовый бесселевый пучок с заданным вкладом каждой отдельной моды, можно итеративным способом спроектировать нужный для этого фазовый ДОЭ [27], как это было показано в предыдущих разделах. Свойствами близкими к бездифракционным пучкам обладают и другие типы световых волн, амплитуда которых описывается функциями Бесселя второго рода [45], или функциями Неймана [13]. Близкие к бездифракционным пучки можно сформировать амплитудными дифракционными элементами, которые рассчитываются по некоторым специальным итеративным процедурам [46].

Частным случаем самовоспроизводящихся пучков являются пучки, обладающие вращением вдоль оси распространения. Простейшие из

них – суперпозиция двух бесселевых функций [12] с разными показателями и масштабами [13, 14]. В [47, 48] получено общее условие для формирования вращающихся бездифракционных пучков. Сформировать такие пучки можно с помощью фазовых трохосонов (trochosons) [43], бинарных геликонов (helicons) [14] или бинарных фазовых винтовых аксиконов [14, 44].

В данном разделе рассмотрены вращающиеся бесселевы пучки, сформированные с помощью бинарных фазовых ДОЭ с пространственной несущей частотой, которые так же, как и в работе [14], имеют около 40% энергетической эффективности, но в отличие от винтовых аксиконов эти ДОЭ формируют сразу два одинаковых пучка (по 40% энергии в каждом), вращающиеся в разные стороны. Причем, в отличие от [14], каждый из этих пучков можно описать линейной комбинацией функций Бесселя с угловыми гармониками и с произвольно заданным весовым вкладом каждой из них.

В [14] предложено формировать многомодовые пучки Бесселя с помощью ДОЭ, функция пропускания которого $U(r, \theta)$ является линейной комбинацией аксиконов с угловыми гармониками. В этом случае вместо (57) при $z=0$ следует записать выражение:

$$U(r, \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^N C_{mn} \exp(-ik\rho_n r + im\varphi). \quad (91)$$

Аксикон с пропусканием $\exp(-ik\rho_n r + im\varphi)$ эффективно сформирует световое поле вблизи оптической оси на отрезке $0 < z < R/\rho_n$, амплитуда которого пропорциональна функции Бесселя [42]: $J_m(k\rho_n r) \exp(im\varphi)$. Для формирования вращающихся пучков Бесселя в [14] предложено использовать бинарные аксиконы с угловыми гармониками. В этом случае, разлагая функцию пропускания бинарного аксикона в функциональный ряд Гудмена-Сильвестри [49], получим:

$$\begin{aligned} \exp[i\{-k\rho_0 r + m\varphi\}_2] &= \\ &= \sum_{p=-\infty}^{\infty} \text{sinc}\left[\pi\left(p + \frac{1}{2}\right)\right] \exp[i(2p+1)(-k\rho_0 r + m\varphi)], \end{aligned} \quad (92)$$

где $\{\dots\}_2$ – обозначает операцию квантования по двум уровням: 0 и π .
В (92) первые два слагаемых при $p=0, 1$ имеют вид:

$$\frac{2}{\pi} \exp[-ik\rho_0 r + im\varphi] + \frac{2}{3\pi} \exp[-3ik\rho_0 r + 3im\varphi].$$

Вблизи оптической оси на отрезке $0 < z < R/3\rho_0$ эти два слагаемых в результате интерференции эффективно сформируют функцию вида:

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\pi} J_1(k\rho_0 r) \exp\left(im\varphi + i\frac{kz\rho_0^2}{2}\right) + \\ & + \frac{2}{3\pi} J_1(3k\rho_0 r) \exp\left(3im\varphi + i\frac{9kz\rho_0^2}{2}\right). \end{aligned}$$

Эффективность такого поля составляет немного более $(2/\pi)^2 = 40,5\%$. Из (92) следует, что с помощью бинарного аксикона можно формировать вращающиеся пучки Бесселя только специального вида. Фазовый ДОЭ, рассчитанный согласно (63), позволяет формировать вращающиеся бездифракционные пучки более общего вида.

Бинарный вариант ДОЭ, основанный на фазе функции (63), может быть получен с помощью добавления линейной фазы по координате $=r\cos\varphi$ и квантования по двум уровням 0 и π :

$$S_2(r, \varphi) = \{S(r, \varphi) + 2\pi v r \cos\varphi\}_2, \quad (93)$$

где v – пространственная несущая частота, символ $\{\dots\}_2$ имеет тот же смысл, что и в (92), $S(r, \varphi)$ – аргумент функции $U_0(r, \varphi)$ из уравнения (63) после достаточного числа итераций.

Используя снова разложение в функциональный ряд [49], получим для бинарной фазы из (93) следующее представление:

$$\begin{aligned} & \exp[iS_2(r, \varphi)] = \\ & = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \text{sinc}\left[\pi\left(p + \frac{1}{2}\right)\right] \exp\{i(2p+1)[S(r, \varphi) + 2\pi v r \cos\varphi]\}. \end{aligned} \quad (94)$$

В сумме (94) только два первых слагаемых при $p=0, -1$ будут описывать два одинаковых вращающихся в разные стороны и распростра-

няющиеся под углом друг к другу бesselевых пучка, каждый с эффективностью около 40%:

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\pi} \exp[i S(r, \varphi) + i 2 \pi \nu r \cos \varphi] + \\ & + \frac{2}{\pi} \exp[-i S(r, \varphi) - i 2 \pi \nu r \cos \varphi]. \end{aligned} \quad (95)$$

Пример 5

На рисунке 8а показана полутоновая фаза ДОЭ (255 уровней квантования в диапазоне $[-\pi, \pi]$), рассчитанная как аргумент (57). При этом в сумме (57) отличными от нуля выбирались два слагаемых с номерами (m, n) : $(-1, 0)$ и $(1, 1)$. Условие вращения (77) выполняется. Период вращения выбирался равным $z_0 = 20$ мм.

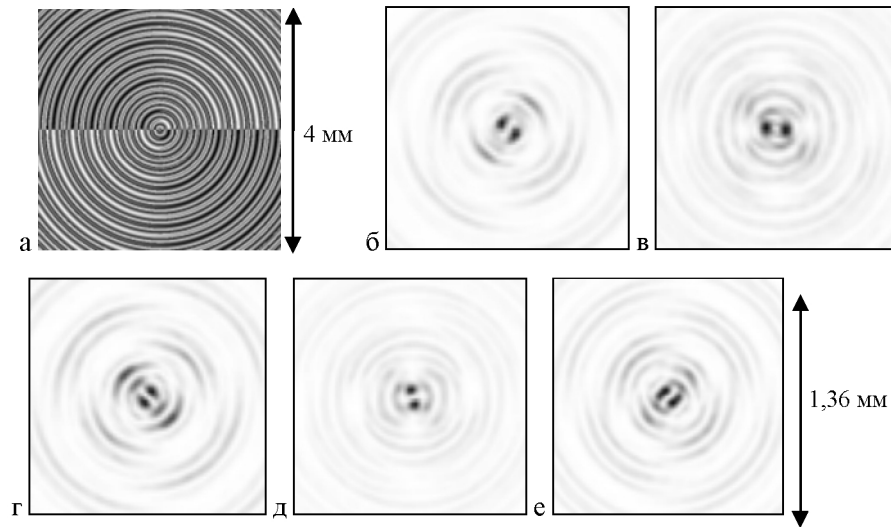


Рис. 8. Результат моделирования: фаза ДОЭ (а) и распределение поперечной интенсивности для бesselевого пучка с номерами $(-1, 0)$ и $(1, 1)$ на расстояниях z : 115 мм (б), 120 мм (в), 125 мм (г), 130 мм (д), 135 мм (е)

Размер фазовой функции на рис. 8а 4×4 мм (512×512 пикселей). На рис. 8б-е показаны полутоновые распределения поперечной интенсивности поля (негатив), сформированного с помощью фазового

ДОЭ, рис. 8а. Распределения интенсивности в поперечном сечении пучка вычислены с помощью преобразования Френеля на расстояниях: $z=115$ мм (8б), $z=120$ мм (8в), $z=125$ мм (8г), $z=130$ мм (8д), $z=135$ мм (8е). Таким образом, охвачен полный период. Видно, что фазовый ДОЭ, полученный с помощью устранения амплитудной информации успешно формирует бездифракционный вращающийся пучок.

На рис. 9а показана бинарная фаза, полученная из полутоновой фазы (рис. 8а) с помощью добавления пространственной частоты $\nu=10$ мм⁻¹ по формуле (93). На рис. 9б-е показаны полутоновые распределения поперечной интенсивности (негатив), сформированные бинарным фазовым ДОЭ (рис. 9а), рассчитанные с помощью преобразования Френеля на тех же расстояниях: $z=115$ мм (9б), $z=120$ мм (9в), $z=125$ мм (9г), $z=130$ мм (9д), $z=135$ мм (9е). Видно, что бинарный ДОЭ в соответствии с формулой (95) формирует два одинаковых бездифракционных пучка, вращающихся в разные стороны. Из сравнения результатов моделирования на рис. 8б-е и рис. 9б-е видно, что оба элемента формируют очень похожие световые поля.

Бинарный фазовый ДОЭ (рис. 9а) был изготовлен с помощью низковольтного электронного генератора изображений Leica LION LV1 в Университете Йёнсюу, Финляндия (см. главу 4). Предельное разрешение этого литографа около 0,04 микрона. Размер ДОЭ 4×4 мм (1000×1000 пикселей) с глубиной бинарного рельефа для длины волны $\lambda=0,633$ микрона. Изготовленный по шаблону (рис. 9а) бинарный фазовый ДОЭ освещался коллимированным пучком He-Ne лазера. Распределение интенсивности на разных расстояниях после ДОЭ регистрировалось с помощью ПЗС-камеры с окном 6,6×4,78 мм с числом пикселей 768×567.

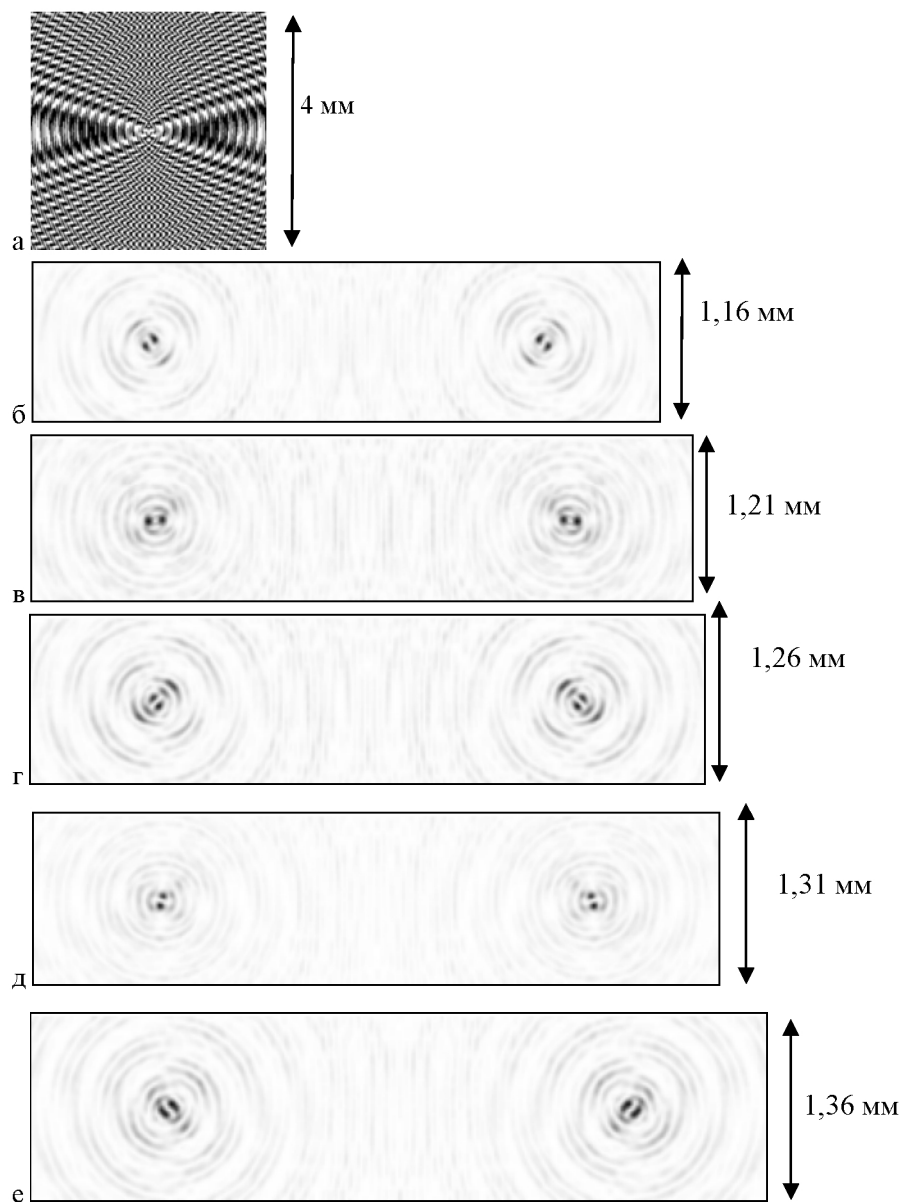


Рис. 9. Результат моделирования: бинарная фаза ДОО (а) и поперечные распределения интенсивности бесселевых пучков с номерами $(-1, 0)$, $(1, 1)$ и $(1, 0)$, $(-1, 1)$ на расстояниях z : 115 мм (б), 120 мм (в), 125 мм (г), 130 мм (д), 135 мм (е)

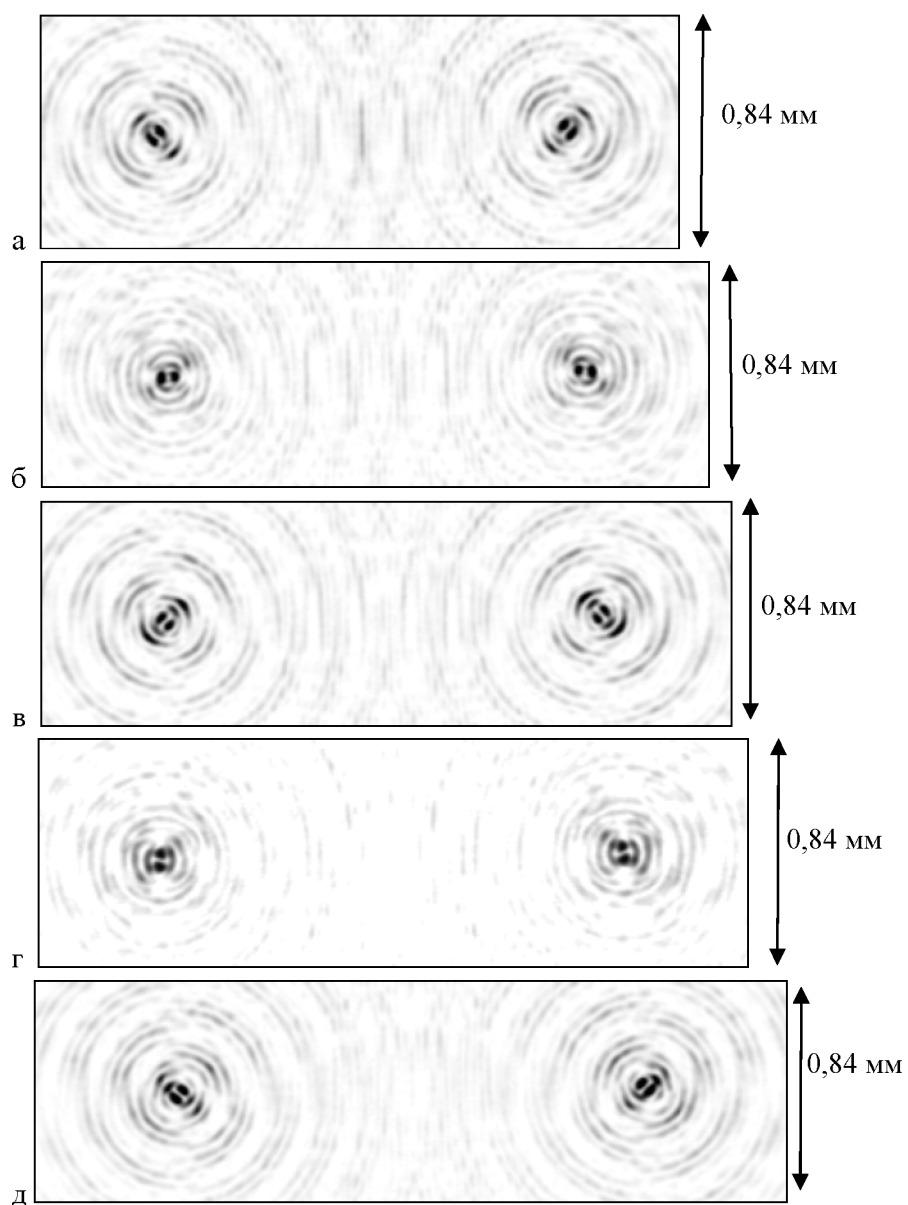


Рис. 10. Экспериментально зарегистрированные поперечные распределения интенсивности (негатив) после ДОЭ с фазой на рис. 9а на расстояниях z : 115 мм (а), 120 мм (б), 125 мм (в), 130 мм (г), 135 мм (д)

На рис. 10 показана экспериментально зарегистрированная интенсивность света после ДОЭ на разных расстояниях в пределах одного периода: $z=115$ мм (10а), $z=120$ мм (10б), $z=125$ мм (10в), $z=130$ мм (10г), $z=135$ мм (10д). Видно отсутствие нулевого порядка, также виден эффект вращения пучка и хорошее согласие с теорией (рис. 9б-е).

Пример 6

На рис. 11, 12 и 13 показаны результаты численного (рис. 11, 12) и натурального (рис. 13) экспериментов для случая распространения другого двухмодового пучка Бесселя с номерами мод (m, n) : $(-1, 0)$ и $(2, 1)$. Период вращения равен $z_0 = 30$ мм.

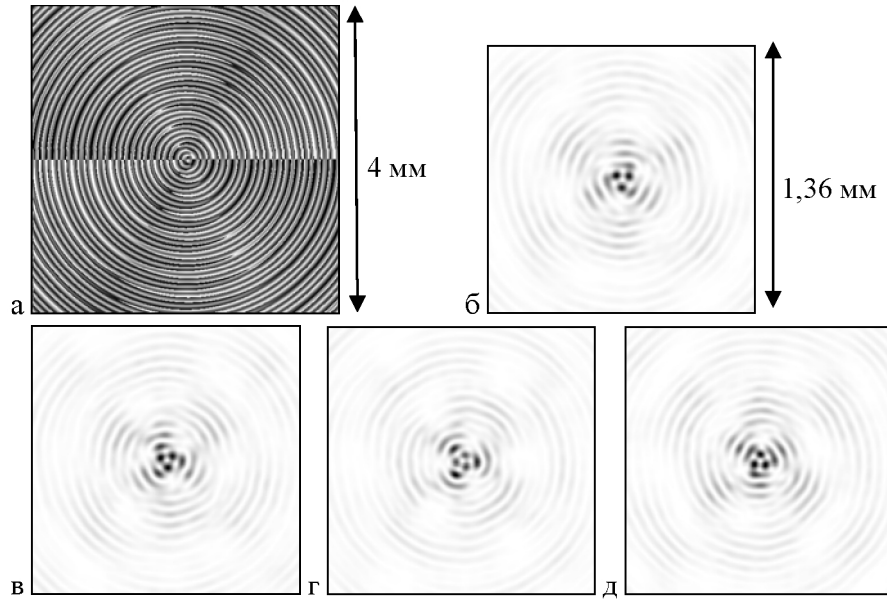


Рис. 11. Результат моделирования: фаза ДОЭ (а) и поперечное распределение интенсивности для бesselового пучка с номерами мод $(-1, 0)$ и $(2, 1)$ на расстояниях z : 170 мм (б), 175 мм (в), 180 мм (г), 185 мм (д)

На рис. 11а показана полутоновая фаза ДОЭ, полученная как аргумент (57). На рис. 11б–д показаны вычисленные распределения интенсивности сформированного пучка на половине периода вращения: $z=170$ мм (11б), $z=175$ мм (11в), $z=180$ мм (11г), $z=185$ мм (11д).

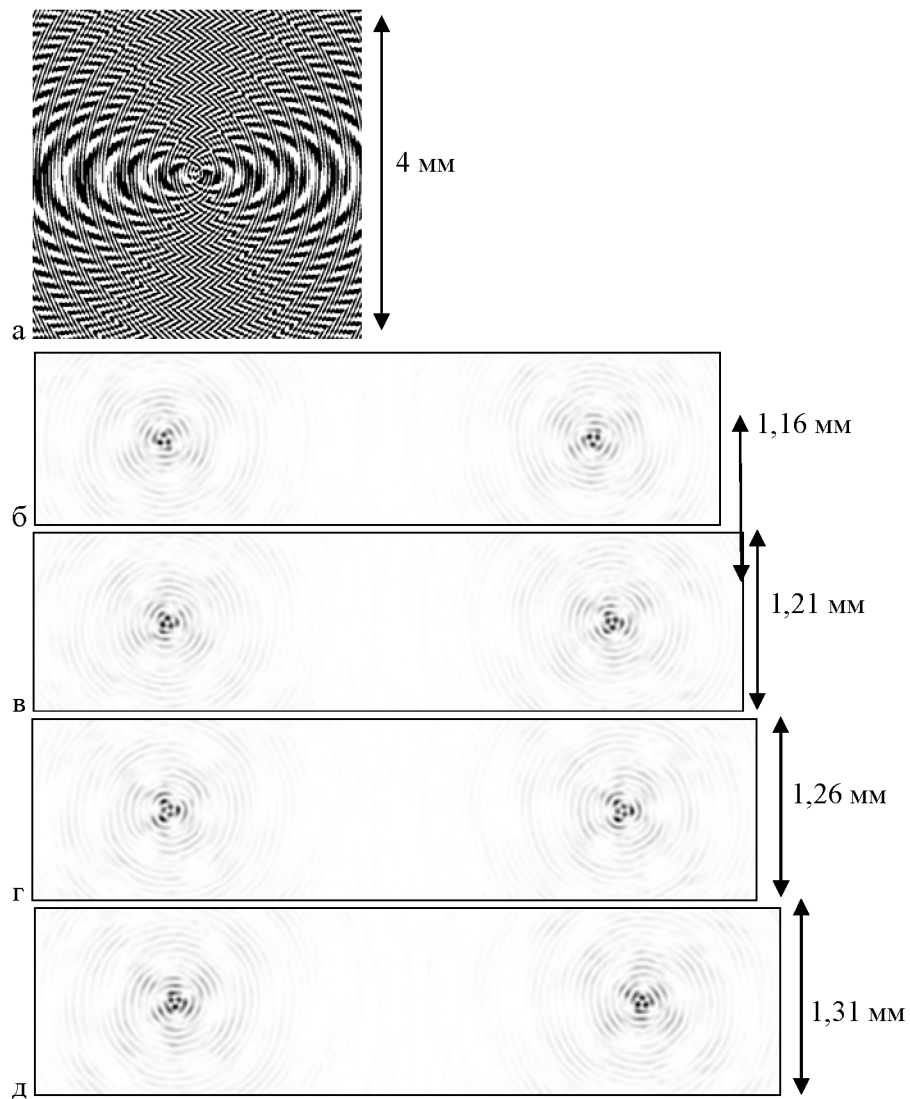


Рис. 12. Результат моделирования: бинарная фаза ДОЭ с несущей частотой (а) и поперечные распределения интенсивности для двух-модового пучка Бесселя на расстояниях z : 170 мм (б), 175 мм (в), 180 мм (г), 185 мм (д)

На рис. 12а показана бинарная фаза, полученная по формуле (93) из фазы, представленной на рис. 11а, с помощью добавления пространственной частоты $\nu=20 \text{ мм}^{-1}$. На рис.12б-д показаны вычисленные

распределения интенсивности светового поля, сформированного бинарным фазовым ДОЭ (рис. 12а) на тех же расстояниях.

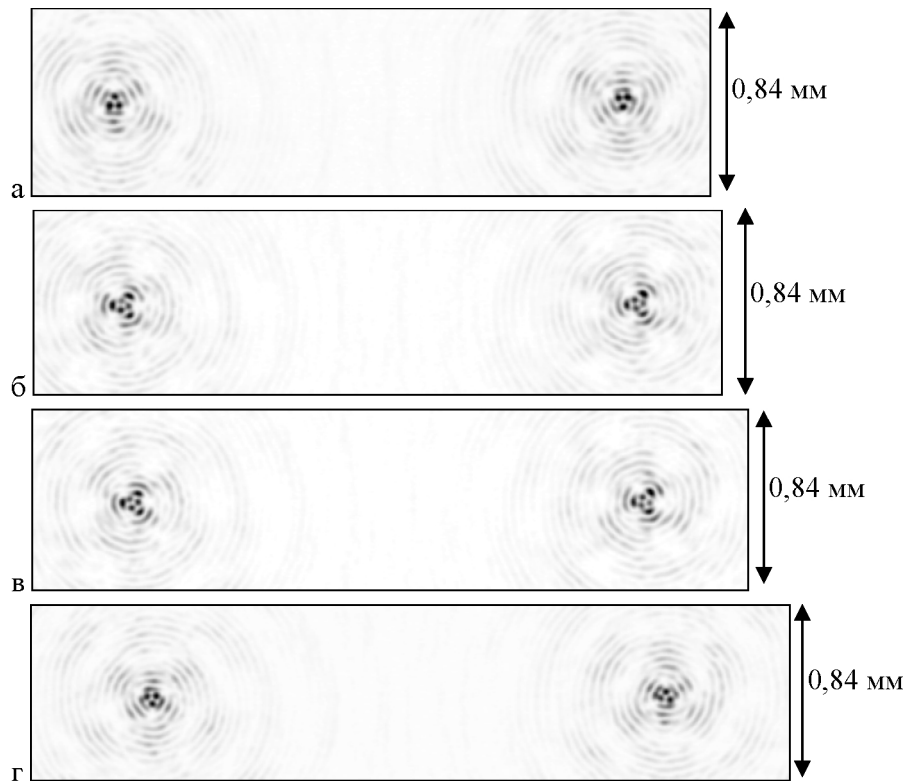


Рис. 13. Экспериментальные распределения интенсивности пучков, сформированных ДОЭ с фазой на рис. 12а на расстояниях z : 170 мм (а), 175 мм (б), 180 мм (в), 185 мм (г)

На рис. 13 показаны экспериментальные распределения интенсивности, полученные на расстояниях: $z=170$ мм (13а), $z=175$ мм (13б), $z=180$ мм (13в), $z=185$ мм (13г).

Из сравнения теории и эксперимента видно их хорошее согласие. Неполное сохранение вида поперечного сечения вращающегося пучка объясняется пренебрежением амплитудной информацией при расчете фазы как аргумента (57).

5. ДОО ДЛЯ ФОРМИРОВАНИЯ МНОГОМОДОВЫХ ПУЧКОВ ГАУССА-ЛАГЕРРА

В главе 6 рассматриваются моды лазерного излучения. Они не расплываются и не изменяют пространственной структуры в процессе распространения в своей среде, приобретая лишь фазовый набег. Гауссовы моды сохраняют свою структуру и в свободном пространстве, изменяясь масштабно.

В работах [50-52] рассматриваются ДОО для генерации многомодовых пучков Гаусса-Лагерра (ГЛ), рассчитанные с помощью методов компьютерной оптики. Особый интерес представляют фазовые ДОО, имеющие повышенную энергетическую эффективность и многоканальный характер работы, позволяющий сформировать несколько модовых пучков.

В отличие от метода кодирования с пространственной несущей частотой, рассмотренного в [50], и итеративного метода с использованием вспомогательной области в [51], в данном разделе используется метод, который состоит в итеративной аппроксимации функции пропускания ДОО конечной суммой гауссовых мод [52]. В [52, 53] были рассмотрены только радиально-симметричные моды ГЛ. В данном разделе этот метод применен к обобщенным модам ГЛ. Такое расширение метода позволяет с высокой эффективностью формировать модовые пучки, поперечное сечение которых представляет собой заданное изображение.

Кроме того, хотя рассматриваемый метод работает тем лучше, чем больше задействовано мод в пучке, он работоспособен и при формировании одномодового пучка. В этом случае за одну итерацию получается ДОО с фазовой функцией, пропорциональной знаковой функции моды. В данном разделе показано, что для эффективного формирования отдельных мод ГЛ можно использовать фазовые элементы, пропускание которых равно знаковой функции соответствующего многочлена Лагерра.

Алгоритм, рассмотренный в [52, 53], в случае обобщенных мод ГЛ выглядит следующим образом. Рассчитывается фаза $S(r, \varphi)$ ДОЭ в полярных координатах (r, φ) , удовлетворяющая соотношению

$$f(r, \varphi) = A_0(r, \varphi) \exp[iS(r, \varphi)] = \sum_{n=0}^N \sum_{|m| \leq n} C_{n,m} \Psi_{n,m}(r, \varphi), \quad (96)$$

в котором $\Psi_{n,m}(r, \varphi)$ – обобщенная функция ГЛ в полярных координатах (вид в декартовых координатах см. в (96), (97):

$$\begin{aligned} \Psi_{n,m}(r, \varphi) &= \\ &= \frac{2\sqrt{\pi(n-|m|)!}}{a\sqrt{(n!)^3}} \left(\frac{r}{a}\right)^{|m|} \exp\left[-\left(\frac{r}{\sqrt{2}a}\right)^2\right] L_n^{|m|}\left(\frac{r^2}{a^2}\right) \exp[im\varphi], \end{aligned} \quad (97)$$

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \varphi = \arctg \frac{y}{x},$$

где $L_n^m(x) = (-1)^m \frac{d^m}{dx^m} L_{n+m}(x)$ – обобщенный многочлен Лагерра,

$a = \sigma_0 / \sqrt{2}$, σ_0 – радиус перетяжки, $A_0(r, \varphi)$ – известная амплитуда освещающего пучка, модули коэффициентов $|C_{n,m}|$ задаются произвольно, а аргументы $C_{n,m}$ являются свободными параметрами задачи. Квадраты модулей коэффициентов $|C_{n,m}|^2$ характеризуют энергетический вклад каждой моды в пучок.

Функции ГЛ ортогональны:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\infty \Psi_{n,m}(r, \varphi) \Psi_{k,l}(r, \varphi) r dr d\varphi = \delta_{n,k} \delta_{m,l}, \quad (98)$$

где $\delta_{n,m} = \begin{cases} 1, & n = m, \\ 0, & n \neq m. \end{cases}$ – символ Кронекера.

Тогда коэффициенты в уравнении (96) вычисляются по формуле:

$$C_{n,m} = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty A_0(r, \varphi) \exp[iS(r, \varphi)] \Psi_{n,m}^*(r, \varphi) r dr d\varphi. \quad (99)$$

Предлагаемый итеративный алгоритм основан на последовательном вычислении сумм (96) и интегралов (99) с помощью алгоритма быстрого преобразования Фурье с наложением соответствующих ограничений. Так, на k -й итерации рассчитанные коэффициенты $C_{nm}^{(k)}$ заменяются на $\bar{C}_{n,m}^{(k)}$ следующим образом:

$$\bar{C}_{n,m}^{(k)} = D_{n,m} C_{n,m}^{(k)} |C_{n,m}^{(k)}|^{-1}, \quad (100)$$

где $D_{n,m}$ – неотрицательные числа, характеризующие распределение энергии между модами. Ограничения типа (100) характерны для итеративного алгоритма Герчберга–Секстона [34]. Однако для улучшения сходимости можно применять модификации замены (100), вводя некоторый коэффициент адаптивности $0 < \alpha \leq 1$, аналогичный рассмотренному в (2.40):

$$\bar{C}_{n,m}^{(k)} = \begin{cases} \left[D_{n,m} - \alpha (|C_{n,m}^{(k)}| - D_{n,m}) \right] C_{n,m}^{(k)} |C_{n,m}^{(k)}|^{-1}, & (n,m) \in \Omega, \\ 0, & (n,m) \notin \Omega, \end{cases} \quad (101)$$

или

$$\bar{C}_{n,m}^{(k)} = \begin{cases} \left[D_{n,m} - \alpha (|C_{n,m}^{(k)}| - D_{n,m}) \right] C_{n,m}^{(k)} |C_{n,m}^{(k)}|^{-1}, & (n,m) \in \Omega, \\ C_{n,m}^{(k)}, & (n,m) \notin \Omega, \end{cases} \quad (102)$$

где Ω – множество пар индексов, для которых числа $D_{n,m}$ отличны от нуля.

Таким образом, можно предложить следующий алгоритм для нахождения фазы оптического элемента $S(r, \varphi)$:

1. Начальная фаза выбирается как случайная величина $S_0(r, \varphi)$.
2. Пусть на k -м шаге по формуле (96) получается значение k -й оценки фазы $S_k(r, \varphi)$. Используя $S_k(r, \varphi)$, из уравнения (99) рассчитываются коэффициенты $C_{n,m}^{(k)}$.
3. Затем они заменяются коэффициентами $\bar{C}_{n,m}^{(k)}$, исходя из правил (100), (101) или (102).

4. Коэффициенты $\overline{C}_{n,m}^{(k)}$ подставляются в (96). В результате получается функция $f_k(r, \varphi)$, аргумент которой служит последующей оценкой фазы

$$f_k(r, \varphi) = \sum_{n=0}^N \sum_{|m| \leq n} \overline{C}_{n,m}^{(k)} \Psi_{n,m}(r, \varphi), \quad S_{k+1}(r, \varphi) = \arg \{f_k(r, \varphi)\}. \quad (103)$$

Переходим к 2. И так далее.

Сходимость алгоритма контролируется по средним отклонениям

$$\delta_A = \left\{ \int_0^{2\pi} \int_0^\infty [A_0(r, \theta) - |f_k(r, \varphi)|]^2 r dr d\varphi \right\}^{\frac{1}{2}} \times \quad (104)$$

$$\times \left\{ \int_0^{2\pi} \int_0^\infty A_0^2(r, \varphi) r dr d\varphi \right\}^{-\frac{1}{2}},$$

$$\delta_C = \left\{ \sum_{n=0}^N \sum_{|m| \leq n} [D_{n,m} - |C_{n,m}^{(k)}|]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{n=0}^N \sum_{|m| \leq n} D_{n,m}^2 \right\}^{-\frac{1}{2}}. \quad (105)$$

Можно показать, как это сделано в [53], что ошибки (104) и (105) не возрастают:

$$\delta_A^{(k+1)} \leq \delta_A^{(k)}, \quad \delta_C^{(k+1)} \leq \delta_C^{(k)}. \quad (106)$$

Функции ГЛ являются собственными функциями преобразования Фурье:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \Psi_{n,m}(r, \varphi) \exp[-i r \rho \cos(\varphi - \theta)] r dr d\varphi = \\ = (-1)^n (-i)^m \Psi_{n,m}(\rho, \theta), \end{aligned} \quad (107)$$

что позволяет использовать их для эффективного ввода излучения в световые волокна [50]. Так, если сформирован световой пучок, сечение которого имеет вид заданного изображения, и который является суперпозицией мод ГЛ

$$g(r, \varphi) = \sum_{n=0}^N \sum_{|m| \leq n} C_{n,m}^g \Psi_{n,m}(r, \varphi), \quad (108)$$

то в зоне дифракции Фраунгофера или в фокальной плоскости линзы получится следующее изображение:

$$\mathfrak{T}\{g(r, \varphi)\} = G(\rho, \theta) = \sum_{n=0}^N \sum_{|m| \leq n} \mu_{n,m} C_{n,m}^g \Psi_{n,m}(\rho, \theta), \quad (109)$$

где $\mathfrak{T}$ – обозначение Фурье-преобразования, (ρ, θ) – полярные координаты в Фурье-плоскости.

Следовательно, если в суперпозиции участвовали только моды с одинаковыми значениями собственных чисел

$$\mu_{n,m} = (-1)^n (-i)^{|m|} = \mu_0, \quad (110)$$

то вид изображения в сечении пучка не изменится.

Из формулы (110) видно, что собственные числа функций ГЛ принимают всего четыре значения

$$\begin{aligned} \mu_{n,m} &= 1 : (n = 2k, m = 4l), (n = 2k + 1, m = 4l + 2), \\ \mu_{n,m} &= -1 : (n = 2k, m = 4l + 2), (n = 2k + 1, m = 4l), \\ \mu_{n,m} &= i : (n = 2k, m = 4l + 3), (n = 2k + 1, m = 4l + 1), \\ \mu_{n,m} &= -i : (n = 2k, m = 4l + 1), (n = 2k + 1, m = 4l + 3), \\ k, l &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (111)$$

Более наглядно распределение одинаковых значений собственных чисел в зависимости от номера функции ГЛ приведено в таблице 1.

Таким образом, вполне реально подобрать такую суперпозицию мод ГЛ с одинаковыми собственными значениями, чтобы сформировать некоторое изображение, не меняющее своей структуры при прохождении Фурье-каскада. Заметим, что функции ГЛ с взаимно противоположной «закруткой» $\exp(\pm i|m|\varphi)$ имеют одинаковые собственные значения.

Собственные значения для собственных функций ГЛ

n	m									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1									
1	-1	i								
2	1	-i	-1							
3	-1	i	1	-i						
4	1	-i	-1	i	1					
5	-1	i	1	-i	-1	i				
6	1	-i	-1	i	1	-i	-1			
7	-1	i	1	-i	-1	i	1	-i		
8	1	-i	-1	i	1	-i	-1	i	1	
9	-1	i	1	-i	-1	i	1	-i	-1	i

Совокупность мод ГЛ с одинаковыми собственными значениями можно считать модовой группой, так как она также представляет собой собственную функцию преобразования Фурье.

Понятно, что рассматриваемый метод работает тем лучше, чем больше задействовано членов в сумме (96), а, следовательно, мод в пучке. Чем больше степеней свободы (фазы коэффициентов $C_{n,m}$), тем точнее аппроксимируется желаемая функция $f(r, \varphi)$, в частности, амплитуда $A_0(x, y)$ из (96).

Однако данный метод работоспособен и при формировании одномодового пучка. В этом случае за одну итерацию (с дальнейшей стагнацией) рассчитываются ДОЭ с фазой, пропорциональной знаковой функции от многочлена Лагерра:

$$\tau(r, \varphi) = \arg \{ \Psi_{n,m}(r, \varphi) \} = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 - \operatorname{sgn} \left[L_n^{(m)} \left(r^2 / a^2 \right) \right] \right\} + i m \varphi. \quad (112)$$

Покажем, что такая аппроксимация функции ГЛ является эффективной.

Выражение (112) для фазовой функции эквивалентно следующему выражению для амплитуды на участке $[-R, R]$, где R – размер апертуры, $t = (r/a)^2$:

$$\tau_{n,m}(t, \varphi) = \text{sgn} \left[L_n^{[m]}(t) \right] \exp(i m \varphi). \quad (113)$$

Разложим функцию (113) по ортогональным многочленам Лагерра с «закруткой»

$$\tau_{n,m}(t, \varphi) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{|q| \leq p} C_{p,q}^{(n,m)} L_p^{[q]}(t) \exp(i q \varphi) \quad (114)$$

и найдем коэффициенты разложения

$$\begin{aligned} C_{p,q}^{(n,m)} &= \sqrt{\frac{(p-|q|)!}{(p!)^3}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \text{sgn} \left[L_n^{[m]}(t) \right] e^{i m \varphi} L_p^{[q]}(t) e^{i q \varphi} t^{|q|} e^{-t} dt d\varphi = \\ &= \sqrt{\frac{(p-|q|)!}{(p!)^3}} \int_0^{\infty} \text{sgn} \left[L_n^{[m]}(t) \right] L_p^{[q]}(t) \cdot t^{|q|} e^{-t} dt \underbrace{\int_0^{2\pi} e^{i m \varphi} e^{i q \varphi} d\varphi}_{\delta_{m,q}} = \\ &= \sqrt{\frac{(p-|m|)!}{(p!)^3}} \int_0^{\infty} \text{sgn} \left[L_n^{[m]}(t) \right] L_p^{[m]}(t) \cdot t^{|m|} e^{-t} dt = C_{p,m}^{(n,m)}. \end{aligned} \quad (115)$$

Таким образом, ненулевыми являются только коэффициенты с таким же вторым индексом, что и раскладываемая функция $\tau_{n,m}(t, \varphi)$.

Обозначив через $t_{k,n}$ нули многочлена $L_n^m(t_{k,n}) = 0$ и считая $t_{0,n} = 0$, представим выражение (115) в виде суммы интегралов

$$C_{p,m}^{(n,m)} = \sqrt{\frac{(p-|m|)!}{(p!)^3}} \sum_{k=0}^{n-1} \left[(-1)^k \int_{t_{k,n}}^{t_{k+1,n}} t^{|m|} e^{-t} L_p^{[m]}(t) dt \right]. \quad (116)$$

С учетом справочного интеграла [54]:

$$\int x^{\alpha} e^{-x} L_n^{\alpha}(x) dx = \frac{1}{n} x^{\alpha+1} e^{-x} L_{n-1}^{\alpha+1}(x), \quad (117)$$

вместо (116) получим следующее выражение для коэффициентов разложения (113):

$$C_{p,m}^{(n,m)} = \frac{2}{p} \sqrt{\frac{(p-|m|)!}{(p!)^3}} \sum_{k=1}^n \left[(-1)^{k-1} (t_{k,n})^{|m|+1} e^{-t_{k,n}} L_{p-1}^{|m|+1}(t_{k,n}) \right]. \quad (118)$$

При этом коэффициенты $C_{p,q}^{(n,m)}$ с $q \neq m$ равны нулю.

Пример 7

Пусть требуется сформировать моду ГЛ $\Psi_{1,0}(t, \varphi)$. Для этого разместим в плоскости $z=0$ фазовый элемент с пропусканием $\tau_{1,0}(t) = \text{sgn}[L_1^0(t)]$. Тогда, согласно уравнению (118) в пространстве за фильтром сформируется суперпозиция световых мод

$$\begin{aligned} \tau_{1,0}(t) &= \sum_{p=1}^{\infty} C_{p,0}^{(1,0)} L_p^0(t) = \\ &= 0,736 L_1^0(t) - 0,184 L_2^0(t) + 0,020 L_3^0(t) - 0,001 L_4^0(t) + \dots \end{aligned} \quad (119)$$

Освещая такой фазовый элемент коллимированным гауссовым пучком, получим согласно уравнению (107), в частотной плоскости световое поле с амплитудой, пропорциональной выражению ($a=1\text{ мм}$)

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-r^2/2} \text{sgn}[L_1^0(r^2)] J_0(rp) \cdot r \, dr &= \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p C_{p,0}^{(1,0)} e^{-p^2/2} L_p^0(p^2) = \\ &= -e^{-p^2/2} [0,736 L_1^0(p^2) + 0,184 L_2^0(p^2) + \\ &0,020 L_3^0(p^2) + 0,001 L_4^0(p^2) + \dots], \end{aligned} \quad (120)$$

где $J_0(x)$ – функция Бесселя.

Отношение энергий световых пучков, описываемых вторым и первым слагаемыми в уравнении (120), равно

$$\frac{(0,184)^2 \int_0^{\infty} e^{-p^2} [L_2^0(p^2)]^2 p \, dp}{(0,736)^2 \int_0^{\infty} e^{-p^2} [L_1^0(p^2)]^2 p \, dp} = \frac{(0,184)^2 (2!)^2}{(0,736)^2 (1!)^2} \approx 0,25.$$

Таким образом, в первом слагаемом суммы (120), описывающем моду ГЛ $\Psi_{1,0}(r, \varphi)$, содержится более 70% всей энергии светового пучка.

Пример 8

Еще более эффективным способом формирования моды ГЛ $\Psi_{n,m}(r, \varphi)$ является освещение не гауссовым, а плоским световым пучком фазового ДОЭ с пропусканием ($a=1$ мм):

$$\tilde{\tau}_{n,m}(r, \varphi) = \text{circ}\left(\frac{r}{R}\right) \text{sgn}\left[L_n^m(r^2)\right] \exp(im\varphi), \quad (121)$$

$$\text{где } \text{circ}\left(\frac{r}{R}\right) = \begin{cases} 1, & r \leq R, \\ 0, & r > R. \end{cases}$$

В этом случае значение R следует выбирать так, чтобы выражение, определяющее эффективность возбуждения отдельной моды,

$$\eta = \frac{\left| \int_0^{2\pi} \int_0^R \tilde{\tau}_{n,m}(r, \varphi) \cdot \Psi_{n,m}^*(r, \varphi) r dr d\varphi \right|^2}{\int_0^{2\pi} \int_0^R |\tilde{\tau}_{n,m}(r, \varphi)|^2 r dr d\varphi \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^\infty |\Psi_{n,m}(r, \varphi)|^2 r dr d\varphi}, \quad (122)$$

было максимальным.

Рассмотрим пример с модой ГЛ $\Psi_{1,0}(r, \varphi)$. В этом случае выражение (122) записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{\left| \int_0^{2\pi} \int_0^R \tilde{\tau}_{1,0}(r, \varphi) \cdot \Psi_{1,0}^*(r, \varphi) r dr d\varphi \right|^2}{\int_0^{2\pi} \int_0^R |\tilde{\tau}_{1,0}(r, \varphi)|^2 r dr d\varphi \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^\infty |\Psi_{1,0}(r, \varphi)|^2 r dr d\varphi} = \\ &= \frac{4 \int_0^R (1-r^2) r dr}{R^2} = \end{aligned} \quad (123)$$

и достигает максимального значения $\eta = 0,786$ при $R = 2,5$ мм. Значит, световое поле (121) формирует моду ГЛ $\Psi_{1,0}(r, \varphi)$ с эффективностью около 79%.

Пример 9

При численном моделировании использовались следующие параметры: 128 пикселей по радиусу r и 128 пикселей по угловой составляющей φ , диапазон изменения аргументов $r \in [0, 7 \text{ мм}]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, длина волны $\lambda=0,63 \text{ мкм}$, фокусное расстояние $f=100 \text{ мм}$, радиус гауссового пучка в перетяжке $a=1 \text{ мм}$. В формуле (96) рассматривались члены ряда с номерами $n, m \leq N=7$.

Действие рассчитанных ДОЭ [55] моделировалось с помощью численного преобразования Фурье (107).

На рис. 14 представлены результаты формирования моды ГЛ с номером (3, 2) $Y_{3,2}(r, j)$. Фазовая функция (рис. 14а) рассчитывалась по формуле (121). На рис. 14б показан сформированный таким ДОЭ пучок и для сравнения на рис. 14в приведена эталонная мода ГЛ с номером (3, 2). Их радиальные сечения показаны на рис. 14г (сплошная линия – рассчитанная мода, пунктирная линия – эталонная мода).

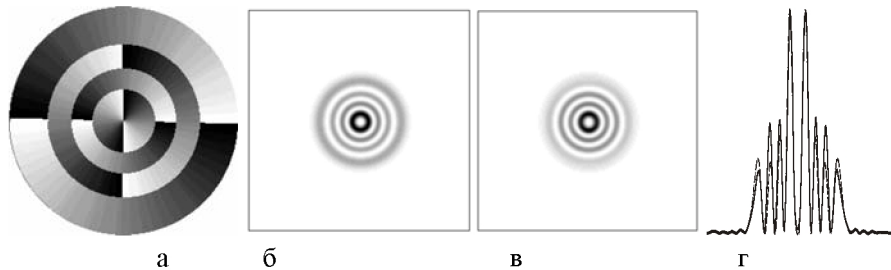


Рис. 14. Одномодовый пучок: фаза ДОЭ (а); распределения интенсивности (негатив) в Фурье-спектре для рассчитанной (б) и эталонной (в) мод ГЛ $\Psi_{3,2}(r, \varphi)$; интенсивность в радиальном сечении (г) (сплошная линия – расчет, пунктирная линия – эталон)

Оптимальный радиус апертуры R определялся из условия максимума эффективности η (122) сформированного пучка. График зависимости η от R для моды ГЛ $\Psi_{3,2}(r, \varphi)$ представлен на рис. 15. Из графика видно, что оптимальный размер апертуры ДОЭ для формирования

моды ГЛ $\Psi_{3,2}(r, \varphi)$ равен $R=4,5$ мм. При этом эффективность возбуждения этой моды достигает значения 81%.

Рис. 15. Зависимость эффективности возбуждения моды η от радиуса апертуры R для ДОЭ, формирующего моду ГЛ $\Psi_{3,2}(r, \varphi)$

Проведя аналогичные исследования можно подобрать оптимальный радиус ДОЭ для формирования любой моды. С помощью численного моделирования было показано, что фазовые ДОЭ, рассчитанные по формуле (121) позволяют формировать одномодовые пучки с эффективностью 77–81% в зависимости от номера моды. В таблице 2 приведены значения R и η для нескольких мод.

Таблица 2

Значения оптимального радиуса апертуры ДОЭ R и эффективности η ($a=1$ мм)

Номер моды ГЛ	(1, 0)	(2, 1)	(3, 2)	(4, 2)	(5, 1)
Оптимальный радиус R , мм	2,5	4	4,5	4,7	5
Эффективность η , %	79	77	81	78	77

Можно предположить, что для суперпозиции мод, оптимальным радиусом апертуры ДОЭ является средний из оптимальных радиусов, входящих в суперпозицию мод.

Пример 10

На рис. 16 приведены примеры фазовых ДОЭ (рис. 16а), формирующих многомодовые пучки ГЛ в плоскости пространственного спектра (рис. 16б). Верхняя строка рисунка относится к группе из 5 мод: $(1, 1)$, $(3, 1)$, $(4, -3)$, $(5, 1)$, $(5, -5)$, имеющих собственные числа, равные i . Квадраты модулей коэффициентов разложения пучков представлены на рис. 16б в полутонах. Нижняя строка рисунка относится к группе из 6 мод: $(2, 0)$, $(3, -2)$, $(3, 2)$, $(4, -4)$, $(4, 0)$, $(4, 4)$, имеющих собственные числа, равные 1. Оба пучка являются собственными функциями преобразования Фурье. Для сравнения на рис. 16г показаны эталонные распределения интенсивности указанных композиций мод.

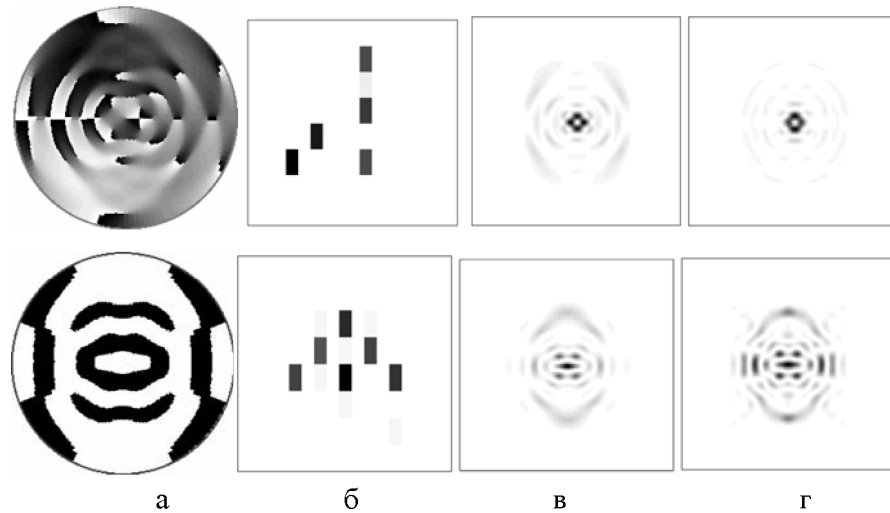


Рис. 16. Многомодовые пучки: фазы ДОЭ (а); квадраты модулей коэффициентов в разложении (7.96) (б); распределения интенсивности в фокальной плоскости для рассчитанной (в) и эталонной (г) композиций мод ГЛ (верхняя строка для 5-модового пучка, нижняя строка для 6-модового пучка).

6. ВРАЩЕНИЕ СВЕТОВЫХ МНОГОМОДОВЫХ ПУЧКОВ ГАУССА–ЛАГЕРРА В СВОБОДНОМ ПРОСТРАНСТВЕ И ВОЛОКНЕ

Моды в свободном пространстве

В данном разделе рассмотрены условия, при которых наблюдается эффект вращения многомодового пучка ГЛ вокруг оси распространения и получено выражение для полного числа оборотов.

Известно [56], что уравнению Гельмгольца удовлетворяют световые поля, являющиеся суперпозицией мод ГЛ. Комплексную амплитуду таких полей в свободном пространстве можно представить в цилиндрических координатах (r, φ, z) в следующем виде:

$$U(r, \varphi, z) = \exp \left[i k z + \frac{i k r^2}{2R} - \frac{r^2}{\sigma^2} \right] \times \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|m| \leq n} C_{n,m} \left(\frac{\sqrt{2}r}{\sigma} \right)^{|m|} L_n^{|m|} \left(\frac{2r^2}{\sigma^2} \right) \exp \left[-i \beta_{n,m}(z) + i m \varphi \right], \quad (124)$$

где

$$\beta_{n,m}(z) = (2n + |m| + 1) \arctg(z/z_0), \quad (125)$$

$R = z(1 + z_0^2/z^2)$ – радиус кривизны параболического фронта светового поля, $\sigma^2 = \sigma_0^2(1 + z^2/z_0^2)$ – эффективный радиус пучка, $2z_0 = 2\pi\sigma_0^2/\lambda$ – конфокальный параметр, σ_0 – радиус перетяжки, $C_{n,m}$ – постоянные коэффициенты, k – волновое число света с длиной волны λ .

Получим условие для наблюдения эффекта вращения поперечного сечения многомодового пучка. На основании (7.124) запишем выражение для интенсивности $I(r, \varphi, z) = |U(r, \varphi, z)|^2$:

$$I(r, \varphi, z) = \exp \left[-\frac{2r^2}{\sigma^2} \right] \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|m| \leq n} |C_{n,m}|^2 \left(\frac{\sqrt{2}r}{\sigma} \right)^{2|m|} \left| L_n^{|m|} \left(\frac{2r^2}{\sigma^2} \right) \right|^2 + \right. \\ \left. + 2 \sum_{n \neq n'} \sum_{m \neq m'} |C_{n,m} C_{n',m'}| \left(\frac{\sqrt{2}r}{\sigma} \right)^{|m|+|m'|} \left| L_n^{|m|} \left(\frac{2r^2}{\sigma^2} \right) L_{n'}^{|m'|} \left(\frac{2r^2}{\sigma^2} \right) \right| \cos \Phi_{n',m'}^{n,m}(r, \varphi) \right\}, \quad (126)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_{n',m'}^{n,m}(r, \varphi) = \arg C_{n,m} - \arg C_{n',m'} + \\ + [2(n-n') + (|m| - |m'|)] \arctg \frac{z}{z_0} + (m-m')\varphi. \end{aligned} \quad (127)$$

Из уравнения (127) видно, что вид функции $I(r, \varphi + \Delta\varphi, z + \Delta z)$ не изменится, если в соотношении

$$\varphi + \Delta\varphi = B \arctg \frac{z + \Delta z}{z_0} \quad (128)$$

величина B будет постоянной:

$$B = \frac{2(n-n') + (|m| - |m'|)}{m-m'} = \text{const}, \quad n, n', m, m' = 0, 1, 2, \dots \quad (129)$$

Строго говоря, если в ур. (126) и (127) сделать замену переменных:

$$r' = \frac{r}{\sigma}, \quad \varphi' = \varphi - B \arctg \frac{z}{z_0}, \quad z' = z,$$

то функция интенсивности $I(r', \varphi')$ в такой растягивающейся и одновременно вращающейся системе координат не будет зависеть от z' .

Условие вращения (129) многомодового пучка ГЛ как единого целого в свободном пространстве аналогично условию (42), полученному в [17], и может быть к нему сведено.

Из уравнения (128) можно найти расстояния z_p , на которых пучок сделает p оборотов:

$$z_p = z_0 \operatorname{tg} \left(\frac{2\pi p}{B} \right), \quad p = 1, 2, \dots, N, \quad (130)$$

где $N=B/4$ – максимальное число оборотов, которые пучок способен сделать от $z=0$ до $z=\infty$ ($z \gg z_0$). Скорость вращения v поперечного сечения многомодового пучка зависит от расстояния z следующим образом:

$$v = \frac{d\varphi}{dz} = B \left[1 + \left(\frac{z}{z_0} \right)^2 \right]^{-1}. \quad (131)$$

Из вышеизложенного следует, что подбором отличных от нуля слагаемых в уравнении (124), с номерами, удовлетворяющими условию (129), можно по формулам (99)-(103) рассчитывать фазовые ДОЭ, которые при освещении их лазерным светом формируют с высокой эффективностью многомодовые нерадиально-симметричные пучки ГЛ, поперечное сечение которых испытывает вращение вокруг оси распространения.

Пример 11

Параметры численного моделирования: число пикселей 256×256 , радиус перетяжки $\sigma_0 = 0,1$ мм, длина волны $\lambda = 0,63$ мкм, радиус ДОЭ $R_0 = 0,5$ мм, конфокальный параметр $z_0 = 49,86$ мм.

На рисунке 17 представлены численные примеры. В первом столбце показана фаза ДОЭ ($a1$), рассчитанная по формулам (99)-(103) с отличными от нуля двумя слагаемыми суммы (124) с коэффициентами $C_{1,-1}$ и $C_{11,2}$. Условие (129) для двух слагаемых очевидно выполняется: $B = 7$. Максимальное число оборотов равно $N = 1,75$. На расстоянии $z = 62,53$ мм, как следует из уравнения (130), пучок сделает полный оборот, а на расстоянии $z = 217,76$ мм – еще пол-оборота. На рисунке показаны полутоновые поперечные нормированные распределения интенсивности светового пучка (негатив), сформированного фазовым ДОЭ ($a1$) и вычисленные с помощью преобразования Френеля на плоскостях: $z = 62,53$ мм ($b1$), $z = 101,34$ мм ($e1$), $z = 140,15$ мм ($z1$), $z = 178,95$ мм ($d1$), $z = 217,76$ мм ($e1$). Вращение картины происходит против часовой стрелки.

Во втором столбце показаны аналогичные результаты для вращающегося пучка, состоящего из трех мод с коэффициентами: $C_{1,-1}$, $C_{5,0}$ и $C_{11,2}$. Условие (129) выполняется: $B = 7, 7, 7$. Фазовая функция такого элемента ($a2$) показана в полутонах (черный цвет – 2π , белый цвет – 0).

Поперечные распределения интенсивности для такого пучка ($b2-e2$) показаны на тех же расстояниях, что и в первом столбце (негатив).

В третьем столбце приведены фаза ($a3$) и сечения интенсивности ($b3-e3$) для трех-модового пучка с коэффициентами: $C_{2,-2}$, $C_{5,0}$ и $C_{15,2}$. Условие (129) при этом не выполняется: $B = 2, 6, 11$, и разные элементы пучка вращаются с различной скоростью, что приводит к искажению картины.

а

б

в

г

д

е

1

2

3

Рис. 17. Фазы ДОЭ, формирующих многомодовые пучки ГЛ (вверху)
и нормированные поперечные распределения интенсивности
на разных расстояниях от ДОЭ (внизу)

В многомодовом световом волокне круглого сечения и с квадратичной зависимостью показателя преломления

$$n^2(r) = n_0^2 \left(1 - 2\Delta \frac{r^2}{r_0^2} \right), \quad (132)$$

где n_0 – максимальное значение показателя преломления на оси волокна, r_0 – радиус волокна, Δ – параметр дисперсии показателя преломления, распространяется световое поле, являющееся суперпозицией мод ГЛ [57]:

$$U(r, \varphi, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|m| \leq n} C_{n,m} \left(\frac{r\sqrt{2}}{\sigma} \right)^{|m|} L_n^{|m|} \left(\frac{2r^2}{\sigma^2} \right) \exp \left[i\alpha_{n,m} z - \frac{r^2}{\sigma^2} + im\varphi \right], \quad (133)$$

где $\sigma = (\lambda r_0 / \pi n_0)^{1/2} (2\Delta)^{-1/4}$, $\alpha_{n,m} = [k^2 n_0^2 - 4\sigma^{-2} (2n + |m| + 1)]^{1/2}$, σ – эффективный радиус первой моды, $\alpha_{n,m}$ – коэффициент, пропорциональный фазовой скорости соответствующей моды.

Из-за дисперсии фазовых скоростей мод ГЛ, сформированное на входе волокна изображение $U(r, \varphi, z=0)$ будет деградировать по мере распространения. Чтобы частично компенсировать дисперсию фазовых скоростей мод нужно из суммы (133) выбрать такие слагаемые, для которых фазовые скорости некоторым образом согласованы. Например, можно заставить световой многомодовый пучок сгенерированный фазовым ДОЭ вращаться вокруг оси по спирали. Условия вращения поперечного сечения пучка (133) аналогичны условиям (77) и (78) для многомодовых пучков Бесселя и имеют соответственно вид

$$\frac{\alpha_{n,m} - \alpha_{n',m'}}{m - m'} = B, \quad m \neq m', \quad n \neq n', \quad (134)$$

$$\frac{\alpha_{n,m}}{m} = B, \quad (135)$$

где B – постоянная величина. В уравнении (134) величины $\alpha_{n,m}$ можно приближенно заменить на следующее выражение

$$\alpha_{n,m} \cong kn_0 - \alpha_0(2n + |m| + 1), \quad (136)$$

так как $kn_0 \gg \alpha_0$, $\alpha_0 = 2(kn_0\sigma^2)^{-1}$. Например, при характерных параметрах волокна: $r_0=10$ мкм, $\Delta=0,01$, $n_0=1,5$, и для видимого света: $k=10^4$ мм⁻¹, получим следующие значения: $kn_0=1,5 \times 10^4$ мм⁻¹ и $\alpha_0=15$ мм⁻¹.

С учетом уравнения (7.136) условие (7.134) будет иметь более простой вид:

$$\alpha_0 \left[\frac{2(n-n') + (|m| - |m'|)}{m - m'} \right] = B, \quad n, n', m, m' = 0, 1, 2, \dots \quad (137)$$

В данном случае условие (137) похоже на (77) для бесселевых мод и на (129) для мод ГЛ в свободном пространстве. При небольших значениях номеров мод ($n < 10$) приближенное равенство в (136) соблюдается при выбранных параметрах волокна с точностью около 2%.

Период z_0 , на котором будет происходить полный оборот, рассчитывается по формуле

$$z_0 = \frac{2\pi}{|B|}, \quad (138)$$

и для выбранных параметров равен десяткам и сотням микрон.

Аналогично модам Бесселя итеративно рассчитывались фазовые ДОЭ, формирующие световые поля, состоящие эффективно (на 80-90%) из двух-четырех мод ГЛ и распространяющиеся в многомодовом волокне с квадратичной зависимостью показателя преломления (132).

Пример 12

На рис. 18 показаны некоторые примеры. Параметры расчета: $r_0=10$ мкм, $\Delta=0,01$, $n_0=1,5$, $\lambda=0,63$ мкм, $R=0,01$ мм, $\alpha_0=15$ мм⁻¹.

На рис. 18 в левом столбце приведен пример моды ГЛ, распространяющейся в волокне почти без дифракции.

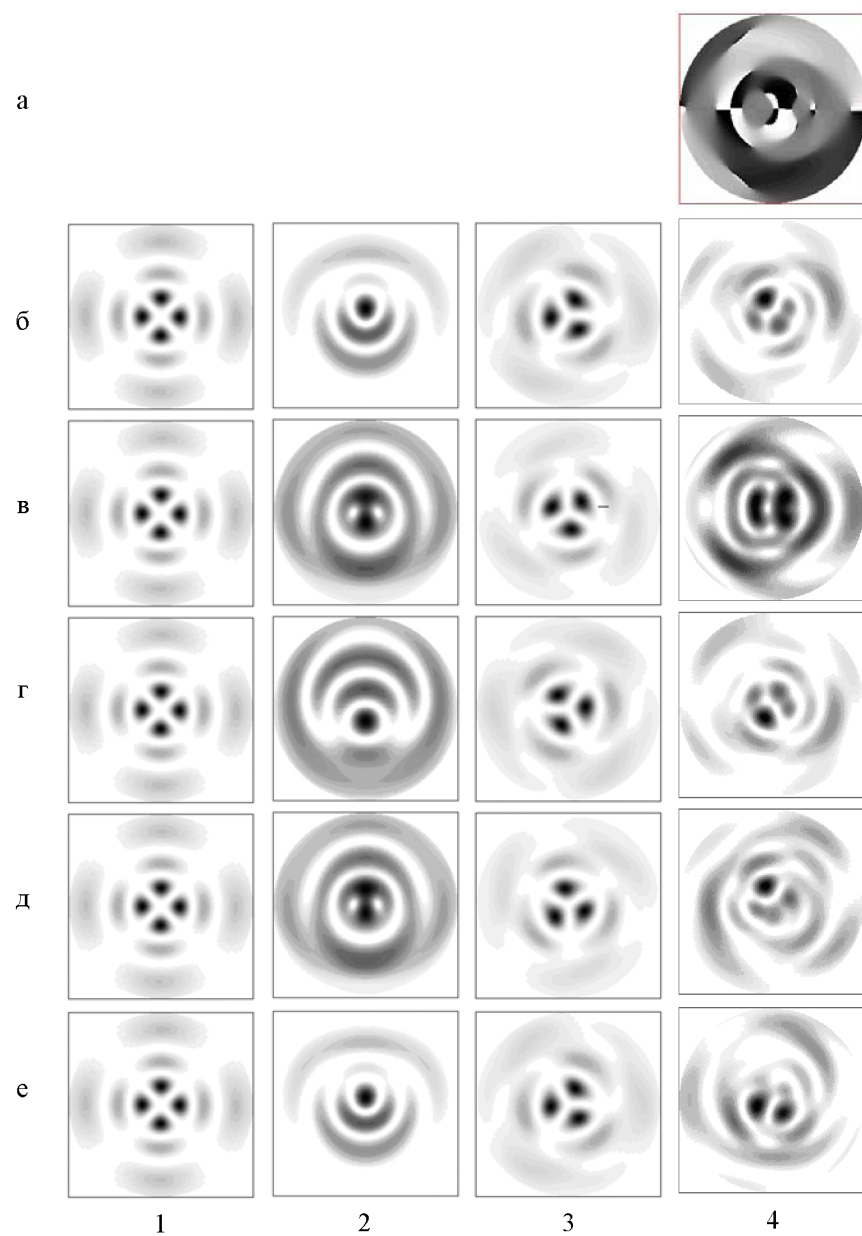


Рис. 18. Итеративно рассчитанные фазы ДОО (а1 – а4) и поперечные сечения многомодовых пучков ГЛ (б1 – е4), генерируемых такими ДОО

В уравнении (133) отличными от нуля выбирались только два слагаемых с номерами (n, m) : $(2, -2)$ и $(2, 2)$. При этом уравнения (136)-(138) приводят к бесконечному периоду вращения $z_0 = \infty$, $B = 0$. На рис. 18 показаны бинарная фаза такого ДОЭ ($a1$) и поперечные сечения сформированного пучка (негатив), рассчитанного на разных расстояниях z : 1 мм ($b1$), 2 мм ($e1$), 3 мм ($z1$), 4 мм ($d1$), 5 мм ($e1$). Видно, что при распространении такого пучка происходит незначительная модуляция интенсивности, обусловленная периодически изменяющимся влиянием высших мод ГЛ. В расчете учитывались всего 25 мод с соседними номерами.

Пример периодически изменяющегося многомодового пучка ГЛ показан во втором слева столбце на рис. 18. В этом случае в уравнении (133) отличными от нуля считались слагаемые с номерами (n, m) : $(1, -1)$, $(3, 0)$, $(1, 1)$. Условия вращения (134) и (135) не соблюдаются, однако полученные значения B оказались кратными, что позволило выделить общий период $z_0=0,2087$ мм. На рис. 18 во втором слева столбце показаны бинарная фаза ДОЭ ($a2$) и поперечные сечения светового пучка (негатив) на разных расстояниях z : 2,087 мм ($b2$), 2,139 мм ($e2$), 2,191 мм ($z2$), 2,243 мм ($d2$), 2,295 мм ($e2$). Видно, что происходит периодическая смена картин дифракции при распространении пучка в волокне.

В третьем слева столбце на рис. 18 приведен пример вращающегося многомодового пучка ГЛ. В сумме (133) сохранялись два слагаемых с номерами (n, m) : $(1, -1)$, $(2, 2)$. Условие вращения (134) выполняется, период вращения $z_0=0,626$ мм. На рис. 18 в третьем слева столбце показаны полутонная фаза такого ДОЭ ($a3$) и поперечные сечения пучка (негатив) на разных расстояниях z : 1 мм ($b3$), 1,156 мм ($e3$), 1,313 мм ($z3$), 1,469 мм ($d3$), 1,626 мм ($e3$).

Заметим, что условию вращения (134) удовлетворяют, например, трехмодовые пучки ГЛ со следующими номерами (n, m) : $(1, -1)$, $(5, 0)$, $(11, 2)$, а также $(2, -2)$, $(8, 0)$, $(14, 3)$.

На рис. 18 в первом справа столбце приведен пример четырехмодового пучка ГЛ, для которого условие вращения (134) не выполняется и поэтому происходит вращение с искажением вида поперечной кар-

тины пучка. На рис. 18 в первом справа столбце показана полутоновая фаза ДОЭ (a_4), рассчитанная итеративно с учетом четырех отличных от нуля слагаемых в уравнении (133) с номерами (n, m) : $(2, -2)$, $(1, -1)$, $(2, 1)$, $(3, 2)$. Поперечные сечения пучка, сформированного таким ДОЭ, показаны в правом столбце на разных расстояниях z : 1 мм (b_4), 1,094 мм (b_4), 1,187 мм (c_4), 1,281 мм (d_4), 1,375 мм (e_4). Искажение картины поперечного сечения пучка происходит из-за того, что отдельные моды вращаются с разными угловыми скоростями и распространяются с разными фазовыми скоростями, и скорости эти не согласованы друг с другом, как это было в предыдущих случаях, относящихся к рис. 18.

7. ФОРМИРОВАНИЕ ВРАЩАЮЩИХСЯ ПУЧКОВ ГАУССА-ЛАГЕРРА С ПОМОЩЬЮ ФАЗОВОЙ БИНАРНОЙ ДИФРАКЦИОННОЙ ОПТИКИ

Экспериментальные результаты по вращению лазерного пучка, состоящего из двух мод ГЛ представлены, например, в [58]. Пучок был сформирован с помощью амплитудной голограммы, фазовая информация в которой была закодирована по методу Ли, поэтому энергетическая эффективность такого пучка была небольшая. В [59] приведены численные результаты по вращению пучков ГЛ.

В данном разделе представлены экспериментальные результаты (и их сравнение с численными) по формированию в свободном пространстве двух одинаковых лазерных пучков, вращающихся в противоположные стороны и состоящих из двух мод ГЛ. Эти вращающиеся пучки формируются с помощью бинарного фазового ДОЭ, и энергетическая эффективность каждого из них около 40%. Показано хорошее соответствие теории и эксперимента.

Пример 13

На рис. 19а показана полутоновая фаза ДОЭ (255 уровней градаций в диапазоне $[-\pi, \pi]$), рассчитанная за две итерации методом (99)-(103). При этом в сумме (124) отличные от нуля только два слагаемых с номерами (n, m) : $(1, -1)$ и $(15, 1)$.

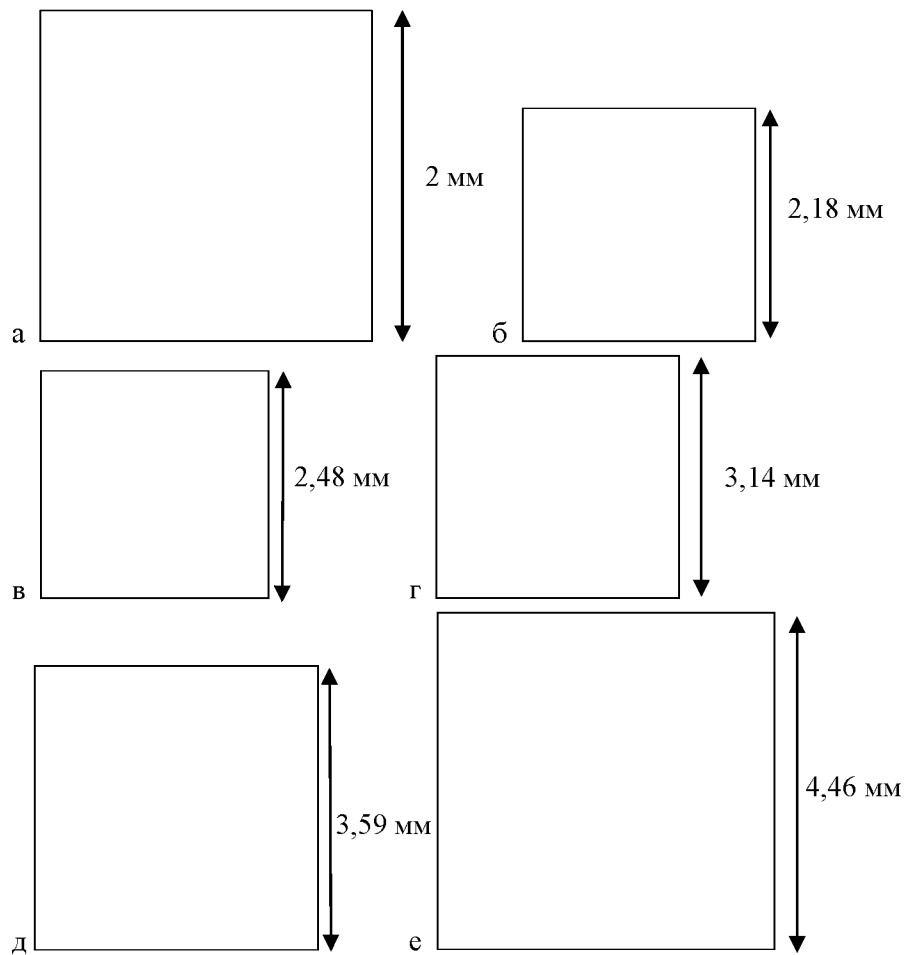


Рис. 19. Результат моделирования: фаза ДОЭ (а), формирующего двухмодовый пучок ГЛ и поперечные распределения интенсивности пучка на разных расстояниях z : 215 мм (б), 245 мм (в), 310 мм (г), 355 мм (д), 440 мм (е)

Условие вращения (129) для двух слагаемых очевидно выполняется: $B = 14$. На расстоянии $z_1=78$ мм пучок делает первый оборот. Всего пучок сделает $N=B/4=3,5$ оборотов.

На рис. 19б-е показаны полутоновые распределения поперечной интенсивности (негатив), сформированного ДОЭ (рис. 19а) и вычисленные

с помощью преобразования Френеля на расстояниях: $z=215$ мм (19б), $z=245$ мм (19в), $z=310$ мм (19г), $z=355$ мм (19д) и $z=440$ мм (19е). Радиус ДОЭ $R = 1$ мм, число пикселей вдоль радиуса – 256. Перетяжка гауссового пучка при $z=0$ равна $\sigma_0=0,18$ мм.

Однако изготовление полутонного фазового ДОЭ с помощью литографии трудная задача. Поэтому можно выбрать более простой путь: изготовление бинарного фазового ДОЭ. Если рассчитанную по алгоритму (99)-(103) фазу $S(r, \varphi)$ проквантовать по двум уровням 0 и π , то получившийся бинарный фазовый ДОЭ не будет генерировать вращающийся пучок. Чтобы сохранить эффект вращения, перед процедурой квантования нужно добавить к фазе $S(r, \varphi)$ «слагаемое призмы»:

$$\hat{S}(r, \varphi) = S(r, \varphi) + 2\pi \nu r \cos \varphi. \quad (139)$$

На рис. 20а показана бинарная фаза, которая получена из полутонной фазы (рис. 19а) с помощью (139) и последующего квантования по двум уровням 0 и π . Несущая частота $\nu = 10$ мм⁻¹.

На рис. 20б–е показаны полутонные распределения поперечной интенсивности (негатив), сформированные бинарным фазовым ДОЭ (рис. 20а) и вычисленные с помощью преобразования Френеля на плоскостях: $z=215$ мм (20б), $z=245$ мм (20в), $z=310$ мм (20г), $z=355$ мм (20д) и $z=440$ мм (20е).

Из рис. 20 видно, что правый пучок вращается в ту же сторону, что и пучок на рис. 19, а левый – в противоположную. Если бы в (139) мы добавили «слагаемое призмы» с отрицательным знаком, то вращение этих пучков (рис. 20) сменилось бы на противоположное. Более 80% всей световой энергии идет на формирование этих двух пучков. Видно также, что в таком способе кодирования фазы не появляется нулевой порядок, а появляются ± 1 порядки дифракции. Это следует из функционального ряда Гудмена-Сильвестри [49]:

$$\begin{aligned} \exp[i\hat{S}_M(r, \varphi)] &= \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \text{sinc}\left[\pi\left(m + \frac{1}{M}\right)\right] \exp[i(Mm+1) \cdot \hat{S}(r, \varphi)], \end{aligned} \quad (140)$$

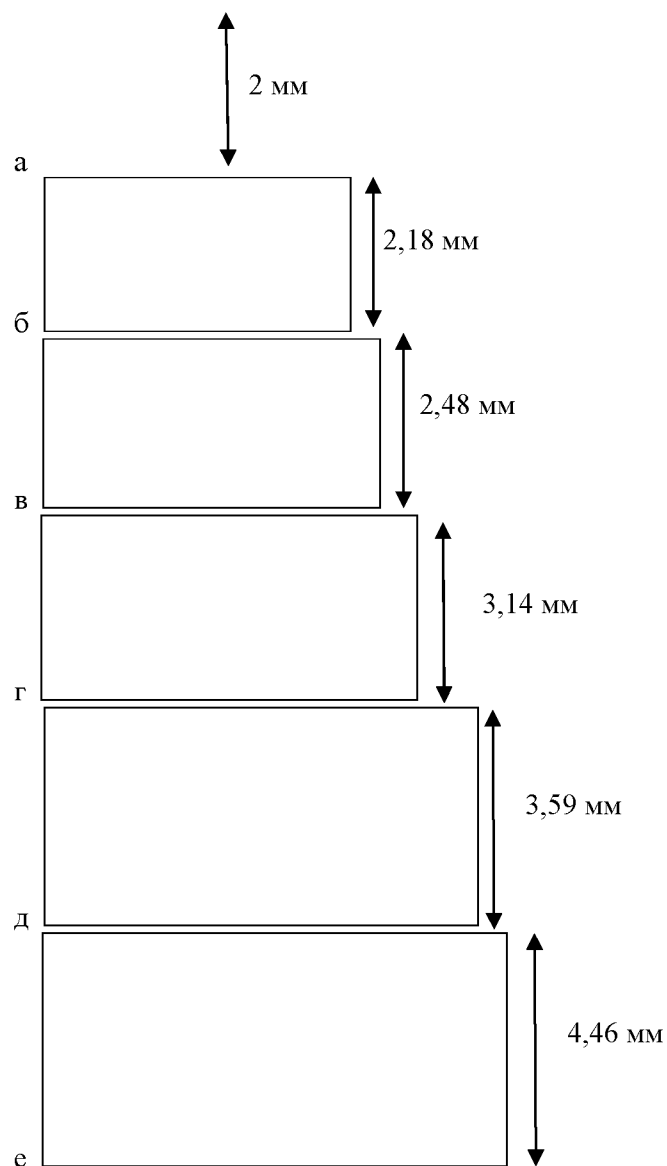


Рис. 20. Результат моделирования: бинарная фаза ДОЭ (а) и распределения интенсивности в поперечном сечении пучков на разных расстояниях z : 215 мм (б), 245 мм (в), 310 мм (г), 355 мм (д), 440 мм (е)

где $\hat{S}(r, \varphi)$ – полутонная фаза из (139), $\hat{S}_M(r, \varphi)$ – квантованная по M уровням фаза ДОЭ.

В нашем случае $M=2$. Тогда вместо (140) получим:

$$\begin{aligned} \exp[i\hat{S}_2(r, \varphi)] &= \sum_{m=0}^{\infty} \text{sinc}\left[\pi\left(m + \frac{1}{2}\right)\right] \exp[i(2m+1) \cdot \hat{S}(r, \varphi)] = \\ &= \left(\frac{2}{\pi}\right) \exp[iS(r, \varphi) + i2\pi v r \cos \varphi] + \\ &+ \left(\frac{2}{\pi}\right) \exp[-iS(r, \varphi) - i2\pi v r \cos \varphi] - \\ &- \left(\frac{2}{3\pi}\right) \exp[3iS(r, \varphi) + i6\pi v r \cos \varphi] - \\ &- \left(\frac{2}{3\pi}\right) \exp[-3iS(r, \varphi) - i6\pi v r \cos \varphi] + \dots \end{aligned} \quad (141)$$

Дополнительные порядки дифракции, которые появляются в соответствии с уравнением (141) при дифракции плоской волны на бинарном фазовом ДОЭ, не показаны на рис. 20б-е. Показаны только ± 1 порядки, которые соответствуют двум первым слагаемым в (141), эффективность каждого из которых равна $4/\pi^2 = 40,5\%$.

С помощью процедуры, описанной в разделе 4, был изготовлен ДОЭ с бинарной фазой, аналогичной фазе на рис. 20а. Этот ДОЭ освещался коллимированным пучком He-Ne лазера с круговой апертурой. Поперечное распределение интенсивности регистрировалось на различных расстояниях с помощью ПЗС-камеры: с окном $6,6 \times 4,78$ мм и числом пикселей 768×567 .

На рис. 21а показано полученное экспериментальное распределение интенсивности на расстоянии $z=110$ мм от ДОЭ. Видно отсутствие нулевого порядка и наличие ± 1 порядков дифракции. Далее на камеру регистрировался один левый порядок дифракции. На рис. 21б-е показаны зарегистрированные распределения интенсивности в -1 порядке на расстояниях: $z=215$ мм (21б), $z=245$ мм (21в), $z=310$ мм (21г), $z=355$ мм (21д) и $z=440$ мм (21е).

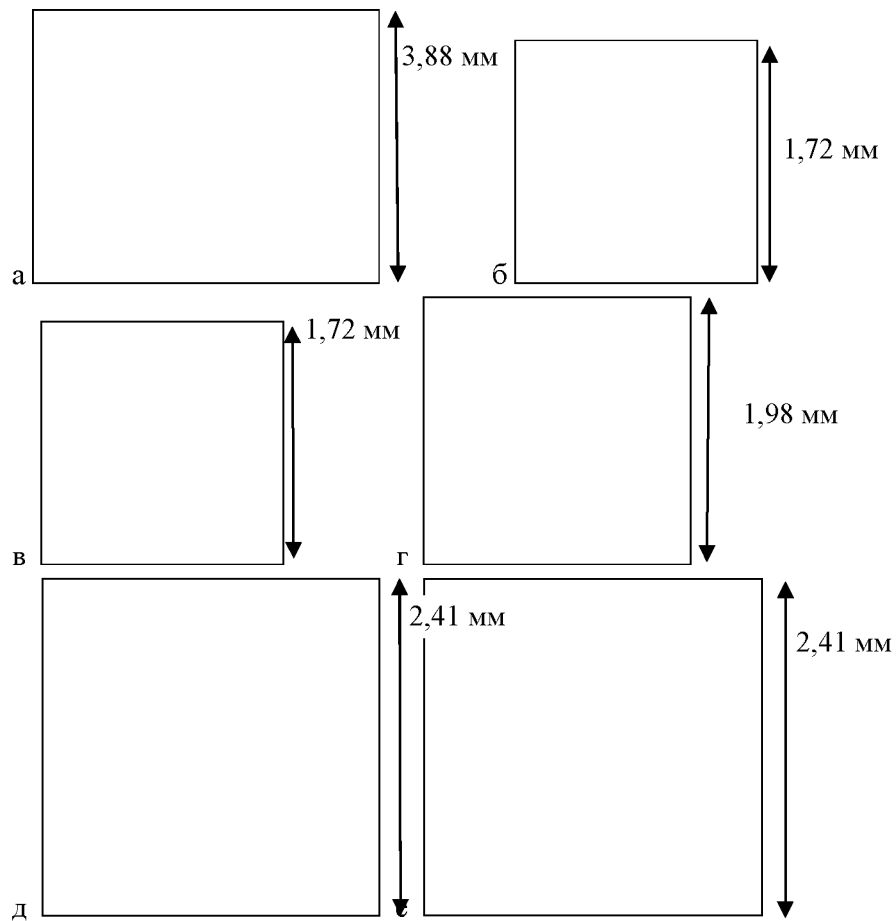


Рис. 21. Эксперимент: распределения интенсивности
в поперечном сечении пучка на разных расстояниях z :
110 мм (а), 215 мм (б), 245 мм (в), 310 мм (г), 355 мм (д), 440 мм (е)

Из сравнения рис. 19б-е, рис. 20б-е и 21б-е видно вращение поперечного сечения лазерного пучка и хорошее согласие теории и эксперимента.

Пример 14

На рис. 22 и 23 показаны результаты численного и натурального эксперимента для случая распространения другого двухмодового пучка ГЛ с номерами (n, m) : $(1, -1)$ и $(16, 2)$.

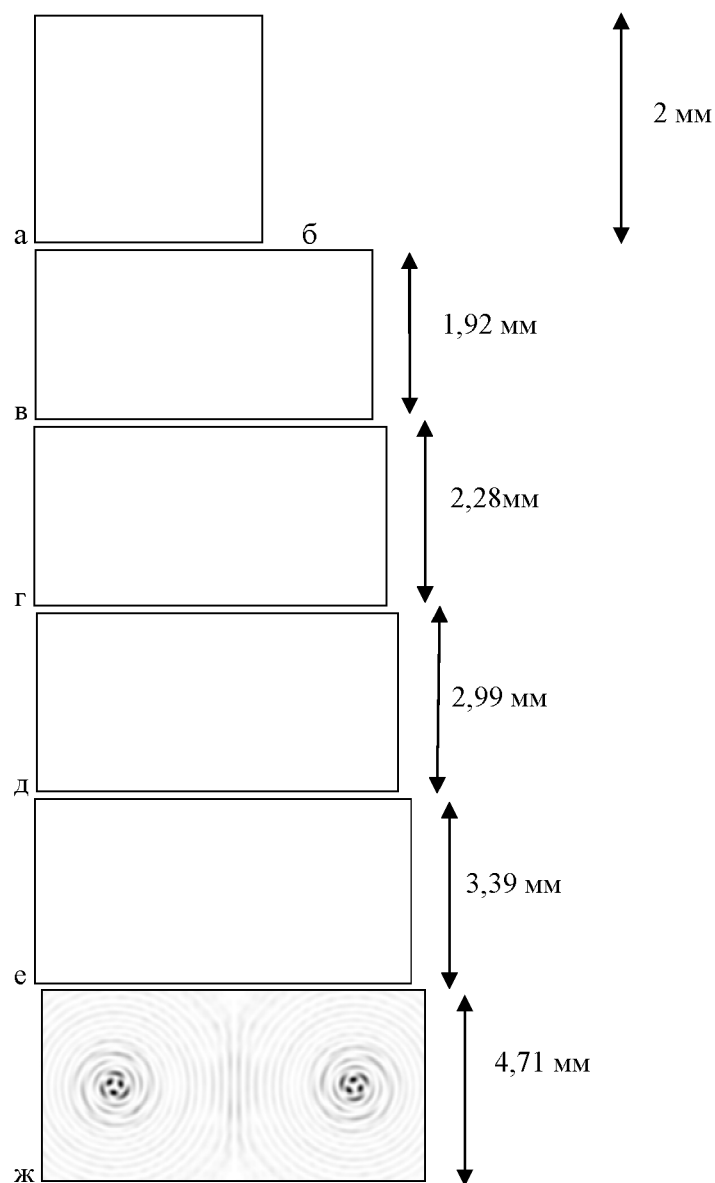


Рис. 22. Результат моделирования: полутонная (а) и бинарная с несущей частотой (б) фазы ДОЭ, формирующего двухмодовые пучки ГЛ; распределения интенсивности поперечного сечения пучков на разных расстояниях z : 190 мм (в), 225 мм (г), 295 мм (д), 335 мм (е), 465 мм (ж)

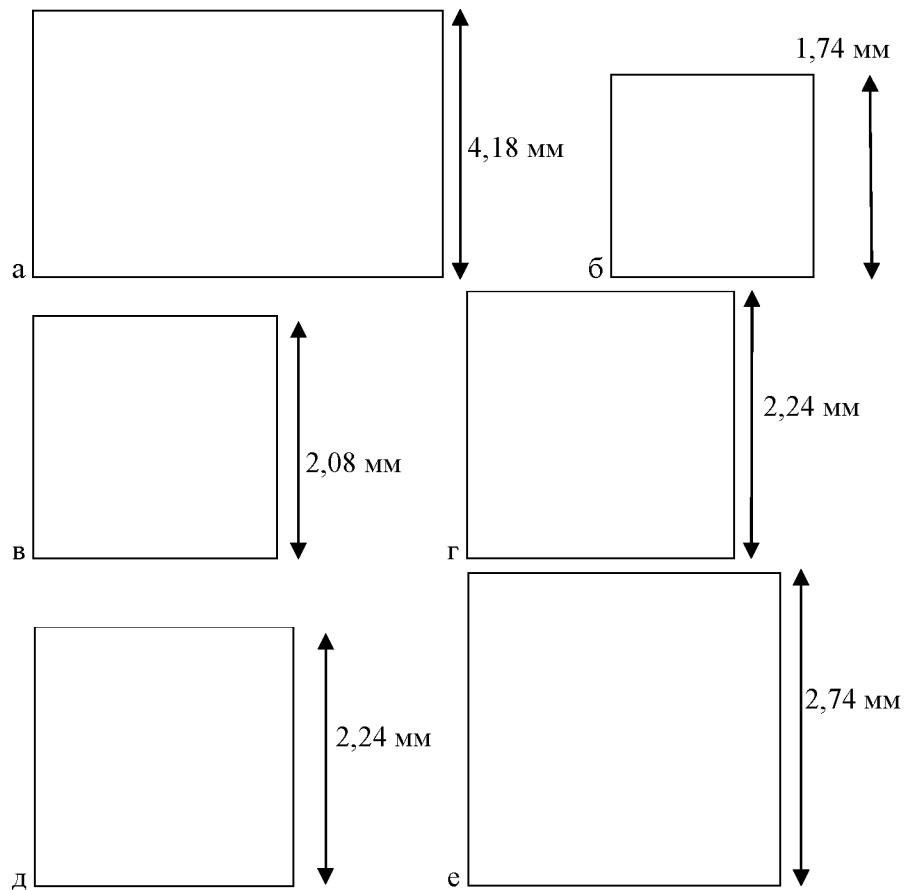


Рис. 23. Эксперимент: распределения интенсивности
в поперечном сечении пучков на разных расстояниях z :
167 мм (а), 190 мм (б), 225 мм (в), 295 мм (г), 335 мм (д), 465 мм (е)

На рис. 22а показана полутонная фаза ДОЭ, полученная за две итерации по алгоритму (159), (160). На рис. 22б показана бинарная фаза, полученная из полутонной фазы (рис. 22а) с помощью (139) и квантования по двум уровням 0 и π . На рис. 22в–ж показаны вычисленные с помощью преобразования Френеля поперечные распределения интенсивности светового поля (негатив), сформированного бинарным фазовым ДОЭ (рис. 22б) на расстояниях: $z = 190$ мм (22в), $z = 225$ мм (22г), $z = 295$ мм (22д), $z = 335$ мм (22е) и $z = 465$ мм (22ж). Радиус ДОЭ

$R = 1$ мм, число пикселей вдоль радиуса – 256. Перетяжка гауссового пучка при $z = 0$ равна $\sigma_0 = 0,17$ мм.

На рис. 23а показано зарегистрированное ПЗС-камерой распределение интенсивности светового поля, сформированного бинарным фазовым ДОЭ, изготовленным по описанной выше технологии, на расстоянии $z = 167$ мм. На рис. 23б–е показаны поперечные распределения интенсивности только в правом пучке (рис. 23а) на расстояниях: $z = 190$ мм (23б), $z = 225$ мм (23в), $z = 295$ мм (23г), $z = 335$ мм (23д) и $z = 465$ мм (23е).

Из сравнения рисунков 22 и 23 также хорошо видно согласие теории и эксперимента и наличие эффекта вращения пучка. Световое кольцо на рис. 21а и 23а появляется из-за того, что диаметр апертуры освещающего лазерного пучка был больше, чем диаметр ДОЭ: диаметр ДОЭ – 2 мм, диаметр апертуры – 3 мм. Большой размер освещающего пучка был выбран специально, чтобы создать нулевой порядок, интерферирующий на близких расстояниях с расходящимися пучками. На рис. 21а и 23а показана картина интерференции недифрагированной части пучка с ± 1 -ми порядками дифракции: видны смещения полос на полпериода при переходе от кольца к кольцу в сечении модовых пучков.

8. ОБОБЩЕННЫЕ ЭРМИТОВЫ СВЕТОВЫЕ ПУЧКИ В СВОБОДНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Интерес к эрмитовым пучкам или, в частности, модам Гаусса-Эрмита (ГЭ), обусловлен тем, что в свободном пространстве они распространяются без изменения своей структуры, изменяясь только масштабно, а в световых волокнах с параболическим профилем показателя преломления они распространяются и без изменения масштаба.

В работах [60, 61] приведены разные аналитические выражения для мод ГЭ. Это послужило толчком к тому, чтобы выяснить степень различия и сходства двух разных форм эрмитовых пучков. Оказалось, что оба типа пучков являются частными случаями более общих модовых эрмитовых пучков.

Известны итеративные алгоритмы [50, 51, 53] для расчета ДОЭ, генерирующего одномодовый пучок с использованием вспомогательной области или на основе аппроксимации функции пропускания транспаранта конечной суммой ортогональных мод.

В данном разделе показано, что с энергетической точки зрения оптимальным ДОЭ, формирующим одномодовый эрмитов пучок является транспарант, функция пропускания которого равна знаковой функции соответствующего многочлена Эрмита.

Приведены также аналитические выражения, описывающие дифракцию Фраунгофера на таких фазовых элементах.

Известно, что частным решением параболического уравнения распространения

$$\left(2ik \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) E(x, y, z) = 0, \quad (142)$$

где k – волновое число света, (x, y) – поперечные и z – продольная координаты в пространстве, $E(x, y, z)$ – медленно меняющаяся вдоль z комплексная амплитуда светового поля, являются модовые функции вида [60]:

$$E_{m,n}^{(1)}(x, y, z) = \left[\frac{\omega_0}{\omega(z)} \right]^{m+n+2} \exp \left[-\frac{x^2 + y^2}{\omega^2(z)} \right] H_n \left(\frac{x}{\omega(z)} \right) H_m \left(\frac{y}{\omega(z)} \right),$$

где

$$\omega(z) = \omega_0 \left(1 + \frac{iz}{z_0} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (144)$$

$$z_0 = \frac{k\omega_0^2}{2}, \quad (145)$$

$H_n(x)$ – многочлен Эрмита, ω_0 – минимальный радиус пучка при $z = 0$, z_0 – конфокальный параметр.

Функция $E_{m,n}^{(1)}$ при изменении расстояния z изменяется только масштабно, сохраняя свой вид. Поэтому решение (143) уравнения (142) можно назвать световой эрмитовой модой. Заметим, что моды (143) взаимно не ортогональны, что следует из справочного интеграла [54]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2x^2} H_n(x) H_m(x) dx = (-1)^{\frac{m+n}{2}} \frac{m+n-1}{2} \Gamma\left(\frac{m+n+1}{2}\right), \quad (146)$$

где $\Gamma(x)$ – гамма-функция.

С другой стороны, известны взаимно ортогональные моды ГЭ, которые также являются частными решениями уравнения (142) [61]:

$$E_{m,n}^{(2)}(x, y, z) = \frac{\omega_0}{a(z)} \exp[i(n+m+1)\eta(z)] \times \\ \times \exp\left[\frac{-ik(x^2+y^2)}{2R(z)}\right] \exp\left[-\frac{x^2+y^2}{a^2(z)}\right] H_n\left(\frac{\sqrt{2}x}{a(z)}\right) H_m\left(\frac{\sqrt{2}y}{a(z)}\right), \quad (147)$$

где

$$a(z) = \omega_0 \left(1 + \frac{z^2}{z_0^2}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (148)$$

$$\eta(z) = \arctg\left(\frac{z}{z_0}\right), \quad (149)$$

$$R(z) = z \left(1 + \frac{z_0^2}{z^2}\right), \quad (150)$$

$R(z)$ – радиус кривизны модового пучка.

Функции $E_{m,n}^{(1)}$ и $E_{m,n}^{(2)}$ описывают разные световые пучки, так как порождаются разными граничными условиями. При $z = 0$ вместо (143) и (147) получим

$$\begin{aligned}
E_{m,n}^{(j)}(x, y, 0) = \\
= \exp\left[-\frac{x^2 + y^2}{\omega_0}\right] H_n\left(\frac{\theta_j x}{\omega_0}\right) H_m\left(\frac{\theta_j y}{\omega_0}\right), \quad j = 1, 2,
\end{aligned} \tag{151}$$

$$\text{где } \theta_j = \begin{cases} 1, & j = 1, \\ \sqrt{2}, & j = 2. \end{cases}$$

Эти два типа модовых эрмитовых пучков отличаются также разным видом дифракции Фраунгофера. Световое поле $E_{m,n}^{(2)}$ является собственной функцией оператора Фурье [18]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(\sqrt{2}x) e^{-i2x\xi} dx = \sqrt{\pi}(-i)^n e^{-\xi^2} H_n(\sqrt{2}\xi). \tag{152}$$

Это свойство мод ГЭ сохранять свою структуру не только в ближней зоне дифракции Френеля, но и в дальней зоне Фраунгофера (или в фокальной плоскости линзы), используется для эффективного ввода лазерного излучения в световые волокна [50].

Световое поле $E_{m,n}^{(1)}$, сохраняя свою структуру в зоне дифракции Френеля, в дальней зоне «вырождается» в поле с нулевой интенсивностью в центре. Это следует из выражения:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) e^{-i2x\xi} dx = \sqrt{\pi}(-i)^n e^{-\xi^2} (2\xi)^n. \tag{153}$$

Можно показать, что функции $E_{m,n}^{(1)}$ и $E_{m,n}^{(2)}$ из уравнений (143) и (147) являются частным случаем более общего решения уравнения (142), которое имеет вид:

$$\begin{aligned}
E_{m,n}^{(3)}(x, y, z) = \\
= A_{m,n}(z) \exp\left[-B(z)(x^2 + y^2)\right] H_n\left(\frac{x}{C(z)}\right) H_m\left(\frac{y}{C(z)}\right),
\end{aligned} \tag{154}$$

где

$$A_{m,n}(z) = \left(1 + \frac{i\gamma z}{z_0}\right)^{\frac{m+n}{2}} \left(1 + \frac{iz}{z_0}\right)^{-\frac{m+n}{2}-1}, \quad (155)$$

$$B(z) = \left[\omega_0^2 \varepsilon^2 \left(1 + \frac{iz}{z_0}\right) \left(1 + \frac{i\gamma z}{z_0}\right) \right]^{-1} + k\gamma \left[2z_0 \left(1 + \frac{i\gamma z}{z_0}\right) \right]^{-1}, \quad (156)$$

$$C(z) = \omega_0 \varepsilon \left[\left(1 + \frac{iz}{z_0}\right) \left(1 + \frac{i\gamma z}{z_0}\right) \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (157)$$

$\gamma = 1 - \varepsilon^{-2}$, ε – модовый параметр. При $\varepsilon=1$ решение (154) переходит в решение $E_{m,n}^{(1)}$, а при $\varepsilon = (\sqrt{2})^{-1}$ решение $E_{m,n}^{(3)}$ переходит в $E_{m,n}^{(2)}$.

Обобщенные эрмитовы световые пучки (154) формируются с помощью комплексной амплитуды при $z=0$ вида

$$\begin{aligned} E_{m,n}^{(3)}(x, y, 0) &= \\ &= \exp\left[-\frac{x^2 + y^2}{\omega_0^2}\right] H_n\left(\frac{x}{\omega_0 \varepsilon}\right) H_m\left(\frac{y}{\omega_0 \varepsilon}\right). \end{aligned} \quad (158)$$

Выражение для комплексной амплитуды светового пучка (154) в дальней зоне следует из соотношения:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) e^{-i2x\xi} dx &= \\ &= \sqrt{\pi} (-i)^n (-\gamma)^{\frac{n}{2}} e^{-\xi^2} H_n\left(\frac{\xi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right), \end{aligned} \quad (159)$$

где $\varepsilon < 1$. При $\varepsilon = (\sqrt{2})^{-1}$ (159) переходит в (152). При $\varepsilon=1$ используя асимптотику $H_n(\omega\xi) \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} 2^n (\omega\xi)^n$, получаем:

$$(-\gamma)^{\frac{n}{2}} H_n\left(\frac{\xi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right) = (2\xi)^n. \text{ То есть (159) переходит в (153).}$$

Для энергетически эффективного формирования эрмитовых пучков обоих типов предлагается в плоскости $z = 0$ располагать фазовый ДОО с функцией пропускания

$$\tau_{m,n}(x, y) = \text{sgn}[H_n(x)H_m(y)] = \text{sgn} H_n(x) \text{sgn} H_m(y), \quad (160)$$

где $\text{sgn}(x)$ – знаковая функция.

Задача поиска оптимального фазового фильтра, формирующего эрмитовы пучки сходна с аналогичной задачей для формирования бес-селевых пучков [62].

Покажем в одномерном случае, что транспарант (160) эффективно формирует эрмитовый пучок n -го порядка. Для этого разложим функцию $\tau_n(x)$ по ортогональным многочленам:

$$\text{sgn} H_n(x) = \sum_{p=0}^{\infty} C_p^{(n)} H_p(x), \quad (161)$$

где

$$C_p^{(n)} = A \int_{-\infty}^{\infty} \text{sgn}[H_n(x)] e^{-x^2} H_p(x) dx, \quad (162)$$

$$A = \left(2^n n! \sqrt{\pi}\right)^{-1}.$$

Для четных номеров $n = 2l$ нули многочлена $H_{2l}(x_{k,l}) = 0$, будут расположены симметрично относительно точки $x = 0$: $x_{-k,l} = -x_{k,l}$. Тогда интеграл в уравнении (162) можно представить в виде суммы интегралов:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sgn}[H_{2l}(x)] e^{-x^2} H_p(x) dx = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_p(x) dx + 2(-1)^l \sum_{k=1}^l (-1)^{k-1} \int_{-x_{k,l}}^{x_{k,l}} e^{-x^2} H_p(x) dx. \end{aligned} \quad (163)$$

С учетом справочного интеграла [54]

$$\int_0^{\xi} e^{-x^2} H_n(x) dx = H_{n-1}(0) - e^{-\xi^2} H_{n-1}(\xi), \quad (164)$$

вместо (163) получим следующее выражение для коэффициентов разложения (162):

$$C_{2s}^{(2l)} = \left[2^{2s-1} (2s)! \sqrt{\pi} \right]^{-1} (-1)^l \sum_{k=1}^l (-1)^k e^{-x_{k,l}^2} H_{2s-1}(x_{k,l}). \quad (165)$$

При этом нечетные коэффициенты равны нулю.

Аналогично можно показать, что для нечетных многочленов Эрмита $n = 2l+1$ имеет место следующее выражение для коэффициентов разложения (162):

$$C_{2s+1}^{(2l+1)} = \left[2^{2s} (2s+1)! \sqrt{\pi} \right]^{-1} (-1)^l \left[H_{2s}(0) + 2 \sum_{k=1}^l (-1)^k e^{-x_{k,l}^2} H_{2s}(x_{k,l}) \right], \quad (166)$$

где $H_{2l+1}(x_{k,l}) = 0$, $H_{2s}(0) = (-1)^s \cdot 2^s \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \dots$, четные коэффициенты равны нулю.

Таким образом, освещая ДОЭ с пропусканием (160) коллимированным гауссовым пучком с амплитудой $\exp[-(x^2+y^2)/2]$, получим поле за элементом в виде суперпозиции эрмитовых пучков, один из которых будет энергетически преобладающим с эффективностью около 70%:

$$e^{-x^2/2} \operatorname{sgn}[H_n(x)] = \sum_{p=0}^{\infty} C_p^{(n)} \left(e^{-x^2/2} H_p(x) \right). \quad (167)$$

Для расчета дифракции Фраунгофера плоской волны на участке $[-a, a]$ оптического элемента с пропусканием $\operatorname{sgn}[H_n(x)]$, где a должно быть больше максимального корня многочлена $H_n(x)$, аналогично [63], удобно использовать представления вида ($n = 2l$):

$$\operatorname{sgn}[H_{2l}(x)] = \operatorname{rect}\left[\frac{x}{a}\right] + 2 \sum_{k=1}^l (-1)^k e^{-x_{k,l}^2} \operatorname{rect}\left[\frac{x}{x_{k,l}}\right], \quad (168)$$

где

$$H_{2l}(x_{k,l}) = 0, \quad \text{rect}\left(\frac{x}{x_0}\right) = \begin{cases} 1, & |x| \leq x_0, \\ 0, & |x| > x_0. \end{cases}$$

Тогда преобразование Фурье от выражения (168) будет иметь вид:

$$\begin{aligned} P_{2l}(\xi) &= \mathfrak{F}\{\text{sgn}[H_{2l}(x)]\} = \\ &= 2a \text{sinc}(a\xi) + 2(-1)^l \sum_{k=1}^l (-1)^k 2x_{k,l} \text{sinc}(x_{k,l}\xi), \end{aligned} \quad (169)$$

где

$$\mathfrak{F}\{f(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-ix\xi) dx, \quad \text{sinc}(x) = \sin(x)/x. \quad (170)$$

Параметр диафрагмы a выбирается из энергетических соображений.

Аналогично получаются выражения для нечетных полиномов Эрмита:

$$\begin{aligned} \text{sgn}[H_{2l+1}(x)] &= \\ &= \left[\text{rect}\left(\frac{x}{a}\right) + 2(-1)^l \sum_{k=1}^l (-1)^{k-1} \text{rect}\left(\frac{x}{x_{k,l}}\right) \right] \text{sgn } x, \end{aligned} \quad (171)$$

$$\begin{aligned} P_{2l+1}(\xi) &= \mathfrak{F}\{\text{sgn}[H_{2l+1}(x)]\} = \\ &= -i \left\{ 2a \text{cosc}(a\xi) + 2(-1)^l \sum_{k=1}^l (-1)^k 2x_{k,l} \text{cosc}(x_{k,l}\xi) \right\}, \end{aligned} \quad (172)$$

$$\text{где } \text{cosc}(x) = \frac{1 - \cos x}{x}.$$

Пример 15

Пусть требуется сформировать первую моду ГЭ при $n = 1$, $m = 0$. Для этого в плоскости $z = 0$, следует расположить транспарант с пропусканием $H_1(x) \exp(-x^2/2)$. Тогда в фокальной плоскости линзы согласно

уравнению (152) сформируется световое поле с комплексной амплитудой, пропорциональной выражению

$$-i\sqrt{\pi}H_1(\xi)\exp(-\xi^2/2),$$

где $H_1(\xi) = 2\xi$.

Если в плоскости $z=0$ разместить энергетически более выгодный фазовый элемент с пропусканием $\text{sgn}[H_1(x)] = \text{sgn}(x)$ [64], то согласно уравнению (166) в пространстве за фильтром сформируется суперпозиция световых мод:

$$\begin{aligned}\text{sgn } x &= \sum_{s=0}^{\infty} C_{2s+1}^{(1)} H_{2s+1}(x) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(H_1(x) - \frac{1}{12} H_3(x) + \frac{1}{160} H_5(x) - \dots \right).\end{aligned}\quad (173)$$

Освещая такой фазовый элемент коллимированным гауссовым пучком, получим, что согласно уравнению (173) в частотной плоскости сформируется световое поле с амплитудой, пропорциональной выражению

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \text{sgn}(x) e^{-x^2/2} e^{-ix\xi} dx &= \sqrt{\pi} \sum_{s=0}^{\infty} C_{2s+1}^{(1)} (-i)^{2s+1} e^{-\xi^2/2} H_{2s+1}(\xi) = \\ &= -ie^{-\xi^2/2} \left(H_1(\xi) - \frac{1}{12} H_3(\xi) + \frac{i}{160} H_5(\xi) - \dots \right).\end{aligned}\quad (174)$$

Отношение энергий световых пучков, описываемых вторым и первым слагаемыми в уравнении (174) равно:

$$\frac{\int_{-\infty}^{\infty} H_3^2(\xi) e^{-\xi^2} d\xi}{(12)^2 \int_{-\infty}^{\infty} H_1^2(\xi) e^{-\xi^2} d\xi} \approx 0,167.\quad (175)$$

Таким образом, в первом слагаемом суммы (174), описывающем первую моду ГЭ, содержится более 80% всей энергии светового пучка.

Еще более эффективным способом формирования первой эрмитовой моды оказывается способ освещения фазового фильтра с пропусканием

$$\tau_1(x) = \text{sgn}[H_1(x)] \text{rect}\left(\frac{x}{a}\right) \quad (176)$$

не гауссовым пучком, а плоской световой волной. В этом случае в фокальной плоскости линзы сформируется световое поле с амплитудой, пропорциональной выражению

$$\int_{-a}^a \text{sgn}(x) e^{-ix\xi} dx = -2a i \text{cosc}(a\xi), \quad (177)$$

где функция $\text{cosc}(x)$ определена в уравнении (172).

Взаимная корреляция светового поля (177) и первой эрмитовой моды оценивается выражением

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} [2a \text{cosc}(a\xi)] H_1(\xi) e^{-\xi^2/2} d\xi \right|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} |2a \text{cosc}(a\xi)|^2 d\xi \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |H_1(\xi) e^{-\xi^2/2}|^2 d\xi} = \\ &= \frac{4}{a\sqrt{\pi}} \left(1 - e^{-a^2/2}\right)^2. \end{aligned} \quad (178)$$

Размер апертуры фазового элемента (176) $[-a, a]$ выбирается из условия максимума выражения (178), который достигается при $a = 2,2$. При этом корреляция (178) будет равна $\eta = 0,85$. Таким образом, первая мода ГЭ содержится в световом поле (177) с эффективностью около 85%.

При численном моделировании использовались следующие параметры: размерность массивов $N=256$, область изменения аргумента $x \in [-8 \text{ мм}, 8 \text{ мм}]$, длина волны $\lambda = 0,63 \text{ мкм}$, фокусное расстояние $f = 100 \text{ мм}$.

На рис. 24а показан эрмитовый пучок

Рис. 24. Результат моделирования: мода $E_3^{(1)}(x)$ (а), квадрат модуля (б) и фаза (в) ее Фурье-спектра

$$E_3^{(1)}(x) = H_3(x) \exp(-x^2). \quad (179)$$

На рис. 24б,в показаны соответственно интенсивность (квадрат модуля) и фаза (аргумент) Фурье-преобразования от функции (179). Для сравнения на рис. 25 показан результат дифракции Фраунгофера для второго типа эрмитовых пучков. На рис. 25а показан сам пучок

$$E_3^{(2)}(x) = H_3(x) \exp(-x^2/2), \quad (180)$$

а на рис. 25б,в показаны интенсивность и фаза его Фурье-образа, соответственно.

На рис. 26а показан результат бинаризации эрмитова пучка (180): кривая 1 – это функция

$$\tau_3(x) = \text{sgn}[H_3(x)], \quad (181)$$

а кривая 2 – это функция (180). На рис. 26б, в показаны, соответственно, интенсивность и фаза Фурье-преобразования от бинарной функции (181) при $x \in [-3 \text{ мм}, 3 \text{ мм}]$.

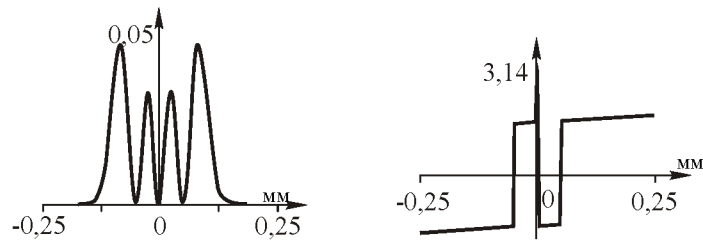


Рис. 25. Результат моделирования: мода $E_3^{(2)}(x)$ (а), квадрат модуля (б) и фаза (в) ее Фурье-спектра

MM

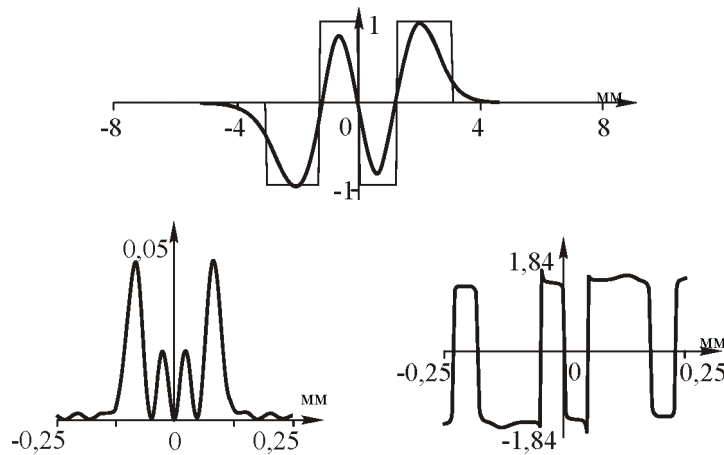


Рис. 26. Результат моделирования: бинарная фаза ДОЭ (а, кривая 1), согласованная с модой $E_3^{(2)}(x)$ (а, кривая 2), интенсивность (б) и фаза (в) Фурье-спектра от ДОЭ

MM

Диапазон изменения аргумента x функции (181) выбран таким образом, чтобы корреляция η , аналогичная определенной в (178), была максимальной. В этом случае корреляция между функциями интенсивности, рис. 25б и рис. 26б, составляет 0,84. Поэтому можно заклю-

читать, что 84% световой энергии плоского пучка, освещающего фазовый элемент (181), будет идти на формирование эрмитова пучка (180).

На рис. 27 показана зависимость взаимной корреляции η от полудлины отрезка $[-a, a]$ для эрмитова пучка третьего порядка $n = 3$. В табл. 3 приведены оптимальные размеры отрезков $[-a, a]$, на которых заданы бинарные функции $\text{sgn}[H_n(x)]$, $n = \overline{1, 7}$ и значения взаимной корреляции между Фурье-образами от функций (180) и (181) при $n = \overline{1, 7}$.

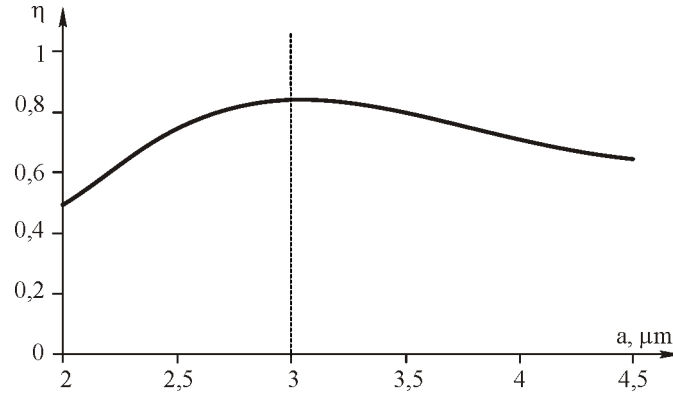


Рис. 27. Зависимость взаимной корреляции (178) от полудлины апертуры для эрмитова пучка третьего порядка

Таблица 3

Оптимальные размеры апертуры a для знаковых функций и значения взаимной корреляции η

Номер моды, n	1	2	3	4	5	6	7
Оптимальный размер апертуры, a (мм)	2,1	2,6	3,0	3,4	3,7	4	4,2
Корреляция, η	0,86	0,84	0,84	0,82	0,82	0,81	0,81

Из таблицы 3. видно, что с ростом номера эрмитова пучка энергетическая эффективность η медленно спадает с 86% до 81% ($n \leq 7$).

9. ФОРМИРОВАНИЕ МОД ГАУССА – ЭРМИТА С ПОМОЩЬЮ БИНАРНЫХ ДОО

Известны различные методы расчета ДОО, формирующих одно- или многомодовые пучки ГЭ. Одни из них позволяют добиваться высокой эффективности создаваемого пучка за счет не очень точного соблюдения модового состава, другие, наоборот, обеспечивая высокую точность формируемой моды, не позволяют достигнуть желаемой эффективности.

Так, в [65] для формирования лазерной моды ГЭ (1,0) был изготовлен и исследован экспериментально фазовый 16-уровневый ДОО. Он был изготовлен по технологии электронной литографии с помощью травления полиметилметакрилата, нанесенного на подложку из кварцевого стекла. Этот элемент был рассчитан с помощью итеративной процедуры, предложенной в [51]. Размерность массива была равна 2048×2048 пикселей. Теоретическая эффективность равнялась 45,5%, а экспериментально измеренная – 37,7%.

В [64, 66] теоретически показано, что для эффективного формирования одномерных мод ГЭ можно использовать фазовые бинарные ДОО, которые получаются с помощью знаковой функции от соответствующего многочлена Эрмита. При освещении такого ДОО плоским пучком света с оптимально подобранной апертурой, в дальней зоне дифракции формируется требуемая мода с эффективностью более 80%.

В данном разделе приведены результаты расчета и экспериментального исследования двухуровневых (бинарных) ДОО, формирующих моды ГЭ с номерами (1,0), (1,1) и (1,2) с теоретической эффективностью более 63,8%. Кроме того, результаты работ [64, 66] обобщаются на двумерный случай формирования мод ГЭ.

С помощью технологии электронной литографии получены несколько фазовых бинарных ДОО, согласованных с модами ГЭ и проведена экспериментальная апробация их работоспособности.

Для эффективного формирования отдельных мод ГЭ предлагается использовать фазовый элемент с функцией пропускания

$$\tau_{m,n}(x,y) = \text{sgn } H_m(x) \text{sgn } H_n(y) \text{rect}\left(\frac{x}{a}\right) \text{rect}\left(\frac{y}{a}\right), \quad (182)$$

где $H_m(x), H_n(y)$ – многочлены Эрмита m -го и n -го порядков,

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases} \quad (183)$$

$$\text{rect}\left(\frac{x}{a}\right) = \begin{cases} 1, & |x| \leq a, \\ 0, & |x| > a. \end{cases} \quad (184)$$

С помощью уравнения (166) можно получить конкретные значения коэффициентов для разложения в ряд (161) для каждой моды ГЭ.

Например, для моды ГЭ (1,1)

$$\text{sgn } H_{1,1}(x,y) = \text{sgn}(x) \cdot \text{sgn}(y), \quad (185)$$

используя представление

$$\text{sgn}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n} (2n+1)n!} H_{2n+1}(x), \quad (186)$$

можно записать

$$\begin{aligned} \text{sgn } H_{1,1}(x,y) &= \frac{1}{\pi} \left(H_1(x) - \frac{1}{12} H_3(x) + \frac{1}{160} H_5(x) - \dots \right) \times \\ &\times \left(H_1(y) - \frac{1}{12} H_3(y) + \frac{1}{160} H_5(y) - \dots \right). \end{aligned} \quad (187)$$

Из уравнения (186) получается, что с эффективностью около 86% бинарный ДОО с пропусканием $\text{sgn } H_1(x)$ сформирует моду ГЭ, пропорциональную многочлену $H_1(x)$.

Для двумерных ДОО с пропусканием (182) эффективность, очевидно, можно оценить как произведение одномерных эффективностей:

$0,86 \times 0,86 \times 100\% = 73,96\%$. Эта оценка подтверждается на основании результатов моделирования.

Таблица 4

Рассчитанные средние ошибки и эффективность (корреляция) при формировании мод ГЭ с помощью бинарных знаковых ДОЭ с квадратной апертурой оптимального размера

ТЕМ (m, n)	(1, 0)	(1, 1)	(1, 2)	(7, 0)
$\delta, \%$	28,8	14,4	30,6	62,4
$\eta, \%$	63,8	72,3	68,5	33,5

В таблице 4 приведены значения среднеквадратичного отклонения δ и эффективности η , рассчитанных по следующим формулам:

$$\delta = \sqrt{\frac{\int_{-b}^b \int_{-b}^b \left\{ \left| \mathfrak{I}[\tau(x, y)] \right|^2 - \left| \Psi_{m,n}(x, y) \right|^2 \right\}^2 dx dy}{\int_{-b}^b \int_{-b}^b \left\{ \left| \Psi_{m,n}(x, y) \right|^2 \right\}^2 dx dy}}, \quad (188)$$

$$\eta = \frac{\left| \int_{-b}^b \int_{-b}^b \mathfrak{I}[\tau(x, y)] \Psi_{m,n}^*(x, y) dx dy \right|^2}{\int_{-b}^b \int_{-b}^b \left| \mathfrak{I}[\tau(x, y)] \right|^2 dx dy \int_{-b}^b \int_{-b}^b \left| \Psi_{m,n}(x, y) \right|^2 dx dy}, \quad (189)$$

где

$$\Psi_{m,n}(x, y) = \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2}\right) H_m(x) H_n(y). \quad (190)$$

Область интегрирования $[-b, b] \times [-b, b]$ в (188) и (189) выбиралась из условия $\left| \Psi_{m,n}(x, y) \right|^2 \leq 10^{-4}$. В (188) и (189) использовано обозначение преобразования Фурье от функции пропускания ДОЭ:

$$\Im[\tau(x, y)] = \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \tau(x, y) \exp\left[-\frac{ik}{f}(ux + vy)\right] dx dy. \quad (191)$$

Однако, на практике часто используют не квадратную, а круглую диафрагму, в этом случае результат получается немного хуже или лучше, но примерно такой же (см. таблицу 5)

Таблица 5

Рассчитанные средние ошибки и эффективность (корреляция) при формировании мод ГЭ с помощью бинарных знаковых ДОЭ с круглой апертурой оптимального размера

ТЕМ (m, n)	(1, 0)	(1, 1)	(1, 2)	(7, 0)
$\delta, \%$	26,9	15,6	31,8	66,9
$\eta, \%$	70,1	69,5	65,4	40,7

Бинарные фазовые ДОЭ, функция пропускания которых удовлетворяет уравнению (182), были изготовлены с помощью низковольтового электронного генератора изображений Leica LION LV1 в Университете Йюенсуу, Финляндия (см. главу 4). На рис. 28 показан увеличенный под микроскопом участок получившегося фазового бинарного ДОЭ.

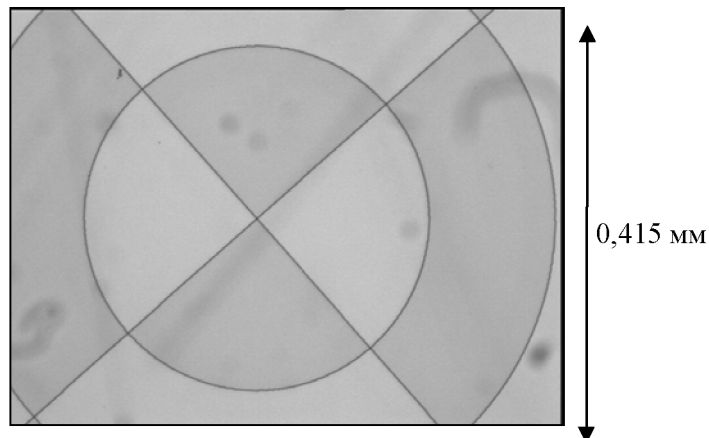


Рис. 28. Вид участка фазового бинарного ДОЭ под микроскопом

Рис. 29. Экспериментальная установка: He-Ne лазер (1), микрообъектив (2), фильтрующая диафрагма (3), коллимирующая линза (4), ограничивающая диафрагма (5), бинарный ДОЭ (6), дополнительная линза для выполнения Фурье-преобразования (7), ПЗС-камера (8), компьютер (9)

Изготовленные по литографической технологии бинарные фазовые ДОЭ исследовались на установке, оптическая схема которой показана на рис. 29. Луч света от He-Ne лазера малой мощности (1) расширялся микрообъективом (2) и фильтровался с помощью малой круглой диафрагмы (3). После коллимирования расходящегося пучка линзой (4), он ограничивался другой круглой диафрагмой (5) радиусом примерно 1,1–1,2 мм. Ограниченный по радиусу плоский пучок попадал затем на бинарный ДОЭ (6).

Распределение интенсивности в ближней зоне Френеля регистрировалось с помощью ПЗС-камеры (8). Приемное окно камеры имело размеры 6,6×4,78 мм, число фотоячеек 768×567. Зарегистрированные картины дифракции запоминались в компьютере (9). Для исследования дифракции Фраунгофера на ДОЭ, в пространство за элементом вводилась линза с фокусным расстоянием 500 мм (7).

Пример 16

На рис. 30-33 показаны результаты исследования для мод ГЭ с номерами (1, 0), (1, 1), (1, 2) и (7, 0), соответственно. На рис. 30а-33а показаны амплитудные бинарные фотошаблоны ДОЭ, ограниченные круглыми апертурами с диаметром 1,2 мм. Фотошаблоны рассчитывались в соответствии с формулой (182). Однако, апертура была круглой и немного больше оптимального размера, что ухудшило результаты (в основном эффективность), которые могли быть получены в оптимальном случае (см. табл. 6).

Таблица 6

Рассчитанные средние ошибки и эффективность
при формировании мод ГЭ с помощью бинарных знаковых ДОЭ
с круглой апертурой немного больше оптимального размера

TEM (m, n)	(1, 0)	(1, 1)	(1, 2)	(7, 0)
$\delta, \%$	24,7	42,7	31,5	64,2
$\eta, \%$	55,6	62,2	59,4	31,7

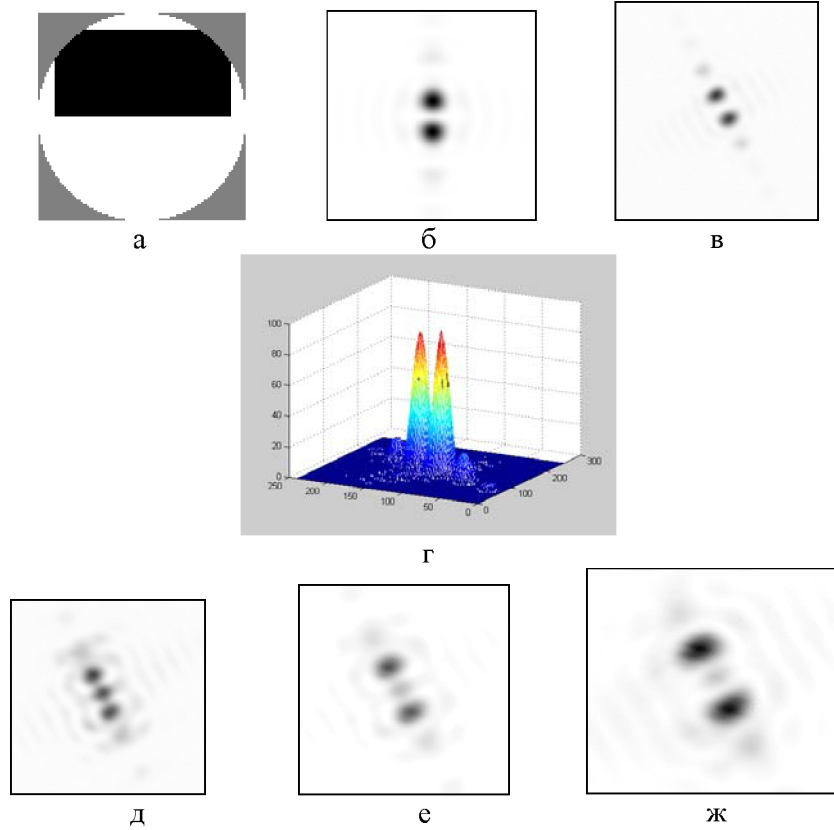


Рис. 30. Результаты численного моделирования и эксперимента для моды ГЭ (1, 0):
фотомаска, ограниченная круглой апертурой освещающего пучка (а);
рассчитанная картина дифракции в дальней зоне (б); экспериментальная
картина дифракции в дальней зоне (в) и ее трехмерное представление (г);
экспериментальные распределения интенсивности
на расстояниях 370 мм (д), 480 мм (е) и 620 мм (ж) от ДОЭ

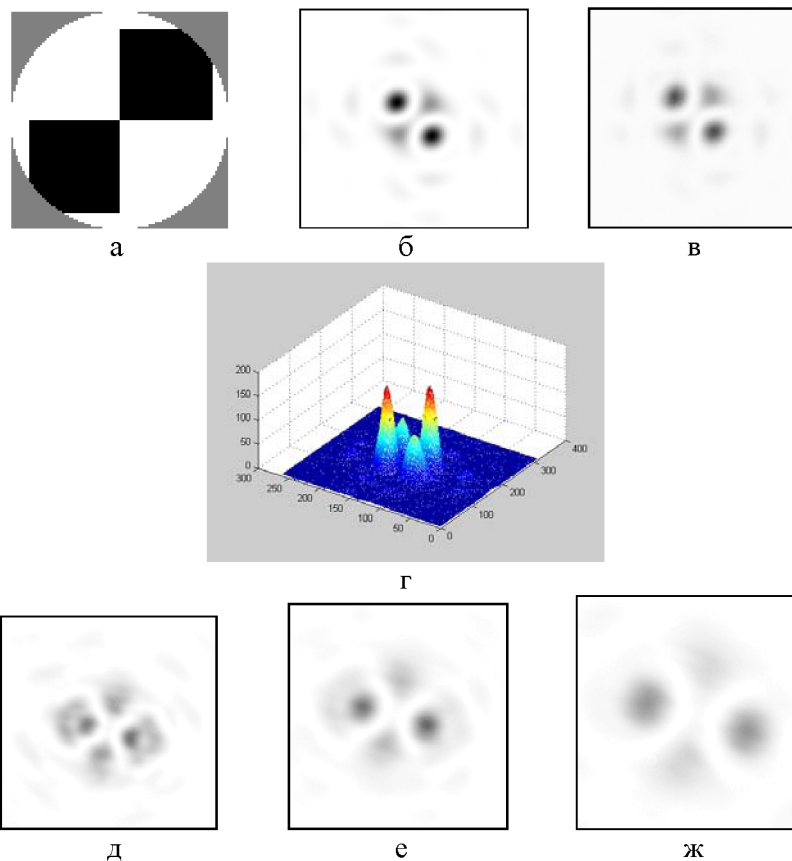


Рис. 31. Результаты численного моделирования и эксперимента для моды ГЭ (1, 1): фотомаска, ограниченная круглой апертурой освещающего пучка (а); рассчитанная картина дифракции в дальней зоне (б); экспериментальная картина дифракции в дальней зоне (в) и ее трехмерное представление (г); экспериментальные распределения интенсивности на расстояниях 340 мм (д), 455 мм (е) и 640 мм (ж) от ДОЭ

На рис. 30б-33б показаны рассчитанные по формуле (190) картины дифракции Фраунгофера на соответствующих фазовых бинарных ДОЭ.

На рис. 30в-33в показаны экспериментальные картины дифракции Фраунгофера (дальняя зона), которые были зарегистрированы в задней фокальной плоскости линзы с фокусным расстоянием 500 мм, дополнительно введенной в оптическую схему (рис. 29, позиция 7).

На рис. 30г-33г показаны трехмерные представления экспериментальных картин дифракции Фраунгофера (рис. 30в-33в). Сравнивая рис. 30б-33б и рис. 30в-33в, можно убедиться, что имеет место хорошее согласование теории и эксперимента.

На рис. 30д,е,ж-33д,е,ж показаны экспериментальные картины дифракции Френеля (ближняя зона) на разных расстояниях от ДОО. Из этих рисунков видно, лазерный пучок проявляет модовые свойства – сохраняет свою структуру.

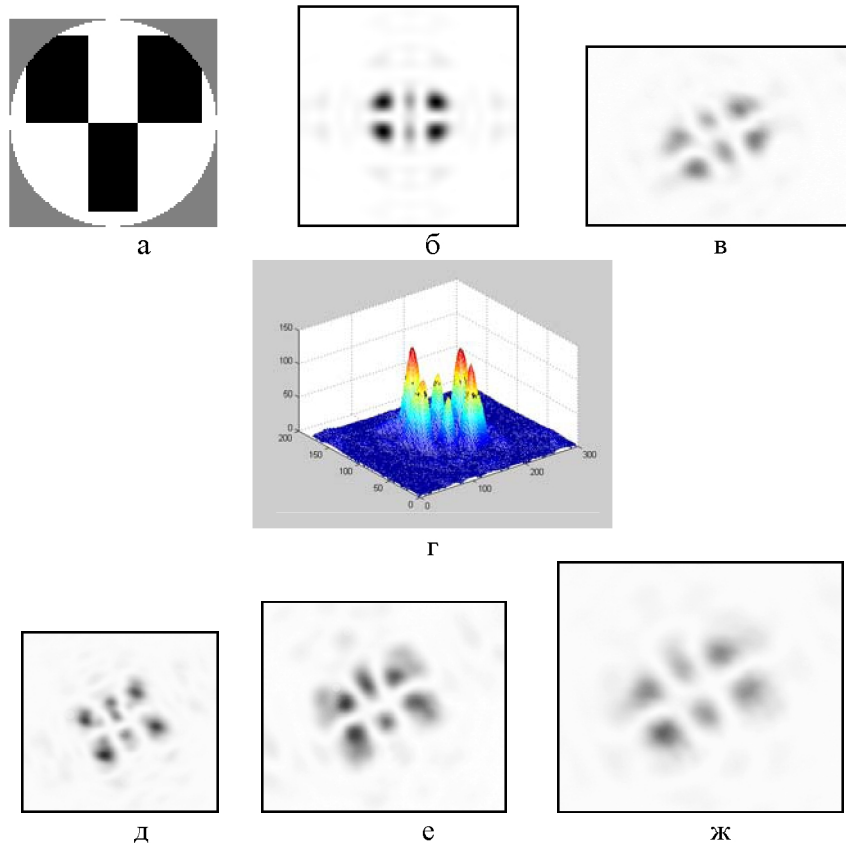


Рис. 32. Результаты численного моделирования и эксперимента для моды ГЭ(1, 2): фотомаска, ограниченная круглой апертурой освещающего пучка (а); рассчитанная картина дифракции в дальней зоне (б); экспериментальная картина дифракции в дальней зоне (в) и ее трехмерное представление (г); экспериментальные распределения интенсивности на расстояниях 260 мм (д), 400 мм (е) и 580 мм (ж) от ДООЭ

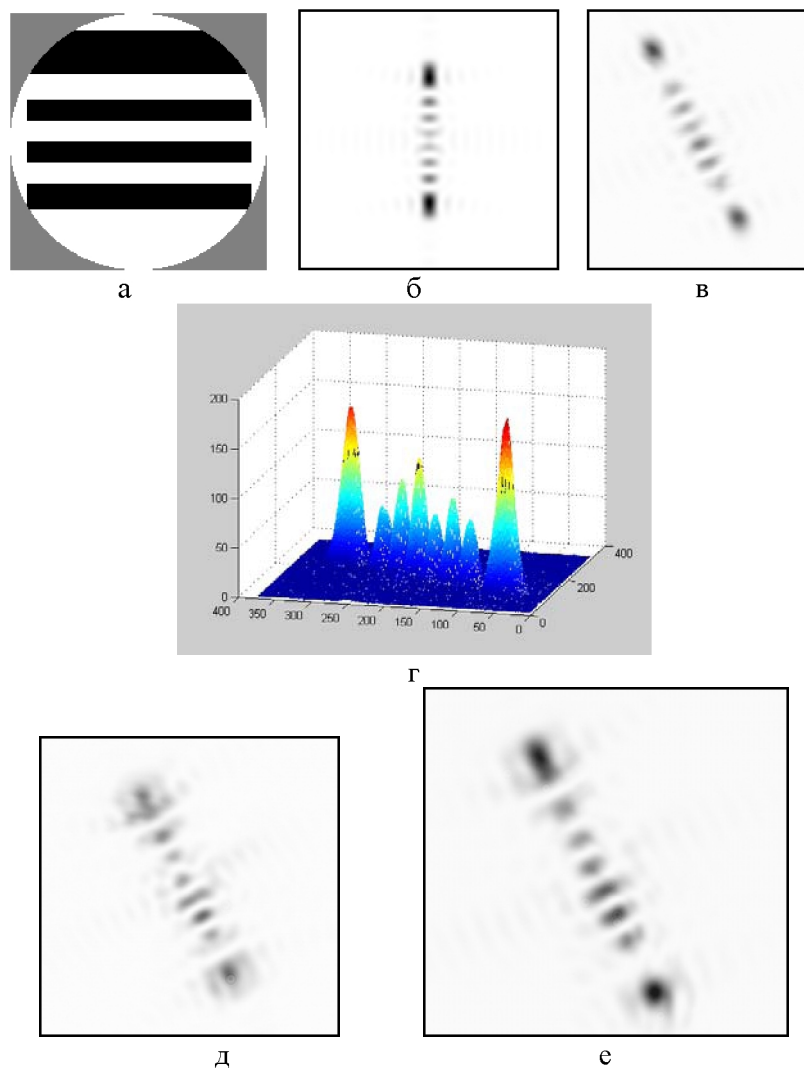


Рис. 33. Результаты численного моделирования и эксперимента для моды ГЭ (7, 0): фотомаска, ограниченная круглой апертурой освещающего пучка (а); рассчитанная картина дифракции в дальней зоне (б); экспериментальная картина дифракции в дальней зоне (в) и ее трехмерное представление (г); экспериментальные распределения интенсивности на расстояниях 360 мм (д) и 470 мм (е) от ДОЭ

10. САМОВОСПРОИЗВЕДЕНИЕ МНОГОМОДОВЫХ ПУЧКОВ ГАУССА – ЭРМИТА

При распространении в однородном пространстве некоторых типов когерентных световых полей, могут наблюдаться эффекты самовоспроизведения, то есть повторения распределения интенсивности в поперечном сечении. Одномодовые световые пучки являются примерами самовоспроизводящихся пучков с периодом равным нулю. В предыдущих разделах получены условия для вращения модовых световых пучков, которые также являются примерами полей с продольной периодичностью (с точностью до масштаба). В [67] получено условие, при котором многомодовый пучок Гаусса – Лагерра будет с точностью до масштаба самовоспроизводиться по интенсивности на некоторых расстояниях.

В данном разделе аналогичное условие получено для многомодовых пучков Гаусса – Эрмита. С помощью численного моделирования показан эффект самовоспроизведения для конкретных модовых пучков.

Рассмотрим многомодовый пучок ГЭ, распространяющийся в свободном пространстве. Комплексная амплитуда такого пучка может быть записана в виде

$$E(x, y, z) = \sum_{m,n=0}^N C_{m,n} \Psi_{m,n}(x, y, z), \quad (192)$$

Где $\Psi_{m,n}(x, y, z)$ – функции вида (147) – (150), z – продольная, а (x, y) – поперечные декартовы координаты, $C_{m,n}$ – комплексные коэффициенты.

Выражение для интенсивности света в поперечном сечении пучка ГЭ имеет вид:

$$\begin{aligned} I(x, y, z) = & \frac{\omega_0^2}{a^2(z)} \exp\left[-\frac{2(x^2 + y^2)}{a^2(z)}\right] \times \\ & \times \left\{ \sum_{m,n=0}^N |C_{m,n}|^2 H_m^2\left(\frac{\sqrt{2}x}{a(z)}\right) H_n^2\left(\frac{\sqrt{2}y}{a(z)}\right) + \sum_{m,n}^N \sum_{m',n'}^N |C_{mn} C_{m'n'}| \times \right. \\ & \times H_m\left(\frac{\sqrt{2}x}{a(z)}\right) H_{m'}\left(\frac{\sqrt{2}x}{a(z)}\right) H_n\left(\frac{\sqrt{2}y}{a(z)}\right) H_{n'}\left(\frac{\sqrt{2}y}{a(z)}\right) \cos \Phi_{m'n'}^{mn} \left. \right\}, \end{aligned} \quad (193)$$

где

$$\Phi_{m',n'}^{m,n} = \arg C_{m,n} - \arg C_{m',n'} + [(m-m') + (n-n')]\eta(z). \quad (194)$$

Чтобы распределение интенсивности (193) на расстоянии z_1 с точностью до масштаба повторилось на расстоянии z_2 нужно, чтобы функции (194) в каждом слагаемом в уравнении (193) удовлетворяли условию

$$\Phi_{m',n'}^{m,n}(z_2) = \Phi_{m',n'}^{m,n}(z_1) + 2\pi l, \quad l = 1, 2, 3, \dots \quad (195)$$

Подставив в уравнение (195) функцию (194), получим выражение для расстояния z_2 :

$$z_2 = \frac{z_1 + z_0 \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi l}{p}\right)}{1 - \frac{z_1}{z_0} \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi l}{p}\right)}, \quad (196)$$

где

$$p = (m - m') + (n - n'). \quad (197)$$

Присутствие в формуле параметра l показывает, что для пары мод с номерами (m, n) , (m', n') может существовать несколько расстояний, на которых будет повторяться поперечное распределение интенсивности их суммы, зафиксированное на некотором z :

$$z_{l,p}(z) = \frac{z + z_0 \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi l}{p}\right)}{1 - \frac{z}{z_0} \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi l}{p}\right)}, \quad l = 1, 2, 3, \dots \quad (198)$$

Рассмотрим пример для пары мод с $p=20$ и найдем расстояния, на которых повторится распределение интенсивности, зафиксированное для $z=0$:

$$z_{l,p}(0) = z_{l,p} = z_0 \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi l}{p}\right), \quad l = 1, 2, 3, \dots \quad (199)$$

В этом случае получается пять повторений с возрастающим периодом:

$$z_{1,20} = 0,3249z_0, \quad z_{2,20} = 0,7265z_0, \quad z_{3,20} = 1,3764z_0, \\ z_{4,20} = 3,0777z_0, \quad z_{5,20} = \infty,$$

одно из которых повторяется на бесконечности, или фокальной плоскости линзы.

Понятно, что все изменения, возникающие на интервале $[z, z_{1,p}(z))$, будут повторяться на последующих периодах $[z_{1,p}(z), z_{l+1,p}(z))$ с замедляющейся с ростом l скоростью.

Далее рассмотрим способы выбора номеров мод для саморепродуцирующегося пучка (192), содержащего более чем два слагаемых.

Если выбрана пара мод с номерами (m, n) , (m', n') , $p_0 = (m - m') + (n - n')$, то добавление мод с теми же скоростями, а именно, с номерами (m'', n'') , такими, что

$$m'' + n'' = m + n \text{ или } m'' + n'' = m' + n', \quad (200)$$

позволит сформировать пучок самовоспроизводящийся на тех же расстояниях (198), что и для первоначальной пары мод. Это обусловлено тем, что дополнительные моды будут давать только два значения $p' = p_0$ и $p' = 0$. При $p = 0$ в (194) пропадает зависимость от z , что характерно для стабильного пучка. Примером такого многомодового пучка с $p_0 = 20$ может служить композиция из 7-мод

$$(0, 1) + (1, 0) + (10, 11) + (11, 10) + (9, 12) + (8, 13) + (0, 20).$$

На рис. 34 приведены результаты численного моделирования для 4-модового пучка ГЭ: $(0, 1) + (1, 0) + (10, 11) + (11, 10)$. Все моды входят в состав пучка с одинаковыми весами. При этом использовались следующие параметры: размерность массивов 512×512 , область изменения аргументов $x, y \in [-0,5 \text{ мм}, 0,5 \text{ мм}]$, длина волны $\lambda = 0,63 \text{ мкм}$, радиус гауссового пучка $\omega_0 = 0,1 \text{ мм}$, конфокальный параметр $z_0 = k\omega_0^2/2 = 49,63 \text{ мм}$.

Поперечное распределение интенсивности такого пучка, зафиксированное на любом расстоянии внутри интервала $[0, z_{1,20}(z)) = [0, 16,24)$ должно повториться еще 4 раза до $z = \infty$. Действительно, для $z = 12 \text{ мм}$ формула (198) дает следующие возможные повторения:

$$z_{1,20}(12) = 30,63 \text{ мм}, \quad z_{2,20}(12) = 58,53 \text{ мм}, \\ z_{3,20}(12) = 120,69 \text{ мм}, \quad z_{4,20}(12) = 634,72 \text{ мм}.$$

На рис. 34 показана бинарная фаза (а) и интенсивность (б) в плоскости $z = 0$ (размер соответствует размеру апертуры 1 мм) для 4-х модового пучка ГЭ: $(0, 1)+(1, 0)+(10, 11)+(11, 10)$. На последующих рисунках показаны распределения интенсивности на разных расстояниях: $z = 12$ мм (в), $z_{1,20}(0) = 16,24$ мм (г), $z_{1,20}(12) = 30,63$ мм (д), $z_{2,20}(0) = 36,33$ мм (е), $z_{2,20}(12) = 58,53$ мм (ж) (размер каждого кадра равен 0,97 мм).

Из рис.34 видно, что картины интенсивности при $z = 0$ (б), $z = 16,24$ мм (г) и $z = 36,3$ мм (е) совпадают с точностью до масштаба. Такое же совпадение наблюдается для расстояний $z = 12$ мм (в), $z = 30,63$ мм (д) и $z = 58,5$ мм (ж).

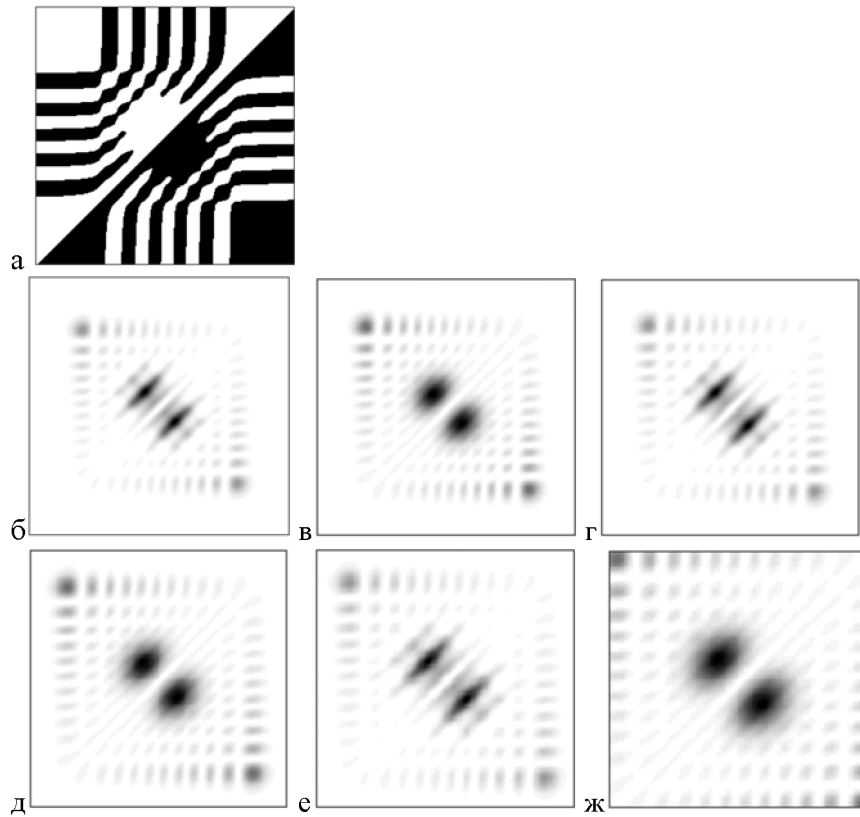


Рис. 34. Бинарная фаза (а) (белый – 0, черный – π) и интенсивность (б) в плоскости $z=0$, и распределения интенсивности на расстояниях z : 12мм (в), 16,24мм (г), 30,63мм (д), 36,33мм (е), 58,53мм (ж)

Еще одна степень свободы в выборе номеров дополнительных мод появляется, если рассмотреть следующее условие повторения для выражения (198):

$$z_{l,p}(z) = z_{l',p'}(z). \quad (201)$$

Так, если выбрана пара мод с номерами (m, n) , (m', n') , $p_0 = (m - m') + (n - n')$, то для повторения на тех же расстояниях, разность номеров дополнительных мод должна быть следующей:

$$p = |p_0|q, \quad q = 0, 1, 2, \dots, \quad (202)$$

и номера дополнительных мод находятся из следующего соотношения:

$$m'' + n'' = m + n + |p_0|q, \quad q = 0, 1, 2, \dots \quad (203)$$

Например, если пучок $(1, 1) + (5, 5)$ повторяет свое начальное (при $z = 0$) поперечное распределение интенсивности на расстоянии (199):

$$z_{1,8} = z_0 \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = z_0,$$

то и пучок $(1, 1) + (0, 2) + (5, 5) + (4, 6) + (9, 9) + (8, 10)$ повториться на этом расстоянии:

$$z_{1,8} = z_{2,16} = z_0.$$

Интересно, что в зависимости от значения $|p_0|$ в (203) можно предсказать расположение повторений начального (при $z = 0$) распределения интенсивности относительно z_0 (см. таблицу 7).

Если расстояния z_1 и z_2 в (196) заданы, то номера мод ГЭ, которые должны входить в пучок, чтобы он имел подобные поперечные распределения интенсивности на этих расстояниях, будут удовлетворять условию

$$\frac{2\pi l}{p} = \operatorname{arctg}\left[\frac{z_0(z_2 - z_1)}{z_2 z_1 + z_0^2}\right], \quad |p| > 4l. \quad (204)$$

Из уравнения (201) следует, что расстояния z_1 и z_2 нельзя задавать произвольно.

Расположение точек самовоспроизведения

Значение $ p_0 $	Точка самовоспроизведения z_{l,p_0}
$ p_0 < 4$	Нет
$ p_0 = 4$	$z_{1,p_0} = \infty$
$4 < p_0 < 8$	$z_0 < z_{1,p_0} < \infty$
$ p_0 = 8$	$z_{1,p_0} = z_0, \quad z_{2,p_0} = \infty$
$8 < p_0 < 12$	$0 < z_{1,p_0} < z_0 < z_{2,p_0} < \infty$
$ p_0 = 12^*$	$0 < z_{1,p_0} < z_0 < z_{2,p_0} < \infty, \quad z_{3,p_0} = \infty$

* Далее картина повторяется с кратным увеличением количества точек самовоспроизведения.

Кроме расстояний самовоспроизведения распределения интенсивности, зафиксированной на расстоянии z , могут быть интересны расстояния «частичного» периода (то есть части периода) (193). Так, выражение

$$z_{l,p}^q(z) = \frac{z + z_0 \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{q} \cdot \frac{l}{p}\right)}{1 - \frac{z}{z_0} \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{q} \cdot \frac{l}{p}\right)}, \quad l=1, 2, 3, \dots \quad (205)$$

позволяет вычислять расстояния, соответствующие q -ой части периода саморепродукции. Здесь можно провести аналогию с «частичным» периодом Тальбота для решеток [7]. Частичные расстояния для начального распределения интенсивности (199) будут выглядеть следующим образом:

$$z_{l,p}^q = z_0 \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{q} \cdot \frac{l}{p}\right), \quad l=1, 2, 3, \dots \quad (206)$$

Значение $q = 2$ соответствует «половинному» периоду. В этом случае при нечетных $l = 2s + 1, s = 0, 1, 2, \dots$ в выражении (193) вместо добавления перекрестных членов происходит их вычитание:

$\cos(x \pm \pi l) = -\cos(x)$, что можно определить как квазиконтрастирование. Аналогичная ситуация наблюдается на половине периода Тальбота для решеток [7], когда сдвиг первоначального изображения решетки выглядит как ее контрастирование.

Для частичных периодов имеем следующее выражение для аргументов косинусов в (193):

$$\cos \left[x + p \operatorname{arctg} \left(\frac{z_{l,p}^q}{z_0} \right) \right] = \cos \left[x + \frac{2\pi l}{q} \right], \quad (207)$$

где $x = \arg C_{m,n} - \arg C_{m',n'}$.

На рисунке 35 приведены результаты численного моделирования для 3-х модового пучка ГЭ (1, 1)+(5, 5)+(9, 9) с одинаковыми весами.

Используя выражение (206), можно получить следующие расстояния для саморепродукции (при $q=2$, l – четные) и квазиконтраста (при $q=2$, l – нечетные) начального распределения интенсивности:

$$z_{2,8}^2 = z_0 \operatorname{tg} \left(\pi \frac{1}{4} \right) = z_0 \approx 49,63, \quad z_{4,8}^2 = z_0 \operatorname{tg} \left(\pi \frac{1}{2} \right) = \infty,$$

$$z_{1,8}^2 = z_0 \operatorname{tg} \left(\pi \frac{1}{8} \right) \approx 20,71, \quad z_{3,8}^2 = z_0 \operatorname{tg} \left(\pi \frac{3}{8} \right) \approx 120,71.$$

Для четвертой периода будут следующие расстояния (при $q=4$, $l=2s+1$, $s=0, 1, 2, \dots$):

$$z_{1,8}^4 = z_0 \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{8} \right) \approx 9,87, \quad z_{3,8}^4 = z_0 \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{3}{8} \right) \approx 33,16,$$

$$z_{5,8}^4 = z_0 \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{5}{8} \right) \approx 74,27, \quad z_{7,8}^4 = z_0 \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{7}{8} \right) \approx 249,51.$$

На рисунке 35а показана бинарная фаза, а на рис. 35б – интенсивность в плоскости $z=0$ (размер соответствует размеру апертуры 1 мм). На следующих рисунках показаны распределения интенсивности на разных расстояниях: $z_{1,8}^2 = 20,71$ мм (в),

$z_{3,8}^4 = 33,16$ мм (з), $z_{2,8}^2 = z_0 = 49,63$ мм (д), $z_{5,8}^4 = 74,27$ мм (е),
 $z_{3,8}^2 = 120,71$ мм (ж) (размер каждого кадра равен 1,6 мм).

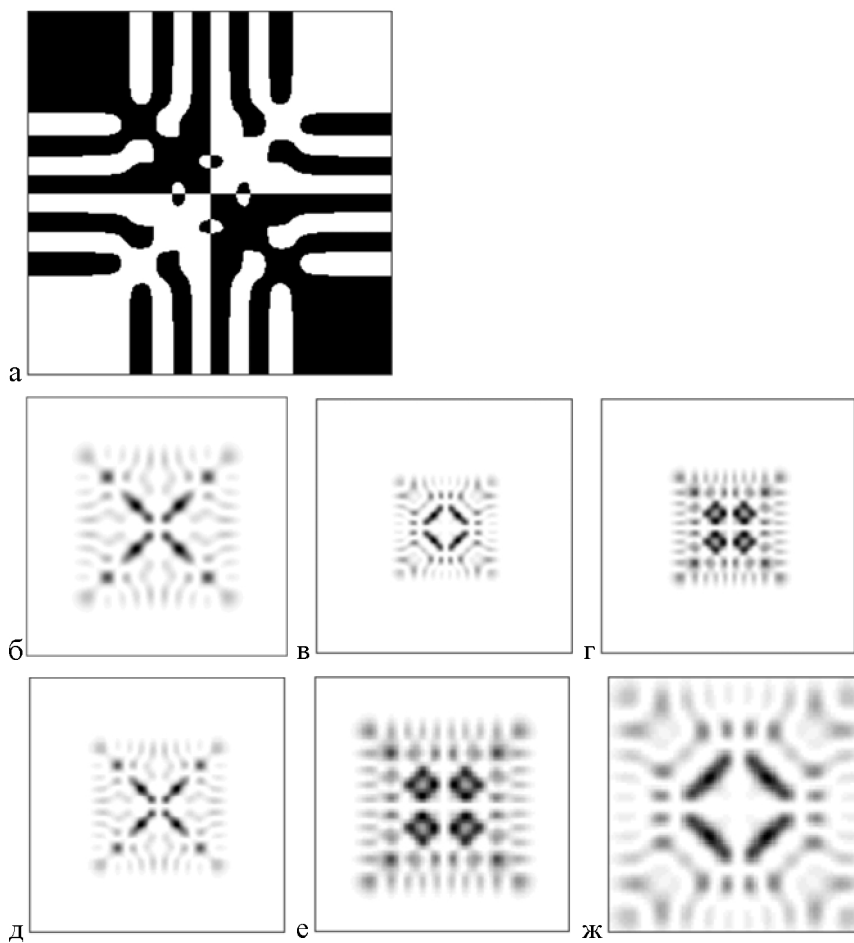


Рис. 35. Бинарная фаза (а) (белый – 0, черный – π), и интенсивность (б) в плоскости $z=0$, и распределения интенсивности на расстояниях z : 20,71 мм (в), 33,16 мм (г), 49,63 мм (д), 74,27 мм (е), 120,71 мм (ж)

Из рисунка 35 видно, что картины интенсивности при $z=0$ (б) и $z=z_0$ (д) совпадают с точностью до масштаба. Такое же совпадение

наблюдается для расстояний полупериода $z=20,71$ мм (в) и $z=120,71$ мм (ж). Их совпадение можно предсказать и с помощью формулы (205):

$$z_{1,8}^2(20,71) = 120,71.$$

Для четверти периода в выражении (207) получим $\cos(x + \pi l/2)$, $l = 2s + 1$, $s = 0, 1, 2, \dots$ и подобие картины распределения интенсивности на рис. 35г и 35е возможно только при $x = \arg C_{m,n} - \arg C_{m',n'} = 0$ (что и было выполнено в нашем случае).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследования, проведенные в этой главе, позволяют сделать вывод о возможности управления продольно-периодическими свойствами основных типов световых мод свободного пространства: Бесселя, Гаусса-Эрмита, Гаусса-Лагерра. Хотя эти моды описываются амплитудно-фазовыми функциями, методы, рассмотренные в этой главе, предлагают способы получения чисто фазовой (наиболее энергетически выгодной) функции пропускания ДОО, формирующих многомодовые световые пучки. Серии тестов с изготовленными ДОО показали хорошее согласие теории и эксперимента.

Подкласс световых полей, обладающих коническим спектром плоских волн и названных многомодовыми пучками Бесселя, обладает свойством распространяться в свободном пространстве практически без дифракции. Рассмотренные в главе ДОО работают как винтовой аксикон, обеспечивая инвариантные свойства сформированного пучка на расстоянии, пропорциональном радиусу ДОО и обратно пропорциональном углу наклона плоских волн пространственного спектра данного поля (или масштабу функции Бесселя). Дифракционное расширение диаметра пучка компенсируется за счет притока энергии из периферийных областей ДОО. То есть, с увеличением расстояния z от ДОО до рассматриваемой плоскости растет и радиус зоны (кольца) ДОО, которая отвечает за формирование светового поля на этой плоскости.

Пучки с продольной периодичностью возникают в случае, когда несколько (не менее двух) конических световых волн с различными углами при вершине конуса распространяются вдоль оптической оси. В результате их интерференции образуется интерференционная картина, амплитуда модуляции которой примерно постоянна на отрезке оптической оси от ДОО до расстояния инвариантности, о котором говорилось выше. При этом волна, распространяясь вдоль оптической оси, в своем поперечном сечении испытывает периодические изменения. Минимальный период интерференционной картины будет определяться максимальной разностью углов наклона различных конических волн.

Если многомодовый пучок состоит из композиции бесселевых функций с различными масштабами, но с одинаковыми индексами, а, следовательно, и одинаковыми винтовыми составляющими, то такое поле распространяется без дифракции и без изменения вида как Бесселева мода. Эффект вращения картины в поперечном сечении бесселевого пучка возникает при наличии в пучке составляющих и с различными масштабами (угол наклона плоских волн) и индексами.

Условия вращения, полученные в этой главе, позволяют получать вращающиеся с различной скоростью пучки Гаусса-Лагерра как в волокне, так и в свободном пространстве. При распространении в свободном пространстве такие пучки вращаются все более замедляясь, и на расстоянии от ДОЭ до бесконечности совершают небольшое число оборотов (для мод с низшими номерами 1–3 оборота). При распространении в градиентном оптическом волокне вращение происходит с постоянной скоростью и число оборотов – больше (для длины волокна 1 мм около 100 оборотов).

Одномодовые световые пучки являются примерами самовоспроизводящихся пучков с периодом равным нулю. В данной главе показано, что с энергетической точки зрения оптимальным дифракционным элементом, формирующим одномодовый гауссовый пучок является фазовый транспарант, функция пропускания которого равна знаковой функции соответствующего многочлена Лагерра или Эрмита.

Проведенные исследования дают возможность формирования многомодовых пучков Гаусса-Эрмита самовоспроизводящихся на определенных расстояниях.

СПИСОК СПЕЦИАЛЬНЫХ ТЕРМИНОВ

Бездифракционный пучок
Винтовой аксикон
Гауссов пучок
Дифракционный оптический элемент (ДОЭ)
Дифракция Фраунгофера
Дифракционная эффективность
ДОЭ с квантованной фазой
Инвариантность к оператору распространения
Итеративный алгоритм расчета
Метод аподизации апертурной функции
Метод кодирования фазовых ДОЭ с пространственной
несущей частотой
Мода лазерного излучения
Моды Бесселя
Моды Гаусса-Лагерра
Моды Гаусса-Эрмита
Период дифракционной решетки
Плоская волна
Периодическое самовоспроизведение
Преобразование Френеля
Содержание заданной моды в пучке
Эффект Тальбота

СПИСОК КОНТРОЛЬНЫХ ВОПРОСОВ

1. Какие частные решения имеет уравнение Гельмгольца?
2. Какие решения параксиального волнового уравнения вам известны?
3. Какая область в поперечной плоскости рассматривается при выполнении преобразования Френеля?
4. Где находится зона дифракции Фраунгофера?
5. Модами какой оптической среды являются функции Бесселя?
6. Какие моды градиентных оптических волокон вы знаете?
7. Какие типы самовоспроизведения можно получить с помощью многомодовых пучков Гаусса-Эрмита?
8. Можно ли получить поступательно вращающиеся лазерные пучки с помощью суперпозиции плоских волн?
9. Обладает ли многомодовый световой пучок теми же свойствами, что и одномодовый?
10. Сохраняет ли многомодовый лазерный пучок свою структуру при распространении?
11. Возможно ли представить любое световое поле в виде конечной суммы модовых функций?
12. Какие моды имеют винтовой характер фазы?
13. Итеративные алгоритмы расчета фазовых ДОЭ демонстрируют лучшую сходимость при увеличении или уменьшении числа мод в лазерном пучке?
14. Какой метод расчета ДОЭ нужно использовать в задаче формирования одномодовых лазерных пучков?
15. Какой метод кодирования лежит в основе метода аподизации апертурной функции?
16. Какую характеристику светового поля можно напрямую зарегистрировать каким-нибудь фоточувствительным устройством?
17. Можно ли использовать дифракционный оптический элемент для лазерного излучения с различными длинами волн?

ЛИТЕРАТУРА

1. Talbot HF Phil. Mag. and J. Sci. London **9** 401 (1836).
2. Lau E Annln. Phys. **6** 417 (1948).
3. Lord Rayleigh Phil. Mag. **2**(5) 196 (1881).
4. Winthrop John T and Worthington CR J. Opt. Soc. Am. **55** 373 (1965).
5. Leger JR, Swanson GJ, Opt. Lett. **15** 288 (1990).
6. Arrizon Victor and Ojeda-Castaneda J J. Opt. Soc. Am. **A9**(10) 1801 (1992).
7. Westerholm J, Turunen J, Huttunen J J. Opt. Soc. Am. **A11**(4) 1283 (1994).
8. Montgomery WD J. Opt. Soc. Am. **57**(6) 772 (1967).
9. Montgomery WD J. Opt. Soc. Am. **58**(8) 1112 (1968).
10. Slepian D Bell System Tech. J. **43** 3009 (1964).
11. Indebetouw G Opt. Acta **31**(5) 531 (1984).
12. Ceperley PH Am. J. Phys. **60**(10) 938 (1992).
13. Chavez-Cerda S, McDonald GS, New Opt. Commun. **123** 225 (1996).
14. Paterson C, Smith R Opt. Commun. **124** 131 (1996).
15. Basistiy IV, Bazhenov VYu, Soskin MS, Vasnetsov Opt. Commun. **103** 422 (1993).
16. Indebetouw G J. Mod. Opt. **40**(1) 73 (1993).
17. Abramochkin E, Volostnikov V Opt. Commun. **102** 336 (1993).
18. Смирнов ВИ Курс высшей математики (М.: Наука, т.IV, 1974).
19. Лебедев ВВ, Лукьянов ЮН, Орлов МИ, Преображенский НГ, Соколовский РИ Препринт института теоретической и прикладной механики СО РАН **16-89** (1989).
20. Durnin J J. Opt. Soc. Am. **4** 651 (1987).
21. Durnin J, Miceli JJ, Eberby JH Opt. Lett. **13** 79 (1988).
22. Gori F, Guattari G, Padovani C, Opt. Commun. **64**(6) 491 (1987).
23. Валиев АБ, Кривошлыков СГ Квантовая электроника **16** 1047 (1989).
24. Vasara A, Turunen J, Friberg AT J. Opt. Soc. Am. **6** 1748 (1989).
25. Унгер ХГ Планарные и волоконные оптические волноводы (М.: Мир, 1980)
26. Бельский АМ Оптика и спектроскопия **73**(5) 947 (1992).
27. Kotlyar VV, Khonina SN, Soifer VA J. Mod. Opt. **42**(6) 1231 (1995).
28. Golub MA, Doskolovich LL, Kazanskiy NL, Kharitonov SI, Soifer VA J. Mod. Opt. **39**(6) 1245 (1992).
29. Khonina SN, Kotlyar VV, Soifer VA Proceedings of SPIE **1780** 263 (1993).

30. Soifer V.A Doskolovich L.L Kazanskiy N.L Multifocal diffractive elements. *Opt. Eng.* **33**(11) 3611-3615 (1994).
31. Корн Г, Корн Т Справочник по математике (М.: Наука, 1968).
32. Котляр ВВ, Сойфер ВА, Хонина СН *Оптика и спектроскопия* **84**(5) 853 (1998).
33. Кузнецов ДС Специальные функции (М.: Высшая школа, 1962).
34. Fienup JR *Appl.Opt.* **21**(15) 2758 (1982).
35. Szwaykowski P *J.Opt.Soc.Am.* **5**(2) 185 (1988).
36. Ananov YuYu *Opt.Spectrosc.* **64** 722 (1988).
37. Gori F, Guattari G, Padovani C *Optics Communications* **64**(4) 311 (1987).
38. Turunen J, Vasara A, Friberg AT *J.Opt.Soc.Am.* **A8**(2) 282 (1991).
39. Overfelt PL, Kenney CS *J.Opt.Soc.Am.* **A8**(5) 732 (1991).
40. Indebetouw G *J.Opt.Soc.Am.* **A6**(1) 150 (1988).
41. Turunen J, Vasara A, Friberg AT *Appl.Opt.* **27**(19) 3959 (1988).
42. Paterson C, Smith R *Optics Communications* **124** 123 (1996).
43. Khonina SN, Kotlyar VV, Soifer VA, Shinkaryev MV, Uspleniev GV *Optics Communications* **91**(34) 158 (1992).
44. Andreev NE, Bychkov SS, Kotlyar VV, Margolin LYa, Pyatnitskii LN, Serafimovich PG *Quantum Electronics* **23**(2) 130 (1996).
45. Ruschin S *J.Opt.Soc.Am.* **A11**(12) 3224 (1994).
46. Spektor B, Piestun R, Shamir J *Opt.Lett.* **21**(7) 456 (1996).
47. Kotlyar VV, Soifer VA, Khonina SN *J.Modern Opt.* **44**(7) 1409 (1997).
48. EOS Topical meeting on Diffractive Optics (Savonlinna, 1997, с.34).
49. Goodman JW, Silvestri AM *IBM J. Res. Devel.* **9** 478 (1970).
50. Soifer VA, Golub MA *Laser beam mode selection by computer-generated holograms.* (Boca Raton: CRC Press U.S 1994).
51. Голуб МА, Павельев ВС, Сойфер ВА *Компьютерная оптика* **14-15**(2) 85 (1995).
52. Kotlyar VV, Nikolsky IV, Soifer VA *Optik* **98**(1) 26 (1994).
53. Soifer VA, Kotlyar VV, Doskolovich LL *Iterative methods for diffractive optical elements computation.* (London: Taylor & Francis, 1997).
54. Прудников АП, Брычков ЮА, Марычев ОИ *Интегралы и ряды. Специальные функции.* (М.: Наука, 1983).
55. Хонина СН, Котляр ВВ, Сойфер ВА *Компьютерная оптика* **17** 25 (1997).
56. Ярив А *Оптическая электроника* (М.: Советское радио, 1986).

57. Adams MJ An introduction to optical waveguides (J.Wiley & Sons Chichester, 1981).
58. Schechner YV, Piestun R, Shamir J Physical Review **E54**(1) 50 (1996).
59. Котляр ВВ, Сойфер ВА, Хонина СН Письма в ЖТФ **23**(17) 1 1997.
60. Виноградова МБ, Руденко ОВ, Сухоруков АП Теория волн (М.: Наука, 1979).
61. Ярив А Введение в оптическую электронику (М.:Высшая школа, 1983).
62. Fedotovskiy A, Lehouec K Appl. Opt. **13**(12) 2919 (1974).
63. Mait J J. Opt. Soc. Am. **A7**(8) 1514 (1990).
64. Котляр ВВ, Сойфер ВА, Хонина СН Компьютерная оптика **17** 31 (1997).
65. Duparre M, Pavelyev V, Luedge B, Kley B, Kowarschik R, Soifer V Proceedings of SPIE **3134** 357 (1997).
66. Kotlyar VV, Khonina SN, Soifer VA Optik **108**(1) 20 (1998).
67. Piestun R, Schechner YV, Shamir J Opt. Lett. **22**(4) 200 (1997).

Учебное издание

*Хопина Светлана Николаевна,
Котляр Виктор Викторович,
Сойфер Виктор Александрович*

ЛАЗЕРНЫЕ МОДОВЫЕ ПУЧКИ С ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫМИ СВОЙСТВАМИ

Учебное пособие

Технический редактор *Н. Л. Казанский*
Редакторская обработка *А. А. Нечитайло*
Корректорская обработка *И. И. Пролова*
Верстка *А. А. Ковалев, С. В. Смагин*
Доверстка *А. В. Ярославцева*

Подписано в печать 12.12.06. Формат 60х84 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 6,28. Усл. кр.-отт. 6,4. Печ. л. 6,75.
Тираж 50 экз. Заказ ИП-57/2006

Самарский государственный аэрокосмический университет.
443086, Самара, Московское шоссе, 34.

Изд-во Самарского государственного аэрокосмического университета.
443086, Самара, Московское шоссе, 34.