

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА»

ДОЭ
ДЛЯ ОПТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ
ИНФОРМАЦИИ

*Утверждено Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия*

САМАРА
Издательство СГАУ
2006

УДК 535.4, 535.8

ББК 22.343

Д718



**Инновационная образовательная программа
"Развитие центра компетенции и подготовка
специалистов мирового уровня в области аэро-
космических и геоинформационных технологий"**

Авторы: Р.В. Скиданов, С.Н. Хонина, В.В. Котляр,
В.А. Сойфер

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук, проф. В.В. Ивахник,
д-р физ.-мат. наук, проф. И.П. Завершинский

ДОО для оптической обработки информации: учеб. пособие /
Д718 [Р.В. Скиданов и др.] – Самара: Изд-во Самар. гос. аэрокосм. ун-та,
2006. – 132 с. : ил.

ISBN 5-7883-046-6

В данном пособии рассматривается использование дифракционных оптических элементов в задачах оптической обработки информации. Описываются различные методы построения поля направлений. Особое внимание уделяется гибричному оптико-цифровому методу. Рассмотрен оптико-цифровой метод построения поля направлений, а также использование полученного поля направлений в задачах идентификации дактилоскопических изображений. В частности описывается базис Карунена-Лоэва для задач классификации и идентификации изображений. Также рассматриваются дифракционные оптические элементы для формирования системы ортогональных признаков изображения. Также рассматривается метод восстановления формы волнового фронта, основанный на анализе поля направлений и поля частот интерферограммы. Описывается гибридный оптико-цифровой метод преобразований Хоу-Радона.

Учебное пособие предназначено для студентов специальностей и направлений 060100 «Прикладная математика и физика», 010501 «Прикладная математика и информатика».

УДК 535.4, 535.8

ББК 22.343

ISBN 5-7883-046-6

- © Скиданов Р.В., Хонина С.Н.,
Котляр В.В., Сойфер В.А., 2006
- © Самарский государственный
аэрокосмический университет, 2006

Содержание

1. Оптическое формирование признаков изображения	4
2. Разложение светового поля по ортогональному базису	8
2.1. Оптимальный базис Карунена - Лоэва	8
2.2. ДОЭ для разложения функции интенсивности по базису Адамара.....	34
2.3. ДОЭ для разложения амплитуды волны с угловыми гармониками	39
2.4. ДОЭ для разложения пучка по базису Цернике	49
3. Оптическое построение поля направлений и поля пространственных частот	60
3.1. Оптическое распознавание дактилограмм	75
3.2. Оптическая расшифровка интерферограмм	102
4. Оптическое выполнение преобразования Хоу - Радона	112
5. Заключение.....	117
Приложение П1 к разделу 2.2.....	118
Приложение П2 к разделу 2.2.....	124
Список специальных терминов	125
Список контрольных вопросов	126
Литература	127

1. ОПТИЧЕСКОЕ ФОРМИРОВАНИЕ ПРИЗНАКОВ ИЗОБРАЖЕНИЯ

При оптической обработке информации наиболее часто выполняется операция линейной пространственной фильтрации, описываемая уравнением:

$$f(\mathbf{u}) = \int_G h(\mathbf{x}, \mathbf{u}) w(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (1)$$

где $w(\mathbf{x})$, $f(\mathbf{u})$ — волновые поля на входе и выходе системы соответственно, $h(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ — импульсный отклик или функция рассеяния системы, G — область интегрирования.

Когерентная оптика представляет широкие возможности для проведения в реальном времени пространственной фильтрации световых полей. Наиболее просто реализуются пространственно-инвариантные фильтры, для которых имеет место уравнение свертки:

$$f(\mathbf{u}) = \int_G h(\mathbf{x} - \mathbf{u}) w(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (2)$$

Пример когерентно-оптической системы, реализующей пространственно-инвариантную фильтрацию, приведен на рис. 1.

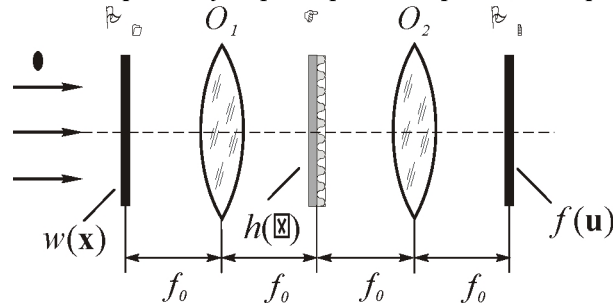


Рис. 1. Когерентно-оптическая система, реализующая пространственно-инвариантную фильтрацию

Входная амплитуда модулируется транспарантом $w(\mathbf{x})$ в плоскости Π_1 . Объектив O_1 с фокусным расстоянием f_0 формирует в частотной плоскости Φ двумерный Фурье-образ поля $w(\mathbf{x})$:

$$W(\mathbf{v}) = \int_G w(\mathbf{x}) \exp[-i 2\pi(\mathbf{xv})] d\mathbf{x}. \quad (3)$$

Здесь $\mathbf{v}=(v_x, v_y)$ — пространственные частоты, связанные с координатами \mathbf{u} в плоскости Φ формулой

$$\mathbf{u} = (u, v) = (\lambda f_0 v_x, \lambda f_0 v_y).$$

Фурье-образ $W(\mathbf{v})$ умножается на функцию пропускания

$$H(\mathbf{v}) = \int_G h(\mathbf{x}) \exp[-i 2\pi(\mathbf{xv})] d\mathbf{x}, \quad (4)$$

транспаранта, установленного в частотной плоскости. Сразу за плоскостью Φ возникает поле

$$F(\mathbf{v}) = W(\mathbf{v})H(\mathbf{v}). \quad (5)$$

Как видно из формулы (5), транспарант отображает частотную характеристику $H(\mathbf{v})$ фильтра (4). Далее объектив O_2 осуществляет обратное преобразование Фурье. Для этого на выходе Фурье-коррелятора в плоскости Π_2 оси u и v должны быть направлены в противоположные стороны по отношению к осям x и y в плоскости Π_1 . По теореме о свертке в плоскости Π_2 формируется поле $f(\mathbf{u})$.

Описанная система фильтрации далеко не исчерпывает всего многообразия схем, реализующих операции (2) методами когерентной оптики. Однако общим и основным элементом таких систем является пространственный фильтр, характеризующийся функцией пропускания, зависящей от координат плоскости.

Операции фильтрации встречаются при решении задач согласованной фильтрации [1,2], улучшения качества изображений [3], выделения сигналов на фоне шумов [4], распознавания изображений [5-7].

Излагаемый в данном разделе подход к распознаванию изображений ориентирован на когерентно-оптическое вычисление коэффициентов ортогонального разложения с помощью оптических пространственных фильтров, синтезированных на компьютере [1,7-9] с последующим использованием коэффициентов в цифровой проце-

дуре классификации [10] как набора признаков изображения [11-13].

Пусть $\{\psi_p(\mathbf{x})\}$ — базисные функции разложения в ортогональный ряд. Задачу измерения коэффициентов разложения $\{w_p\}$ пучка с комплексной амплитудой

$$w(\mathbf{x}) = \sum_p w_p \psi_p(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in G \quad (6)$$

предлагается решать в два этапа [14]. Первый этап представляет собой оптическое разложение поля по базисным функциям на основе их свойства ортогональности. При этом распределение мощности по базисным функциям преобразуется в распределение интенсивности света в выходной фокальной плоскости. Вторым этапом состоит в измерении фотоприемниками с точечными апертурами интенсивности света, которая пропорциональна квадрату модуля каждого коэффициента $\sim |w_p|^2$.

Покажем, что при установке на вход Фурье каскада пространственного фильтра с функцией комплексного пропускания $\psi_p^*(\mathbf{x})$ и подаче на вход поля $w(\mathbf{x})$, в центре выходной плоскости получается коэффициент w_p одной из базисных функций (рис. 2).

Действительно, сразу за плоскостью (x, y) получим поле

$$w(\mathbf{x})\psi_p^*(\mathbf{x}) = \sum_{p'} w_{p'} \psi_{p'}(\mathbf{x})\psi_p^*(\mathbf{x}). \quad (7)$$

Преобразование Фурье (3), взятое в центре $\mathbf{v} = 0$ выходной плоскости пространственных частот дает операцию интегрирования комплексной амплитуды. В силу ортогональности взаимодействия базисных функций происходит так, что при интегрировании комплексной амплитуды (7) в точке $\mathbf{v} = 0$ Фурье-плоскости фон от базисных функций с номерами $p' \neq p$ взаимно уничтожается и получаются значения комплексной амплитуды, равные коэффициенту разложения:

$$w_p = \int_G w(\mathbf{x}) \psi_p^*(\mathbf{x}) d^2 \mathbf{x}. \quad (8)$$

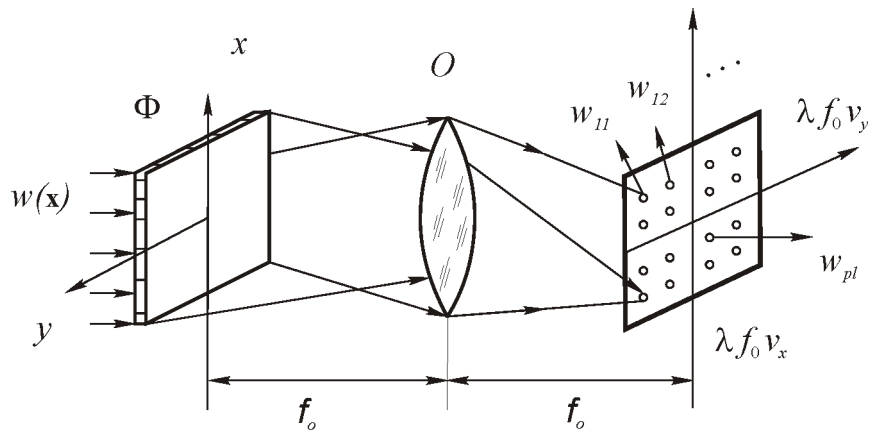


Рис. 2. Оптическая схема для параллельного вычисления набора коэффициентов разложения светового поля по ортогональному базису

Мощность $|w_p|^2$ базисной функции ψ_p может быть измерена уже обычным фотоприемником с точечной апертурой. Последовательно меняя фильтры, формирующие пучки с амплитудой ψ_p^* , можно измерить весь состав базисных функций. Для параллельного вычисления набора коэффициентов и их разнесения в выходной плоскости (см. рис. 2) используется метод пространственной несущей [14]. Далее этот метод будет рассмотрен для конкретных базисов (разделы 2.2-2.4).

2. РАЗЛОЖЕНИЕ СВЕТОВОГО ПОЛЯ ПО ОРТОГОНАЛЬНОМУ БАЗИСУ

2.1. Оптимальный базис Карунена - Лозва

Для того, чтобы представление анализируемых изображений при распознавании было наиболее информативно, коэффициенты разложения должны быть независимы (или хотя бы некоррелированы) в статистическом смысле [15]. Для случайного поля с заданной корреляционной функцией, как известно [16,17], существует единственный ортогональный базис, обеспечивающий некоррелированные коэффициенты разложения. Это базис Карунена-Лозва [15,18], который состоит из собственных функций интегрального уравнения с ядром, являющимся корреляционной функцией рассматриваемого поля. Некоррелированные коэффициенты разложения изображения по базису Карунена-Лозва могут эффективно использоваться в качестве признаков изображения.

При компьютерном синтезе оптических пространственных фильтров, согласованных с базисными функциями ортогонального разложения, важно иметь их аналитическое представление. Особенно это актуально для разложения Карунена-Лозва (РКЛ), так как численное решение интегрального уравнения Карунена-Лозва очень трудоемко и неустойчиво при размерах фильтра, применяемых на практике (более чем $10^3 \times 10^3$ пикселей). В работе [19] дан общий подход к аналитическому нахождению базисных функций Карунена-Лозва для дробно-рационального спектра. Однако он требует выполнения значительного количества громоздких операций типа вычисления комплексных определителей и неудобен для алгоритмизации. Известны [20] простые формулы для случая экспоненциальной корреляционной функции, но, учитывая ее важность для построения базиса Карунена-Лозва, желательно иметь более точную — экспоненциально-косинусную [21,22] аппроксимацию корреляционной функции. В данном разделе рассматриваются аналитические формулы для базисных функций Кару-

нена-Лоэва в случае экспоненциально-косинусной корреляционной функции.

При оптической реализации ортогональных разложений возникает неизбежное искажение базисных функций, вносимое дискретизацией по аргументу при компьютерном синтезе ДОЭ и квантованием по уровню при его последующем изготовлении. Поэтому нужно учесть влияние возмущений базисных функций на качество распознавания. При этом особенно важно выяснить, как влияет оптическая реализация РКЛ [23, 24] на сохранение его оптимальных свойств. Полученные в работе [25] теоретические оценки описанных возмущений требуют трудоемких вычислений норм бесконечных матриц и других сложных операций. В этом разделе проведены экспериментальные исследования и построены численные зависимости влияния таких возмущений на устойчивость РКЛ.

Базисные функции РКЛ находятся по корреляционной функции распознаваемых изображений путем решения интегрального уравнения на собственные значения:

$$\int_G \bar{R}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \psi_p(\mathbf{x}) d^2 \mathbf{u} = \lambda_p \psi_p(\mathbf{x}), \quad (9)$$

где

$$\bar{R}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \sum_{i=1}^{N_{cl}} R_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}) P_i, \quad \sum_{i=1}^{N_{cl}} P_i = 1, \quad (10)$$

\bar{R} — усредненная [13] по N_{cl} классам корреляционная функция, $R_i(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ — корреляционная функция i -го класса распознаваемых изображений, P_i — вероятность появления класса, λ_p — собственные значения.

Кроме того, РКЛ обладает еще целым набором замечательных свойств, ставящих его на особое место среди всевозможных разложений случайных полей:

1. Коэффициенты разложения некоррелированы:

$$\langle w_p, w_{p'}^* \rangle = \left(\hat{R} [\psi_p], \psi_{p'} \right) = (\lambda_p \psi_p, \psi_{p'}) = \lambda_p \delta_{pp}, \quad (11)$$

где

$$\hat{R}[\psi](\mathbf{x}) = \int_G R(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \psi(\mathbf{u}) d^2 \mathbf{u} \quad (12)$$

— корреляционный оператор.

В [13] показано, что свойство некоррелированности линейных признаков, имеющее место при использовании базисных функций Карунена — Лозва, благотворно сказывается на качестве распознавания и эффекте кластеризации [11].

2. Среднеквадратичная ошибка усечения бесконечного ряда минимальна среди всех ортогональных базисов [13]. Представим поле $w(\mathbf{x})$ приближенно

$$w(\mathbf{x}) \cong \hat{w}_L(\mathbf{x}) \equiv \sum_{p \in K} w_p \psi_p(\mathbf{x}) + \bar{w}(\mathbf{x}), \quad |K| = L \quad (13)$$

конечным числом L членов ряда. Погрешность такой аппроксимации имеет мощность

$$e_0^2(L) = \left\langle \int_G |w(\mathbf{x}) - \hat{w}_L(\mathbf{x})|^2 d^2 \mathbf{x} \right\rangle. \quad (14)$$

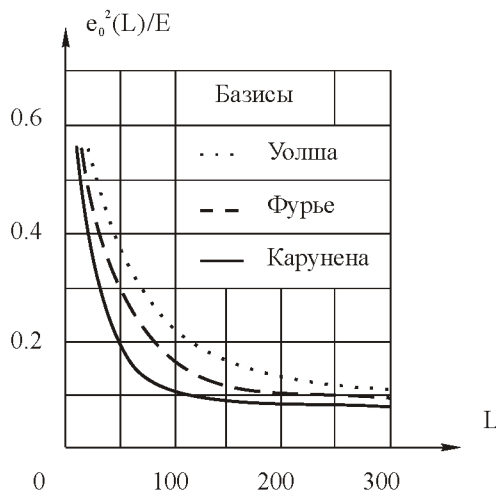


Рис. 3. Сравнение между некоторыми ортогональными базисами по погрешности аппроксимации конечным числом членов ряда

Заметим, что собственные числа упорядочены в последовательности $\{\lambda_p\}$ по убыванию и соответствующая им последователь-

ность базисных функций дает наименьшую погрешность аппроксимации конечным числом членов ряда.

Сравнение между некоторыми ортогональными базисами, данное в [25], приведено на рис. 3 и подтверждает свойство минимальности погрешности.

3. Энтропия, определенная на множестве нормированных дисперсий коэффициентов РКЛ минимальна. Доказательство и строгая формулировка этого свойства дана в [15].

4. Наибольшее собственное число λ удовлетворяет неравенству

$$\lambda \equiv \max_p \lambda_p \leq \sup_{p \in G} S(\omega), \quad (15)$$

где $S(\omega) = \int_G R(\mathbf{x}) \exp(-i\omega\mathbf{x}) d^2\mathbf{x}$ — спектральная плотность,

$$\omega = (\omega_1, \omega_2).$$

5. Монотонные собственные числа. Собственное число $\lambda_p(G)$ есть монотонно возрастающая функция размеров области, т.е.

$$\lambda_p(G) \leq \lambda_p(G'), \quad G \subset G' \quad (16)$$

6. Асимптотическое поведение при расширении области G . На бесконечной области $G = R^n$ собственные функции и собственные числа принимают вид

$$\psi(\mathbf{x}) = \exp(i\omega\mathbf{x}), \quad \lambda = S(\omega). \quad (17)$$

7. Факторизация. Пусть корреляционная функция факторизуется, т.е. $R(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = R^I(\mathbf{x}^I, \mathbf{u}^I) \cdot R^{II}(\mathbf{x}^{II}, \mathbf{u}^{II})$. Легко видеть, что собственные числа и собственные функции также факторизуются:

$$\begin{aligned} \lambda_{p_m} &= \lambda_{k_m}^I \cdot \lambda_{l_m}^{II}, \\ \psi_{p_m}(\mathbf{x}) &= \psi_{k_m}^I(\mathbf{x}^I) \cdot \psi_{l_m}^{II}(\mathbf{x}^{II}), \quad m = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (18)$$

и могут быть упорядочены так, что $\lambda_{k_m l_m} \geq \lambda_{k_{m+1} l_{m+1}}$, $m = 0, 1, 2, \dots$

Для оптического вычисления некоррелированных коэффициентов РКЛ методами цифровой голографии [1,7,8] синтезируются ДОЭ, согласованные с базисными функциями Карунена — Лозва.

Применение оптического РКЛ [23, 26] ставит задачу исследования устойчивости РКЛ к возмущениям, обусловленным дискретизацией базисных функций при компьютерном синтезе оптического фильтра, а также квантованием по уровню при его последующем литографическом изготовлении [27].

При компьютерном синтезе оптических пространственных фильтров, согласованных с РКЛ, важно иметь аналитические представления базисных функций.

Известно [21, 22], что корреляционная функция стационарных случайных процессов с дробно-рациональным спектром имеет общий вид:

$$R(\tau) = \sigma^2 \sum_k \exp(-\alpha_k |\tau|) \cdot [A_k(\tau) \cos \beta_k \tau + B_k(\tau) \sin \beta_k |\tau|], \quad (19)$$

где $A_k(\tau), B_k(\tau)$ — многочлены относительно τ ; $\sigma^2, \alpha_k, \beta_k$ — параметры.

Как видно из (19) экспоненциальная аппроксимация представляет собой только первое приближение общего вида корреляционной функции. Учитывая важность корреляционной функции для построения РКЛ, желательно иметь ее более точную аппроксимацию. Принимая во внимание (19), предлагается описывать корреляционную функцию более точной экспоненциально-косинусной формулой и найти для этого случая такое же простое аналитическое представление РКЛ, как и для экспоненциального [20].

В случае анализа изображений применяются двумерное РКЛ. При гипотезе о факторизации корреляционной функции [14] можно рассматривать одномерное интегральное уравнение на собственные значения на симметричном интервале $x \in [-A, A]$:

$$\int_{-A}^A R(x-u) \psi(u) du = \lambda \psi(x). \quad (20)$$

Экспоненциально-косинусная корреляционная функция

$$R(\tau) = \sigma^2 \exp(-\alpha |\tau|) \cos \beta \tau, \quad (21)$$

имеет спектр

$$G(\omega) = \frac{2\alpha\sigma^2(\alpha^2 + \beta^2 + \omega^2)}{\omega^4 + 2\omega^2(\alpha^2 - \beta^2) + (\alpha^2 + \beta^2)^2}, \quad (22)$$

где ω — пространственная частота.

В соответствии с алгоритмом решения интегрального уравнения II-го рода для ядра с дробно-рациональным спектром [19], интегральное уравнение (20) сводится к линейному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами:

$$\begin{aligned} \psi^{(4)}(x) - 2\left(\alpha^2 - \beta^2 - \frac{\alpha\sigma^2}{\lambda}\right)\psi^{(2)}(x) + \\ + (\alpha^2 + \beta^2)\left(\alpha^2 + \beta^2 - \frac{2\alpha\sigma^2}{\lambda}\right)\psi(x) = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

Решением этого уравнения являются собственные функции $\psi_k(x)$

вида:

$$\psi_k(x) = \begin{cases} d_{1k} \cos\left(\varepsilon_k \frac{x}{A}\right) + d_{2k} \operatorname{ch}\left(\gamma_k \frac{x}{A}\right), & k = 0, 2, 4, \dots, \\ c_{1k} \sin\left(\varepsilon_k \frac{x}{A}\right) + c_{2k} \operatorname{sh}\left(\gamma_k \frac{x}{A}\right), & k = 1, 3, 5, \dots \end{cases} \quad (24)$$

Здесь ε_k и γ_k являются решениями системы трансцендентных уравнений [28]:

$$\begin{cases} G_1(\gamma)G_2(i\varepsilon)\left\{\left(\frac{\alpha}{\varepsilon}F_1(i\varepsilon)\right)^P \pm \operatorname{tg} \varepsilon\right\}\left\{(F_2(\gamma))^P + \operatorname{th} \gamma\right\} - \\ - G_1(i\varepsilon)G_2(\gamma)\left\{\left(\frac{\alpha}{\gamma}F_1(\gamma)\right)^P - \operatorname{th} \gamma\right\}\left\{(F_2(i\varepsilon))^P \operatorname{m} \operatorname{tg} \varepsilon\right\} = 0 \\ \gamma^2 = (\alpha^2 + \beta^2)\frac{\alpha^2 - 3\beta^2 + \varepsilon^2}{\alpha^2 + \beta^2 + \varepsilon^2}, \end{cases} \quad (25)$$

$$\text{где } F_1(x) = \frac{\beta^2 + (\alpha^2 - x^2)}{\beta^2 - (\alpha^2 - x^2)}, \quad F_2(x) = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + x^2}{2\alpha x},$$

для $k = 0, 2, 4, \dots$: $G_1(x) = 1$, $G_2(x) = \beta^2 - (\alpha^2 - x^2)$, $P = 1$ и используется верхний знак;

для $k = 1, 3, 5, \dots$: $G_1(x) = \alpha^2 + \beta^2 + x^2$, $G_2(x) = \alpha^2 + \beta^2 - x^2$, $P = -1$ и используется нижний знак.

Решения системы (25) могут быть отделены на непересекающихся интервалах:

$$\left(0, \frac{\pi}{2}\right), k=0; \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right), \dots, \left(\frac{\pi(k-1)}{2}, \frac{\pi(k+1)}{2}\right), k=2, 4, 6, \dots,$$

$$\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right), \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right), \dots, \left(\frac{\pi k}{2}, \frac{\pi(k+2)}{2}\right), k=1, 3, 5, \dots$$

Коэффициенты d_{1k}, d_{2k} и c_{1k}, c_{2k} определяются из условия нормировки:

$$\left\{ \begin{array}{l} d_{1k}, k=0, 2, 4, \dots \\ c_{1k}, k=1, 3, 5, \dots \end{array} \right\} = \left\{ \left[A \left(1 \pm \frac{\sin 2\varepsilon_k}{2\varepsilon_k} \right) + 4D_k^2 \left(1 \pm \frac{\text{sh } 2\gamma_k}{2\gamma_k} \right) - \frac{4D_k B_k}{\varepsilon_k^2 + \gamma_k^2} \right]^{-1/2} \right\}, \quad (26)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} d_{2k}, k=0, 2, 4, \dots \\ c_{2k}, k=1, 3, 5, \dots \end{array} \right\} = -D_k \left\{ \begin{array}{l} d_{1k}, k=0, 2, 4, \dots \\ c_{1k}, k=1, 3, 5, \dots \end{array} \right\},$$

где $D_k = 2 \frac{E_{1k} (\alpha^2 + \beta^2 - \gamma_k^2)}{E_{2k} (\alpha^2 + \beta^2 + \varepsilon_k^2)}$,

$$B_k = \begin{cases} e^{\gamma_k} (\gamma_k \cos \varepsilon_k + \varepsilon_k \sin \varepsilon_k) - e^{-\gamma_k} (\gamma_k \cos \varepsilon_k - \varepsilon_k \sin \varepsilon_k), & k=0, 2, 4, \dots \\ e^{\gamma_k} (\gamma_k \sin \varepsilon_k + \varepsilon_k \cos \varepsilon_k) - e^{-\gamma_k} (\gamma_k \sin \varepsilon_k - \varepsilon_k \cos \varepsilon_k), & k=1, 3, 5, \dots \end{cases}$$

$$E_{1k} \begin{cases} k=0, 2, 4, \dots \\ k=1, 3, 5, \dots \end{cases} = (\alpha^2 + \beta^2 - \varepsilon_k^2) \begin{cases} \cos \varepsilon_k \\ \sin \varepsilon_k \end{cases} + 2\alpha \varepsilon_k \cos \varepsilon_k,$$

$$E_{2k} \begin{cases} k=0, 2, 4, \dots \\ k=1, 3, 5, \dots \end{cases} = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma_k^2) \begin{cases} (e^{\gamma_k} + e^{-\gamma_k}) \\ (e^{\gamma_k} - e^{-\gamma_k}) \end{cases} + 2\alpha \gamma_k (e^{\gamma_k} + e^{-\gamma_k}).$$

При этом собственные числа находятся из выражения:

$$\lambda_k = \frac{2A\alpha\sigma^2 (\alpha^2 + \beta^2 + \varepsilon_k^2)}{\varepsilon_k^4 + 2\varepsilon_k^2 (\alpha^2 - \beta^2) + (\alpha^2 + \beta^2)^2}. \quad (27)$$

Анализ полученных результатов показывает, что монотонно возрастающие $\{\varepsilon_k\}$ и $\{\gamma_k\}$ определяют строго убывающую последовательность собственных чисел (27), что в соответствии с теорией РКЛ [13] позволяет обеспечить выполнение одного из важнейших оптимальных свойств РКЛ — минимальность среднеквадратичной ошибки усечения бесконечного ряда.

При $\beta = 0$ приходим к случаю экспоненциальной корреляционной функции и формулы (24) — (27) сводятся к ранее полученным в [20] решениям. Таким образом, при $\beta \neq 0$ получено обобщение на случай экспоненциально-косинусной корреляционной функции.

Пример 1. В качестве примера рассмотрим двумерное полутоновое изображение. Для представленного на рис. 4 центрированного изображения $w(x, y)$ была рассчитана двумерная корреляционная функция $R(\Delta x, \Delta y)$ (рис. 5) по формуле [29]:

$$R(\Delta x, \Delta y) = \frac{1}{4AB} \int_{-A}^A \int_{-B}^B w(x, y) w^*(x + \Delta x, y + \Delta y) dx dy, \quad (28)$$

причем, при выходе аргументов $x + \Delta x, y + \Delta y$ за пределы области изображения полагалось $w(x + \Delta x, y + \Delta y) = 0$.

Затем двумерная корреляционная функция $R(\Delta x, \Delta y)$ была факторизована на две одномерные корреляционные функции $R_1(\Delta x)$ и $R_2(\Delta y)$, для которых методом наименьших квадратов были построены экспоненциальная и экспоненциально-косинусная аппроксимации. Для сравнения на рис. 6а приведена рассчитанная корреляционная функция, а на рис. 6б и 6в показаны ее экспоненциальная и экспоненциально-косинусная аппроксимации соответственно.

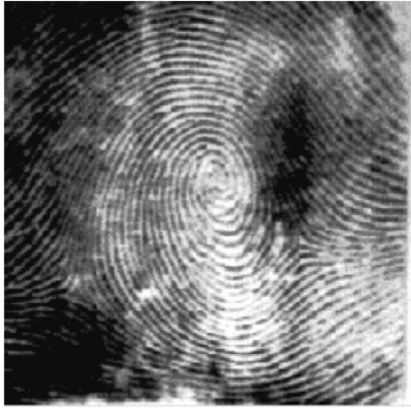


Рис. 4. Полутонное тестовое изображение (отпечаток пальца)

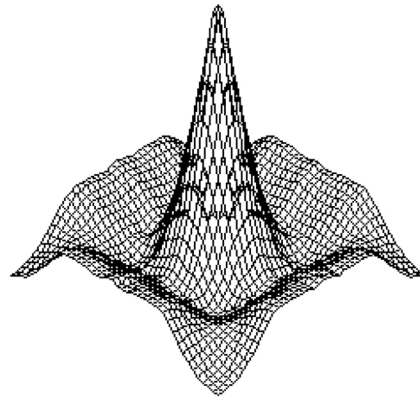


Рис. 5. Трехмерный вид корреляционной функции изображения, представленного на рис. 4

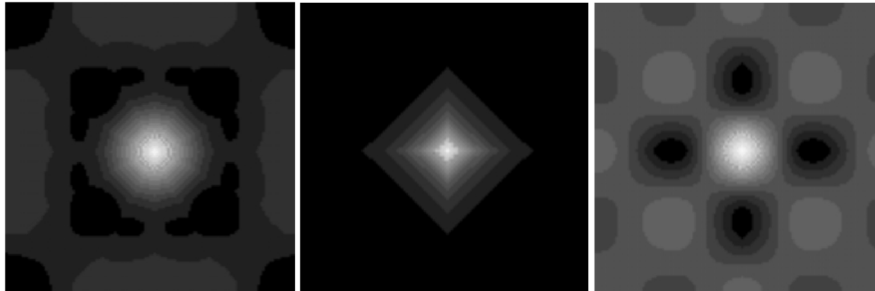


Рис. 6. Рассчитанная корреляционная функция (а), ее экспоненциальная (б) и экспоненциально-косинусная аппроксимации (в), соответственно

На рис. 6 видно, что экспоненциально-косинусная аппроксимация лучше описывает центральную часть, чем экспоненциальная. А на рис. 7 видно, что она еще и отражает осцилляции корреляционной функции.

Для аппроксимирующих корреляционных функций изображения, представленного на рис. 4, были получены следующие оценки параметров экспоненциально-косинусной аппроксимации:

$$R_1^{\text{эк}}(\Delta x): \sigma=14,82, \alpha=2,87, \beta=0,41, R_2^{\text{эк}}(\Delta x): \sigma=7,85, \alpha=2,52, \beta=0,86, .$$

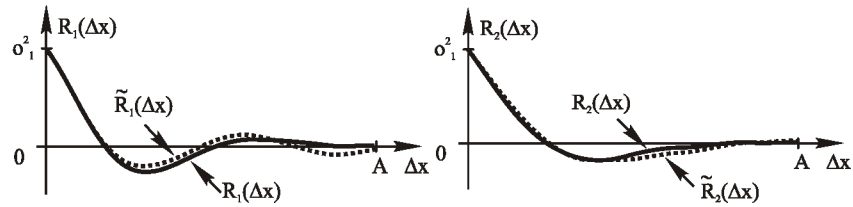


Рис. 7. Одномерные сечения рассчитанных корреляционных функций (сплошные линии) и их экспоненциально-косинусные аппроксимации (пунктирные линии)

Результаты решения интегрального уравнения для ядра $R_1^0(\Delta x)$ и $R_2^0(\Delta x)$ приведены в табл. 1 и табл. 2 соответственно.

Таблица 1. Параметры базисных функций для корреляционной функции $R_1^0(\Delta x)$

Номер базисной функции, k	ε_k	γ_k	Собственное число, λ_k
0	1,495	17,368	64,726
1	2,987	17,383	64,088
2	4,483	17,406	63,069
3	5,981	17,437	61,730
4	7,480	17,473	60,147

Таблица 2. Параметры базисных функций для корреляционной функции $R_2^0(\Delta x)$

Номер базисной функции, k	ε_k	γ_k	Собственное число, λ_k
0	1,513	13,349	38,387
1	3,024	13,440	37,341
2	4,529	13,582	35,620
3	6,030	13,759	33,268
4	7,529	13,960	30,363

Вид базисных функций Карунена — Лоэва $\psi_k(x)$ на интервале $x \in [-A, A]$ приведен на рис. 8.

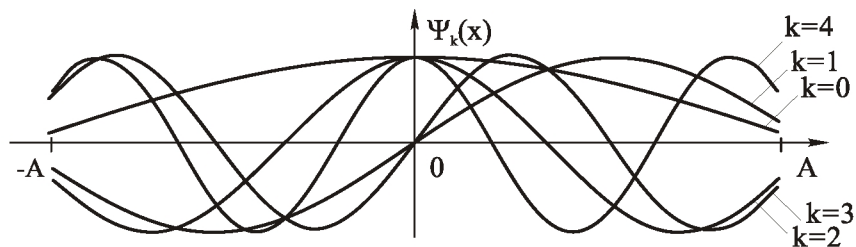


Рис. 8. Вид одномерных базисных функций Карунена — Лозва

С ростом индекса k собственные числа становятся приблизительно кратными $\pi/2$, а собственные функции хорошо аппроксимируются периодическими синусоидами и косинусоидами, то есть имеет место асимптотическое поведение. Однако, учитывая информационную важность первых коэффициентов РКЛ, асимптотическую аппроксимацию представляется возможным использовать только для достаточно высоких индексов.

При оптической реализации РКЛ наиболее общие методы синтеза пространственных фильтров дает цифровая голография. Функция $H(\mathbf{v})$ из ур. (3), описывающая фильтр, является, вообще говоря, комплексной. Соответственно, для синтеза комплексных пространственных фильтров применимы методы синтезированных голограмм. Фотокопии пространственных фильтров, реализующих базисные функции Карунена — Лозва для экспоненциально-косинусного вида корреляционной функции ($\alpha_x = \alpha_y = 3$, $\beta_x = \beta_y = 1$) приведены на рис. 9.

В связи с применением оптического РКЛ при анализе изображений необходимо учитывать влияние ошибок оптической реализации на устойчивость РКЛ.

При дискретизации и квантовании по уровню собственные функции ψ_p подвергаются воздействию возмущений h_p и преобразуются в "возмущенные" базисные функции φ_p (см. рис. 10):

$$\varphi_p(\mathbf{x}) = \psi_p(\mathbf{x}) + h_p(\mathbf{x}). \quad (29)$$

При наличии возмущений базисных функций вместо коэффициентов w_p РКЛ получим "возмущенные" коэффициенты

Сохранение оптимальных свойств РКЛ при внесении возмущений будет говорить об устойчивости РКЛ к данным возмущениям. Среди всех свойств РКЛ выделим два основных: ортонормированность базисных функций и некоррелированность коэффициентов разложения.

Условие ортонормированности непрерывных базисных функций записывается следующим образом:

$$\int_{-A}^A \psi_i(t) \psi_j^*(t) dt = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad t \in [-A, A]. \quad (31)$$

При дискретизации базисных функций по аргументу путем замены интеграла на сумму получим численную оценку условия (31) в следующем виде:

$$\sum_{n=-N/2}^{N/2} \psi_i(n\Delta t) \psi_j^*(n\Delta t) = E_{ij}^{KL}, \quad N = \frac{2A}{\Delta t}, \quad (32)$$

где Δt — шаг дискретизации.

В идеале матрица E^{KL} должна быть единичной:

$$E_{ij}^{KL} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad (33)$$

Рассмотрим базисные функции Карунена — Лозва, построенные по экспоненциально-косинусной корреляционной функции:

$$R(\tau) = \sigma^2 \cdot \exp(-\alpha|\tau|) \cos \beta\tau, \quad |\tau| \leq 2A, \quad (34)$$

с конкретными значениями параметров $\sigma^2 = 1$, $\alpha = 3$, $\beta = 1$, $A = 1,28$.

Для $M = 10$ первых базисных функций с шагом дискретизации $\Delta t = 0,01$ (число пикселей $N = 2A \cdot \Delta t = 256$) были получены следующие результаты (приводится часть матрицы):

$$E^{KL} = \begin{bmatrix} 1,0014 & 0,0000 & -0,0011 & 0,0000 & 0,0018 \\ 0,0000 & 1,0015 & 0,0000 & -0,0023 & -0,0000 \\ -0,0011 & 0,0000 & 1,0017 & -0,0000 & -0,0036 \\ 0,0000 & -0,0023 & -0,0000 & 1,0020 & 0,0000 \\ 0,0018 & -0,0000 & -0,0036 & 0,0000 & 1,0026 \end{bmatrix}.$$

Относительное отклонение от идеальной матрицы ортонормированности (32)

$$\varepsilon[E^{KL}] = \sqrt{\frac{\sum_{i,j=1}^M (E_{ij}^{KL} - \delta_{ij})^2}{\sum_{i,j=1}^M \delta_{ij}^2}} = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{i,j=1}^M (E_{ij}^{KL} - \delta_{ij})^2} \quad (35)$$

составило величину $\varepsilon[E^{KL}] = 0,016$, то есть 1,6%.

Отклонение $\varepsilon[E^{KL}]$ зависит от относительных параметров α/A и β/A , так как всегда можно привести интервал анализа к единичному отрезку. С ростом α/A и уменьшением β/A величина $\varepsilon[E^{KL}]$ уменьшается. Оставляя параметры α/A и β/A неизменными, проследим детальнее влияние дискретизации $\Delta t = 2A/N$.

Уменьшение шага дискретизации в два раза $\Delta t = 0,005$ ($N = 512$) приводит к снижению относительного отклонения примерно в два раза $\varepsilon[E^{KL}] = 0,0083$, а увеличение шага дискретизации в два раза $\Delta t = 0,02$ ($N = 128$) соответственно к увеличению относительного отклонения в два раза $\varepsilon[E^{KL}] = 0,0321$. Такая же линейная зависимость сохраняется и для других значений Δt (см. рис. 11) вплоть до критического увеличения $\Delta t_0 = 0,32$ ($N=8$), когда происходит резкий скачок $\varepsilon[E^{KL}]$ и линейная зависимость нарушается. Это связано с тем, что данный шаг дискретизации не позволяет адекватно "прописывать" все колебания базисных функций. Таким образом, при $\Delta t \leq 0,16$ ($N \geq 0,16$) можно говорить о линейной зависимости $\varepsilon[E^{KL}](\Delta t) \approx c \cdot \Delta t$, $c \approx 1,6$.

При этом зависимость $\varepsilon[E^{KL}]$ от числа пикселей N будет обратной (рис. 12). Из рисунка 12 хорошо видно, что при $N \geq 64$ ($t \leq 0,04$) обеспечивается уровень относительного отклонения $\varepsilon[E^{KL}](\Delta t)$ не

выше 10%, при котором можно говорить о сохранении свойства ортонормированности при дискретизации базисных функций.

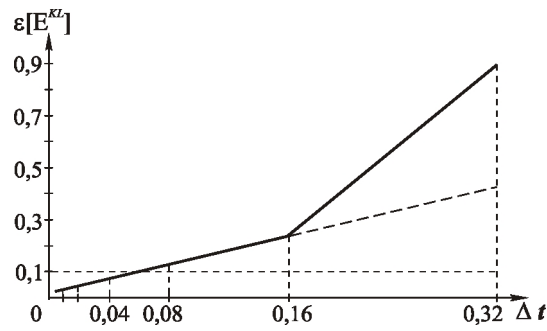


Рис. 11. Зависимость отклонения $\varepsilon [E^{KL}]$ от шага дискретизации Δt

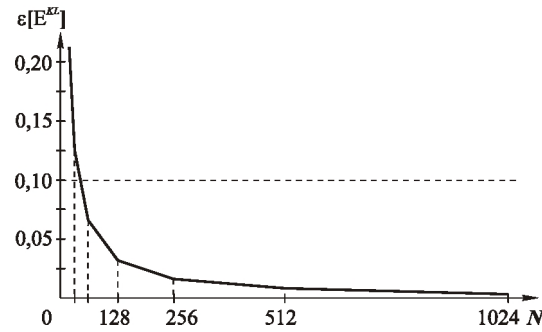


Рис. 12. Зависимость отклонения $\varepsilon [E^{KL}]$ от числа пикселей N на отрезке $[-A, A]$

Сохранение условия ортонормированности (32) можно проследить и при других возмущениях базисных функций. Известно [30], что квантование по уровню, возникающее при литографическом изготовлении оптических элементов, может быть описано добавлением равномерно распределенного белого шума. В вычислительном эксперименте базисные функции Карунена — Лоэва подвергались искажению путем добавления аддитивного белого шума $\xi(n\Delta t)$:

$$\psi(n\Delta t) = \psi(n\Delta t) + \xi(n\Delta t), \quad n = \overline{-N/2, N/2}, \quad (36)$$

и вычислялась величина $\varepsilon [E^{KL}]$, аналогичная (35), где

$$E_{ij}^{KL} = \sum_{n=-N/2}^{N/2} \Psi_i(n\Delta t) \Psi_j^*(n\Delta t). \quad (37)$$

Причем, так как шум $\xi(n\Delta t)$ является случайной величиной, то и величина $\varepsilon [E^{KL}]$ будет случайной. Следовательно, определить ее значение можно лишь с некоторой доверительной вероятностью на некотором интервале в результате N_s экспериментальных наблюдений. В этом случае оценка $\hat{\varepsilon} [E^{KL}]$ определяется как среднее над результатами наблюдений:

$$\hat{\varepsilon} [E^{KL}] = \frac{1}{N_s} \sum_{i=1}^{N_s} \varepsilon_i [E^{KL}]. \quad (38)$$

Из центральной предельной теоремы следует [31], что с увеличением размера выборки N_s распределение выборочного среднего $\hat{\varepsilon} [E^{KL}]$ стремится к нормальному распределению независимо от вида распределения исходной случайной величины $\varepsilon [E^{KL}]$. Практически, распределение $\hat{\varepsilon} [E^{KL}]$ можно считать нормальным при $N_s > 10$ [31]. Следовательно, для построения доверительных интервалов можно воспользоваться следующей формулой [31]:

$$P \left\{ \left| \hat{\varepsilon} [E^{KL}] - \varepsilon [E^{KL}] \right| \leq \frac{\hat{\sigma}_\varepsilon \cdot t_{N_s-1; \alpha/2}}{\sqrt{N_s}} \right\} = 1 - \alpha, \quad (39)$$

где $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$ — выборочное значение дисперсии $\hat{\varepsilon} [E^{KL}]$, $t_{N_s-1; \alpha/2}$ — значение t —распределения Стьюдента, $1 - \alpha$ — доверительная вероятность.

Для различных значений отношения сигнал/шум (S/N)

$$S/N = \frac{\sum_{n=-N/2}^{n=N/2} [\Psi(n\Delta t)]^2}{\sum_{n=-N/2}^{n=N/2} [\xi(n\Delta t)]^2}, \quad (40)$$

и числа пикселей N , по $N_s=1000$ наблюдениям были получены зависимости $\varepsilon [E^{KL}]$, представленные на рис. 13.

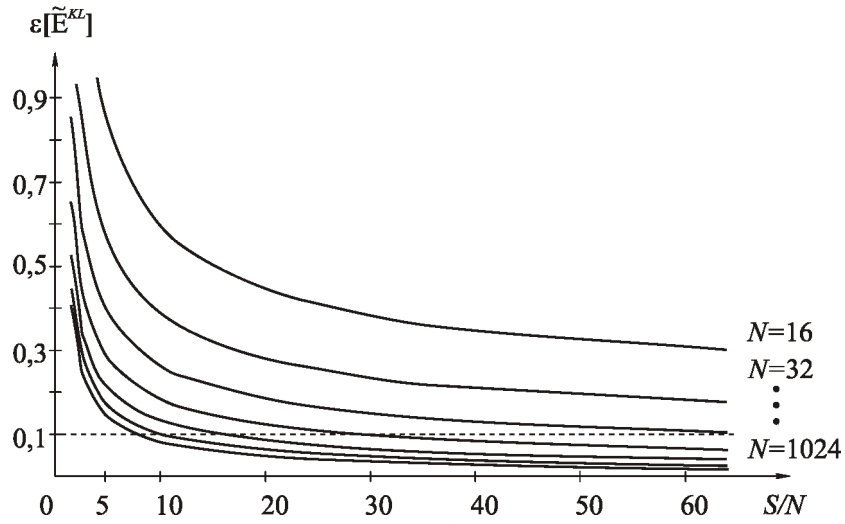


Рис. 13. Зависимость отклонения $\varepsilon[E^{KL}]$ от отношения сигнал/шум S/N при различном количестве пикселей N

Задавшись доверительной вероятностью 95% ($\alpha = 0,05$), для проведенных $N_s = 1000$ получаем $t_{999; 0,025} = 1,98$ и

$$P\left\{\left|\varepsilon[E^{KL}] - \varepsilon[E^{KL}]\right| \leq \sigma_\varepsilon \cdot 0,06\right\} = 0,95.$$

Для удобства можно рассматривать относительную ошибку:

$$\mu_{0,95} = \frac{\left|\varepsilon[E^{KL}] - \varepsilon[E^{KL}]\right|}{\varepsilon[E^{KL}]} \approx \frac{\left|\varepsilon[E^{KL}] - \varepsilon[E^{KL}]\right|}{\varepsilon[E^{KL}]} = \frac{\sigma_\varepsilon \cdot 0,06}{\varepsilon[E^{KL}]},$$

которая для полученных значений $\varepsilon[E^{KL}]$ и σ_ε^2 оказалась не выше 2%:

$$\mu_{0,95}^{\max} \leq 0,02.$$

Из рис. 13 видно, что кривые для $N = 256 \div 1024$ очень близки даже при больших уровнях зашумления: $S/N \geq 2,5$, следовательно, дальнейшее увеличение количества отсчетов при достижении $N = 256$ становится малоэффективным.

Основываясь на полученных результатах можно определить диапазон устойчивости РКЛ в зависимости от величины отношения

сигнал/шум: уровень относительного отклонения $\varepsilon \left[\frac{E_{\text{сиг}}}{E_{\text{ш}}} \right]$ не превышает 10% для $S/N \geq 16$ при $N \geq 256$, а для $S/N \geq 30$ при $N \geq 128$.

Другим, важным для РКЛ, критерием влияния возмущений базисных функций на его устойчивость является некоррелированность коэффициентов разложения функции $x(t)$:

$$\langle x_i x_j \rangle = \lambda_i \delta_{ij} = \begin{cases} \lambda_i, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad (41)$$

Здесь $\langle \cdot \rangle$ — означает усреднение по ансамблю реализаций, x_i — коэффициенты разложения

$$x_i = \int_{-A}^A x(t) \psi_i(t) dt, \quad |t| \leq A, \quad (42)$$

по собственным функциям корреляционного оператора

$$\lambda_i \psi_i(t) = \int_{-A}^A R(t-u) \psi_j(u) du, \quad |t| \leq A, \quad (43)$$

где λ_j — собственные числа, $R(t-u)$ — корреляционная функция процесса $x(t)$.

Для проведения эксперимента необходимо генерировать стационарные случайные процессы, соответствующие заданной корреляционной функции. Стационарный случайный процесс для экспоненциально-косинусной корреляционной функции $R(\tau)$ (36) с теми же параметрами, что и в предыдущем разделе ($\sigma^2 = 1$, $\alpha = 3$, $\beta = 1$, $A = 1,28$) моделировался методом рекуррентных разностных уравнений [21].

По $K = 500$ дискретным реализациям такого случайного процесса проводилось вычисление матрицы корреляции коэффициентов разложения:

$$\rho_{ij} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K x_i^k x_j^k, \quad (44)$$

где $x_i^k = \sum_{n=-N/2}^{N/2} x^k(n\Delta t) \psi_i(n\Delta t)$, $k = \overline{1, K}$, $i = \overline{1, M}$ — коэффициент разложения k -ой дискретной реализации случайного процесса $x(t)$ по i -й базисной функции.

При $\Delta t = 0,01$ ($N = 256$) была получена следующая матрица корреляции коэффициентов РКЛ ($M = 10$, приведена только часть):

$$\rho^{KL} = \begin{bmatrix} 0,5723 & -0,0011 & -0,0052 & -0,0009 & 0,0069 \\ -0,0011 & 0,3956 & -0,0031 & -0,0091 & 0,0040 \\ -0,0052 & -0,0031 & 0,2522 & 0,0020 & -0,0070 \\ -0,0009 & -0,0091 & 0,0020 & 0,1705 & 0,0038 \\ 0,0069 & 0,0040 & -0,0070 & 0,0038 & 0,1235 \end{bmatrix}.$$

Причем, собственные числа λ_i , $i = \overline{1, M}$, рассчитанные по формуле (31), имеют следующие значения:

$$\lambda_1 = 0,5757, \lambda_2 = 0,3992, \lambda_3 = 0,2552, \lambda_4 = 0,1649, \lambda_5 = 0,1112.$$

Из приведенных результатов видно, что возмущение корреляционной функции внесло корреляцию между коэффициентами разложения $\rho_{ij}^{KL} \neq 0$, $i \neq j$ и нарушило равенство диагональных элементов собственным числам. Однако сохранилось соотношение упорядоченности $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots$ [13] для собственных чисел.

Чтобы оценить внесенное возмущение, такой же эксперимент был проведен для базиса Фурье:

$$f_m = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{A}} \cos\left(\frac{m}{2} \cdot \frac{\pi n \Delta t}{A}\right), & m = 0, 2, 4, \dots, \\ \frac{1}{\sqrt{A}} \sin\left(\frac{m+1}{2} \cdot \frac{\pi n \Delta t}{A}\right), & m = 1, 3, 5, \dots \end{cases} \quad (45)$$

и была получена соответствующая матрица корреляции коэффициентов разложения Фурье:

$$\rho^F = \begin{bmatrix} 0,5866 & 0,0039 & -0,0074 & -0,0025 & 0,0154 \\ 0,0039 & 0,4118 & -0,0022 & -0,0061 & 0,0043 \\ -0,0074 & -0,0022 & 0,2715 & 0,0019 & 0,0149 \\ -0,0025 & -0,0061 & 0,0024 & 0,1793 & -0,0057 \\ 0,0154 & 0,0043 & 0,0149 & -0,0057 & 0,1312 \end{bmatrix}.$$

Для оценки степени корреляции коэффициентов разложения вычислялась следующая величина:

$$\varepsilon[\rho] = \sqrt{\frac{\sum_{i,j=1}^M (\rho_{ij} - \lambda_i \delta_{ij})^2}{\sum_{i,j=1}^M (\lambda_i \delta_{ij})^2}} = \sqrt{\frac{\sum_{i,j=1}^M (\rho_{ij} - \lambda_i \delta_{ij})^2}{\sum_{i=1}^M \lambda_i^2}}, \quad (46)$$

аналогичная (35) и означающая относительное отклонение полученной матрицы корреляции коэффициентов от идеальной. Для РКЛ она составила $\varepsilon[\rho^{KL}] = 0,0092$, а для разложения Фурье $\varepsilon[\rho^F] = 0,0186$, что в два раза больше. Зависимость относительного отклонения $\varepsilon[\rho]$ от шага дискретизации Δt базисных функций для РКЛ и разложения Фурье представлена на рис. 14, откуда видно, что кривая РКЛ лежит ниже кривой Фурье для всего рассмотренного диапазона.

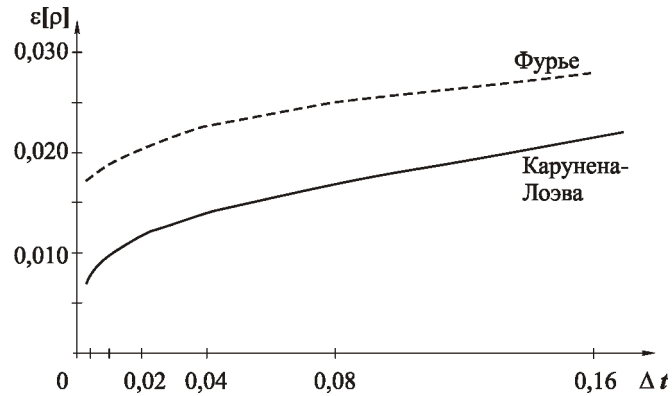


Рис. 14. Зависимость отклонения $\varepsilon[\rho]$ от шага дискретизации Δt базисных функций для РКЛ и разложения Фурье

На основании полученных результатов можно сделать вывод, что в условиях дискретизации базисных функций РКЛ сохраняет свои оптимальные свойства и обеспечивает меньшую степень корреляции коэффициентов разложения, чем базис Фурье.

Влияние зашумленности базисных функций Карунена — Лозва, моделирующих квантование по уровню (36), на матрицу корреляции коэффициентов разложения

$$\beta_{ij}^{KL} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K x_i^k x_j^k, \quad (47)$$

где $x_i^k = \sum_{n=-N/2}^{N/2} x^k(n\Delta t) \psi_i(n\Delta t)$, $k = \overline{1, K}$, $i = \overline{1, M}$.

Зависимость относительного отклонения матрицы корреляции коэффициентов $\varepsilon[\beta_{ij}^{KL}]$, $\varepsilon[\beta_{ij}^F]$ для РКЛ и разложения Фурье от величины зашумления базисных функций S/N (39) при $\Delta t = 0,01$ ($N = 256$) представлена на рис. 15. Из полученных результатов видно, что при $S/N \geq 15$ соотношение степени корреляции коэффициентов для РКЛ и Фурье остается таким же, как и в отсутствии шума, однако, при дальнейшем увеличении зашумленности базисных функций кривые начинают быстро сближаться, и при достижении $S/N = 2,5$ оптимальность РКЛ нарушается.

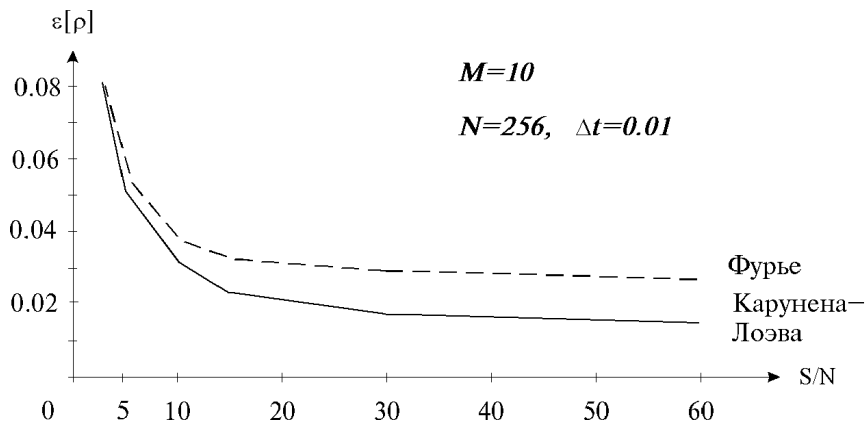


Рис. 15. Зависимость отклонения $\varepsilon[\rho]$ для РКЛ и разложения Фурье от величины зашумления базисных функций S/N при $\Delta t = 0,01$ ($N = 256$)

Таким образом, при шаге дискретизации $\Delta t \leq 0,01$ ($N \geq 256$) базисных функций и уровне их зашумления $S/N \geq 15$ обеспечивается сохранение основных свойств РКЛ, а значит, и его устойчивость к возмущениям, возникающим при оптической реализации.

Пример 2. Для исследования устойчивости системы распознавания изображений с помощью РКЛ проведена серия вычислительных экспериментов на компьютере по распознаванию тестовых изображений с использованием коэффициентов разложения по собственным функциям интегрального уравнения (10). При этом каждое изображение интерпретировалась как реализация случайного поля. Корреляционная функция статистически однородных эталонных изображений определялась по одной реализации w_{ij} [29]. Усредненная корреляционная функция \bar{R} вычислялась как среднее арифметическое от всех R_{ij} .

В вычислительном эксперименте использовалось $N_{cl} = 16$ классов изображений. Эталонные представители классов представляют собой треугольники, каждый из которых имеет вложенный треугольник, причем внешний и внутренний треугольники могут занимать одно из четырех положений (см. рис. 16).

Вычисленная для представленных на рис. 16 эталонных изображений двумерная корреляционная функция $\bar{R}(\Delta x, \Delta y)$ была факторизована на две одномерных $R^I(\Delta x)$ и $R^{II}(\Delta y)$, для каждой из которых была построена экспоненциально-косинусная аппроксимация. С использованием аппроксимирующих корреляционных функций $\mathcal{K}^I(\Delta x)$ и $\mathcal{K}^{II}(\Delta y)$ аналитически решались одномерные интегральные уравнения (10) с экспоненциально-косинусным ядром и находились одномерные базисные функции. Двумерные базисные функции, рассчитанные в виде произведения одномерных в соответствии с (18), изображены на рис. 17.

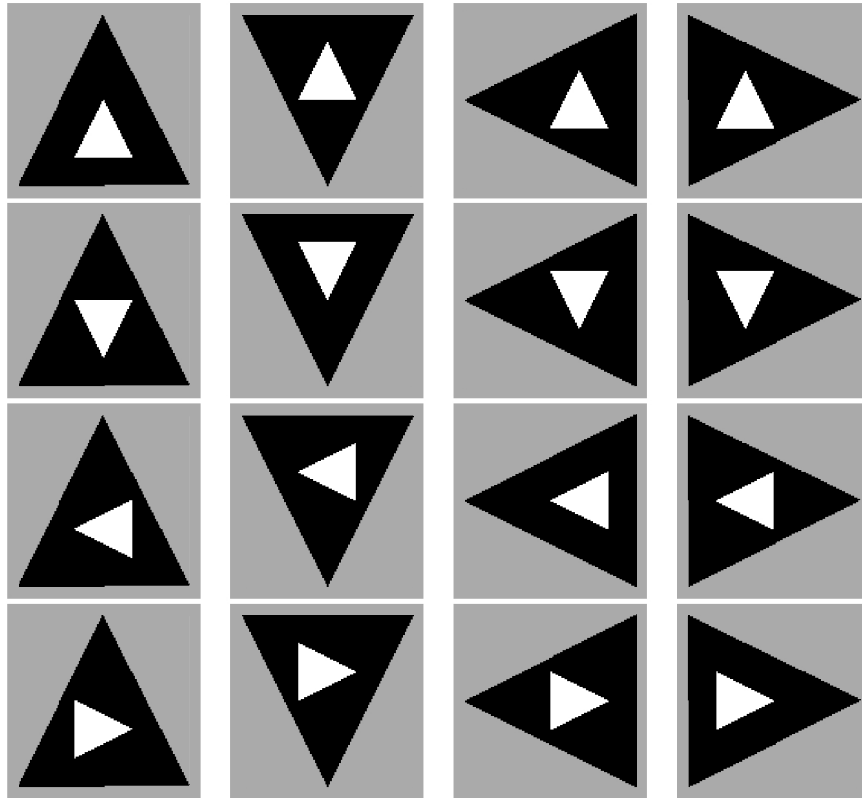


Рис. 16. Эталонные представители 16 классов

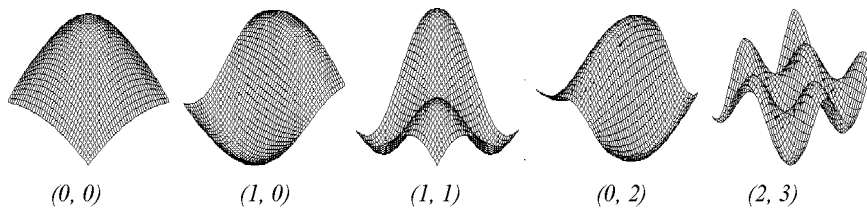


Рис. 17. Трехмерный вид базисных функций Карунена — Лоэва

В эксперименте вычислялось $L = 25$ признаков (9) по упорядоченным двумерным базисным функциям $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, ..., $(4, 4)$ для эталонов и объектов, по которым затем проводилась классификация объектов методом среднего для класса вектора признаков.

Объектами распознавания служили слегка искаженные эталоны — подвергнутые масштабированию (рис. 18), повороту (рис. 19) и зашумлению аддитивным белым шумом (рис. 20).

При проведении эксперимента параметры искажения изображений: угол поворота R , коэффициент масштабирования S и отношение сигнал/шум S/N последовательно увеличивались до некоторых значений, определяющих пределы устойчивой работы системы распознавания. На Рис. 18а, 19а, 20а представлены объекты со степенью искажения, позволяющей устойчиво распознавать объекты, в то время как на Рис. 18б, 19б, 20б показаны объекты со степенью искажения, выходящей за рамки устойчивого распознавания с помощью РКЛ.



(а): $0,85 > S > 1$

(б): $0,8 > S > 1$

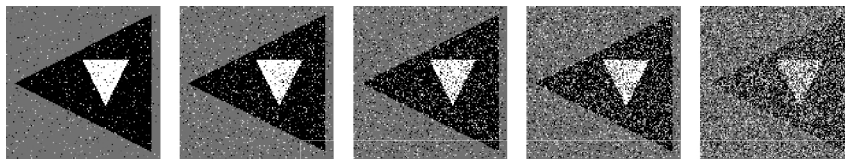
Рис. 18. Масштабированные объекты распознавания



(а): $-45^\circ > P > 45^\circ$

(б): $P < -45^\circ, P > 45^\circ$

Рис. 19. Повернутые объекты распознавания



(а): $S/N \geq 4$

(б): $S/N < 4$

Рис. 20. Зашумленные объекты распознавания

В случае поворота и масштабирования параметры искажения являются случайными величинами, поэтому точность получаемых

результатов не зависит от количества проведенных экспериментов N_9 . При зашумлении искажение вносится случайной величиной и, следовательно, необходимо оценить точность получаемых в эксперименте результатов. Воспользуемся элементами математической статистики. В случае 95% доверительного интервала получаем оценку частоты успеха $W \in [\hat{W} - \mu_{0,95}, \hat{W} + \mu_{0,95}]$ с точностью

$$\mu_{0,95} = 2\sqrt{\frac{1-W}{W \cdot N_9}} \approx 2\sqrt{\frac{1-\hat{W}}{\hat{W} \cdot N_9}}, \quad (48)$$

где $\hat{W} = N_- / N_9$ - оценка частоты успеха в N_9 проведенных экспериментах.

Результаты эксперимента по распознаванию искаженных изображений приведены в таблице 3.

Таблица 3. Результаты эксперимента по распознаванию искаженных изображений

Вид искажения	Параметры искажения	N_9	$\hat{W} = \frac{N_-}{N_9}$	Точность $\mu_{0,95}$
Масштабирование	$S=1 \div 0.85$ $S=0.85 \div 0.8$	25	1 0,95	несп.ч.
Поворот	$R=-45^\circ \div 45^\circ$ $R < 45^\circ, R > 45^\circ$ (*)	100	1 1	несп.ч.
Зашумление	$S/N=30 \div 4$ $S/N=2,5 \div 1,5$	200	1 0,65	0,1

(*) В этом случае объект переходил в другой класс и правильно распознавался как представитель другого класса.

Эксперимент с модельными изображениями показал хорошую устойчивость рассматриваемой системы распознавания к зашумлению и повороту изображений (объектов распознавания) и значительную чувствительность к масштабированию.

Пример 3. Далее рассматривается задача распознавания натуральных изображений — кристаллограмм слезной жидкости.

В настоящее время в офтальмологии изучена возможность диагностики различных глазных заболеваний по кристаллограмме слезы [32, 33]. Основой данного метода является различие в процессах кри-

сталлизации препарата слезы, полученных у пациентов с нормальным состоянием здоровья и с различными отклонениями от нормы. Однако, проведенный анализ показал, что визуально очень сложно, а иногда и просто невозможно выделить ведущие патологические признаки. Поэтому было бы желательно формализовать признаки и автоматизировать процесс диагностики.

Для предварительного исследования возможности применения рассматриваемой процедуры в этой задаче были отобраны фотографии кристаллограмм, где разделение образцов между нормой и патологией было предварительно задано на основе обследования пациентов по другим методикам. На рис. 21а приведены образцы кристаллограмм, соответствующих норме, а на рис. 21б — образцы кристаллограмм, соответствующих патологии.

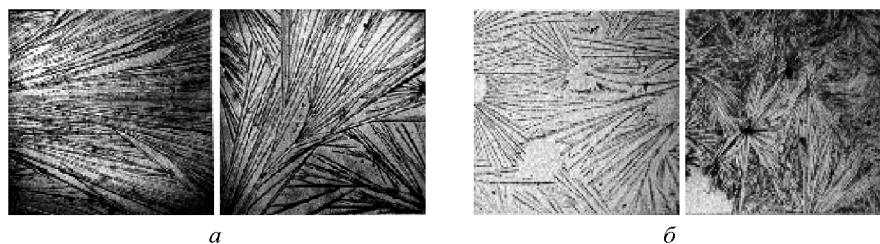


Рис. 21. Натурные изображения кристаллограмм слезы

В [34] было выделено несколько формальных признаков, по которым отличаются препараты, характерные для нормы и патологии. Среди таких признаков можно назвать "прозрачность" кристалла (в норме линии должны быть тонкими, без бахромы), количество центров, из которых исходят лучи кристалла (в норме он должен быть один), глобальность направления (в норме линии не должны иметь разветвлений), частоту линий на изображении кристалла (в норме расстояние между линиями должно быть максимальным).

В поставленной задаче обнаружения нарушений структуры микрористаллов из эталонных изображений формируются два класса — норма и патология, для каждого из которых по признакам эталонов,

представляющих собой набор коэффициентов ортогонального разложения, строятся центры классов. Классификация вновь поступившего изображения осуществляется по минимуму расстояния его вектора до центров классов.

Для проведения вычислительного эксперимента было отобрано 17 эталонных образцов кристаллограмм слезы (3 из них норма и 14 — патология). Эксперимент проводился в различных вариантах. Распознаванию подвергались исходные изображения кристаллограмм на основе коэффициентов, вычисленных с помощью двух ортогональных базисов: Фурье и Карунена — Лозва. Результаты распознавания 15-ти вновь поступивших изображений приведены в таблице 4 (W — частота успеха, L — количество коэффициентов разложения)

Таблица 4. Результаты распознавания кристаллограмм слезы.

Базис Фурье	Базис Карунена — Лозва
$W = 0,94$ при $L \geq 30$	$W = 0,94$ при $L \geq 19$

Из таблицы 4 видно, что для достижения одного и того же результата коэффициентов РКЛ понадобилось в полтора раза меньше, чем коэффициентов разложения Фурье, что наглядно подтверждает оптимальность РКЛ и эффективность его применения.

2.2. ДОЭ для разложения функции интенсивности по базису Адамара

Базисные функции Карунена — Лозва — многоградационные и знакопеременные, поэтому для их оптической реализации требуется изготовление полутонных амплитудно-фазовых фильтров.

Рассмотрим базис Адамара, который, как показано в [35], хорошо подходит для анализа отпечатков пальцев. Преимущества базиса Адамара в его универсальности и простоте оптической реализации с помощью бинарных фазовых фильтров.

Функции Адамара определяются следующим образом [36, 37]:

$$\text{had}_m(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \prod_{k=0}^{\infty} [\text{rad}_{k+1}(t)]^{m_k^\Gamma}, \quad t \in [0, T], \quad (49)$$

где m_k^Γ — k -й разряд кода Грея номера m , $\text{rad}_m(t)$ — функции Радемахера. Код Грея образуется из двоичного номера m по следующему правилу:

$$m_k^\Gamma = m_k \oplus m_{k+1}, \quad (50)$$

где k — номер двоичного разряда (справа налево); m_k — двоичный разряд в двоичной записи номера m : $m = \sum_{k=0}^{\infty} m_k 2^k$, а знак \oplus означает сложение по модулю 2. Функции Радемахера определяются следующим образом:

$$\text{rad}_m(t) = \text{sgn} \left[\sin \left(2^m \pi t / T \right) \right]. \quad (51)$$

Двумерные функции Адамара определяются как произведение одномерных:

$$\text{had}_{m,n}(x, y) = \text{had}_m(x) \text{had}_n(y). \quad (52)$$

Базис Адамара обладает следующими интересными свойствами: 1) функции Адамара удовлетворяют условию нуля, которое означает, что их Фурье-образы равны нулю в центральной точке; 2) они принимают только два значения: +1 или -1; и 3) определены на ограниченном интервале. На рис. 22 представлены примеры некоторых функций Адамара.

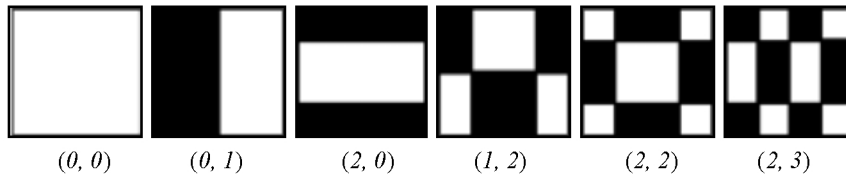


Рис. 22. Примеры некоторых функций Адамара (белый цвет соответствует значению +1, а черный — значению -1)

В этом разделе рассмотрен итеративный метод расчета фазовых ДОЭ, функция пропускания которых представляет собой произвольную линейную комбинацию конечного числа функций Адамара с раз-

личными несущими пространственными частотами. Оптическая схема вычисления признаков изображения $w(x,y)$ показана на рис. 2.

Если ДОЭ, имеющий функцию пропускания Φ в виде линейной комбинации конечного числа базисных функций $\{\Psi_{m,n}(x,y)\}$ с различными несущими пространственными частотами:

$$\sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N C_{m,n} \Psi_{m,n}^*(x,y) \cdot \exp[i(\alpha_m x + \beta_n y)], \quad (53)$$

дополнить сферической линзой O и осветить световым полем с амплитудой $w(x,y)$, интенсивность света в заданных точках фокальной плоскости линзы ($u_m = (t/k)\alpha_m$, $v_n = (t/k)\beta_n$) будет пропорциональна квадрату модуля коэффициентов разложения $C_{m,n}$ амплитуды этого светового поля по базису $\{\Psi_{m,n}(x,y)\}$:

$$C_{m,n} = \int \int_{-\infty}^{\infty} w(x,y) \Psi_{m,n}^*(x,y) dx dy. \quad (54)$$

Пусть необходимо рассчитать фазу ДОЭ $\varphi(x,y)$, для вычисления (при освещении волной с амплитудой $A_0(x,y)$) коэффициентов разложения Адамара в заданных точках (α_m, β_n) частотной плоскости. Комплексная функция пропускания такого элемента должна удовлетворять следующему соотношению:

$$\begin{aligned} \tau(x,y) &= A_0(x,y) \exp[i\varphi(x,y)] = \\ &= \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N C_{m,n} \text{had}_{m,n}(x,y) \cdot \exp[i(\alpha_m x + \beta_n y)]. \end{aligned} \quad (55)$$

Если разность между соседними частотами $|\alpha_{m+1} - \alpha_m|$ выбрана достаточно большой, т.е. такой, чтобы пространственные спектры соседних функций Адамара разделялись между собой по некоторому критерию, то коэффициенты $C_{m,n}$ в (55) приближенно равны

$$\begin{aligned} C_{m,n} &\cong \int \int_{-\infty}^{\infty} A_0(x,y) \exp[i\varphi(x,y)] \times \\ &\times \text{had}_{m,n}(x,y) \exp[-i(\alpha_m x + \beta_n y)] dx dy. \end{aligned} \quad (56)$$

Коэффициенты $C_{m, n}$ могут быть вычислены с помощью одного преобразования Фурье:

$$F(\xi, \eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_0(x, y) \exp [i \varphi(x, y)] \tau(x, y) dx dy. \quad (57)$$

В этом случае функция $F(\xi, \eta)$ в точках плоскости (ξ, η) с координатами (α_m, β_n) равна соответствующим коэффициентам

$$F(\xi = \alpha_m, \eta = \beta_n) \cong C_{mn}. \quad (58)$$

Предыдущие выкладки позволяют предложить следующий итеративный алгоритм [38] нахождения фазы $\varphi(x, y)$ оптического элемента. В качестве начальной оценки фазы выбирается $\varphi_0(x, y)$. Предположим, что на k -ой итерации мы получили k -ю оценку фазы: $\varphi_k(x, y)$. Используя функцию $\varphi_k(x, y)$, вычисляются коэффициенты $C_{m, n}^{(k)}$ из (56) или (57), (58). Затем они заменяются на коэффициенты

$$C_{m, n}^{(k)} = B_{m, n} C_{m, n}^{(k)} |C_{m, n}^{(k)}|^{-1} \quad (59)$$

с заданными модулями $B_{m, n}$. Далее, коэффициенты $C_{m, n}^{(k)}$ подставляются в (55). В результате суммирования (55) получается функция $E_{k+1}(x, y)$, аргумент которой служит последующей оценкой фазы:

$$\varphi_{k+1}(x, y) = \arg E_{k+1}(x, y), \quad (60)$$

и так далее.

Пример 4. Предложенный алгоритм использовался для расчета фазового оптического элемента согласованного с базисом Адамара. Как видно из рис. 23а фаза пропускающей функции такого ДОЭ, учитывая бинарный характер функции Адамара и согласованность несущей с шагом дискретизации, может иметь всего 4 - 5 уровней, что упрощает его изготовление методами микролитографии. После 10 итераций отклонение квадратов модулей коэффициентов, вычисленных с помощью рассчитанного ДОЭ в частотной плоскости (см. рис. 23б), от идеальных составило менее 9%.

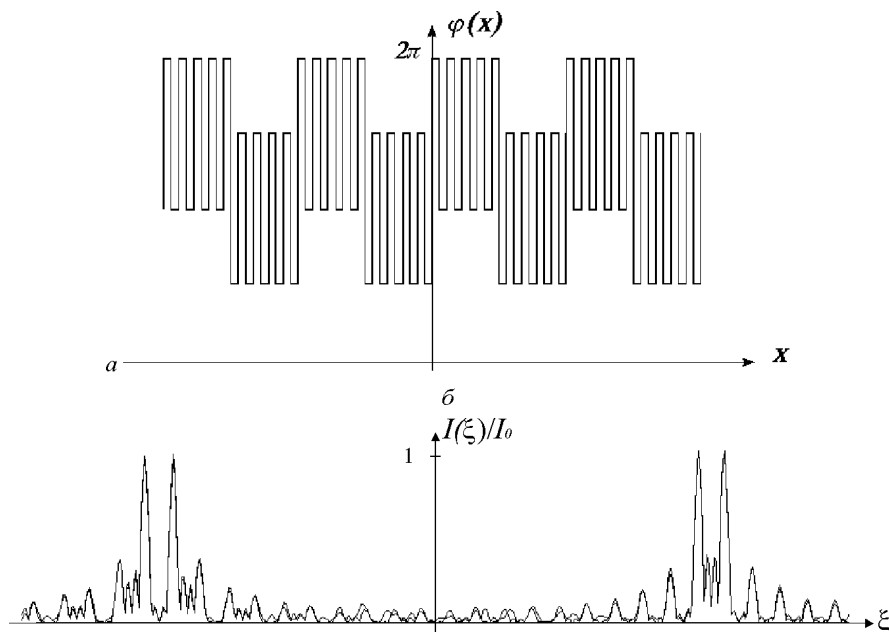


Рис. 23. (а) Фаза оптического элемента, вычисляющего 3-й и 4-й коэффициенты одномерного разложения Адамара и (б) нормированная интенсивность в плоскости пространственного спектра (плоскость формирования квадратов модулей коэффициентов)

Также предложенный алгоритм применялся для расчета ДОЭ, предназначенного вычислять первые 25 коэффициентов двумерного разложения Адамара $C_{m,n}$, $m, n = \overline{0,4}$. В этом случае были выбраны следующие параметры. Общее число пикселей 512×512 . Количество членов суммы (55) $N = M = 10$. Амплитуда освещающего пучка $A_0(x, y)$ была выбрана постоянной.

На рис. 24а показана рассчитанная за 5 итераций фаза ДОЭ, который вычисляет первые 25 коэффициентов двумерного разложения Адамара в плоскости пространственного спектра. На рисунках 24б и 24в представлены распределения интенсивности в фокальной плоскости при освещении фазового ДОЭ пучком с амплитудой $A_0(x, y) = \text{had}_{00}(x, y)$ (пик в точке (α_0, β_0) плоскости (ξ, η)) и $A_0(x, y) = \text{had}_{32}(x, y)$ (пик в точке (α_3, β_2)), соответственно.

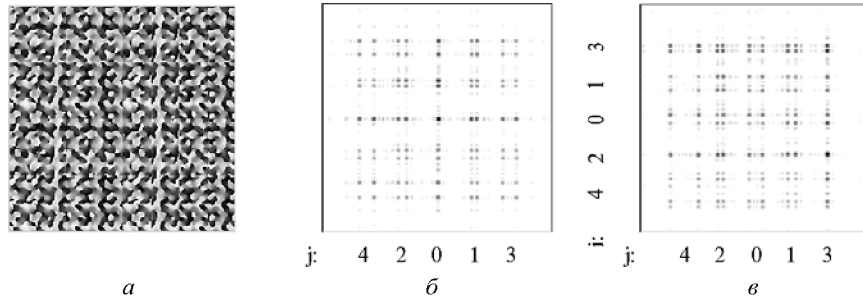


Рис. 24. (а) Фаза ДОЭ, обеспечивающего вычисление первых 25 коэффициентов двумерного разложения Адамара, (б) распределение интенсивности в плоскости пространственного спектра при освещении ДОЭ световым пучком с амплитудой $A_0(x,y)=had_{0,0}(x,y)$ и (в) с амплитудой $A_0(x,y)=had_{3,2}(x,y)$

Около 80% энергии падающего света идет на оптическое вычисление заданных коэффициентов. Среднеквадратичная ошибка расчета коэффициентов, получаемых с помощью такого ДОЭ не превышает 20% и сравнима с технологическими ошибками изготовления ДОЭ.

Рассчитанный ДОЭ может использоваться в задаче анализа изображений. В [35] показано, что коэффициенты разложения Адамара полей направлений (см. раздел 3) отпечатков пальцев хорошо подходят для распознавания таких изображений.

Заметим, что без существенных изменений предложенный алгоритм может быть применен для расчета ДОЭ, выполняющих оптическое вычисление коэффициентов разложения Уолша и Хаара.

2.3. ДОЭ для разложения амплитуды волны с угловыми гармониками

В задаче распознавания изображений инвариантно к их повороту в плоскости наблюдения целесообразно использовать пространственные фильтры, разделяющие амплитуду когерентного светового поля на отдельные дифракционные составляющие специальных ортогональных базисов, содержащих угловые гармоники. Под угловыми гармониками понимаются комплексные функции с единичным модулем и линсйной зависимостью от полярного угла. Такие гармоники появляются, например, в Бессель-оптике [39] при оптическом выпол-

нении преобразования Ханкеля высшего порядка, или при генерации бездифракционных пучков [40], бездифракционных изображений [41], бесселевых пучков с продольной периодичностью [42], многомодовых вращающихся пучков Гаусса — Лагерра [43].

В этом разделе рассматривается итеративный алгоритм расчета фазовых ДОЭ, которые могут быть названы угловыми спектральными анализаторами, служащими для разложения амплитуды когерентного светового поля по ортогональному базису с угловыми гармониками. Сферическая линза фактически играет роль Фурье-анализатора, так как она раскладывает светового поля на плоские волны или пространственные Фурье-гармоники. Аналогично, комбинация "линза + ДОЭ" может быть названа Бессель, Гаусса — Лагерра, или Цернике анализатором если данный оптический элемент раскладывает лазерный свет по соответствующему базису. Разложение по модам Гаусса — Лагерра используется при селекции поперечных мод на выходе многомодового волокна с параболическим профилем показателя преломления [44]. Базис круговых полиномов Цернике используется при анализе аберраций волновых фронтов [45].

Комплексная амплитуда $F(x,y)$ монохроматической световой волны, представленная в полярных координатах (r, φ) всегда допускает разложение в функциональный ряд Фурье по угловым гармоникам. Такой функциональный ряд записывается следующим образом:

$$F(r, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n(r) e^{in\varphi}, \quad (61)$$

где

$$F_n(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(r, \varphi) e^{-in\varphi} d\varphi. \quad (62)$$

Ряд (63) дает аналогичное разложение по гармоникам $e^{in\theta}$ пространственного спектра амплитуды данного светового пучка. Действительно, если мы применим преобразование Фурье функции $F(r, \varphi)$, то получим

$$G(\rho, \theta) = \mathfrak{F}[F(r, \varphi)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_n(\rho) e^{in\theta}, \quad (63)$$

где

$$G_n(\rho) = \frac{2\pi k i^n}{f} \int_0^{2\pi} F_n(r) J_n\left(\frac{k}{f} r \rho\right) r dr, \quad (64)$$

$$\mathfrak{F}[F(r, \varphi)] = \frac{k}{f} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} F(r, \varphi) \exp\left[-i \frac{k}{f} r \rho \cos(\varphi - \theta)\right] r dr d\varphi, \quad (65)$$

k — волновое число, f — фокусное расстояние линзы и $J_n(x)$ — функция Бесселя первого рода и n -го порядка. В уравнении (64) — (65) предполагается, что преобразование Фурье выполняется оптически с помощью сферической линзы с фокусным расстоянием f (см. рис. 22).

Видно, что выражения в (61) и (63) похожи по структуре, в то время как функции $G_n(\rho)$ и $F_n(r)$ связаны преобразованием Ханкеля n -го порядка в (64).

Разложение в уравнении (61) удобно использовать при инвариантном к повороту распознавании изображений, так как поворот анализируемого изображения $F(r, \varphi)$ на угол $\Delta\varphi$ не приведет к изменению экспериментально измеренных модулей коэффициентов $|F_n(r)|$. В связи с этим задача инвариантного к повороту распознавания изображений может быть сведена к измерению коэффициентов разложения изображений по следующим, предлагаемым ниже, базисам.

Рассмотрим функции, описывающие отдельные бездифракционные моды Бесселя, распространяющиеся в свободном пространстве [41,46]:

$$Q_{n,m}(r, \varphi) = A_{n,m} J_m\left(\gamma_{n,m} \frac{r}{r_0}\right) e^{im\varphi}, \quad (66)$$

$$A_{n,m} = \left[r_0 \sqrt{\pi} J'_m(\gamma_{n,m}) \right]^{-1}, \quad (67)$$

где r_0 — радиус апертуры, ограничивающей пучок Бесселя, $\gamma_{n,m}$ — корни функции Бесселя: $J_m(\gamma_{n,m}) = 0$, $n, m = 0, 1, 2, \dots$; $J'_m(\gamma_{n,m})$ — производная от функции Бесселя в точке $r = r_0$.

Множество функций в (66) является полным ортогональным базисом внутри круга радиуса r_0 . Подставляя их в уравнение (61) и (63), можем записать:

$$F(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_{n,m} Q_{n,m}(r, \varphi), \quad (68)$$

$$G(\rho, \theta) = \frac{2\pi k}{f} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m C_{n,m} A_{n,m} e^{im\theta} \int_0^{r_0} J_m\left(\gamma_{n,m} \frac{r}{r_0}\right) J_m\left(\frac{k}{f} r \rho\right) r dr. \quad (69)$$

При $\rho = \gamma_{m,n} \left(\frac{f}{kr_0}\right)$, некоторые члены в уравнении (69) равны нулю

в соответствии со свойством ортогональности функций Бесселя:

$$\int_0^{r_0} J_m\left(\gamma_{n,m} \frac{r}{r_0}\right) J_m\left(\gamma_{p,m} \frac{r}{r_0}\right) r dr = \frac{r_0^2}{2} \left[J'_m(\gamma_{n,m})\right]^2 \delta_{n,p}. \quad (70)$$

Базисные функции в уравнении (62) удобно использовать для селекции отдельных бesselевых мод в многомодовом пучке. Такой многомодовый бesselевый пучок может быть на выходе светового волновода со ступенчатым профилем показателя преломления.

Существует и другое полное множество ортогональных функций с угловыми гармониками в круге радиуса r_0 . Это *круговые полиномы Цернике* [45], которые подробно описываются в разделе 2.4.

Базисные функции Цернике удобно использовать при анализе небольших aberrаций волнового фронта. Анализатор, основанный на суперпозиции этих функций позволяет пространственно разделять вклад в световой пучок отдельных aberrаций, описываемых одиночными полиномами Цернике. Сигнал на выходе такого анализатора может быть использован для управления адаптивным зеркалом в целях компенсации aberrаций.

Обобщенные моды Гаусса — Лагерра [43, 44] представляют полное множество ортогональных функций на всей плоскости:

$$S_{n,m}(r, \varphi) = D_{n,m} \left(\frac{r}{a}\right)^{|m|} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{r}{a}\right)^2\right] L_n^{|m|}\left(\frac{r^2}{a^2}\right) e^{im\varphi}, \quad (71)$$

где

$$D_{n,m} = \frac{2}{a} \sqrt{\frac{\pi(n-m)}{(n!)^3}}, \quad (72)$$

$$L_n^m(x) = (-1)^m \frac{d^m}{dx^m} [L_{n+m}(x)], \quad (73)$$

a — радиус перетяжки гауссового пучка, $L_n^m(x)$ и $L_n(x)$ — обобщенные и обычные полиномы Лагерра, соответственно.

В этом случае, разложения (61) и (63) по угловым гармоникам будет следующим:

$$F(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n C_{n,m} S_{n,m}(r, \varphi), \quad (74)$$

$$G(\rho, \theta) = \frac{2\pi k}{f} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (-1)^n (-i)^m C_{n,m} S_{n,m}(r, \varphi). \quad (75)$$

Уравнение (75) следует из того, что функции в (71) являются собственными функциями преобразования Фурье

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} S_{n,m}(r, \varphi) \exp\left[-i \frac{k}{f} r \rho \cos(\varphi - \theta)\right] r dr d\varphi = \\ = 2\pi (-1)^n (-i)^m S_{n,m}(\rho, \theta). \end{aligned} \quad (76)$$

Базисные функции из уравнения (71) используются при расчете анализатора, согласованного с многомодовым пучком на выходе из светового волокна с параболическим профилем показателя преломления или лазерного резонатора со сферическими зеркалами. Такой анализатор позволяет пространственно разделять цилиндрические моды пучка.

Реализация ДОЭ для углового спектрального анализа. В [44] вводится понятие моданов — оптических элементов, используемых в качестве пространственных фильтров для анализа поперечно-модового состава когерентного лазерного пучка. Аналогичным образом можно рассматривать оптические элементы, служащие для разложения амплитуды светового поля по любому ортогональному базису, как спектральные анализаторы. На рис. 2 показана оптическая схема для спектрального анализатора светового пучка. Предположим, что пропускающая функция ДОЭ такого анализатора представляет собой линейную комбинацию конечного набора базисных функций $\psi_{n,m}(x, y)$, выбранных с заданными наклонами (53). Если такой фильтр помес-

тить рядом со сферической линзой и осветить световой волной с амплитудой $F(x, y)$, интенсивность света в точках $(u_{n,m}, v_{n,m})$ фокальной плоскости:

$$u_{n,m} = \frac{f}{k} \alpha_{n,m} \text{ и } v_{n,m} = \frac{f}{k} \beta_{n,m}, \quad (77)$$

где $(u_{n,m}, v_{n,m})$ — несущие пространственные частоты, будет приближенно пропорциональна квадратам модулей коэффициентов C_{nm} разложения комплексной амплитуды:

$$F(x, y) = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M C_{n,m} \Psi_{n,m}(x, y). \quad (78)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(x, y) \tau(x, y) \exp\left[-i \frac{k}{f}(ux + vy)\right] dx dy = \\ & = \frac{k}{f} \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M \sum_{p=0}^N \sum_{q=0}^M C_{n,m} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_{n,m}(x, y) \Psi_{p,q}^*(x, y) \exp\left[i(\alpha_{p,q}x + \beta_{p,q}y)\right] \times \\ & \times \exp\left[-i \frac{k}{f}(ux + vy)\right] dx dy \approx \\ & \approx \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M \sum_{p=0}^N \sum_{q=0}^M C_{n,m} \delta_{n,p} \delta_{m,q} \delta\left(\frac{k}{f}u - \alpha_{p,q}, \frac{k}{f}v - \beta_{p,q}\right) = \\ & = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M C_{n,m} \delta\left(\frac{k}{f}u - \alpha_{n,m}, \frac{k}{f}v - \beta_{n,m}\right). \end{aligned} \quad (79)$$

В уравнении (79) приближенное равенство возникает, если пренебречь значениями быстроосциллирующих интегралов при $p \neq n$, $q \neq m$:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_{nm}(x, y) \Psi_{pq}^*(x, y) \times \\ & \times \exp\left[i(\alpha_{p,q} - \alpha_{n,m})x + i(\beta_{p,q} - \beta_{n,m})y\right] dx dy. \end{aligned} \quad (80)$$

Чем более эффективно выполняется разделение пучков, распространяющихся под различными углами, тем более точно будет выполняться приближенное равенство (79).

Для повышения энергетической эффективности пространственно-го фильтра (77) желательно, чтобы он был фазовым. Задача расчета фазовых ДОЭ, выполняющих разложение светового поля в различных дифракционных порядках для мод Гаусса — Эрмита и Гаусса — Лагерра без угловых гармоник, рассматривалась в [47, 48]. Уравнение (53) для функцию пропускания обобщенного фазового анализатора можно модифицировать следующим образом:

$$\exp[i\Omega(r, \varphi)] = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M E_{n,m} \psi_{n,m}^*(r, \varphi) \exp[i r \rho_{n,m} \cos(\varphi - \theta_{n,m})], \quad (81)$$

где $(\rho_{n,m}, \theta_{n,m})$ — вектора несущих пространственных частот в полярных координатах, E_{nm} — комплексные коэффициенты, модули которых задаются произвольно, а аргументы являются свободными параметрами задачи, и которые подбираются так, чтобы уравнение (81) было точным равенством.

Для эффективного пространственного разделения отдельных дифракционных порядков в Фурье-плоскости предлагается считать следующие функции

$$\psi_{nm}^*(r, \varphi) \exp[i r \rho_{nm} \cos(\varphi - \theta_{nm})] \quad (82)$$

приближенно ортогональными и вычислять коэффициенты в ур. (81) по формуле

$$E_{nm} = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \exp[i\Omega(r, \varphi)] \psi_{nm}(r, \varphi) \exp[-i r \rho_{nm} \cos(\varphi - \theta_{nm})] r dr d\varphi. \quad (83)$$

Предлагаемый итеративный алгоритм расчета фазовой функции фильтра $\Omega(r, \varphi)$ основан на последовательном вычислении сумм (81) и интегралов (83) с помощью алгоритма быстрого преобразования Фурье, с учетом определенных ограничений. Например, на p -й итерации коэффициенты $E_{nm}^{(p)}$ находятся из уравнения (83) и заменяются на $\bar{E}_{nm}^{(p)}$ следующим образом:

$$\bar{E}_{nm}^{(p)} = \begin{cases} \left[(1 + \alpha)T_{n,m} - \alpha \left| E_{n,m}^{(p)} \right| \right] E_{n,m}^{(p)} \left| E_{n,m}^{(p)} \right|^{-1}, & (n, m) \in W, \\ E_{n,m}^{(p)} \left| E_{n,m}^{(p)} \right|^{-1}, & (n, m) \notin W. \end{cases} \quad (84)$$

где $T_{nm} > 0$ заданные числа, характеризующие отклик каждого канала разложения, W — множество пар индексов с ненулевыми значениями T_{nm} , и $0 < \alpha \leq 2$ — адаптивный или релаксационный коэффициент, позволяющий контролировать сходимость алгоритма.

Следующая, $(p+1)$ -я, оценка фазовой функции фильтра находится из уравнения

$$\Omega_{p+1}(r, \varphi) = \arg \left\{ \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M \bar{E}_{n,m}^{(p)} \Psi_{n,m}^*(r, \varphi) \exp \left[i r \rho_{n,m} \cos(\varphi - \theta_{n,m}) \right] \right\}. \quad (85)$$

Далее функцию $\Omega_{p+1}(r, \varphi)$ подставляют в (83) и на следующей итерации находят коэффициенты $E_{n,m}^{(p+1)}$, и так далее. Аналогично [48] можно доказать релаксационное свойство ошибки такого итеративного процесса:

$$\varepsilon_L^{(p+1)} \leq \varepsilon_L^{(p)}, \quad (86)$$

где

$$\varepsilon_L^{(p)} = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left[T_{nm} - \left(E_{nm}^{(p)} \right)^2 \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} T_{nm}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (87)$$

Пример 5. При численном моделировании для мод Гаусса — Лагерра использовались следующие параметры: 128 пикселей по радиусу r и 128 пикселей по угловой составляющей φ , диапазон изменения аргументов $r \in [0, 7 \text{ мм}]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, длина волны $\lambda = 0,63$ мкм, фокусное расстояние $f = 100$ мм, радиус гауссового пучка в перетяжке $a = 1$ мм. В формуле (81) рассматривались члены ряда с номерами $n, m \leq N = 7$. Действие рассчитанных ДОЭ [49] моделировалось с помощью численного преобразования Фурье.

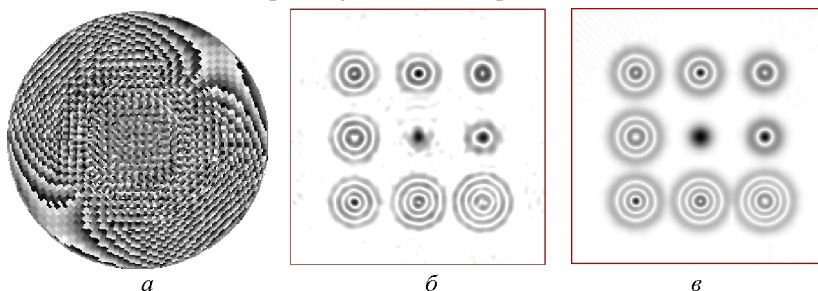
На рис. 25 представлено формирование 9-ти мод Гаусса — Лагерра $((0, 0), (1, 0), (1, 1), (2, 0), (2, 1), (2, 2), (3, 0), (3, 1), (3, 2))$ в различных дифракционных порядках: фаза ДОЭ (а), сформированные по-

рядки: интенсивность (б) и фаза (д), эталонное распределение: интенсивность (в) и фаза (е) и схема, показывающая расположение номеров мод по порядкам (г).

Рассчитанные ДОЭ могут использоваться не только для формирования пучков Гаусса — Лагерра с заданным модовым составом, но и как пространственные фильтры для определения поперечно-модового состава исследуемого пучка.

На рис. 26 показано действие ДОЭ, согласованного с модой Гаусса — Лагерра (5, 3), в качестве фильтра (рис. 26б). Из рисунка видно, что при прохождении моды (5, 3) (рис. 26а) через Фурье-каскад, на входе которого установлен соответствующий фильтр, в центре фокальной плоскости формируется резкий «всплеск» интенсивности. Если же фильтр согласованный с модой Гаусса - Лагерра (5, 3) осветить другим пучком, например, модой (1, 0) (рис. 26г), то в фокальной плоскости сформируется пятно с четким «провалом» интенсивности в центре (рис. 26д).

Аналогичное действие, но для 9-модового фильтра, представлено на рис. 27. Пучки, состоящие из одной моды (2, 1) (рис. 27а) и двух мод (2, 2) + (3, 1) (рис. 27б,в), соответственно, проходят через фильтр, показанный на рис. 25а (соответствие порядков модам см. на рис. 25г) и производят «всплески» интенсивности в соответствующих точках фокальной плоскости (рис. 27г и 27д,е) и пятна с «провалами» интенсивности в центрах других порядков. Пучки, представленные на рис. 27б и 27в отличаются поворотом на 90 градусов. Результаты, приведенные на рис. 27д и 27е, подтверждают инвариантность к повороту обобщенных анализаторов с угловыми гармониками.



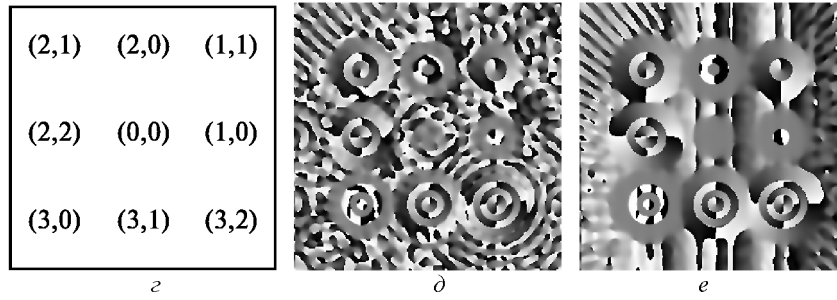


Рис. 25. Многомодовый пучок в различных дифракционных порядках: фаза ДОЭ (а); номера сформированных мод (z); распределения интенсивности в фокальной плоскости: полученное при использовании ДОЭ (б) и эталонное (в); распределения фазы в фокальной плоскости: полученное при использовании ДОЭ (д) и эталонное (е)

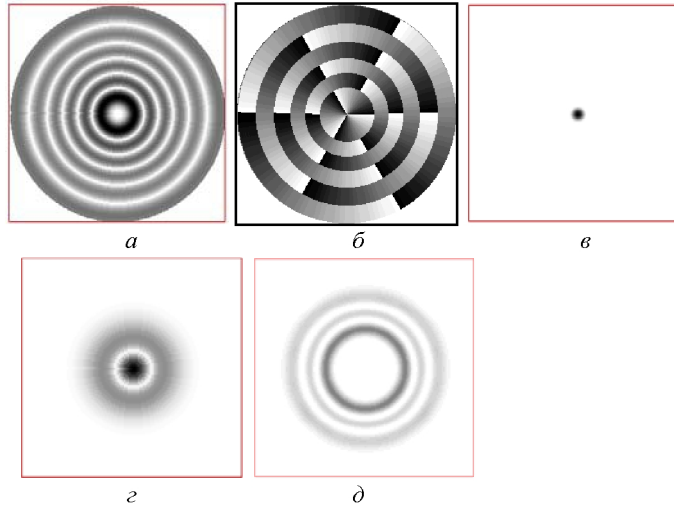


Рис. 26. Действие одномодового фильтра: интенсивность на входе Фурье-каскада, соответствующая модам Гаусса — Лагерра (5,3) (а) и (1,0) (г); фаза фильтра, согласованного с модой (5,3) (б); интенсивность на выходе Фурье-каскада для моды (5,3) (в) и моды (1,0) (д)

В таблице 5 приведены нормированные значения интенсивности в каждом из дифракционных порядков, усредненные по 5×5 центральным пикселям каждого порядка, что соответствует площадке минимального дифракционного пятна.

Таблица 5. Нормированные значения интенсивности в дифракционных порядках

Номер базис-	(0, 0)	(1, 0)	(1, 1)	(2, 0)	(2, 1)	(2, 2)	(3, 0)	(3, 1)	(3, 2)
--------------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------

ной функции									
Пучок (2, 1)	0,002	0,001	0,039	0,046	1,000	0,066	0,042	0,025	0,003
Пучок (2, 2)+(3, 1)	0,008	0,001	0,001	0,009	0,053	0,826	0,041	1,000	0,106

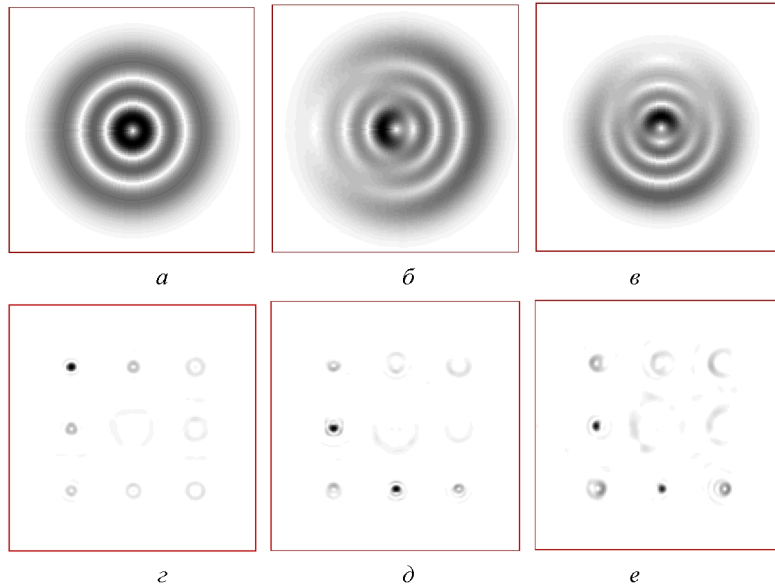


Рис. 27. Действие многомодового фильтра: интенсивность на входе Фурье-каскада, соответствующая пучкам Гаусса — Лагерра с модами (2, 1) (а) и (2, 2) + (3, 1) (б, в); интенсивность на выходе Фурье-каскада для пучка с модами (2, 1) (г) и (2, 2)+(3, 1) (д, е)

2.4. ДОЭ для разложения пучка по базису Цернике

Восстановление фазы светового поля — одна из основных задач обработки сигналов. Не имея возможности прямым способом измерять фазу нужно определять ее косвенно, через измерения интенсивности света. Например, волновой фронт может быть восстановлен по интерферограмме [50], по измерениям распределения интенсивности пространственного спектра [51]. Датчик волнового фронта Гартмана

— Шаке, состоящий из массива одинаковых узких отверстий или матрицы микролинз [52], также служит для восстановления фазы. Восстановить фазу также можно с использованием амплитудно-фазовых фильтров, формирующих порядки с ортогональным базисом [53, 54, 44, 48].

В данном разделе с помощью фазового пространственного фильтра анализируются aberrации волнового фронта, с использованием разложения амплитуды пучка по базису ортогональных круговых полиномов Цернике [45]. При этом рассматривается разложение по полиномам Цернике комплексной амплитуды, а не сами фазовые поля. В этом случае интенсивность, пропорциональная коэффициентам разложения поля, будет формироваться в пространственной плоскости Фурье-спектра. Далее, измеренные модули коэффициентов используются для вычисления аргумента комплексной амплитуды светового поля. Также рассматриваются итеративные алгоритмы расчета фазы фильтра Цернике и вычисления фазы комплексной амплитуды светового поля.

Существует полное множество ортогональных функций с угловыми гармониками в круге радиуса r_0 . Это круговые полиномы Цернике [45]:

$$\Psi_{nm}(r, \varphi) = A_n R_n^m(r) \exp(i m \varphi), \quad (88)$$

где

$$A_n = \sqrt{\frac{n+1}{\pi r_0^2}}, \quad (89)$$

$$R_n^m(r) = \sum_{p=0}^{(n-m)/2} (-1)^p (n-p)! \times \\ \times \left[p! \left(\frac{n+m}{2} - p \right)! \left(\frac{n-m}{2} - p \right)! \right]^{-1} \left(\frac{r}{r_0} \right)^{n-2p}, \quad (90)$$

$R_n^m(r)$ — радиальные полиномы Цернике:

$$R_n^{-m}(r) = R_n^m(r), \quad R_n^{\pm 1}(r_0) = 1,$$

$$R_{2k+1}^{2l}(r) = 0, \quad R_{2k}^{2l+1}(r) = 0, \quad |m| \leq n, \quad R_0^0(r) = 1,$$

(r, φ) — полярные координаты.

Разложение комплексной амплитуды $E(r, \varphi)$ в ряд по функциям (88) записывается в виде

$$E(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n C_{n,m} \Psi_{n,m}(r, \varphi), \quad (91)$$

$$\int_0^{r_0} R_n^m(r) R_p^m(r) r dr = \frac{r_0^2}{2(n+1)} \delta_{np}, \quad (92)$$

$$C_{n,m} = \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} E(r, \varphi) \Psi_{n,m}^*(r, \varphi) r dr d\varphi. \quad (93)$$

В плоскости пространственного Фурье-спектра, который может быть сформирован с помощью сферической линзы с фокусным расстоянием f , комплексная амплитуда светового поля $F(\rho, \theta)$ будет иметь вид

$$F(\rho, \theta) = \frac{k}{2\pi f} \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} E(r, \varphi) \exp\left[-i \frac{k}{f} r \rho \cos(\varphi - \theta)\right] r dr d\varphi, \quad (94)$$

где (ρ, θ) — полярные координаты. Основываясь на (91), можно представить разложение (94) по полиномам Цернике из (88) в виде

$$F(\rho, \theta) = \frac{k}{f} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (-i)^m C_{n,m} A_{n,m} e^{im\theta} \int_0^{r_0} R_n^m(r) J_m\left(\frac{k}{f} r \rho\right) r dr. \quad (95)$$

При выводе уравнения (95) использовалось интегральное представление функции Бесселя первого рода m -го порядка:

$$J_m(x) = \frac{i^{-m}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp[-ix \cos t + imt] dt.$$

Интеграл из уравнения (95) берется в явном виде [45]:

$$W_{n,m}(\rho) = \int_0^{r_0} R_n^m(r) J_m\left(\frac{k}{f} r \rho\right) r dr = (-1)^{(n-m)/2} r_0^2 \frac{J_{n+1}(k f^{-1} r_0 \rho)}{(k f^{-1} r_0 \rho)}. \quad (96)$$

Из (96) видно, что при $n > 0$ комплексная амплитуда в центральных точках $\rho = 0$ равна нулю:

$$W_{n,m}(\rho=0) = \begin{cases} 0, & n > 0, \\ \frac{1}{2}r_0^2, & n = 0. \end{cases} \quad (97)$$

Следовательно, при $n > 0$ распределение интенсивности в дифракционных порядках Фурье-плоскости будет иметь кольцевую структуру.

На рис. 28 показана оптическая схема (спектральный анализатор Цернике), демонстрирующая использование фазового фильтра Цернике для анализа волнового фронта с комплексной амплитудой $E(r, \varphi)$. Аналогично датчику волнового фронта Гартмана — Шаке [52], фильтр Цернике FZ устанавливается непосредственно в плоскости исследуемого волнового фронта. Сферическая линза L с фокусным расстоянием f устанавливается сразу за ним. В задней фокальной плоскости линзы L устанавливается матрица фотоприемников PA , сопряженная с компьютером PC .

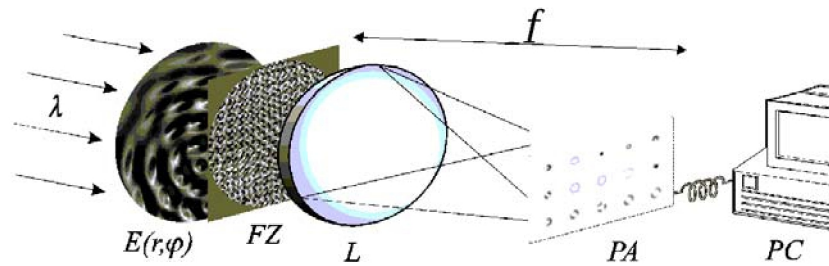


Рис. 28. Оптическая схема анализатора Цернике: FZ — фильтр Цернике, L — сферическая линза, PA — матрица фотоприемников, PC — компьютер

Чтобы пропускающая функция FZ была фазовой,

$$\tau(r, \varphi) = \exp[iS(r, \varphi)], \quad (98)$$

искать ее следует в виде

$$\tau(r, \varphi) = \sum_{n=0}^N \sum_{m=-n}^n \Psi_{n,m}^*(r, \varphi) \exp\left[i k f^{-1} r \rho_{n,m} \cos(\varphi - \theta_{n,m}) + v_{n,m}\right], \quad (99)$$

где $(\rho_{n,m}, \theta_{n,m})$ — компоненты векторов несущих пространственных частот в полярных координатах, $v_{n,m}$ — свободные параметры зада-

чи, которые подбираются так, чтобы уравнение (99) было точным равенством.

После того как интенсивность света, пропорциональная квадрату модуля коэффициентов разложения (91)

$$I_{nm} = |C_{nm}|^2, \quad (100)$$

измерена в дискретных точках Фурье-плоскости (рис. 28), нужно сделать дополнительные вычисления, чтобы найти фазу волнового фронта из (91):

$$Q(r, \varphi) = \arg E(r, \varphi). \quad (101)$$

Для этого можно использовать алгоритм, похожий на алгоритм уравнений (93) и (94). В этом случае оценка фазы на $(k+1)$ -ой итерации будет иметь вид

$$Q_{k+1}(r, \varphi) = \arg \left\{ \sum_{n=0}^N \sum_{m=-n}^n \sqrt{I_{n,m}} \Psi_{n,m}(r, \varphi) \exp[i v_{n,m}^{(k)}] \right\}, \quad (102)$$

где $v_{nm}^{(k)}$ — свободные параметры на k — й итерации, полученные из уравнения

$$v_{nm}^{(k)} = \arg \left\{ \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} \exp[i Q_k(r, \varphi)] \Psi_{nm}^*(r, \varphi) r dr d\varphi \right\}, \quad (103)$$

где $Q_k(r, \varphi)$ — оценка искомой фазы на k -ой итерации.

Так как aberrации волнового фронта, встречающиеся в оптических системах, описываются четными функциями по отношению к азимутальному углу φ [45], мы можем представить $E(r, \varphi)$ в виде

$$E(r, \varphi) = \exp \left\{ i \sum_{n=0}^N \sum_{m=-n}^n B_{nm} R_n^m(r) \cos(m\varphi) \right\}. \quad (104)$$

В связи с этим, вместо общего разложения в (91) следует использовать разложение по четным функциям

$$E(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n C_{n,m} \bar{\Psi}_{n,m}(r, \varphi), \quad (105)$$

$$\bar{\Psi}_{n,m}(r, \varphi) = \varepsilon_m \sqrt{\frac{n+1}{\pi r_0^2}} R_n^m(r) \cos(m\varphi), \quad (106)$$

где $\varepsilon_m = \{2, m \neq 0; 1, m = 0\}$.

Для малых aberrаций соотношение между коэффициентами разложения $B_{n,m}$ и $C_{n,m}$ линейное:

$$1 + i B_{00} = \frac{C_{0,0}}{\sqrt{\pi r_0^2}}, \quad i B_{nm} = \varepsilon_m \frac{C_{n,m}}{\sqrt{\pi r_0^2}}. \quad (107)$$

Заметим, что базисные функции (88) из-за нормировки (89) имеют размерность мм^{-1} , поэтому коэффициенты (107) имеют такую же размерность. Для произвольных aberrаций соотношение между $B_{n,m}$ и $C_{n,m}$ нелинейное, и после измерения модулей $|C_{n,m}|^2$ необходимо использовать алгоритм (102) и (103), чтобы получить фазу $Q(r, \varphi)$ из (101). После чего следует найти коэффициенты волновой aberrации B_{nm} , используя (104).

Заметим, что так как $R_0^0(r) = 1$, базис полиномов Цернике содержит единицу в качестве члена разложения. Поэтому если осветить фильтр Цернике плоской волной с амплитудой $E(r, \varphi) = \text{const}$, окажется, что только один коэффициент разложения (91) будет ненулевым:

$$|C_{0,0}|^2 \neq 0.$$

Из уравнения (96) также следует, что дифракционные порядки, соответствующие базисным функциям с различными номерами m , но одинаковыми номерами n , будут иметь похожие дифракционные картины (кольцевые структуры при $n > 0$) в Фурье-плоскости:

$$|W_{n,m}(\rho)| = r_0^2 \frac{|J_{n+1}(k f^{-1} r_0 \rho)|}{(k f^{-1} r_0 \rho)}. \quad (108)$$

Пример 6. Параметры моделирования были выбраны следующие: 256 пикселей по радиусу r и 256 пикселей по углу φ , $r_0 = 1 \text{ мм}$, $k = 10^4 \text{ мм}^{-1}$, $f = 100 \text{ мм}$. Был рассчитан 25-канальный фильтр [55], формирующий дифракционные порядки для базисных функций с номерами (n, m) : $m \leq 8$ и $n \leq 8$, распространяющиеся под некоторыми углами к оптической оси.

На рис. 29 показаны: (а) полутонная фаза фильтра Цернике (черный цвет соответствует значению фазы 0, а белый – 2π), (б) 25 дифракционных порядков, сформированных в частотной плоскости линзы (негатив), (в) соответствие номеров (n, m) дифракционным порядкам.

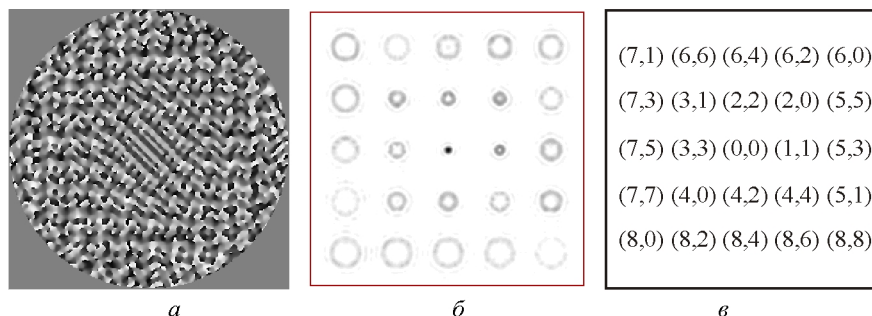


Рис. 29. Полутонная фаза фильтра Цернике (а), распределение интенсивности в частотной плоскости линзы (б), соответствие номеров (n, m) дифракционным порядкам (в)

Предполагается, что фильтр освещался плоской волной. В этом случае, анализатор «расщепляет» падающий пучок на 25 пучков, имеющих примерно одинаковые энергии. На эти дифракционные порядки приходится более 80% всей энергии пучка. Из рис. 29б видно, что интенсивность в центральных точках всех порядков Фурье-плоскости, кроме нулевого порядка $(0, 0)$, нулевая. Это означает, что освещающий волновой фронт не имеет aberrаций.

На рис. 30 представлен результат действия того же самого 25-канального фильтра Цернике, освещенного пучком, состоящим из трех мод с одинаковыми весами и номерами (n, m) : $(2, 0) + (5, 3) + (7, 7)$. На рис. 30 показаны: (а) интенсивность освещающего пучка, (б) дифракционная картина в Фурье-плоскости.

Сравнивая со схемой распределения номеров мод по порядкам (рис. 29в) из рис. 30б видно, что интенсивность ненулевая (черные точки на рис. 30б) в центральных точках дифракционных порядков с номерами $(2, 0)$, $(5, 3)$, и $(7, 7)$. В таблице 5 приведены соответствующие

щие усредненные значения в окрестности центральных точек для всех порядков (размер окрестности 3×3 отсчета).

Как видно из таблицы 5, коэффициенты, имевшие одинаковые веса в пучке, поданном на вход анализатора Цернике, на выходе имеют различные значения:

$$|C_{2,0}|^2 = 0,977, \quad |C_{5,3}|^2 = 1,000, \quad |C_{7,7}|^2 = 0,683.$$

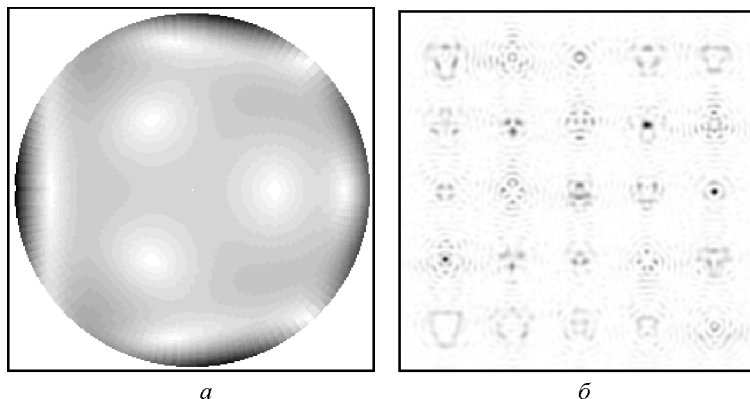


Рис. 30. Действие фильтра Цернике (рис. 29а): интенсивность освещающего пучка (а), дифракционная картина в Фурье-плоскости (б)

Кроме того, интенсивность в других порядках не является нулевой. Это связано с тем, что при стремлении получить фазовый фильтр, амплитуда в правой части уравнения (99) заменяется постоянным значением. Таким образом можно видеть, что квадраты модулей коэффициентов на выходе анализатора Цернике измерены с относительной ошибкой около 20%. Ошибку можно понизить двумя способами: улучшение расчета фазы фильтра Цернике и уменьшение величины окрестности (3×3 отсчетов) центров дифракционных порядков, по которым измеряются модули коэффициентов.

Если в задаче *распознавания изображений* достаточно вычисления модулей коэффициентов разложения по некоторому ортогональному базису, то для однозначного *восстановления комплексной амплитуды* этого недостаточно. Надо также знать фазы коэффициентов разложения.

Таблица 5. Усредненные значения интенсивности в окрестности центральных точек для порядков в Фурье-плоскости при освещении фильтра Цернике (рис. 29а) пучком, состоящим из трех мод $(2, 0)+(5, 3)+(7, 7)$

$(7, 1)$ 0,011	$(6, 6)$ 0,028	$(6, 4)$ 0,005	$(6, 2)$ 0,006	$(6, 0)$ 0,035
$(7, 3)$ 0,103	$(3, 1)$ 0,013	$(2, 2)$ 0,018	$(2, 0)$ 0,977	$(5, 5)$ 0,008
$(7, 5)$ 0,004	$(3, 3)$ 0,007	$(0, 0)$ 0,059	$(1, 1)$ 0,003	$(5, 3)$ 1,000
$(7, 7)$ 0,683	$(4, 0)$ 0,056	$(4, 2)$ 0,000	$(4, 4)$ 0,001	$(5, 1)$ 0,001
$(8, 0)$ 0,004	$(8, 2)$ 0,014	$(8, 4)$ 0,018	$(8, 6)$ 0,006	$(8, 8)$ 0,026

Фазы коэффициентов $\phi_{n,m} = \arg(C_{n,m})$ могут быть восстановлены, если добавить в фильтр (99) члены в виде линейных комбинаций соседних базисных функций [54]:

$$\begin{aligned}
 s_{n,m}(r, \varphi) &= \left\{ \Psi_{n,m}^*(r, \varphi) + \Psi_{n',m'}^*(r, \varphi) \right\} \times \\
 &\times \exp \left[i k f^{-1} r \rho_{n,m}'' \cos(\varphi - \theta'_{n,m}) + v'_{n,m} \right], \\
 p_{n,m}(r, \varphi) &= \left\{ \Psi_{n,m}^*(r, \varphi) + i \Psi_{n',m'}^*(r, \varphi) \right\} \times \\
 &\times \exp \left[i k f^{-1} r \rho_{n,m}'' \cos(\varphi - \theta''_{n,m}) + v''_{n,m} \right].
 \end{aligned} \tag{109}$$

В этом случае интенсивность света в дополнительных каналах, соответствующих точкам в Фурье-спектре с пространственными частотами $(\rho'_{n,m}, \theta'_{n,m})$ и $(\rho''_{n,m}, \theta''_{n,m})$, будет следующей:

$$\begin{aligned}
 S_{n,m} &= |C_{n,m}|^2 + |C_{n',m'}|^2 + 2|C_{n,m}||C_{n',m'}| \cos(\phi_{n',m'} - \phi_{nm}), \\
 P_{n,m} &= |C_{n,m}|^2 + |C_{n',m'}|^2 + 2|C_{n,m}||C_{n',m'}| \sin(\phi_{n',m'} - \phi_{nm}),
 \end{aligned} \tag{110}$$

что позволяет найти фазы $\phi_{n,m}$, полагая, например, $\phi_{0,0} = 0$.

Рекурсивное соотношение для искомым фаз может быть записано в форме:

$$\phi_{n',m'} - \phi_{n,m} = \text{tg}^{-1} \left(\frac{P_{n,m} - I_{n,m} - I_{n',m'}}{S_{n,m} - I_{n,m} - I_{n',m'}} \right). \quad (111)$$

Таким образом, рассматриваемый оптический метод позволяет находить комплексные коэффициенты разложения волнового фронта по ортогональному базису и восстанавливать волновой фронт.

Пример 7. Был рассчитан 25-канальный фильтр Цернике, формирующий моды в различных дифракционных порядках с номерами (n, m) : $n \leq 4$ и $m \leq 4$ — всего 9 и их линейные комбинации из уравнения (109) — всего 8+8.

На рис. 31 показаны: полутоновая амплитуда (а) и фаза (б) фильтра Цернике и распределение мод с номерами (n, m) и их линейных комбинаций между порядками (в).

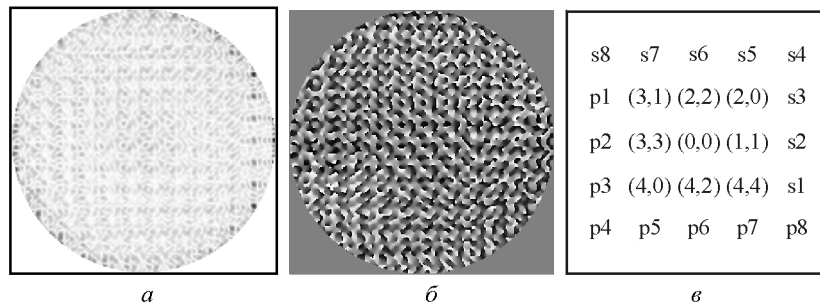


Рис. 31. Полутоновая амплитуда (а) и фаза (б) фильтра Цернике и распределение мод с номерами (n, m) и их линейных комбинаций между порядками (в)

На рис. 32 представлен результат действия такого 25-канального фильтра Цернике, освещенного пучком, состоящим из трех мод с коэффициентами $C_{n,m}$: $C_{1,1} = \exp(i0)$, $C_{3,3} = \exp(i\pi/2)$, $C_{4,2} = \exp(i\pi)$. На рис. 32 показаны: интенсивность анализируемого пучка (а), дифракционная картина в Фурье-плоскости для фазового фильтра (б), интенсивность, восстановленная с помощью амплитудно-фазового фильтра (в) и интенсивность, восстановленная с помощью фазового фильтра (г).

Из этого примера видно, что для распознавания изображений, когда достаточно измерения модулей коэффициентов разложения, можно

использовать чисто фазовый фильтр (ошибка в измерении модулей коэффициентов разложения менее 9%). При *восстановлении полной информации о световом поле* требуется знать также фазы коэффициентов разложения. В этом случае следует использовать амплитудно-фазовый фильтр.

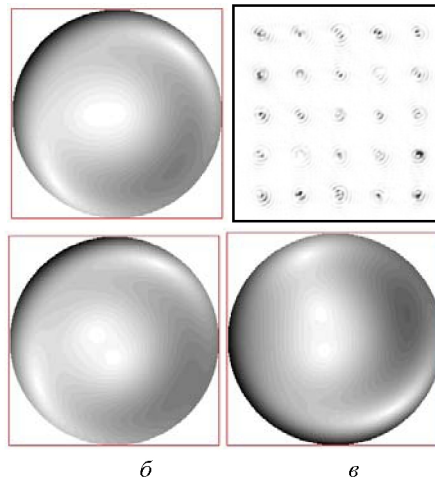


Рис. 73. Интенсивность анализируемого пучка (а), дифракционная картина в Фурье-плоскости для чисто фазового фильтра Цернике, представленного на рис. 31а,б (б), световое поле, восстановленное с помощью амплитудно-фазового фильтра (в) и световое поле, восстановленное с помощью чисто фазового фильтра (г)

Таблица 6. Результаты восстановления комплексных коэффициентов амплитудно-фазовым и чисто фазовым фильтрами.

	$ C_{1,1} ^2$	$ C_{3,3} ^2$	$ C_{4,2} ^2$	ошибка	$\phi_{3,3} - \phi_{1,1}$	$\phi_{4,2} - \phi_{3,3}$
исходные коэффициенты	1	1	1		1,57	1,57
Восстановленные с помощью амплитудно-фазового фильтра	0,272	0,274	0,279	3,1%	1,46	1,54
Восстановленные с помощью фазового фильтра	12,12	14,83	14,59	8,6%	0,95	1,53

3. ОПТИЧЕСКОЕ ПОСТРОЕНИЕ ПОЛЯ НАПРАВЛЕНИЙ И ПОЛЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЧАСТОТ

В соответствии с определением [56] полем направлений называется геометрическая интерпретация множества линейных элементов, соответствующих обыкновенному дифференциальному уравнению, которое в случае двух переменных имеет следующий вид [57]:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \quad (112)$$

Линейным элементом называется набор чисел $x, y, f(x, y)$, который можно представить себе как совокупность координат точки $(x, y) \in G \subset \mathbf{R}^2$ и соответствующего ей направления с направляющими косинусами

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1+f^2(x, y)}}, \frac{f(x, y)}{\sqrt{1+f^2(x, y)}} \right),$$

которое отображается отрезком малой длины, проходящим через эту точку параллельно вектору $(1, f(x, y))$.

Поле направлений может быть вычислено для изображений с ярко выраженным контурным характером. Рассмотрим произвольную функцию распределения интенсивности света в плоскости изображения $I(x, y)$, которую будем считать гладкой, т.е. имеющей непрерывные частные производные первого порядка. Рассмотрим множество кривых на плоскости (x, y) , соответствующих постоянным значениям интенсивности изображения:

$$I(x, y) = I_0. \quad (113)$$

Легко видеть, что множество направлений касательных к линиям (113), в соответствии с определением (112), образует поле направлений при

$$f(x, y) = -\frac{\partial I(x, y)/\partial x}{\partial I(x, y)/\partial y}.$$

Таким образом, классическое определение поля направлений приводит к функции $\psi(x, y)$, которая имеет физический смысл угла наклона касательной к линии постоянных значений интенсивности изображения и задается следующим уравнением:

$$\operatorname{tg} \psi(x, y) = -\frac{\partial I(x, y) / \partial x}{\partial I(x, y) / \partial y}, \quad 0 \leq \psi(x, y) < \pi. \quad (114)$$

Формула вычисления поля направлений (114) может быть непосредственно применена к классу изображений со структурной избыточностью [57], функция интенсивности которых должна обладать достаточной гладкостью для возможности ее дифференцирования. Таким классом изображений являются, в частности, интерферограммы, для которых интуитивное понятие поля направлений связывается с направлением интерференционных полос и совпадает с определением (114).

В произвольной локальной области достаточно малых размеров (окно на рис. 33) интенсивность таких изображений может быть описана гармонической функцией

$$I(x, y) = A \cos[\omega_x x + \omega_y y] + B, \quad (115)$$

где $\omega_x = 2\pi/T_x$, $\omega_y = 2\pi/T_y$ — локальные пространственные частоты, T_x , T_y — периоды полос контурного изображения.

Впервые идея оптического вычисления поля направлений была предложена в [34]. Если интенсивность в некоторой локальной области Ω , которая задается функцией

$$q(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in \Omega, \\ 0, & (x, y) \notin \Omega, \end{cases}$$

аппроксимируется косинусной решеткой (115), то ее можно представить в виде двух экспонент:

$$\cos(\omega_x x + \omega_y y) = \frac{1}{2} \left\{ \exp[i(\omega_x x + \omega_y y)] + \exp[-i(\omega_x x + \omega_y y)] \right\}.$$

Тогда преобразование Фурье от функции интенсивности имеет вид

$$A \cos(\omega_x x + \omega_y y) + B \xrightarrow{\mathbf{F}} \frac{A}{2} \left\{ \delta(\xi - \omega_x, \eta - \omega_y) + \delta(\xi + \omega_x, \eta + \omega_y) \right\} + B \delta(\xi, \eta), \quad (116)$$

где (x, y) и (ξ, η) — декартовы координаты во входной и частотных плоскостях, \mathbf{F} — двумерное преобразование Фурье, $\delta(x, y)$ — функция Дирака.

Таким образом, решетка дает δ -импульс в центре Фурье-плоскости и два δ -импульса, расположенные симметрично на линии, проходящей через центр Фурье-плоскости под углом θ к оси x :

$$\operatorname{tg} \theta = -\frac{\omega_y}{\omega_x}.$$

Тогда θ и угол направления несущей ϕ (см. рис 33) связаны следующим образом:

$$\theta = \phi + \frac{\pi}{2}.$$

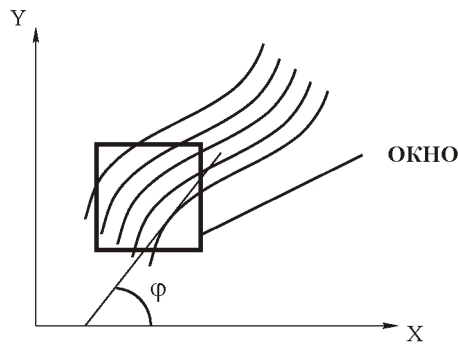


Рис. 33. Угол наклона линии в контурном изображении.

Если решетка ограничена некоторой областью $q(x, y)$, то в частотной плоскости получается свертка Фурье-образа от функции, описывающей эту область $Q(\xi, \eta)$, с δ -импульсами.

Известно, что свертка δ -функции с любой функцией дает ту же функцию с соответствующим смещением:

$$\delta(\xi - \omega_x, \eta - \omega_y) \otimes Q(\xi, \eta) \xrightarrow{F} q(-x, -y), \quad (117)$$

где \otimes — обозначение свертки. То есть, в выходной плоскости отличная от нуля интенсивность будет только в области, соответствующей решетке с углом наклона штрихов ϕ . Этот эффект имеет место независимо от частоты полос, так как им будут соответствовать δ -функции, находящиеся на одном луче — ближе или дальше от центра (нулевой пространственной частоты). Следовательно, «вырезая» сегмент вдоль направления $\theta = \text{mod}_\pi \left(\phi + \frac{\pi}{2} \right)$, «захватываются» спектры от всех решеток с направлением штрихов ϕ независимо от частоты штрихов и областей, их ограничивающих.

Вращая щель (рис. 34а) и «вырезая» сегменты в верхней части Фурье-плоскости, можно просканировать все направления линий, имеющиеся на изображении в диапазоне $[0, \pi)$. Наличие механически подвижного элемента — вращающейся щели усложняет реализацию этого метода и увеличивает время формирования поля направлений. Целесообразно исключить подвижный элемент, как это предложено в [58]. Для этого попеременно вводятся в схему два пространственных фильтра и осуществляются простые вычисления.

1. В Фурье-плоскость помещается амплитудный фильтр, изображенный на рис. 34в, функция пропускания $t(\phi)$ которого имеет вид

$$t(\phi) = \begin{cases} \sum_{l=0}^{N-1} \text{rect} \left(\phi + \frac{\pi}{2N} - \frac{\pi}{N} l \right) \sqrt{\left[\frac{1}{2} + \text{sgn} \left(l - \frac{N-1}{2} \right) \frac{l}{N} \right]}, \\ -\frac{\pi}{2N} < \phi < \pi - \frac{\pi}{2N}, \\ 0, & \pi - \frac{\pi}{2N} < \phi < 2\pi - \frac{\pi}{2N}, \end{cases} \quad (118)$$

где

$$\text{rect}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1), \\ 0, & x \notin [0, 1), \end{cases}$$

где ϕ — полярный угол в полярной системе координат (ρ, ϕ) в частотной плоскости:

$$\begin{cases} \xi = \rho \cos \phi, \\ \eta = \rho \sin \phi, \end{cases} \quad (119)$$

N — количество выделяемых направлений. Затем с помощью линзы делается еще одно Фурье-преобразование; распределение интенсивности в выходной плоскости через телекамеру вводится в компьютер в виде массива чисел.

2. В Фурье-плоскость помещается амплитудный фильтр, изображенный на рис. 34б, функция пропускания которого имеет вид

$$t(\phi) = \begin{cases} 1, & -\frac{\pi}{2N} < \phi < \pi - \frac{\pi}{2N}, \\ 0, & \pi - \frac{\pi}{2N} < \phi < 2\pi - \frac{\pi}{2N}, \end{cases} \quad (120)$$

и вновь выполняется Фурье-преобразование; интенсивность в выходной плоскости запоминается в памяти компьютера в виде массива чисел.

3. Интенсивность в выходной плоскости, получаемая после первого фильтра, поточечно делится на интенсивность, получаемую после второго фильтра. Результатом этого деления будет аппроксимация поля направлений.

Наличие процедуры деления в методе налагает жесткие требования к юстировке оптической системы при проведении натурального эксперимента. Поэтому данный метод мало пригоден для практического использования.

В [59] был предложен метод построения поля направлений с использованием пространственного фильтра из бинарных дифракционных решеток. Суть метода заключается в следующем.

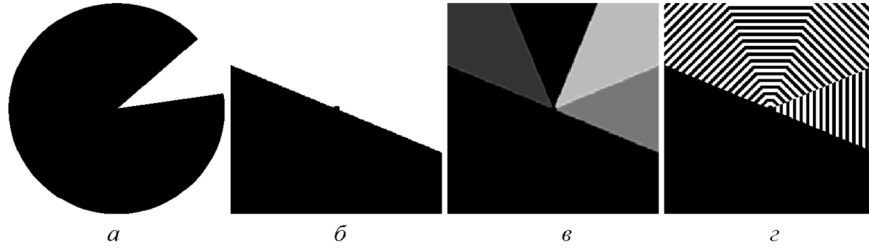


Рис. 34. Пространственные фильтры, используемые для оптического вычисления поля направлений

В частотной плоскости установки находится оптический фильтр, который представляет собой набор амплитудных или фазовых секторных дифракционных решеток (рис. 34г). Если это набор амплитудных дифракционных решеток, то его функция пропускания имеет вид

$$t(\rho, \varphi) = \sum_{l=0}^{N-1} \text{rect} \left(\varphi + \frac{\pi}{2N} - \frac{\pi}{N} l \right) \sum_{n=0}^M \text{rect} \left[2 \frac{\rho \cos \left(\varphi - \frac{\pi}{N} l \right)}{T} - nT \right]. \quad (121)$$

Если это набор фазовых решеток, то его функция пропускания имеет вид

$$t(\rho, \varphi) = \exp \left(i \sum_{l=0}^{N-1} \text{rect} \left(\varphi + \frac{\pi}{2N} - \frac{\pi}{N} l \right) \times \right. \\ \left. \times \sum_{n=0}^M \text{rect} \left[2 \frac{\rho \cos \left(\varphi - \frac{\pi}{N} l \right)}{T} - nT \right] \right). \quad (122)$$

В выходной плоскости Фурье-коррелятора с таким фильтром в 1 и -1 порядках дифракции решеток фильтра получается набор изображений (см. рис. 57), количество которых равно удвоенному числу направлений. Будем в дальнейшем называть их «парциальными» изображениями. В каждом из этих парциальных изображений отличная от нуля интенсивность должна наблюдаться только в тех местах, где линии контурного изображения имели соответствующее направление, но так

как реальное изображение помимо основных полос содержит еще шум, то отличная от нуля интенсивность наблюдается на всей площади парциального изображения. Изображения с помощью телекамеры вводятся в компьютер в виде массива чисел размерностью 512×512 , которые могут принимать значения от 0 до 255. Чтобы выделить в этом массиве парциальные изображения, предварительно необходимо определить их положение; для этого во входной плоскости Фурье-коррелятора размещается точечная диафрагма, а в выходной плоскости регистрируется набор светлых точек, координаты которых соответствуют координатам центров парциальных изображений. Размер парциальных изображений известен, он определяется формулой

$$S_c = \frac{f_2}{f_1} S, \quad (123)$$

где S_c — размер парциального изображения, S — размер исходного контурного изображения на входе, f_1 — фокусное расстояние первого плеча Фурье-коррелятора, f_2 — фокусное расстояние второго плеча Фурье-коррелятора. Координаты точки в общем массиве (l, j) , координаты точки в k -м парциальном изображении (l'_k, j'_k) . Они связаны между собой формулами

$$l'_k = l - L_k + \frac{S_c}{2\Delta l}, \quad (124)$$

$$j'_k = j - J_k + \frac{S_c}{2\Delta l}, \quad (125)$$

где (L_k, J_k) — координаты центра k -го парциального изображения, Δl — размер минимального чувствительного элемента телекамеры.

Далее парциальные изображения обрабатываются в компьютере. Чтобы выделить на парциальных изображениях зоны с одинаковым направлением, проводится процедура бинаризации. Каждое парциальное изображение сравнивается поточечно с другими, и если интенсивность в данной точке парциального изображения максимальна по отношению к интенсивностям соответствующих точек других парциальных изображений, то в данной точке этого парциального изображения значение интенсивности принимается равным 1, если это

условие не соблюдается, то значение интенсивности принимается равным 0. Поле направлений получается из набора парциальных изображений простым сложением с умножением на коэффициент равный соответствующим значениям углов наклона сектора решетки.

Поле направлений, сформированное оптическими методами, формируется с некоторой погрешностью, которая может сильно изменяться с изменением параметров оптической установки. В частности, на качество поля направлений влияет количество выделяемых направлений, соотношение между периодом дифракционной решетки и шириной спектра исходного изображения, качество линий дифракционной решетки. Для выявления зависимости точности построения поля направлений, а также для определения оптимальных параметров оптической установки был проведен ряд вычислительных экспериментов. В этих экспериментах использовался набор из 10 тестовых изображений, два из которых изображены на рис. 35а,в; поля направлений которых можно вычислить аналитически (рис. 35б,г). Период полос на тестовых изображениях менялся от $1/50$ до $1/10$ размера изображения. Такой подбор был использован из соображений практического применения оптического поля направлений для идентификации дактилограмм. Именно в этом диапазоне лежат значения периодов полос дактилограмм. Изображения были записаны в числовые массивы размерностью 512×512 с 256 уровнями квантования. Затем поля направлений вычислялись численным моделированием работы оптической установки и сравнивались с полями, полученными аналитически. С помощью алгоритма быстрого преобразования Фурье (БПФ) вычислялся Фурье-образ исходного изображения, затем Фурье-образ умножался на функцию пропускания фазового пространственного фильтра (131), которая была записана в бинарном числовом массиве размерностью 512×512 . Затем с помощью алгоритма БПФ осуществлялось второе преобразование Фурье, результат которого фиксировался в цифровом массиве. Далее по методике, описанной выше, выделялись парциальные изображения, и формировалось поле направлений. В качестве критерия оценки использовалась величина

среднеквадратичного отклонения полей направлений сформированных в вычислительном эксперименте от полей направлений вычисленных аналитически. Обозначим эту величину буквой ε .

Согласно [60] ε угловой величины определяется формулой

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{2}{n^2} \sum_{i,j=1}^n \sin^2 \frac{\phi_{ij} - \phi_{ij}^a}{2}}, \quad (126)$$

где n — размер массива данных, в котором записано поле направлений, ϕ_{ij} — направление в точке (i,j) полученное оптическим методом, ϕ_{ij}^a — направление в точке (i,j) вычисленное аналитически.

В этом эксперименте в фильтре, изображенном на рис. 34в, менялось количество секторов от 2 до 16, с каждым из этих фильтров вычислялось поле направлений для 10 тестовых изображений. На рис. 36а,б,в,г изображены соответственно поля направлений, которые были построены с выделением 2,4,8,16 направлений для изображения на рис. 35а.

На рис. 37 изображен график зависимости погрешности вычисления поля направлений ε от количества выделяемых направлений n .

Как видно из графика, существует минимум погрешности вычисления при $n = 7 — 8$. При увеличении n среднеквадратичное отклонение сначала уменьшается в результате увеличения числа выделяемых направлений, но затем в результате того, что в спектре «вырезаются» все более узкие сектора, форма локальных областей одинакового направления начинает все более искажаться, из-за влияния стыков дифракционных решеток, и ε возрастает.

В эксперименте у фильтра, изображенного на рис 34в, менялся период дифракционных решеток; с каждым из этих фильтров вычислялось поле направлений от 10 тестовых изображений. На рис. 38 изображен график зависимости ошибки ε вычисления поля направлений от отношения периода дифракционной решетки пространственного фильтра d к ширине пространственного спектра T контурного изображения.

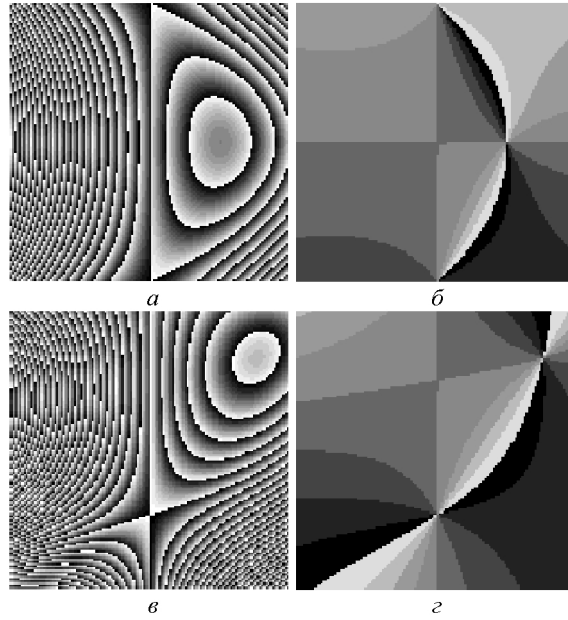


Рис. 35. Изображения и вычисленные аналитически их поля направлений

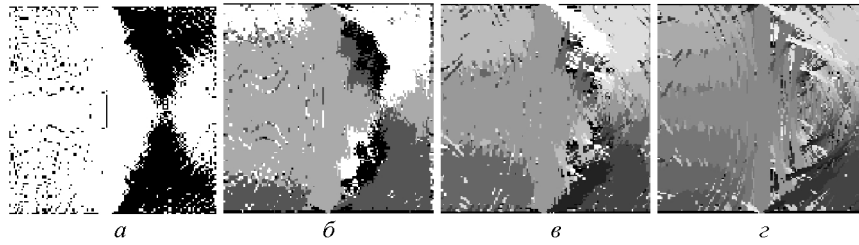


Рис. 36. Поля направлений, которые были построены для изображения показанного на рис. 35а в ходе вычислительного эксперимента с выделением: 2 (а), 4 (б), 8 (в) и 16 (г) направлений

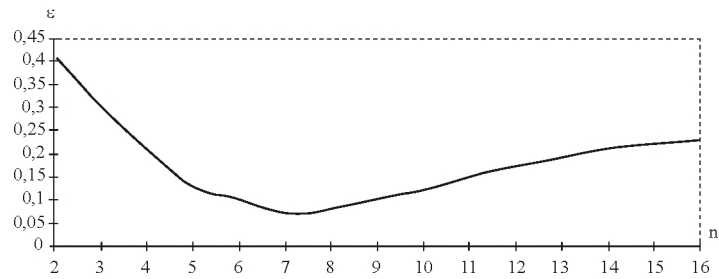


Рис. 37. Зависимость ϵ поля направлений от количества выделяемых направлений n

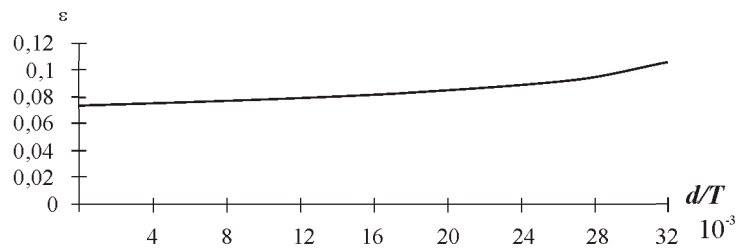


Рис. 38. Зависимость ε поля направлений от отношения периода дифракционной решетки пространственного фильтра d к ширине пространственного спектра T контурного изображения

Под шириной пространственного спектра, в данном случае, понимается минимальный диаметр круга с центром на оптической оси системы, который полностью покрывает области в частотной плоскости, где интенсивность отлична от нуля. Т.к. в эксперименте использовалось изображение, квантованное по 256 уровням, то условие отличия интенсивности от нуля заменялось на условие превышения интенсивности $1/256$ от максимальной интенсивности в спектре.

Видно, что чем меньше отношение d/T , тем меньше погрешность вычисления поля направлений для данного метода вычисления. Конечно при этом, существует ограничение на уменьшение периода дифракционной решетки, вызванное появлением эффектов квантования и дискретизации при синтезе пространственного фильтра, которые экспериментально не исследованы. Также уменьшение периода решетки ограничено технологическими возможностями, а расширение спектра ограничено геометрическими размерами установки. Поэтому в оптической установке отношение периода дифракционной решетки d к ширине спектра T следует выбрать, исходя из возможностей технической реализации в пределах от 0,0015 до 0,003.

Точность вычисления поля направлений оптическими методами может сильно изменяться не только с изменением параметров оптической установки, но и с изменением параметров самого изображения. В частности на качество поля направлений влияет отношение сигнал/шум, а также отношение периода полос на изображении к размеру зоны для одного направления. Для выявления множества изобра-

жений, для которого поле направлений может быть вычислено оптическим методом, был проведен ряд экспериментов, по результатам которых были определены интервалы изменения параметров изображений.

При описании исходного изображения использовалась аппроксимация (124). Но большинство реальных контурных изображений имеют довольно существенные отклонения от этой аппроксимации, которые можно считать результатом действия шума. В качестве исходных были использованы 10 тестовых изображений. Каждое из 10 тестовых изображений зашумлялось, причем отношение сигнал/шум изменялось от 11 до 1. Затем был проведен вычислительный эксперимент по определению ошибки оптического формирования поля направлений зашумленных изображений. На рис. 39а,в,д показаны изображения с отношением сигнал/шум 10, 2, 1 соответственно; на рис. 39б,г,е их поля направлений.

Из рисунка 39 видно, что шум в изображении слабо влияет на структуру поля направлений. Шум генерировался с помощью датчика псевдослучайных чисел.

Т.к. ошибка вычисления, очевидно, должна изменяться не только от отношения сигнал/шум, но и от количества выделяемых направлений в изображении, исследования устойчивости метода вычисления поля направлений к шуму были проведены для случаев, когда количество выделяемых направлений изменялось от 2 до 16. На рис. 40 изображены графики зависимости ошибки вычисления поля направлений ε от отношения сигнал/шум для $n = 4, 8, 16$. В дальнейшем будем обозначать отношение сигнал/шум S/N .

Из рис. 40 видно, что при $S/N > 4$ среднеквадратичное отклонение поля направлений практически постоянно при фиксированном n и почти не увеличивается, по сравнению с среднеквадратичным отклонением поля направлений от незашумленного изображения. При $S/N < 4$ среднеквадратичное отклонение начинает резко возрастать и в среднем для данного набора тестовых изображений при $S/N = 1$ достигает 0,35 (при $n = 8$).

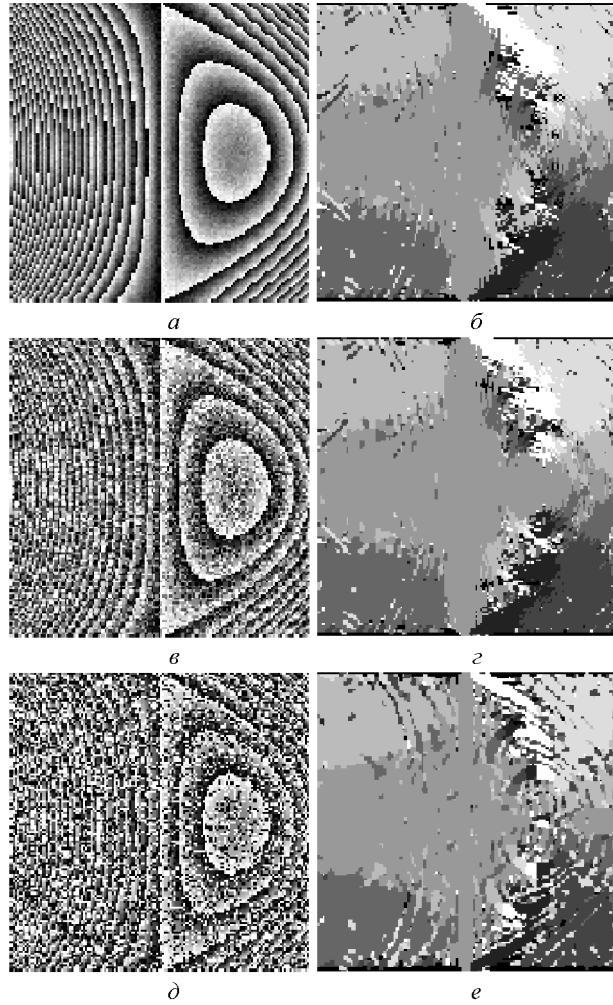


Рис. 39. Зашумленные изображения и их поля направлений, построенные с выделением 8 направлений: (а) изображение — сигнал/шум = 10, (б) его поле направлений, (в) изображение — сигнал/шум = 2, (г) его поле направлений, (д) изображение — сигнал/шум = 1, (е) его поле направлений

Ошибка вычисления поля направлений, очевидно должна увеличиваться с увеличением периода полос и с уменьшением размера зон одинаковых направлений. Это связано с тем, что происходит «размазывание» Фурье-спектра зоны изображения одного направления так,

что спектр попадает сразу в несколько угловых секторов. Для иллюстрации этого свойства проведем простой эксперимент. На рис. 41а показано изображение, представляющее собой набор горизонтальных полос ограниченного квадратом. На рис. 41б представлен результат Фурье-преобразования от этого изображения и сектор, который «вырезается» из спектра в методе для выделения 4-х направлений [59].

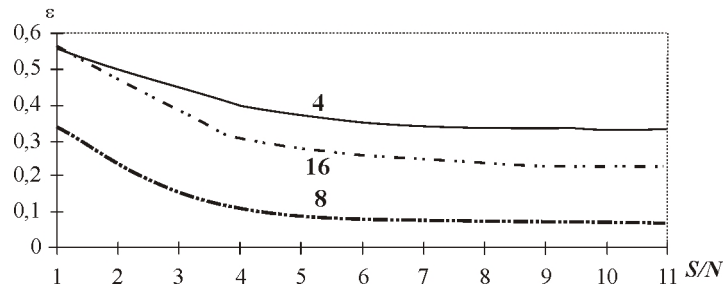


Рис. 40. Графики зависимости ошибки вычисления поля направлений ϵ от отношения S/N для $n = 4, 8, 16$

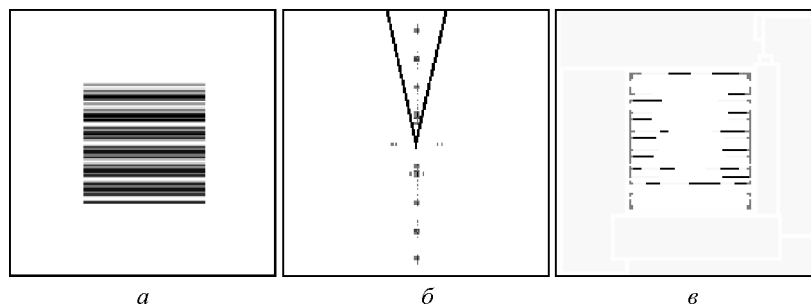


Рис. 41 Контурное изображение (а), результат секторной сегментации его пространственного спектра (б) и поле направлений (в)

Видно, что не весь спектр попадает в сектор, в результате чего в поле направлений (рис. 41в) появляются полосы, с другими направлениями. Очевидно, что чем меньше размер зоны одинакового направления, тем более широким будет ее спектр, и тем большая его часть не попадет в сектор, и тем больше будут искажения в поле направлений. Также, если период полос изображения будет увеличиваться, то спектр будет ближе к оптической оси и меньшая его часть будет попадать в тот же сектор. В результате увеличатся искажения

формы локальной области одного направления в поле направлений. Под зоной одного направления здесь понимается область изображения, в которой направление полос принадлежит интервалу $\varphi \in \left(\varphi_i - \frac{\pi}{2n}, \varphi_i + \frac{\pi}{2n} \right)$, где φ_i — выделенное направление, n — количество выделяемых направлений. В качестве характерного параметра, определяющего точность вычисления поля направлений, будет выступать отношение периода полос к размеру локальной области одного направления. В дальнейшем будем обозначать это отношение буквой Q .

На рис. 42 представлен пример одного из 10 тестовых изображений, для которых определялась зависимость ошибки ε от отношения Q . В экспериментах, как в численном, так и в натурном, выделялось 4 направления. Для каждой зоны одного направления ε считалось отдельно.

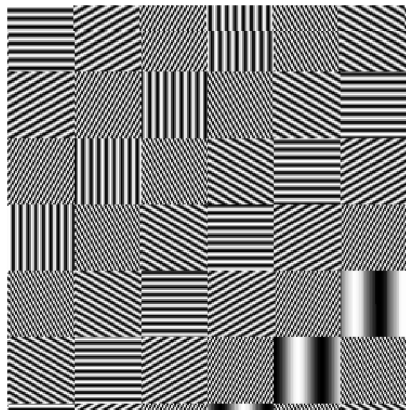


Рис. 42. Пример тестового изображения

На рис. 43 представлен график зависимости ошибки вычисления поля направлений ε от Q . Кривая 1 соответствует численному эксперименту, кривая 2 соответствует натурному эксперименту. В натурном эксперименте тестовые изображения с помощью лазерного принтера выводились на прозрачную пленку. Для каждого из изображений, с помощью оптической установки, которая подробно описана в разделе 3.1, формировалось поле направлений.

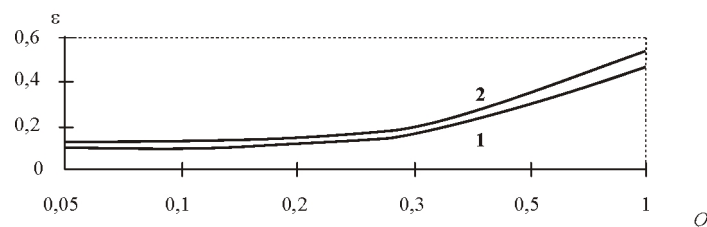


Рис. 43. График зависимости среднеквадратичного отклонения поля направлений, полученного в численном эксперименте (1) и полученного в натурном эксперименте (2), от отношения периода полос к размеру зоны одного направления

Как видно из графика для вычисления поля направлений с погрешностью меньше 10% необходимо, чтобы значение Q не превышало 0,2. Небольшое различие между графиками объясняется техническими погрешностями натурного эксперимента: неточное совмещение парциальных изображений, погрешности в изготовлении дифракционных решеток, небольшая расфокусировка парциальных изображений.

3.1. Оптическое распознавание дактилограмм

Для идентификации дактилограмм цифровыми методами [61] требуются значительные затраты машинного времени. Применение оптической предобработки позволяет, сократив время, достичь высокой степени сжатия информации для последующей цифровой обработки.

Известные оптико-цифровые системы [62, 63, 64, 65 — 68] идентификации дактилограмм основаны либо на корреляционном анализе, либо на анализе пространственного спектра. В работе [62] описаны два варианта (когерентный и некогерентный) оптико-цифровой системы идентификации дактилограмм, основанные на оптическом построении пространственного Фурье-спектра отпечатка пальца и регистрации его с помощью сегментно-кольцевого фотоприемника. В результате этого в компьютере вместо матрицы отсчетов изображения отпечатка пальца находится вектор признаков из 64 компонент (фотоприемник разделен на 32 угловых сегмента и 32 полукольцевых).

Существуют гибридные оптико-цифровые устройства, в которых распознавание контурных изображений основано на оптическом выполнении преобразования Хоу — Радона [69, 70]; на использовании совместной корреляции двух изображений с помощью фоторефрактивных кристаллов [71]. В некоторых существующих системах отпечатки пальцев вводятся в компьютер в реальном времени с помощью призмы, используемой в режиме полного внутреннего отражения [71, 72, 73]. Быстрый оптический ввод отпечатка пальца в память компьютера и оптическая предобработка изображения существенно ускоряют процесс распознавания, и в этом преимущество гибридных систем перед цифровыми.

Однако существующие гибридные системы идентификации дактилограмм несвободны от недостатков. Метод анализа дактилограмм по Фурье-спектру [62] будет интерпретировать изображения, отличающиеся перестановкой фрагментов, как одинаковые. Кроме того, дактилоскопические изображения являются структурно избыточными. Т.е. представляют собой совокупность линий с характерным периодом, который составляет 0,5 — 0,7 мм. Пространственный спектр таких изображений имеет специфику: он преимущественно расположен в узкой полосе частот в окрестности несущей пространственной частоты. Именно несущая частота воспринимается визуально как множество контурных линий и является основным фактором структурной избыточности дактилоскопического изображения. В связи с этим, наличие 32 полукольцевых фотоприемников в Фурье-спектре, измеряющих радиальное распределение интенсивности света [62], информационно избыточно.

Анализ и классификация структуры полос дактилограммы (папиллярного узора) с помощью оптической нейронной сети, предназначенной для выделения участков прямых линий на изображении методом преобразования Радона [70], или с помощью подсчета числа Галтона (число бифуркаций и центров полос дактилограммы) [69] являются операциями со значительными затратами машинного времени. Это связано с наличием высокой пространственной несущей час-

тоты на дактилограмме, которая затрудняет поэлементную обработку изображения. В [74] предложен метод оптического построения поля направлений структурно избыточных изображений. Этот метод позволяет эффективно сжимать информацию, содержащуюся в изображениях с несущей пространственной частотой. Он основан, фактически, на замене участка изображения одним числом, равным среднему углу наклона полос на данном участке. В [76] описан численный эксперимент по идентификации дактилограмм (для 10 различных пальцев) с помощью полей направлений (выделялось 8 направлений), который продемонстрировал высокую надежность идентификации по сравнению с методом Фурье-спектра [62].

Рассмотрим несколько реализаций оптико-цифрового метода распознавания отпечатков пальцев по их полю направлений, с помощью компьютерного моделирования, для определения наиболее эффективной из них, и реализации на экспериментальной установке [76].

В первом методе для построения поля направлений моделируется оптическая схема, изображенная на рис. 44а, где L — лазер, K — коллиматор, LA , LB — сферические линзы, TV — телекамера.

Отпечаток пальца на стекле F помещен на вход когерентного Фурье-коррелятора (рис. 44а), в частотной плоскости которого расположен пространственный фильтр DF в виде амплитудного транспаранта из бинарных дифракционных решеток, делящих 180° на 8 секторов, другая часть фильтра не пропускает свет (рис. 44б). На выходе коррелятора регистрируется набор изображений, отличающихся от входного изображения тем, что каждое из них имеет только часть спектра, попадающую в соответствующий сектор. Так как каждый сегмент фильтра DF представляет собой амплитудную бинарную дифракционную решетку, то для каждого сектора получается пара симметричных изображений. Таким образом, из 16 полученных изображений, неповторяющихся только 8. Далее эти 8 изображений в компьютере совмещаются в одно изображение с весами, соответствующими сек-

тору и равными углу наклона полос на изображении отпечатка пальца.

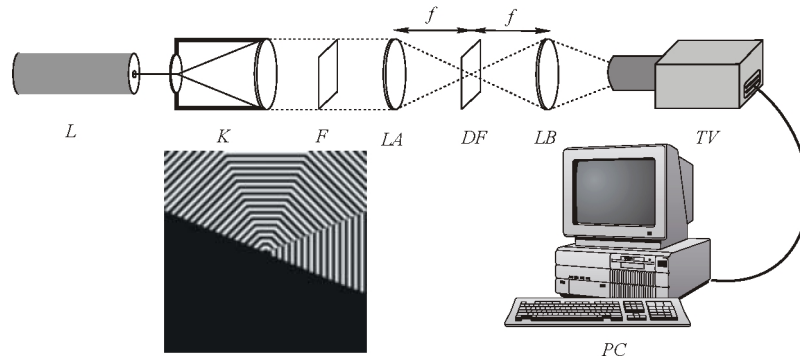


Рис. 44. Оптическая схема Фурье-коррелятора (а) для построения поля направлений с пространственным фильтром, (б) из амплитудных секторных дифракционных решеток

Поле направлений в данном случае аппроксимируется выражением:

$$\varphi(x, y) = \frac{\sum_{k=1}^N \varphi_k I_k(x, y)}{\sum_{k=1}^N I_k(x, y)}, \quad (127)$$

где $I_k(x, y)$ — функция интенсивности “ k ”-го неповторяющегося изображения, сформированного на выходе коррелятора в оптической схеме на рис. 44а, после прохождения светом “ k ”-го сектора решетки фильтра с центральным углом

$$\theta_k = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \varphi_k, & 0 < \varphi_k < \frac{\pi}{2}, \\ \frac{3\pi}{2} - \varphi_k, & \frac{\pi}{2} < \varphi_k < \pi \end{cases}, \quad k = \overline{1, N}, \quad (128)$$

где φ_k — отсчеты угла наклона полос на отпечатке, $N = 8$ — число секторов решетки.

Поле направлений, построенное по этому методу, будем в дальнейшем называть «многоканальным».

Заметим, что совмещение нескольких парциальных изображений, при получении поля направлений в ходе натурального эксперимента,

происходит цифровым методом в компьютере. При этом необходима большая точность позиционирования парциальных изображений, что ведет к увеличению затрат времени на обработку. Поэтому рассматривается более простой в реализации метод получения поля направлений, но ошибка построения поля направлений ε в этом методе больше чем в методе (127). Оптическая схема для получения альтернативного поля направлений показана на рис. 45а.

Отпечаток пальца на стекле F помещен на вход когерентного Фурье-коррелятора (рис. 45а), в частотной плоскости которого попеременно располагаются пространственные фильтры SF в виде амплитудных транспарантов. Один из них состоит из 8 секторов, коэффициент поглощения которого T пропорционален корню квадратному из угла. Эти сектора занимают 180° , другая часть фильтра не пропускает свет (рис. 45б). Другой фильтр просто закрывает половину частотной плоскости (рис. 45в). После последовательного применения обоих фильтров на выходе коррелятора регистрируются два изображения, которые используются далее для вычисления в компьютере их отношения, аппроксимирующего поле направлений исходного изображения:

$$\varphi(x, y) \cong \frac{|f(x, y) \otimes g_1(\xi, \eta)|^2}{|f(x, y) \otimes g_2(\xi, \eta)|^2 + \alpha^2}, \quad (129)$$

где $f(x, y)$ — функция исходного изображения, $g_1(\xi, \eta)$, $g_2(\xi, \eta)$ — Фурье-образы от функции пропускания фильтров, изображенных на рисунках 45б и 45в, соответственно, α — регуляризирующая константа. Поле направлений, полученное этим методом, будем называть «одноканальным».

В обоих рассмотренных методах, (127) и (129), присутствует операция деления на функцию, которая может приводить к заметным ошибкам ε вычисления поля направлений. Далее рассматривается метод поля направлений, в котором операция деления отсутствует.

В связи с наличием ряда технических ограничений, оптическая установка для вычисления поля направлений (рис. 46), на которой проводились натурные эксперименты имеет более сложную оптическую схему, чем схема которая моделировалась в численном эксперименте [79]. Внешний вид оптической установки для построения полей направлений показан на рис. 46.

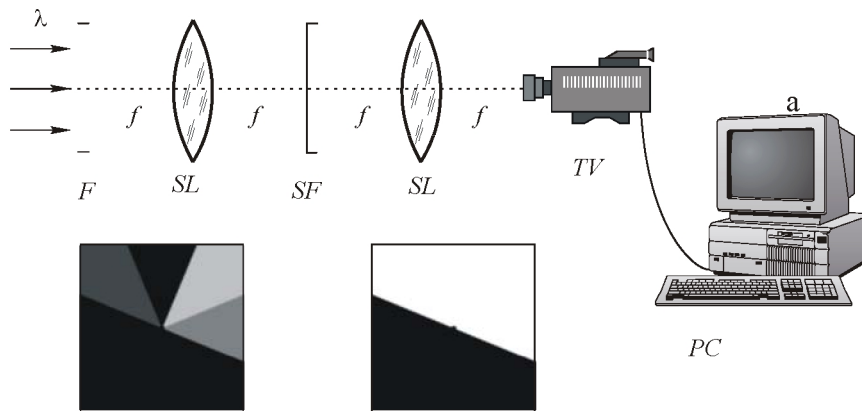


Рис. 45. Оптическая схема Фурье-коррелятора (а) для построения поля направлений с секторным амплитудным пространственным фильтром (б) и амплитудным пространственным фильтром, который обрезает половину спектра (в)

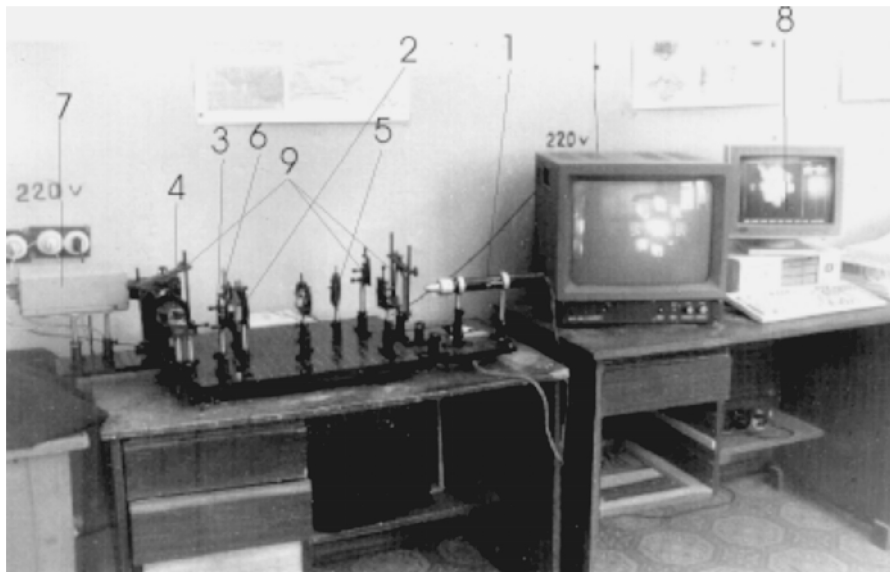


Рис. 46. Оптическая установка для вычисления поля направлений:
 1 - He-Ne лазер, 2 — коллиматор, 3 — дактилограмма, 4 — призма, 5 — первая линза Фурье-коррелятора, 6 — фазовый пространственный фильтр, 7 — телекамера, 8 — компьютер, 9 — система поворотных зеркал

На рис 47а показана схема оптической установки для вычисления поля направлений. Амплитудный транспарант F с отпечатком пальца освещается пучком когерентного света от $He-Ne$ лазера L . Пучок формируется коллиматором K . Призма P позволяет вводить отпечатки пальцев в реальном времени, если отпечаток вводится с амплитудного транспаранта, то призма играет роль поворотного зеркала. Система поворотных зеркал $M1, M2, M3$ позволила смонтировать оптическую установку на небольшом столе. $SL1$ и $SL2$ — линзы Фурье-коррелятора. SF — фазовый пространственный фильтр, который показан на рис. 47б. Т.к. размер поля дактилограммы — 20 мм, а размер поля камеры — 10 мм, линзы Фурье коррелятора имеют разные фокусные расстояния. Фокусные расстояния линз должны подбираться с учетом двух условий:

1. парциальные изображения должны быть разделены в пространстве;
2. все парциальные изображения должны уместиться в поле телекамеры.

Размер парциального изображения r определяется формулой (132), величина отклонения частичного изображения от оптической оси r определяется формулой:

$$r = f_2 \operatorname{tg} \left[\arcsin \left(\frac{\lambda}{d} \right) \right],$$

где λ — длина волны света, d — период решетки, f_2 — фокусное расстояние второго плеча Фурье-коррелятора. Пространственный фильтр SF , представляет собой набор фазовых дифракционных решеток с периодом 20 мкм.

Для случая выделения 4 направлений первое условие (разделение парциальных изображений) можно записать в виде $r > \sqrt{2}S_c$, где S_c - размер парциального изображения.

Второе условие (размещение всех изображений в фотоприемном окне телекамеры) $L > 4S_c$, где L — размер поля телекамеры.

Из второго условия и формулы (123) следует условие для отношения фокусных расстояний плеч Фурье-коррелятора.

$$\frac{f_2}{f_1} < \frac{L}{4S},$$

где S — размер дактилограммы. Подставляя реальные значения получим, что отношение фокусных расстояний должно быть меньше 0,125.

Первое условие дает нам минимальное значение $f_2 \approx 110$ мм, тогда минимальное значение $f_1 \approx 880$ мм.

Камера позволяет считывать изображение квантованное по 256 уровням в графический файл размерностью 512×512 . Линза $SL1$ имеет фокусное расстояние 1000 мм, линза $SL2$ имеет фокусное расстояние 138 мм.

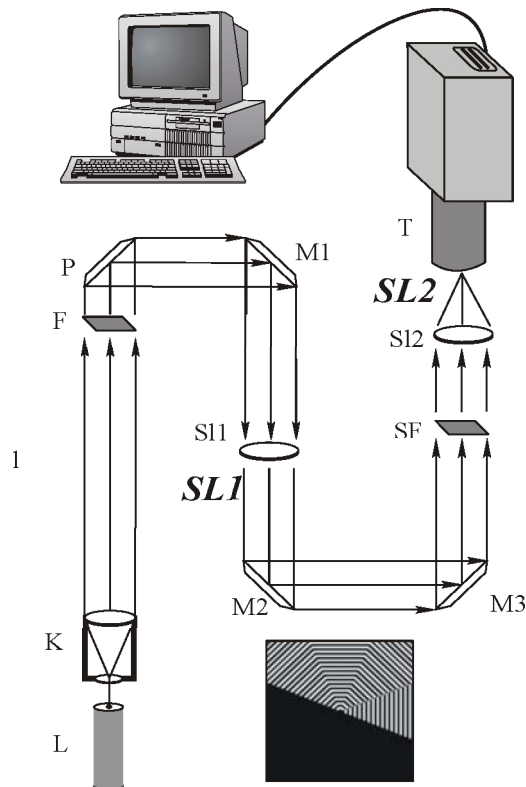


Рис. 47. Оптическая схема установки для вычисления поля направлений (а), фазовый пространственный фильтр (б)

На рис. 48 показаны два варианта секторов в частотной плоскости коррелятора: бесконечно узкий сектор, заданный углом θ_0 (а), и сектор конечной ширины, ограниченный углами θ_1 и θ_2 (б).

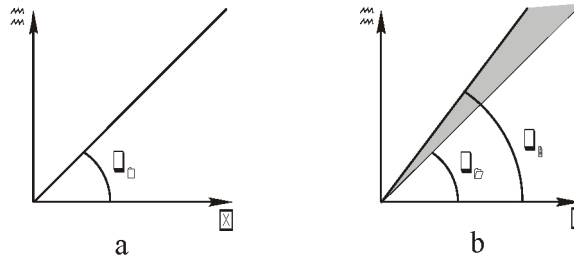


Рис. 48. Вид угловых секторов, располагаемых в частотной плоскости: бесконечно узкий сектор (а) и сектор конечной ширины (б)

Амплитуда светового поля $A(x',y')$ на выходе коррелятора с фильтрами, показанными на рис. 48, может быть выражена через амплитуду входного изображения $A_0(x,y)$ известным образом [80]:

$$A(x',y') = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_0(x,y) h(x+x',y+y') dx dy, \quad (130)$$

где $h(x,y)$ — частотная характеристика пространственного фильтра, являющаяся Фурье-образом функции пропускания фильтра. Для узкого сектора, с заданным углом θ_0 (рис. 48а), функция пропускания $H(r,\theta)$ и частотная характеристика равны

$$H_1(r,\theta) = \delta(\theta - \theta_0), \quad (131)$$

$$h_1(x,y) = [x \cos \theta_0 + y \sin \theta_0]^{-2}, \quad (132)$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция, а для конечного сектора, показанного на рис. 48б, соответствующие функции примут вид

$$H_2(r,\theta) = \begin{cases} 1, & \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, \\ 0, & 0 \leq \theta \leq \theta_1, \theta_2 < \theta < 2\pi, \end{cases} \quad (133)$$

$$h_2(x,y) = \sin(\theta_1 - \theta_2) \times [x^2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 + y^2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 + xy \sin(\theta_1 + \theta_2)]^{-1}. \quad (134)$$

Если таких секторов N в плоскости фильтрации, и в каждом из них имеется дифракционная решетка, то на выходе коррелятора образуется последовательность парциальных изображений:

$$I_n(x', y') = \left| \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_0(x, y) h_n(x + x', y + y') dx dy \right|^2, \quad n = \overline{1, N}, \quad (135)$$

где функция $h_n(x, y)$ определяется из уравнений (131) или (133) при следующем выборе углов; $\theta_k + \Delta n$, $k = 0, 1, 2, \dots, n = 1, 2, \dots, N$, Δ — дискретность отсчетов по углу.

С помощью линейной комбинации парциальных изображений, взятых с весами, пропорциональными центральным углам щелей, можно определить функцию поля направления по формуле (127).

Заметим, что так как исходное изображение $A_0(x, y)$ описывается действительной функцией, то модуль Фурье-образа такой функции будет центрально-симметричным, и поэтому диапазон изменений угла ϕ лежит в интервале $[0, \pi)$.

Хотя сектора решетки, формирующие парциальные изображения не пересекаются (рис. 44б), каждая точка исходного изображения, в принципе, вносит вклад в каждую точку парциального изображения. Изображения со структурной избыточностью (контурные изображения типа отпечатков пальцев) состоят из большого числа линий с характерным периодом или из участков дифракционных решеток, пространственный спектр каждой из которых вносит вклад только в один из угловых секторов фильтра. Поэтому следует ожидать, что парциальные изображения будут почти ортогональны. Т.е. “интеграл перекрытия” двух парциальных изображений будет много меньше суммарной энергии каждого из них:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} I_n(x, y) I_m(x, y) dx dy \ll \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} I_n^2(x, y) dx dy. \quad (136)$$

Если неравенство (136) не выполняется, то можно осуществить операцию ортогонализации парциальных изображений по правилу:

$$y_k^0(x, y) = \begin{cases} 1, & I_k(x, y) = \max_n \{I_n(x, y)\}, \\ 0, & I_k(x, y) \neq \max_n \{I_n(x, y)\}, \end{cases} \quad (137)$$

где $\max_n \{\dots\}$ — максимальное значение функции в точке среди функций с номерами $n = \overline{1, N}$.

Из уравнения (137) видно, что парциальные изображения $y_k^0(x, y)$ представляют собой почти ортогональный набор бинарных функций. Ортогональность нарушается лишь в точках, где интенсивности парциальных изображений совпадают. Как показывает вычислительный эксперимент, количество этих точек не превышает 0,001 от общего количества точек изображения. Это позволяет вместо уравнения (127) рассчитывать поле направлений по более простой формуле без операции деления:

$$\phi(x, y) = \sum_{n=1}^N \phi_n y_n^0(x, y), \quad \phi_n = \frac{\pi n}{N}. \quad (138)$$

Формула (138), благодаря ортогонализации и бинаризации парциальных изображений, как видно из рис. 49в, содержит в себе процедуры частичной регуляризации и фильтрации получаемого поля направлений. По этой же причине, формулу (138) нельзя свести путем предельного перехода к формуле (114).

На рис. 49а показано поле направлений (128×128 пикселей), полученное путем численного моделирования коррелятора изображенного на рис. 45а, и вычисленное по формуле (129) для отпечатка пальца, изображенного на рис. 50а; на рис. 49б показано то же самое поле направлений, но обработанное медианным фильтром; на рис. 49в показано поле направлений от того же отпечатка пальца, рассчитанное по формуле (127). Как видно из рис. 50 эти поля направлений совпадают в крупных деталях.

На рис. 50б,в,г,д показаны поля направлений (128×128 пикселей), рассчитанные на компьютере по формуле (127).

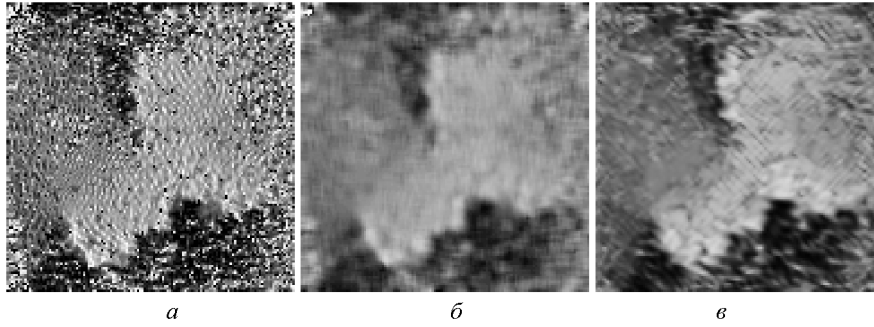


Рис. 49. Поле направлений (а), полученное путем численного моделирования работы коррелятора изображенного на рис. 45а; поле направлений (б), полученное путем численного моделирования работы коррелятора изображенного на рис. 45а и обработанное медианным фильтром; поле направлений (в), рассчитанное на компьютере по формуле (138)

Рассмотрим как влияет на процесс идентификации дактилограмм способ построения векторов признаков для полей направлений. Будем формировать вектор признаков с помощью коэффициентов разложения полей направлений по ортогональному базису. Для этого будем использовать базисы Адамара (58) и Фурье (54) [57, 58].

В таблице 7 представлены значения евклидова расстояния $d_{m, n}$ между векторами признаков из $K = 16$ компонент для 10 базовых и 10 анализируемых отпечатков 10 разных пальцев. Расстояние $d_{m, n}$ вычислялось по формуле

$$d_{mn} = \sqrt{\sum_{k=1}^K [b_m^{(k)} - a_n^{(k)}]^2}, \quad (139)$$

где $b_m^{(k)}$ и $a_n^{(k)}$ — “ k ”-ые коэффициенты “ m ”-го базового и “ n ”-го анализируемого векторов, соответственно. По сути своей $d_{m, n}(a_n)$, $m = \overline{1, N}$, представляют собой систему разделяющих функций, которые описывают классификатор, блок-схема которого изображена на рис. 52. Говорят, что классификатор ставит в соответствие вектор признаков a_n классу b_m , если справедливо неравенство [93, 94]:

$$d_{mm}(a_n) > d_{ln}(a_n), \quad m \neq l. \quad (140)$$

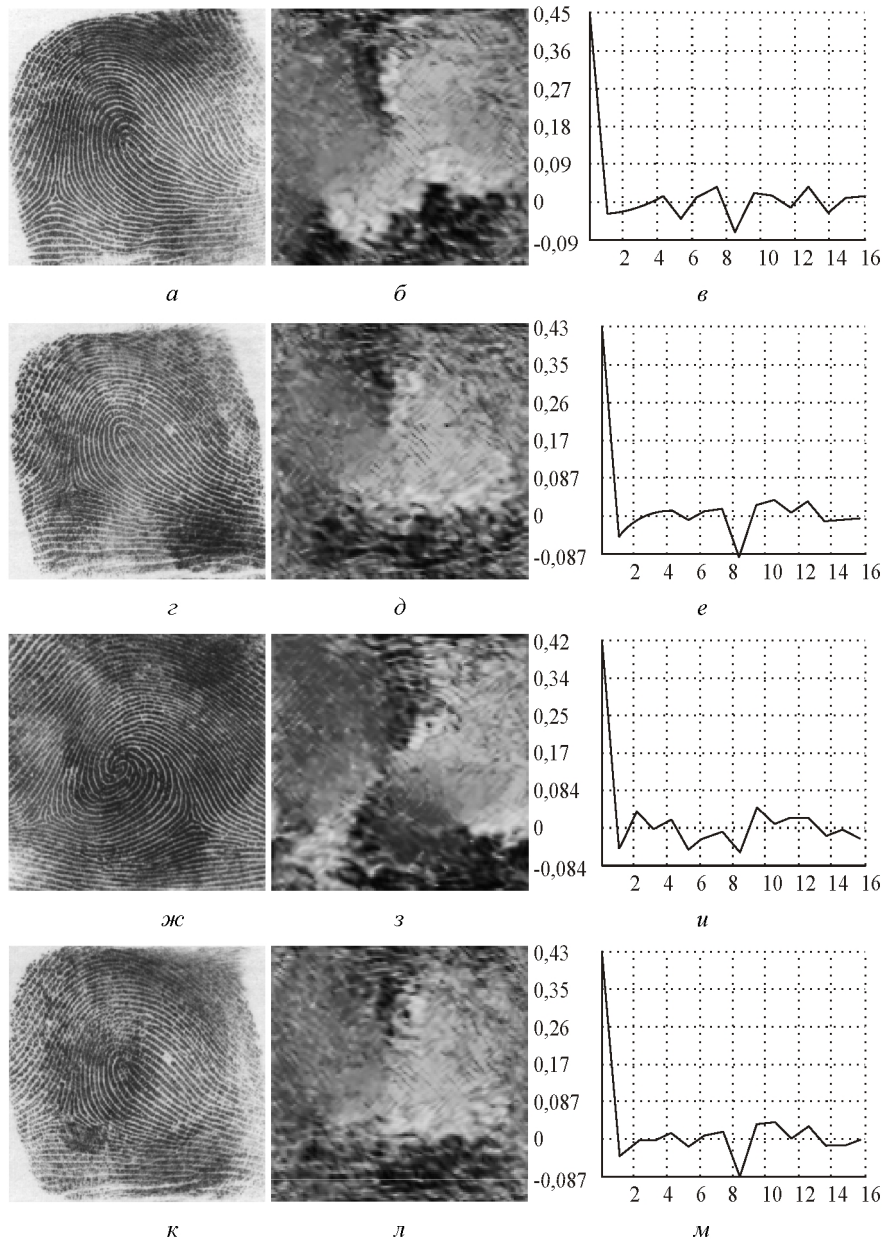


Рис. 50. Отпечатки пальцев (а,г,ж,к); их поля направлений (б,д,з,л) и вектора признаков из 16 первых коэффициентов разложения Адамара (в,е,и,м)

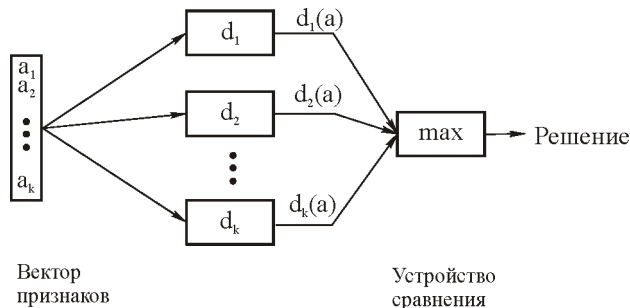


Рис. 51. Схема классификатора образов

Таблица 7. Расстояния между векторами признаков из 16 коэффициентов разложения по ортогональному базису Адамара для полей направлений, построенных по 10 базовым $\{b_n\}$ и 10 анализируемым $\{a_n\}$ отпечаткам 10 различных пальцев

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8	b_9	b_{10}	R
a_1	5,13	13,00	9,73	8,83	11,07	12,56	7,99	10,12	11,42	13,39	0,22
a_2	13,37	3,97	9,52	10,20	10,03	7,96	12,14	10,13	7,39	8,17	0,30
a_3	8,70	7,09	4,56	8,21	6,05	10,65	8,24	7,64	7,66	9,29	0,13
a_4	8,31	8,84	5,90	4,58	6,79	9,78	6,61	8,16	8,75	11,41	0,12
a_5	9,42	9,53	6,18	6,36	2,07	9,15	7,58	5,94	8,21	9,71	0,48
a_6	11,74	7,76	9,86	9,22	9,03	3,47	10,01	7,23	7,84	9,32	0,35
a_7	8,92	10,54	5,99	5,64	4,71	10,52	4,22	7,34	10,61	12,52	0,06
a_8	10,94	9,25	9,04	9,42	7,09	8,53	9,78	3,52	5,31	6,10	0,20
a_9	11,11	7,82	9,56	9,69	9,80	9,63	10,85	7,75	3,60	5,25	0,18
a_{10}	12,74	8,52	11,63	11,90	11,17	10,15	12,74	8,94	4,36	3,58	0,10
R	0,24	0,28	0,12	0,10	0,38	0,39	0,22	0,15	0,10	0,18	0,21

Значения расстояний в каждой строке таблицы 7 показывают результат идентификации вектора a_n среди набора базовых векторов $\{b_m\}$, $m = \overline{1, M}$, а значения в столбцах показывают результат идентификации вектора b_m среди набора анализируемых векторов $\{a_n\}$, $n = \overline{1, N}$. Количество распознаваемых дактилограмм невелико, поэтому прямо определить надежность метода, как отношение числа правильно распознанных дактилограмм к общему их количеству,

нельзя, но можно ввести параметр, который характеризует относительную удаленность классов друг от друга [76], и тем самым позволяет косвенно судить о надежности метода:

$$R_i = \frac{d_{\min} - d_{mm}}{d_{\min} + d_{mm}}, \quad i = \begin{cases} m, & d_{\min} \text{ определено в строке} \\ M + m, & d_{\min} \text{ определено в столбце,} \end{cases} \quad (141)$$

где $d_{m, m}$ – диагональный элемент матрицы, d_{\min} – минимальный недиагональный элемент.

Среднее значение параметра $\langle R \rangle$, характеризует среднюю удаленность классов для метода распознавания в целом и определяется формулой

$$\langle R \rangle = (2M)^{-1} \sum_{i=1}^{2M} R_i, \quad (142)$$

где $2M$ — число анализируемых и базовых дактилограмм.

Таким образом, рассматриваемый метод идентификации дактилограмм состоит из последовательности шагов.

1. Для каждого из анализируемых или базовых отпечатков пальцев, описываемых функцией пропускания $I(x, y)$, оптическими средствами с помощью коррелятора формируются N парциальных изображений $I_n(x, y)$, имеющих пространственный спектр, заключенный в узком угловом секторе. Набор парциальных изображений регистрируется и вводится в виде массива чисел в память компьютера.

2. Цифровая обработка парциальных изображений состоит из этапов:

- а) формируется набор бинарно-ортогональных парциальных изображений $\mathcal{Y}_n^0(x, y)$;
- б) по формуле (127) или (138) рассчитывается поле направлений $\phi(x, y)$;
- в) рассчитывается K коэффициентов $\left(\{a_k^{(n)}\}, \{b_k^{(n)}\} \right)$ разложения поля направлений $\phi(x, y)$ по базису Адамара;
- г) определяются евклидовы расстояния $d_{m, n}$ и ищется минимальное среди них.

Так как вектора \mathbf{b}_n и \mathbf{a}_n с одинаковыми номерами соответствуют разным отпечаткам одного пальца, то идентификация будет успешной, если минимальные значения расстояний $d_{m, n}$ в каждой строке и в

каждом столбце находятся на диагонали, при этом величина R должна быть положительной.

В результате распознавания с помощью векторов признаков, построенных из первых 16 коэффициентов разложения полей направлений по базису Фурье, не удалось добиться полной идентификации отпечатков, и величина $\langle R \rangle$ меньше ($\langle R \rangle = 0,19$), чем аналогичная величина при распознавании по коэффициентам разложения в базисе Адамара ($\langle R \rangle = 0,21$). В данном случае базис Адамара является более эффективным.

Заметим также, что если использовать для распознавания тех же отпечатков пальцев поля направлений, полученные с помощью упрощенной «одноканальной» оптической схемы, поле направлений для которой показано на рис. 49а, и вектор признаков выбирать из 16 первых коэффициентов разложения Адамара, то результаты так же ухудшаются. Полная идентификация имеет место и в этом случае, но из-за наличия мелкомасштабной структуры в полях направлений (рис. 49а), надежность распознавания ухудшается $\langle R \rangle = 0,17$.

Надежность распознавания по этим полям направлений можно улучшить, если обработать исходные поля направлений медианным фильтром.

Тогда имеет место полная идентификация, среднее относительное расстояние между классами увеличивается $\langle R \rangle = 0,19$.

Общее сравнение среднего относительного расстояния между классами для всех рассмотренных методов [95, 96] приведено в таблице 8. Из таблицы видно, что наилучшие характеристики имеет метод, в котором вектор признаков набирается из первых коэффициентов разложения по базису Адамара с использованием «многоканального» поля направлений.

Таблица 8. Значения показателя надежности для различных методов идентификации.

Метод обработки изображения	Метод набора вектора признаков	$\langle R \rangle$
«Многоканальное» поле направлений	16 коэффициентов разложения по базису Адамара	0,21
	16 коэффициентов разложения по базису Фурье	0,19
«Одноканальное» поле направлений	16 коэффициентов разложения по базису Адамара	0,17
«Одноканальное» отфильтрованное поле направлений	16 коэффициентов разложения по базису Адамара	0,19

В разделе 2.2 описывается ДОЭ, который может использоваться в задаче анализа изображений. На рисунке 52 представлены: (а) отпечаток пальца, (б) его поле направлений и (в) матрица коэффициентов, полученных с помощью ДОЭ, показанного на рис. 24а. Эти коэффициенты пропорциональны модулям коэффициентов разложения дактилограммы по 25 базисным функциям Адамара.

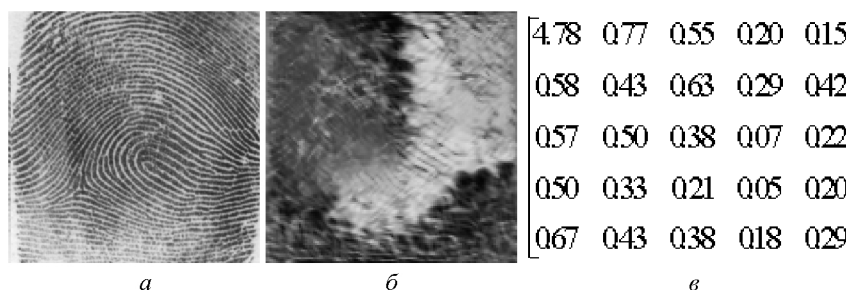


Рис. 52. (а) Отпечаток пальца, (б) его поле направлений и (в) матрица коэффициентов, полученная с помощью рассчитанного ДОЭ (рис. 24а)

Общая схема распознавания на основе оптического разложения Карунена — Лозва представлена на рис. 53.

Эффективность данной схемы состоит в том, что наиболее трудоемкая часть (“начальное обучение”) прodelывается один раз на начальном этапе. Основная же часть — анализ поступающего на вход изображения — обладает всеми желательными характеристиками:

быстродействием, благодаря оптической реализации, и эффективно-стью, благодаря выбору разложения, имеющего оптимальные свойства. Все это, естественно, отражается на усложнении начального этапа, который, однако, прodelывается всего один раз, а следовательно, целесообразность такого подхода налицо.

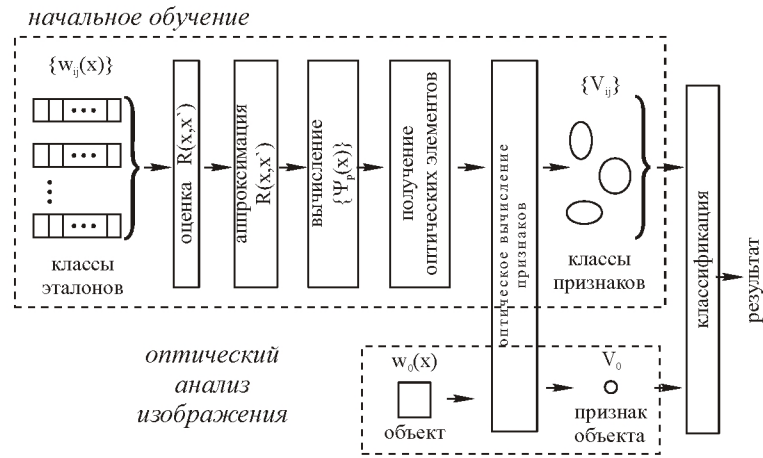


Рис. 53. Общая схема распознавания на основе оптического РКЛ

При классификации в пространстве признаков необходимо выбрать решающую функцию, которая будет классифицировать объект в зависимости от “расстояния” r_i от объекта до i -го класса. Некоторые методы классификации приведены в [11].

Например, метод среднего для класса вектора признаков заключается в следующем.

Для каждого класса по векторам V_{ij} находится средний вектор признаков — центр класса

$$V_i = \frac{1}{N_s} \sum_{j=1}^{N_s} V_{ij}, \quad (143)$$

затем вычисляется евклидово расстояние r_i^c от объекта до центров классов:

$$r_i^c = (V_o - V_i), \quad (144)$$

и выбирается минимальное.

Номер минимального расстояния будет считаться номером класса, к которому принадлежит объект (см. рис. 54).

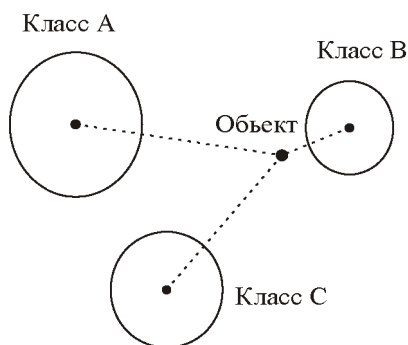


Рис. 54. Схема для определения расстояния от объекта до различных классов

Результаты распознавания 10 классов близких по рисунку дактилоскопических изображений для выборки из 15 представителей на основе РКЛ (см. раздел 2.1) с различным типом аппроксимации корреляционной функции приведены в Таблице 9 (W - частота успеха, K - количество коэффициентов РКЛ). Поле направлений строилось как оптическим методом, так и дисперсионным методом [74]. Поле направлений, построенное дисперсионным методом, подвергалось операции фильтрации.

Таблица 9. Результаты распознавания дактилоскопических изображений.

		РКЛ с экспоненциальной корреляционной функцией	РКЛ с экспоненциально-косинусной корр. функцией
Исходные изображения		$W=0,3$ при $K \geq 18^*$	$W=0,3$ при $K \geq 9^*$
поля направлений	Дисперсионные	$W=1$ при $K \geq 34$	$W=1$ при $K \geq 31$
	Фильтр. дисперсионные	$W=0,8$ при $K \geq 22^*$	$W=0,8$ при $K \geq 15^*$
	Оптические	$W=1$ при $K \geq 12$	$W=1$ при $K \geq 11$

* — увеличение K до 100 не улучшает результата.

Тот факт, что исходные дактилоскопические изображения практически не поддавались распознаванию [78], не только оправдывает, но и делает необходимым использование поля направлений при анализе таких сложных изображений. Ситуацию с ухудшением качества распознавания для отфильтрованных полей направлений можно объяснить подавлением некоторых мелких, но существенных деталей при фильтрации, а также фильтрующим свойством РКЛ, позволяющим опустить этот достаточно сложный этап. Оптический метод показал в этом эксперименте высокую эффективность.

При использовании уравнения (127), поле направлений отражает не только структуру основных полос дактилограммы, но и побочные структурные элементы, возникающие из-за колебаний контраста полос изображения. Но хотя их вклад в частичное изображение относительно невелик, в целом это может исказить структуру поля направлений. На рис. 55 изображен график нормированной интенсивности для одной характерной точки в 4-х разных «парциальных» изображениях.

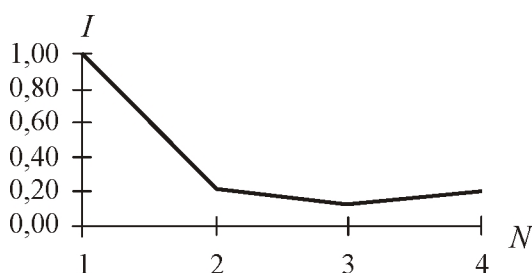


Рис. 55. График нормированной интенсивности для одной точки в разных парциальных изображениях

Как видно из рис. 55 наибольшая интенсивность в произвольно выбранной точке (x, y) наблюдается в частичном изображении под номером 1. Интенсивность в этой же точке в других парциальных изображениях существенно меньше, но сумма интенсивностей в точке в трех остальных парциальных изображениях уже сравнима с интенсивностью в этой точке в первом частичном изображении. Подобное отношение интенсивностей наблюдается в большинстве точек.

Поэтому в эксперименте использовали для получения поля направлений формулы (137), (138). В эксперименте с помощью оптической схемы, показанной на рис. 47а, получены парциальные изображения, показанные на рис. 56а.

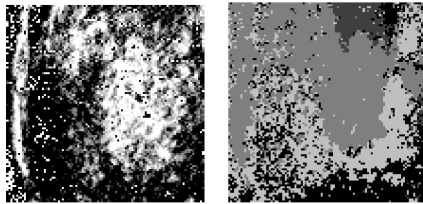
Четыре из них участвовали в построении поля направлений, рассчитанного по формулам (127) и (138). Эти поля показаны на рис. 56б,в, соответственно. Размер парциальных изображений был 100×100 пикселей, все поле изображения имеет размер 512×512 пикселей. Изображения квантованы по 256 уровням. Геометрический размер поля телекамеры составлял 10×10 мм, геометрический размер частичного изображения составляет около 2 мм. Как и в численном эксперименте в качестве базисных выбирались 10 отпечатков. Базисные вектора признаков составлялись из коэффициентов разложения по базису Адамара полей направлений базовых отпечатков. Выбирались 10 анализируемых отпечатков, и определялось евклидово расстояние $d_{m,n}$ от вектора каждого анализируемого отпечатка до вектора каждого базового отпечатка по формуле (148); во всех экспериментах использовались первые 16 коэффициентов разложения Адамара.

На рис. 57а изображен график евклидова расстояния $d_{m,n}$ между вектором признаков \mathbf{a}_5 и 10 базовыми векторами 10 разных пальцев. На рис. 57б изображен график евклидова расстояния $d_{m,n}$ между вектором признаков \mathbf{b}_5 и 10 анализируемыми векторами 10 разных пальцев.

Как видно из рис. 57, расстояние минимально между векторами \mathbf{a}_5 и \mathbf{b}_5 , т.е. происходит распознавание. То же самое происходит с любой другой парой векторов. При распознавании отпечатков по разложению Адамара их оптических полей направлений, полученных по формуле (138), значение $\langle R \rangle$ равно 0,24, это несколько выше чем значение аналогичного параметра, при распознавании того же набора отпечатков по разложению Адамара их полей направлений, но полученных путем численного моделирования [74] данной оптической установки по формуле (127): $\langle R \rangle = 0,21$.



a



б

в

Рис. 56. Экспериментальные парциальные изображения (а) и поля направлений, полученные из них по формулам (127) (б) и (138) (в) (изображения в рамках участвовали в построении поля направлений)

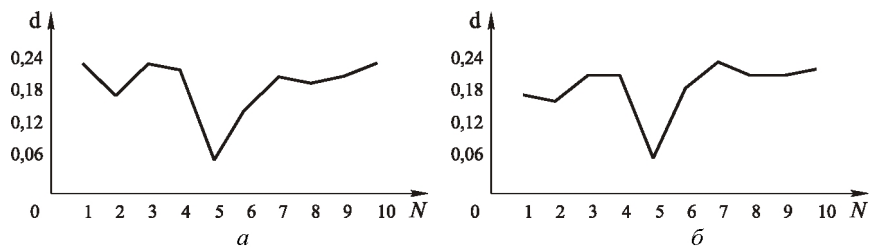


Рис. 57. Расстояния между вектором анализируемого отпечатка $\{a_s\}$ и векторами 10 базовых отпечатков $\{b_n\}$ (а) и расстояния между вектором базового отпечатка $\{b_s\}$ и векторами 10 анализируемых отпечатков $\{a_n\}$ (б)

Проводился также эксперимент по распознаванию дактилограмм по полям направлений, которые были получены оптическим путем с использованием формулы (127). В этом случае не удалось добиться

распознавания всех отпечатков, и среднее относительное расстояние между классами для этого метода оказалось существенно меньше: $\langle R \rangle = 0,14$. Ухудшение надежности, по сравнению с результатом численного моделирования [59], связано с тем, что в натурном эксперименте выделялось 4 направления, а в численном — 8 направлений.

Для увеличения надежности распознавания необходимо, чтобы базовый вектор был составлен как среднее от векторов полей направлений нескольких вариантов отпечатка одного пальца. На рис. 58а представлены расстояния между вектором $\{a_1\}$ и 10 базовыми векторами, на рис. 58б показаны расстояния между тем же вектором $\{a_1\}$ и 10 базовыми векторами, каждый из которых получен путем усреднения по двум векторам от разных отпечатков одного пальца.

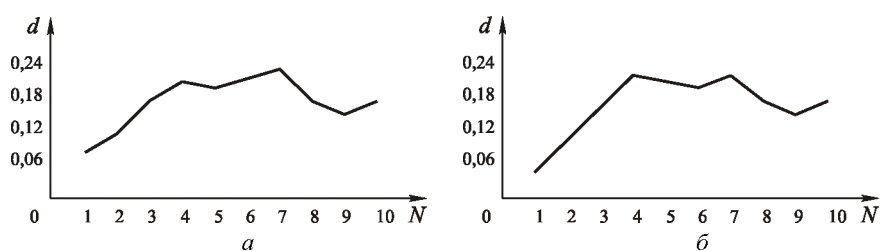


Рис. 58. Расстояния между вектором анализируемого отпечатка $\{a_1\}$ и векторами 10 базовых отпечатков $\{b_n\}$ (а) и расстояния между вектором $\{a_1\}$ и векторами 10 базовых отпечатков $\{c_n\}$, которые получены путем усреднения векторов от двух вариантов отпечатков одного пальца

Видно, что разность расстояний $d_{1,1}$ и $d_{2,1}$, на рис. 58б больше. Следовательно, увеличивается параметр $\langle R \rangle$.

В таблице 10 базовые вектора получены с усреднением, т.е. центром класса считается не координаты базового вектора, а усредненные координаты двух базовых векторов.

Из таблицы 10 видно, что минимальные расстояния располагаются на диагонали, т.е. имеет место полное распознавание дактилограмм. Видно также, что операция усреднения для базовых отпечатков повысила надежность с $\langle R \rangle = 0,24$ до $\langle R \rangle = 0,27$.

Для исследования устойчивости полей направлений к сдвигу и повороту в [82] был проведен ряд натуральных экспериментов. Вектора признаков составлялись из коэффициентов разложения по базису Адамара полей направлений отпечатков, и определялось евклидово расстояние $r_{m, n}$ от вектора каждого сдвинутого отпечатка до вектора каждого не сдвинутого отпечатка по формуле (139); во всех экспериментах использовались первые 16 коэффициентов разложения Адамара. Сдвиг осуществлялся с интервалом 0,5 мм на расстояние до 4 мм.

Таблица 10. Расстояния между векторами признаков из 16 компонент для 10 базовых $\{b_n\}$ векторов, которые составлены из двух разных отпечатков одного пальца

и 10 анализируемых $\{a_n\}$ векторов отпечатков 10 различных пальцев; последний столбец и последняя строка состоят из значений величины R .

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8	b_9	b_{10}	R
a_1	4,8	10,0	15,0	20,0	18,0	18,0	21,0	16,0	13,0	15,0	0,35
a_2	12,0	5,6	14,0	18,0	17,0	16,0	19,0	17,0	12,0	16,0	0,36
a_3	13,0	15,0	4,9	11,0	21,0	19,0	14,0	14,0	11,0	12,0	0,38
a_4	16,0	18,0	10,0	5,3	21,0	14,0	8,8	13,0	10,0	12,0	0,25
a_5	22,0	14,0	22,0	21,0	4,0	13,0	21,0	19,0	20,0	22,0	0,53
a_6	16,0	17,0	17,0	12,0	17,0	6,1	12,0	11,0	13,0	16,0	0,29
a_7	17,0	21,0	15,0	8,7	24,0	16,0	6,0	8,5	9,8	9,1	0,17
a_8	15,0	18,0	13,0	7,9	21,0	14,0	7,2	5,1	7,8	7,0	0,16
a_9	13,0	17,0	11,0	8,9	21,0	15,0	7,7	6,4	4,8	6,6	0,14
a_{10}	14,0	19,0	15,0	12,0	22,0	17,0	11,0	6,7	10,0	6,1	0,05
R	0,43	0,28	0,34	0,20	0,62	0,36	0,09	0,11	0,24	0,04	0,27

На рис. 59 изображен график зависимости евклидова расстояния r между вектором признаков a_3 и векторами признаков сдвинутых на расстояние l отпечатков одного пальца.

Для того, чтобы определить устойчивость к сдвигу, необходимо знать среднее минимальное расстояние между векторами признаков и дисперсию. Среднее минимальное расстояние между 100 не сдвинутыми векторами в 16 мерном пространстве признаков $\langle r \rangle = 0,085$,

дисперсия: $D = 0,00044$. Для 50 векторов было получено: $\langle r \rangle = 0,089$ и $D = 0.00045$. Вероятность того, что $r < \langle r \rangle / 2$ согласно [83] равна:

$$P \left\{ r < \frac{\langle r \rangle}{2} \right\} = 0,5 - \Phi \left(\frac{r - \frac{\langle r \rangle}{2}}{\sqrt{D}} \right), \quad (145)$$

где r — расстояние от вектора до центра класса.

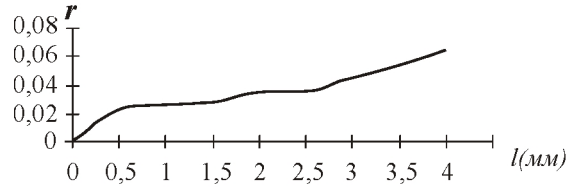


Рис. 59. График зависимости расстояния между векторами признаков сдвинутого на расстояние l и не сдвинутого отпечатков пальца

На рис 60 изображен усредненный график расстояния вектора сдвинутого отпечатка от вектора не сдвинутого отпечатка.

Зная эту зависимость, можно по формуле (145) рассчитать зависимость вероятности правильного распознавания P от величины сдвига.

График этой зависимости представлен на рис. 61.

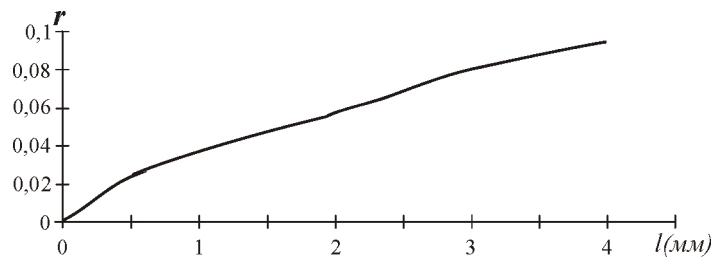


Рис. 60. Усредненный по 100 векторам признаков график расстояния между векторами признаков сдвинутого и не сдвинутого отпечатков пальца

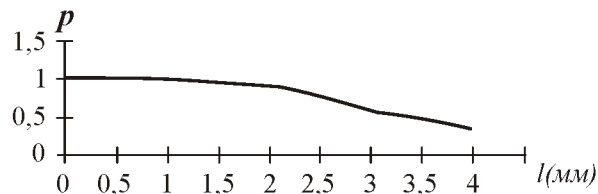


Рис. 61. График зависимости вероятности правильного распознавания P от величины сдвига исходного изображения рассчитанный по формуле (145)

На рис. 62 изображен график зависимости параметра $\langle R \rangle$ от величины сдвига.



Рис. 62. График зависимости параметра $\langle R \rangle$ от величины сдвига исходного изображения

Из сравнения рисунков 61 и 62 видно, что при $\langle R \rangle = 0$, $P = 0,5$, т.е., как и предполагалось, положительное значение параметра $\langle R \rangle$ позволяет утверждать, что правильная идентификация преобладает над ошибочной.

В качестве базовых в эксперименте используются не сдвинутые отпечатки, а в качестве анализируемых — сдвинутые. На рис. 63 изображен график надежности распознавания K от величины сдвига, полученный обработкой экспериментальных данных, где K определяется по формуле

$$K = \frac{N_r}{N}, \quad (146)$$

где N — общее количество анализируемых отпечатков, N_r — количество отпечатков правильно идентифицированных.

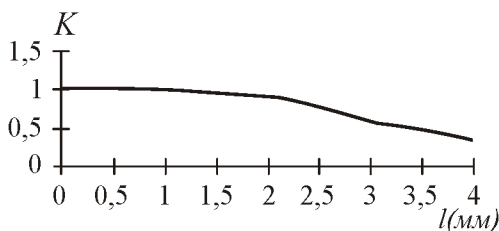


Рис. 63. График зависимости надежности распознавания K от величины сдвига исходного изображения, полученный экспериментально

Для эксперимента с большим количеством дактилограмм величины K и P должны совпадать. Из рисунков 61 и 63 видно, что для эксперимента со 100 дактилограммами значения K и P совпадают с погрешностью (5%). Т.к. при уменьшении количества векторов в эксперименте не произошло существенного изменения значений $\langle r \rangle$ и D , то можно будет использовать формулу (145) для приблизительного расчета надежности метода распознавания для большого количества отпечатков (>100), используя при этом данные ($\langle r \rangle$, D), полученные в эксперименте с небольшим количеством базовых отпечатков.

Аналогичный эксперимент был проведен для исследования устойчивости метода идентификации к повороту дактилограммы. Был использован тот же набор из 100 дактилограмм. Дактилограмма последовательно поворачивалась с интервалом 5° в диапазоне от 0° до 20° . График зависимости среднего расстояния между повернутыми и не повернутыми векторами показан на рис. 64. Экспериментально была определена надежность распознавания в зависимости от величины поворота. Эта зависимость показана на рис. 65, из которого видно что для достижения высокой надежности распознавания ($> 0,9$) необходимо, чтобы поворот дактилограммы не превышал 10° .

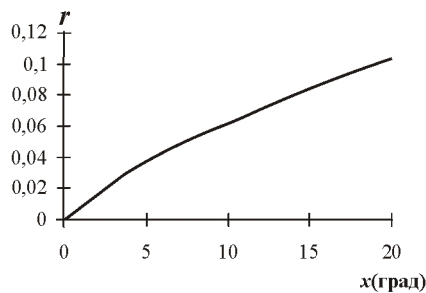


Рис. 64. Усредненный по 100 векторам признаков график зависимости расстояния между векторами признаков повернутого и не повернутого отпечатков пальца

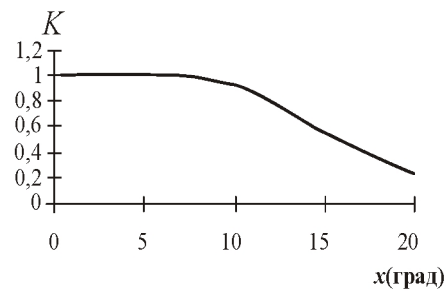


Рис. 65. График зависимости надежности распознавания K от величины поворота исходного изображения, полученный экспериментально

Суммируя все вышесказанное можно утверждать, что оптически построенные поля направлений могут быть эффективно использованы в системах идентификации дактилограмм, которые предназначены для работы с относительно небольшим набором базовых дактилограмм (10^3 — 10^4).

3.2. Оптическая расшифровка интерферограмм

Как правило, интерферограмма обрабатывается с помощью компьютера методом Фурье-преобразования [84] или методом выделения центров полос [50]. Основной недостаток этих методов в том, что с увеличением уровня шума в обрабатываемом изображении и при большом числе разрывов полос из-за спекл-эффекта они теряют надежность и могут приводить к большим искажениям восстановленной фазы.

Существуют итеративные методы [102, 103], позволяющие с помощью процедуры регуляризации добиться устойчивого восстановления фазы по зашумленной интерферограмме с отношением сигнал/шум не меньше единицы. Однако для использования таких методов требуются значительные затраты машинного времени.

Оптические методы восстановления фазы световых полей основаны на использовании датчиков волнового фронта. В этом случае не требуется формирования интерферограммы, и датчик непосредственно размещается в область анализируемого светового поля. Самым распространенным анализатором волнового фронта является датчик Гартмана — Шаке [52].

В работе [87] рассмотрен гибридный оптико-цифровой метод обработки интерферограмм, основанный на оптическом построении поля направлений и поля частот. Значения двух соответствующих отсчетов в поле частот (ПЧ) и поле направлений (ПН), аналогично датчику Гартмана — Шаке, задают координаты вектора наклона плоскости касательной в данной точке к искомой функции фазы.

Пусть интерферограмма описывается функцией вида:

$$I(x, y) = \left| \exp[i\Phi(x, y)] + \exp[i(\alpha_0 x + \beta_0 y)] \right|^2, \quad (147)$$

где $\Phi(x, y)$ — искомая фаза светового поля, (α_0, β_0) — вектор несущей частоты опорной плоской волны. Рассмотрим два скалярных поля $\varphi(x, y)$ и $\omega(x, y)$ определенных по формулам:

$$\operatorname{tg} \varphi(x, y) = -\frac{\frac{\partial I}{\partial x}}{\frac{\partial I}{\partial y}}, \quad 0 \leq \varphi(x, y) < \pi, \quad (148)$$

$$\omega(x, y) = \left[\left(\frac{\partial I}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (149)$$

Функции $\varphi(x, y)$ и $\omega(x, y)$ называются, соответственно, полем направлений и полем частот.

Из уравнения (148) следует, что ПН определено с точностью до π . Из сравнения (147), (148) и (149) также следует связь ПН и ПЧ с функцией фазы $\Phi(x, y)$:

$$\operatorname{tg} \varphi(x, y) = -\frac{\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \alpha_0}{\frac{\partial \Phi}{\partial y} - \beta_0}, \quad (150)$$

$$\omega(x, y) = A_0(x, y) \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \alpha_0 \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} - \beta_0 \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (151)$$

где

$$A_0(x, y) = 2 \left| \sin [\Phi(x, y) - \alpha_0 x - \beta_0 y] \right|. \quad (152)$$

Будем называть нормированным полем частот (НПЧ) функцию $\omega'(x, y)$ вида:

$$\omega'(x, y) = \frac{\omega(x, y)}{A_0(x, y)}. \quad (153)$$

Можно утверждать, что по функциям $\phi(x, y)$ и $\omega'(x, y)$ можно восстановить фазу светового поля $\Phi(x, y)$. Однако это восстановление будет неоднозначным, т.к. неизвестен знак $\frac{\partial\Phi}{\partial x}$ (или $\frac{\partial\Phi}{\partial y}$). Если дополнительно потребовать, чтобы пространственные частоты опорной волны были выбраны достаточно большими, чтобы выполнялось условие:

$$\left| \frac{\partial\Phi}{\partial x} \right|_{\max} < \alpha_0, \quad \left| \frac{\partial\Phi}{\partial y} \right|_{\max} < \beta_0, \quad (154)$$

то фазу можно восстановить однозначно по ПН и НПЧ. Чтобы однозначно восстановить фазу $\Phi(x, y)$ при любых значениях α_0 и β_0 , в том числе и при $\alpha_0 = \beta_0 = 0$, необходимо привлекать дополнительную априорную информацию о фазе.

Пусть интерферограмма F выполнена в виде прозрачного транспаранта и помещена на вход когерентного Фурье-коррелятора (рис. 6б), в частотной плоскости которого расположен фазовый бинарный пространственный фильтр DF . Функция пропускания фильтра имеет вид

$$H_{mm}^{(S)(C)}(\xi, \eta) = \begin{cases} S_n(\phi) R_n(\xi, \eta), & \phi_{n-1} < \phi < \phi_n, \quad n = \overline{1, N} \\ C_m(r) R_m(\xi, \eta), & r_{m-1} < r < r_m, \quad m = \overline{1, M} \end{cases}, \quad (155)$$

где

$$S_n(\phi) = \frac{1}{2} [\operatorname{sgn}(\phi - \phi_{n-1}) - \operatorname{sgn}(\phi - \phi_n)], \quad (156)$$

$$C_m(r) = \operatorname{circ}\left(\frac{r}{r_{m+1}}\right) - \operatorname{circ}\left(\frac{r}{r_m}\right), \quad (157)$$

$$R_n(\xi, \eta) = \operatorname{sgn}[\cos(\alpha_n \xi + \beta_n \eta)], \quad (158)$$

$S_n(\phi)$, $C_m(r)$ — секторные и кольцевые участки фильтра, в которых остается неизменной бинарная фазовая дифракционная решетка $R_n(\xi, \eta)$, (α_n, β_n) — вектор несущей пространственной частоты решет-

ки, задающей координаты центра частичного изображения на выходе коррелятора.

На выходе коррелятора сформируются эффективно $2(M + N)$ изображений. Это следует из того, что фазовая бинарная решетка со скачком фазы, равным π , формирует с эффективностью 80% всего два порядка дифракции. Бинарная решетка выбрана вместо дифракционных клиньев, как более простая при изготовлении. И если пространственные частоты (α_n, β_n) подобраны определенным образом, то N секторов и M колец сформируют как раз $2N + 2M$ парциальных изображений, интенсивности которых описываются выражениями:

$$I_m^{(c)}(u, v) = |\mathfrak{F}\{C_m\} * I|^2, \quad (159)$$

$$I_n^{(s)}(u, v) = |\mathfrak{F}\{S_n\} * I|^2, \quad (160)$$

где F — операция преобразования Фурье, выполняемая линзой коррелятора. В дальнейшем будет обрабатываться только половина из всех парциальных изображений.

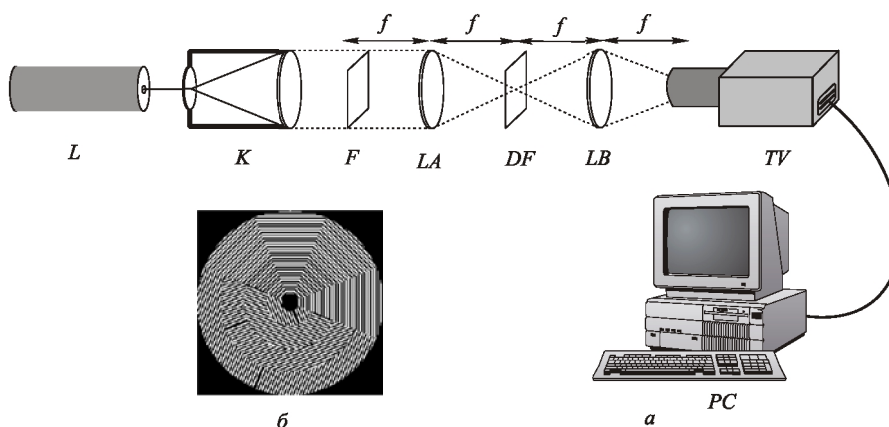


Рис. 66. Схема оптической установки для получения полей направлений и полей частот от интерферограмм (а) и амплитудный пространственный фильтр (б)

Парциальное изображение $I_n^{(s)}(u, v)$ имеет узкий радиально-щелевой спектр, т.к. сформировано с помощью фильтрации исходного изображения секторным фильтром (156). В это изображение вносят

вклад те области исходного изображения $I(x,y)$, на которых полосы интерферограммы наклонены под углом $\phi + \pi/2$ из диапазона углов: $\phi_{n-1} < \phi < \phi_n$. Аналогично этому, частичное изображение $I_m^{(c)}(u,v)$ имеет узкий кольцевой спектр, т.к. сформировано с помощью фильтрации исходного изображения кольцевым фильтром (157). В него вносят вклад те точки интерферограммы $I(x,y)$, пространственная частота полос в окрестности которых равна $2\pi r/\lambda f$, где $r_{m-1} < r < r_m$.

Разнесенные пространственно дифракционными решетками и непересекающиеся на выходе коррелятора парциальные изображения регистрируется телекамерой и, в виде массива цифровых данных, вводятся в компьютер. Центры всех парциальных изображений опять сводятся в одну точку.

При выборе N одинаковых секторов (156) фильтра (155) центральные углы будут равны

$$\bar{\phi}_n = \frac{\phi_{n-1} + \phi_n}{2} = \frac{\pi n}{N},$$

а также при M одинаковых кольцах (157) фильтра (155) центральные радиусы колец будут равны

$$\bar{r}_m = \frac{r_{m-1} + r_m}{2} = \frac{Rm}{M},$$

R — радиус апертуры фильтра.

Алгоритм аппроксимации аналогичен преобразованию Хоу — Радона [87], используемому в томографии и заключается в следующем. Точке выходного изображения с координатами (u,v) присваивается значение того угла $\bar{\phi}_n$, величина интенсивности частичного изображения которого в этой точке больше $I_n^{(s)}(u,v)$. Зависимость углов $\bar{\phi}_n$ от координат (u,v) и будет аппроксимацией ПН:

$$\bar{\phi}(u,v) = \sum_{n=1}^N \bar{\phi}_n \theta \left[I_n^{(c)}(u,v) - \bar{I}^{(s)} \right], \quad (161)$$

где

$$\overline{I^{(s)}}(u, v) = \max_{n \in [1, N]} \{I_n^{(s)}(u, v)\}, \quad (162)$$

$\theta(x)$ — функция Хевисайда: $\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$

Аналогично определяется аппроксимация НПЧ:

$$\omega'(u, v) = \sum_{m=1}^M \overline{r}_m \theta \left[I_m^{(c)}(u, v) - \overline{I^{(c)}}(u, v) \right], \quad (163)$$

где

$$\overline{I^{(c)}}(u, v) = \max_{m \in [1, M]} \{I_m^{(c)}(u, v)\}. \quad (164)$$

Продолжая аналогию с томографией можно заметить, что парциальные изображения являются как бы сечениями интерферограммы в пространстве направлений и частот.

После вычисления ПН и НПЧ, для каждой точки интерферограммы с координатами (u, v) имеются два числа (φ и ω), которые с точностью до константы определяют вектор наклона (направление и величину наклона) плоскости касательной в данной точке к искомой функции фазы:

$$\begin{aligned} \Phi_0(x, y) = \omega'(u, v) \sin[\varphi(u, v)](x - u) + \\ + \omega'(u, v) \cos[\varphi(u, v)](y - v) + C. \end{aligned} \quad (165)$$

На практике интерферограмма разбивается на k квадратных участков, в каждом из которых находится среднее ПН $\overline{\varphi}_{ij}$; $i, j = \overline{1, k}$ и среднее НПЧ $\overline{\omega}'_{ij}$.

Тогда искомая функция фазы аппроксимируется набором плоскостей (165) в каждом квадрате средними $\overline{\varphi}_{ij}$ и $\overline{\omega}'_{ij}$:

$$\Phi_{ij}(x, y) = \overline{\omega}'_{ij} \sin[\overline{\varphi}_{ij}]x + \overline{\omega}'_{ij} \cos[\overline{\varphi}_{ij}]y + C_{ij}, \quad i, j = \overline{1, k} \quad (166)$$

Постоянные C_{ij} выбираются из условия непрерывности функции (166) на границах соседних квадратов.

Для сравнения был проведен численный эксперимент по реконструкции фазы по данным измерения интенсивности в датчике Шаке — Гартмана (рис. 69).

Пример 8. На рис. 67а показана исходная фаза

$$\Phi(x, y) = x^2 + y^2. \quad (167)$$

На рис. 67б показана интерферограмма, полученная в результате интерференции световой волны с фазой (167) и плоской световой волны, падающей перпендикулярно плоскости регистрации. Размер области регистрации 2 мм. Затем методом, описанным выше, были получены поле направлений интерферограммы, показанное на рис. 67в, и поле частот, рис. 67г. На последней стадии эксперимента из полученных ПН и ПЧ восстанавливается фаза, рис. 67д.

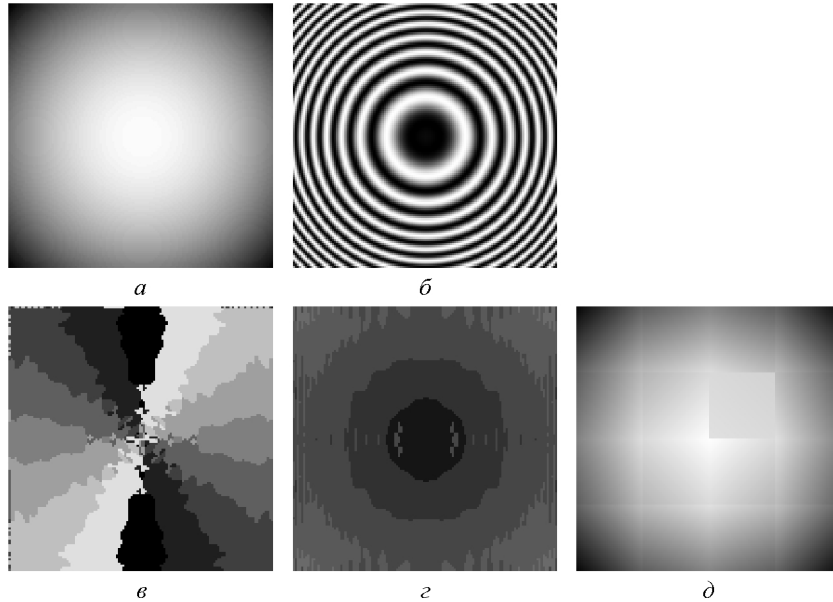


Рис. 67. Исходная фаза (а), интерферограмма (б), поле направлений (в), поле частот (г), восстановленная фаза (д)

На рис. 68б показана интерферограмма, полученная в результате интерференции световой волны с фазой (167) и плоской световой волны, падающей наклонно к плоскости регистрации. Затем из интерферограммы были получены ее ПН, рис. 68в, и ПЧ, рис. 68г. Восстановленная фаза показана на рис. 68д.

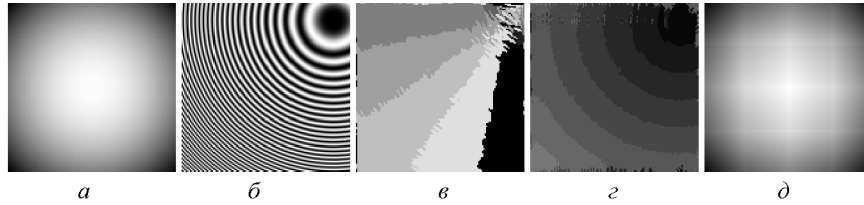


Рис. 68. Исходная фаза (а), интерферограмма (б), поле направлений (в), поле частот (г), восстановленная фаза (д)

На рис. 69 в трехмерном виде представлена исходная фаза (а), восстановленная фаза из интерферограммы по методу ПН, и для сравнения приведена фаза восстановленная по гартманограмме (в).

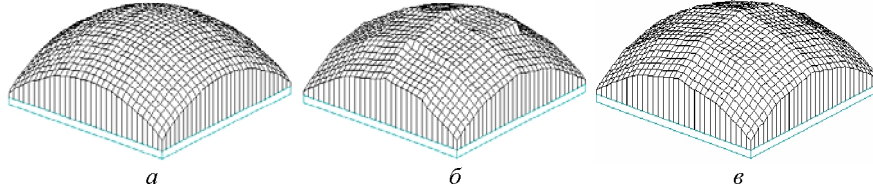


Рис. 69. Исходная фаза (а), фаза, восстановленная по полю направлений и полю частот интерферограммы (б) и фаза, восстановленная методом Гартмана-Шаке (в)

Для определения ошибки восстановления фазы использовалась величина:

$$\Delta^2 = \frac{\int_0^a \int_0^a |\Phi(x, y) - \Phi_r(x, y)|^2 dx dy}{\int_0^a \int_0^a |\Phi(x, y)|^2 dx dy}, \quad (168)$$

где $\Phi(x, y) \in [0, 2\pi]$ — исходная фаза, $\Phi_r(x, y) \in [0, 2\pi]$ — восстановленная фаза, a — размер изображения.

При восстановлении фазы (167) методом ПН $\Delta = 0,045$, при восстановлении этой же фазы из гартманограммы — $\Delta = 0,039$. При восстановлении фазы (167) методом ПН из интерферограммы полученной с наклонной опорной волной, — $\Delta = 0,041$, при восстановлении фазы методом ПН из светового поля $\Delta = 0,041$, т.е. погрешность не изменилась. Как видно из этих примеров точность метода близка к точности метода Гартмана, но рассмотренный здесь метод позволяет

с хорошей точностью восстанавливать фазу, используя сильно зашумленные интерферограммы.

На рис. 70 показаны зашумленные интерферограммы с разными значениями отношения сигнал/шум S , поля направлений, поля частот и восстановленная фаза.

Как видно из рис. 70, наибольшие изменения, которые появляются в поле направлений и в поле частот в результате зашумления, находятся там, где период полос интерферограммы больше. Эти участки и вносят основной вклад в увеличение погрешности. Если интерферограмма не содержит участков с большим периодом полос (наклонное падение опорной волны), то погрешность метода может быть уменьшена.

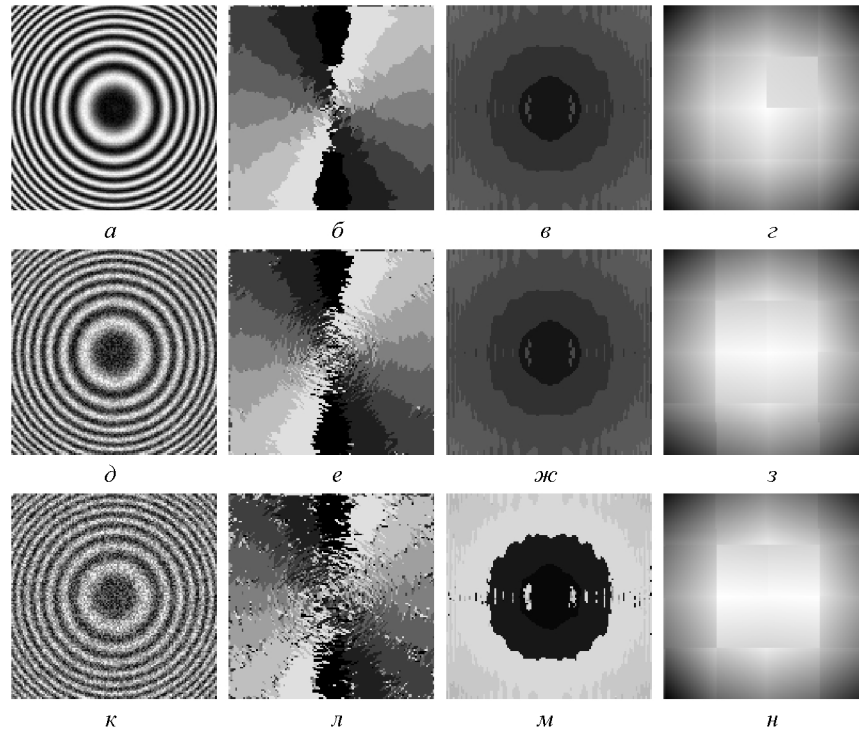


Рис. 70. Зашумленные интерферограммы (а) $S = 10$, (д) $S = 2$, (к) $S = 1$, и соответствующие им поля направлений (б, е, л), поля частот (в, ж, м) и восстановленные фазы (г, з, н). $S = 10$, $\Delta = 0,047$ (верхняя строчка); $S = 2$, $\Delta = 0,061$ (средняя строчка); $S = 1$, $\Delta = 0,147$ (нижняя строчка)

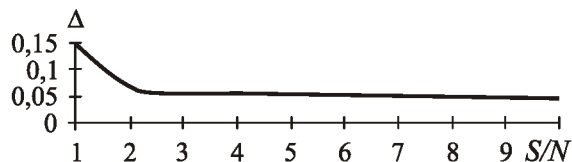


Рис. 71. Зависимость Δ от отношения сигнал/шум S , при восстановлении фазы по интерферограмме, полученной в результате интерференции световой волны с фазой (167) и плоской световой волны, падающей перпендикулярно плоскости регистрации

На рисунке 71 показана зависимость ошибки восстановления фазы Δ от отношения сигнал/шум S для интерферограммы, полученной в результате интерференции световой волны с фазой (167) и плоской световой волны, падающей перпендикулярно плоскости регистрации. Как видно из рис. 71 величина ошибки восстановления фазы при $S > 2$ практически не изменяется. При приближении S к единице значение ошибки резко возрастает. Был проведен эксперимент с набором из 10 интерферограмм, каждая из которых была получена в результате интерференции световой волны с фазой (167) и плоской световой волны, падающей перпендикулярно плоскости регистрации, с изменением геометрического размера области регистрации от 2 мм до 3 мм.

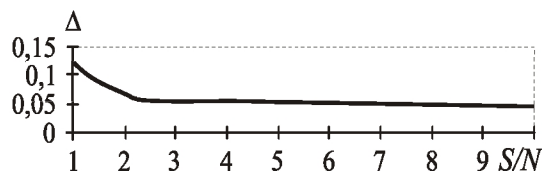


Рис. 72. Зависимость Δ от отношения сигнал/шум S для набора интерферограмм

Как видно из рис. 72, характер зависимости не меняется для набора интерферограмм. В среднем величина ошибки для группы интерферограмм даже несколько уменьшилась.

4. ОПТИЧЕСКОЕ ВЫПОЛНЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ХОУ - РАДОНА

Определять направления линий на изображении можно, не только ПН, но и осуществляя преобразование Хоу — Радона от изображения. Оптико-цифровое устройство для выполнения преобразования Хоу — Радона (ПХР) [89], основано на реализации свойства ПХР переводить неосевую точку в сдвинутую синусоиду. Это устройство содержит матрицу $N \times N$ микро-голограмм, каждая из которых формирует, при освещении плоским пучком, участок кривой равной одному периоду синусоиды, сдвинутой от центра координат пропорционально смещению микро-голограммы от центра матрицы. В результате, если осветить такую матрицу отрезком прямой, то на выходе сформируется яркая точка, как результат пересечения многих синусоид.

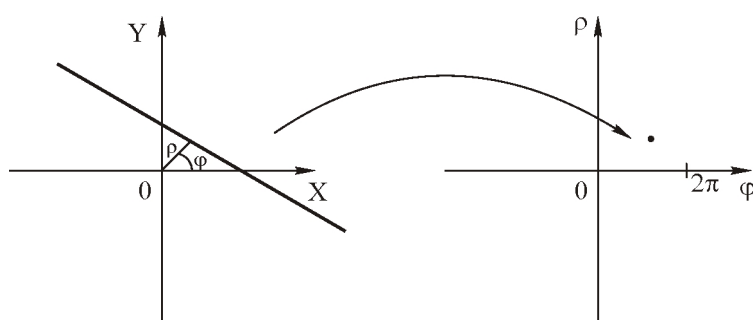


Рис. 73. Преобразование Хоу — Радона

Недостатком такой реализации ПХР является трудоемкость расчета и изготовления матрицы $N \times N$ голограмм, каждая из которых имеет размерность $M \times M$ и рассчитывается за число итераций L . Чтобы рассчитать всю матрицу нужно выполнить $L \times N \times N$ итераций, каждая из которых включает выполнение двух преобразований Фурье размерности $M \times M$.

В [90] рассматривается модифицированная оптическая реализация ПХР. Такое преобразование осуществляется с помощью N пар скрещенных цилиндрических линз. Одна линза из пары формирует

изображение линии в поперечном направлении, а вторая – формирует пространственный спектр в продольном направлении линии (собирает линию в точку). Набор из N пар нужен, чтобы осуществить фокусировку прямых линий с разной ориентацией во входной плоскости. Недостатком этого способа является то, что каждая прямая линия будет переводиться в точку с некоторой эффективностью и другими $(N-1)$ парами линз. Это приводит к уменьшению отношения сигнал/шум всего устройства.

В [91] был предложен более простой способ оптического выполнения ПХР. Он основан на свойстве преобразования переводить прямую линию в точку (рис. 73). В этом случае устройство содержит коррелятор с одним входом и с N выходами. В задней фокальной плоскости сферической линзы коррелятора расположен фазовый пространственный фильтр, состоящий из N угловых секторов с углом при вершине каждого $\Delta\varphi = 2\pi / N$.

Каждый такой угловой сектор имеет функцию пропускания цилиндрической линзы

$$\tau(x, y) = \exp\left[-\frac{ik}{2f}(x \cos \varphi_n - y \sin \varphi_n - p_n)^2\right], \quad (169)$$

где

$$(x, y) \in \left\{ \varphi_n - \frac{\Delta\varphi}{2} < \arctg\left(\frac{y}{x}\right) \leq \varphi_n + \frac{\Delta\varphi}{2} \right\}, \quad \varphi_n = n\Delta\varphi, \quad n = 0, 1, \dots, N-1.$$

На фокусном расстоянии f от фильтра расположен фотоприемник, регистрирующий излучение только вдоль лучей, исходящих из центра под соответствующими углами. Оптическая схема устройства показана на рис. 74, на котором изображены коллимированный пучок, освещающий объект-изображение, сферическая линза, секторный пространственный фильтр с цилиндрическими линзами, фотоприемное устройство и компьютер.

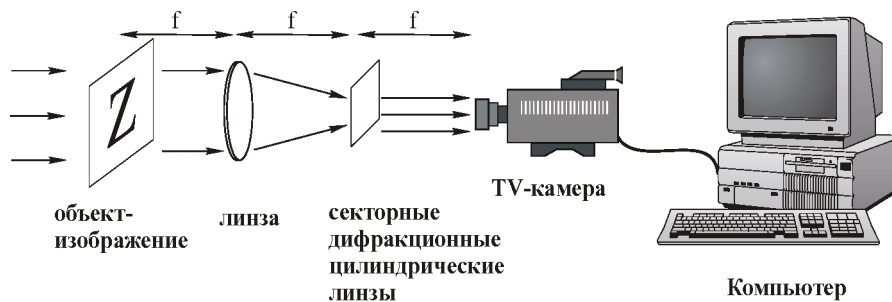


Рис. 74. Оптическая схема для реализации преобразования Хоу — Радона

Работа устройства основана на реализации интегральной формы, связывающей ПХР и Фурье. Преобразование Хоу — Радона от функции $f(x, y)$ имеет вид:

$$R(\rho, \phi) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(\rho - x \cos \phi - y \sin \phi) dx dy, \quad (170)$$

где δ — дельта функция Дирака, ρ — величина перпендикуляра, проведенного из центра координат к текущей прямой линии, ϕ — угол между перпендикуляром к текущей прямой линии и осью OX (рис. 73). Нетрудно показать, что имеет место уравнение связи между двумя интегральными преобразованиями:

$$R(\rho, \phi) = \int_0^{\infty} F(t, \phi) e^{2\pi i \rho t} dt, \quad (171)$$

где

$$F(t, \phi) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp[-2\pi i (xt \cos \phi + yt \sin \phi)] dx dy. \quad (172)$$

Из уравнений (171) и (172) видно, что ПХР является результатом выполнения одномерного преобразования Фурье по радиальной координате от двумерного Фурье-образа исходной функции.

Устройство, показанное на рис. 74, реализует уравнения (171) и (172) приближенно с дискретностью по координате ϕ равной

$\Delta\phi = 2\pi / N$, и по координате ρ с дискретностью $\Delta\rho$ равной разрешению фотоприемника.

На рис. 75 показан пример численного моделирования работы оптической схемы, рис. 74. Тест-объект (рис. 75а) состоит из набора прямых отрезков, расположенных под углами 0 и $\pi/2$ к осям координат. Амплитудная маска размерностью 512×512 пространственного фильтра, который состоит из 8 цилиндрических линз, расположенных в угловых секторах, показана на рис. 75б. На рис. 75в показан результат, появляющийся на выходе оптической установки: набор светлых пятен, расположенных на осях OX и OY , число которых совпадает с числом отрезков прямых на входном изображении.

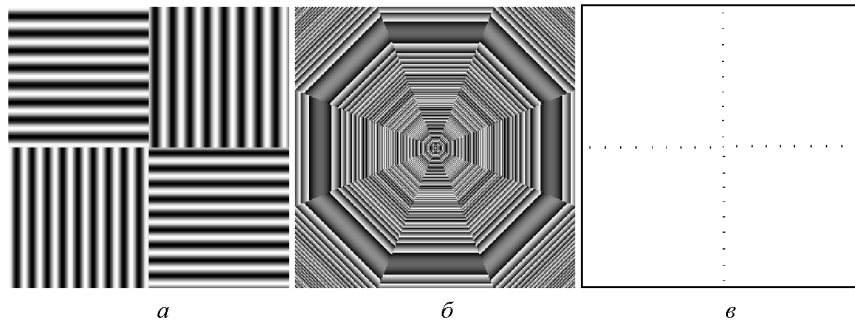


Рис. 75. Тестовое изображение (а), фазовый пространственный фильтр (б), Хоу — Радон-образ изображения (в)

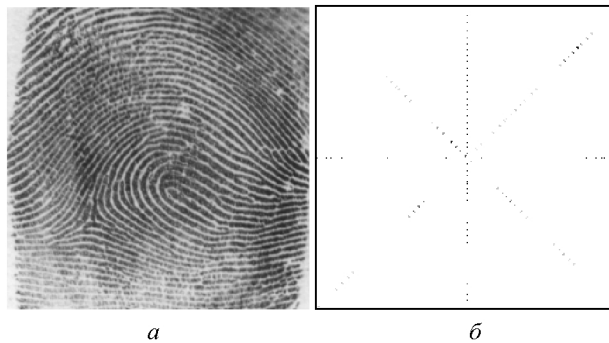


Рис. 76. Изображение отпечатка пальца (а) и его Хоу — Радон-образ (б)

На рис. 76 показаны изображение отпечатка пальца (а) и его Хоу-Радон—образ (б), полученный с помощью численного моделирования того же устройства. Каждой линии исходного изображения соответствует точка в Хоу-Радон—образе. Происходит сжатие информации аналогичное тому, которое имеет место при построении поля направлений.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Существует ряд актуальных задач обработки изображений, таких как выделение признаков при распознавании образов, которые наиболее оперативно решаются гибридными оптико-цифровыми методами. В данном пособии разработаны оптико-цифровой метод построения поля направлений, и его возможные применения для идентификации дактилограмм и реконструкции фазы светового поля по интерферограмме. В многочисленных вычислительных и натуральных экспериментах исследованы свойства этого метода, и доказана эффективность его применения в указанных выше задачах.

Метод позволяет существенно сократить затраты машинного времени для получения поля направлений, за счет оптической реализации наиболее емкой по количеству вычислений стадии работы. Оптическое вычисление поля направлений реализуется за время, которое необходимо для их ввода в компьютер с помощью телекамеры (около 0,1 с). На эту же операцию, при цифровой обработке, современному компьютеру требуется время около 100 с, что существенно замедляет обработку. Известная проблема метода оптических вычислений здесь решается за счет сжатия информации: при вычислении поля направлений на изображении исчезает высокая пространственная частота, играющая роль несущей, наличие которой характерно для дактилограмм и интерферограмм.

Так как количество дактилограмм в системах персонального доступа и мировых базах данных постоянно увеличивается, то очевидно, что цифровые методы анализа дактилограмм могут оказаться недостаточно быстрыми для практического использования. В этом случае гибридные оптико-цифровые методы, основанные на построении поля направлений, дают эффективное решение проблемы.

Решение интегрального уравнения на собственные значения с экспоненциально-косинусным ядром.

Рассмотрим одномерное интегральное уравнение на собственные значения на симметричном интервале $x \in [-A, A]$:

$$\int_{-A}^A R(x-u)\psi(u) du = \lambda\psi(x), \quad (\text{П1.1})$$

с экспоненциально-косинусным ядром

$$R(\tau) = \sigma^2 \exp(-\alpha|\tau|) \cos\beta\tau, \quad (\text{П1.2})$$

имеющим спектр:

$$G(\omega) = \frac{2\alpha\sigma^2(\alpha^2 + \beta^2 + \omega^2)}{\omega^4 + 2\omega^2(\alpha^2 - \beta^2) + (\alpha^2 + \beta^2)^2}, \quad (\text{П1.3})$$

где ω — пространственная частота.

В соответствии с алгоритмом решения интегрального уравнения II-го рода для ядра с дробно-рациональным спектром [19], интегральное уравнение (П1.1) сводится к линейному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами:

$$\begin{aligned} \psi^{(4)}(x) - 2\left(\alpha^2 - \beta^2 - \frac{\alpha\sigma^2}{\lambda}\right)\psi^{(2)}(x) + \\ + (\alpha^2 + \beta^2)\left(\alpha^2 + \beta^2 - \frac{2\alpha\sigma^2}{\lambda}\right)\psi(x) = 0. \end{aligned} \quad (\text{П1.4})$$

Решение этого уравнения можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \psi(x) = b_1 \exp\left(-E \frac{x}{A}\right) + b_2 \exp\left(E \frac{x}{A}\right) + \\ + b_3 \exp\left(-\Gamma \frac{x}{A}\right) + b_4 \exp\left(\Gamma \frac{x}{A}\right), \end{aligned} \quad (\text{П1.5})$$

где $b_1 \div b_4$ — постоянные коэффициенты, а E и Γ — корни соответствующего (П1.5) характеристического уравнения, удовлетворяющие по теореме Виета условиям:

$$\begin{aligned} E^2 + \Gamma^2 &= 2 \left(\alpha^2 - \beta^2 - \frac{A\alpha\sigma^2}{\lambda} \right), \\ E^2\Gamma^2 &= (\alpha^2 + \beta^2) \left(\alpha^2 + \beta^2 - \frac{2A\alpha\sigma^2}{\lambda} \right). \end{aligned} \quad (\text{П1.6})$$

Переходя от комплексных уравнений (П1.6) к вещественным, представив E и Γ в комплексном виде: $E = \varepsilon_0 + i\varepsilon$, $\Gamma = \gamma + i\gamma_0$ получаем пять возможных случаев решения (П1.5):

$$\begin{aligned} 1: & \begin{cases} \varepsilon_0 = 0, \quad \gamma_0 = 0, \\ \varepsilon^2 + \gamma_0^2 = -2 \left(\alpha^2 - \beta^2 - \frac{A\alpha\sigma^2}{\lambda} \right), \\ \varepsilon^2\gamma_0^2 = (\alpha^2 + \beta^2) \left(\alpha^2 + \beta^2 - \frac{2A\alpha\sigma^2}{\lambda} \right); \end{cases} \\ 2: & \begin{cases} \varepsilon = 0, \quad \gamma_0 = 0, \\ \varepsilon_0^2 + \gamma^2 = 2 \left(\alpha^2 - \beta^2 - \frac{A\alpha\sigma^2}{\lambda} \right), \\ \varepsilon_0^2\gamma^2 = (\alpha^2 + \beta^2) \left(\alpha^2 + \beta^2 - \frac{2A\alpha\sigma^2}{\lambda} \right); \end{cases} \\ 3: & \begin{cases} \varepsilon_0 = 0, \quad \gamma_0 = 0, \\ \varepsilon^2 - \gamma^2 = 2 \left(\alpha^2 - \beta^2 - \frac{A\alpha\sigma^2}{\lambda} \right), \\ \varepsilon^2\gamma^2 = -(\alpha^2 + \beta^2) \left(\alpha^2 + \beta^2 - \frac{2A\alpha\sigma^2}{\lambda} \right); \end{cases} \end{aligned}$$

$$4: \begin{cases} \varepsilon = 0, \quad \gamma = 0, \\ \varepsilon_0^2 - \gamma_0^2 = -2 \left(\alpha^2 - \beta^2 - \frac{A\alpha\sigma^2}{\lambda} \right), \\ \varepsilon_0^2 \gamma_0^2 = -(\alpha^2 + \beta^2) \left(\alpha^2 + \beta^2 - \frac{2A\alpha\sigma^2}{\lambda} \right); \end{cases}$$

$$5: \begin{cases} \varepsilon_0 = \gamma, \quad \varepsilon = -\gamma_0, \quad \varepsilon_0^2 + \varepsilon^2 = (\alpha^2 + \beta^2) \left(\alpha^2 + \beta^2 - \frac{2A\alpha\sigma^2}{\lambda} \right), \\ \varepsilon_0^2 - \varepsilon^2 = \alpha^2 - \beta^2 - \frac{A\alpha\sigma^2}{\lambda}. \end{cases}$$

Все случаи, кроме 2 и 3, вступают в противоречие при $\lambda \rightarrow 0$. При этом 2 и 3 эквивалентны. Примем 3.

Подставив (П1.2) и (П1.5) в интегральное уравнение (П1.1) и приравняв коэффициенты при одинаковых линейно-независимых функциях, получаем систему уравнений, из которой видно, что возможны два варианта:

$$B.1: b_1 = b_2, \quad b_3 = b_4, \quad B.2: b_1 = -b_2, \quad b_3 = -b_4$$

каждому из которых соответствует система трансцендентных уравнений [28]:

$$\begin{cases} G_1(\gamma)G_2(i\varepsilon) \left\{ \left(\frac{\alpha}{\varepsilon} F_1(i\varepsilon) \right)^P \pm \operatorname{tg} \varepsilon \right\} \left\{ (F_2(\gamma))^P + \operatorname{th} \gamma \right\} - \\ - G_1(i\varepsilon)G_2(\gamma) \left\{ \left(\frac{\alpha}{\gamma} F_1(\gamma) \right)^P - \operatorname{th} \gamma \right\} \left\{ (F_2(i\varepsilon))^P \operatorname{tg} \varepsilon \right\} = 0, \quad (П1.7) \\ \gamma^2 = (\alpha^2 + \beta^2) \frac{\alpha^2 - 3\beta^2 + \varepsilon^2}{\alpha^2 + \beta^2 + \varepsilon^2}, \end{cases}$$

$$\text{где } F_1(x) = \frac{\beta^2 + (\alpha^2 - x^2)}{\beta^2 - (\alpha^2 - x^2)}, \quad F_2(x) = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + x^2}{2\alpha x},$$

для В.1: $G_1(x)=1$, $G_2(x)=\beta^2-(\alpha^2-x^2)$, $P=1$, и используется верхний знак;

для В.2: $G_1(x)=\alpha^2+\beta^2+x^2$, $G_2(x)=\alpha^2+\beta^2-x^2$, $P=-1$, и используется нижний знак.

Каждый из вариантов системы (П1.7) имеет бесконечное множество решений, которые могут быть отделены на непересекающихся интервалах, соответствующих $\psi_k(x)$:

$$\text{В.1: } \left(0, \frac{\pi}{2}\right), k=0; \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right), \dots, \left(\frac{\pi(k-1)}{2}, \frac{\pi(k+1)}{2}\right), k=2, 4, 6, \dots$$

$$\text{В.2: } \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right), \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right), \dots, \left(\frac{\pi k}{2}, \frac{\pi(k+2)}{2}\right), k=1, 3, 5, \dots$$

Итак, решением интегрального уравнения для экспоненциально-косинусной корреляционной функции являются собственные функции $\psi_k(x)$ вида

$$\psi_k(x) = \begin{cases} d_{1k} \cos\left(\varepsilon_k \frac{x}{A}\right) + d_{2k} \operatorname{ch}\left(\gamma_k \frac{x}{A}\right), & k=0, 2, 4, \dots \\ c_{1k} \sin\left(\varepsilon_k \frac{x}{A}\right) + c_{2k} \operatorname{sh}\left(\gamma_k \frac{x}{A}\right), & k=1, 3, 5, \dots \end{cases} \quad (\text{П1.8})$$

где ε_k и γ_k с четными k являются решениями системы (П1.7) для В.1, с нечетными k — решениями системы (П1.7) для В.2, а коэффициенты d_{1k} , d_{2k} и c_{1k} , c_{2k} определяются из условия нормировки, соответственно, по формулам

$$K_1 = \left\{ A \left[\left(1 \pm \frac{\sin 2\varepsilon}{2\varepsilon} \right) + 4D^2 \left(1 \pm \frac{\operatorname{sh} 2\gamma}{2\gamma} \right) - \frac{4DB}{\varepsilon^2 + \gamma^2} \right] \right\}^{-1/2}, \quad (\text{П1.9})$$

$$K_2 = -DK_1, \quad D = 2 \frac{E_1(\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2)}{E_2(\alpha^2 + \beta^2 + \varepsilon^2)},$$

где В.1: $d_{1k} = K_1$, $d_{2k} = K_2$, $k=0, 2, 4, \dots$;

$$B = e^\gamma (\gamma \cos \varepsilon + \varepsilon \sin \varepsilon) - e^{-\gamma} (\gamma \cos \varepsilon - \varepsilon \sin \varepsilon),$$

$$E_1 = (\alpha^2 + \beta^2 - \varepsilon^2) \cos \varepsilon + 2\alpha\varepsilon \cos \varepsilon,$$

$$E_2 = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)(e^\gamma + e^{-\gamma}) + 2\alpha\gamma(e^\gamma + e^{-\gamma});$$

B.2: $c_{1k} = K_1, c_{2k} = K_2, k=1, 3, 5, \dots;$

$$B = e^\gamma(\gamma \sin \varepsilon + \varepsilon \cos \varepsilon) - e^{-\gamma}(\gamma \sin \varepsilon - \varepsilon \cos \varepsilon),$$

$$E_1 = (\alpha^2 + \beta^2 - \varepsilon^2) \sin \varepsilon + 2\alpha\varepsilon \cos \varepsilon,$$

$$E_2 = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)(e^\gamma - e^{-\gamma}) + 2\alpha\gamma(e^\gamma + e^{-\gamma}).$$

При этом собственные значения

$$\lambda_k = \frac{2A\alpha\sigma^2(\alpha^2 + \beta^2 + \varepsilon_k^2)}{\varepsilon_k^4 + 2\varepsilon_k^2(\alpha^2 - \beta^2) + (\alpha^2 + \beta^2)^2}. \quad (\text{П1.10})$$

При $\beta = 0$ приходим к случаю экспоненциальной корреляционной функции. При этом в системе (П1.7) $\gamma^2 = \alpha^2$, то есть становится константой, и трансцендентная система превращается в уравнение. Для обоих вариантов (П1.7) принимает вид

$$\begin{aligned} (\alpha^2 + \varepsilon_k^2) \left(\frac{\varepsilon_k}{\alpha} + \operatorname{tg} \varepsilon_k \right) &= 0, \quad k = 0, 2, 4, \dots; \\ (\alpha^2 + \varepsilon_k^2) \left(\frac{\alpha}{\varepsilon_k} - \operatorname{tg} \varepsilon_k \right) &= 0, \quad k = 1, 3, 5, \dots \end{aligned} \quad (\text{П1.11})$$

Нормированные коэффициенты описываются формулами

$$\begin{aligned} d_{1k} &= \frac{1}{\sqrt{A \left(1 + \frac{\sin 2\varepsilon_k}{2\varepsilon_k} \right)}}, \quad D = 0, \quad d_{2k} = 0, \quad k = 0, 2, 4, \dots; \\ c_{1k} &= \frac{1}{\sqrt{A \left(1 - \frac{\sin 2\varepsilon_k}{2\varepsilon_k} \right)}}, \quad D = 0, \quad c_{2k} = 0, \quad k = 1, 3, 5, \dots \end{aligned} \quad (\text{П1.12})$$

Собственные значения принимают вид:

$$\lambda_k = \frac{2A\alpha\sigma^2}{\alpha^2 + \varepsilon_k^2}, \quad (\text{П1.13})$$

а базисные функции

$$\Psi_k(x) = \begin{cases} d_{1k} \cos\left(\varepsilon_k \frac{x}{A}\right), & k = 0, 2, 4, \dots, \\ c_{1k} \sin\left(\varepsilon_k \frac{x}{A}\right), & k = 1, 3, 5, \dots \end{cases} \quad (\text{П1.14})$$

Формулы (П1.11) — (П1.14) совпадают с ранее полученным в [20] решением. Таким образом, при $\beta \neq 0$ получено обобщение на случай экспоненциально-косинусной корреляционной функции.

Как видно из системы (П1.6), полученное решение имеет место при выполнении условия

$$\alpha^2 - 3\beta^2 + \varepsilon^2 > 0. \quad (\text{П1.15})$$

При достаточно больших ε , то есть для больших номеров базисных функций: $\varepsilon_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \infty$, условие (П1.15) будет всегда выполнено.

ПРИЛОЖЕНИЕ П2 К РАЗДЕЛУ 2.2

Пусть ξ — случайная величина, принимающая значение 1, если некоторое событие, вероятность которого p , происходит, и значение 0, если это событие не происходит.

Пусть проведено N опытов и получена серия значений ξ : $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$, каждое из которых равно либо 0, либо 1. В этом случае оценкой вероятности p будет служить величина [22]:

$$\hat{p} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \xi_n. \quad (\text{П2.1})$$

Оценка (П2.1) является несмещенной и ее точность характеризуется шириной интервала, в который она попадает с заданной доверительной вероятностью γ [31]:

$$P \left\{ \left| \hat{p} - p \right| \leq C_\gamma \sqrt{\frac{p(1-p)}{N}} \right\} = 1 - \gamma, \quad (\text{П2.2})$$

где C_γ — коэффициент, определяемый по заданной γ с помощью таблиц математической статистики (обычно полагается $C_\gamma = 2$ или $C_\gamma = 3$, что при $N \gg 1$ соответствует доверительной вероятности $\gamma \approx 0,95$ и $\gamma \approx 0,997$).

Из формулы (П2.2) следует выражение для относительной ошибки оценивания:

$$\mu_\gamma = \frac{\left| \hat{p} - p \right|}{p} = C_\gamma \sqrt{\frac{1-p}{pN}}. \quad (\text{П2.3})$$

Список специальных терминов

Пространственная фильтрация	4
Фурье-каскад	47, 48
Карунена-Лозва базис	8
Корреляционная функция	8, 12, 18, 20, 25, 93, 120, 122
Адамара базис	34, 36, 86, 90, 95, 98
Гаусса-Лагерра моды	40, 47,
Цернике базис	40, 50, 51, 54, 56, 58
поле направлений	60, 67, 78
Дирака функция	62, 114,
Радона преобразование	76, 106, 112, 114
Вектор признаков	75, 86, 90, 92
Гартмана-Шаке датчик	109

Список контрольных вопросов

1. Из каких элементов состоит когерентно-оптическая система, реализующая пространственно-инвариантную фильтрацию.
2. Дайте определение преобразования Фурье производимого сферической линзой.
3. Сформулируйте определение базиса Карунена-Лозва.
4. Напишите формулу экспоненциально-косинусной корреляционной функции.
5. Напишите условие ортогональности непрерывных базисных функций.
6. Напишите формулу, определяющую функции Адамара.
7. Напишите функцию комплексного пропускания ДОЭ для вычисления коэффициентов разложения Адамара в заданных точках.
8. Дайте определение полиномов Цернике.
9. Дайте определение поля направлений.
10. Напишите формулу для среднеквадратичного отклонения угловой величины.
11. Как зависит среднеквадратичное отклонение поля направлений от числа выделяемых направлений.
12. Напишите формулу для построения поля направлений в оптико-электронной системе.
13. Напишите формулу для построения одноканального поля направлений.
14. Дайте определение вектора признаков.
15. Начертите схему классификатора образов.
16. Дайте определение поля частот.
17. Дайте определение нормированного поля частот.
18. Опишите оптико-цифровой метод построения поля частот.
19. Дайте определение преобразования Хоу-Радона.
20. Начертите оптическую схему для реализации преобразования Хоу-Радона.

Литература

1. Сойфер ВА *Цифровая голография и ее применение* (Куйбышев: КуАИ, 1978).
2. Lee WH, Greer MO *Appl. Opt.*, **13** (4), 925-930 (1974).
3. Stroke GW, Haliowa M, Srinivasar V *Phys. Letters.*, **A51** (7), 383-385 (1975).
4. Сойфер ВА *Моделирование процесса голографирования в случайной среде. Моделирование многолучевых радиоканалов для анализа и синтеза систем передачи информации.* (М.: Наука, 1978)
5. Веряскин ФФ, Выдрин ДВ, Давыдов ВГ, Мантуш ТН, Нежевенко ЕС, Панков БН, Твердохлеб ПН *Автометрия*, (3), 73-77 (1975).
6. Голуб МА, Сойфер ВА *Тез. докл. IV Междунар. симпоз. по теории информации.* (Ч.1. - М.-Л., 31-33, 1976).
7. Сойфер ВА *Матер. IX Всесоюзной школы по автоматизации научных исследований.* (Л.: ЛИЯФ, 350-354 1977).
8. Сойфер ВА *Матер. IX Всесоюзной школы по голографии и когерентной оптике.* (Л.: ЛИЯФ, 199-228, 1977).
9. Сойфер ВА *Автореферат диссерт. на соиск. ученой степени д.т.н.* (Л.: ЛЭТИ, 32 1984).
10. Голуб МА, Сойфер ВА *Труды МФТИ. Серия: радиотехника и электроника*, (Долгопрудный, 120-125, 1977).
11. Ту Дж, Гонсалес Р *Принципы распознавания образов* (М.: Мир, 1978).
12. Фор А *Восприятие и распознавание образов* (М.: Машиностроение, 1989).
13. Фу КС *Последовательные методы в распознавании образов и обучении машин* (М.: Наука, 1971).
14. Голуб МА *Диссертация на соискание ученой степени д.ф.-м.н.* (Куйбышев, 1990).
15. Ватанабе С *Автоматический анализ сложных изображений* (М.: Мир, 254-275 1969).
16. Давенпорт БВ, Рут ВЛ *Введение в теорию случайных сигналов и шумов* (М.: Изд-во иностр. лит., 1960).
17. Karhunen K, *Ann. Acad. Sci. Fennicae. Helsinki*, 1947, Ser. A137.

18. Кловский ДД, Сойфер ВА *Обработка пространственно-временных сигналов* (М.: Связь, 1976).
19. Youla DC, *IRE Trans. on Inf. Theory* (**ИТ-3** (3), 187-193 1957).
20. Van Trees HL, *Detection, Estimation, and Modulation Theory. Part 2. Nonlinear Modulation Theory* (New York, 1971).
21. Быков ВВ *Цифровое моделирование в статистической радиотехнике* (Изд-во "Советское радио", 1971).
22. Ермаков СМ, Михайлов ГА *Статистическое моделирование* (М.: Наука, 1982).
23. Голуб МА, Сойфер ВА *Тезисы докладов III всесоюзной конференции: Математические методы распознавания образов* (Львов, ФМИ АН УССР, 141-142 1987).
24. Soifer VA and Khonina SN *Pattern Recognition and Image Analysis* (**4**, (2), 137-148 1994).
25. Голуб МА, Сойфер ВА, *Спектральные методы обработки информации в научных исследованиях: Труды Всесоюзного семинара* (Пушино, 108-134 1980).
26. Soifer VA, Golub MA and Khonina SN *Pattern Recognition and Image Analysis* (**3**, (3), 289-295 1993).
27. Сойфер ВА *Введение в дифракционную микрооптику* (Самара, 1996).
28. Голуб МА, Хонина СН *Компьютерная оптика* (вып.13, 49-53 1993).
29. Свешников АА *Прикладные методы теории случайных функций* (М.: Наука, 1968).
30. Сойфер ВА *Теория информации* (Куйбышев: КуАИ, 1975).
31. Бендат Дж, Пирсол А *Прикладной анализ случайных данных* (М.: Мир, 1989).
32. Ченцова ОБ, Тедор ИЛ, Прокофьева ГЛ, Маркушева ЛИ, Прошина. ОИ *Кристаллографический метод обследования при некоторых заболеваниях глаз. Методические рекомендации* (М., 1988).
33. Чухман-Дворянова ТП *VI съезд офтальмологов России. Тезисы докладов* (М., 395 1994).
34. Khonina SN, Kotlyar VV, Soifer VA, Dvoryanova TP *SPIE* (v.2363 Image Processing and Computer Optics 249-255 1994).

35. Soifer VA, Kotlyar VV, Khonina SN, Skidanov RV *Proceedings of the 4-th Russian-German Workshop "Pattern Recognition and Image Analysis"* (139-143, Valday, 1996).
36. Ярославский ЛП *Введение в цифровую обработку изображений* (М.:Сов. радио, 1979).
37. Pratt WK *Digital image processing* (Wiley - Interscience publication, New York, 1978).
38. Gerchberg RW, Saxton WO *Optik* (**35**, 237-246, 1972).
39. Берёзный АЕ, Прохоров АМ, Сисакян ИИ, Сойфер ВА *Бессель-оптика* (ДАН СССР, **234** (4), 802-805 1984).
40. Kotlyar VV, Khonina SN, Soifer VA *J. Mod. Opt.* (**42** (6), 1231-1239 1995).
41. Kotlyar VV, Khonina SN, Soifer VA *Optik* (**102** (2), 45-50 1996).
42. Kotlyar VV, Soifer VA, Khonina SN *J. Mod. Opt.* (**44** (7), 1403-1416 1997).
43. Schechner YY, Piestun R, Shamir J *Physical Rev. E* (**54** (1), 51-53 1996).
44. Soifer VA, Golub MA *Laser beam mode selection by computer-generated holograms*, (CRC Press, Boca Raton, 1994).
45. Born M, Wolf E *Principles of Optics* (Pergamon Press, Oxford, 1968).
46. Vasara A, Turunen J, Friberg AT *J. Opt. Soc. Am. A* (**6** (11), 1748-1754 1989).
47. Kotlyar VV, Nikolsky IV, Soifer VA *Optik* (**98** (1), 26-30 1994).
48. Soifer VA, Kotlyar VV, Doskolovich LL *Iterative methods for diffractive optical elements computation* (Taylor and Francis, London, 1997).
49. Kotlyar VV, Khonina SN, and Soifer VA *Journal of Modern Optics* (**45** (7), 1495-1506 1998).
50. Yatagai T, Nakadata S, Idesawa M, Saito H, *Opt. Eng.* (**21**(2), 432-435 1982).
51. Fienup JR *Appl. Opt.* (**21**(15), 2758-2769 1982).
52. Artzner G *Opt. Eng.* (**31**(6), 1311-1322 1992).
53. Golub MA, Prokhorov AM, Sisakian IN, Soifer VA *Sov. J. Quant. Electr.* (**12**(9), 1208-1209 1982).
54. Котляр ВВ *Компьютерная оптика* (Москва, **5**, 31-33 1989).
55. Kotlyar VV, Khonina SN, Soifer VA, Wang Y, Zhao D *Компьютерная оптика* (Самара-Москва, вып. 17, 43-48 1997)
56. Виноградов И.М. *Математическая энциклопедия* (Москва: Советская энциклопедия, 1982, т. 3).

57. Soifer VA, Kotlyar VV, Khonina SN, Khramov AG, and Skidanov RV, *Proceeding of SPIE, Digital Image Processing and Computer Graphics* (3346, 238-258 1997).
58. Soifer VA, Kotlyar VV, Khonina SN, Skidanov RV *The 13th Inter. Conf. on Pattern Recognition, Technical Univer. (Vienna, 25-29 Aug. 2, 586-590 1996).*
59. Сойфер ВА, Котляр ВВ, Хонина СН, Скиданов РВ *Компьютерная оптика* (вып. 16, 78-89 1996).
60. Мардиа К *Статистический анализ угловых наблюдений* (М.: «Наука», 1978).
61. Novicov SO, Kot VS *Proceeding of SPIE, Digital Image Processing and Computer Graphics* (3346, 258-269 1997).
62. Chen Z, Sun Y, Zhang Y, Mu G *Optical Engineering* (34 (3), 834-839 1995).
63. Gamble FT, Frye LM, Grieser DR *Applied Optics* (31 (5), 652-655 1992).
64. McMahan DH, Johnson GL, Teeter SL, Whitheg CG *IEEE Trans. Comput.* (C-24 (5), 358-368 1975).
65. Johnson EG, Brasher JD, Gregory D, Erbach P, Duingnan M, Behrmann G, Lee SH, Dasghner W, Long P *Opt. Eng.* (37 (1), 18-25 1998).
66. Javidi JD, Sergeant A *Opt. Eng.* (36 (3), 935-942 1997).
67. Brasher JD, Johnson EG *Opt. Eng.* (36 (9), 2409-2415 1997).
68. Grycewicz T.J, Javidi B *Opt. Eng.* (35 (9), 2519-2525 1996).
69. Huh H, Pan JK *Opt. Eng.* (35 (4), 997-1002 1996).
70. Seth M, Datta AK *Opt. Eng.* (35 (6), 1779-1794 1996).
71. Rodolfo J, Rajbenbach H, Haignard JP *Opt. Eng.* (34 (4), 1166-1171 1995).
72. Dawagoe M, Tojo A *Pattern Recognition* (17, 295-303 1984).
73. Drake MD, Lidd ML, Fiddy MA *Opt. Eng.* (35 (9), 2499-2505 1996).
74. Сойфер ВА, Котляр ВВ, Хонина СН *Автометрия* (вып. 1, 31-36 1996).
75. Дуда РО, Харт ПЕ *Распознавание образов и анализ сцен* (М.: Мир, (1976).
76. Загоруйко НГ *Методы распознавания и их применение* (М.: Советское радио, 1972).
77. Soifer VA, Kotlyar VV, Khonina SN, RV Skidanov *The 13th Inter. Conf. on Pattern Recognition* (Technical Univer. of Vienna, 25-29 Aug. 2, 586-590 1996).

78. Soifer VA, Kotlyar VV, Khonina SN, Skidanov RV *Proceedings of SPIE* (v.3238, Optoelectr. and Hybrid Opt./Dig. Syst. for Im.Proc., 66-73, 1997).
79. Soifer VA, Khonina SN, Ilyasova NYu, and Kotlyar VV *Proceedings of SSPR '94* (1994).
80. Khonina SN, Kotlyar VV, Soifer VA, Dvoryanova TP *Proceedings of SPIE "Interneshonel Workshop on Image Processing and Computer Optics"* (2363, 249-255 1994).
81. *Применение методов фурье-оптики. /Под ред. Старка Г. – (М.: Радио и связь, 1988).*
82. Скиданов РВ *Компьютерная оптика* (вып. 17, 130-134 1997).
83. Вентцель ЕС, Овчаров ЛА *Теория вероятностей и ее инженерные приложения. (М.: Наука, 1988).*
84. Takeda M, Ina H, Kabayashi S *J. Opt. Soc. Am.* (72 (1), 157-160, 1982).
85. Kotlyar VV, Seraphimovich PG, Zalyalov OK *Opt. and Laser Technology* (27 (4), 251-254, 1995).
86. Котляр ВВ, Залялов ОК *Компьютерная оптика* (Самара, СГАУ, вып. 16, 71-74, 1996).
87. Скиданов РВ, Соифер ВА, Котляр ВВ *Труды XXV школы-симпозиума по когерентной оптике и голографии* (Ярославль, ЯГПУ, 102-110 1997).
88. Aksenov VP, Isaev YuP *Optics Letters* (17. 1180-1182 1992).
89. Ambs P, Lee SH, Tian Q, Fainman Y *Appl. Opt.* (25 (22) 4039-4045 1986).
90. Woodford P, Casasent D *Opt. Mem.and Neur. Net.* (1, 1-16 1997).
91. Соифер ВА, Котляр ВВ, Скиданов РВ *Компьютерная оптика* (вып. 17, 143-144 1997).

Учебное издание

*Скиданов Роман Васильевич,
Хонина Светлана Николаевна,
Котляр Виктор Викторович,
Сойфер Виктор Александрович*

**ДОЭ
ДЛЯ ОПТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ
ИНФОРМАЦИИ**

Учебное пособие

Технический редактор Н. Л. К а з а н с к и й
Редакторская обработка Н. С. К у п р и я н о в а
Корректорская обработка Т. К. К р е т и н и н а
Компьютерная вёрстка А. Г. Н а л и м о в, А. А. К о в а л е в, С. В. С м а г и н
Доверстка О. Ю. Д ь я ч е н к о

Подписано в печать 28.11.06. Формат 60x84 1/16.

Бумага офсетная. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 7,67. Усл. кр.-отт. 7,8. Печ. л. 8,25.

Тираж 50 экз. Заказ . ИП-59/2006

Самарский государственный
аэрокосмический университет.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

Изд-во Самарского государственного
аэрокосмического университета.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.