

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего профессионального образования  
«Самарский государственный аэрокосмический университет  
имени академика С.П. Королева  
(национальный исследовательский университет)»

**А. Г. Храмов**

**Теория случайных процессов. Конспект лекций**

*Электронное учебное пособие*

Самара 2011

Автор: **Храмов Александр Григорьевич**

**Храмов, А. Г.** Теория случайных процессов. Конспект лекций [Электронный ресурс]: электрон. учеб. пособие / А. Г. Храмов. М-во образования и науки РФ, Самар. гос. аэрокосм. ун-т им. С. П. Королёва (нац. исслед. ун-т). – Электрон. текстовые и граф. дан. (0,87 Мбайт). – Самара, 2011. – 1 эл. опт. диск (CD-ROM).

Электронное учебное пособие содержит конспект лекций по курсу *«Теория случайных процессов»*. Содержание соответствует лекционной части рабочей программы двухсеместрового курса по теории случайных процессов. Рассмотрены основные математические модели случайных процессов и способы их моделирования и анализа. В частности, рассмотрены терминология и основные понятия случайных процессов, вероятностные распределения и моментные функции, процессы с независимыми приращениями, стационарные в широком смысле процессы и их корреляционные и спектральные характеристики, цепи Маркова с дискретным и непрерывным временем, дифференциальные уравнения Колмогорова, Временные ряды и модель авторегрессии – скользящего среднего.

Конспект лекций предназначен для подготовки бакалавров по направлению 010400.62 *«Прикладная математика и информатика»*, изучающих дисциплину *«Теория случайных процессов»* в 5 и 6 семестрах.

Разработано на кафедре технической кибернетики.

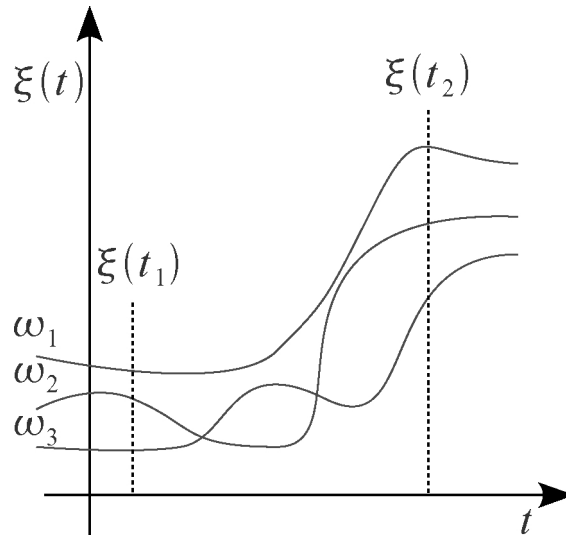
# Лекции по теории случайных процессов

## Содержание

1.	Понятие случайной функции и случайного процесса . . . . .	2
2.	Моментные функции случайных процессов . . . . .	4
3.	Стационарные случайные процессы . . . . .	5
4.	Комплекснозначные и векторные случайные процессы . . . . .	7
5.	Процессы с независимыми значениями . . . . .	8
6.	Процессы с независимыми приращениями . . . . .	8
7.	Примеры процессов с независимыми приращениями . . . . .	11
7.1.	Винеровский процесс . . . . .	11
7.2.	Пуассоновский процесс . . . . .	12
8.	Спектральные свойства стационарных процессов . . . . .	13
9.	Примеры стационарных в широком смысле процессов . . . . .	15
9.1.	Случайный процесс с экспоненциальной корреляционной функцией . . . . .	15
9.2.	Белый шум . . . . .	16
10.	Закон больших чисел для стационарных в широком смысле случайных процессов . . . . .	16
11.	Непрерывность случайных процессов . . . . .	17
12.	Ортогональное разложение Карунена-Лозва . . . . .	18
12.1.	Оптимальность разложения Карунена-Лозва . . . . .	19
12.2.	Пример ортогонального разложения Карунена-Лозва для винеровского процесса . . . . .	19
13.	Марковские процессы . . . . .	20
14.	Цепи Маркова . . . . .	21
14.1.	Однородные цепи Маркова . . . . .	21
14.2.	Предельные вероятности состояний цепи Маркова . . . . .	23
14.3.	Одномерные случайные блуждания . . . . .	24
14.3.1.	Одномерные случайные блуждания с поглощающими концами . . . . .	24
14.3.2.	Полубесконечные одномерные случайные блуждания . . . . .	25
14.4.	Простейший (пуассоновский) поток событий . . . . .	25
14.5.	Однородные цепи Маркова с непрерывным временем . . . . .	27
14.6.	Простейшая система массового обслуживания . . . . .	28

# 1. Понятие случайной функции и случайного процесса

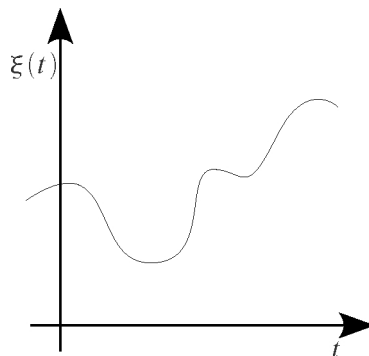
**Определение 1.1.** Случайной функцией  $\xi(t)$  называется отображение  $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  пространства элементарных событий  $\Omega$  в  $\mathbb{R}^n$ , зависящее от параметра  $t$ .



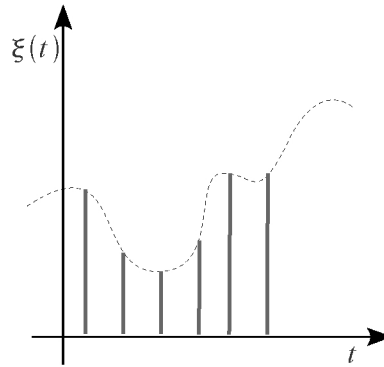
**Замечание.** Случайные величины  $X_{t_1} = \xi(t_1)$  и  $X_{t_2} = \xi(t_2)$  называются *сечениями случайного процесса*. Множества случайных величин  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  называются *реализациями случайного процесса*.

**Определение 1.2.** Случайный процесс — это некоторая случайная функция  $\xi(t) = X(t)$ . Любой случайный процесс может быть разделён на четыре класса:

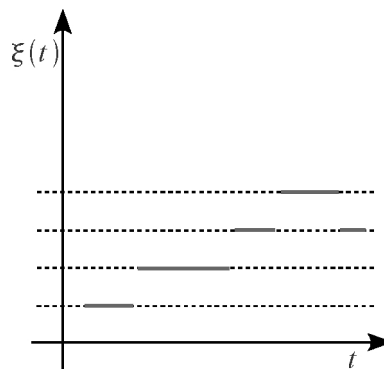
- 1)  $X$  — непрерывная случайная величина,  $t$  — непрерывный параметр. Примеры таких процессов — *температура во времени, скорость автомобиля во времени*.



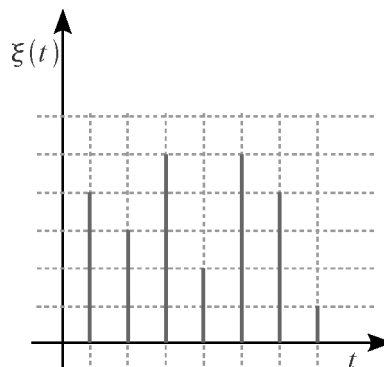
- 2)  $X$  — непрерывная случайная величина,  $t$  — дискретный параметр. Также называется случайной последовательностью. Примером является *дискретизированный непрерывный процесс*, который задан сечениями  $\xi_n = \xi(t) \Big|_{t=n*\Delta t}$ .



- 3)  $X$  – дискретная случайная величина,  $t$  – непрерывный параметр. Примеры – число человек в очереди, процесс радиоактивного распада.



- 4)  $X$  – дискретная случайная величина,  $t$  – дискретный параметр. Пример – оцифрованный звук.



В случае одномерной случайной величины функция распределения  $F_X(x) = P\{X < x\}$  является исчерпывающей характеристикой этой случайной величины (то есть по такой характеристике могут быть найдены все параметры этой случайной величины).

Для случайного вектора исчерпывающей характеристикой является аналогичная функция распределения  $F_X(x_1, x_2, \dots, x_n) = P\{X_1 < x_1, X_2 < x_2, \dots, X_n < x_n\}$ . Аналогичным образом для случайного процесса может быть сформулировано следующее утверждение:

**Утверждение 1.1.** Случайный процесс может быть исчерпывающе охарактеризован следующей функцией распределения:

$$F_\xi(t_1, \dots, t_n, x_1, \dots, x_n) = P\{\xi(t_1) < x_1, \dots, \xi(t_n) < x_n\}.$$

**Пример.** По данной функции распределения

$$F_{\xi}(t_1, \dots, t_n, x_1, \dots, x_n) = P\{\xi(t_1) < x_1, \dots, \xi(t_n) < x_n\},$$

найдем следующую функцию распределения:

$$F_{\xi}(t_1, \dots, t_m, x_1, \dots, x_m) = P\{\xi(t_1) < x_1, \dots, \xi(t_m) < x_m\}, \text{ если } m < n.$$

◁ Согласно критерию согласованности для функций плотности вероятностей:

$$\iint_{\mathbb{R}^n} \dots \int f_{t_1, \dots, t_m, t_{m+1}, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) dx_{m+1} \dots dx_n = f_{t_1, \dots, t_m}(x_1, \dots, x_m),$$

тогда, переходя к функциям распределения:

$$F_{\xi}(t_1, \dots, t_m, x_1, \dots, x_m) = F_{\xi}(t_1, \dots, t_n, x_1, \dots, x_m, \infty, \dots, \infty),$$

что полностью определяет искомую функцию распределения через заданную. ▷

## 2. Моментные функции случайных процессов

**Определение 2.1.** Начальным моментом случайной величины  $X$  называется

$$m_k = MX^k,$$

**Определение 2.2.** Центральным моментом случайной величины  $X$  называется

$$\mu_k = M(X - MX)^k.$$

**Определение 2.3.** Начальным моментом случайного процесса называется

$$m_k(t) = M\xi^k(t).$$

**Определение 2.4.** Центральным моментом случайного процесса называется

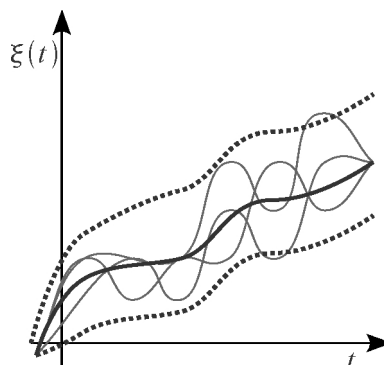
$$\mu_k(t) = M(\xi(t) - M\xi(t))^k.$$

Важными моментными функциями случайных процессов являются при

$k = 1$ :  $m_1(t) = M\xi(t) = m(t)$  — математическое ожидание случайного процесса;

$k = 2$ :  $\mu_2(t) = D_{\xi}(t) = m_2(t) - m_1^2(t) = M\xi^2(t) - (M\xi(t))^2$  — дисперсия случайного процесса.

Геометрически математическое ожидание показывает среднее значение для всех реализаций случайного процесса, а дисперсия характеризует разброс этих значений.



Функция распределения является исчерпывающей характеристикой, поэтому любые параметры процесса могут быть найдены через неё. Отсюда, для начальных и центральных моментов справедливо:

$$m_1 = M_\xi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF_\xi(t, x), \quad \text{в общем случае} \quad m_k = M\xi^k(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k dF_\xi(t, x) \quad (2.1)$$

$$\mu_k = M(\xi(t) - M_\xi(t))^k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M_\xi(t))^k dF_\xi(t, x) \quad (2.2)$$

При этом в случае, если случайный процесс имеет несколько параметров, интегрирование будет производиться по каждому из них:

$$m_{k_1, \dots, k_m}(t_1, \dots, t_m) = M[\xi_1(t_1) \dots \xi_m(t_m)] = \iint_{\mathbb{R}^m} \dots \int x_1^{k_1} \dots x_m^{k_m} dF_\xi(t_1, \dots, t_m, x_1, \dots, x_m).$$

**Замечание.** Центральный момент второго порядка от случайного процесса для фиксированных  $t_1, t_2 \in T$  называется *корреляционной функцией (или ковариационной функцией)*:

$$R_\xi(t_1, t_2) = M\xi(t_1)\xi(t_2) - M_\xi(t_1)M_\xi(t_2). \quad (2.3)$$

**Замечание.** Нормированной корреляционной функцией случайной величины  $\xi$  называется

$$r_\xi(t_1, t_2) = \frac{R_\xi(t_1, t_2)}{\sqrt{D_\xi(t_1)} \cdot \sqrt{D_\xi(t_2)}}.$$

**Утверждение 2.1.** Корреляционная функция обладает следующими свойствами:

- 1)  $R_\xi(t_1, t_2) = R_\xi(t_2, t_1)$ ;
- 2)  $D_\xi(t) = R_\xi(t, t)$ ;
- 3)  $|R_\xi(t_1, t_2)| \leq \sqrt{D_\xi(t_1)D_\xi(t_2)}$ ;
- 4)  $\sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^N x_i x_k R_\xi(t_i, t_k) \geq 0, \quad \forall N, t_1, \dots, t_N, x_1, \dots, x_N.$

### 3. Стационарные случайные процессы

Стационарный процесс (говоря нестрого) — такой процесс, вероятностные характеристики которого не меняются с течением времени. *Случайный процесс называется стационарным процессом в узком смысле*, если совокупность сечений этого процесса не изменяется при синхронном сдвиге сечений. Формальнее:

**Определение 3.1.** Случайный процесс  $\xi(t)$  называется *стационарным процессом в узком смысле*, если

$$F_\xi(t_1, \dots, t_n, x_1, \dots, x_n) = F_\xi(t_1 + \tau, \dots, t_n + \tau, x_1, \dots, x_n), \quad \forall n, \tau, t_1, \dots, t_n, x_1, \dots, x_n$$

Для случайных процессов, являющихся стационарными в узком смысле:

- 1)  $F_\xi(t, x) \Big|_{\substack{n=1 \\ \tau=-t}} = F_\xi(0, x) = F_\xi(x)$ , то есть функция  $F_\xi(t, x)$  не зависит от параметра  $t$ ;
- 2)  $F_\xi(t_1, t_2, x_1, x_2) \Big|_{\substack{n=2 \\ \tau=-t_1}} = F_\xi(0, t_2 - t_1, x_1, x_2) = F_\xi(t_2 - t_1, x_1, x_2)$ , то есть  $F_\xi(\tau, x_1, x_2)$  зависит от трёх параметров, где  $\tau$  - разность моментов времени сечений.

**Определение 3.2.** Случайный процесс  $\xi(t)$  называется *стационарным процессом в широком смысле*, если выполняются следующие свойства (при этом из стационарности в узком смысле следует стационарность в широком смысле):

- 1)  $M_\xi(t) = M_\xi$ ;
- 2)  $D_\xi(t) = D_\xi$ ;
- 3)  $R_\xi(t_1, t_2) = R_\xi(\tau)$  где  $\tau = t_2 - t_1$ ,

при этом условие (2) является «лишним» и может быть выведено из условия (3).

**Замечание.** Корреляционная функция  $R_\xi(\tau)$  стационарного процесса обладает следующими свойствами (это следует из свойств корреляционной функции утверждения 2.1):

- 1)  $R_\xi(\tau) = R_\xi(-\tau)$ ;
- 2)  $D_\xi = R_\xi(0)$ ;
- 3)  $|R_\xi(\tau)| \leq D_\xi$ ;
- 4)  $\sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^N x_i x_k R_\xi(t_i - t_k) \geq 0, \forall N, t_1, \dots, t_N, x_1, \dots, x_N$ .

**Утверждение 3.1.** Случайный процесс называется *гауссовским*, если любое его многомерное распределение вероятностей сечений является гауссовской случайной величиной:

$$\forall n, t_1, \dots, t_n : \{\xi(t_1), \dots, \xi(t_n)\} \sim \mathcal{N}(\bar{a}, R),$$

причём для гауссовского случайного процесса *из стационарности в широком смысле следует стационарность в узком смысле*. Для доказательства этого запишем функцию плотности вероятностей многомерного гауссовского распределения:

$$f_\xi(t_1, \dots, t_n, x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |R_\xi|^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\bar{x} - \bar{a})^\top \cdot R_\xi^{-1}(\bar{x} - \bar{a})\right\},$$

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \bar{a} = \begin{pmatrix} M_\xi(t_1) \\ \vdots \\ M_\xi(t_n) \end{pmatrix} \quad R_\xi = \{R_\xi(t_i - t_k)\}_{i,k=1}^n,$$

произведём сдвиг параметров на некоторую величину  $\tau$ , тогда

$$f_\xi(t_1 + \tau, \dots, t_n + \tau, x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |R_\xi|^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\bar{x} - \bar{a})^\top \cdot R_\xi^{-1}(\bar{x} - \bar{a})\right\}, \text{ то есть}$$

$$f_\xi(t_1 + \tau, \dots, t_n + \tau, x_1, \dots, x_n) = f_\xi(t_1, \dots, t_n, x_1, \dots, x_n), \text{ из чего следует, что}$$

$$F_\xi(t_1 + \tau, \dots, t_n + \tau, x_1, \dots, x_n) = F_\xi(t_1, \dots, t_n, x_1, \dots, x_n).$$

**Пример.** Для случайного процесса  $\xi(t) = X \cos \omega t + Y \sin \omega t$ , где случайный вектор  $(X, Y) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2, 0, \sigma^2, 0)$  найдём моментные функции; выясним, является ли процесс стационарным в широком смысле; в узком смысле.

◁ Найдём моментные функции:

$$m_1 = M_\xi(t) = M[X \cos \omega t + Y \sin \omega t] = M[X \cos \omega t] + M[Y \sin \omega t] =$$

$$= \underbrace{MX}_0 \cdot \cos \omega t + \underbrace{MY}_0 \cdot \sin \omega t = 0,$$

$$\begin{aligned}
\mu_2 &= M\xi^2(t) - \underbrace{(M\xi(t))^2}_0 = M\xi^2(t) = M[X^2 \cos^2 \omega t + Y^2 \sin^2 \omega t + 2XY \cos \omega t \sin \omega t] = \\
&= MX^2 \cdot \cos^2 \omega t + MY^2 \cdot \sin^2 \omega t + 2MXY \cos \omega t \sin \omega t = \\
&= \cos^2 \omega t \underbrace{MX^2}_{\sigma^2} + \sin^2 \omega t \underbrace{MY^2}_{\sigma^2} + 2 \cos \omega t \sin \omega t \underbrace{MXY}_{\text{некоррелированные, } MX \cdot MY} = \sigma^2,
\end{aligned}$$

Для того, чтобы выяснить, является ли процесс стационарным, найдём корреляционную функцию:

$$\begin{aligned}
R_\xi(t_1, t_2) &= M\xi(t_1)\xi(t_2) - \underbrace{M\xi(t_1)M\xi(t_2)}_0 = \\
&= M[X^2 \cos \omega t_1 \cos \omega t_2 + Y^2 \sin \omega t_1 \sin \omega t_2 + XY \cos \omega t_1 \sin \omega t_2 + XY \cos \omega t_2 \sin \omega t_1] = \\
&= [\text{для краткости опустив преобразования, получим функцию от } \tau = t_1 - t_2] = \cos(\omega t_2 - \omega t_1) R_\xi(\tau).
\end{aligned}$$

Тогда, заметим, что:

- 1)  $M_\xi(t) = M_\xi = 0$
- 2)  $D_\xi(t) = D_\xi = \sigma^2$ ;
- 3)  $R_\xi(t_1, t_2) = R_\xi(\tau)$ ,

то есть процесс является *стационарным в широком смысле*. При этом, так как процесс  $\xi(t)$  является линейной комбинацией нормальных случайных процессов, то он сам является нормальным случайным процессом. Тогда, основываясь на утверждении 3.1, можно считать, что процесс  $\xi(t)$  является *стационарным в узком смысле*.  $\triangleright$

## 4. Комплекснозначные и векторные случайные процессы

**Замечание.** Если случайный процесс принимает значения в пространстве  $\mathbb{C}$  комплексных чисел, то его называют *комплекснозначным*. Любой комплекснозначный процесс  $\zeta(t)$  можно представить в виде  $\zeta(t) = \xi(t) + i\eta(t)$ , где  $\xi(t), \eta(t)$  – вещественные случайные процессы.

**Утверждение 4.1.** Моментные функции комплекснозначных случайных процессов

$$\begin{aligned}
M_\zeta(t) &= M_\xi(t) + iM_\eta(t), \\
D_\zeta(t) &= M(\zeta(t) - M_\zeta(t))(\overline{\zeta(t) - M_\zeta(t)}) = M\zeta(t)\overline{\zeta(t)} - M_\zeta(t)\overline{M_\zeta(t)}, \\
R_\zeta(t_1, t_2) &= M[(\zeta(t_1) - M_\zeta(t_1))(\overline{\zeta(t_2) - M_\zeta(t_2)})],
\end{aligned}$$

причём *корреляционная функция комплекснозначного процесса* обладает следующими свойствами:

- 1)  $R_\zeta(t_1, t_2) = \overline{R_\zeta(t_2, t_1)}$ ;
- 2)  $D_\zeta(t) = R_\zeta(t, t) \geq 0$ ;
- 3)  $|R_\zeta(t_1, t_2)| \leq \sqrt{D_\zeta(t_1)D_\zeta(t_2)}$ ;
- 4)  $\sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^N x_i \overline{x_k} R_\xi(t_i - t_k) \geq 0, \forall N, t_1, \dots, t_N, x_1, \dots, x_N$ .

Комплекснозначные процессы являются стационарными в широком смысле при тех же условиях, что и вещественнозначные (см. 3.2).

- 1)  $R_\zeta(t_i, t_k) = \overline{R_\zeta(t_k, t_i)}$ ;
- 2)  $|R_\zeta(\tau)| \leq D_\zeta = R_\zeta(0)$ ;
- 3)  $\sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^N x_i \overline{x_k} R_\zeta(t_i - t_k) \geq 0, \forall N, t_1, \dots, t_N, x_1, \dots, x_N$ .

**Замечание.** Двумерным векторным случайным процессом будем называть некоторый процесс  $\zeta(t) = (\xi(t), \eta(t))$ . Математическим ожиданием такого процесса будет являться вектор  $M_\zeta(t) = (M_\xi(t), M_\eta(t))$ , а корреляционная функция будет матричной:

$$R_\zeta(t_1, t_2) = \begin{pmatrix} R_\xi(t_1, t_2) & R_{\xi\eta}(t_1, t_2) \\ R_{\eta\xi}(t_1, t_2) & R_\eta(t_1, t_2) \end{pmatrix}$$

**Определение 4.1.** Взаимной корреляционной функцией двух случайных процессов  $\xi, \eta$  называется

$$R_{\xi\eta} = M \left[ (\xi(t_1) - M_\xi(t_1)) (\eta(t_2) - M_\eta(t_2)) \right],$$

обладающая следующими свойствами:

- 1)  $R_{\xi\eta}(t_1, t_2) = R_{\eta\xi}(t_2, t_1)$ ;
- 2)  $|R_{\xi\eta}(t_1, t_2)| \leq \sqrt{R_\xi(t_1, t_2) R_\eta(t_1, t_2)}$ .

## 5. Процессы с независимыми значениями

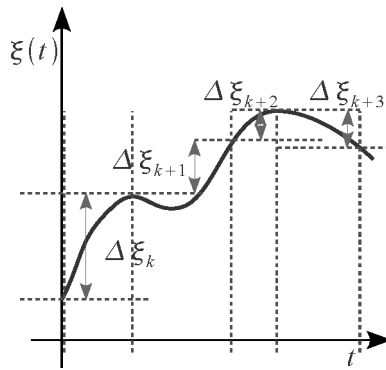
**Определение 5.1.** Случайный процесс  $\xi(t)$  является процессом с независимыми значениями, если его сечения в произвольные моменты времени являются независимыми в совокупности. При этом функция распределения такого процесса факторизуется следующим образом:

$$\begin{aligned} F_\xi(t_1, \dots, t_n, x_1, \dots, x_n) &= P \{ \xi(t_1) \leq x_1, \dots, \xi(t_n) \leq x_n \} = \\ &= P \{ \xi(t_1) \leq x_1 \} \dots P \{ \xi(t_n) \leq x_n \} = F_\xi(t_1, x_1) \dots F_\xi(t_n, x_n). \end{aligned} \quad (5.1)$$

**Замечание.** Процесс с независимыми значениями  $\xi(t)$  часто называют белым шумом. При этом стационарный процесс с независимыми значениями, для которого  $F_\xi(t, x) = F_\xi(x)$ , называют стационарным белым шумом.

## 6. Процессы с независимыми приращениями

**Определение 6.1.** Случайный процесс  $\xi(t)$  является процессом с независимыми приращениями, если случайные величины  $\xi(t_0), \underbrace{\xi(t_1) - \xi(t_0)}_{\Delta\xi_1}, \dots, \underbrace{\xi(t_n) - \xi(t_{n-1})}_{\Delta\xi_n}$  при любых параметрах  $n, t_0, \dots, t_n$ , для которых  $t_0 < t_1 < \dots < t_n$  являются независимыми в совокупности.



**Замечание.** Характеристической функцией случайной величины  $X$  называется

$$\varphi(\lambda) = \text{Me}^{i\lambda X},$$

а для случайного вектора  $(X_1, \dots, X_n)$  функция примет вид:

$$\varphi(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \text{Me}^{i(\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_n X_n)}.$$

Характеристическая функция обладает важным свойством: если  $X$  и  $Y$  – независимые случайные величины, то  $\varphi_{X+Y}(\lambda) = \varphi_X(\lambda)\varphi_Y(\lambda)$ .

**Утверждение 6.1.** Процесс с независимыми приращениями исчерпывающе характеризуется своей двумерной функцией распределения.

**Доказательство.** Рассмотрим случайный вектор  $X = (X_1, \dots, X_n) = (\xi(t_0), \xi(t_1) - \xi(t_0), \dots, \xi(t_n) - \xi(t_{n-1}))$  и его характеристическую функцию

$$\varphi_X(t_0, \dots, t_n, \lambda_0, \dots, \lambda_n) = \prod_i \text{Me}^{i\lambda_i X_i} = \text{Me}^{i\lambda_0 X_0} \text{Me}^{i\lambda_1 (\xi(t_1) - \xi(t_0))} \dots \text{Me}^{i\lambda_n (\xi(t_n) - \xi(t_{n-1}))}$$

Покажем, что общая характеристическая функция  $\varphi_X(t_0, \dots, t_n, \lambda_0, \dots, \lambda_n)$  выражается через  $\varphi_\xi(t_1, t_2, \lambda_1, \lambda_2) = \text{Me}^{i(\lambda_1 \xi(t_1) + \lambda_2 \xi(t_2))}$ . В матричном виде  $X, \xi$  выражаются между собой следующими образом

$$\underbrace{\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}}_X \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}}_A = \underbrace{\begin{pmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \\ \vdots \\ \xi_n(t) \end{pmatrix}}_\xi, \text{ или}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \\ \vdots \\ \xi_n(t) \end{pmatrix}}_\xi \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}}_{A^{-1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}}_X$$

$$\begin{aligned}
\varphi_X(t, \lambda) &= \mathbb{M}e^{i\lambda^T A^{-1}X} = [\mu = \lambda^T A^{-1}] = \mathbb{M}e^{i(\mu_0 X_0 + \dots + \mu_n X_n)} = \mathbb{M}e^{i\mu_0 X_0} \dots \mathbb{M}e^{i\mu_n X_n} = \\
&= \underbrace{\mathbb{M}e^{i\mu_0 \xi(t_0)}}_{\varphi_\xi(t_0, \mu_0)} \underbrace{\mathbb{M}e^{i\mu_1 (\xi(t_1) - \xi(t_0))}}_{\varphi_\xi(t_0, t_1, -\mu_1, \mu_1)} \dots \underbrace{\mathbb{M}e^{i\mu_n (\xi(t_n) - \xi(t_{n-1}))}}_{\varphi_\xi(t_{n-1}, t_n, -\mu_n, \mu_n)} = \\
&= \varphi_\xi(t_0, \mu_0) \prod_k \varphi_\xi(t_{k-1}, t_k, -\mu_k, \mu_k), \text{ где } \mu = \lambda^T A^{-1}
\end{aligned}$$

q.e.d.

## 7. Примеры процессов с независимыми приращениями

### 7.1. Винеровский процесс

**Определение 7.1.** Случайный процесс  $w(t)$  с независимыми приращениями называется *винеровским*<sup>1</sup>, если выполняются условия:

- 1)  $w(0) = 0$ ;
- 2)  $w(s) - w(t) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2(s - t))$ ,  $s \geq t \geq 0$ .

**Теорема 7.1.** Винеровский процесс является гауссовским.

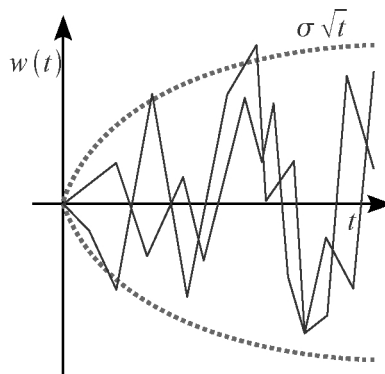
**Утверждение 7.1.** Моментные функции винеровского процесса:

- 1)  $Mw(t) = \underbrace{M(w(t) - w(0))}_{\mathcal{N}(0, \sigma^2(t-0))} = 0$ ;
- 2)  $R_w(s, t) = Mw(t)w(s) - \underbrace{Mw(t)}_0 \underbrace{Mw(s)}_0 = Mw(t)w(s) = M[w(t)(w(s) - w(t))] + Mw^2(t) = \underbrace{Mw(t)}_0 M(w(s) - w(t)) + Mw^2(t) = M[\underbrace{w(t) - w(0)}_{\mathcal{N}(0, \sigma^2(t-0))}]^2 = \sigma^2 t$ , если  $s \geq t$ .

В случае, если  $s \leq t$ , то  $R_w(s, t) = \sigma^2 s$ . Тогда формула для корреляционной функции винеровского процесса примет вид:

$$R_w(s, t) = \sigma^2 \min(s, t)$$

- 3)  $D_w(t) = R_w(t, t) = \sigma^2 t$ .



**Пример.** Для случайного процесса  $\xi(t) = e^{iw(t)}$  при  $\sigma^2 = 1$  найдём моментные функции и исследуем процесс на стационарность.

◁ Математическое ожидание процесса:

$$Me^{iw(t)} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix} f_w(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx = e^{-\frac{t}{2}} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-it)^2}{2t}} dx}_1 = e^{-\frac{t}{2}}.$$

<sup>1</sup>Винеровский процесс характеризует в физике броуновское движение.

Корреляционная функция:

$$R_{\xi}(t_1, t_2) = \underbrace{M [e^{iw(t_1)}] \overline{[e^{iw(t_2)}]}}_{Me^{i(w(t_1)-w(t_2))}} - \underbrace{Me^{iw(t_1)}}_{e^{-\frac{t_1}{2}}} \underbrace{Me^{iw(t_2)}}_{e^{-\frac{t_2}{2}}} = e^{\frac{t_1-t_2}{2}} - e^{-\frac{t_1+t_2}{2}}.$$

Процесс не является стационарным, так как функция корреляции не может быть выражена через  $\tau = t_2 - t_1$ . ▷

## 7.2. Пуассоновский процесс

**Замечание.** Случайная величина  $X$  называется пуассоновской —  $X \sim \Pi(a)$ , если

$$P \{X = k\} = \frac{a^k}{k!} e^{-a},$$

при этом такая случайная величина обладает следующими моментами:

- 1)  $MX = a$ ;
- 2)  $DX = a$ ;
- 3)  $MX^2 = a + a^2$ .

**Определение 7.2.** Случайный процесс  $\pi(t)$  с независимыми приращениями называется пуассоновским<sup>2</sup>, если:

- 1)  $\pi(0) = 0$ ;
- 2)  $\pi(s) - \pi(t) \sim \Pi(\lambda(s-t))$ ,  $s \geq t \geq 0$ .

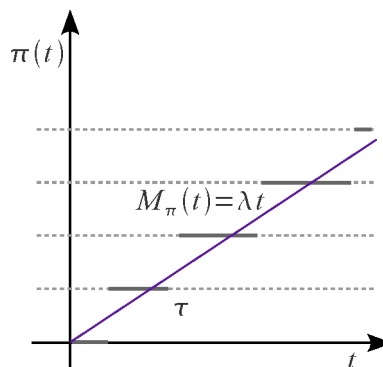
**Утверждение 7.2.** Моментные функции пуассоновского процесса:

- 1)  $M\pi(t) = M \underbrace{[\pi(t) - \pi(s)]}_{\Pi(\lambda t)} = \lambda t$ ;
- 2)  $R_{\pi}(s, t) = M\pi(s)\pi(t) - M\pi(s)M\pi(t) = M\pi(t) [\pi(s) - \pi(t) + \pi(t)] - \lambda^2 st = M\pi(t) [M\pi(s) - M\pi(t)] + M \underbrace{[\pi(t) - \pi(0)]^2}_{\Pi(\lambda t)} = \lambda t$ , если  $s \geq t$ . В случае, если  $t \geq s$  корреляционная функция  $R_{\pi}(s, t) = \lambda s$ . Тогда:

$$R_{\pi}(s, t) = \lambda \min(s, t)$$

- 3)  $D_{\pi}(t) = \lambda t$ .

**Замечание.** Параметр  $\lambda$  равен тангенсу угла наклона прямой математического ожидания и называется *интенсивностью* пуассоновского процесса. Величина  $T = \frac{1}{\lambda}$  является средним временем между скачками.



<sup>2</sup>Пример такого процесса в физике – распад вещества.

## 8. Спектральные свойства стационарных процессов

**Замечание.** С несущественными ограничениями любую периодическую функцию можно разложить в ряд Фурье.

**Определение 8.1.** Разложение некоторой функции  $x(t)$  с периодом  $T$  в ряд Фурье будет иметь вид:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos \frac{2\pi}{T} kt + b_k \sin \frac{2\pi}{T} kt \right), \text{ где}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x(t) \cos \frac{2\pi}{T} kt dt, \quad k = 0, 1, \dots \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x(t) \sin \frac{2\pi}{T} kt dt, \quad k = 0, 1, \dots$$

В комплексном виде разложение примет вид:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{i\frac{2\pi}{T} kt}, \text{ где } c_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-i\frac{2\pi}{T} kt} dt \quad k = 0, 1, \dots$$

**Замечание.** Частичная сумма  $\hat{x}(t) = \sum_{k=-N}^N c_k e^{i\frac{2\pi}{T} kt} \approx x(t)$ .

Рассмотрим некоторый случайный процесс  $\xi(t)$  с периодом  $T$ , для которого  $M\xi_k = 0$  и  $D\xi_k = \sigma_k^2$ . Разложение этого процесса в ряд Фурье будет иметь вид:

$$\xi(t) = \sum_k \xi_k e^{i\frac{2\pi}{T} kt}. \quad (8.1)$$

1) *Математическое ожидание* процесса, разложенного в ряд Фурье:

$$M\xi(t) = M \sum_k \xi_k e^{i\frac{2\pi}{T} kt} = \sum_k e^{i\frac{2\pi}{T} kt} M\xi_k = 0. \quad (8.2)$$

2) *Корреляционная функция* процесса:

$$R_\xi(t_1, t_2) = M\xi(t_1)\overline{\xi(t_2)} = M \left( \sum_k \xi_k e^{i\frac{2\pi}{T} kt_1} \sum_m \overline{\xi_m} e^{-i\frac{2\pi}{T} mt_2} \right) =$$

$$= \sum_k \sum_m e^{i\frac{2\pi}{T} (kt_1 - mt_2)} \underbrace{M\xi_k \overline{\xi_m}}_{\delta_{km} \sigma_k^2} = \sum_k \sigma_k^2 e^{-i\frac{2\pi k}{T} (t_2 - t_1)},$$

выражая через  $\tau = t_2 - t_1$ :

$$R_\xi(\tau) = \sum_k \sigma_k^2 e^{-i\frac{2\pi k}{T} \tau}. \quad (8.3)$$

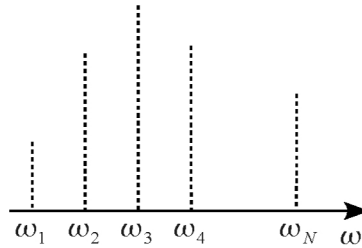
3) *Дисперсия* процесса:

$$D_\xi = R_\xi(0) = \sum_k \sigma_k^2. \quad (8.4)$$

Для случайного процесса, разложенного в ряд Фурье в виде

$$\xi_k(t) = \xi_k e^{i\frac{2\pi}{T} kt} = \xi_k e^{i\omega_k t}, \text{ где } \omega_k = \frac{2\pi}{T} k$$

распределение  $D_\xi$  по гармоническим составляющим  $\omega_k$  составляет *спектр мощности*.



Увеличивая количество гармоник  $\xi_k$ , то есть увеличивая  $k$  в сумме  $\sum_k \xi_k(t)$ :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} R_\xi(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega_k \tau} \sigma_k^2 = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega_k \tau} \Delta\omega \underbrace{\frac{\sigma_k^2}{\Delta\omega}}_{\substack{\text{спектральная} \\ \text{плотность} \\ \text{мощности } S(\omega)}} = \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) e^{-i\omega \tau} d\omega.$$

**Утверждение 8.1.** Допустимы следующие преобразования между  $S_\xi(\omega)$  и  $R_\xi(\tau)$ :

$$S_\xi(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R_\xi(\tau) e^{i\omega \tau} d\tau \quad - \text{ обратное преобразование Фурье,} \quad (8.5)$$

$$R_\xi(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_\xi(\omega) e^{-i\omega \tau} d\omega \quad - \text{ прямое преобразование Фурье.} \quad (8.6)$$

**Замечание.** Будем считать, что множитель  $\frac{1}{2\pi}$  имеется в обратном преобразовании Фурье и отсутствует в прямом.

**Утверждение 8.2.** Спектральная плотность мощности<sup>3</sup>  $S_\xi(\omega)$  процесса  $\xi(t)$  обладает следующими свойствами:

- 1)  $S_\xi(\omega) \geq 0$ ;
- 2)  $S_\xi(\omega)$  – вещественная функция;
- 3)  $S_\xi(-\omega) = S_\xi(\omega)$ ;

$$4) D_\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} S_\xi(\omega) d\omega.$$

Пусть  $\xi(t)$  – некоторый стационарный в широком смысле вещественный случайный процесс. Тогда спектральная плотность мощности и корреляционная функция выражаются

<sup>3</sup>Также называемая спектральной функцией.

следующим образом:

$$S_{\xi}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} R_{\xi}(\tau) \cos \omega\tau d\tau + i \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} R_{\xi}(\tau) \sin \omega\tau d\tau}_0 \right) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} R_{\xi}(\tau) \cos \omega\tau d\tau \quad (8.7)$$

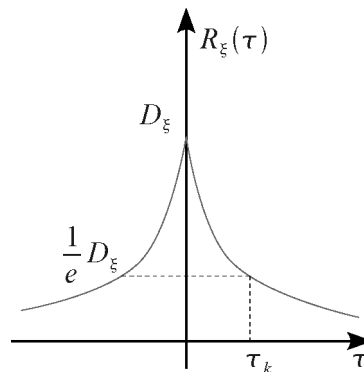
$$R_{\xi}(\tau) = 2 \int_0^{+\infty} S_{\xi}(\omega) \cos \omega\tau d\omega. \quad (8.8)$$

## 9. Примеры стационарных в широком смысле процессов

### 9.1. Случайный процесс с экспоненциальной корреляционной функцией

**Определение 9.1.** Случайный процесс с экспоненциальной корреляционной функцией характеризуется следующим образом:

$$R_{\xi}(\tau) = D_{\xi} e^{-\alpha|\tau|}, \alpha > 0.$$

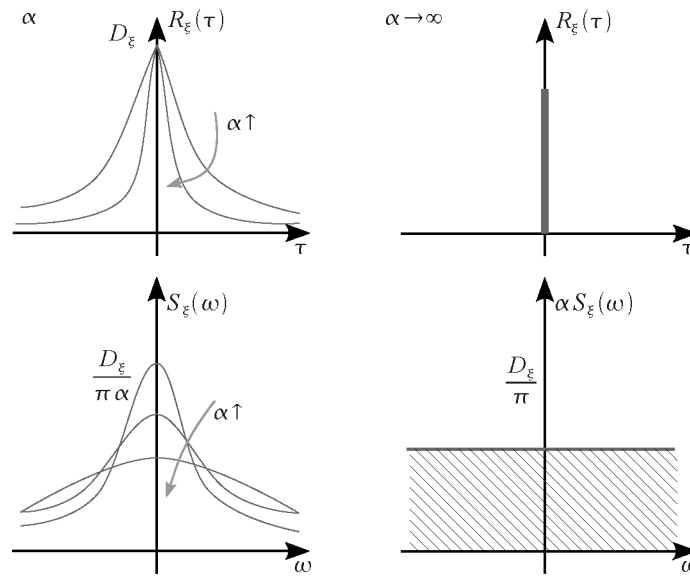


**Замечание.** Радиус корреляции  $\tau_k = \frac{1}{\alpha}$  характеризует насколько «простирается» зависимость между сечениями случайного процесса. Чем больше  $\tau_k$ , тем более коррелирован случайный процесс.

**Утверждение 9.1.** Спектральная плотность мощности процесса с экспоненциальной функцией корреляции выражается следующим образом:

$$\begin{aligned} S_{\xi}(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{\xi}(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} D_{\xi} e^{-\alpha|\tau|} e^{i\omega\tau} d\tau = \\ &= \frac{D_{\xi}}{2\pi} \left( \int_{-\infty}^0 e^{(\alpha+i\omega)\tau} d\tau + \int_0^{+\infty} e^{(-\alpha+i\omega)\tau} d\tau \right) = \frac{D_{\xi}}{2\pi} \left( \frac{e^{(\alpha+i\omega)\tau}}{\alpha+i\omega} \Big|_{\tau=-\infty}^0 + \frac{e^{(-\alpha+i\omega)\tau}}{\alpha+i\omega} \Big|_{\tau=0}^{+\infty} \right) = \\ &= \frac{D_{\xi}}{2\pi} \left( \frac{1}{\alpha+i\omega} - \frac{e^{(\alpha+i\omega)\tau}}{\alpha+i\omega} \Big|_{\tau=-\infty} + \frac{e^{(-\alpha+i\omega)\tau}}{-\alpha+i\omega} \Big|_{\tau=+\infty} + \frac{1}{\alpha-i\omega} \right) = \frac{\alpha D_{\xi}}{\pi(\alpha^2 + \omega^2)}. \end{aligned}$$

## 9.2. Белый шум



Рассмотрим некоторый случайный процесс с экспоненциальной корреляционной функцией  $R_\xi(\tau) = D_\xi e^{-\alpha|\tau|}$ . Предположим, что  $\alpha \rightarrow \infty$ , тогда:

$$\begin{cases} R_\xi = \begin{cases} D_\xi, & \tau = 0 \\ 0, & \tau \neq 0 \end{cases} \\ \alpha S_\xi(\omega) = \frac{D_\xi}{\pi} \end{cases}$$

**Утверждение 9.2.** Случайный процесс  $\xi$ , указанный выше, называется *белым шумом*.

## 10. Закон больших чисел для стационарных в широком смысле случайных процессов

**Замечание.** Говорят, что последовательность случайных величин  $\{\xi_n\}$  сходится по вероятности к случайной величине  $\xi$ , если для любого  $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|\xi_n - \xi| \leq \varepsilon\} = 1.$$

**Утверждение 10.1.** Случайный процесс  $\xi(t)$  подчиняется закону больших чисел, если среднее по времени сходится по вероятности к математическому ожиданию:

$$\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \xi(t) dt \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{P} M_\xi.$$

**Определение 10.1.** Случайные процессы, которые подчиняются закону больших чисел называются *эргодическими*.

**Теорема 10.1.** Достаточным<sup>4</sup> условием эргодичности случайного процесса  $\xi(t)$  является равенство

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} R_\xi(\tau) = 0. \quad (10.1)$$

<sup>4</sup>Не является необходимым.

**Доказательство.** Для простоты возьмём  $t_0 = 0$ . Тогда

$$\frac{1}{T} \int_0^T \xi(t) dt \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{P} M_\xi,$$

что следует из более сильной *среднеквадратичной сходимости*:

$$\frac{1}{T} \int_0^T \xi(t) dt \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{c.к.} M_\xi.$$

По определению среднеквадратичной сходимости

$$\lim_{T \rightarrow \infty} M \left( \frac{1}{T} \int_0^T \xi(t) dt - M_\xi \right)^2 = 0,$$

для доказательства преобразуем подпредельное выражение:

$$\begin{aligned} M \left( \frac{1}{T} \int_0^T \xi(t) dt - M_\xi \right)^2 &= \frac{1}{T^2} M \left( \int_0^T [\xi(t) dt - M_\xi] \right)^2 = \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T \underbrace{M [(\xi(t) - M_\xi)]}_{R_\xi(t-u)} du dt = \\ &= \frac{1}{T^2} \left( \int_{-T}^0 d\tau \int_{-\tau}^T R_\xi(\tau) du + \int_0^T d\tau \int_0^{T-\tau} R_\xi(\tau) du \right) = \\ &= \frac{1}{T^2} \left( \int_{-T}^0 R_\xi(\tau)(T + \tau) d\tau + \int_0^T R_\xi(\tau)(T - \tau) d\tau \right) = \\ &= \frac{1}{T^2} \int_{-T}^T R_\xi(\tau)(T - |\tau|) d\tau = \frac{2}{T} \int_0^T R_\xi(\tau) \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) d\tau, \end{aligned}$$

Тогда:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \left| \int_0^T R_\xi(\tau) \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) d\tau \right| \leq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \int_0^T |R_\xi(\tau)| d\tau = 2 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\left( \int_0^T |R_\xi(\tau)| d\tau \right)'}{(T)'} = 2 \lim_{T \rightarrow \infty} R_\xi(\tau),$$

из чего следует, что среднеквадратичная сходимость для  $\xi(t)$  будет иметь место при достаточном условии

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} R_\xi(\tau) = 0,$$

причём более «слабая» сходимость по вероятности будет выполняться при этом же условии.

q.e.d.

## 11. Непрерывность случайных процессов

**Замечание.** Функция  $x(t)$  является *непрерывной в точке  $t_0$*  если

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} |x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)| = 0.$$

**Утверждение 11.1.** Случайный процесс является *непрерывным в точке*  $t_0$ , если

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} M\left(\xi(t_0 + \Delta t) - \xi(t_0)\right)^2 = 0.$$

**Утверждение 11.2.** Необходимым и достаточным условием среднеквадратичной непрерывности стационарного в широком смысле случайного процесса  $\xi$  является непрерывность его корреляционной функции  $R_\xi$  в нуле:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} R_\xi(\tau) = R_\xi(0).$$

**Утверждение 11.3.** Если корреляционная функция  $R_\xi$  стационарного в широком смысле случайного процесса  $\xi$  непрерывна в нуле, то она непрерывна в любой точке.

## 12. Ортогональное разложение Карунена-Лоэва

Рассмотрим случайный процесс  $\xi(t), t \in [0, \tau]$ . Для простоты будем считать, что  $M\xi(t) = 0$ .

**Определение 12.1.** *Ортогональным разложением* называется представление его в виде суммы ряда

$$\xi(t) = \sum_k \xi_k \varphi_k(t), \quad t \in [0, T], \quad (12.1)$$

где  $\xi_k$  – некоррелируемые случайные величины,  $M\xi_k = 0, D\xi_k = \sigma_k^2$ , то есть  $M\xi_k \xi_i = \sigma_k^2 \delta_{ki}$ , а  $\varphi_k(t)$  – ортонормированные базисные функции. Двойной ортогональностью называется одновременная ортогональность  $\xi_k \perp \xi_i, \varphi_k(t) \perp \varphi_i(t), i \neq k$ .

**Замечание.** Ортогональное разложение используется для сжатия информации в цифровом виде, для моделирования процессов.

**Утверждение 12.1.** *Корреляционная функция* ортогонально разложенного случайного процесса

$$R_\xi(t, s) = M\xi(t)\xi(s) = M\left[\sum_k \xi_k \varphi_k(t) \sum_i \xi_i \varphi_i(s)\right] = \sum_k \sum_i M \underbrace{\xi_k \xi_i}_{\delta_{ki}} \varphi_k(t) \varphi_i(s) = \sum_i \varphi_i(t) \varphi_i(s) \sigma_i^2,$$

проинтегрируя по  $s$ , получим

$$\varphi(t) = \lambda \int_0^T K(t, s) \varphi(s) ds$$

Базисные функции  $\varphi_k(t)$  и дисперсии случайных величин  $\xi_k$  определяются решениями линейного однородного интегрального уравнения Фредгольма II рода:

$$\varphi(t) = \lambda \int_0^T K(t, s) \varphi(s) ds,$$

где ядром  $K(t, s)$  является корреляционная функция случайного процесса. Решениями уравнения являются собственные функции  $\varphi_k(t)$ , которые являются базисными функциями ортогонального разложения, и собственные числа  $1/\sigma_k$ , которые являются величинами, обратными к дисперсиям случайных коэффициентов разложения.

**Замечание.** Если  $M\xi(t) \neq 0$ , то можно рассматривать *центрированную* случайную величину

$$\dot{\xi}(t) = \xi(t) - M\xi(t),$$

тогда  $M\dot{\xi}(t) = 0$  и  $R_{\dot{\xi}}(t, s) = R_{\xi}(t, s)$  и ортогональное разложение

$$\xi(t) = M_{\xi}(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \varphi_k(t).$$

## 12.1. Оптимальность разложения Карунена–Лоэва

**Определение 12.2.** Частичным рядом ортогонального разложения  $\xi(t)$  является ряд

$$\xi_N(t) = \sum_{k=1}^N \xi_k \varphi_k(t).$$

**Утверждение 12.2.** Погрешность, возникающая при рассмотрении частичного ряда ортогонального разложения вместо полного, выражается как

$$\varepsilon_N(t) = \xi(t) - \xi_N(t) = \sum_{k=N+1}^{+\infty} \xi_k \varphi_k(t),$$

причём интегральная среднеквадратичная погрешность такой аппроксимации

$$\overline{\varepsilon_N^2} = \int_0^T M \varepsilon_N^2(t) dt = \int_0^T M \left( \sum_{k=N+1}^{+\infty} \xi_k \varphi_k(t) \right)^2 = \left[ \begin{array}{l} M \xi_i \xi_j = \sigma^2 \delta_{ij} \\ \forall i \neq j \varphi_i(t) \varphi_j(t) = 0 \end{array} \right] = \sum_{k=N+1}^{+\infty} \sigma_k^2$$

Нетрудно заметить, что минимум погрешности будет удовлетворяться в случае, если дисперсии компонент  $D\xi_k = \sigma_k^2$  будут расположены в порядке убывания относительно  $k$ .

## 12.2. Пример ортогонального разложения Карунена–Лоэва для винеровского процесса

**Пример.** Найдём ортогональное разложение винеровского процесса  $w(t)$ , для  $t \in [0, 1]$ , дисперсии  $\sigma^2 = 1$ , корреляционная функция которого  $R_w(t, s) = \min(t, s)$ .

◁ По формуле (12.1), подставляя известное  $R_w$ , выразим базисную функцию

$$\varphi(t) = \lambda \int_0^1 \min(t, s) \varphi(s) ds = \lambda \int_0^t s \varphi(s) ds + \lambda \int_t^1 t \varphi(s) ds, \text{ дифференцируя:}$$

$$\varphi'(t) = \lambda t \varphi(t) + \left( \lambda t \int_0^1 \varphi(s) ds \right)',$$

$$\frac{\varphi'(t)}{\lambda} = t \varphi(t) + \int_t^1 \varphi(s) ds + t \left( \int_t^1 \varphi(s) ds \right)' = t \varphi(t) - t \varphi(t) + \int_t^1 \varphi(s) ds,$$

дифференцируя ещё раз:  $\frac{\varphi''(t)}{\lambda} = -\varphi(s)$ , то есть  $\varphi''(t) = -\lambda \varphi(t)$ .

Решением уравнения  $\varphi''(t) = -\lambda\varphi(t)$  является  $\varphi(t) = A \sin(\omega t + \alpha)$ ,  $\lambda = \omega^2$ . Тогда

$$A \sin(\omega t + \alpha) = \omega^2 \int_0^1 \min(t, s) \varphi(s) ds,$$

$$\frac{A \sin(\omega t + \alpha)}{\omega^2} = A \int_0^t s \sin(\omega s + \alpha) ds + A \int_t^1 t \sin(\omega t + \alpha) ds, \sin(\omega t + \alpha),$$

$$\sin(\omega t + \alpha) = \left[ \sin(\omega s + \alpha) - \omega s \cos(\omega s + \alpha) \right]_{s=0}^{s=t} + \omega t \left[ \cos(\omega s + \alpha) \right]_{s=t}^{s=1},$$

откуда  $\sin \alpha + t\omega \cos(\omega t + \alpha) = 0, \forall t$ .

Решение уравнения  $\sin \alpha + t\omega \cos(\omega t + \alpha) = 0$  находится из системы:

$$\begin{cases} \sin \alpha = 0 \\ \cos(\omega t + \alpha) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \omega = \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Базисные функции не могут отличаться только знаком, поэтому  $\varphi(t) = A \sin(\omega t)$  или  $\varphi(t) = -A \sin(\omega t)$ , где  $\omega = \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in \mathbb{Z}$ .

Элементы ортогонального базиса

$$\varphi_k(t) = A \sin \frac{\pi}{2} (2k - 1)t, k = 1, 2, 3, \dots,$$

дисперсия

$$\sigma_k^2 = \frac{1}{\lambda_k} = \frac{4}{\pi^2(2k - 1)^2},$$

коэффициент  $A$  находится из уравнения  $\int_0^1 \varphi_k^2(t) dt = 1$  и равен  $\sqrt{2}$ . В конечном виде процесс имеет следующее ортогональное разложение:

$$\xi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \sqrt{2} \sin \left[ \frac{\pi}{2} (2k - 1)t \right],$$

$$D\xi_k = \frac{4}{\pi^2(2k - 1)^2}, \quad M\xi_k = 0.$$

▷

## 13. Марковские процессы

**Определение 13.1.** Пусть случайный процесс  $\xi(t) \in E$ , где  $E$  – множество состояний (дискретное или непрерывное). Процесс  $\xi(t)$  называется *марковским*, если

$$\forall t_1 < \dots < t_n : \quad P \{ \xi(t_n) \in A | \xi(t_1) = x_1, \dots, \xi(t_{n-1}) = x_{n-1} \} = P \{ \xi(t_n) \in A | \xi(t_{n-1}) = x_{n-1} \},$$

где  $A \subset E, \forall x_1, \dots, x_n \in E$ . Иными словами, марковский процесс – процесс «без памяти», зависящий только от последнего состояния.

**Пример.** *Марковские процессы:*

◁ Броуновское движение – марковский процесс, положение шайбы в хоккее – частично марковский (но строго говоря не марковский) процесс. ▷

**Утверждение 13.1.** Исчерпывающей характеристикой любого марковского процесса является *переходная функция*

$$p(s, x, t, y) = P \{ \xi(t) = y | \xi(s) = x \}, t \geq s, x, y \in E.$$

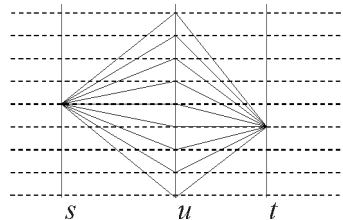
$$P \left\{ \underbrace{\xi(t_1) = x_1}_A, \underbrace{\xi(t_2) = x_2}_B \right\} = P(A)P(B|A) = P \{ \xi(t_1) \} p(t_1, x_1, t_2, x_2)$$

**Утверждение 13.2.** Переходная функция обладает следующими свойствами:

$$1) p(s, x, s, y) = \begin{cases} 1, & x = y \\ 0, & x \neq y \end{cases}$$

2) Уравнение Колмогорова-Чепмена

$$p(s, x, t, y) = \sum_{z \in E} p(s, x, u, z) p(u, z, t, y), \quad \forall s \leq u \leq t, \forall x, y$$



**Определение 13.2.** Марковский процесс называется *однородным*, если переходная вероятность не зависит от абсолютного времени, а зависит от разности между этими моментами времени:

$$p(s, x, t, y) = p(\underbrace{t - s}, x, y).$$

## 14. Цепи Маркова

### 14.1. Однородные цепи Маркова

**Определение 14.1.** *Цепью Маркова* называется марковский процесс с дискретным временем  $t$  и конечным или счётным множеством состояний  $E$ . Переходная функция такого процесса

$$p(m, i, n, j) = P \{ \xi_n = E_j | \xi_m = E_i \}, m, i, n, j \in \mathbb{N}_0, n > m.$$

Однородная цепь Маркова обладает следующей переходной функцией

$$p(m, i, n, j) = p(n - m, i, j).$$

**Замечание.** Будем использовать следующие обозначения:

- $p_{ij}(m, n) = p(m, i, n, j)$  – вероятность того, что в момент времени  $n$  марковский процесс будет находиться в состоянии  $j$ , при условии, что в момент времени  $m$  он находился в состоянии  $i$ ;
- $p_{ij}(n - m) = p_{ij}(k)$  – условная вероятность того, что за время  $k$  процесс перейдёт из состояния  $i$  в состояние  $j$ ;

**Утверждение 14.1.** Уравнение Колмогорова для однородных марковских цепей:

$$p_{ij}(m+n) = \sum_k p_{ik}(m)p_{kj}(n), m \geq 0, n \geq 0.$$

**Утверждение 14.2.** Марковские цепи обладают следующими свойствами:

- 1)  $p_{ij}(0) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$
- 2)  $p_{ij}(t-s) = \sum_k p_{ik}(u-s)p_{kj}(t-u), m \geq 0, n \geq 0;$
- 3) Переходная функция за  $k$  шагов однозначно определяется переходной функцией за один шаг:  $p_{ij}(1) = p_{ij};$
- 4)  $p_{ij}(2) = \sum_k p_{ik}p_{kj};$

**Утверждение 14.3.** Если  $|E| = N$ , то имеет смысл матрица переходных вероятностей:

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1N} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{N1} & p_{N2} & \dots & p_{NN} \end{pmatrix} \quad (14.1)$$

$m$ -ая степень матрицы переходных вероятностей содержит вероятности перехода за  $m$  шагов:

$$\mathbb{P}(m) = \mathbb{P}^m = \{p_{ij}(m)\}$$

Матрица переходных вероятностей обладает следующими свойствами:

- $0 \leq p_{ij} \leq 1;$
- $\sum_{j=1}^N p_{ij} = 1;$
- $p(n+m) = p(n)\mathbb{P}^m$

**Замечание.** При возведении матрицы  $\mathbb{P}$  в степень удобно пользоваться ортогональным разложением:

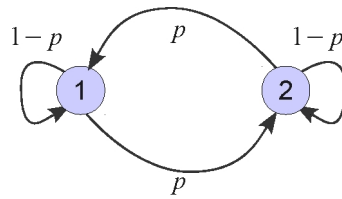
$$\mathbb{P} = Q\Lambda Q^T, \quad (14.2)$$

где  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ,  $\lambda_i$  – собственные значения  $\mathbb{P}$ , находящиеся из уравнения  $|\mathbb{P} - \lambda_i E_N| = 0$ , а  $Q = (X_1, \dots, X_n)$ ,  $X_i$  – собственные векторы  $\mathbb{P}$ , соответствующие собственным значениям и находимые из  $(\mathbb{P} - \lambda_i E_n)X_i = 0$ .

**Замечание.** Марковские цепи для наглядности удобно представлять в виде графа, где вершины являются состояниями, а рёбра с весами – переходы между состояниями с соответствующими им вероятностями.

**Пример.** Рассмотрим марковскую цепь с двумя состояниями, в которой  $\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{pmatrix}$ , найдём  $p(100) = p(0)\mathbb{P}^{100}$ .

◁



Найдём собственные значения матрицы из уравнения  $|\mathbb{P} - \lambda E_2| = 0$ :

$$\begin{vmatrix} 1-p-\lambda & p \\ p & 1-p-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

откуда  $\lambda_1 = 1$  и  $\lambda_2 = 1-2p$ , а собственные векторы  $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  и  $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ . Ортогональное разложение и возведение в степень будет иметь вид

$$\mathbb{P}^n = \frac{1}{2} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}^Q \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1-2p)^n \end{pmatrix}}_{\Lambda^n} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}^{Q^{-1}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + (1-2p)^n & 1 - (1-2p)^n \\ 1 - (1-2p)^n & 1 + (1-2p)^n \end{pmatrix}$$

Переходные вероятности:

$$1) p_1(n) = \frac{1}{2} + \frac{(1-2p)^n}{2};$$

$$2) p_2(n) = \frac{1}{2} - \frac{(1-2p)^n}{2}.$$

При  $n \rightarrow \infty$  вероятности  $p(\infty) = \left(\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}\right)$ . ▷

## 14.2. Предельные вероятности состояний цепи Маркова

**Утверждение 14.4.** Вероятности перехода в пределе сходятся к некоторому вектору  $\pi$

$$p(n) = p(0)\mathbb{P}^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \pi,$$

где  $\pi = (\pi_1 \dots \pi_n)$ ,  $\pi_k = \lim_{n \rightarrow \infty} p_k(n)$ .

**Определение 14.2.** Вероятностями состояний называются  $\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} p(0)\mathbb{P}^n$ , если этот предел существует и не зависит от  $p(0)$ . Компоненты  $\pi$  находятся из формулы:

$$\pi_k = \sum_i \pi_i p_{ik}, \quad k = 1, \dots, N \quad (14.3)$$

и системы уравнений

$$\begin{cases} \pi_k & = \sum_i \pi_i p_{ik}, \quad k = 1, \dots, N \\ \sum_k \pi_k & = 1 \end{cases}$$

**Пример.** Снова рассмотрим марковскую цепь с двумя состояниями, в которой  $\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{pmatrix}$  и найдём  $p(100)$  с помощью вероятностей состояний.

◁ Составим систему уравнений

$$\begin{cases} \pi_1 & = \pi_1(1-p) + \pi_2 p \\ \pi_2 & = \pi_1 p + \pi_2(1-p) \\ \pi_1 + \pi_2 & = 1 \end{cases}$$

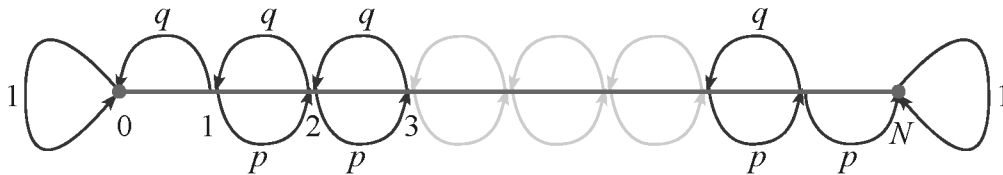
откуда получим, что  $\pi_1 = \pi_2 = \frac{1}{2}$ .

▷

### 14.3. Одномерные случайные блуждания

#### 14.3.1. Одномерные случайные блуждания с поглощающими концами

Пусть даны вероятности перехода  $p, q$  и число состояний  $N$  в следующей модели случайных блужданий:



В состояниях 0 и  $N$  вероятности перехода в них же равны 1. Вероятность поглощения в  $N$  при старте из  $i$  рекуррентно выражается следующим образом

$$P(i) = p \cdot P(i+1) + q \cdot P(i-1).$$

Находя решение этого рекуррентного соотношения:

$$\begin{cases} P(i) &= p \cdot P(i+1) + q \cdot P(i-1) \\ P(0) &= 0 \\ P(N) &= 1 \end{cases}$$

установим, что

$$P(i) = \begin{cases} \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^i}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N}, & p \neq q \\ \frac{i}{N}, & p = q = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Вероятность поглощения в 0 при старте из  $i$  аналогичным образом рекуррентно выражается следующим образом

$$Q(i) = p \cdot Q(i+1) + q \cdot Q(i-1),$$

а в явном виде (из соображений симметрии):

$$Q(i) = \begin{cases} \frac{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^{N-i}}{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^N}, & p \neq q \\ 1 - \frac{i}{N}, & p = q = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Математическое ожидание количества шагов до поглощения на одном из концов (при старте из состояния  $i$  выражается рекуррентным соотношением

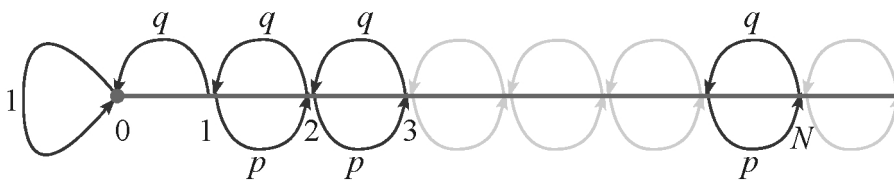
$$\begin{cases} M(i) &= p \cdot M(i+1) + q \cdot M(i-1) + 1 \\ M(0) &= 0 \\ M(N) &= 0 \end{cases}$$

которое имеет решение

$$M(i) = \begin{cases} \frac{i}{q-p} - \frac{N}{q-p} \cdot \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^i}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N}, & p \neq q \\ i(N-i), & p = q \end{cases}$$

### 14.3.2. Полубесконечные одномерные случайные блуждания

Полубесконечные одномерные случайные блуждания описываются следующей моделью блужданий:



то есть аналогично случайным блужданиям с поглощением при  $N = \infty$ .

Все характеристики полубесконечных одномерных случайных блужданий находятся предельным переходом:  $\lim_{N \rightarrow \infty}$ . Тогда  $P^\infty(i)$  – вероятность бесконечных блужданий выражается следующим образом:

$$P^\infty(i) = \begin{cases} 0, & q \geq p \\ 1 - \left(\frac{q}{p}\right)^i, & q < p \end{cases}$$

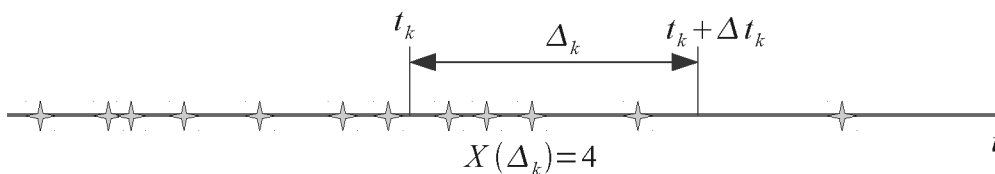
Математическое ожидание количества шагов в случае  $p \neq q$

$$M_{(i)}^\infty = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \frac{i}{q-p} - \frac{N}{q-p} \cdot \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^i}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N} \right] = \frac{i}{q-p} - \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^i}{q-p} \cdot \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N} = \begin{cases} \frac{i}{q-p}, & p < q \\ \infty, & p > q \end{cases}$$

а в случае  $p = q$  ожидание количества шагов

$$M_{(i)}^\infty = \lim_{N \rightarrow \infty} i(N-i) = \infty, \quad i \neq 0.$$

### 14.4. Простейший (пуассоновский) поток событий



**Определение 14.3.** Поток событий представляет собой возникающие в некоторые моменты времени события.

**Определение 14.4.** *Количество произошедших* в интервале времени  $\Delta_k = (t_k, t_k + \Delta t_k)$  является случайной величиной  $X(\Delta_k)$ .

**Утверждение 14.5.** Простейший поток событий определяется аксиомами:

- 1) *Аксиома независимости.* Для непересекающихся интервалов  $\Delta_k$  случайные величины  $X(\Delta_k)$  являются независимыми в совокупности

$$\Delta_1, \dots, \Delta_n : \Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset \Rightarrow X(\Delta_1), \dots, X(\Delta_n) \text{ — независимые в совокупности;}$$

- 2) *Аксиома однородности.* Распределение  $X(\Delta_k)$  не зависит от положения интервала  $t_k$ , а зависит только от его длины  $\Delta t_k$ ;

- 3) *Аксиома делимости событий.* Вероятность появления одного и более событий подчиняется следующим равенствам

$$P\{X(\Delta_k) = 1\} = \lambda \Delta t_k + o(\Delta t_k), \quad P\{X(\Delta_k) > 1\} = o(\Delta t_k).$$

*Время ожидания следующего события* является случайной величиной  $\tau$ . Функция распределения времени ожидания

$$F_\tau(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

а плотность вероятностей

$$f_\tau(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

*Расстояние между событиями* является случайной величиной  $\xi$ . Её характеристики аналогичны времени ожидания очередного события  $F_\tau(t) = F_\xi(t)$ .

*Число событий* за время  $t$  определяется вероятностью

$$p_m(t) = P\{X(\Delta_k) = m\}, m = 0, 1, \dots,$$

обладает пуассоновским законом распределения

$$p_m(t) = \frac{(\lambda t)^m}{m!} e^{-\lambda t}$$

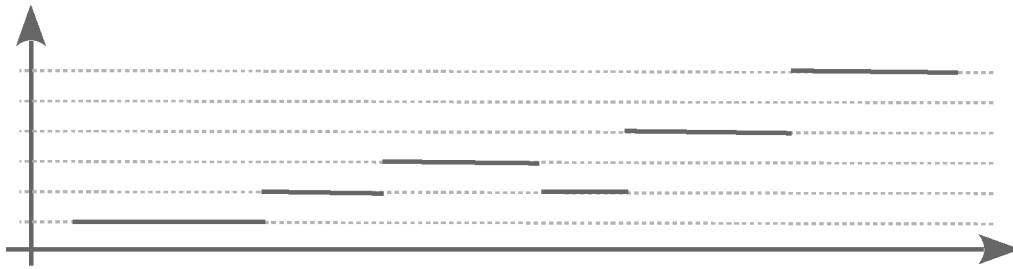
*Параметр  $\lambda$*  называется *интенсивностью* потока событий и определяется как

$$\lambda = \frac{MX(t)}{t}$$

**Утверждение 14.6.** Пользуясь аксиомами можно показать

- 1) Время ожидания и интервал времени между событиями имеют *показательное распределение* с параметром  $\lambda$ ;
- 2) Число событий на интервале времени имеет *пуассоновское распределение* с параметром  $\lambda t$ ;
- 3)  $\lambda$  — интенсивность потока событий, то есть *среднее количество событий, происходящих за единицу времени*.

## 14.5. Однородные цепи Маркова с непрерывным временем



**Утверждение 14.7.** Переходная вероятность  $p_{ij}(t)$  определяется как

$$p_{ij}(t) = \mathbb{P} \{ \xi(t+s) = E_j | \xi(s) = E_i \}.$$

Она обладает следующими свойствами:

- 1)  $p_{ij}(\Delta t) = \lambda_{ij}\Delta t + o(\Delta t)$ , где  $\lambda_{ij}$  – вероятность перехода из  $i$  в  $j$ ;
- 2)  $p_{ii}(\Delta t) = 1 - \sum_{j \neq i} p_{ij}(\Delta t) = 1 - \sum_{j \neq i} \lambda_{ij} + o(\Delta t) = \left[ \lambda_{ii} = \sum_{j \neq i} \lambda_{ij} \right] = 1 + \lambda_{ii}\Delta t + o(\Delta t)$ ;

Из уравнения Колмогорова-Чепмена для однородной цепи Маркова следует, что

$$p_{ij}(s+t) = \sum_k p_{ik}(s)p_{kj}(t), \forall t \geq 0, s \geq 0,$$

тогда при  $s = \Delta t$ :

$$p_{ij}(t + \Delta t) = \sum_k p_{ik}(\Delta t)p_{kj}(t) = \sum_{k \neq i} p_{ik}(\Delta t)p_{kj}(t) + p_{ii}(\Delta t)p_{ij}(t),$$

используя свойство 1), получим

$$p_{ij}(t + \Delta t) = \sum_{k \neq i} (\lambda_{ik}\Delta t + o(\Delta t))p_{kj}(t) + (1 + \lambda_{ii}\Delta t + o(\Delta t))p_{ij}(t),$$

таким образом

$$p_{ij}(t + \Delta t) - p_{ij}(t) = \sum_k (\lambda_{ik}\Delta t + o(\Delta t))p_{kj}(t),$$

и предельным переходом, предварительно поделив на  $\Delta$ , может быть получена производная

$$p'_{ij}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_{ij}(t + \Delta t) - p_{ij}(t)}{\Delta t} = \sum_k \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\lambda_{ik}\Delta t + o(\Delta t)}{\Delta t} p_{kj}(t) = \sum_k \lambda_{ik} p_{kj}(t)$$

Таким образом, получена система уравнений, называемая *обратной системой дифференциальных уравнений Колмогорова*

$$p'_{ij}(t) = \sum_k \lambda_{ik} p_{kj}(t)$$

начальные условия для которой:

$$p_{ik}(0) = \delta_{ik}.$$

Аналогичным образом, предельным переходом из уравнения  $p_{ij}(t + \Delta t) = \sum_k p_{ik}(t)p_{kj}(\Delta t)$ , может быть получена *прямая система дифференциальных уравнений Колмогорова*:

$$p'_{ij} = \sum_k p_{ik}(t)\lambda_{kj},$$

начальные условия которой (аналогично обратной системе)  $p_{ik}(0) = \delta_{ik}$ .

**Определение 14.5.** Матрица  $\Lambda$  называется матрицей переходных интенсивностей

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1N} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \dots & \lambda_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{N1} & \lambda_{N2} & \dots & \lambda_{NN} \end{pmatrix}$$

при этом  $\sum_j \lambda_{ij} = 0$ .

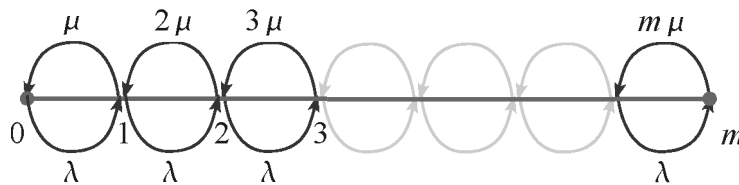
**Утверждение 14.8.** Предельные вероятности состояний  $\pi_k = \lim_{t \rightarrow \infty} p_{ik}(t)$  цепи Маркова с непрерывным временем находятся из системы:

$$\begin{cases} \sum_i \pi_i \lambda_{ik} = \pi_k \\ \sum_i \pi_i = 1 \end{cases}$$

## 14.6. Простейшая система массового обслуживания

Примером системы массового обслуживания является парковка автомобилей, кассы в супермаркетах. В таком случае места на парковке и кассы являются линиями обслуживания, а автомобили и покупатели – заявками.

**Определение 14.6.** Система обслуживания обладает параметрами  $\lambda$  – интенсивность потока заявок,  $\mu = \frac{1}{T}$  – интенсивность обслуживания<sup>5</sup>. Возможно  $m + 1$  различных состояний, где  $i$ -ое состояние означает, что занято  $i$  линий обслуживания.



Матрица переходных интенсивностей простейшей системы обслуживания:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ \mu & -(\mu + \lambda) & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & (m-1)\mu & -(m-1)\mu + \lambda & \lambda \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -\mu m \end{pmatrix}$$

образует систему линейных уравнений по условию  $\sum_k \pi_k \lambda_{kj} = 0$ , решение которой:

$$\pi_m = \frac{1}{m!} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^m \pi_0,$$

является *вероятностью потери заявки*. Из выражения для  $\pi_m$  выводится *формула Эрланга*:

$$\pi_k = \frac{\frac{1}{k!} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^k}{\sum_i \frac{1}{i!} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^i} \quad (14.4)$$

описывающая *вероятность простоя* системы обслуживания.

<sup>5</sup>T – среднее время обслуживания.

---

## Список использованных источников

- 1 **Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций** [Текст]: учеб. пособие / [Б. Г. Володин и др.]; под общ. ред. А.А. Свешникова. – Изд. 4-е, стер. – СПб. Лань, 2008. – 445 с. – ISBN 978-5-8114-0708-8.
- 2 **Прохоров, С. А.** Структурно-спектральный анализ случайных процессов [Текст] / С.А. Прохоров, В.В. Графкин. – Самара: СНЦ РАН, 2010. – 147 с. – ISBN 978-5-93424-469-0.
- 3 **Миллер, Б. М.** Теория случайных процессов в примерах и задачах [Текст] / Б. М. Миллер, А. Р. Панков; под ред. А. И. Кибзуна. – М.: Наука: Физматлит. – 2007. – 317с.
- 4 **Розанов, Ю. А.** Введение в теорию случайных процессов [Текст] / Ю. А. Розанов. – М.: Наука, 1982. – 128с.
- 5 **Вентцель, Е. С.** Теория вероятностей [Текст] / Е. С. Вентцель. – М.: Высшая школа, 2002. – 576с.
- 6 **Яглом, А. М.** Корреляционная теория стационарных случайных функций / А. М. Яглом. – Л.: Гидрометеиздат, 1981. – 282с.