

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА»

В.Н. ГАВРИЛОВ

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ
ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Часть 1

МОДЕЛИРОВАНИЕ НА ПЛОСКОСТИ

*Утверждено Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия*

САМАРА
Издательство СГАУ
2006

УДК 513.7/681.3

ББК 22.151.5

Г124



**Инновационная образовательная программа
"Развитие центра компетенции и подготовка
специалистов мирового уровня в области аэро-
космических и геоинформационных технологий"**

Рецензенты: д-р техн. наук, проф. В. А. К о м а р о в,
канд. физ.-мат. наук, доц. М. Н. О с и п о в

Гаврилов В.Н.

**Г124 Теоретические основы геометрического моделирования. Часть 1.
Моделирование на плоскости: учеб. пособие / В.Н. Гаврилов. – Са-
мара: Изд-во Самар. гос. аэрокосм. ун-та, 2006. – 92 с. : ил.**

ISBN 5-7883-0463-6

В пособии дается характеристика и сравнение основных систем координат, рассмотрено решение ряда геометрических задач методами начертательной геометрии, которые излагаются в сравнении с методами аналитической геометрии; приводятся некоторые методы описания кривых, способы преобразования моделей и принципы создания плоских параметрических моделей.

Рекомендуется в качестве дополнительной литературы по курсам "Начертательная геометрия", "Графические редакторы" для студентов специальностей: 160301- Авиационные двигатели и энергетические установки, 160302 - Ракетные двигатели, 160201- Самолето- и вертолетостроение, 160802 - Космические летательные аппараты и разгонные блоки. Разработано на кафедре инженерной графики.

УДК 621.771.2.002.5 (075.8)

ББК 34.3

ISBN 5-7883-0463-6

© Гаврилов В. Н., 2006

© Самарский государственный
аэрокосмический университет, 2006

Оглавление

Условные обозначения	5
Предисловие.....	6
Введение	7
1. Системы координат на плоскости	8
1.1. Полярная система координат.....	8
1.2. Косоугольные координаты	10
1.3. Прямоугольная система координат.....	12
1.4. Барцентрические координаты	14
2. Методы начертательной геометрии в моделировании	17
2.1. Введение в плоское моделирование.....	18
2.1.1. Данные для моделирования.....	18
2.1.2. Проецирование	19
2.1.3. Свойства параллельного проецирования.....	20
2.1.4. Аксонометрические проекции	22
2.1.5. Комплексный чертеж	24
2.2. Геометрические объекты на чертеже.....	25
2.2.1. Задание геометрических объектов	26
2.2.2. Способы задания прямой	26
2.2.3. Способы задания плоскости	29
2.2.4. Особые случаи задания плоскости	32
2.2.5. Взаимное положение прямых	34
2.2.6. Принадлежность.....	35
2.2.7. Построение перпендикуляра к плоскости.....	36
2.2.8. Построение плоскости перпендикулярной к заданной прямой.....	37
2.3. Решение геометрических задач на чертеже.....	38
2.3.1. Метод прямоугольного треугольника.....	38
2.3.2. Пересечение прямой с плоскостью общего положения.....	39
2.3.3. Расстояние от точки до плоскости	44
2.3.4. Пересечение плоскостей	47
2.4. Преобразование комплексного чертежа.....	51
2.4.1. Замена плоскостей проекций.....	51
3. Моделирование на плоскости.....	57
3.1. Задание линий на плоскости	57
3.2. Интерполяция	60
3.2.1. Параболическая интерполяция	61
3.2.2. В-сплайны	65
3.3. R-функции и их применение в геометрическом моделировании	67
3.3.1. Построение алгебрологической модели геометрической фигуры	68
3.3.2. Построение R-функций	69
3.3.3. Алгоритм вычисления R-функции сложной фигуры	71
3.3.4. Проверка непересечения геометрических фигур.....	72

4. Преобразования плоской модели.....	73
4.1. Редактирование.....	73
4.1.1. Перенос.....	74
4.1.2. Поворот.....	75
4.1.3. Зеркальное отражение.....	76
4.1.4. Масштабирование.....	77
4.2. Параметрические модели.....	78
4.2.1. Линейный базовый сдвиг.....	79
4.2.2. Линейный диаметральный сдвиг.....	81
4.2.3. Базовый поворот.....	82
4.2.4. Диаметральный поворот.....	83
4.2.5. Согласование размеров при параметризации.....	84
Список литературы.....	91

Принятые обозначения

Геометрические объекты

$A, B, \dots; 1, 2, \dots$ - точки;

$A(A_1, A_2)$ - точка, заданная двумя проекциями;

$a, b, \dots$ - прямые;

$a(a_1, a_2)$ - прямая, заданная двумя проекциями;

$a(A, B)$ - прямая, заданная двумя точками;

$\alpha, \beta, \dots$ - плоскости;

$^2AB^2$ - натуральная длина отрезка;

$a^{22}b$ - параллельные прямые;

$a \perp b$ - перпендикулярные прямые;

$\angle ABC$ - угол при вершине B .

Векторы

$u_A(x_A, y_A, z_A)$ - радиус-вектор точки с координатами x_A, y_A, z_A ;

$N(l, m, n), a(l, m, n)$ - вектор, заданный направляющими косинусами;

ab – скалярное произведение векторов.

Другие обозначения

$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ - определитель;

$a, b, \dots$ - скалярные величины, коэффициенты;

N, R - скалярные величины;

$N(x), y(t), f(x, y), \varphi(x, y)$ - скалярные функции;

$\alpha, \beta, \dots$ - угловые величины;

ξ, ζ - альтернативные координаты;

$\subset$ принадлежность ($a \subset \beta$ - прямая принадлежит плоскости);

$\in$ принадлежность элемента ($A \in a$ – точка принадлежит прямой);

$\cup$ объединение множеств;

$\cap$ пересечение множеств ($A = a \cap b$ – точка пересечения прямых).

$\wedge$ дизъюнкция (логическое умножение);

$\vee$ конъюнкция (логическое сложение);

$\neg$ логическое отрицание;

$\text{Sign}(f)$ - знак функции f ,
→ следовательно.

Предисловие

Переход к компьютерным технологиям предполагает знание основ геометрического моделирования. Получение геометрической модели неразрывно связано с компьютерным моделированием. Вузовское обучение геометрическому моделированию делает основной упор на использование графических редакторов. Как правило, студенты хорошо осваивают компьютерные системы, но при этом используют компьютер как "черный ящик" (вход-выход). В некоторых случаях такой подход приводит к серьезным ошибкам.

Настоящее издание ставит своей целью устранение этого пробела в знаниях студентов и создание системного представления о сущности геометрического моделирования. Пособие не претендует на полный охват методов геометрического моделирования, но дает целостную картину получения геометрической модели по схеме: выбор способа описания, построение модели, редактирование модели. Графические построения сопровождаются текстовым описанием и символической записью с использованием обозначений, принятых в теории множеств. Параллельно приводится аналитическое описание выполняемых операций.

Краткость описаний позволяет выделить основные идеи, положенные в основу излагаемых методов, не останавливаясь на деталях. Это дает возможность использовать пособие в качестве справочника по отдельным разделам геометрического моделирования.

Учебное пособие предназначено для студентов технических специальностей.

Автор выражает благодарность В.А. Комарову и А.Г. Прохорову за помощь в редактировании и замечания, позволившие улучшить качество работы.

Введение

О моделях и моделировании. Каждому из нас постоянно приходится применять моделирование в повседневной жизни. Отправляясь на работу (или за покупками) мы мысленно представляем себе расположение пункта назначения, анализируем варианты отрезков пути, оцениваем расстояние, которое необходимо преодолеть, рассчитываем время, которое нам для этого потребуется. Все эти операции требуют применения различных моделей, в том числе и геометрических.

Под моделью понимается такая система, которая, отображая объект (или процесс), способна замещать его и давать новую информацию. При этом подразумевается не полное замещение, а частичное, отражающее те свойства объекта, которые нас интересуют в данной ситуации. Например: если мы моделируем путь до заданного пункта, то нас интересует численное выражение расстояния и способ передвижения (но не интересует окружающий пейзаж). По сути, модель это - описание. Мы говорим о системе потому, что это описание, как правило, включает ряд абстрактных понятий, их символьное обозначение и возможность численного выражения, математические записи физических соотношений, графические изображения и т.д.

Основные свойства модели: адекватность, точность, удобство использования. **Адекватность** (соответствие) характеризует модель с качественной стороны. Здесь уместно использовать такие понятия как изоморфизм (тождество структуры) или аналогия (сходство свойств). **Точность** – количественная характеристика сходства свойств модели и отображаемого физического объекта (или процесса). Точность неразрывно связана с адекватностью и является ее составляющей. **Удобство использования** можно объективно оценить сравнивая затраты на получение новой информации с применением альтернативных вариантов моделей.

В дальнейшем изложении при рассмотрении геометрических моделей мы постараемся дать их оценку с точки зрения перечисленных свойств.

1. Системы координат на плоскости

Прежде чем перейти к рассмотрению трехмерного пространства, обратимся к двумерному.

Наиболее распространенным в практике видом двумерного пространства является плоскость. В дальнейшем нам потребуется использовать такие понятия как мера и метрика.

Мера – средство измерения, предназначенное для воспроизведения физической величины [8]. **Метрика** – формула или правило для определения расстояния между любыми двумя точками (элементами) данного пространства (множества) [8].

Для определения положения точки на плоскости требуется два измерения (пространство двумерно).

1.1. Полярная система координат

Эта система - самая естественная. Как определить положение конкретного места (точки) на местности (на плоскости)? Первое, что приходит на ум: "От старого дуба (центр или **полюс**) на восток (**направление**) десять шагов (расстояние или **радиус-вектор**)". Это и есть полярная система координат. Для ее построения и задания положения точки необходимо:

- выбрать точку отсчета (**полюс**) и луч, определяющий **направление отсчета** (например: направление на север);
- выбрать линейную меру отсчета (например: шаг) и угловую меру (румб или градус, а в приведенном выше примере – дискретное название направления);
- провести необходимые измерения.

Для определения длины отрезка в полярной системе координат зададим метрику

$$r = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)} \quad (1.1)$$

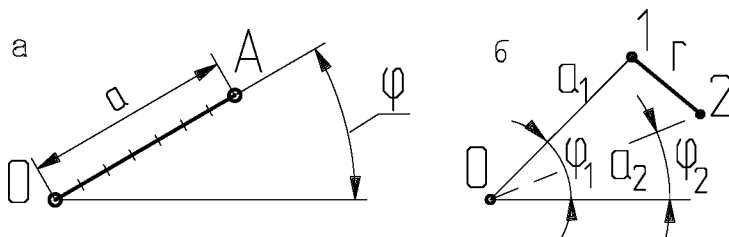


Рис. 1.1. Полярная система координат: а - координаты точки, б – параметры отрезка

Переходя к практическому применению системы координат, мы невольно сталкиваемся с необходимостью применения измерений, что подразумевает наличие инструмента. В полярных координатах разные меры, поэтому для использования полярной системы координат требуется два инструмента: измеритель расстояния (дальномер) и измеритель углов (угломер). Это неудобно и является недостатком системы.

При измерениях всегда возникает погрешность, вызванная как ошибками человека, проводящего измерения, так и несовершенством самого инструмента. Возникает проблема обеспечения необходимой точности измерений. Определим площадь, внутри которой находится истинное положение точки А. Чем меньше эта площадь, тем точнее задано положение точки.

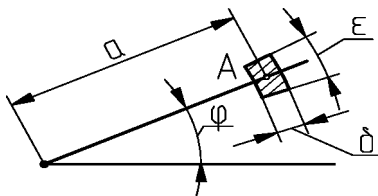


Рис. 1.2. Погрешность задания положения точки в полярной системе координат

Площадь части кольца равна $S = a \times \delta \times \varepsilon$, (1.2)

где δ – погрешность линейного измерения; ε - погрешность углового измерения в радианах.

Как видно из формулы (1.1) точность зависит от расстояния. При больших значениях расстояния погрешность тоже увеличивается. Это еще один недостаток полярной системы координат.

Пример 1.1. Использование полярной системы координат.

Кулачок – координаты точек

Таблица 1.1

	Номера точек												
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
φ°	0	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150	165	180
$R, \text{мм}$	50	55	59	63	67	71	74	77	80	83	86	88	90

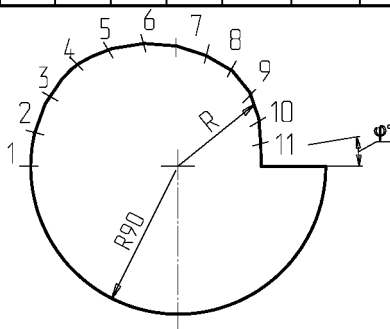


Рис. 1.3. Размеры в полярной системе координат

1.2. Косоугольные координаты

Если взять два луча, исходящие из одной точки под произвольным углом, мы получим оси косоугольной системы координат. Положение точки определяется длинами отрезков, параллельных осям координат. Один из концов каждого отрезка лежит на оси, а другой совпадает с точкой, положение которой определяется.

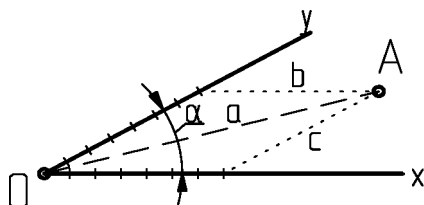


Рис. 1.4. Косоугольная система координат

Использование этой системы координат требует применения только одного инструмента (обе координаты - линейные размеры). Для построения системы требуется не только выбрать точку отсчета (полус) и луч, определяющий направление отсчета, но и задать постоянный угол между осями.

Теперь для определения положения точки нам надо знать длину смежных сторон параллелограмма. Это линейные координаты точки и их мера одинакова.

Неудобство использования таких координат возникает при определении расстояния до точки.

Здесь потребуется использование вычислений:

$$a = \sqrt{b^2 + 2bc\cos\alpha + c^2} \quad (1.3)$$

И опять мы столкнулись с необходимостью измерения угла (теперь уже между осями). В отличие от полярной системы этот угол измеряется только один раз при установке системы координат. При определении координат точки он остается постоянным.

Пример 1.2. Точки на теоретическом чертеже заданы в косоугольной системе координат таблицей 1.2.

Теоретический чертеж обтекателя кия

Таблица 1.2

	Номера точек													
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
x	0	19.4	38.8	58.2	77.6	97.0	116	136	155	174	194	213	232	268
y	246	180	132	95.4	72.8	53.4	37.2	24.2	15.2	9.4	4.8	3.3	1.9	0

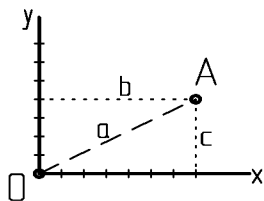


Рис. 1.7. Прямоугольная система координат

Справедливости ради следует заметить, что практическое использование прямоугольной системы координат все равно потребует провести измерение прямого угла при установке положения осей.

Метрика в прямоугольной системе аналогична формуле (1.5):

$$r = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \quad (1.6)$$

где Δx , Δy - разности координат двух любых точек, заданных в прямоугольной системе координат, r - расстояние между этими точками. Именно удобство использования прямоугольной системы координат при измерениях и вычислениях сделало ее наиболее распространенной в создании геометрических моделей.

Пример 1.3. Точки на теоретическом чертеже заданы в прямоугольной системе координат таблицей 1.3.

Теоретический чертеж нервюры руля поворота

Таблица 1.3

	Номера точек															
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
x	0	3.7	7.4	15	22	37	74	111	148	185	222	296	370	444	518	740
y	0	16	21	28	32	38	44	46	47	46	45	39	32	28	20	0

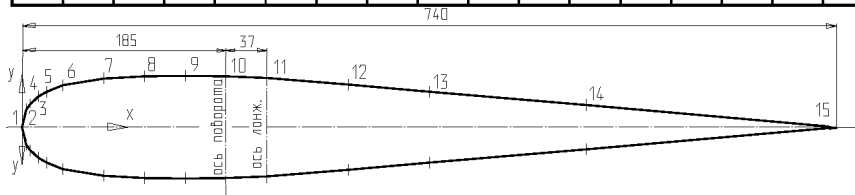


Рис. 1.8. Размеры в прямоугольной системе координат

Погрешность задания положения точки в прямоугольной системе координат больше, чем в косоугольной: $S = \delta^2$.

В декартовых координатах удобно ввести понятие вектора: набор координат точки A называют **радиус-вектором** этой точки

$\mathbf{u}_A (x_A, y_A)$. Графически радиус-вектор изображают отрезком OA со стрелкой, направленной в точку A .

Скалярное произведение векторов

$$\mathbf{u}_A \mathbf{u}_B = x_A x_B + y_A y_B \quad (1.7)$$

Важными моментами моделирования являются определение отрезка и угла. Отрезок прямой, соединяющий две точки, задается метрикой (1.5). Для определения угла между векторами можно воспользоваться скалярным произведением этих векторов

$$\cos \varphi = \frac{\mathbf{u}_A \mathbf{u}_B}{|\mathbf{u}_A| \cdot |\mathbf{u}_B|} \quad (1.8)$$

Линия может быть определена как движение точки по траектории заданной уравнением в параметрической форме

$$x = f_x(t); y = f_y(t) ,$$

где t – произвольный параметр (в частности – время).

Тогда $\mathbf{V}(t) = (df_x/dt; df_y/dt)$ – скорость движения по линии. Длина линии – обобщение метрики

$$l = \int_a^b \sqrt{\mathbf{v}(t) \mathbf{v}(t)} dt = \int_a^b |\mathbf{v}(t)| dt \quad (1.9)$$

Выражение (1.9) наглядно показывает связь физики с геометрией.

1.4. Барицентрические координаты

Для более ясного понимания сущности барицентрических координат рассмотрим положение точки C на отрезке AB . Координатами, определяющими положение точки, могут быть относительные расстояния от концов отрезка до этой точки

$$q_A = AC^2 / AB^2 ; q_B = BC^2 / AB^2.$$

При этом выполняются следующие условия:

- сумма координат равна 1;
- координаты положительны, если точка лежит внутри отрезка.

Такие координаты называются **барицентрическими** координатами на прямой. Заметим, что барицентрические координаты дают избыточную информацию (для определения положения точки на прямой достаточно одной координаты). Важным свойством барицентрических координат является то, что определяемая точка представляет собой центр масс системы материальных точек, имеющих массы, равные координатам (q_A , q_B), и расположенных на соответствующих концах отрезка. Именно это свойство и отражает название координатной системы.

Барицентрические координаты на плоскости задаются относительно трех точек, не лежащих на одной прямой (см. рис. 1.9).

Выберем на плоскости три точки, образующие треугольник ABC. Определим высоты этого треугольника H_A , H_B , H_C . Возьмем произвольную точку E. Определим высоты треугольников EBC, EAC, EAB соответственно h_A , h_B , h_C . Тогда $q_A = h_A / H_A$; $q_B = h_B / H_B$; $q_C = h_C / H_C$ - барицентрические координаты точки E на плоскости.

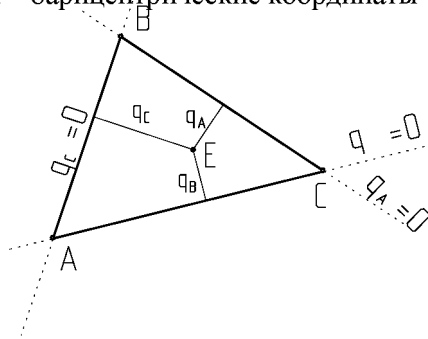


Рис. 1.9. Барицентрические координаты на плоскости

Обычно, определяя барицентрические координаты, говорят о том, что они равны массам, размещенным в точках A, B, C, при условии размещения центра масс в точке E. Но это - скорее физическая, чем геометрическая характеристика.

Важные свойства барицентрических координат:

$$q_A + q_B + q_C = 1; \quad (1.10)$$

- барицентрические координаты не изменяются при повороте всей системы относительно любого центра;
- барицентрические координаты не изменяются при параллельном переносе системы;
- барицентрические координаты точек, расположенных внутри треугольника ABC , положительны; точки, расположенные вне треугольника ABC , имеют одну или две отрицательные координаты;
- одна из координат точек, расположенных на сторонах треугольника ABC, равна 0; как следствие этого свойства - уравнения прямых, проходящих через стороны треугольника ABC в барицентрической системе координат

$$q_A = 0 ; q_B = 0 ; q_C = 0 ;$$

- уравнения прямых, параллельных сторонам треугольника

$$q_A = \text{const} ; q_B = \text{const} ; q_C = \text{const} ;$$

- одна из координат точек, расположенных в вершинах треугольника ABC , равна 1, а две другие - 0;
- площади треугольников EBC, EAC, EAB пропорциональны барицентрическим координатам точки E , а их сумма равна площади треугольника ABC.

Барицентрические координаты безразмерны и неизотропны, так как отношения длин имеют разные знаменатели. Поэтому вводить понятие метрики в барицентрической системе координат не имеет смысла. Если потребуется определение расстояния между двумя точками, заданными в барицентрической системе, то следует использовать традиционную геометрию на плоскости, заданной тремя базовыми точками (A, B, C) , или переходить к другой системе координат.

Прямоугольные координаты точки E (см. рис. 1.10) , заданной барицентрическими координатами q_A, q_B, q_C , вычисляются по формулам:

$$x_E = x_A q_A + x_B q_B + x_C q_C ;$$

$$y_E = y_A q_A + y_B q_B + y_C q_C , \quad (1.10)$$

где x_A, y_A - координаты базовых точек A, B, C.

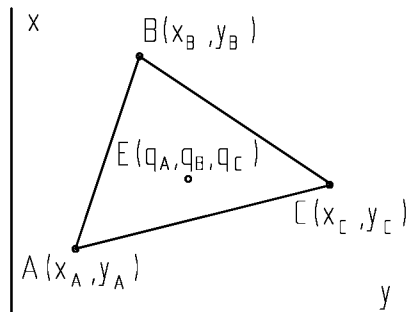


Рис. 1.10. Связь декартовых и барицентрических координат

Для вычисления барицентрических координат точки, заданной в прямоугольной (декартовой) системе координат, необходимо решить систему уравнений

$$\begin{aligned} q_A + q_B + q_C &= 1; \\ x_1 q_A + x_2 q_B + x_3 q_C &= 0; \\ y_1 q_A + y_2 q_B + y_3 q_C &= 0. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Полученное решение имеет вид

$$\begin{aligned} q_A &= \frac{x_2 y_3 - x_3 y_2}{D}; \quad q_B = \frac{x_3 y_1 - x_1 y_3}{D}; \quad q_C = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{D}; \\ D &= x_B y_C + x_C y_A + x_A y_B - x_B y_A - x_C y_B - x_A y_C; \\ x_1 &= x_E - x_A; \quad x_2 = x_E - x_B; \quad x_3 = x_E - x_C; \\ y_1 &= y_E - y_A; \quad y_2 = y_E - y_B; \quad y_3 = y_E - y_C. \end{aligned} \quad (1.12)$$

В геометрическом моделировании барицентрические координаты играют, в основном, вспомогательную роль. Самое очевидное их применение – приведение координат к безразмерному виду.

Вопросы для самоконтроля к гл. 1

1. Определите понятие "модель".
2. Дайте определение терминам "метрика" и "мера".
3. Перечислите основные свойства модели.
4. Оцените погрешность задания положения точки в различных системах координат.
5. Что называется радиус-вектором?

6. Что такое барицентрические координаты?

2. Методы начертательной геометрии в моделировании

Мы живем в трехмерной реальности, и поэтому любое наше действие требует геометрических построений.

Для того чтобы взять предмет, мы должны решить целый набор геометрических задач: оценить форму и размеры предмета, оценить расстояние до предмета, построить траекторию перемещения руки, контролировать перемещение руки до момента надежного и безопасного захвата. Наш мозг в первые годы жизни учится решать эти задачи, и мы не задумываемся о том, какие алгоритмы он использует. Но если мы хотим построить механизм, выполняющий функции руки (или понять, как он работает), то алгоритмы решения этих задач необходимо разработать (или изучить).

Нас окружают геометрические объекты созданные природой (естественные) или человеком (искусственные). Форма и размеры естественных объектов создавались в процессе эволюции в соответствии с физическими и биологическими законами. Алгоритмы построения геометрических параметров естественных объектов еще не изучены. Можно сказать, что человечество пока и не приступило к их изучению.

Искусственные объекты мы создаем так, чтобы они были приспособлены к естественным (к человеку и окружающей среде). Разумеется, физические законы являются определяющими при проектировании, но для их применения необходимы геометрические данные. Чтобы получить эти данные, нужно решить ряд геометрических задач.

2.1. Введение в плоское моделирование

Глаз и мозг человека достоверно и точно воспринимают форму и размеры только на плоскости. Поэтому чертеж является естественным

средством коммуникации, при передаче геометрической информации в системах, составной частью которых является человек. Построение чертежа объемного тела – одна из задач начертательной геометрии. Другая задача – преобразование чертежа с целью получения новой информации. Вопреки мнению, распространенному среди части инженеров, методы начертательной геометрии широко применяются в аналитических решениях, использующихся при моделировании.

2.1.1. Данные для моделирования

В процессе моделирования конструктор должен определить числовые параметры модели и выполнить чертеж.

Часто при построении геометрической модели используется прототип (модель аналогичной конструкции), и некоторые данные конструктор имеет в окончательном виде. Для получения недостающих данных применяют два способа: получение данных расчетом с последующей проверкой построениями или получение данных построениями с последующей проверкой расчетом. Иногда эти способы последовательно чередуются. В любом случае обязательным является получение и чертежа, и числовых параметров. Переход от числовых данных к изображению и обратный переход от изображения к числовым параметрам требуют применения различных инструментов и всегда имеют погрешности, которые следует учитывать при оценке точности моделирования.

***Замечание.** В компьютерных технологиях инструментом являются алгоритмы и программы, которые базируются на соответствующих математических моделях. Этот инструмент теоретически намного точнее чертежных принадлежностей (линейка, циркуль), но при его создании на каждом этапе принимались различные допущения и ограничения, которые влияют на точность. В некоторых задачах точность зависит от числа итераций (разбиений, повторений и т.п.).*

2.1.2. Проецирование

Считается, что зрение позволяет нам воспринимать мир в объеме. Это не совсем правильно. Мы воспринимаем двумерную картину, но ряд факторов позволяет нам преобразовывать ее в объемную. Во-первых, два глаза позволяют увидеть предмет с разных точек, во-вторых, этот эффект усиливается постоянным перемещением головы, и наконец – размер видимого предмета уменьшается с увеличением расстояния, что позволяет оценить дальность при наличии опыта. На самом деле трехмерный предмет **проецируется** на двумерную сетчатку, и далее мы обрабатываем уже двумерное изображение, переводя его в трехмерный образ предмета. Начертательная геометрия заимствует этот подход, используя вместо сетчатки глаза плоскость (обычно лист бумаги).

Для выполнения операции проецирования нужно задать **аппарат проецирования**: поверхность проекций и направление проецирования. Цель проецирования – получение изображения предмета на поверхности проекций.

Через каждую точку предмета проводим **проецирующую прямую**. Эта прямая проходит через центр проецирования (см. рис. 2.1, а) или параллельно заданной прямой (см. рис. 2.1, б). В первом случае мы имеем дело с центральным проецированием, во втором – с параллельным. Точка пересечения этой прямой с поверхностью проекций называется **проекцией точки**. Множество проекций всех точек предмета составляют проекцию этого предмета.

Проницательный читатель резонно заметит: "Множество точек, принадлежащих предмету, бесконечно, а значит, построить проекцию предмета невозможно, ибо нельзя объять необъятное". Читатель неправ - построить проекцию предмета можно, используя свойства проецирования.

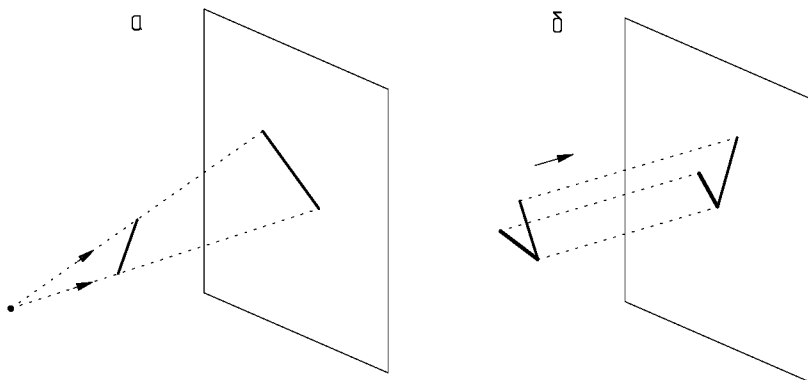


Рис. 2.1. Проецирование: а - центральное, б - параллельное

2.1.3. Свойства параллельного проецирования

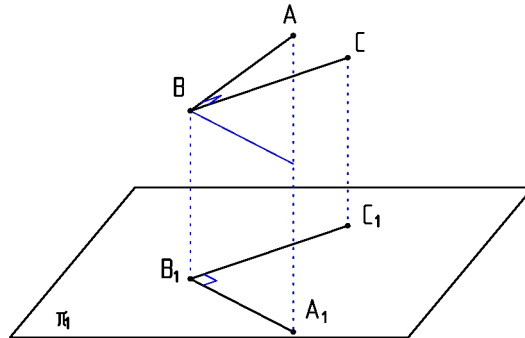
В машиностроении используют параллельное проецирование (все проецирующие прямые параллельны). Аппарат проецирования: поверхность проекций – плоскость, направление – прямая.

Если проецирующая прямая перпендикулярна плоскости проекций, то проецирование называют ортогональным. В остальных случаях (угол наклона проецирующей прямой к плоскости проекций не равен 90 град.) проецирование называют косоугольным. В дальнейшем мы будем рассматривать в основном ортогональное проецирование. Свойства проецирования устанавливают соответствие проекции и объекта, который проецируется.

Основные свойства параллельного проецирования:

- каждой точке пространства соответствует единственная проекция в заданном аппарате проецирования; обратного соответствия нет: точка на плоскости проекций является проекцией любой точки, лежащей на проходящей через нее проецирующей прямой;
- проекция прямой – прямая, при этом проекции точек, принадлежащих прямой, лежат на соответствующих проекциях прямой; это свойство позволяет построить проекцию прямой по проекциям двух точек;

- проекции параллельных прямых параллельны; это свойство позволяет построить проекцию прямой по проекции одной точки параллельно заданной проекции прямой;
- пропорциональность параллельных отрезков сохраняется;
- отрезок прямой, параллельной плоскости проекций, проецируется в натуральную величину;



$$(BC) \perp \pi_1; \angle ABC = 90^\circ \rightarrow \angle A_1B_1C_1 = 90^\circ.$$

Рис. 2.2. Проецирование прямого угла

- угол между двумя прямыми, лежащими в плоскости параллельной плоскости проекций, проецируется в натуральную величину;
- при ортогональном проецировании прямой угол проецируется в натуральную величину, если одна из его сторон параллельна плоскости проекций (это свойство известно как **теорема о проецировании прямого угла** – см. рис. 2.2).

Последние свойства позволяют определять линейные и угловые размеры объектов по их проекциям.

Особое место в проецировании занимают плоскости, проходящие через проецирующую прямую. Их называют **проецирующими плоскостями**. Проекциями таких плоскостей являются прямые. То есть проекции всех прямых, лежащих в проецирующей плоскости, совпадают. Следовательно, любой угол в проецирующей плоскости вырождается в прямую.

Это свойство проецирующей плоскости с одной стороны вызывает неудобство, связанное с потерей информации при проецировании, что необходимо учитывать. С другой стороны, использование проецирующей плоскости снижает размерность пространства, что позволяет решать ряд геометрических задач.

Перечисленные свойства показывают, что результативность применения проецирования при создании геометрической модели существенно зависит от выбора аппарата проецирования и взаимного расположения объекта и проецирующей плоскости.

2.1.4. Аксонометрические проекции

Рассмотрим проецирование точки, положение которой задано в декартовой системе координат $\mathbf{u}_A (x_A, y_A, z_A)$. Соединим точку с началом координат ломаной, состоящей из трех отрезков, параллельных осям координат (возможны 6 вариантов такой ломаной). Длины отрезков равны численным значениям координат, а составленная из них ломаная называется **координатной ломаной**.

Выберем плоскость проекций и направление проецирования. Спроецируем на выбранную плоскость систему координат, точку и координатную ломаную. Результатом выполненной операции будет плоское изображение трехмерной системы (см. рис. 2.3).

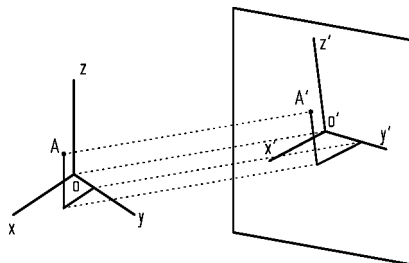


Рис. 2.3. Аксонометрическая проекция точки

Пусть проецирующая плоскость задана в системе координат единичным нормальным вектором $\mathbf{N}(n_x, n_y, n_z)$, где n_x, n_y, n_z – направляющие косинусы. Направление проецирования задано единичным

вектором $\mathbf{S}(s_x, s_y, s_z)$. Расстояние от плоскости до начала координат не влияет на проекцию и может быть любым. Тогда коэффициенты искажения по осям проекции можно определить формулами

$$\begin{aligned} u &= e_x / e = \sqrt{1 + \frac{n_x}{(\mathbf{NS})^2} - \frac{2n_x s_x}{\mathbf{NS}}}; \\ v &= e_y / e = \sqrt{1 + \frac{n_y}{(\mathbf{NS})^2} - \frac{2n_y s_y}{\mathbf{NS}}}; \\ w &= e_z / e = \sqrt{1 + \frac{n_z}{(\mathbf{NS})^2} - \frac{2n_z s_z}{\mathbf{NS}}}; \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $\mathbf{NS}$ – скалярное произведение векторов.

Углы между осями аксонометрической проекции определим, используя следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \cos \psi_{xz} &= [n_x^2(u^2 - 1) + n_z^2(w^2 - 1)] / 2 n_x n_z u w; \\ \cos \psi_{xy} &= [n_x^2(u^2 - 1) + n_y^2(v^2 - 1)] / 2 n_x n_y u v; \\ \cos \psi_{yz} &= [n_y^2(v^2 - 1) + n_z^2(w^2 - 1)] / 2 n_y n_z v w; \\ \psi_{xz} + \psi_{xy} + \psi_{yz} &= 360^\circ. \end{aligned} \quad (2.2)$$

При ортогональном проецировании $s_x = n_x$, $s_y = n_y$, $s_z = n_z$, $\mathbf{NS} = 1$ и формулы приобретают следующий вид:

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{1 - n_x^2}; \quad v = \sqrt{1 - n_y^2}; \quad w = \sqrt{1 - n_z^2}; \\ \cos \psi_{xz} &= -[n_x^4 + n_z^4] / 2 n_x n_z u w; \dots \end{aligned} \quad (2.3)$$

В общем случае аксонометрическая проекция не позволяет однозначно определить ни форму, ни размеры, ни положение объекта в заданной системе координат. На рис. 2.4 два различных параллелепипеда имеют совпадающие аксонометрические проекции.

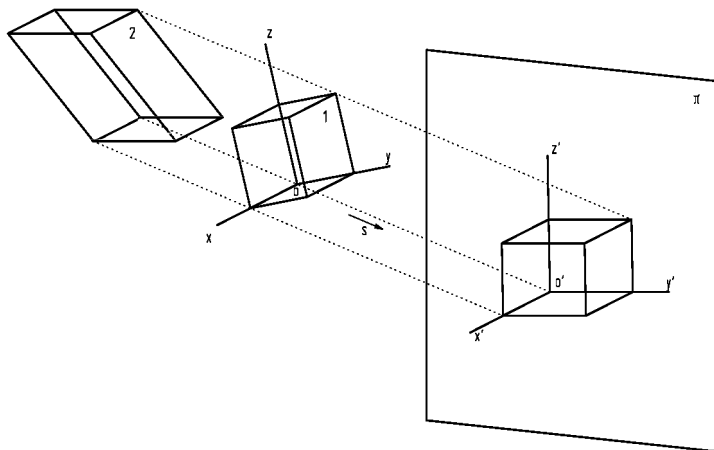


Рис. 2.4. Многозначность аксонометрической проекции

Если одна из координатных плоскостей параллельна плоскости проекций, то она проецируется в натуральную величину (коэффициенты искажения по соответствующим осям равны 1). При этом, если проецирование ортогональное, то одна из осей – проецирующая прямая. В этом случае аксонометрическая координатная ломаная не содержит отрезка, соответствующего этой оси.

Но если плоскость проекций параллельна плоской фигуре, то эта фигура проецируется в натуральную величину. Этот частный случай используется при построении машиностроительных чертежей.

2.1.5. Комплексный чертеж

Если спроецировать геометрический объект на плоскости параллельные координатным плоскостям в направлении ортогональных к этим плоскостям осей, а затем объединить полученные проекции на одном листе так, чтобы оси X и Z совпадали, то получим комплексный чертеж Монжа (см. рис. 2.5).

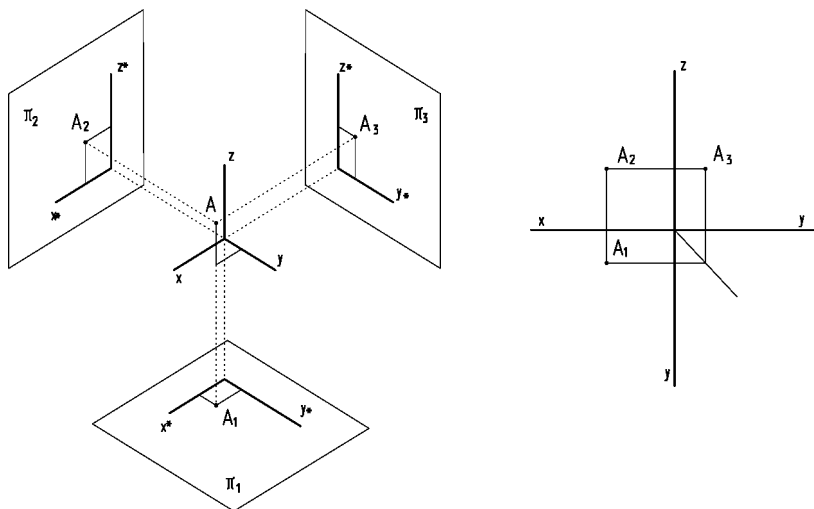


Рис. 2.5. Комплексный чертеж Монжа

Любые две проекции комплексного чертежа содержат полный набор координат каждой точки объекта (третья проекция может быть построена по двум заданным). Плоскость проекций, параллельная координатной плоскости xOy , называется **горизонтальной** и обозначается Π_1 . Соответственно, **фронтальная** (Π_2) и **профильная** (Π_3) плоскости проекций параллельны плоскостям xOz и zOy .

Вспомогательные линии, соединяющие проекции одной точки, называют **линиями связи**.

2.2. Геометрические объекты на чертеже

Для задания параметров геометрических объектов используются как числовые значения, так и чертежи. При решении проектных задач промежуточные и конечные результаты получают не только расчетом, но и построениями. Для расчетов используют методы аналитической и дифференциальной геометрии, для построений – методы начертательной геометрии. Форма представления и способы обработки данных в том и другом случаях разные. Как правило, при решении

требуется осуществлять переходы от одной формы задания данных к другой (при этом неизбежны погрешности перехода).

Далее рассмотрены варианты графического представления геометрических объектов и их аналитические описания.

2.2.1. Задание геометрических объектов

Классическая начертательная геометрия не требует введения меры. Для измерений здесь используется **натуральная величина** угла или отрезка. Кроме того, во многих задачах начертательной геометрии положение начала координат произвольное, поэтому оси не изображают на чертеже. Все это затрудняет переход от графической формы задания данных к числовой форме, необходимой для проведения расчетов. Простановка размеров на чертеже (то есть переход от классического комплексного чертежа к машиностроительному) позволяет решить эту проблему. При построении чертежа по заданным числовым параметрам или при определении числовых данных по графическому изображению следует отдавать предпочтение линейным размерам перед угловыми. Это позволит уменьшить погрешности перехода.

2.2.2. Способы задания прямой

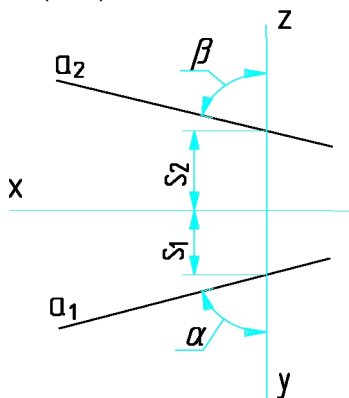
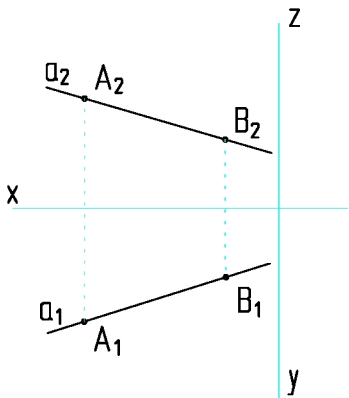
Возможны три варианта задания прямой на чертеже:

- проекциями на комплексном чертеже (см. рис. 2.6);
- радиус-векторами двух точек $\mathbf{u}_A (x_A, y_A, z_A)$; $\mathbf{u}_B (x_B, y_B, z_B)$;
- радиус-вектором $\mathbf{u}_A (x_A, y_A, z_A)$ и вектором $\mathbf{r}(l_r, m_r, n_r)$, параллельным прямой.

В зависимости от положения прямых относительно плоскостей проекций их подразделяют на прямые общего и частного положения. Прямые общего положения не параллельны и не перпендикулярны ни одной из плоскостей проекций. Варианты задания прямой общего положения представлены в таблице 2.1.

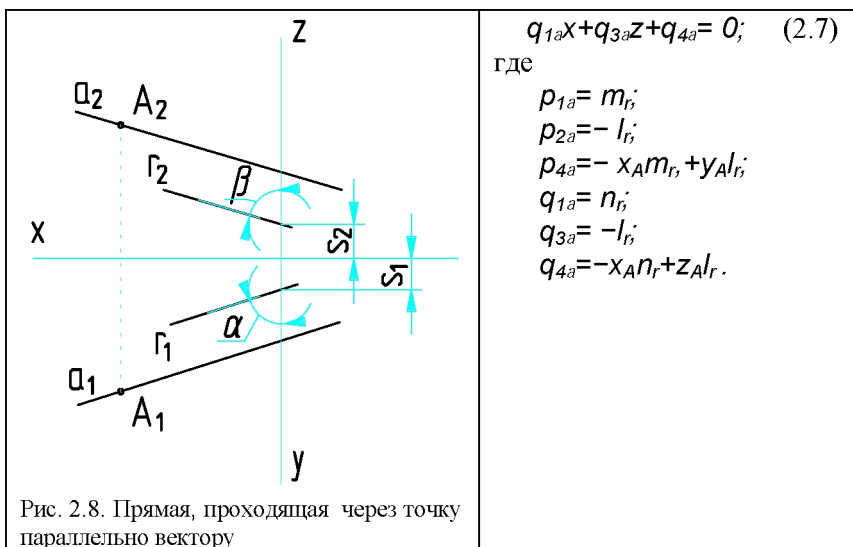
Таблица 2.1 дает наглядное представление о том, как можно от комплексного чертежа перейти к аналитическому описанию прямой или построить чертеж, используя числовые данные.

Таблица 2.1

На комплексном чертеже	Аналитическое описание
1. $a(a_1, a_2)$;  Рис. 2.6. Задание прямой проекциями на комплексном чертеже	Прямая задана системой уравнений в проецирующих плоскостях $a: \begin{cases} p_{a1}x + p_{a2}y + p_{a4} = 0; \\ q_{a1}x + q_{a3}z + q_{a4} = 0; \end{cases} \quad (2.4)$ где $p_{a1} = \text{Ctg}(\alpha)$; $p_{a2} = -1$; $p_{a4} = s_1$; $q_{a1} = \text{Ctg}(\beta)$; $q_{a3} = -1$; $q_{a4} = s_2$. Вектор, параллельный прямой a $a(l_a, m_a, n_a)$; $l_a = 1/d$; $m_a = \text{Ctg}(\alpha)/d$; $n_a = \text{Ctg}(\beta)/d$; (2.5) $d = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{Ctg}^2(\alpha) + \text{Ctg}^2(\beta)}}$
2. $a(a_1, a_2)$; $A \in a$; $B \in a$; или $a(A, B)$.  Рис. 2.7. Прямая, проходящая через две точки	Система уравнений в проецирующих плоскостях $a: \begin{cases} p_{a1}x + p_{a2}y + p_{a4} = 0; \\ q_{a1}x + q_{a3}z + q_{a4} = 0; \end{cases} \quad (2.6)$ где $\begin{aligned} p_{a1} &= y_B - y_A; \\ p_{a2} &= -x_B + x_A; \\ p_{a4} &= x_A y_B - x_B y_A; \\ q_{a1} &= z_B - z_A; \\ q_{a3} &= -x_B + x_A; \\ q_{a4} &= x_A z_B - x_B z_A; \end{aligned}$

Продолжение табл. 2.1

3. $a(a_1, a_2)$; $A \in a$; $r(r_1, r_2)$; $a \parallel r$.	Система уравнений в проецирующих плоскостях $a: p_{1a}x + p_{2a}y + p_{4a} = 0$;
--	--



$$q_{1a}x + q_{3a}z + q_{4a} = 0; \quad (2.7)$$

где

$$p_{1a} = m_r;$$

$$p_{2a} = -l_r;$$

$$p_{4a} = -x_A m_r + y_A l_r;$$

$$q_{1a} = n_r;$$

$$q_{3a} = -l_r;$$

$$q_{4a} = -x_A n_r + z_A l_r.$$

Замечание. Для решения задач начертательной геометрии положение начальной точки системы координат, как правило, не имеет значения - важно взаимное расположение геометрических объектов. В аналитической геометрии объекты всегда привязаны к началу координат. Поэтому для перехода от графического изображения к аналитическому описанию (и наоборот) необходимо задать положение осей на комплексном чертеже.

Во всех трех вариантах, представленных таблицей, прямая **a** аналитически описана системой уравнений в двух проецирующих плоскостях.

Применяется также параметрический вид описания прямой:

- по двум точкам $\mathbf{u} = \mathbf{u}_A + t(\mathbf{u}_B - \mathbf{u}_A);$ (2.8)

- через точку параллельно прямой $\mathbf{u} = \mathbf{u}_A + t \mathbf{r},$ (2.9)

где t - параметр.

Возможно аналитическое задание прямой, проходящей через точку перпендикулярно плоскости. На комплексном чертеже такая прямая получается построением (см. разд. 2.2.7).

Прямые частного положения подразделяют на **прямые уровня** (параллельные одной из плоскостей проекций) и **проецирующие**

(перпендикулярные одной плоскости проекций и параллельные двум другим).

На комплексном чертеже одна из проекций линии уровня параллельна оси OX (для системы $\pi_1-\pi_2$). Уравнения линий уровня в проецирующих плоскостях (2.4):

$$\begin{aligned} \text{- горизонталь} \quad & p_{1a}x + p_{2a}y + p_{4a} = 0; \\ & -z + q_{4a} = 0; \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} \text{- фронталь} \quad & -y + p_{4a} = 0; \\ & q_{1a}x + q_{3a}z + q_{4a} = 0; \end{aligned} \quad (2.11)$$

Одна из проекций проецирующей прямой - точка. Уравнения проецирующих прямых:

$$\begin{aligned} \text{- горизонтально-проецирующая} \quad & -y + y_a = 0; \\ & -x + x_a = 0; \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \text{- фронтально-проецирующая} \quad & -x + x_a = 0; \\ & -z + z_a = 0; \end{aligned} \quad (2.13)$$

где x_a, y_a, z_a - координаты точки - проекции прямой.

2.2.3. Способы задания плоскости

В таблице 2.2 представлены пять вариантов представления плоскости на комплексном чертеже и соответствующие им аналитические описания.

Общее уравнение плоскости θ :

$$a_{\theta 1}x + a_{\theta 2}y + a_{\theta 3}z + a_{\theta 4} = 0. \quad (2.14)$$

Общее уравнение плоскости можно преобразовать в **нормальное**

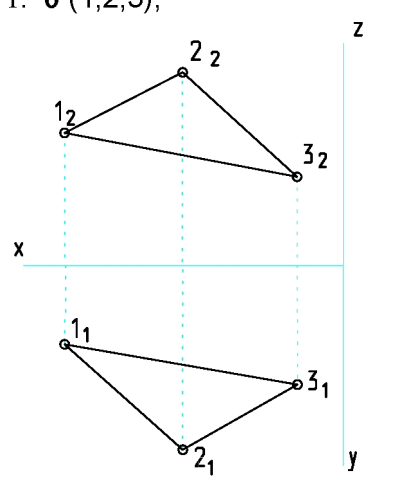
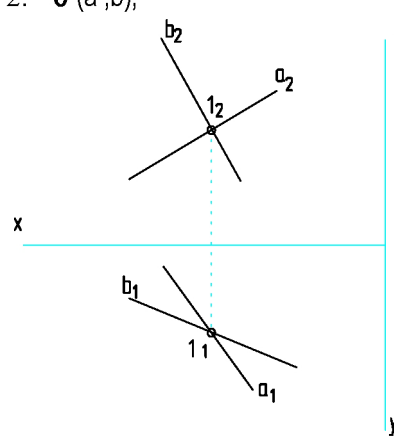
$$lx + my + nz + p = 0; \quad (2.15)$$

где $l = a_{\theta 1} / q; m = a_{\theta 2} / q; n = a_{\theta 3} / q;$

$$p = a_{\theta 4} / q; q = \sqrt{a_{\theta 1}^2 + a_{\theta 2}^2 + a_{\theta 3}^2}.$$

Таблица 2.2

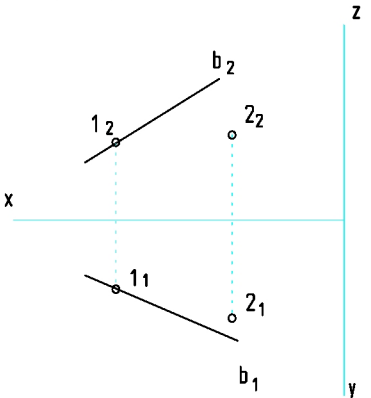
На комплексном чертеже	Аналитическое решение
------------------------	-----------------------

1. $\theta(1,2,3)$;  Рис. 2.9. Задание плоскости тремя точками	Дано: радиус-векторы точек $\mathbf{u}_1(x_1, y_1, z_1)$; $\mathbf{u}_2(x_2, y_2, z_2)$; $\mathbf{u}_3(x_3, y_3, z_3)$. Уравнение плоскости θ проходящей через три точки: $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0; \quad (2.16)$ или в векторной форме $(\mathbf{u} - \mathbf{u}_1)(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1)(\mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_1) = 0$. Коэффициенты уравнения (2.14): $a_{\theta 1} = (y_2 - y_1)(z_3 - z_1) - (y_3 - y_1)(z_2 - z_1)$; $a_{\theta 2} = (z_2 - z_1)(x_3 - x_1) - (z_3 - z_1)(x_2 - x_1)$; $a_{\theta 3} = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)$; $a_{\theta 4} = x_1(y_2 z_3 - y_3 z_2) - x_2(y_3 z_1 - y_1 z_3) - x_3(y_1 z_2 - y_2 z_1)$.
2. $\theta(a, b)$;  Рис. 2.10. Задание плоскости пересекающимися прямыми	Дано: радиус-вектор точки: $\mathbf{u}_1(x_1, y_1, z_1)$; векторы, заданные направляющими косинусами: $\mathbf{a}(l_a, m_a, n_a)$; $\mathbf{b}(l_b, m_b, n_b)$. Уравнение плоскости θ: $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ l_a & m_a & n_a \\ l_b & m_b & n_b \end{vmatrix} = 0; \quad (2.17)$ или в векторной форме $(\mathbf{u} - \mathbf{u}_1)\mathbf{a}\mathbf{b} = 0$.

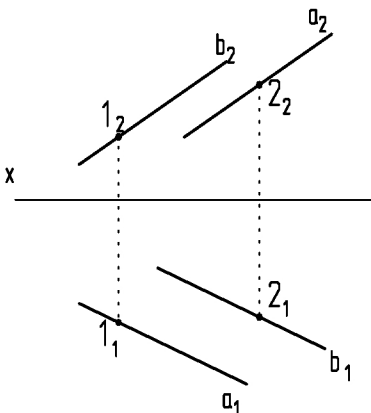
Аналитическое уравнение (2.17) варианта 2 задания плоскости трактуется более широко: плоскость, проходящая через точку параллельно двум прямым.

Замечание: для решения задач на комплексном чертеже знать координаты точки пересечения прямых не обязательно.

Продолжение табл. 2.2

3. $\theta(2, b); 2 \not\subset b;$  Рис. 2.11. Задание плоскости прямой и точкой	Дано: радиус-векторы точек – $u_1(x_1, y_1, z_1); u_2(x_2, y_2, z_2);$ вектор, заданный направляющими косинусами $b(l_b, m_b, n_b).$ Уравнение плоскости θ: $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_b & m_b & n_b \end{vmatrix} = 0, \quad (2.18)$ или в векторной форме $(u - u_1)(u_2 - u_1) \cdot b = 0.$
---	---

Аналитическое уравнение (2.18) варианта 3 задания плоскости трактуется более широко: плоскость, проходящая через две точки параллельно прямой.

4. $\theta(a, b); a \parallel b.$  Рис. 2.12. Задание плоскости параллельными прямыми	Для аналитического описания плоскости θ следует: - выделить на чертеже точки 1, 2: $u_1(x_1, y_1, z_1) \in a;$ $u_2(x_2, y_2, z_2) \in b;$ - определить направляющие косинусы вектора, параллельного прямым a, b: $b(l_b, m_b, n_b).$ - задать плоскость согласно варианту 3 уравнением (2.18).
--	--

Для решения задач на комплексном чертеже знать координаты точек 1, 2 в варианте 4 необязательно.

Окончание табл. 2.2

5. $\theta(f, h); [f \in \pi_2; h \in \pi_1]$

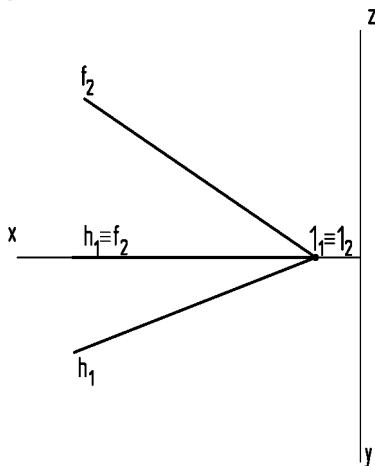


Рис. 2.13. Задание плоскости следами

Для аналитического описания плоскости θ следует:

- выделить на чертеже точку 1
($1 = f \cap h$) - $u_1(x_1, 0, 0)$;
- определить направляющие косинусы векторов, параллельных прямым f, h :

$f(l_f, m_f, n_f); h(l_h, m_h, n_h)$;

- задать плоскость аналогично варианту 2 - θ :

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y & z \\ l_a & m_a & n_a \\ l_b & m_b & n_b \end{vmatrix} = 0. \quad (2.19)$$

Следом плоскости называется линия пересечения этой плоскости с плоскостью проекций. Следовательно, одна из проекций следа на комплексном чертеже совпадает с координатной осью, а вторая - с самим следом. Этот способ задания плоскости является специфическим для начертательной геометрии.

Возможно аналитическое задание плоскости, проходящей через точку перпендикулярно прямой. На комплексном чертеже такая плоскость получается построением (см. разд. 2.2.8).

2.2.4. Особые случаи задания плоскости

В начертательной геометрии особое место занимают плоскости перпендикулярные или параллельные плоскостям проекций. Общее название таких плоскостей - плоскости частного положения. Все остальные плоскости называют плоскостями общего положения.

Плоскости, перпендикулярные плоскостям проекций, называют **проецирующими**. Проекции всех прямых проецирующей плоскости на перпендикулярную ей плоскость проекций совпадают со следом плоскости.

В этом случае плоскость содержит перпендикуляр к одной из плоскостей проекций и ее уравнение упрощается. Например, уравнение горизонтально проецирующей плоскости (рис. 2.14, а) имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad (2.20)$$

или $a_1x + a_2y + a_4 = 0$, где $a_1 = m_1$, $a_2 = l_1$, $a_4 = (y_1l_1 - x_1m_1)$.

Если проецирующая плоскость параллельна другой плоскости проекций, то она называется **плоскостью уровня**.

В этом случае плоскость содержит две прямые параллельные осям координат. Например, уравнение горизонтальной плоскости уровня (рис. 2.14, б) имеет вид

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad (2.21)$$

или $a_3z + a_4 = 0$, где $a_3 = 1$, $a_4 = z_1$.

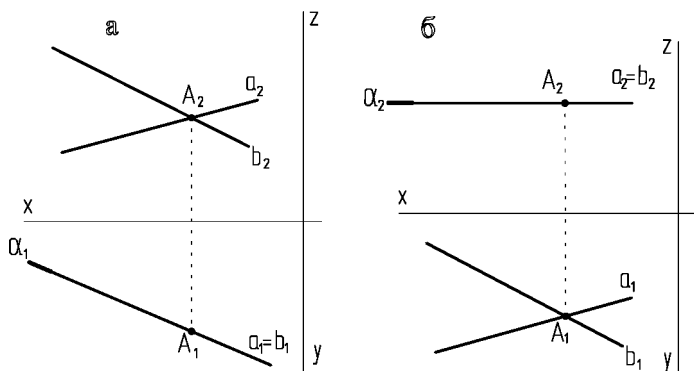


Рис. 2.14. Плоскости частного положения: а - горизонтально-проецирующая, б - горизонтальная плоскость уровня

Применение проецирующих плоскостей позволяет снизить размерность пространства поиска при решении позиционных задач начертательной геометрии. Геометрические объекты, лежащие в плоскости уровня, проецируются в натуральную величину. Это свойство

применяют при решении метрических задач начертательной геометрии.

2.2.5. Взаимное положение прямых

Пусть прямые a и b заданы системами уравнений в двух проецирующих плоскостях:

$$\begin{aligned} a: p_{a1}X - p_{a2}Y - p_{a4} &= 0; \\ q_{a1}X - q_{a3}Z - q_{a4} &= 0; \\ b: p_{b1}X - p_{b2}Y - p_{b4} &= 0; \\ q_{b1}X - q_{b3}Z - q_{b4} &= 0. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Параллельные прямые (см. рис. 2.15, а) задаются на комплексном чертеже параллельными проекциями (на всех плоскостях проекций). Аналитическим условием параллельности является пропорциональность коэффициентов уравнений (2.4):

$$p_{a1}/p_{b1} = p_{a2}/p_{b2}; \quad q_{a1}/q_{b1} = q_{a3}/q_{b3}. \quad (2.23)$$

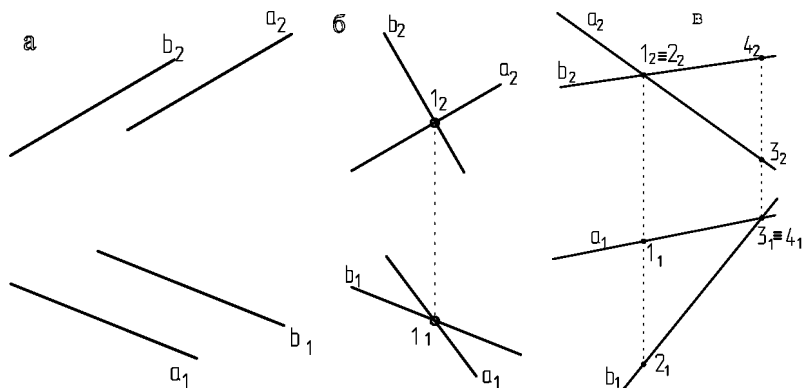


Рис. 2.15. Взаимное положение прямых: а – параллельные, б – пересекающиеся, в – скрещивающиеся

Пересекающиеся прямые (см. рис. 2.15, б) на комплексном чертеже имеют общую точку (проекции этой точки лежат на одной линии связи и принадлежат на каждой из плоскостей проекций одновременно двум проекциям прямых).

Координаты точки пересечения прямых:

$$x = \frac{p_{a2}p_{b4} - p_{b2}p_{a4}}{p_{a1}p_{b2} - p_{b1}p_{a2}} = \frac{q_{a3}q_{b4} - q_{b3}q_{a4}}{q_{a1}q_{b3} - q_{b1}q_{a3}} ;$$

$$y = \frac{p_{a1}p_{b4} - p_{b1}p_{a4}}{p_{a1}p_{b2} - p_{b1}p_{a2}} ; \quad z = \frac{q_{a1}q_{b4} - q_{b1}q_{a4}}{q_{a1}q_{b3} - q_{b1}q_{a3}} . \quad (2.24)$$

Точки, принадлежащие разным прямым, лежащие на одной проецирующей прямой (совпадающие только на одной из плоскостей проекций), называют **конкурирующими**. Эти точки используют для определения видимости прямых на комплексном чертеже. Конкурирующие точки - признак **скрещивающихся прямых** на комплексном чертеже (см. рис. 2.15, в). Для скрещивающихся прямых выполняется условие

$$\frac{p_{a2}p_{b4} - p_{b2}p_{a4}}{p_{a1}p_{b2} - p_{b1}p_{a2}} \neq \frac{q_{a3}q_{b4} - q_{b3}q_{a4}}{q_{a1}q_{b3} - q_{b1}q_{a3}} . \quad (2.25)$$

2.2.6. Принадлежность

Если точка принадлежит прямой, то на комплексном чертеже проекции этой точки принадлежат соответствующим проекциям прямой. В аналитическом описании подстановка координат точки в уравнение прямой обращает его в тождество.

Точка принадлежит плоскости, если принадлежит прямой, лежащей в этой плоскости. Это легко проверяется на комплексном чертеже. Если известно уравнение плоскости, то подстановка координат точки в это уравнение обращает его в тождество.

Прямая принадлежит плоскости, если она проходит через две точки, принадлежащие этой плоскости. Построения на комплексном чертеже следует проводить в соответствии с этим правилом. При аналитической проверке должны выполняться следующие условия: пусть плоскость задана тремя точками 1, 2, 3 - уравнение (2.14); прямая задана двумя точками А, В - уравнение (2.8); тогда условие параллельности прямой и плоскости

$$((\mathbf{u}_B - \mathbf{u}_A) - \mathbf{u}_1)(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1)(\mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_1) = 0. \quad (2.26)$$

Если одновременно выполняется

$$(\mathbf{u}_A - \mathbf{u}_1)(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1)(\mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_1) = 0, \quad (2.27)$$

то прямая лежит в плоскости.

2.2.7. Построение перпендикуляра к плоскости

Прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в этой плоскости. С учетом теоремы о проецировании прямого угла это условие можно сформулировать следующим образом: проекции перпендикуляра к плоскости перпендикулярны проекциям линий уровня, принадлежащим этой плоскости.

Аналитическое описание прямой, перпендикулярной заданной плоскости, приведено в табл. 2.3.

Таблица 2.3

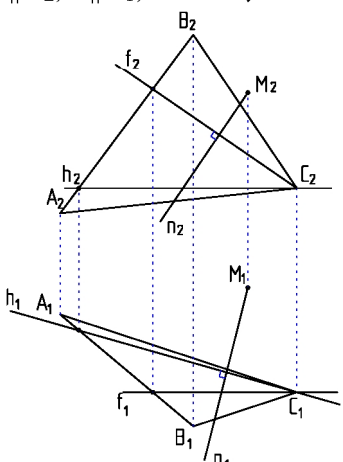
На комплексном чертеже	Аналитическое решение
$\theta(A, B, C); M(M_1, M_2); f \perp \theta, h \perp \theta,$ $f \parallel \pi_2, h \parallel \pi_1; n_1 \perp h_1, n_2 \perp f_2; \rightarrow n \perp \theta$ 	Уравнения прямой, перпендикулярной плоскости и проходящей через точку M, в канонической форме $\frac{x - x_M}{l_n} = \frac{y - y_M}{m_n} = \frac{z - z_M}{n_n}, \quad (2.28)$ где $\mathbf{u}_M (x_M, y_M, z_M)$ - радиус-вектор точки M; l_n, m_n, n_n - направляющие косинусы прямой n, полученные приведением уравнения плоскости θ - (2.14) к нормальному виду (2.15).

Рис. 2.16. Построение перпендикуляра к плоскости

Для построения перпендикуляра к плоскости на комплексном чертеже (см.рис. 2.16) необходимо:

- построить в плоскости линии уровня (фронталь и горизонталь);
- провести фронтальную проекцию прямой перпендикулярно фронтальной проекции фронтали через проекцию заданной точки;
- провести горизонтальную проекцию прямой перпендикулярно горизонтальной проекции горизонтали через проекцию заданной точки.

2.2.8. Построение плоскости, перпендикулярной заданной прямой

Эта операция является обратной построению перпендикуляра к плоскости, поэтому условие, сформулированное в разд. 2.2.7, применимо и здесь. Аналитическое описание плоскости, перпендикулярной заданной прямой, приведено в табл. 2.4.

Таблица 2.4

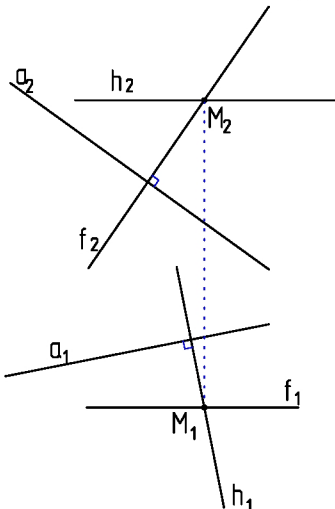
На комплексном чертеже	Аналитическое решение
$f_2 \perp \pi_2; h_2 \perp \pi_1; M \in f; M \in h;$ $h_1 \perp a_1; f_2 \perp a_2; \rightarrow \Sigma(f, h) \perp a.$ 	Уравнение плоскости Σ, перпендикулярной заданной прямой: $p_{2a}q_{3a}(x-x_M)+p_{1a}q_{3a}(y-y_M)+p_{2a}q_{1a}(z-z_M)=0, \quad (2.29)$ где $u_M(x_M, y_M, z_M)$ - радиус-вектор точки M; а: $p_{1a}x - p_{2a}y - p_{4a} = 0;$ $q_{1a}x - q_{3a}z - q_{4a} = 0;$ - уравнения прямой а в проецирующих плоскостях (2. 4).

Рис. 2.17. Построение плоскости, перпендикулярной прямой

Для построения на комплексном чертеже плоскости перпендикулярной прямой (см. рис. 2.17) необходимо:

- через проекцию заданной точки провести фронтальную проекцию фронтали перпендикулярно фронтальной проекции прямой;
- через проекцию заданной точки провести горизонтальную проекцию горизонтали перпендикулярно горизонтальной проекции прямой.

Полученные фронталь и горизонталь, пересекающиеся в заданной точке, определяют плоскость.

2.3. Решение геометрических задач на чертеже

Задачи, результат решения которых – натуральная величина геометрического объекта, называют **метрическими**. Определение взаимного положения геометрических объектов – **позиционная задача**. Далее приводится решение четырех задач методами начертательной геометрии. Графические построения сопровождаются аналитическими описаниями по шагам и окончательным аналитическим решением. Это дает возможность сопоставления графического и аналитического подходов к решению задачи.

2.3.1. Метод прямоугольного треугольника

Этот метод позволяет по двум проекциям отрезка определить его истинный размер и угол наклона к плоскости проекций. Любой отрезок представляет собой диагональ прямоугольного параллелепипеда, сторонами которого являются разности координат концов отрезка (см. рис. 2.18, а). Прямоугольный треугольник, один катет которого - проекция отрезка, а другой - разность координат концов отрезка в направлении проецирования, может быть построен на любой плоскости проекций. Гипотенуза этого треугольника - натуральная длина отрезка. Угол, примыкающий к проекции отрезка, - угол наклона отрезка к плоскости проекций.

Метод прямоугольного треугольника – один из методов решения метрических задач.

Аналитическая аналогия метода прямоугольного треугольника очевидна:

$$r_{AO} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}. \quad (2.30)$$

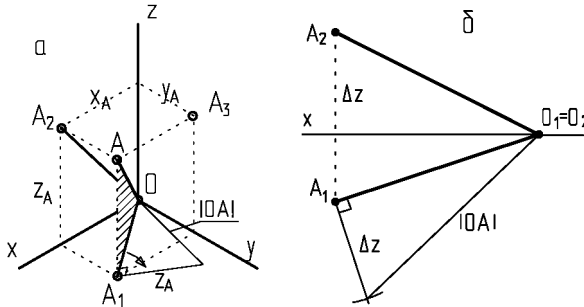


Рис. 2.18. Метод прямоугольного треугольника: а - наглядное представление, б - решение на комплексном чертеже

2.3.2. Пересечение прямой с плоскостью общего положения

Рассмотрим варианты графического и аналитического определения точки пересечения прямой и плоскости.

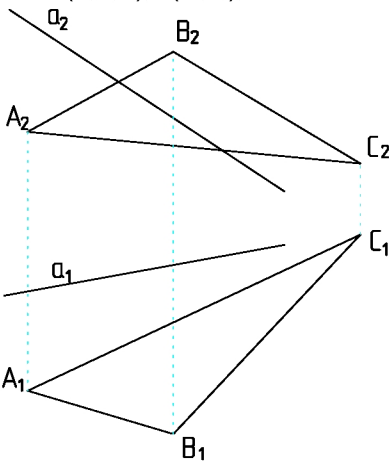
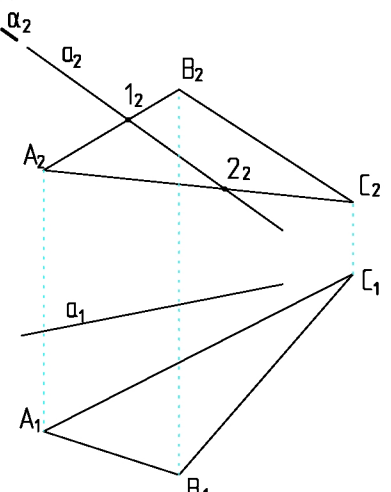
Графическое решение этой задачи по шагам представлено таблицей 2.5. Параллельные аналитические описания каждого шага и приведенное в конце раздела аналитическое решение дают почву для размышлений о выборе метода.

Вводим вспомогательную проецирующую плоскость α (α_2), проходящую через прямую а.: α (α_2) $\perp \pi_2$; $a \subset \alpha$.

Определяем точки 1, 2 пересечения вспомогательной плоскости с прямыми (AB), (AC), принадлежащими плоскости $\theta(A,B,C)$.

Проекция точек 1, 2 [$1 = \alpha \cap (AB)$; $2 = \alpha \cap (AC)$] на фронтальную плоскость определяют их координаты x_1, x_2 и z_1, z_2 . Координаты y_1, y_2 получают, используя условие принадлежности точек $u_1(x_1, y_1, z_1)$; $u_2(x_2, y_2, z_2)$ прямым (AB), (AC) . Полученные точки принадлежат линии пересечения плоскостей общего и частного положения $\theta \cap \alpha = b$.

Таблица 2.5

На комплексном чертеже	Аналитическое решение
0. $\theta(A, B, C); a(a_1, a_2);$  Рис. 2.19. Исходный чертеж	Дано: радиус-векторы трех точек, определяющих плоскость – $\mathbf{u}_A(x_A, y_A, z_A); \mathbf{u}_B(x_B, y_B, z_B); \mathbf{u}_C(x_C, y_C, z_C)$; прямая, заданная системой уравнений (2.4) $a: p_{a1}x - p_{a2}y - p_{a4} = 0;$ $q_{a1}x - q_{a3}z - q_{a4} = 0.$ Уравнение плоскости θ - (2.14): $a_{\theta 1}x + a_{\theta 2}y + a_{\theta 3}z + a_{\theta 4} = 0;$ где $a_{\theta 1} = (y_B - y_A)(z_C - z_A) - (y_C - y_A)(z_B - z_A);$ $a_{\theta 2} = (z_B - z_A)(x_C - x_A) - (z_C - z_A)(x_B - x_A);$ $a_{\theta 3} = (x_B - x_A)(y_C - y_A) - (x_C - x_A)(y_B - y_A);$ $a_{\theta 4} = x_A(y_B z_C - y_C z_B) - x_B(y_C z_A - y_A z_C) - x_C(y_A z_B - y_B z_A).$
1.  Рис. 2.20. Построение вспомогательной проецирующей плоскости	Уравнения прямых (AC) и (AB) в проецирующих плоскостях $(y_C - y_A)x - (x_C - x_A)y - x_A y_C + x_C y_A = 0,$ $(z_C - z_A)x - (x_C - x_A)z - x_A z_C + x_C z_A = 0,$ (2.31) $(y_B - y_A)x - (x_B - x_A)y - x_A y_B + x_B y_A = 0,$ $(z_B - z_A)x - (x_B - x_A)z - x_A z_B + x_B z_A = 0,$ (2.32) Уравнение плоскости α: $a_{\alpha 1}x + a_{\alpha 2}y + a_{\alpha 3}z + a_{\alpha 4} = 0;$ (2.33) где $a_{\alpha 1} = q_{a1}; a_{\alpha 2} = 0; a_{\alpha 3} = q_{a3};$ $a_{\alpha 4} = q_{a4};$ Радиус-векторы точек пересечения плоскости α и прямых (AB), (AC) - $\mathbf{u}_1(x_1, y_1, z_1); \mathbf{u}_2(x_2, y_2, z_2).$

Аналитически радиус-векторы точек 1, 2 $\mathbf{u}_1(x_1, y_1, z_1); \mathbf{u}_2(x_2, y_2, z_2)$

- получаем, решая последовательно систему из уравнения плоскости (2.33) и второго уравнения системы (2.31), а затем (2.32):

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{d_1} \begin{vmatrix} -q_{a4} & q_{a3} \\ x_A - x_B & x_A z_B - x_B z_A \end{vmatrix}; \\
z_1 &= \frac{1}{d_1} \begin{vmatrix} q_{a1} & -q_{a4} \\ z_B - z_A & x_A z_B - x_B z_A \end{vmatrix}; \\
d_1 &= \begin{vmatrix} q_{a1} & q_{a3} \\ z_B - z_A & x_A - x_B \end{vmatrix};
\end{aligned} \tag{2.34}$$

$$\begin{aligned}
x_2 &= \frac{1}{d_2} \begin{vmatrix} -q_{a3} & q_{a4} \\ x_A - x_C & x_A z_C - x_C z_A \end{vmatrix}; \\
z_2 &= \frac{1}{d_2} \begin{vmatrix} q_{a4} & q_{a1} \\ x_A z_C - x_C z_A & z_C - z_A \end{vmatrix}; \\
d_2 &= \begin{vmatrix} q_{a1} & -q_{a3} \\ z_C - z_A & x_A - x_C \end{vmatrix}.
\end{aligned} \tag{2.35}$$

Недостающую координату получаем подстановкой известной координаты x в первое уравнение системы (2.31), а затем (2.32):

$$\begin{aligned}
y_1 &= \frac{(y_B - y_A)x_1 - x_A y_B + x_B y_A}{x_B - x_A}; \\
y_2 &= \frac{(y_C - y_A)x_2 - x_A y_C + x_C y_A}{x_C - x_A};
\end{aligned} \tag{2.36}$$

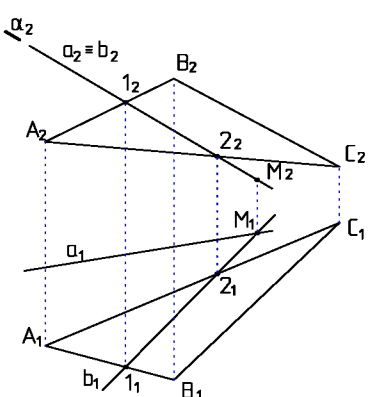
Прямые a и b лежат в одной плоскости α . Возможны два варианта: прямые параллельны, прямые пересекаются. Первый вариант свидетельствует о том, что прямая параллельна плоскости. Во втором варианте точка пересечения прямых M является точкой пересечения прямой a с заданной плоскостью θ $[b(1,2) \subset \theta; b(1,2) \subset \alpha; a \cap b = M; M = a \cap \tilde{\alpha}]$. Ее координаты определяются соотношениями:

$$\begin{aligned}
 x_M &= \frac{1}{d_M} \begin{vmatrix} -p_{a2} & p_{a4} \\ x_1 - x_2 & x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{vmatrix}; \\
 y_M &= \frac{1}{d_M} \begin{vmatrix} p_{a4} & p_{a1} \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix}; \\
 d_M &= \begin{vmatrix} p_{a1} & -p_{a2} \\ y_2 - y_1 & x_1 - x_2 \end{vmatrix}.
 \end{aligned} \quad (2.38)$$

Недостающую координату получаем подстановкой известной координаты x во второе уравнение системы (2.37):

$$z_M = \frac{(y_2 - y_1)x_M - x_1 y_2 + x_2 y_1}{x_2 - x_1}. \quad (2.39)$$

Продолжение табл. 2.5

2.  Рис. 2.21. Построение точки пересечения	Уравнения линии пересечения плоскостей $\theta n \alpha = b$: $ \begin{aligned} (y_2 - y_1)x - (x_2 - x_1)y - x_1 y_2 - x_2 y_1 &= 0; \\ (z_2 - z_1)x - (x_2 - x_1)z - x_1 z_2 - x_2 z_1 &= 0; \end{aligned} \quad (2.37) $ Радиус-вектор точки пересечения прямой и плоскости - $u_M(x_M, y_M, z_M)$ получим, решив систему уравнений двух прямых (2.34), (2.37) относительно x и y, а затем подставив полученное значение x в одно из уравнений для определения координаты z (см. далее (2.38), (2.39)).
---	---

Аналитическое решение этой задачи получают решением системы трех уравнений: уравнения плоскости и двух уравнений, определяющих прямую.

$$\begin{cases} p_{a1}x - p_{a2}y - p_{a4} = 0; \\ q_{a1}x - q_{a3}z - q_{a4} = 0; \\ a_{\theta 1}x + a_{\theta 2}y + a_{\theta 3}z + a_{\theta 4} = 0. \end{cases} \quad (2.40)$$

Координаты радиус-вектора точки пересечения вычисляются по формулам

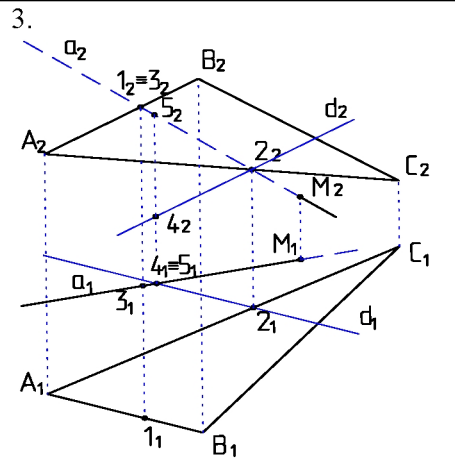
$$x_M = - \frac{a_{02}p_{a4}q_{a3} + a_{03}p_{a2}q_{a4} - a_{04}p_{a2}q_{a3}}{a_{01}p_{a2}q_{a3} + a_{02}p_{a1}q_{a3} + a_{03}p_{a2}q_{a1}}; \quad (2.41)$$

$$y_M = (p_{a1}x_M - p_{a4})/p_{a2}; \quad z_M = (q_{a1}x_M - q_{a4})/q_{a3}.$$

Графическое решение часто требует определения видимости прямой. Для определения видимости используем конкурирующие точки.

На плоскости π_2 конкурирующие точки - 1 и 3. Точка 1 принадлежит плоскости θ , точка 3 - прямой а ($1 \in \theta$; $3 \in a$). Относительное расстояние от точек до плоскости π_2 определяем на π_1 $y_1 > y_3$. Следовательно, в точке 3 на π_2 прямая а невидима. В точке пересечения М видимость прямой меняется.

Окончание табл. 2.5

 Рис. 2.22. Определение видимости прямой	Конкурирующие точки на π_2 $z_3 = z_1$; $y_3 = y_1$. Условие видимости $x_1 > x_3$ - точка 1 видима (прямая закрывается плоскостью). Конкурирующие точки на π_1 $x_4 = x_5$; $y_4 = y_5$. Условие видимости $z_5 > z_4$ - точка 5 видима (прямая видима).
---	---

На плоскости π_1 конкурирующих точек нет. Для их выявления проводим в плоскости θ прямую d параллельно прямой (AB) - $[d \subset \theta$; $d \parallel AB$; $2 \in d$].

Выделяем конкурирующие точки - 4 и 5. Точка 4 принадлежит плоскости θ , точка 5 - прямой a ($4 \in \theta$; $5 \in a$). На π_2 определяем $z_5 > z_4$. Следовательно, в точке 5 на π_1 прямая a видима.

Сравнение графического и аналитического решений показывает принципиальную разницу этих методов. Попытка получить аналитическое решение тем же путем, которым получено графическое решение, приводит к ряду ненужных вычислений. Введение вспомогательной плоскости и прямых (AB) , (AC) , b не является необходимым для получения аналитического решения. Однако, графическое решение более наглядно и его получение проще.

Выбор способа решения зависит от способа получения исходных данных и потребной формы получаемого результата. Погрешность полученных значений координат меньше при аналитическом способе решения.

2.3.3. Расстояние от точки до плоскости

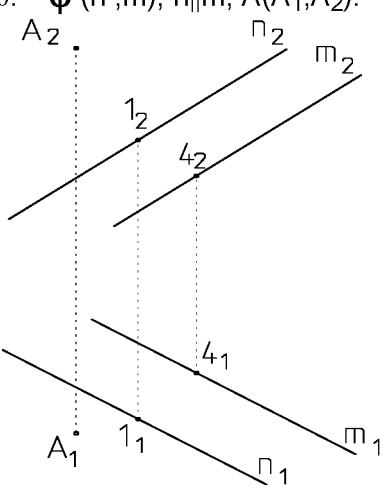
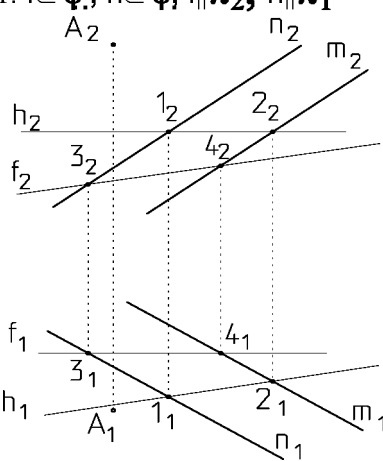
Общий способ графического решения задачи включает четыре этапа:

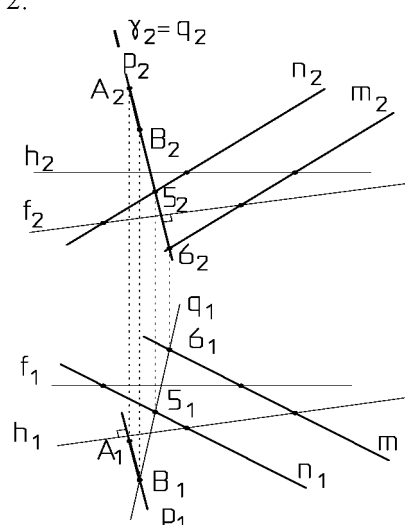
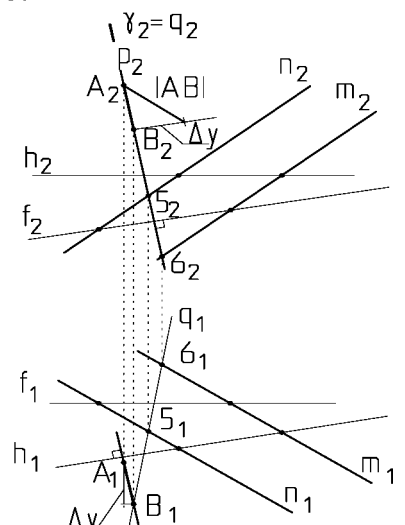
- построение линий уровня в заданной плоскости;
- построение перпендикуляра к плоскости;
- построение точки пересечения перпендикуляра с плоскостью;
- определение натуральной длины отрезка методом прямоугольного треугольника.

Перечисленные построения и аналитические комментарии к ним уже рассмотрены выше (разд. 2.2.2, 2.2.7, 2.3.1, 2.3.2). Этим объясняется краткость пояснений к последовательным шагам решения, приведенным в табл. 2.6. Аналитическое решение задачи приведено в конце раздела.

Перпендикуляр к плоскости должен быть перпендикуляром к двум пересекающимся прямым, лежащим в этой плоскости. Для построений используем теорему о проецировании прямого угла.

Таблица 2.6

На комплексном чертеже	Аналитическое описание
0. $\Phi(n, m); n \parallel m; A(A_1, A_2).$  Рис. 2.23. Исходный чертеж	Дано: радиус-векторы точек : $u_A(x_A, y_A, z_A); u_1(x_1, y_1, z_1); u_4(x_4, y_4, z_4)$; вектор, заданный направляющими косинусами : $n(l_n, m_n, n_n)$. Уравнения прямых в параметрическом виде $n: u = u_1 + nt$; $m: u = u_4 + nt$. (2.42) Уравнение плоскости Φ в векторной форме: $(u - u_1)(u_4 - u_1)n = 0$, (2.43) аналогично уравнению (2.18). Точки 1, 4 выбираются произвольно из условия $1 \in n; 4 \in m$.
1. $f \subset \Phi; h \subset \Phi; f \parallel \pi_2; h \parallel \pi_1$  Рис. 2.24. Построение линий уровня	Радиус-векторы новых точек $u_2(x_2, y_2, z_2); u_3(x_3, y_3, z_3)$. Уравнения линий уровня $h: p_{1h}x + p_{2h}y + p_{4h}z = 0; \quad (2.44)$ $-z + q_{4h} = 0;$ где $p_{1h} = y_2 - y_1; p_{2h} = x_1 - x_2;$ $p_{4h} = x_1y_2 - x_2y_1; q_{4h} = x_1;$ $f: -y + p_{4f}z = 0; \quad (2.45)$ $q_{1f}x + q_{3f}z + q_{4f} = 0;$ где $q_{1f} = y_4 - y_3; q_{2f} = x_3 - x_4;$ $q_{4f} = x_3y_4 - x_4y_3; p_{4f} = y_3.$ Точки 2, 3 удовлетворяют условиям $2 \in m; 3 \in n$; $z_2 = z_1; y_3 = y_4.$

2.  Рис. 2.25. Построение перпендикуляра к плоскости	Уравнения перпендикуляра p в проецирующих плоскостях: $p_{1p}x + p_{2p}y + p_{4p} = 0;$ $q_{1p}x + q_{3p}z + q_{4p} = 0; \quad (2.46)$ где $p_{1p} = x_2 - x_1$; $p_{2p} = y_2 - y_1$; $p_{4p} = -x_A(x_2 - x_1) - y_A(y_2 - y_1)$; $q_{1p} = x_4 - x_3$; $q_{3p} = z_4 - z_3$; $q_{4p} = -x_A(x_4 - x_3) - z_A(z_4 - z_3)$. Уравнение плоскости γ: $a_{\gamma 1}x + a_{\gamma 2}y + a_{\gamma 3}z + a_{\gamma 4} = 0; \quad (2.47)$ $a_{\gamma 1} = q_{p1}; \quad a_{\gamma 2} = 0;$ $a_{\gamma 3} = q_{p3}; \quad a_{\gamma 4} = q_{p4};$
3.  Рис. 2.26. Определение расстояния от точки до плоскости	Зная координаты концов отрезка AB, можно вычислить расстояние от точки до плоскости по формуле $L_{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}. \quad (2.48)$ На комплексном чертеже натуральная длина отрезка определяется методом прямоугольного треугольника (см. разд. 2.3.1).

Основание перпендикуляра определяем как точку пересечения прямой p с плоскостью Φ (см. разд. 3.3.2). Вводим вспомогательную проектирующую плоскость γ (γ_2), проходящую через прямую $a[\gamma(\gamma_2) \perp \pi_2; p \subset \gamma]$. Радиус-векторы точек пересечения плоскости γ и прямых n, m [$u_5(x_5, y_5, z_5); u_6(x_6, y_6, z_6)$] получаем, решая последовательно систему из уравнения плоскости (2.43) и соответствующего уравнения системы (2.46). Линия пересечения плоскостей $q = \Phi \cap \gamma$ проходит через точки 5, 6 и определяется уравнениями, аналогичными (2.6).

Координаты основания перпендикуляра $B = \Phi \cap p$ получаем решением системы уравнений прямых p и q в горизонтальной плоскости проекций (см. (2.38), 2.39)).

В аналитической геометрии расстояние от точки до плоскости определяют подстановкой координат точки в нормальное уравнение плоскости. Нормальное уравнение может быть получено из общего

$$a_{\varphi 1}x + a_{\varphi 2}y + a_{\varphi 3}z + a_{\varphi 4} = 0 \quad (2.49)$$

умножением на нормирующий множитель

$$d_{\varphi} = 1 / \sqrt{a_{\varphi 1}^2 + a_{\varphi 2}^2 + a_{\varphi 3}^2}, \quad (2.50)$$

где $a_{\varphi 1} = n_n(y_4 - y_1) - m_n(z_4 - z_1)$;

$$a_{\varphi 1} = l_n(z_4 - z_1) - n_n(x_4 - x_1);$$

$$a_{\varphi} = m_n(x_4 - x_1) - l_n(y_4 - y_1);$$

$$a_{\varphi 1} = x_1[m_n(z_4 - z_1) - n_n(y_4 - y_1)] + y_1[m_n(z_4 - z_1) - n_n(y_4 - y_1)] + z_1[m_n(z_4 - z_1) - n_n(y_4 - y_1)].$$

С учетом (2.49), (2.50) расстояние от точки до плоскости выражается формулой

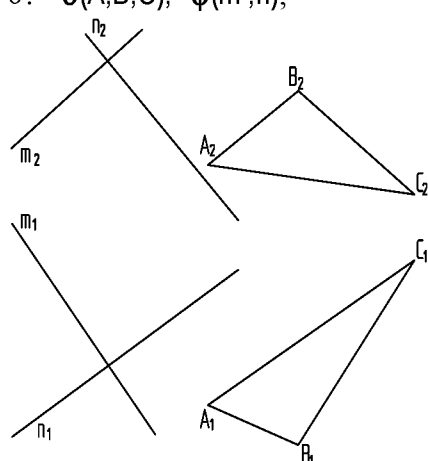
$$L_{A\varphi} = d_{\varphi} (a_{\varphi 1}x_A + a_{\varphi 2}y_A + a_{\varphi 3}z_A + a_{\varphi 4}). \quad (2.51)$$

2.3.4. Пересечение плоскостей

Зададим одну из плоскостей пересекающимися прямыми, а другую тремя точками. Последовательность действий по определению

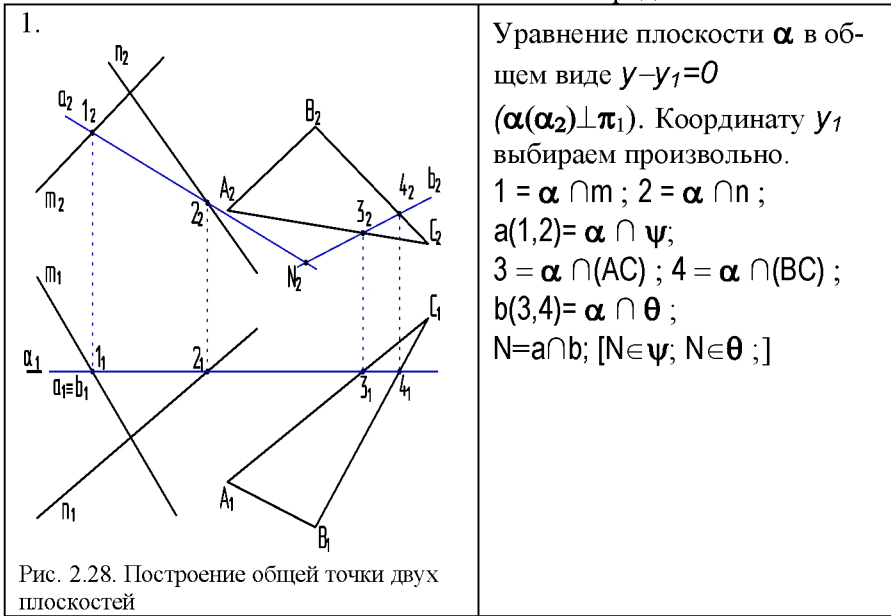
линии их пересечения на комплексном чертеже представлена в табл. 2.7.

Таблица 2.7

На комплексном чертеже	Аналитическое описание
0. $\theta(A,B,C); \psi(m,n);$  Рис. 2.27. Исходный чертеж	Дано: радиус-векторы точек – $u_A(x_A, y_A, z_A); u_B(x_B, y_B, z_B); u_C(x_C, y_C, z_C);$ векторы, заданные направляющими косинусами – $n(l_n, m_n, n_n); m(l_m, m_m, n_m).$ Для определения плоскости ψ необходимо задать координаты точки пересечения прямых $D=m \cap n: u_D(x_D, y_D, z_D).$ Уравнения плоскостей ψ, θ в векторной форме аналогичны уравнениям (2.14), (2.17): $(u - u_A)(u_B - u_A)(u_C - u_A) = 0,$ $(u - u_D)nm = 0.$

Для построения общей точки двух плоскостей общего положения необходимо задать проецирующую плоскость, которая служит связующим звеном между заданными плоскостями. Проведем вспомогательную проецирующую плоскость α . Построим линии пересечения плоскостей $a(1,2) = \alpha \cap \psi; b(3,4) = \alpha \cap \theta$. Каждая линия пересечения проходит через точки пересечения вспомогательной плоскости с прямыми, принадлежащими заданным плоскостям θ и ψ . Прямые a и b лежат в одной плоскости α и пересекаются. Точка их пересечения $N = a \cap b$ принадлежит одновременно двум заданным плоскостям, а значит лежит на линии их пересечения. Таким образом, определение общей точки двух плоскостей требует решения двух задач пересечения плоскости общего положения с плоскостью частного положения.

Замечание. В нашем примере α - фронтальная плоскость уровня, но для решения задачи важно, только то, что она проецирующая.



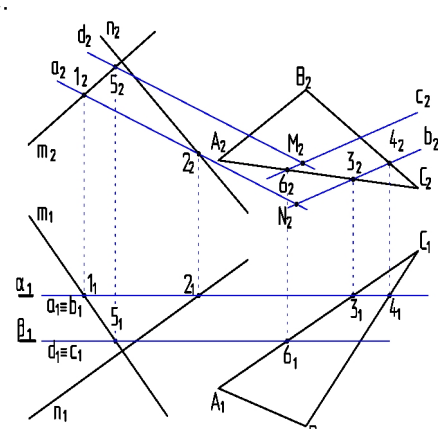
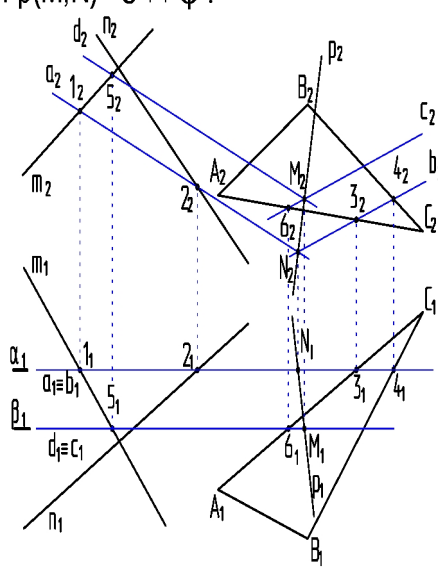
Координаты точек пересечения плоскости α с прямыми, принадлежащими плоскостям θ, ψ , можно получить, последовательно решая совместные системы уравнений прямых и плоскости α . Уравнения линий пересечения плоскостей $a(1,2) = \alpha \cap \psi$; $b(3,4) = \alpha \cap \theta$ получаем в виде (2.6).

Координаты точки пересечения прямых $N = a \cap b$ – результат решения системы уравнений прямых в плоскости π_2 (см. (2.38), (2.39)). Если прямые параллельны $a \parallel b$ (см. разд. 2.2.5), то возможны два варианта: заданные плоскости параллельны или вспомогательная плоскость параллельна линии пересечения плоскостей. Для того чтобы сделать окончательный вывод, следует выбрать еще одну вспомогательную проецирующую плоскость, не параллельную первой, и повторить описанные выше действия.

Если направление линии пересечения плоскостей известно, то проводим ее через полученную точку N . В противном случае необхо-

димом отыскать вторую точку, принадлежащую одновременно двум заданным плоскостям.

Окончание табл. 2.7

2.  Рис. 2.29. Построение второй общей точки двух плоскостей	Уравнение горизонтально-проецирующей плоскости β в общем виде $y - y_5 = 0$. Тогда для получения уравнений прямых c, d можно использовать условие параллельности прямых (2.21). Уравнения прямых получаем в виде (2.7). Координаты точки получаем решением системы уравнений прямых c, d в плоскости π_2. $M = c \cap d; [M \in \psi; M \in \theta]$.
3. $p(M, N) = \theta \cap \psi$.  Рис. 2.30. Линия пересечения плоскостей	Недостающие координаты точек M, N определяем из условия их принадлежности плоскостям α, β: $u_M = u_1; u_N = u_5$. Уравнения прямой p получаем в виде (2.6) по двум точкам M, N.

Проведем вспомогательную проецирующую плоскость β параллельно плоскости α . Построим линии пересечения плоскостей $c = \beta \cap \psi$; $d = \beta \cap \theta$; $[5 = \beta \cap m$; $5 \in d$; $d \parallel a$; $d = \beta \cap \psi$; $6 = \alpha \cap (A, C)$; $6 \in c$; $c \parallel b$; $c = \beta \cap \theta$].

Аналитическое решение задачи не требует вычислений: прямая задается системой двух уравнений -

$$\begin{aligned}\theta: a_{\theta 1}x + a_{\theta 2}y + a_{\theta 3}z + a_{\theta 4} &= 0; \\ \psi: a_{\psi 1}x + a_{\psi 2}y + a_{\psi 3}z + a_{\psi 4} &= 0.\end{aligned}\quad (2.52)$$

Если требуется задать уравнения прямой в канонической форме:

$$\frac{x - x_G}{l} = \frac{y - y_G}{m} = \frac{z - z_G}{n}; \quad (2.53)$$

то без вычислений не обойтись. Направляющие косинусы прямой вычисляются по формулам

$$l = \begin{vmatrix} a_{\theta 2} & a_{\theta 3} \\ a_{\psi 2} & a_{\psi 3} \end{vmatrix}; m = \begin{vmatrix} a_{\theta 3} & a_{\theta 1} \\ a_{\psi 3} & a_{\psi 1} \end{vmatrix}; n = \begin{vmatrix} a_{\theta 1} & a_{\theta 2} \\ a_{\psi 1} & a_{\psi 2} \end{vmatrix}. \quad (2.54)$$

Для определения радиус-вектора точки $G - u_G(x_G, y_G, z_G)$ подставим произвольное значение одной из координат (например, $x=0$) в (2.53) и решаем систему уравнений.

2.4. Преобразование комплексного чертежа

Решение многих геометрических задач на комплексном чертеже становится более простым, если изменить взаимное расположение плоскостей проекций и геометрических объектов. Эти изменения могут быть реализованы преобразованием комплексного чертежа. Рассмотрим один из универсальных методов преобразования – замену плоскостей проекций.

2.4.1. Замена плоскостей проекций

Мы уже убедились, что прямые и плоскости частного положения оказываются полезными для построений на комплексном чертеже. Но положение объекта относительно плоскости проекций зависит от по-

ложения плоскости проекций или от направления координатных осей. Меняя направление осей, мы можем изменить положение прямой или плоскости относительно плоскости проекций. Это изменение должно быть таким, чтобы мы могли построить новый комплексный чертеж, используя параметры старого комплексного чертежа. Такие построения легко выполняются, если новая плоскость проекций получается поворотом старой вокруг одной из координатных осей. В этом случае значение одной координаты точки не меняется; две другие координаты могут измениться, но положение проекции точки, определенное этими координатами, остается неизменным на комплексном чертеже (см. рис. 2.31, 2.32).

Преобразование координат при повороте осей описывается уравнениями

$$\begin{aligned} x^* &= l_{xx}x + m_{xy}y + n_{xz}z; & x &= l_{xx}x^* + l_{yx}y^* + l_{zx}z^*; \\ y^* &= l_{yx}x + m_{yy}y + n_{yz}z; & y &= m_{xy}x^* + m_{yy}y^* + m_{zy}z^*; \\ z^* &= l_{zx}x + m_{zy}y + n_{zz}z; & z &= n_{xz}x^* + n_{yz}y^* + n_{zz}z^*; \end{aligned} \quad (2.55)$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} l_{xx} & l_{yx} & l_{zx} \\ m_{xy} & m_{yy} & m_{zy} \\ n_{xz} & n_{yz} & n_{zz} \end{vmatrix} - \text{определитель преобразования, составлен-}$$

ный из направляющих косинусов новых осей по отношению к старым.

При повороте системы вокруг оси y (замена плоскости π_1 -рис. 2.31) определитель принимает вид

$$\Delta_{\pi_1} = \begin{vmatrix} \cos\gamma & 0 & \sin\gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\gamma & 0 & \cos\gamma \end{vmatrix},$$

а уравнения преобразования

$$\begin{aligned} x &= x^* \cos\gamma - z^* \sin\gamma, & y &= y^*; \\ z &= -x^* \sin\gamma + z^* \cos\gamma. \end{aligned} \quad (2.56)$$

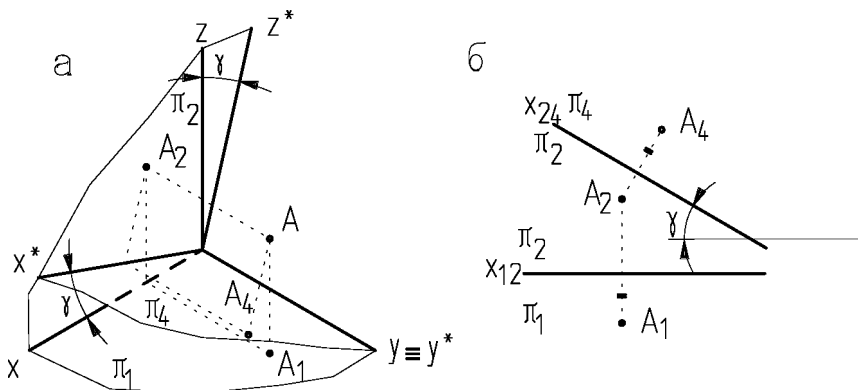


Рис. 2.31. Замена горизонтальной плоскости проекций: а – поворот осей, б – преобразование комплексного чертежа

При повороте системы вокруг оси z (замена плоскости π_2 - рис. 2.32) определитель принимает вид

$$\Delta_{\pi_2} = \begin{vmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix};$$

$$x = x^* \cos\phi - y^* \sin\phi;$$

$$y = x^* \sin\phi + y^* \cos\phi; \quad z = z^*. \quad (2.57)$$

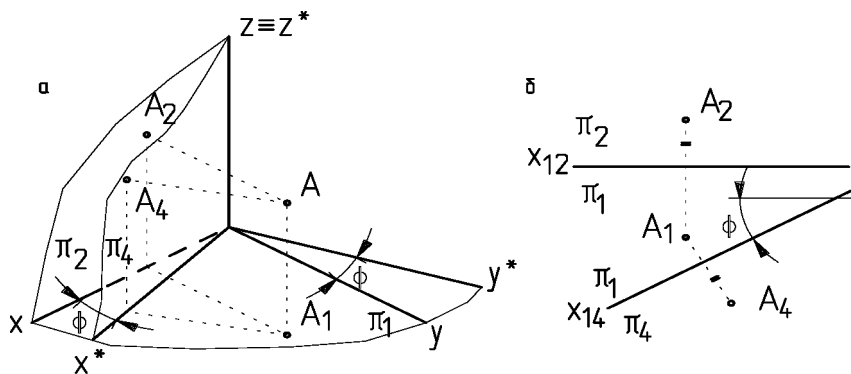


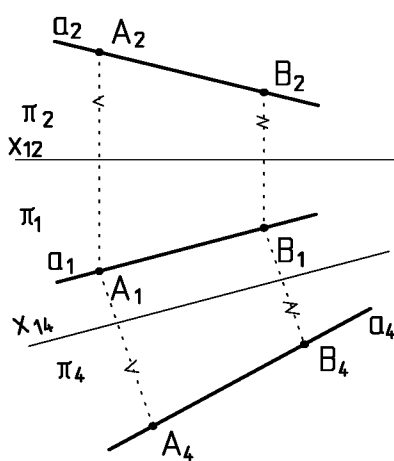
Рис. 2.32. Замена фронтальной плоскости проекций: а – поворот осей, б – преобразование комплексного чертежа

Применяя описанные повороты координатных осей, можно решить следующие задачи:

- прямую общего положения преобразовать в прямую уровня;
- прямую уровня преобразовать в проецирующую прямую;
- плоскость общего положения преобразовать в проецирующую плоскость;
- проецирующую плоскость преобразовать в плоскость уровня.

Перечисленные четыре основные задачи преобразования комплексного чертежа подробно рассмотрены в табл. 2.8.

Таблица 2.8

На комплексном чертеже	Аналитическое описание
1. $\pi_2 \rightarrow \pi_4$; $x_{12} \parallel a_1$; $a \parallel \pi_4$.  Рис. 2.33. Преобразование прямой общего положения в прямую уровня	Прямая общего положения задана уравнениями (2.6) $a: p_{1a}x + p_{2a}y + p_{4a}z = 0;$ $q_{1a}x + q_{3a}z + q_{4a} = 0;$ где $p_{a1} = \text{Ctg}(\alpha);$ $p_{a2} = -1; p_{a4} = s_1;$ $q_{a1} = \text{Ctg}(\beta);$ $q_{a3} = -1; q_{a4} = s_2.$ При замене плоскости π_2 на π_4 (с учетом $\phi = 90^\circ - \alpha$) получаем уравнения прямой $y^* - s_1 \sin(\alpha) = 0; \quad (2.58)$ $x^* \sin(\alpha) \text{Ctg}(\beta) - z^* + s_3 = 0;$ где $s_3 = \sin(\alpha) \cos(\alpha) \text{Ctg}(\beta) s_1 + s_2$. Полученная прямая параллельна плоскости π_4.

2. $\pi_1 \rightarrow \pi_5$; $x_{45} \perp a_4$; $a \perp \pi_5$.

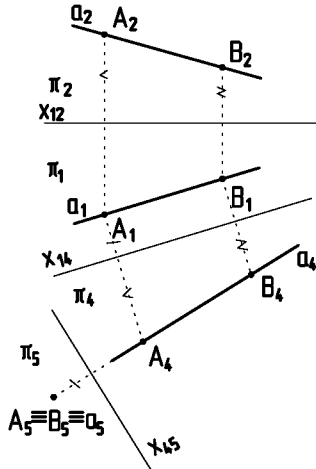


Рис. 2.34. Преобразование прямой уровня в проецирующую прямую

2. После второй замены плоскости π_1 на π_5 получаем

$$x^{**} + \sin(\gamma)s_3 = 0; \quad (2.59)$$

$$y^{**} + s_1 \sin(\alpha) = 0;$$

$$\sin(\gamma) = \frac{\sin^2(\alpha)\sin(\beta)}{\sqrt{\cos^2(\alpha)\cos^2(\beta) + 1}}.$$

Как видно из полученных уравнений, в новой системе плоскостей проекций прямая a проецируется в точку на плоскость π_5 .

3. $\pi_1 \rightarrow \pi_4$; $f \parallel \pi_2$; $f \subset \square$; $x_{12} \perp f_2$;
 $\theta \perp \pi_4$.

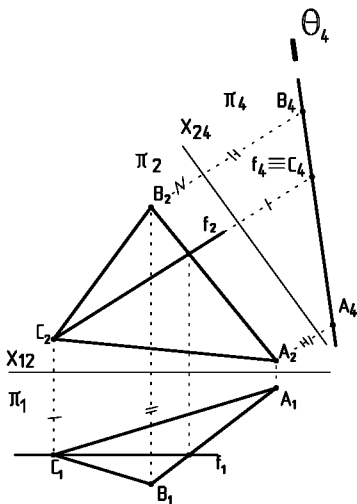


Рис. 2.35. Преобразование плоскости

Плоскость задана тремя точками и может быть описана уравнением (2.14). Это уравнение можно преобразовать в нормальное (2.15):
 $lx + my + nz + p = 0$.

При замене плоскости π_2 на π_4 получаем уравнение θ :

$$l^*x^* + m^*y^* + n^*z^* + p^* = 0;$$

$$l^* = \sqrt{1 - m^2};$$

$$n^* = 0;$$

$$m^* = m;$$

$$p^* = p.$$

4. $\pi_2 \rightarrow \pi_5$; $x_{45} \parallel \theta_4$; $\theta \parallel \pi_5$.

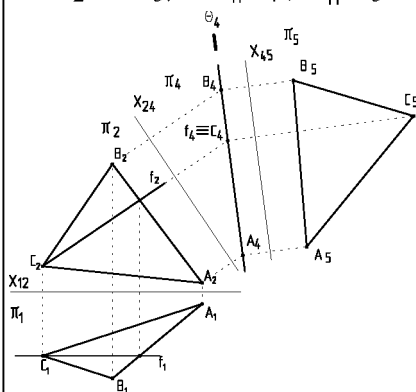


Рис. 2.36. Преобразование проецирующей плоскости в плоскость уровня

После второй замены плоскости π_1 на π_5 получаем θ^{**} :
 $l^{**}x^{**} + m^{**}y^{**} + n^{**}z^{**} + p^{**} = 0$;
 $l^{**} = 0$; $n^{**} = 0$;
 $m^{**} = 1$; $p^{**} = p$.
 Уравнение плоскости в новой системе приобретает простой вид
 $y^{**} - p = 0$.
 Плоскость проецируется на π_5 в натуральную величину.

Поворот системы координат вокруг оси Y (п. 3) не изменяет значения направляющего косинуса нормального вектора к этой оси. Ось Z после поворота займет новое положение Z^* , перпендикулярное нормальному вектору. Расстояние от начала координат до плоскости остается постоянным. Параметры угла поворота можно рассчитать по формулам

$$\cos \gamma = l / \sqrt{1 - m^2}; \quad \sin \gamma = n / \sqrt{1 - m^2}. \quad (2.60)$$

При второй замене (п. 4) систему координат поворачиваем вокруг оси Z^* так, чтобы ось y^{**} стала параллельной нормальному вектору. Угол поворота можно получить из соотношений

$$\cos \phi = m; \quad \sin \phi = \sqrt{1 - m^2}. \quad (2.61)$$

Замечание. Ни для построений, ни для аналитических расчетов значение угла поворота не требуется - важно знать конечный результат.

Вопросы для самоконтроля к гл. 2

1. Что такое проекция точки?
2. Перечислите свойства параллельного проецирования.
3. Какие прямые и плоскости называют проецирующими?
4. Какую плоскость называют плоскостью уровня?
5. Что такое координатная ломаная?
6. Что такое горизонталь?
7. Что такое фронталь?
8. Что такое конкурирующие точки?
9. Запишите общее уравнение плоскости. Как преобразовать его в нормальное уравнение?
10. Что называется следом плоскости?
11. Запишите уравнения прямой в канонической форме.
12. Как перейти от графической формы задания прямой к аналитической?
13. Как построить перпендикуляр к плоскости?
14. Чем метрические задачи отличаются от позиционных?
15. Запишите аналитический аналог метода прямоугольного треугольника.
16. Определите последовательность графического решения задачи определения точки пересечения прямой с плоскостью. Как решить эту задачу аналитически?
17. Определите последовательность графического решения задачи пересечения плоскостей. Как получить канонические уравнения линии пересечения плоскостей?
18. Как прямую общего положения преобразовать в прямую уровня?
19. Как прямую уровня преобразовать в проецирующую прямую?
20. Как плоскость общего положения преобразовать в проецирующую плоскость?
21. Как проецирующую плоскость преобразовать в плоскость уровня?

3. Моделирование на плоскости

Эпиграфом к этой главе может быть фраза: **от дискретного к целому**. Именно это объединяет два метода моделирования, рассмотренные далее. Интерполяция дает возможность описать аналитическим уравнением кривую, заданную точками. Метод R- функций позволяет описать единым уравнением границу фигуры, составленную из разных кривых, заданных уравнениями.

3.1. Задание линий на плоскости

Линия на плоскости может быть задана тремя способами: аналитическим, графическим или точечным (табличным).

Аналитическое описание наиболее удобно для моделирования, поскольку позволяет точно определить любую точку кривой, выполнять преобразования кривой и проводить расчеты. Переход от аналитической формы к графической и точечной достаточно прост. Обратный переход требует применения интерполяционных методов, сопряженных с трудоемкими вычислениями.

Для аналитического представления линии необходимо записать уравнение линии в выбранной системе координат. Чаще всего применяют описание линий в прямоугольной системе координат, которое в общем виде записывают следующим образом $f(x,y)=0$.

Например, уравнение прямой: $a_1x+a_2y+a_3=0$; (3.1)
уравнение линии второго порядка:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{12}xy+a_{13}x+a_{23}y+a_{33}=0. \quad (3.2)$$

Некоторые кривые (например, конические сечения) можно описать **каноническими** уравнениями:

$$\text{- эллипс} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; \quad (3.3)$$

- гипербола $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1;$

- парабола $y^2 = 2px.$

Эти уравнения справедливы только при определенном выборе направления осей и начала координат (например, оси координат должны совпадать с осями эллипса). Назовем эту систему координат местной. При переходе к произвольной (общей) системе координат (см. рис. 3.1) необходимо выполнить поворот и перенос системы координат:

$$x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha + x'_0; \quad y' = -x \sin \alpha + y \cos \alpha + y'_0. \quad (3.4)$$

После преобразований уравнения (3.3) принимают вид (3.2).

В некоторых случаях удобно представлять уравнение линии в параметрическом виде. **Параметрическое уравнение** прямой в векторной форме

$$\mathbf{u}'(t) = \mathbf{u}'_1 + t\mathbf{v}, \quad (3.5)$$

где $\mathbf{u}'(x', y')$ - радиус-вектор в общей системе координат, $\mathbf{u}'_1(x'_1, y'_1)$ - точка на прямой, $\mathbf{v}$ - вектор определяющий направление прямой, t - параметр.

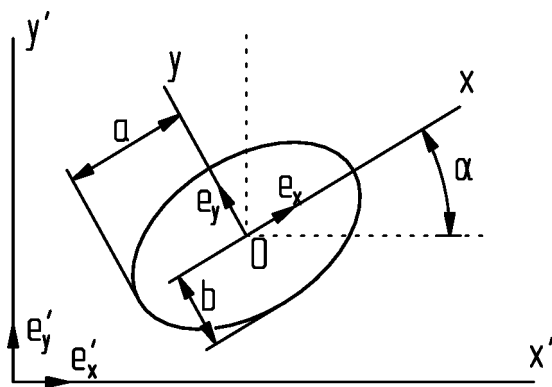


Рис. 3.1. Местная (xy) и общая (x'y') системы координат

Вектор $\mathbf{v}$ может быть задан направляющими косинусами: $\mathbf{v}(l, m)$. Если задать его как разность радиус-векторов точек, принадлежащих прямой $\mathbf{u}'(t) = \mathbf{u}'_1 + t(\mathbf{u}'_2 - \mathbf{u}'_1)$, то получим уравнение отрезка

$$\mathbf{u}'(t) = (1-t)\mathbf{u}'_1 + t\mathbf{u}'_2. \quad (3.6)$$

Введем $q = (1-t)$ и получим уравнение отрезка в барицентрических координатах

$$\mathbf{u}'(t) = q\mathbf{u}'_1 + t\mathbf{u}'_2, \quad (3.7)$$

где $\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2$ - концы отрезка; $0 \leq t \leq 1$; $0 \leq q \leq 1, t+q=1$.

Плоские кривые в параметрическом виде можно записать уравнением

$$\mathbf{u}'(t) = \mathbf{u}'_0 + x(t)\mathbf{e}_x + y(t)\mathbf{e}_y, \quad (3.8)$$

где $x(t), y(t)$ - скалярные функции, $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ - орты, определяющие местную систему координат (см. рис. 3.1), $\mathbf{u}'_0$ - характерная точка кривой (начало местной системы координат). Местная система координат связана с общей соотношениями

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_x &= \mathbf{e}'_x \cos \alpha - \mathbf{e}'_y \sin \alpha; \\ \mathbf{e}_y &= \mathbf{e}'_x \sin \alpha + \mathbf{e}'_y \cos \alpha. \end{aligned} \quad (3.9)$$

При изменении положения кривой скалярные функции не изменяются.

Например, параметрическое уравнение эллипса (см. рис. 3.1) запишется в виде

$$\mathbf{u}'(t) = \mathbf{u}'_0 + a \cos t \mathbf{e}_x + b \sin t \mathbf{e}_y, \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \quad (3.10)$$

Скалярные функции эллипса $x(t) = a \cos t$; $y(t) = b \sin t$ связаны уравнением (3.3).

С учетом (3.9) в координатной форме получим:

$$\begin{aligned} x'(t) &= x'_0 + a \cos t \cos \alpha - b \sin t \sin \alpha; \\ y'(t) &= y'_0 + a \cos t \sin \alpha + b \sin t \cos \alpha. \end{aligned} \quad (3.11)$$

3.2. Интерполяция

Очень часто в процессе создания модели разработчик получает графическое или табличное представление кривой (см. рис. 1.3, 1.5,

1.8). Для перехода к аналитическому описанию необходимо подобрать функциональную зависимость, наиболее адекватно описывающую полученную кривую. Процесс получения такой функции и вычисления ее значений в любой точке называют **интерполяцией**, а выбранную функцию - **интерполирующей**. Линию, соответствующую интерполирующей функции, называют **сплайном** (по названию упругой рейки, использующейся в качестве чертежного инструмента). Заданные точки, определяющие кривую, называют **характеристическими**.

Иногда для выбора интерполирующей функции используют известные функции, подбирая их параметры методом наименьших квадратов. Этот метод заключается в минимизации суммы квадратов разностей значений функции в заданных точках. Метод требует творческого подхода и трудно формализуется.

3.2.1. Параболическая интерполяция

Наиболее распространенной является **параболическая интерполяция**. Этот метод использует в качестве интерполирующей функции степенной многочлен, параметры которого подбирают в соответствии с требованиями к функции. Метод просто формализуется и используется в графических редакторах в различных модификациях. Классическим примером параболической интерполяции является метод Лагранжа.

Интерполяционный полином Лагранжа определяется формулой

$$p_n(x) = L_0(x)y_0 + L_1(x)y_1 + \dots + L_n(x)y_n, \quad (3.12)$$

$$\text{где } L_i(x) = \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)},$$

$$y_i = y_i(x_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Замечание: следует обратить внимание, что в формуле расчета $L_i(x)$ в числителе и в знаменателе отсутствуют сомножители, содержащие вычитание x_i .

Пример 3.1. Построение интерполяционной кривой Лагранжа по семи точкам показано на рис. 3.2. Линия, заданная уравнением (3.12), проходит через все узлы $(x_i; y_i)$.

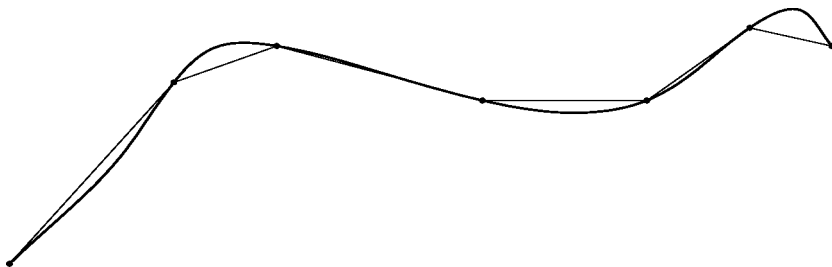


Рис. 3.2. Интерполяционная кривая Лагранжа

Другой классический метод использует для построения интерполирующей функции **разделенные разности**:

$$\Delta_1(x_0, x_1) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}; \Delta_1(x_i, x_{i+1}) = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i};$$

$$\Delta_k(x_0, x_1, \dots, x_k) = \frac{\Delta_{k-1}(x_1, x_2, \dots, x_k) - \Delta_{k-1}(x_0, x_1, \dots, x_{k-1})}{x_k - x_0}; \quad (3.13)$$

$$k = 2, 3, \dots, n.$$

Часто этот метод применяют для интерполяции линий, заданных равноотстоящими узлами $(x_i = x_0 + hi)$.

Такое представление характерных точек не всегда является удобным, но упрощает процесс вычисления. Если интервалы между узлами различны, то построенные на них кривые называют **неоднородными**. При параметрическом задании кривой интервал определяют по параметру, а не по координатам точек.

Известны несколько интерполяционных формул, использующих разделенные разности: Ньютона, Стирлинга, Бесселя, Эверетта, Стефенсона. Например, одна из формул Ньютона выглядит следующим образом:

$$N(x) = y_0 + \sum_{j=1}^n C_u^j \Delta_j y_0;$$

$$C_u^j = \frac{u!}{j!(u-j)!}; u = \frac{x - x_0}{h};$$

$$\Delta_j y_0 = \Delta_{j-1} y_1 - \Delta_{j-1} y_0; \Delta_1 y_i = y_{i+1} - y_i.$$

Пример 3.2. Применение формулы (3.14) показано на рис. 3.3.

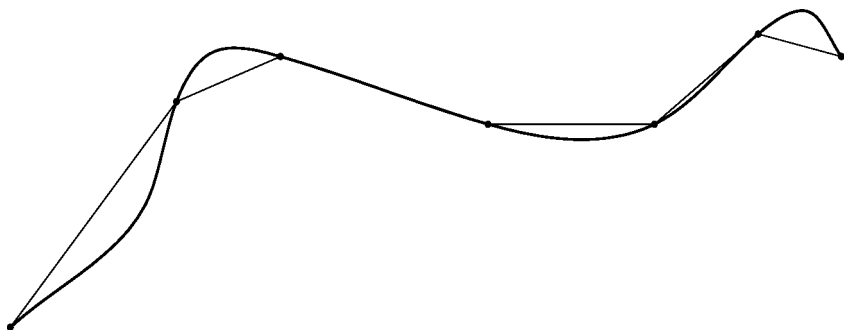


Рис. 3.3. Интерполяционная кривая Ньютона

Для определения кривой использовались те же семь точек, которые рассматривались ранее в примере 3.1. Сравнение кривых, полученных методами Ньютона и Лагранжа, показывает, что различия в отклонении от характеристической ломаной и в характере линии незначительны.

Перечисленные выше методы интерполяции описывают интерполирующую кривую одним уравнением. Но можно применить другой подход: разбить линию на несколько участков, гладко стыкующихся между собой. При таком подходе функцию подбирают отдельно на каждом участке кривой. Например, если заданы две характерные точки и производные в этих точках, то можно составить четыре уравнения, решение которых позволит определить коэффициенты полинома третьей степени. Полученный полином называется **сплайном Эрмита**.

При построении геометрической модели не всегда требование принадлежности характеристических точек кривой является определяющим. Иногда более важным считается плавный характер линии (например, при аэродинамическом проектировании или дизайнерских разработках). **Кривая Безье**, заданная в параметрической форме полиномом

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t) &= \sum_{i=0}^n B_i^n(t) \mathbf{u}_i; \\ B_i^n(t) &= \frac{n!}{i!(n-i)!} t^i (1-t)^{n-i} = C_n^i t^i (1-t)^{n-i}; \\ 0 &\leq t \leq 1, \end{aligned} \quad (3.15)$$

обеспечивает получение гладкой кривой, но проходит только через крайние точки (см. рис. 3.4). По заданным точкам $\mathbf{u}_i (X_i, Y_i)$ можно построить **характеристическую ломаную**. Кривая Безье касается ломаной в начальной и конечной точках, остальные вершины ломаной расположены на некотором расстоянии от кривой. Этим расстоянием можно управлять, если присвоить каждой вершине вес w_i (см. рис. 3.4). Формула для вычисления радиус-вектора кривой приобретет вид

$$\mathbf{u}(t) = \frac{\sum_{i=0}^n B_i^n(t) w_i \mathbf{u}_i}{\sum_{i=0}^n B_i^n(t) w_i}; 0 \leq t \leq 1. \quad (3.16)$$

Кривые, характеристическим точкам которых присвоены веса, отличные от единицы, называют **рациональными**.

Пример 3.3. На рис. 3.4 показаны варианты построения кривых Безье по тем же точкам, которые использовались в примерах 3.1, 3.2. В первом варианте все точки имеют веса равные единице. Вторая и третья кривые имеют веса, не равные единице в точках с номерами 3 и 5.

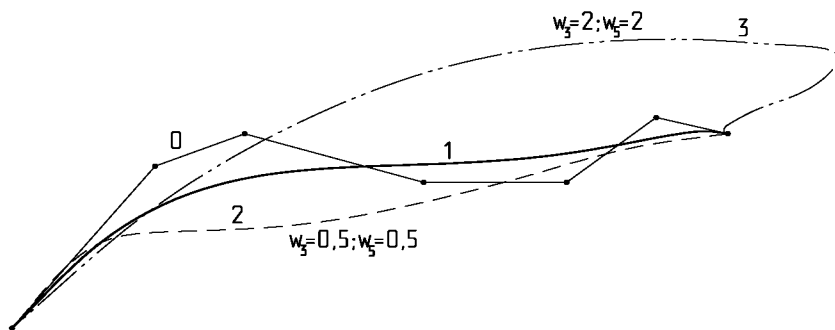


Рис. 3.4. Кривые Безье: 2,3 - двум вершинам присвоены веса, 0 - характеристическая ломаная

Пример показывает, что введение весовых коэффициентов может существенно влиять на характер кривой. Это может быть использовано для придания линии желательных свойств.

Рассмотрим подробнее совокупность функций $B_i^n(t)$ (см. (3.15)), которая называется базисом Бернштейна). Полином $B_i^n(t)$ определяет зависимость кривой от параметра. Нетрудно доказать, что

$$\sum_{i=0}^n B_i^n(t) = 1, \quad (3.16)$$

то есть сумма всех коэффициентов при любом t равна единице. Следовательно, базис Бернштейна представляет собой разложение единицы. Функции, обладающие перечисленными выше свойствами, называют **нормированными**.

Еще одним важным свойством функций $B_i^n(t)$ является то, что они удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$B_i^n(t) = t B_{i-1}^{n-1}(t) + (1-t) B_i^{n-1}(t). \quad (3.17)$$

Это свойство обеспечивает построение простых алгоритмов расчета интерполирующей функции. Формулы (3.13), (3.14) также обладают свойством рекуррентности.

3.2.2. В-сплайны

Создание графических редакторов потребовало разработки универсального математического аппарата для описания кривых. Таким

аппаратом являются **NURBS кривые** (Non-Uniform Rational B-Spline: неоднородный рациональный фундаментальный сплайн).

Приведем одно из определений фундаментального сплайна [2]: Нормированный В-сплайн для неубывающей последовательности узлов $t_i, t_{i+1}, \dots, t_{i+m}$ есть разделенная разность порядка m усеченной степенной функции со смещенным началом $\sigma_{m-1}(z) = (z-t)^{m-1}_+$, умноженная на разность значений первого и последнего узла:

$$N_{i,m}(t) = (t_{i+m} - t_i) \sigma_{m-1}[t_i, t_{i+1}, \dots, t_{i+m}]. \quad (3.18)$$

Введение функции $\sigma_m(z)$ позволило не только сделать сплайн универсальным, но и устранить ряд вычислительных трудностей.

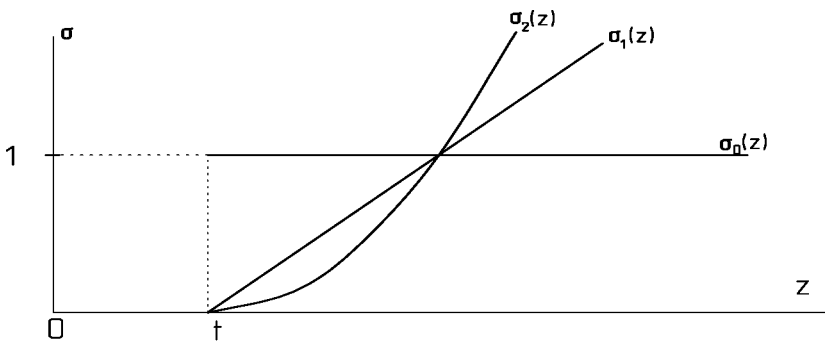


Рис. 3.5. Усеченная степенная функция со смещенным началом

Функция $\sigma_m(z)$ - кусочно-монотонная, непрерывная при $m > 0$; при $m = 0$ она имеет скачок, равный единице в точке t (см. рис. 3.5). Эта функция равна 0 при $z \leq t$ и равна $(z-t)$ при $z > t$:

$$\sigma_m(z) = (z-t)^m_+ = (\max(0, z-t))^m. \quad (3.19)$$

Для построения кривой по характеристическим точкам u_i используется формула

$$u(t) = \frac{\sum_{i=0}^n N_{i,m}(t) w_i u_i}{\sum_{i=0}^n N_{i,m}(t) w_i}; t_{\min} \leq t \leq t_{\max}; n \geq m.. \quad (3.20)$$

Кривая строится по совокупности В-сплайнов (см. рис. 3.6).

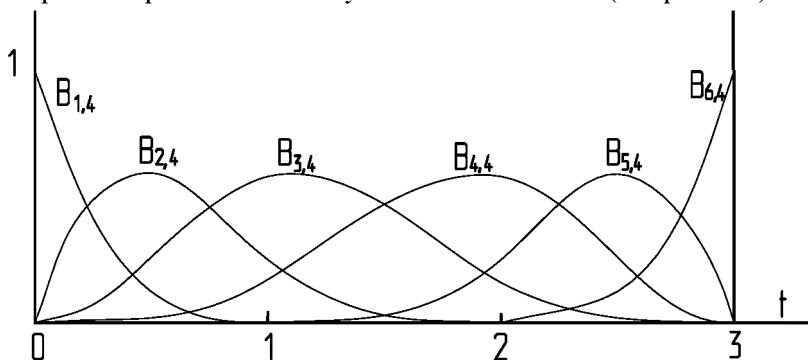


Рис. 3.6. Совокупность В-сплайнов четвертого порядка

Число узлов (t_i) всегда больше числа характеристических точек u_i (некоторые узлы имеют равные значения). Добавление узлов позволяет учесть влияние производных на характер кривой и при этом сохранить формализацию процесса вычисления.

Пример 3.4. Построение кривой по шести точкам с применением В-сплайнов показано на рис. 3.7.

Для расчета текущих значений В-сплайна используется рекуррентная формула Кокса-Де-Бура

$$M_{i,m}(t) = \frac{(t_{i+m} - t)M_{i+1,m-1}(t) + (t - t_i)M_{i,m-1}(t)}{(t_{i+m} - t_i)}; \quad (3.21)$$

$$M_{i,1}(t) = \begin{cases} 1/t_{i+1} - t_i, & \text{если } t_i \leq t < t_{i+1}, \\ 0, & \text{если } t < t_i \text{ или } t \geq t_{i+1}. \end{cases}$$

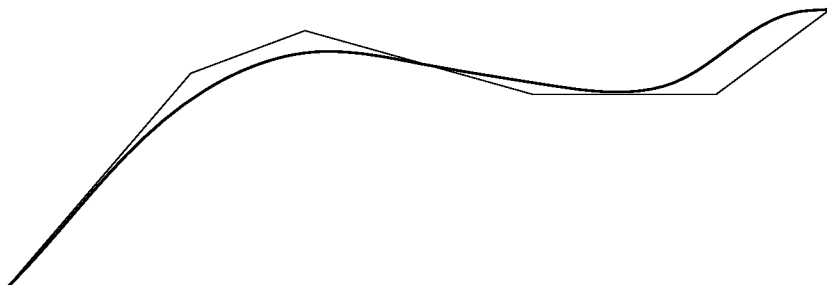


Рис. 3.7. Построение В-сплайна по шести точкам

Схема вычислений представлена таблицей:

$$\begin{array}{ccc} & M_{i,1}(t) & \\ M_{i-1,2}(t) & M_{i,2}(t) & \\ \dots\dots\dots & & \\ M_{i-m+1,m}(t) & \dots\dots\dots M_{i-1,m}(t) & M_{i,m}(t) \end{array} \quad (3.22)$$

Вычисления проводятся построчно сверху вниз. Результаты нижней строки нормируются

$$N_{j,m}(t) = (t_{j+m} - t_j)M_{j,m}(t), \quad j = i-m+1, i-m+2, \dots, l. \quad (3.23)$$

Координаты точек кривой получаются подстановкой значений, полученных по формуле (3.23), в (3.20).

3.3. R-функции и их применение в геометрическом моделировании

Аналитическое описание сложных геометрических фигур одним уравнением, полученным с использованием R-функций, позволяет строить простые алгоритмы решения позиционных задач (например, раскроя или составления планов). Для получения такого описания необходимо знать аналитические уравнения всех линий, образующих границу фигуры, и логическое (предикатное) уравнение, отражающее способ построения сложной фигуры из простых.

Аппарат аналитической геометрии, применяющийся обычно для описания простых фигур, при переходе к составным фигурам должен быть дополнен методами математической логики. Это делает громоздкими алгоритмы решения геометрических задач.

В.Л. Рвачевым [7] разработана удобная математическая модель, объединяющая два раздела математики и позволяющая избежать громоздких преобразований и переходов от алгебраических операций к логическим.

3.3.1. Построение алгебрологической модели геометрической фигуры

Любая геометрическая фигура ограничена одной или несколькими линиями. Всякая линия, заданная уравнением $f(x,y)=0$, делит плоскость на две области, определяемые неравенствами $f(x,y)>0$ и $f(x,y)\leq 0$. Таким образом, знак функции $f(x,y)$ при подстановке координат точки (x,y) в уравнение линии определяет принадлежность этой точки соответствующей области пространства. Условимся считать область пространства, принадлежащую описываемой фигуре, отрицательной. Это условие накладывает ограничения на выбор знаков при коэффициентах в уравнении линии.

Геометрические фигуры представляют собой точечные множества, и для их описания могут быть использованы операции над множествами: дополнение, объединение, пересечение.

Введя предикаты вида:

$$T_1 = \begin{cases} 0, & \text{если } f(x,y) > 0, \\ 1, & \text{если } f(x,y) \leq 0, \end{cases} \quad (3.24)$$

и поставив в соответствие операциям над множествами логические операции над предикатами, можем составить логическую функцию, описывающую фигуру. В итоге получаем алгебрологическую модель фигуры, включающую: уравнения n линий, ограничивающих фигуру, правила вычисления предикатов, логическую функцию, задающую связь между линиями.

Пусть $T_{12}(x,y) = g_{12}[T_1(x,y), T_2(x,y)]$ - логическая функция, тогда алгебраическая функция $\varphi(x,y) = \varphi_{12}[f_1(x,y), f_2(x,y)]$ называется **R-функцией**, если справедливо

$$T_{12}(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{если } \varphi(x,y) > 0, \\ 1, & \text{если } \varphi(x,y) \leq 0, \end{cases} \quad (3.25)$$

Каждой логической операции соответствует множество R-функций.

В работе [7] предложены простые и удобные R-функции (см. табл.3.1), позволяющие построить единое уравнение геометрической

фигуры, используя уравнения ограничивающих ее линий (без ограничений на выпуклость или связность фигуры).

Таблица 3.1

Операции над множествами	Логические операции	Операции в R-алгебре	
		обозначение	вычисление функции
Пересечение $A \cap B$	Дизъюнкция $T_A \wedge T_B$	$f_A \wedge_{\alpha} f_B$	$f_A + f_B + \sqrt{f_A^2 + f_B^2 - \alpha f_A f_B}$
Объединение $A \cup B$	Конъюнкция $T_A \vee T_B$	$f_A \vee_{\alpha} f_B$	$f_A + f_B - \sqrt{f_A^2 + f_B^2 - \alpha f_A f_B}$
Дополнение $-A$	Отрицание $\neg T_A$	$\neg_{\alpha} f_A$	$-f_A$

3.3.2. Построение R-функций

В качестве примера построим геометрическую модель плоской фигуры заданной рис. 3.8.

Пример 3.5. Граница фигуры образована тремя линиями:

- прямой, заданной уравнением $f_1 = y$;
- окружностью, заданной уравнением $f_2 = x^2 + y^2 - 9$;
- окружностью, заданной уравнением $f_3 = x^2 + y^2 - 4$.

Точкам, принадлежащим фигуре, должны соответствовать отрицательные значения описывающей границу функции. Для прямой это нижняя полуплоскость ($y \leq 0$). Функции, описывающие окружности, принимают отрицательные значения в точках, расположенных внутри круга. Поэтому в описании фигуры используем дополнение малого круга. Логическое описание фигуры представляет собой пересечение большого круга и дополнения к сегменту малого круга. Дополнение к сегменту образовано объединением дополнения к малому кругу и полуплоскости.

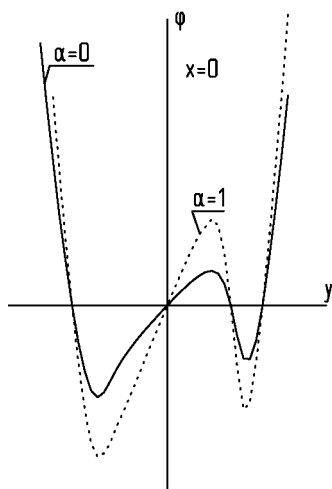
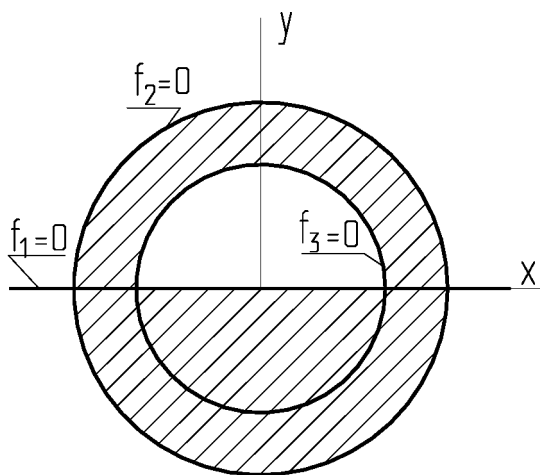


Рис. 3.8. Плоская фигура

Рис. 3.9. Характер R-функции

Уравнение границы фигуры

$$\varphi(x,y) = (f_1 \vee_{\alpha} \neg_{\alpha} f_3) \wedge_{\alpha} f_2 = 0; \quad (3.26)$$

где $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $f_3 = 0$ - уравнения элементарных составляющих,
 $\vee_{\alpha}$, $\wedge_{\alpha}$ - R-функции (см. табл.3.1).

Характер функции показан на графике $\varphi(y)$ при $x=0$ (см. рис. 3.9).
 Как видно из графика, значение функции на границе фигуры равно

нулю. Внутри фигуры (заштрихованная область на рис. 3.8) значение функции отрицательно. Вне фигуры (как во внешней области, так и внутри кольца) значения функции положительны.

Выбор коэффициента α в выражении, определяющем R-функцию, позволяет изменять характер функции.

3.3.3. Алгоритм вычисления R-функции сложной фигуры

При разработке геометрической модели приходится иметь дело с большим числом линий, поэтому требуется разработать универсальный алгоритм вычисления R-функции фигуры или группы фигур. Построение алгоритма тесно связано со способом построения алгебрологического уравнения, описывающего фигуру. Естественным представляется построение фигуры из фрагментов, которые, в свою очередь, образованы линиями. Такая форма записи удобна в конструкторской практике и позволяет описывать реальные изделия. Не касаясь вопросов, связанных с преобразованием полученного уравнения, построим двухуровневый алгоритм прямого вычисления заданной R-функции.

Введем следующие переменные, определяющие применение алгебрологических операций в вычислениях:

$$h_i = \begin{cases} -1, & \text{если задана операция } \neg_\alpha f_i, \\ 1, & \text{если операция отрицания не задана;} \end{cases}$$

$$l_i = \begin{cases} -1, & \text{если задана операция } f_{i-1} \wedge_\alpha f_i, \\ 1, & \text{если задана операция } f_{i-1} \vee_\alpha f_i, \end{cases} \quad (3.27)$$

Информация, необходимая для вычисления R-функции, представлена следующими данными:

- функции $f(x, y)$, описывающие границу фигуры, заданы коэффициентами многочленов;
- число n фрагментов (выражений, заключенных в скобки) в уравнении;
- переменные h_j , определяющие знак фрагмента;

- переменные l_j , определяющие R-операции над фрагментами;
- число m линий, образующих каждый из фрагментов;
- переменные h_i , определяющие знак каждой функции;
- переменные l_i , определяющие R-операции над функциями.

Тогда для вычисления значения R-функции, описывающей фигуру, в точке $u(x, y)$ применим простой рекуррентный алгоритм:

$$\begin{aligned} \varphi_j &= h_{j-1} g_{j-1} + h_j g_j + l_j \sqrt{g_{j-1}^2 + g_j^2 - \alpha h_{j-1} h_j g_{j-1} g_j} \\ g_i &= h_i f_{i-1} + h_{i-1} f_i + l_i \sqrt{f_{i-1}^2 + f_i^2 - \alpha h_{i-1} h_i f_{i-1} f_i}; \\ i &= 1, 2, \dots, m_j; \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (3.28)$$

3.3.4. Проверка непересечения геометрических фигур

Границу области пересечения двух фигур можно записать в виде R-функции $[\varphi_1(x, y) \wedge_{\alpha} \varphi_2(x, y)]$. Если фигуры не пересекаются, то область их пересечения должна быть пустой. Принимая во внимание, что внутри фигуры, образованной пересечением проверяемых фигур, R-функция отрицательна, можем сформулировать условие непересечения фигур как требование неотрицательности R-функции в любой точке области их пересечения.

Условие непересечения двух геометрических фигур, заданных соответствующими R-функциями φ_1 , φ_2 , записывается следующим образом:

$$\min_{(x, y)} [\varphi_1(x, y) \wedge_{\alpha} \varphi_2(x, y)] \geq 0. \quad (3.29)$$

Использование этого условия предполагает применение методов оптимизации. Выбор метода зависит от характера оптимизируемой функции. Как видно из рис. 3.9, R-функция, использованная в примере 3.5, не имеет особых точек при $x=0$. Но вывод о применимости того или иного метода оптимизации (например, градиентного) может быть сделан только после исследования функции по всей области значений параметров x, y .

Вопросы для самоконтроля к гл. 3

1. Как определить параметр в параметрическом уравнении линии?
2. Какой процесс называют интерполяцией?
3. Что такое характеристическая ломаная?
4. Какие интерполяционные кривые называют неоднородными?
5. Как получают и используют разделенные разности?
6. Что такое сплайны?
7. Что такое NURBS кривые?
8. Какие функции называют нормированными?
9. Какие кривые называют рациональными?
10. Что называется R-функцией?
11. Как получить алгебрологическое уравнение геометрической фигуры?

4. Преобразования плоской модели

В недалеком прошлом вопросы преобразования чертежа решались с помощью канцелярских принадлежностей и связанные с ним теоретические вопросы интересовали только узких специалистов. Разработка и внедрение графических редакторов в практику конструирования изменили отношение к этой проблеме. Далее будут рассмотрены два вида преобразований плоской модели: **редактирование чертежа** и **параметризация**. Редактирование проводится в автоматизированном режиме: конструктор последовательно изменяет элементы изображения. Параметризация подразумевает автоматическое изменение чертежа типовой детали в соответствии с заранее заданной таблицей размеров.

4.1. Редактирование чертежа

Использование прототипов при разработке геометрической модели подразумевает применение методов редактирования. (Разумеется, это касается компьютерных моделей.) Как правило, исправить модель проще, чем создать новую.

Элементы модели обычно заданы координатами узлов (характерных точек). Так, отрезок прямой определен, если известны координаты его концов, дуга окружности - если задан центр и концы дуги и т.д. Перемещение узла или группы узлов изменяет положение графического элемента, его форму и размеры. Таким образом, редактирование плоской модели (чертежа) - это целенаправленное изменение координат узлов или групп узлов на поле чертежа. При этом остальная часть чертежа остается неизменной.

4.1.1. Перенос

Пусть геометрический элемент задан тремя узлами $u_1(x_1, y_1)$, $u_2(x_2, y_2)$, $u_3(x_3, y_3)$ в абсолютной системе координат чертежа (см. рис. 4.1).

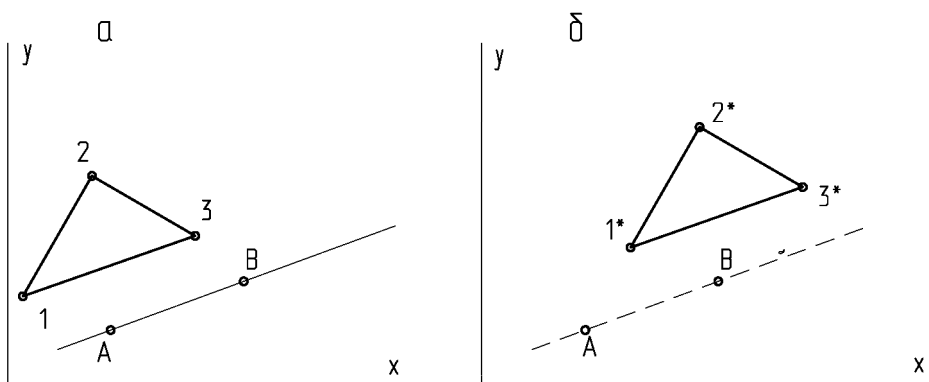


Рис. 4.1. Сдвиг (перенос) геометрического элемента: а – исходное положение, б - результат редактирования

Новые координаты каждого из узлов элемента получаются по формулам

$$\begin{aligned} x_k^* &= x_k + (x_B - x_A); \\ y_k^* &= y_k + (y_B - y_A), \end{aligned} \quad (4.1)$$

где k - номер узла.

4.1.2. Поворот

Пусть задан тот же геометрический элемент (см. рис. 4.2). Требуется повернуть заданный элемент вокруг точки $u_0(x_0, y_0)$, на заданный угол α .

Преобразования осуществляются в несколько этапов:

- вводим новую систему координат $\xi\zeta$ с центром в точке поворота и осями параллельными осям абсолютной системы координат; новые координаты узлов определяются по формулам

$$\xi_k = x_k - x_0; \quad \zeta_k = y_k - y_0;$$

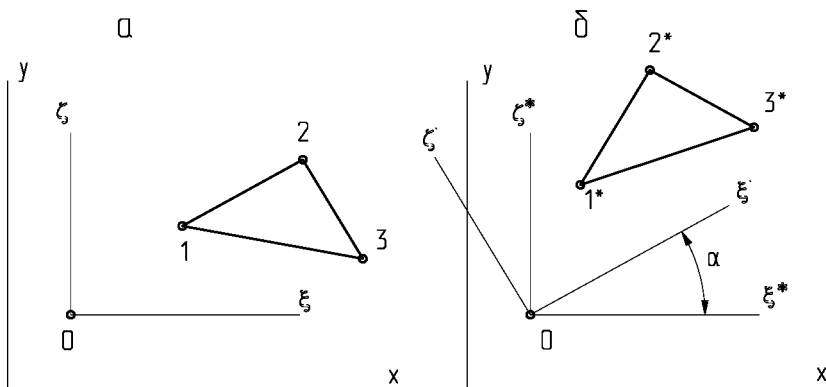


Рис. 4.2. Поворот геометрического элемента: а – исходное положение, б – результат редактирования

- поворачиваем систему координат $\xi\zeta$ вместе с элементом на заданный угол и определяем новое положение элемента в системе координат с центром в точке поворота и осями, параллельными осям абсолютной системы координат $\xi^*\zeta^*$:

$$\xi_k^* = \xi_k \cos \alpha - \zeta_k \sin \alpha; \quad \zeta_k^* = \xi_k \sin \alpha + \zeta_k \cos \alpha; \quad (4.2)$$

- переносим начало системы координат в начало абсолютной системы координат

$$x_k = \xi_k^* + x_0; \quad y_k = \zeta_k^* + y_0.$$

Окончательный результат преобразований получаем в виде

$$\begin{aligned} x_k^* &= (x_k - x_0) \cos \alpha - (y_k - y_0) \sin \alpha + x_0; \\ y_k^* &= (x_k - x_0) \sin \alpha + (y_k - y_0) \cos \alpha + y_0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

4.1.3. Зеркальное отражение

Рассмотрим преобразование того же треугольника 123 (см. рис. 4.3). Требуется получить зеркальное отражение элемента относительно оси, заданной двумя узлами $\mathbf{u}_A(x_A, y_A)$, $\mathbf{u}_B(x_B, y_B)$.

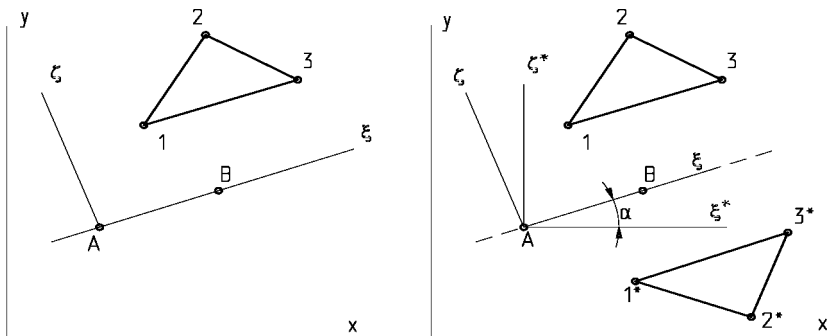


Рис. 4.3. Зеркальное отражение геометрического элемента:
а - исходное положение, б - результат редактирования

Преобразования осуществляются в несколько этапов:

- вводим новую прямоугольную систему координат $\xi\zeta$ с центром в точке А и осью ξ , направленной по вектору $(\mathbf{u}_B - \mathbf{u}_A)$; новые координаты узлов определяются по формулам (сдвиг с поворотом на угол наклона оси отражения относительно оси абсцисс x)

$$\begin{aligned} \xi_k &= (x_k - x_A) \cos \alpha + (y_k - y_A) \sin \alpha; \\ \zeta_k &= -(x_k - x_A) \sin \alpha + (y_k - y_A) \cos \alpha. \end{aligned} \quad (4.4)$$

- выполняем отражение в оси абсцисс

$$\xi'_k = \xi_k; \quad \zeta'_k = -\zeta_k;$$

- поворачиваем систему координат $\zeta\xi$ на тот же угол с обратным знаком и определяем новые координаты с центром в точке поворота и осями, параллельными осям абсолютной системы координат $\xi^*\zeta^*$

$$\xi_k^* = \xi_k' \cos \alpha - \zeta_k' \sin \alpha ; \zeta_k^* = \xi_k' \sin \alpha + \zeta_k' \cos \alpha ;$$

- переносим начало системы координат в начало абсолютной системы координат

$$x_k = \xi_k^* + x_A ; y_k = \zeta_k^* + y_A .$$

Результат преобразования

$$\begin{aligned} x_k^* &= (x_k - x_A)(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + 2(y_k - y_A) \sin \alpha \cos \alpha - x_A ; \\ y_k^* &= 2(x_k - x_A) \sin \alpha \cos \alpha - (y_k - y_A)(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) - y_A . \end{aligned} \quad (4.5)$$

4.1.4. Масштабирование

Пусть требуется пропорционально изменить расстояние от заданного центра $u_0(x_0, y_0)$ до каждой точки геометрического объекта. Результатом такой операции будет фигура, подобная оригиналу.

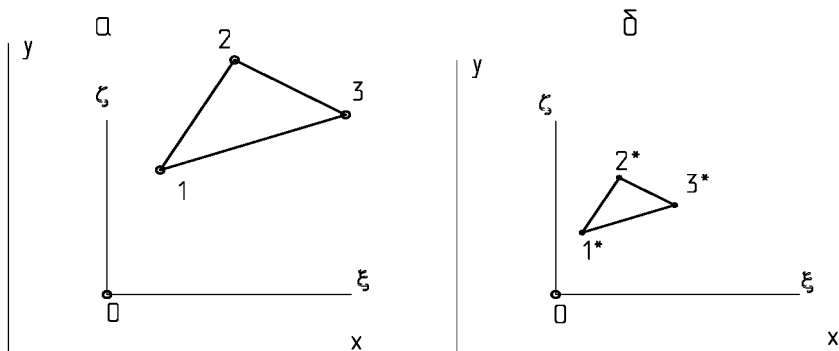


Рис. 4.4. Масштабирование геометрического элемента:

а - исходное положение, б - результат редактирования

Преобразования осуществляются в несколько этапов:

- вводим новую систему координат $\xi\zeta$ с центром в точке $u_0(x_0, y_0)$ и осями, параллельными осям абсолютной системы координат; новые координаты узлов определяются по формулам

$$\xi_k = x_k - x_0 ; \zeta_k = y_k - y_0 ;$$

- вычисляем новые значения координат $\xi^*\zeta^*$

$$\xi_k^* = m \xi_k ; \zeta_k^* = m \zeta_k ;$$

где m – коэффициент масштабирования;

- переносим начало системы координат в начало абсолютной системы координат $x_k = \xi_k^* + x_0$; $y_k = \zeta_k^* + y_0$.

Окончательный результат операции

$$x_k^* = m x_k + (1-m)x_0; y_k^* = m y_k + (1-m)y_0. \quad (4.6)$$

4.2. Параметрические модели

Различные типы изделий, как правило, сведены к определенному числу образцов-стандартов (например, крепежные детали, подшипники и др.). Детали, имеющие одинаковую форму и отличающиеся размерами, называются типовыми.

Для построения компьютерных чертежей типовых деталей целесообразно использовать параметрическую модель, включающую только одно изображение детали.

Параметрической моделью (ПМ) детали называют такое ее описание, которое позволяет произвольно менять размеры элементов ее чертежа, сохраняя конфигурацию и целостность изображения.

ПМ создается для автоматического получения чертежей деталей, имеющих одинаковую конфигурацию, но разные размеры. **Геометрическую модель (ГМ)** такой детали (то есть - набор данных, определяющих первоначальный вариант изображения) разрабатывают один раз. Соответствующая ПМ устанавливает заданные связи: **размер - размерная линия - узлы элементов, привязанных к концам размерной линии**. Значения изменяемых размеров могут задаваться в процессе получения изображения или храниться в таблицах, что позволяет создавать компактные банки изображений стандартных деталей. Таким образом, **ПМ включает геометрическую модель, таблицу размеров и информацию о связях** размеров с изображением.

Информация о связях - главное звено ПМ. Стирание ПМ разрушает информацию о связях, но оставляет нетронутой ГМ.

Операция **параметризации** заключается в автоматическом изменении размеров элементов изображения. Возможна линейная и угловая параметризация. Элементарным результатом параметризации является **сдвиг группы узлов** изображения в направлении заданного линейного размера или их **поворот вокруг центра** заданного углового размера.

К геометрической модели, предназначенной для последующей параметризации, предъявляется следующее требование: **все узлы, определяющие изменяемые элементы изображения, должны быть связаны размерами (угловыми или линейными).**

Все размеры на чертеже детали должны быть заданы от выбранных баз. **Базой** называется поверхность, ось или точка, принадлежащие детали. Для правильного выбора баз при простановке размеров необходимо иметь представление об условиях работы детали в изделии, о технологии изготовления детали и способах ее контроля. Для симметричных элементов детали, как правило, размер ставится между этими элементами, а под базой подразумевается ось или плоскость симметрии. В связи с вышесказанным, возможны два варианта параметризации размера: базовый сдвиг и диаметральный сдвиг. При базовом сдвиге конец размерной линии, соответствующий базе, остается неподвижным; перемещаются выделенные узлы, связанные с другим концом размерной линии. При диаметральном сдвиге выделенные узлы, связанные с концами размерной линии, перемещаются симметрично относительно плоскости симметрии.

Модель, использующая сдвиг относительно базы, не сохраняет симметрию изображения относительно центра размерной линии. При диаметральном сдвиге симметрия сохраняется.

Угловые размеры параметризуются аналогично линейным, но вместо сдвига узлов проводится их поворот.

4.2.1. Линейный базовый сдвиг

Любая операция параметризации чертежа относится к конкретному размеру. Параметром является размерное число. Возможные варианты значений параметров выбираются из таблицы, прилагаемой к чертежу. **Базовый узел** (при параметризации его положение не изменяется) лежит на одной из выносных линий. Множество **перемещаемых узлов** привязано к другой выносной линии и должно быть определено заранее. Рассмотрим общий случай - направление размерной линии не совпадает с направлением осей абсолютной системы координат чертежа.

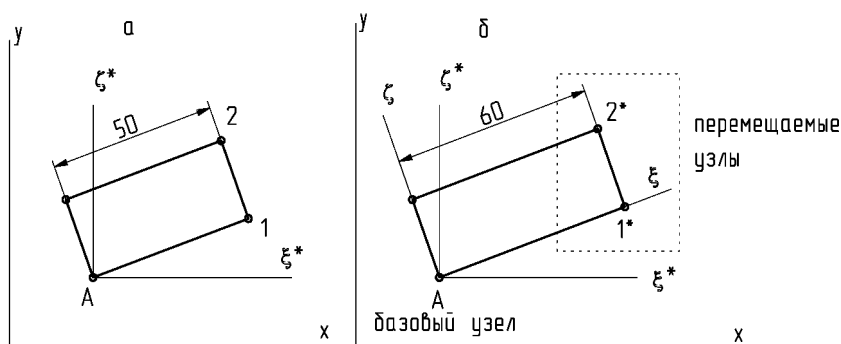


Рис. 4.5. Линейный базовый сдвиг: а – геометрическая модель, б – результат параметризации

Операция изменения параметра (см. рис. 4.5) осуществляется в следующем порядке:

- вводим новую прямоугольную систему координат $\xi\zeta$ с центром в точке А (базовый узел) и осью ξ , направленной параллельно размерной линии; новые координаты узлов определяются по формулам (сдвиг с поворотом на угол наклона оси отсчета относительно оси абсцисс x)

$$\begin{aligned}\xi_k &= (x_k - x_A)\cos\alpha + (y_k - y_A)\sin\alpha; \\ \zeta_k &= -(x_k - x_A)\sin\alpha + (y_k - y_A)\cos\alpha.\end{aligned}\tag{4.7}$$

- вычисляем координаты перемещаемых узлов для нового значения параметра p^* : $\xi_k^* = \xi_k + (p^* - p)$; $\zeta_k^* = \zeta_k$;

где p - старое значение параметра;

- поворачиваем систему координат $\zeta\xi$ на тот же угол с обратным знаком и определяем новые координаты с центром в точке поворота и осями, параллельными осям абсолютной системы координат $\xi^*\zeta^*$

$$\xi_k^* = \xi_k \cos \alpha - \zeta_k \sin \alpha; \zeta_k^* = \xi_k \sin \alpha + \zeta_k \cos \alpha; \quad (4.8)$$

- переносим начало системы координат в начало абсолютной системы координат $x_k = \xi_k^* + x_A$; $y_k = \zeta_k^* + y_A$. (4.9)

4.2.2. Линейный диаметральный сдвиг

Две группы перемещаемых узлов привязаны к выносным линиям диаметрального размера. Базой является ось симметрии.

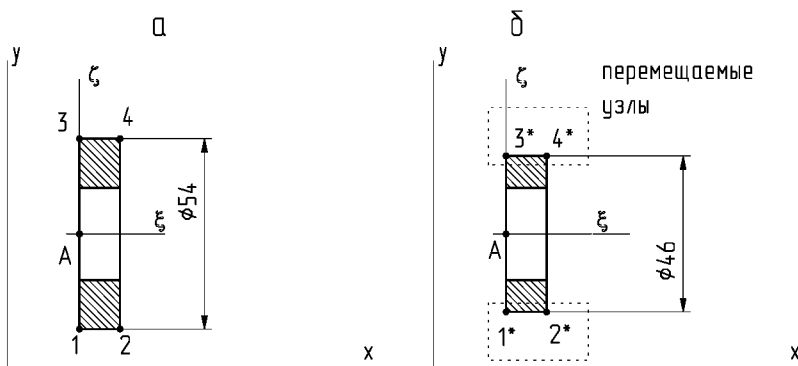


Рис. 4.6. Линейный диаметральный сдвиг: а – геометрическая модель, б – результат параметризации

Для проведения параметризации:

- вводим новую прямоугольную систему координат $\xi\zeta$ с центром в точке А (базовый узел) и осью ξ , направленной по оси симметрии; новые координаты узлов определяются по формулам

$$\begin{aligned} \xi_k &= (x_k - x_A); \\ \zeta_k &= (y_k - y_A); \end{aligned} \quad (4.10)$$

- вычисляем координаты перемещаемых узлов для нового значения параметра:

$$\xi_k^* = \xi_k; \zeta_k^* = \zeta_k + \text{Sign}(\zeta_k)(|p^* - p|/2); \quad (4.11)$$

- переходим к абсолютной системе координат чертежа по формулам (4.9).

Замечания: 1. Выше рассмотрен частный случай: размерная линия параллельна оси ординат. Если направление оси симметрии не совпадает с направлением оси координат, то перед основным преобразованием (заменой параметра) следует повернуть систему координат (4.7), а после замены - выполнить обратный поворот (4.8), как это сделано в разделе 4.2.1.

2. Было бы ошибочным считать, что в основу этого способа параметризации может быть положено преобразование растяжения (масштабирования, гомотетии). Не все перемещаемые узлы расположены на выносных линиях. При масштабировании перемещаемые узлы, расположенные дальше от оси симметрии, получают большее приращение координаты, но они должны сместиться на одинаковое расстояние.

4.2.3. Базовый поворот

При повороте основное преобразование - поворот перемещаемых узлов относительно выбранного центра на угол равный разности угловых размеров. Центр совпадает с центром дуги углового размера (см. рис. 4.7).

Полное преобразование включает:

- введение новой прямоугольной системы координат $\xi\zeta$ с центром в точке А (базовый узел) и осью ξ , направленной параллельно оси абсцисс; новые координаты узлов определяются по формулам (4.10);
- поворот перемещаемых узлов вместе с системой координат на угол $(\beta^* - \beta)$, где β^* - новое значение параметра (углового размера); при этом значение координат узлов остается без изменений $\xi_k' = \xi_k$,

$\zeta'_k = \zeta_k$; вычисление координат перемещаемых узлов (в системе координат $\xi^*\zeta^*$ с центром в точке А и осями, параллельными осям абсолютной системы координат) для нового значения параметра:

$$\begin{aligned}\xi^*_k &= \xi'_k \cos(\beta^* - \beta) - \zeta'_k \sin(\beta^* - \beta); \\ \zeta^*_k &= \xi'_k \sin(\beta^* - \beta) + \zeta'_k \cos(\beta^* - \beta); \end{aligned} \quad (4.12)$$

- переход к абсолютной системе координат чертежа (сдвиг) по формулам (4.8).

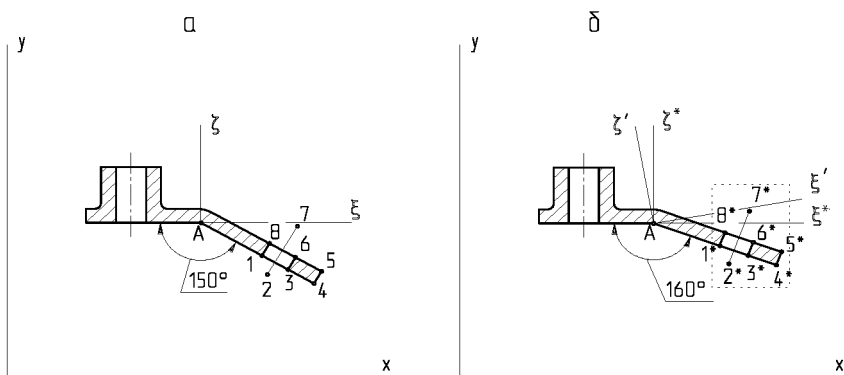


Рис. 4.7. Базовый поворот: а – геометрическая модель, б – результат параметризации

4.2.4. Диаметральный поворот

Две группы перемещаемых узлов привязаны к выносным линиям диаметрального углового размера. Базой является ось симметрии. Выполнение этого преобразования требует симметричного поворота в двух направлениях, поэтому применение прямоугольной системы координат не может дать необходимого результата. Необходим переход к полярной системе координат (см. разд. 2.1).

Для проведения параметризации:

- вводим новую прямоугольную систему координат $\xi\zeta$ с центром в точке А (базовый узел) и осью ξ , направленной по оси симметрии; новые координаты узлов определяются по формулам (4.7), где α - угол между осью x и базовой осью;
- переходим к полярной системе координат

$$\rho = \sqrt{(x_k - x_A)^2 + (y_k - y_A)^2};$$

$$\varphi = \text{Arctg}((y_k - y_A)/(x_k - x_A));$$
(4.13)

- вычисляем координаты перемещаемых узлов для нового значения параметра: $\rho^* = \rho$; $\varphi^* = \text{Sign}(\varphi_k)(|\varphi_k| + (\varepsilon^* - \varepsilon)/2)$; (4.14)

где ε - исходное значение углового размера, ε^* - конечное значение углового размера;

- переходим обратно к прямоугольной системе координат

$$\xi^*_k = \rho^* \cos \varphi^*; \quad \zeta^*_k = \rho^* \sin \varphi^*;$$
(4.15)

- переходим к абсолютной системе координат чертежа по формулам (4.8), (4.9).

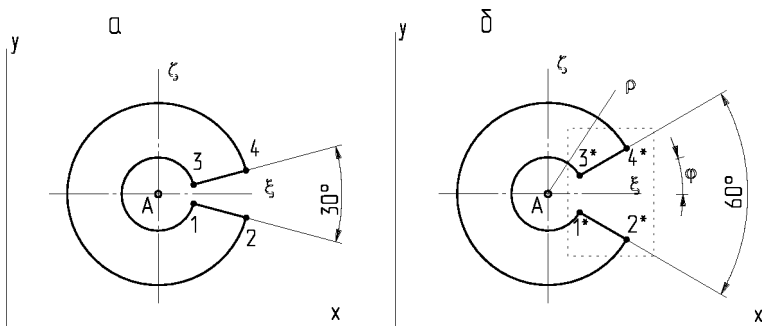


Рис. 4.8. Диаметральный поворот: а – геометрическая модель, б – результат параметризации

4.2.5. Согласование размеров при параметризации.

Обычно конструктор при простановке размеров учитывает варианты обработки детали и старается обеспечить заданную точность изготовления, простоту обработки и контроля. При этом одна и та же форма допускает несколько вариантов простановки размеров.

Требования к простановке размеров при параметризации иногда вступают в противоречие с технологическими требованиями. В этом случае необходима доработка чертежа, для последующей параметризации.

Замечание: если при доработке чертежа необходимо сохранить какие-либо размеры, то при параметризации следует рассматривать их как элементы изображения.

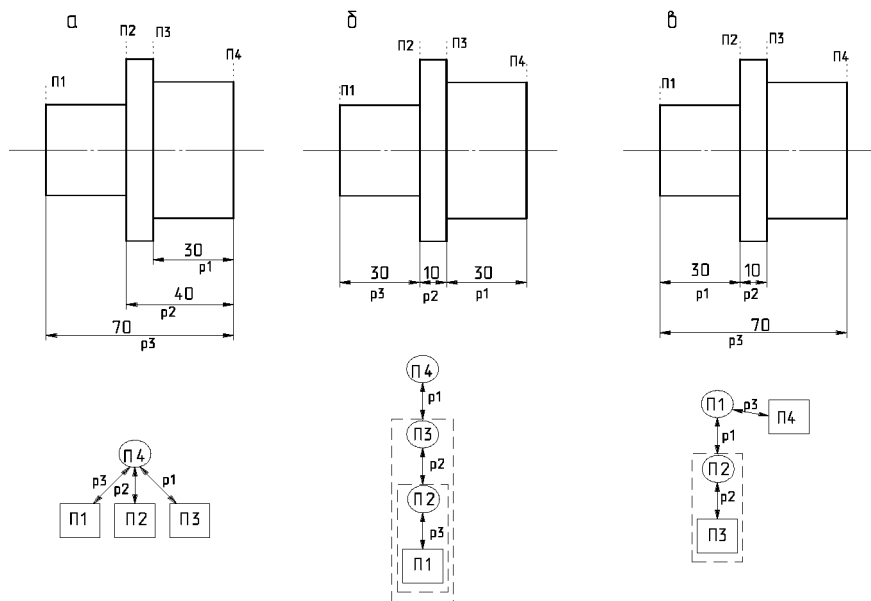


Рис. 4.9. Простановка размеров: а - от единой базы, б - цепная, в - комбинированная

Изменение нескольких размеров при параметризации должно быть согласованным и соответствовать форме детали. Согласование осуществляется соответствующим выбором порядка преобразований, базовых и перемещаемых узлов. Связь размеров, базовых и перемещаемых узлов удобно представлять в виде графа, где вершинами являются множества узловых точек, а ребрами - изменяемые размеры. Длина ребра равна числовому значению соответствующего размера (см. рис. 4.9).

На рисунках (4.9, а, б, в) показаны различные способы простановки размеров и графы, соответствующие этим способам. Выделенные штриховыми прямоугольниками множества узлов, определяющих элементы чертежа, обозначены П1, П2... . Обозначения базовых узлов заключены в кружок, перемещаемых - в прямоугольник. Размерные

линии, соответствующие ребрам графа, обозначены $p_1, p_2, \dots$. На каждом шаге параметризации изменяется только один размер.

Параметризация размера приводит к изменению положения перемещаемых узлов и изменению длины соответствующего ребра. При этом базовые узлы и узлы, не включенные во множество перемещаемых, остаются на прежнем месте.

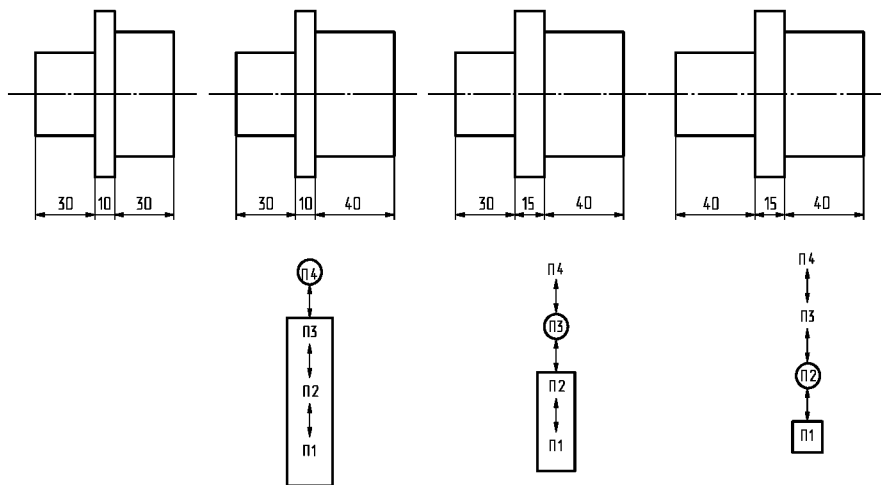


Рис. 4.10. Последовательное изменение размеров при параметризации

На рис. 4.10 показано пошаговое изменение размеров детали. На каждом шаге изменяется только один размер. Остальные размеры и соответствующие им размерные линии остаются неизменными. Графы, соответствующие каждому шагу параметризации, содержат одно множество базовых узлов (обведено кружком) и одно множество перемещаемых узлов (обведено прямоугольником). Не выделенные множества узлов на соответствующем шаге в параметризации не участвуют (их координаты на чертеже не изменяются).

Выбор множества перемещаемых узлов на каждом шаге параметризации должен обеспечить соответствие числового значения и реальной длины размерной линии для любого узла чертежа. Узел, свя-

занный с перемещаемым узлом размером, который не изменяется на данном шаге, должен быть включен во множество перемещаемых узлов. Как правило, возможны различные варианты, обеспечивающие выполнение этого условия. Если это условие не выполняется, то в результате параметризации получим искаженное изображение.

На рис. 4.11. показан результат неправильного выбора множества перемещаемых узлов. Фрагменты изображения сдвинуты, и указанные размеры не соответствуют изображению.

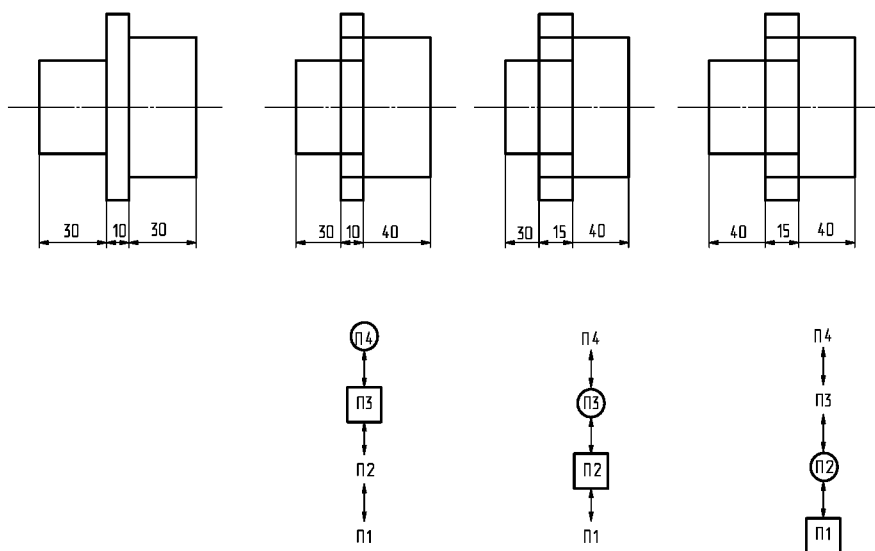


Рис. 4.11. Ошибки при параметризации

Замечание. Многовариантность постановки размеров допускает постановку задачи оптимального выбора. Время вычислений и объем информации пропорциональны числу перемещаемых узлов. Следовательно, из нескольких вариантов нужно выбрать такой, при котором суммарное число перемещаемых узлов по шагам параметризации минимально. В некоторых случаях традиционная постановка

размеров не позволяет получить параметрическое изображение без доработки чертежа.

Приведем несколько примеров.

Пример 4.1. Параметризация косого среза.

При простановке размеров, определяющих косой срез, возможны два варианта: угловой размер определяет наклон плоскости и линейный – задает положение вершины угла; два линейных размера определяют угловые точки среза.

Первый вариант более сложен для параметризации, поскольку угловой и линейный сдвиги осуществляются в разных системах координат (полярной и прямоугольной соответственно). Попытка параметризовать угловой размер, задающий косой срез, приводит к искажению формы детали (угловая точка при повороте отклоняется от вертикали). Правильным решением будет введение дополнительного линейного размера (см. рис. 4.12, б).

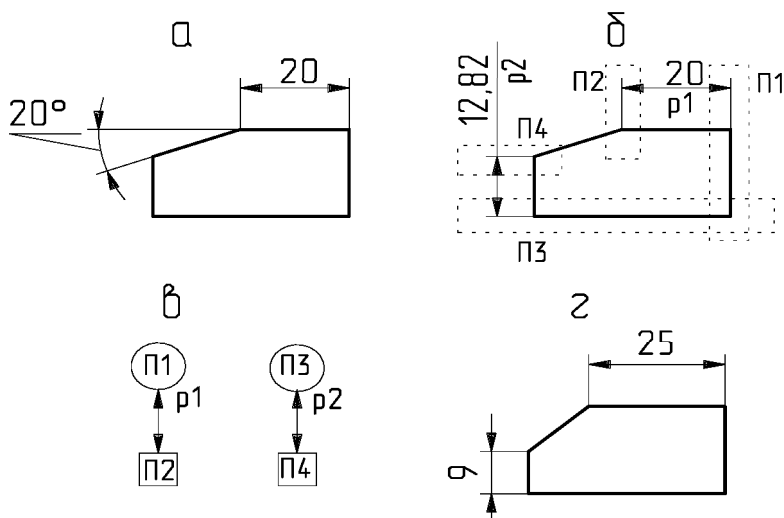


Рис. 4.12. Параметризация косого среза: а - геометрическая модель, б - доработка чертежа, в - граф модели, г - результат параметризации

Пример 4.2. Параметризация дуги.

Рассмотрим вариант параметризации радиуса дуги при неизменном положении вершины дуги и заданной длине хорды (см. рис 4.13).

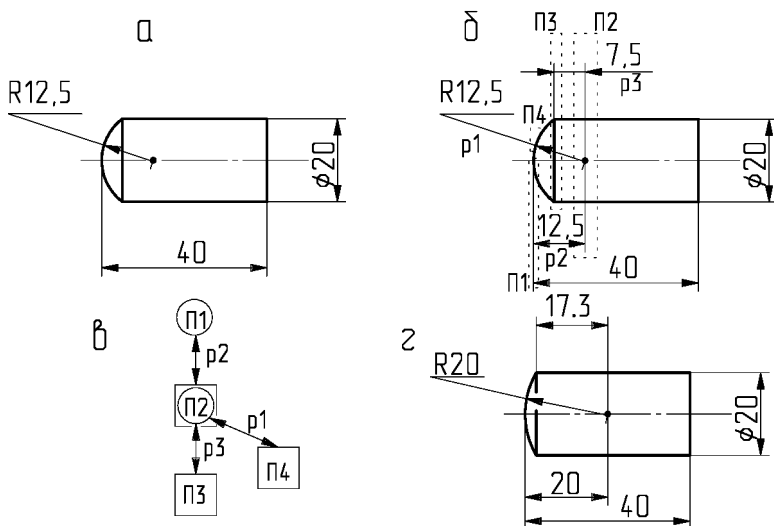


Рис. 4.13. Параметризация радиуса дуги: а - геометрическая модель, б - доработка чертежа, в - граф модели, г - результат параметризации

В этом случае вводится два дополнительных размера - расстояние от центра до вершины дуги в направлении оси симметрии дуги - R и расстояние от центра до хорды, которое вычисляется по формуле

$$C = \sqrt{R^2 - b^2/4},$$

где R - радиус дуги, b - длина хорды.

Пример 4.3. Параметризация шестигранника

На чертеже шестигранника обычно указывают два размера: диаметр описанной окружности и размер под ключ (см. рис. 4.14). Для параметризации этого недостаточно, необходимо ввести дополнительный размер – длину стороны шестигранника (она равна радиусу описанной окружности).

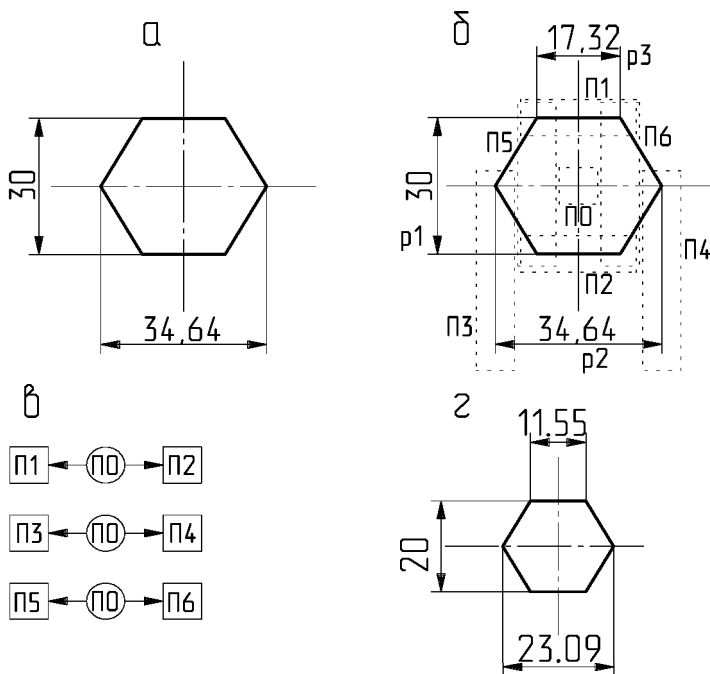


Рис. 4.14. Параметризация шестигранника: а - геометрическая модель, б - доработка чертежа, в - граф модели, г - результат параметризации

Вопросы для самоконтроля к гл. 4

1. Какие преобразования систем координат выполняют при редактировании изображений?
2. Что такое параметризация?
3. Что представляет собой параметрическая модель?
4. Что такое базовый узел при параметризации?
5. Каким образом система изменяет размер при получении нового изображения?
6. Чем отличается сдвиг относительно базы от диаметрального сдвига?
7. Как сохранить симметрию при параметризации изображения?
8. Зачем нужно вводить дополнительные размеры при параметризации?

Список литературы

1. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. - М.: гос. изд. тех.-теор. лит., 1955. - 608 с.
2. Голованов Н.Н. Геометрическое моделирование. - М.: Изд. физ.-мат. лит., 2002. - 472 с.
3. Гордон В.О., Семенцов-Огневский М.А. Курс начертательной геометрии: Учеб. пособие / Под ред. Ю.Б. Иванова. - 23-е изд., перераб. - М.: Наука: Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. - 272 с.
4. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия: Методы и приложения. - 2-е изд., перераб. - М.: Наука: Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. - 760 с.
5. Г. Корн, Т. Корн. Справочник по математике для научных работников и инженеров. - М.: Наука, 1970. - 720 с.
6. Лукьянов Е.Ф. Начертательная геометрия. От теории к практике: Учеб. пособие. – Самара: САМГАПС, 2005. – 317 с.
7. Рвачев В.Л. Геометрические приложения алгебры логики. - Киев: Техника, 1967. - 212с.
8. Советский. энциклопедический словарь / Науч.- ред. совет: А.М. Прохоров (пред.). - М.: Сов. энцикл., 1981. – 1600 с.

Учебное издание

Гаврилов Валерий Николаевич

**ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ
ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ**

Часть 1

Моделирование на плоскости

Учебное пособие

Научный редактор В. А. К о м а р о в
Технический редактор А. Г. П р о х о р о в
Редакторская обработка О. Ю. Д ь я ч е н к о
Компьютерная верстка В. Н. Г а в р и л о в,
Доверстка Т. Е. П о л о в н е в а

Подписано в печать 20.11.06 г. Формат 60х84 1/16.

Бумага офсетная. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 5,35. Усл. кр.-отг. 5,47. Печ. л. 5,75.

Тираж экз. Заказ . ИП-41 /2006

Самарский государственный
аэрокосмический университет.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

Изд-во Самарского государственного
аэрокосмического университета.
443086 Самара, Московское шоссе, 34..