

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ
И МЕТОДЫ ОЦЕНИВАНИЯ
ДИАГНОСТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ
ДРЕВОВИДНЫХ СТРУКТУР**

2007



САМАРА

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА»

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И МЕТОДЫ
ОЦЕНИВАНИЯ ДИАГНОСТИЧЕСКИХ
ПАРАМЕТРОВ ДРЕВОВИДНЫХ СТРУКТУР

*Утверждено Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия*

САМАРА
Издательство СГАУ
2007

УДК 681.3, 621.372.542
ББК 22.16
М 744



**Инновационная образовательная программа
"Развитие центра компетенции и подготовка
специалистов мирового уровня в области аэро-
космических и геоинформационных технологий"**

Авторы: *Н.Ю. Ильясова, А.В. Куприянов, А.О. Корепанов, М.А. Ананьин*

Рецензенты: зав. каф. геоинформатики СГАУ д-р техн. наук, проф.
В. В. С е р г е е в; доц. каф. безопасности информационных
систем СамГУ канд. физ.-мат. наук М. Н. О с и п о в

М744 **Математические модели и методы оценивания диагностических параметров древовидных структур:** учеб. пособие / *Н.Ю. Ильясова [и др.]*. – Самара: Изд-во Самар. гос. аэрокосм. ун-та, 2007. – 104 с. : ил.

ISBN 978-5-7883-0644-5

В учебном пособии рассмотрены современные технологии анализа диагностических изображений древовидных структур. Изложение математических моделей и методов ориентировано на студентов старших курсов и аспирантов, при этом основное внимание уделяется изучению новых информационных технологий, инструментальных методик и технических средств, ориентированных на решение прикладных задач анализа изображений. Рассматриваются следующие аспекты анализа изображений древовидных структур: методы оценивания параметров извитости и кривизны, модели изображения ветви древовидного объекта и профиля яркости изображения ветви, математические методы оценивания диагностических параметров древовидных объектов, аппроксимационные методы оценивания диаметра ветви древовидного объекта, морфологический анализ диагностических изображений.

Учебное пособие предназначено для проведения лекционных и лабораторных занятий по курсу "Математические методы обработки изображений" для студентов очной формы направления 010500 и специальности 010501 "Прикладная математика и информатика", по курсу "Методы и средства компьютерной обработки медицинских изображений" для студентов очной формы специальности 200401 "Биотехнические и медицинские аппараты и системы", по курсу "Цифровая обработка сигналов и изображений" для студентов очной формы направления 010600 "Прикладные математика и физика".

УДК 681.3, 621.372.542
ББК 22.16

ISBN 978-5-7883-0644-5

© Н.Ю. Ильясова, А.В. Куприянов,
А.О. Корепанов, М.А. Ананьин, 2007
© Самарский государственный
аэрокосмический университет, 2007

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
1 ОПИСАНИЕ ПРЕДМЕТНОЙ ОБЛАСТИ. ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ.....	9
2 МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ДИАГНОСТИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ ДРЕВОВИДНЫХ СТРУКТУР	17
2.1 ХАРАКТЕРИСТИКА ДРЕВОВИДНЫХ СТРУКТУР	17
2.2 ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ ДРЕВОВИДНЫХ СТРУКТУР	18
2.3 ПАРАМЕТРЫ ИЗВИТОСТИ И КРИВИЗНЫ	22
2.4 СТРУКТУРА ДРЕВОВИДНОГО ОБЪЕКТА.....	28
2.5 МОДЕЛЬ ИЗОБРАЖЕНИЯ ВЕТВИ ДРЕВОВИДНОГО ОБЪЕКТА	30
2.6 МОДЕЛЬ ПРОФИЛЯ ЯРКОСТИ ИЗОБРАЖЕНИЯ ВЕТВИ ДРЕВОВИДНОГО ОБЪЕКТА	32
2.7 ДИАГНОСТИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ ДРЕВОВИДНЫХ СТРУКТУР	36
3 АППРОКСИМАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ ОЦЕНИВАНИЯ ДИАМЕТРА ВЕТВИ ДРЕВОВИДНОГО ОБЪЕКТА.....	39
3.1 ПРЯМЫЕ МЕТОДЫ АППРОКСИМАЦИИ	41
3.1.1 Аппроксимация профиля ступенчато-многочленной моделью	44
3.1.2 Выбор уровня функции вычисления толщины.....	54
3.2 СПЕКТРАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ.....	65
3.3 ПРИМЕРЫ АППРОКСИМАЦИИ	67
4 МЕТОДЫ МОРФОЛОГИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ДРЕВОВИДНЫХ СТРУКТУР ДИАГНОСТИЧЕСКИХ ИЗОБРАЖЕНИЙ.....	70
4.1 РАЗБИЕНИЕ КРИВЫХ НА ЛЕПЕСТКИ.....	71
4.2 ОЦЕНИВАНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ЛЕПЕСТКОВ	72
4.3 ОЦЕНИВАНИЕ ПРИЗНАКОВ	76
4.4 МАТРИЦА ВИДИМОСТИ.....	79
4.5 МЕТОД ПЛАВАЮЩЕГО ГОРИЗОНТА.....	82
4.6 ПРИБЛИЖЁННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ МАТРИЦ ВИДИМОСТИ	84

4.7 ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КРИВЫХ	88
ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ	96
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	97

ВВЕДЕНИЕ

Учебное пособие посвящено описанию математических моделей, методов и алгоритмов оценивания геометрических параметров и диагностических признаков древовидных структур биомедицинских изображений.

На мировом рынке медицинской техники предлагается довольно большой спектр оборудования для получения высококачественных снимков глазного дна, сердечнососудистой системы и др. биомедицинских изображений, однако прикладное обеспечение у большинства систем содержит лишь наиболее общеупотребительные средства для предобработки, повышения качества, маркировки изображений [1, 2, 3, 4, 5]. Одновременно бурно развиваются программно-технические комплексы полной компьютеризации клиник и практик, что должно привести к повышению спроса на программы мониторинга и экспертные системы, оперирующие цифровыми изображениями.

Те методики, которые используются в настоящее время, не дают полной картины различных заболеваний, не предоставляют для учета всю совокупность факторов, которые могут быть использованы для диагностики и профилактики всевозможных заболеваний. В настоящее время проводится довольно много исследований по применению автоматизированных средств при диагностике и лечении, однако, большинство из них носят ярко выраженный экспериментальный характер, направленный скорее на научно-исследовательскую деятельность, чем на практическую применимость.

Неправильная интерпретация текущего состояния пациента приводит к заметному снижению и эффективности лечения и профилактики расстройств. Радикальное повышение эффективности в оказании помощи пациентам может быть достигнуто за счет использования современных компьютерных технологий обработки, интерпретации и хранения диагностических данных.

Традиционно задача оценивания параметров диагностических изображений решается на основе выбора и измерения классификационных признаков изображения. К настоящему времени широкое распространение получили методы, связанные с корреляционной теорией распознавания. Сюда относятся различного рода согласованные фильтры, корреляторы, анализаторы спектра [6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15]. С нашей точки зрения, основным недостатком такого подхода является излишнее абстрагирование получаемых признаков (энергетический спектр, корреляционная функция) от физических параметров реальных диагностируемых объектов (периметр, площадь и пространственное расположение частиц, диаметр и кривизна кровеносных сосудов, и т.п.), что затрудняет интерпретацию полученных результатов для конечного пользователя. Кроме того, размерность пространства признаков при таком подходе очень высока.

Для преодоления первого из указанных недостатков в учебном пособии предлагается использовать геометрические параметры диагностических изображений. Эти параметры являются физически обоснованными, имеют ясный смысл для исследователя и понятны для конечного пользователя. Например, для врача-офтальмолога такими признаками являются неравномерность диаметра и кривизна кровеносных сосудов глазного дна, для испытателя двигателей внутреннего сгорания информация содержится в форме факела распыла топливной струи, для лаборанта, анализирующего препараты крови, представляет интерес количество кровяных частиц определенной геометрической формы.

Обзор методов оценивания диагностических параметров

В [16] рассматривается проблема распознавание образов и медицинская диагностика, проблема использования вычислительной техники для диагностики заболеваний, прогнозирования течения болезни, прогнозирования результатов оперативных вмешательств и оптимизации выбора метода лечения. Приведены алгоритмы диагностики по общей близости признаков, по линейному минимаксному правилу, а также алгоритм отбора и формирования существенных

признаков. З.С. Баталовой представлено описание процесса решения задач диагностики и прогнозирования по совокупности оценок признаков патологии.

В отличие от подхода, развиваемого в учебном пособии, в описанных выше работах проблема формирования оценок признаков диагностики решается с точки зрения статистики, одновременных измерений или анализа одномерных сигналов (электрокардиограмм и др.). Подход, основанный на анализе изображений патологических картин и формировании на их основе диагностических признаков можно встретить в более поздних работах, применительно к задачам офтальмологии, криминалистики и др., где изображение как носитель информации играет существенную роль в диагностике [17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24].

В работе [25] представлены результаты исследований в области офтальмологии по обработке изображений глазного дна. Представлен новый метод анализа флюоресцентных ангиограмм пациента с сосудистой патологией с применением вычислительной техники. Фотографирование глазного дна стало рутинным методом исследования во многих клиниках и практиках. Рынок офтальмологического оборудования представляет большое число коммерчески доступных систем получения цифровых изображений сетчатки (Carl Zeiss, Rodenstock, Topcon и др.). Технические требования к устройствам ввода, компьютеру, вопросы хранения изображений на диске и сжатия, общеупотребительные методы предобработки (улучшения качества) офтальмологических изображений в клинической практике подробно представлены в [26]. Michael Goldbaum описывает, что происходит после оцифровки изображения, как происходит его хранение и поиск, как изображение может быть улучшено и каким образом выделить более содержательные его элементы. Решены некоторые вопросы фильтрации и анализа.

Необходимым условием широкого клинического применения системы компьютерного анализа кровотока является простой и точный метод измерения диаметра сосудов и удобный пользовательский интерфейс, позволяющий врачу оперировать доступными для него понятиями. В настоящее время в офтальмологии сложились

методы измерения диаметра сосудов сетчатки, большинство из них основаны на построении профиля яркости поперечного сечения сосуда в заданной оператором точке. К таким методам относятся "kick-point" метод [27], аппроксимация профиля к 95% кривой Гаусса [28]. Основным недостатком этих методов, несмотря на высокую точность, является высокая трудоемкость и вероятность ошибки из-за измерения диаметра на локальном сужении сосуда или месте изгиба. Wang Y., Cheasty J., Zuckerman R. в [29] предлагают более динамичный метод измерения диаметра с процедурой трассирования и учетом статистических характеристик изображения. Richard Newsom для повышения точности измерения использует измерение диаметра на небольшом протяжении сосуда и вычисляет среднее значение трех измерений. Диаметр сосудов вычисляется как расстояние между интерполированными позициями половины высоты профиля с обеих сторон от его центра [30].

Существует несколько основных типов алгоритмов оценивания направлений древовидных структур: методы непосредственного и косвенного измерения параметров, методы, основанные на моделировании, методы, основанные на применении искусственного интеллекта и нейронных сетей, комбинированные методы. Проверка работы алгоритмов чаще всего осуществляется на синтезированных или на фантомных изображениях, т.е. на изображениях, где известны действительные значения диагностических параметров. Алгоритмы непосредственного или косвенного измерения анализируют распределение точек принадлежащих окрестности сосуда, уточняют форму сосуда, путем аппроксимации некоторой кривой (например, В-сплайном), либо формируют оценку параметра на основе минимизации специальной энергетической функции. При этом существует возможность либо непосредственного измерения параметра (например, толщина определяется количеством точек со значениями яркости, попавшими в определенный диапазон), либо измеряются некоторые вспомогательные характеристики (например, значения моментов), на основе которых формируется оценка интересующего параметра. Алгоритмы такого типа подходят для аккуратного выделения параметров в заданной точке, но из-за необходимости участия

пользователя и большого объема вычислений не являются достаточно универсальными. Алгоритмы, основанные на моделях, производят сравнение с эталонной моделью, либо производят аппроксимацию параметров модели. Измерения диагностических параметров производятся на построенных моделях. Эта группа алгоритмов также характеризуется большими вычислительными затратами, однако обходится без вмешательства пользователя и обладают достаточной устойчивостью к искажениям.

Различные математические модели, используемые для выявления геометрических характеристик кровеносных сосудов (как центральных линий, так и профиля) предложены, например, в работах [31, 32]. В работах [33, 34, 35, 36, 37] представлены методы формирования признаков пространств, позволяющих производить непосредственно классификацию кровеносных сосудов на нормальные и патологические. Указанные методы основаны на расчете оценки извилистости центральных линий сосудов, как правило, с использованием различных дифференциальных характеристик и используют в качестве исходных данных уже вычисленные центральные линии кровеносных сосудов. Практическая значимость рассматриваемых в учебном пособии подходов к оцениванию геометрических параметров и диагностических признаков состоит в том, что предложенные методы и алгоритмы позволяют повысить точность оценивания геометрических параметров. Это позволяет использовать значения оценок предлагаемых методов, для формирования на их основе диагностических признаков. Представленные методы являются достаточно универсальными, что позволяет использовать их для анализа различных классов изображений, таких как изображения глазного дна и ангиографические изображения системы коронарных сосудов.

1 ОПИСАНИЕ ПРЕДМЕТНОЙ ОБЛАСТИ. ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ

В данной работе рассматривается класс биомедицинских изображений, характеризуемых наличием древовидных структур. К таким изображениям можно отнести изображения глазного дна сет-

чатки глаза человека, снимки сосудов кровеносной системы человека и другие биологические структуры. Примеры таких изображений показаны на рис. 1.

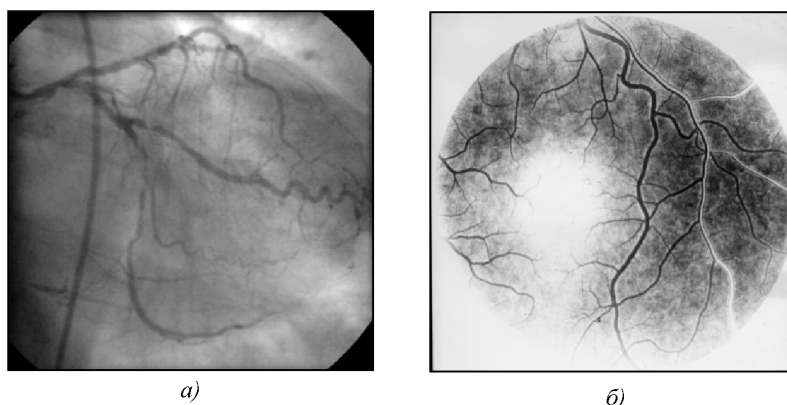


Рис. 1. Примеры биомедицинских изображений: а) система коронарных сосудов сердца, б) микроциркуляторное русло глазного дна

Оценивание диагностических параметров на таких изображениях сводится к количественному оцениванию параметров объектов, которыми являются сосуды кровеносной системы человека. Отметим, что в дальнейшем будем использовать термин «сосуд», подразумевая сосуды кровеносной системы человека.

Полутонное диагностическое изображение глазного дна представляет собой сеть каналов (вен и артерий), расположенных на фоне с плавно меняющейся яркостью (рис. 2). Сосуды древовидно ветвятся, распространяясь по всему глазному дну. Артерии более тонкие, вены толще, темнее и извилистее. При патологиях артерии сужаются, вены расширены, извиты, отмечаются массовые кровоизлияния по ходу вен. Аномальными проявлениями на изображении глазного дна служат сгустки черных и белых пятен, сильная извилистость сосудов, обильное ответвление капилляров.

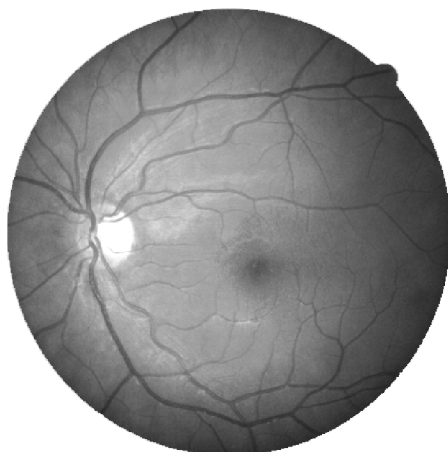


Рис. 2. Изображение глазного дна

Сосудистая патология сетчатки и, особенно, диабетическая ретинопатия являются наиболее ярко выраженную картину изменений глазного дна, которая включает в себя практически все виды патологических изменений. Следует отметить, что одной из самых острых медико-социальных проблем в настоящее время является увеличение количества различных заболеваний, связанных с органами зрения. Вследствие этого необходимым представляется внедрение в медицинскую практику новых методик диагностирования заболеваний органов зрения. Важными проблемами здесь являются ранняя диагностика, прогнозирование течения и выбор оптимальной тактики лечения ряда тяжелых заболеваний. В настоящее время выявляемость ранних стадий болезней составляет 15-20 % по России при использовании традиционных средств диагностики. Также весьма насущной задачей является повышение уровня автоматизации в оказании медицинской помощи населению, что приведет к повышению качества обслуживания, увеличению выявляемости тяжелых глазных заболеваний на ранних стадиях, выявлению групп риска с быстроразвивающимися заболеваниями, повышению точно-

сти диагностики, снижению затрат на лечение за счет снижения количества пациентов с поздними осложнениями.

В медицинской практике существует множество видов патологии глазного дна. Ниже описаны наиболее распространенные.

Патологии, вызывающие отек диска зрительного нерва. На диагностических изображениях диск зрительного нерва в норме имеет овальную форму, граница диска четкая. При наличии указанного вида патологий граница диска зрительного нерва становится размытой. Данный вид патологий является сложно диагностируемым вследствие того, что диагностика напрямую зависит от качества диагностических изображений, так как небольшое размывание границы диска зрительного нерва может означать как начинающиеся патологические изменения, так и плохое качество диагностического изображения.

Патологии, вызывающие отек сетчатки глаза. Отек сетчатки глаза характеризуется размыванием контуров всех объектов на изображении. При диагностике данного вида патологий возникает нетривиальная задача выделения и анализа замкнутых и незамкнутых контуров на изображении, а также задача определения степени размывания границ объектов.

Патологии, приводящие к появлению кровоизлияний. Появление различных кровоизлияний может рассматриваться только в контексте всего изображения, содержащего данный вид патологий. Кровоизлияния могут иметь разную форму, яркость, местоположение. При определении этого вида патологий возникает проблема разделения изображений на нормальные и патологические, при этом выявление степени патологии возможно только при их сравнительном исследовании.

Патологии, вызывающие изменение структуры кровеносных сосудов. Данный вид патологий является наиболее распространенным в медицинской практике и возникает при наличии достаточно широкого круга заболеваний (в том числе неофтальмологического харак-

тера: например, сахарный диабет). Изменения, происходящие в структуре кровеносных сосудов, могут иметь различный характер: это может быть и расширение/сужение сосудов, и увеличение степени их извилистости [38].

Обычно все эти виды патологий рассматриваются в комплексе, и по результатам комплексного исследования ставится диагноз. Но разработка методов комплексного анализа и их алгоритмическая реализация являются чрезвычайно объемной задачей, вследствие чего в учебном пособии ограничимся выбором единственного вида патологии и разработаем алгоритмы его определения.

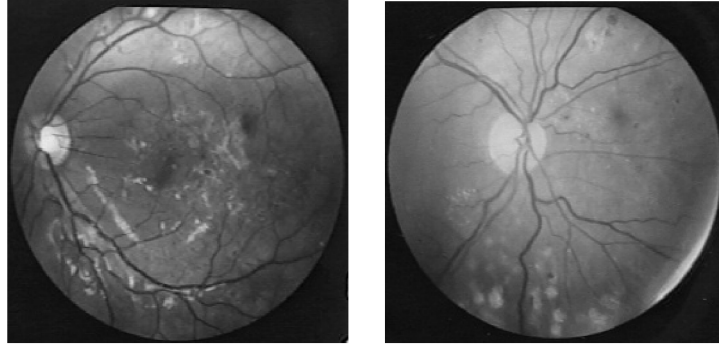


Рис. 3. Изображения глазного дна с различными формами патологии

Большинство существующих методов автоматизированной диагностики заболеваний глазного дна связаны с выявлением и анализом патологических изменений кровеносных сосудов сетчатки [39, 40, 41, 42, 43]. Это связано с тем, что наиболее распространенные виды заболеваний (такие как сахарный диабет, полицитемия, анемия, лейкоз, гипертоническая болезнь) нередко начинаются с патологии глаза и сопровождаются изменениями структуры сосудистого русла глазного дна. В работах [40, 42, 44, 45] представлены методы, позволяющие производить выделение центральных линий кровеносных сосудов глазного дна. Результатом работы данных методов является цифровое представление центральных линий, допускающее визуальное представление и могущее быть использованным для даль-

нейшего построения системы признаков с последующей классификацией больных и здоровых сосудов. В работах [46, 47, 48] в качестве исходных данных для формирования признакового пространства используется профиль сосуда (т.е. развертка значений оценки диаметра вдоль центральной линии сосуда). Такой вид диагностики позволяет получить более качественные результаты (так как нестабильность диаметра сосудистого русла является первичным проявлением большинства заболеваний), однако сопряжен с рядом трудностей, связанных с оцениванием диаметра сосудов на изображении глазного дна вследствие, во-первых, традиционно низкого качества диагностических изображений и, во-вторых, сложности выбора адекватной модели профиля сосуда, необходимой для корректного определения исследуемых характеристик.

В настоящее время в офтальмологии используется сложившийся подход на основе измерения диаметра сосудов, однако также клинически важными показателями, которые вносят существенный вклад в построение экспертной оценки степени патологии, вероятности развития глазных заболеваний, являются и другие статистические характеристики сосудов: соотношение диаметров артерий и вен, неравномерность диаметра (четкообразные изменения вен, локальный спазм артерий), извилистость сосудов, углы разветвления сосудов. Вот только некоторые болезни, для которых знание количественных характеристик сосудистой системы является основополагающим при диагностике: *сахарный диабет* – преимущественные изменения вен сетчатки: вены расширены, извиты, диаметр неравномерный. Артерии изменены мало. Возможен тромбоз центральной вены сетчатки; *гипертоническая болезнь* – сужение и расширение артерий и вен, неравномерность диаметров артерий, штопорообразная извилистость вен. У части больных перетяжки на артериях; *старение* – сужение артерий, спрямленность их, неравномерность диаметра артерий; *атрофия зрительного нерва* – сосуды сужены; *перифлебит сетчатки* – расширение, извилистость, прерывистость вен. Уже из приведенных примеров видно, насколько актуальной является про-

блема выделения, количественной оценки элементов патоморфологической картины глазного дна.

Как отмечалось выше, изображения глазного дна характеризуются наличием древовидных структур – системы кровеносных сосудов, определяемых такими понятиями как узлы и ветви. *Ветвью* называется элемент сетчатой структуры, который характеризуется геометрическим местом срединных точек, распределением диаметра и угла вдоль нее. *Узел* структуры – это точка разветвления или пересечения ветвей. При анализе изображений древовидных структур основной является задача выделения центров ветвей и определение направлений в каждой точке ветви. Это позволяет выделять ветви структуры на фоне изображения для дальнейшего анализа их геометрических характеристик, на основе которых может быть проведена оценка медико-диагностических параметров. Геометрические характеристики *толщины* и *направления* являются диагностическими параметрами трассы, поскольку на их основе производится формирование диагностических признаков сосудов. Данные параметры являются *локальными* характеристиками, рассчитываемыми непосредственно по изображению древовидной структуры в процессе трассировки ветви либо при указании точки, принадлежащей сосуду. С помощью данных параметров производится оценка следующих медико-диагностических параметров: параметр линейной гемодинамики (локальный диаметр сосуда); средний диаметр сосуда на выделенном сегменте; параметры неравномерности калибра сосуда (кривизна и извитость стенки сосуда); параметры движения сосуда на выделенном сегменте (кривизна и извитость хода); углы разветвления сосудов; параметр, характеризующий отношение ширины различных сосудов на определенных участках.

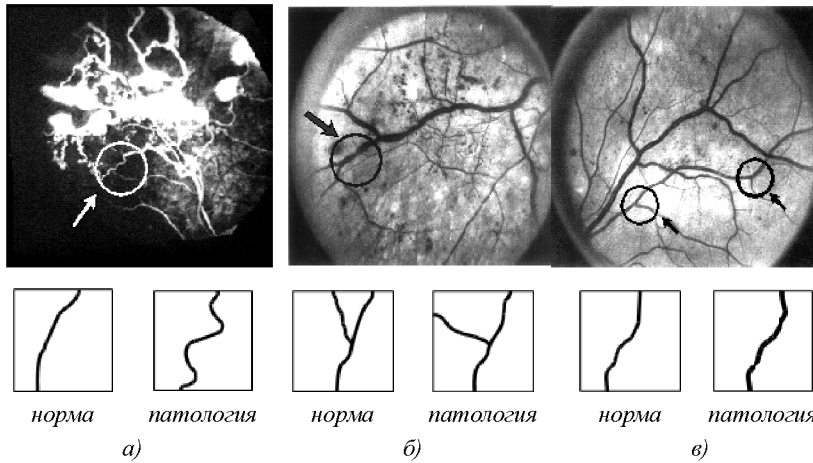


Рис. 4. Иллюстрация признаков патологии сетчатки: а) извилистость, б) динамика изменения толщины, в) угол ответвления

Набор диагностических параметров образует набор диагностических признаков, которые будут описаны ниже: 1) средний диаметр ветви; 2) прямолинейность характеризует отклонение ветви от прямолинейного направления; 3) четкообразность ветви характеризует неравномерность толщины ветви; 4) амплитуда колебаний толщины ветви характеризует отклонение стенок ветви от прямой линии; 5) частота колебаний толщины характеризует изменение направления стенок ветви на единицу ее длины; 6) извилистость толщины характеризует скорость изменения функции толщины вдоль трассы; 7) извилистость трассы характеризует скорость изменения функции трассы (траектории ветви); 8) амплитуда колебаний трассы характеризует степень отклонения хода трассы от прямолинейного направления; 9) частота колебаний трассы характеризует число изменений направления трассы на единицу длины ветви.

2 МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ДИАГНОСТИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ ДРЕВОВИДНЫХ СТРУКТУР

2.1 Характеристика древовидных структур

Мы рассматриваем класс диагностических изображений, характеризующихся наличием древовидных структур. Примерами таких изображений могут служить изображения различного рода трещин [49], кристаллические структуры металлов, сеть дорог, русла рек, изображения глазного дна сетчатки глаза человека, коронарные сосуды и другие биологические структуры. Диагностические изображения древовидных структур представляют собой протяженные древовидные или сетчатые объекты, определяемые такими понятиями, как узлы и ветви. Модель диагностического изображения можно представить в виде структуры данных, проиллюстрированной на рис. 5.

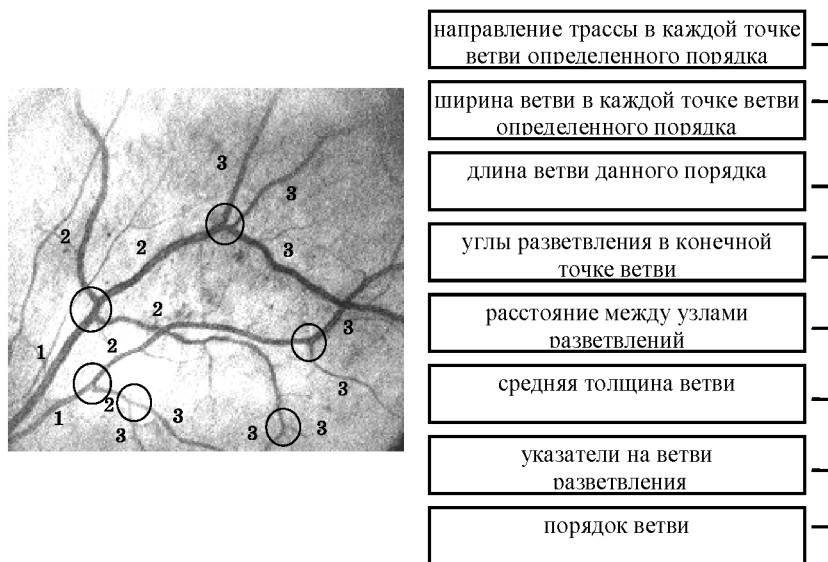


Рис. 5. Иллюстрация структуры данных сетчатых объектов

Такая модель позволит сформировать множество геометрических параметров – изменение ширины трассы, её извилистость и кривизну, углы разветвления и др. Соответствующие модели используются в машинной графике для описания изображения с помощью графических примитивов [50].

2.2 Геометрические параметры древовидных структур

Древовидные структуры представляют набор связанных между собой ветвей (рис. 6).

Математическая модель ветви древовидной структуры определяется следующими функциями:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad r = r(t), \quad 0 \leq t \leq L_v, \quad (1)$$

где $x(t)$, $y(t)$ – дифференцируемые функции, описывающие линию центров, которую будем называть трассой; $r(t)$ – функция толщины ветви (расстояние от трассы до границы ветви, отсчитываемое по перпендикуляру к трассе); t – расстояние от начала трассы, измеренное по трассе; L_v – длина трассы.

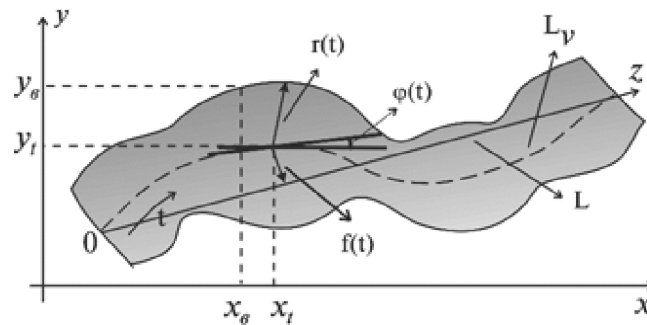


Рис. 6. Математическая модель ветви сетчатой структуры

Из (1) однозначно определяются: функция направления трассы в каждой точке $\varphi(t)$; функция локальной высоты $f(t)$, определяемая расстоянием от текущей точки трассы до ее проекции на отрезок L ,

соединяющий начальную и конечные точки трассы (рис. 6), конфигурация границ ветви, которую будем называть стенками:

$$x_1^b = x_1^b(t), y_1^b = y_1^b(t), x_2^b = x_2^b(t), y_2^b = y_2^b(t), 0 \leq t \leq L_v.$$

В частности:

$$\operatorname{tg} \varphi(t) = -\frac{dx(t)/dt}{dy(t)/dt}; x_1^b(t) = x(t) - r(t) \sin \varphi; y_1^b(t) = y(t) + r(t) \cos \varphi.$$

Данные признаки являются локальными характеристиками, рассчитываемыми непосредственно по изображению древовидной структуры в процессе трассировки ветви, алгоритм которого будет представлен ниже. Опишем глобальные характеристики ветви, формируемые на основе локальных и используемые в дальнейшем в качестве диагностических признаков.

Анализируя диагностические изображения сетчатых структур, можно выделить набор геометрических параметров, достаточно полно характеризующих данную структуру изображения.

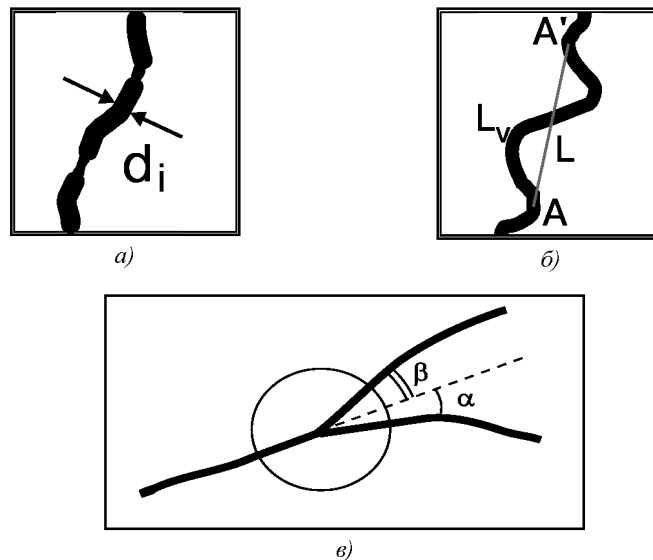


Рис. 7. Геометрические параметры ветви сетчатой структуры

Угол ветвления, определяемый в узлах древовидной структуры. Исчерпывающим описанием ветвления трассы является задание двух углов α , β , которые определяются на этапе трассировки ветви анализируемой структуры (рис. 7в).

Параметр динамики изменения ширины сечения. Рассматривая распределение диаметра ветви как реализацию стационарного эргодического случайного процесса, можно определить параметр динамики изменения ширины сечения ветви вдоль трассы (рис. 7а), определяемый как относительное среднеквадратичное значение, построенное на основе оценок среднего и дисперсии функции локальных радиусов:

$$K_d = \sqrt{r^2 - \bar{r}^2} / \bar{r}. \quad (2)$$

Параметр прямолинейности определим как отношение длины трассы L_v к длине отрезка, соединяющего начальную и конечные точки данной ветви L (рис. 7б):

$$K_p = L_v / L. \quad (3)$$

Параметр кривизны опишем величиной средней кривизны трассы на данном участке:

$$K_r = \frac{1}{L_v} \int_0^{L_v} K_r(t) dt, \text{ где } K_k(t) = \left| \frac{d^2 y_t}{dx_t^2} \right| \sqrt{1 + \left(\frac{dy_t}{dx_t} \right)^2}^{\frac{3}{2}}.$$

Эксперименты показали неустойчивость результатов оценивания данного параметра вследствие сильного влияния шумов и отсутствия нормировки. Рассмотрим другой подход к оцениванию параметра кривизны. Этот подход базируется на анализе колебательного характера трассы и конфигурации её границы (стенки ветви). В медицинских приложениях используются следующие диагностические параметры сетчатых структур: параметры кривизны и извитости трассы (на основе частотных и амплитудных свойств её движения).

Определим параметр извитости как характеристику количества изменений направлений за единицу длины ветви, а параметр кривизны как степень отклонения хода трассы от прямолинейного. Для иллюстрации предложенного подхода на рис. 8 приведены образцы элементов трасс и их параметры, оцененные в относительных единицах.

Аналогично введем характеристику четкообразности, используя частотные и амплитудные характеристики функции диаметра трассы вдоль трассы. Параметр четкообразности объединяет в себе параметр извитости и кривизны, но по отношению не к форме трассы, а к форме контура границы ветви (стенки). Поэтому оценивать ее необходимо и по отношению к диаметру ветви – параметр кривизны (“амплитуда”), и по отношению к длине измеряемого участка (“частота”) (рис. 9).




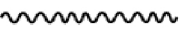

Трасса	Извитость	Кривизна
	0	0
	↓ 1	↑ 3
	↓ 2	↓ 2
	↑ 4	↓ 1
	↑ 3	↑ 4

Рис. 8. Изменение параметров извитости и кривизны трассы для различных её типов



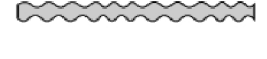

Элемент ветви	Извитость	Кривизна
	↓ 1	↑ 3
	↓ 1	↓ 2
	↑ 4	↓ 1
	↑ 3	↑ 4

Рис. 9. Изменение характеристик четкообразности для различных типов трасс

2.3 Параметры извитости и кривизны

Из рис. 10 видно, что параметр извитости трассы можно описать количеством перегибов трассы на единицу длины ветви. Если проанализировать график изменения функции направления в зависимости от шага трассы, то данный параметр соответствует количеству экстремумов функции направления (рис. 11).

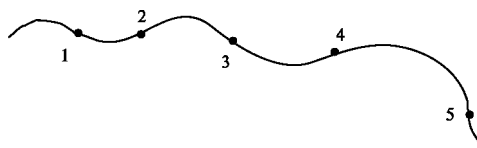


Рис. 10. Иллюстрация ветви одного порядка, характеризующаяся наличием множества перегибов

Также можно заметить, что данный параметр пропорционален частоте функции направления. Поэтому можно определить его следующим образом:

$$K_{izv}^{tr} = \frac{2\pi}{N} (\arg \max_{1 < m < N} \Phi(m)),$$

где $\Phi(m) = \left| \sum_{t=0}^{N-1} \varphi(t) e^{-i \frac{2\pi mt}{N}} \right|$ – модуль спектральной дискретной последовательности локальных направлений трассы, N – количество отсчетов исходной последовательности.

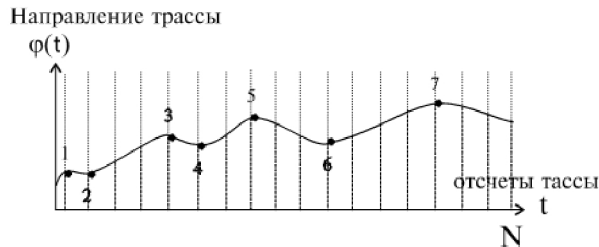


Рис. 11. Иллюстрация изменения направления ветви по ходу её движения

Такой подход поиска параметра извитости позволит нам избежать накопления ложных экстремумов функции направления, т.к. дискретное преобразование Фурье обладает сглаживающим свойством и позволяет выделять частоту, соответствующую максимальной гармонике. Т.к. спектр дискретный, то при подаче на вход синусоидальной последовательности с нецелой частотой происходит расплывание дельта-импульса. Поэтому для более точного определения частоты анализируемой последовательности необходимо провести её коррекцию. Если найдена частота максимальной гармоник $m_{\max} = \frac{2\pi}{N} \arg \max_{1 < m < N} \Phi(m)$ и наибольшая из двух соседних гармоник – m' , искомый параметр корректируется следующим образом:

$$K_{izv}^{tr} = \frac{2\pi}{N} \left(m' + \frac{2}{\pi} \arctg \frac{\Phi(m_{\max})}{\Phi(m')} \right). \quad (4)$$

Рассмотрим параметр кривизны трассы. Чтобы охарактеризовать его степень отклонения движения трассы от прямолинейного, определим его как среднеквадратичное расстояние от отсчетов трассы

до их проекции на прямую, соединяющую, начальную и конечную точки ветви:

$$K_{kr}^r = \frac{\pi}{2} \bar{f}, \quad \bar{f} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N |f(t)|, \quad (5)$$

где $f(t)$ – функция локальной высоты, равная расстоянию от текущей точки трассы до её проекции на отрезок трассы (рис. 12).

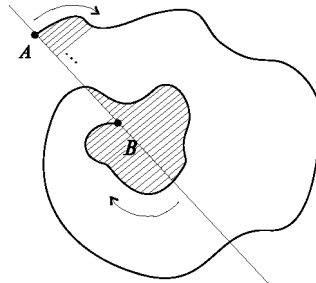


Рис. 12. Измерение параметра кривизны трассы

Параметр четкообразности характеризуется двумя признаками: кривизной и извитостью стенок трассы.

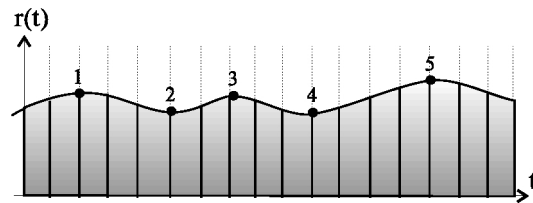


Рис. 13. Иллюстрация изменения направления стенки по ходу движения ветви

Извитость стенки можно аналогично определить количеством экстремумов, которых достигает траектория движения стенки за единицу длины (рис. 13), или частотой функции локального радиуса ветви. Так же, как и в случае извитости трассы, воспользуемся дискретным преобразованием Фурье и определим параметр извитости стенки следующим образом:

$$K_{izv}^{st} = \frac{2\pi}{N} (\arg \max_{1 < m < N} R(m)), \quad (6)$$

где $R(m) = \left| \sum_{t=0}^{N-1} r(t) e^{-i \frac{2\pi mt}{N}} \right|$ – модули спектральных компонент дис-

кретной последовательности локальных диаметров ветви, N – количество отсчетов исходной последовательности.

Для определения кривизны стенок воспользуемся функцией диаметра вдоль трассы:

$$K_{kr}^{st} = \sqrt{2(\overline{r^2} - \bar{r}^2)}, \quad (7)$$

где $\overline{r^2}$, \bar{r}^2 – соответственно дисперсия и квадрат математического ожидания локального диаметра ветви.

Параметр средней толщины ветви можно получить усреднением локальных диаметров:

$$\bar{D} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N r(t).$$

Экспериментальные исследования проводились на тестовых изображениях трасс с заданными значениями частот и амплитуд.

При исследовании параметра четкообразности генерировались трассы, у которых ход стенки соответствовал синусоидальной функции с различными значениями частоты и амплитуды (рис. 14). Погрешность, появляющаяся при построении оценок параметров, возникает из-за влияния эффекта дискретизации изображения трассы. При исследовании параметра кривизны и извитости трассы генерировались трассы, ход которых соответствовал синусоидальной функции с различными значениями частоты и амплитуды. На погрешность определения извитости трассы по (4) оказывает влияние алгоритм трассировки ветви [26]. Но это влияние не существенно. При определении же параметра кривизны (“амплитуды”) трассы существенно на результат оценки влияет неравномерность шага аргумента анализируемой функции, т.к. в отличие от параметра четкооб-

разности при сканировании трассы используется равномерный шаг по дуге (по ходу анализируемой ветви древовидной структуры). Вследствие этого происходит искажение синусоидальной функции, что отражается в погрешности получаемой оценки.

Чтобы избежать данного эффекта произведем усреднение по дуге трассы, заменяя усреднение типа:

$$\bar{f} = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx, \quad (8)$$

усреднением следующего вида:

$$\bar{f}_{L_v} = \frac{1}{L_v} \int_0^{L_v} f(t) \sqrt{1 + f'^2(t)} dt, \quad (9)$$

где L_v – длина трассы, $f(x)$ – функция локальных высот трассы (рис. 6). Если в качестве функции $f(x)$ рассмотреть синусоидальную функцию $f(x) = A \sin \omega x$, то при вычислении параметра \bar{f} (5) с использованием усреднения (9) вместо выражения $\bar{g} = \frac{2A}{\pi}$, получаемого усреднением (8), получим следующее выражение:

$$\bar{g} = \frac{A}{E(k)} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{\ln \left(A\omega + \sqrt{1 + A^2\omega^2} \right)}{2A\omega\sqrt{1 + A^2\omega^2}} \right), k = \frac{A\omega}{\sqrt{1 + A^2\omega^2}}, \quad (10)$$

где $E(k)$ – полный эллиптический интеграл второго рода.

Для нахождения искомой оценки параметра кривизны трассы необходимо решить полученное уравнение (10) относительно неизвестной амплитуды A , считая частоту ω равной его оценке параметра K_{zv}^r (6). Скорректированные оценки параметров, полученные в результате применения данного алгоритма представлены на рис. 14.



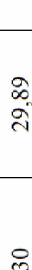
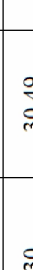
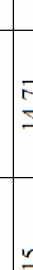
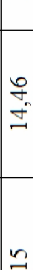
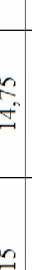
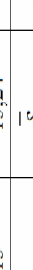




Трасса	Амплитуда колебаний трассы			Частота колебаний трассы		
	Идеальная	Расчетная	$\delta_{опн}$	Идеальная	Расчетная	$\delta_{опн}$
	30	30,09	0,3	0,050	0,054	8
	30	30,27	0,9	0,063	0,064	1,6
	30	29,89	0,4	0,089	0,093	4,5
	30	30,49	1,6	0,126	0,133	5,5
	15	14,71	1,9	0,050	0,055	10
	15	14,46	3,6	0,063	0,065	3,1
	15	14,75	1,6	0,089	0,096	7,9
	15	15,24	1,6	0,126	0,129	2,3
		$\bar{\delta}_{опн}$	1,49			5,4
Элемент ветви	Амплитуда колебаний толщины			Частота колебаний толщины		
	Идеальная	Расчетная	$\delta_{опн}$	Идеальная	Расчетная	$\delta_{опн}$
	2,5	2,43	2,8	0,105	0,110	4,7
	8	7,92	1	0,089	0,085	4,5
	2	2,10	5	0,449	0,431	4,0
	7	7,04	0,6	0,314	0,330	5,0
		$\bar{\delta}_{опн}$	2,35			4,55

Рис. 14. Результаты оценивания параметров стенки ветви на тестовых изображениях

Если рассматривать не отдельный элемент сетчатой структуры (ветвь), а совокупность нескольких (дерево), то можно определить следующие параметры: углы ветвления (были рассмотрены выше) и показатель ветвистости, который можно определить аналогично методам исследования структуры молекулы органических соединений, описанный в работах [52, 51].

2.4 Структура древовидного объекта

Структура древовидного объекта описывается деревом конечно-го порядка $G = (V, S)$, где $V = \{v_i, i = \overline{1, N}\}$ - множество вершин дерева, $S = \{s_i, i = \overline{1, N-1}\}$ - множество ориентированных ребер дерева. Порядок всех вершин графа, за исключением концевых, равен 3, порядок последних равен 1. Концевая вершина v_1 называется началом или корнем дерева. Каждой вершине v_i из множества V ставится в соответствие пространственная точка, называемая узловой точкой или просто узлом. В качестве веса ребра $s_i, i = \overline{1, N-1}$, рассмотрим некоторую гладкую пространственную кривую без самопересечений $x_i = x_i(l), 0 \leq l \leq L_i$, которую будем называть центральной линией (трассой) сегмента древовидного объекта.

Каждому ребру дерева s_i ставится в соответствие гладкая вещественнозначная функция $r_i(l) > 0$ (функция радиуса сегмента). Множество точек, принадлежащих объединению множества замкнутых шаров $\bigcup_{0 \leq l \leq L_i} B[x_i(l), r_i(l)]$, называется сегментом пространственного древовидного объекта (рис. 15).

Наличие «объемности» сегмента накладывает ряд ограничений на множество допустимых значений центральной линии, связывающих кривизну центральной линии с функцией радиуса сегмента. Под ветвью древовидного объекта, ассоциированной с i -й концевой

вершиной, понимается совокупность сегментов, соединяющих i -ю вершину с корнем дерева.

Древовидным объектом называется совокупность сегментов и узловых точек, соответствующих некоторому дереву.

С медицинской точки зрения наиболее важными параметрами, влияющими на постановку диагноза и выбор тактики лечения, являются – локальное изменение диаметра сосуда и характер относительного изменения трассы сосудов в пространстве [53, 54].

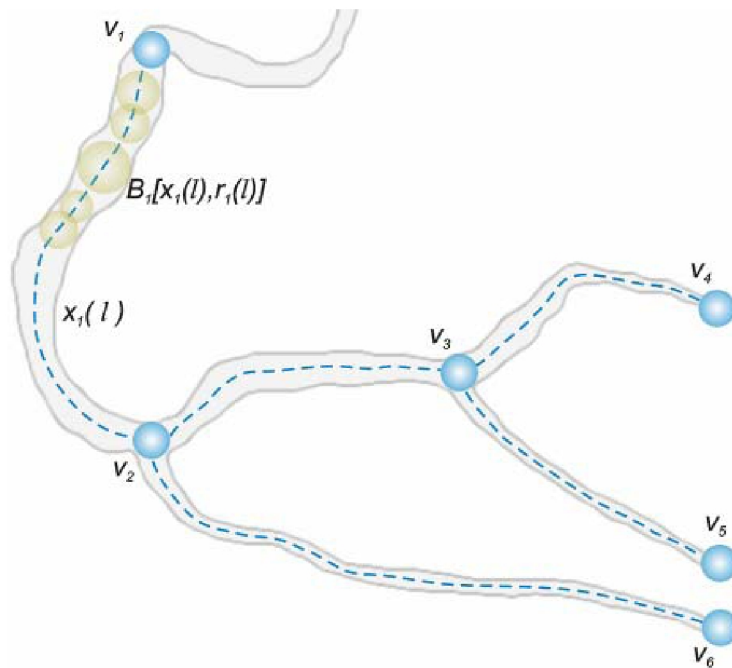


Рис. 15. Сегменты древовидного объекта

2.5 Модель изображения ветви древовидного объекта

Регистрируемое изображение дерева сосудов является многоградационным монохромным. Изображение состоит из точек объектов (ветвей древовидного объекта) и фона. Фон представляет собой некоторое изображение, не несущее полезной информации и зависящее от свойств тканей, окружающих сосуды. На изображении глазного дна фон составляет стекловидное тело и сетчатка глаза. На изображении коронарных сосудов основной фон составляет рентгеновское изображение тканей сердца.

Будем описывать изображение некоторой функцией яркости $I(x, y)$. Представим фон как некоторый двумерный стационарный случайный процесс $I_\phi(x, y)$. Обозначим через $I_S(x, y)$ функцию, описывающую яркость сосудов в области S . Рассмотрим две модели формирования изображения сосудов: аддитивную модель и модель врезки (рис. 16).

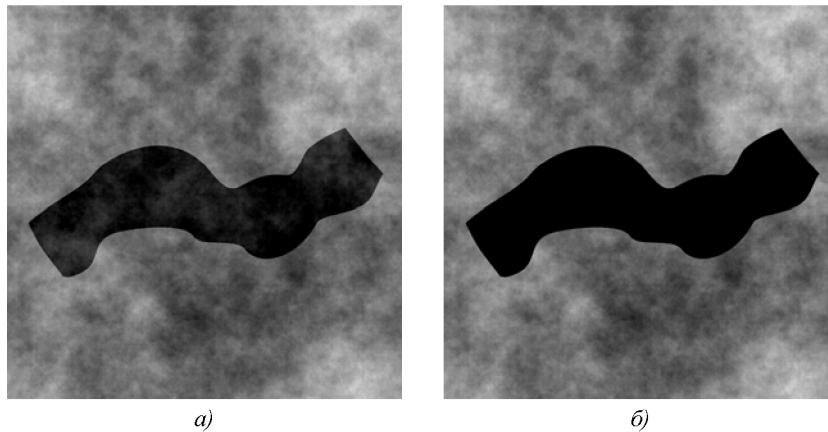


Рис. 16. Модель изображения ветви древовидного объекта:
а) аддитивная модель, б) модель врезки

Модель А. Аддитивное наложение объекта на фон, при этом изображение объекта меняется на негативное.

$$I_0(x, y) = I_s(x, y) + I_\phi(x, y).$$

Эта модель (рис. 16а) соответствует формированию рентгеновских изображений. В процессе рентгеновской съемки пучок рентгеновских лучей просвечивает человека, а изменение яркости излучения фиксируется детектором и оцифровывается в виде изображения.

В действительности изображение дает коэффициент “поглощения” рентгеновского излучения, но для большинства материалов эта величина приблизительно пропорциональна плотности вещества, поэтому можно считать, что яркость получаемого изображения пропорциональна плотности исследуемого объекта.

Модель Б. Модель врезки объекта.

$$I_0(x, y) = \begin{cases} I_s(x, y), & (x, y) \in S; \\ I_\phi(x, y), & (x, y) \notin S. \end{cases}$$

Эта модель (рис. 16б) соответствует формированию изображений в процессе фотографической съемки, когда сосуды глазного дна закрывают собой ткани, расположенные под ними. На участках соответствующих фону яркость отсчетов изображения характеризует изменения глазного дна.

Фактически при регистрации диагностических изображений всегда присутствуют искажения, связанные с несовершенством оптической системы, дискретностью фотоприемника, квантованием сигналов, нестационарностью освещения и т.п. Далее мы будем рассматривать простейшую модель наблюдения в условиях линейной искажающей системы и аддитивного шума. Шум представляет собой двумерный стационарный случайный процесс, в частности белый шум. Тогда модель формирования изображения можно записать в следующем виде:

$$I(x, y) = I_0(x, y) * h(x, y) + I_v(x, y),$$

где $h(x, y)$ – импульсная характеристика искажающей системы, $I_v(x, y)$ – функция яркости аддитивного шума, здесь операция $*$ означает свертку сигналов.

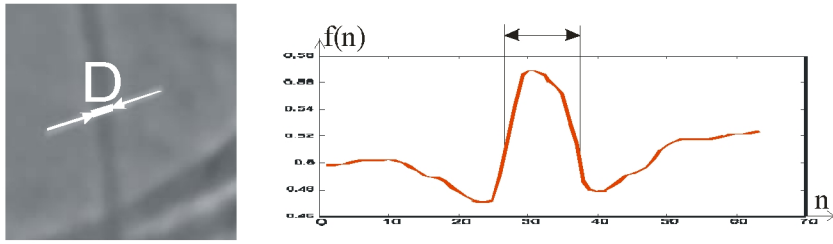
2.6 Модель профиля яркости изображения ветви древовидного объекта

Изображение проекции ветви древовидного объекта может быть описано проекцией его центральной линии и функцией профиля. Проекция центральной линии ветви древовидного объекта – кривая $x_i(s_i)$ – рассмотрена ранее. Под функцией профиля $h_i(s_i, r)$, для некоторого фиксированного значения s_i , понимается функция, в качестве своих значений имеющая значения интенсивности изображения, взятые на прямой, перпендикулярной к $x_i(s_i)$.

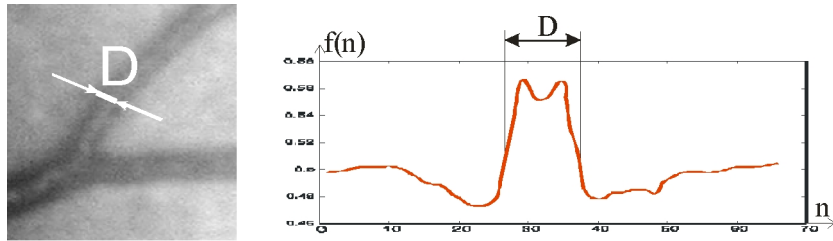
Функция $h_i(s_i, r)$ при фиксированном значении s_i определяет вид профиля проекции ветви и целиком зависит от способа получения изображения. Экспериментальные исследования показали [54], что функция яркости сосудов обладает определенными свойствами, которые необходимо учесть в разрабатываемой модели (рис. 17).

Приведем примеры возможных видов функции профиля.

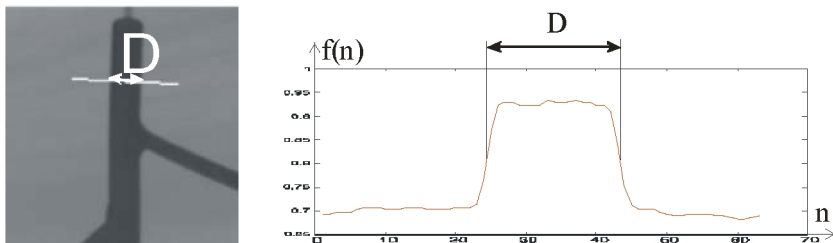
Проекция эллипса. Профиль сегмента древовидного объекта в общем случае представляет собой эллипс с известными параметрами и проецируется на изображение в виде полуокружности (рис. 18а). Такая модель адекватна в случае ангиографической съемки сегментов больших диаметров.



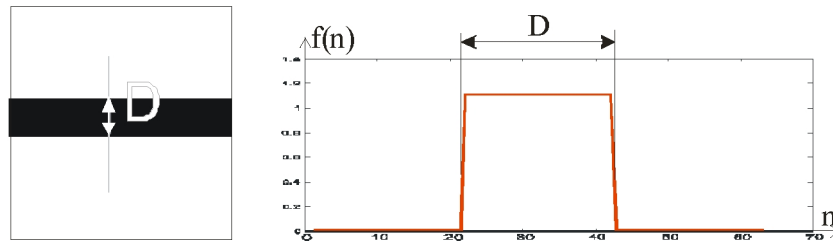
Изображение сосудов сердца



Изображение сосудов глазного дна



Изображение фантома



Идеальное изображение

Рис. 17. Яркостные профили изображений

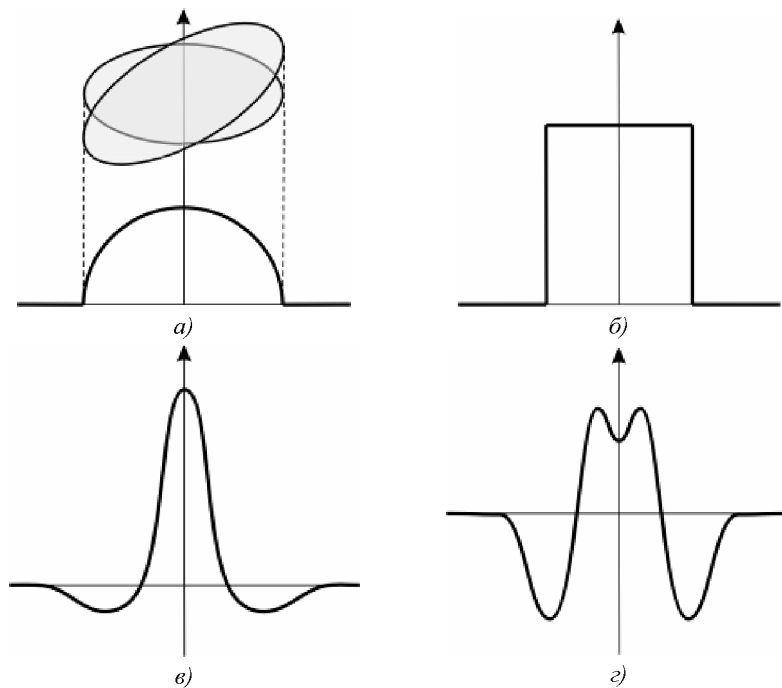


Рис. 18. Различные виды функции профиля

Прямоугольный импульс. Наиболее простая модель, в этом случае профиль сегмента древовидного объекта аппроксимируется функцией прямоугольного импульса (рис. 18б). Такая модель адекватна в случае съемки непрозрачных для данного излучения объектов.

Вторая производная от функции Гаусса. Эта модель с подчеркнутыми границами и ярко выраженным центром профиля (рис. 18в), хорошо подходит для аппроксимации тонких сегментов древовидного объекта в случае рентгеновской ангиографической съемки объекта.

Разность второй производной от функции Гаусса и функции Гаусса. В этой модели резко подчеркивается контур сегмента и менее центральная точка (рис. 18г).

Рассмотрим более подробно модели представления профиля изображения древовидного объекта, которые в дальнейшем могут использоваться в методах оценивания диагностических признаков ветвей древовидных объектов.

Модель 1. Функция Rect:

$$f(n) = \text{Rect}\left(\frac{n-n_c}{D}\right) = \begin{cases} A, & |n-n_c| \leq D/2; \\ 0, & |n-n_c| > D/2. \end{cases}$$

Модель 2. Функция Гаусса: $f(n) = A \exp\left(-\frac{(n-n_c)^2}{D^2}\right)$.

Модель 3. Дробно-рациональная функция (ДРФ):

$$f(n) = \begin{cases} \frac{A}{(n-n_c)^2 + D^2} D^2, & \frac{A}{(n-n_c)^2 + D^2} D^2 \geq 0, \\ 0, & \frac{A}{(n-n_c)^2 + D^2} D^2 < 0. \end{cases}$$

Параметрами моделей являются значение толщины D , n_c – координата центра скачка яркости; A – яркость точек принадлежащих сосуду.

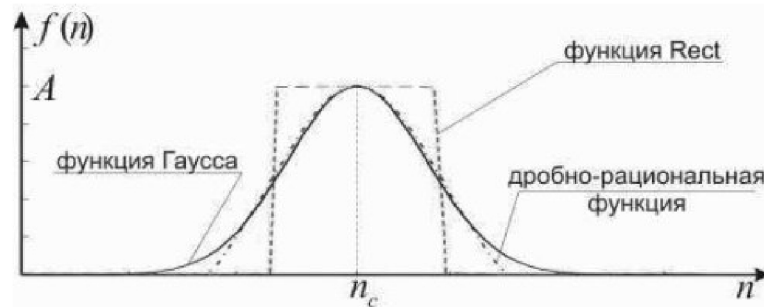


Рис. 19. Модели профиля, приведённые к одному параметру толщины

На рис. 19 показаны графики функций различных моделей профилей, приведенные к одному значению параметра толщины. Используя предложенную модель изображения сосудов можно сформировать набор диагностических признаков, включающий в себя

такие признаки, как: средний диаметр ветви, прямолинейность трассы, амплитуда колебаний толщины ветви, чёткообразность ветви, частота колебаний толщины ветви, извилистость толщины ветви, частота колебаний трассы, амплитуда колебаний трассы, извилистость трассы.

2.7 Диагностические параметры древовидных структур

Анализируя диагностические изображения сетчатых (древовидных) структур, можно выделить набор геометрических параметров, достаточно полно характеризующих данную структуру диагностического изображения:

1. Параметр линейной гемодинамики (локальный диаметр сосуда).
2. Средний диаметр ветви на выделенном сегменте.
3. Прямолинейность ветви. Прямолинейность характеризует отклонение ветви от прямолинейного направления.
4. Четкообразность ветви. Четкообразность ветви характеризует неравномерность толщины ветви.
5. Амплитуда колебаний стенки ветви. Параметр характеризует отклонение стенок от прямой линии.
6. Частота колебаний стенки сосуда. Характеризует изменение направления стенок ветви на единицу ее длины.
7. Извилистость стенки. Характеризует скорость изменения функции толщины вдоль трассы, аппроксимируемой гармонической функцией.
8. Извилистость трассы. Характеризует скорость изменения функции трассы (траектории ветви) на выделенном участке, который аппроксимируется гармонической функцией.
9. Амплитуда колебаний трассы. Характеризует степень отклонения хода трассы от прямолинейного направления.
10. Частота колебаний трассы. Характеризует число изменений направления трассы на единицу длины ветви.

Средний диаметр ветви \bar{D} вычисляется по формуле:

$$\bar{D} = 2\bar{r} = \frac{2}{N} \sum_{n=1}^N r(t_n),$$

где $t_n = n\Delta$, N – число отсчётов локального радиуса, измеренных вдоль ветви в достоверных точках, \bar{r} – средний радиус.

Прямолинейность ветви Pr характеризует отклонение ветви от прямолинейного направления и определяется как отношение длины L_v средней линии ветви к длине L прямой, соединяющей начальную и конечную точки трассы:

$$Pr = \frac{L_v}{L} = \frac{\sum_{n=1}^{N-1} \sqrt{(x_n - x_{n+1})^2 + (y_n - y_{n+1})^2}}{\sqrt{(x_1 - x_N)^2 + (y_1 - y_N)^2}}.$$

Чёткообразность ветви S характеризует неравномерность толщины ветви и определяется как отношение среднеквадратичного отклонения радиуса ветви к его среднему значению: $S = \sqrt{\overline{r^2} - \bar{r}^2} / \bar{r}$, где \bar{r} – средний радиус сосуда, $\overline{r^2}$ – средний квадрат радиуса.

Амплитуда колебаний толщины ветви A_0 характеризует отклонения стенок ветви от прямой линии и определяется по формуле:

$$A_0 = \sqrt{2\overline{r^2} - 2\bar{r}^2}.$$

Частота колебаний толщины ветви ω_0 характеризует изменение направление стенок ветви на единицу ее длины и определяется как $\omega_0 = 2\pi m_0 / N$,

$$m_0 = \arg \left(\max_{1 < m < N} R(m) \right), \quad R(m) = \left| \sum_{n=0}^{N-1} r(t_n) \exp \left(-i \frac{2\pi nm}{N} \right) \right|,$$

где m' – номер максимального значения Фурье-спектра функции толщины.

Извилистость толщины I_0 характеризует скорость изменения функции толщины вдоль трассы аппроксимируемой гармонической

функцией с амплитудой A_0 и частотой ω_0 и вычисляется по формуле: $I_0 = A_0\omega_0$.

Извилистость трассы I_1 характеризует скорость изменения функции трассы (траектории сосуда) на выделенном участке, которая аппроксимируется гармонической функцией A_1 и частотой ω_1 , по определению равна $I_1 = A_1\omega_1$ и определяется из уравнения:

$$Pr = \frac{2}{\pi} \sqrt{1+I_1^2} \cdot E(k), \quad k = I_1 / \sqrt{1+I_1^2},$$

где Pr – прямолинейность сосуда, $E(k)$ – полный эллиптический интеграл 2-го рода.

Амплитуда колебаний трассы A_1 характеризует степень отклонения хода трассы от прямолинейного и определяется по формуле:

$$A_1 = 2\bar{f} \cdot E(k) / \left(1 + \ln \left(I_1 + \sqrt{1+I_1^2} \right) / \left(I_1 \sqrt{1+I_1^2} \right) \right),$$

где \bar{f} – средняя высота ветви: $\bar{f} = N^{-1} \sum_{n=1}^N |f(t_n)|$, а $f(t)$ – функция высоты сосуда, I_1 – извилистость трассы.

Частота колебаний трассы ω_1 характеризует число изменений направления трассы на единицу длины сосуда и определяется по формуле: $\omega_1 = I_1 / A_1$.

3 АППРОКСИМАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ ОЦЕНИВАНИЯ ДИАМЕТРА ВЕТВИ ДРЕВОВИДНОГО ОБЪЕКТА

Существуют несколько типов методов оценивания параметров толщины ветвей древовидных объектов на изображениях: методы непосредственного и косвенного измерения параметров; методы, основанные на моделировании; методы, основанные на применении искусственного интеллекта и нейронных сетей; комбинированные методы. В параграфе описываются аппроксимационные методы оценивания параметров. В основе аппроксимационных методов оценивания лежит идея параметрической аппроксимации яркостного профиля выделенного на изображении фрагмента исследуемого сосуда. Для определения параметра толщины D объекта предлагается три различных модели яркостного профиля, описанных ранее.

Исходный профиль – профиль ветви, выделенной непосредственно на диагностическом изображении, N – длина последовательности. Модифицированный профиль – $\tilde{f}(n)$ получается в результате контрастирования исходного профиля. Для этого значения яркости точек исходного профиля приведем к диапазону $[0, 1]$, тем самым устраним влияние масштабирующего коэффициента A . В качестве значения центрального отсчета примем номер отсчета с максимальным значением $n_c = \arg \max_n f(n)$. Тогда предложенные ранее модели можно представить в следующем виде:

$$\text{Функция Rect: } f(n, D) = \text{Rect}\left(\frac{n}{D}\right) = \begin{cases} 1, & |n| \leq D/2 \\ 0, & |n| > D/2 \end{cases}.$$

$$\text{Функция Гаусса: } f(n, D) = \exp\left(-\frac{n^2}{D^2}\right).$$

$$\text{Дробно-рациональная функция (ДРФ): } f(n, D) = \frac{D^2}{n^2 + D^2}.$$

Таким образом, все аппроксимационные методы основаны на том, что вместо исследования реальной функции проводят исследование модельной функции, приближенной к реальной при заданном критерии. При этом иногда аппроксимируется не сама функция, а её спектр, в таком случае получается спектральный метод.

В качестве целевой будем использовать следующую функцию:

$$S(D) = \sum_{i=0}^{N-1} (y(x_i, D) - f(x_i))^2 \rightarrow \min_D, \quad (11)$$

где $y(x, D)$ – модельная функция; $f(x)$ – исходный профиль.

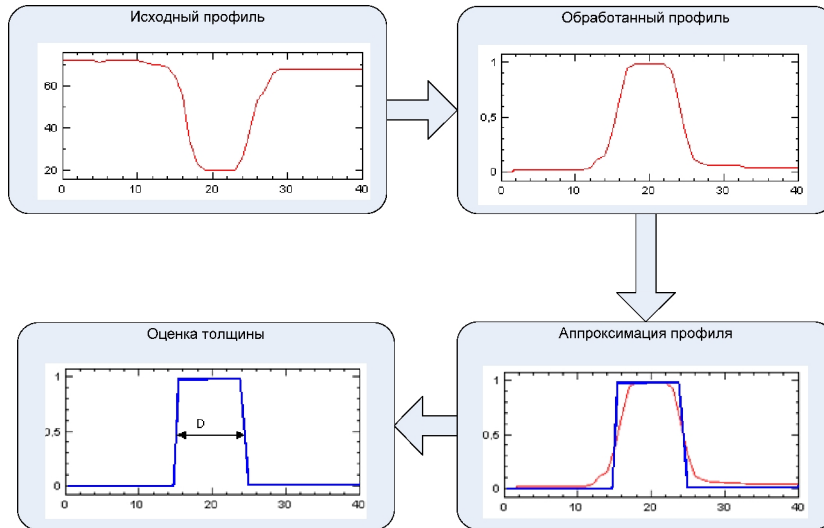


Рис. 20. Схема работы аппроксимационных методов

В исследуемой задаче аппроксимации подвергается срез функции яркости изображения, взятый перпендикулярно направлению протяженного объекта. Общая схема работы аппроксимационных методов представлена на рис. 20.

Недостаток данных методов состоит в вычислительной сложности и необходимости определения точного направления сосуда. Достоинства в высокой помехоустойчивости и хорошей точности при

правильном подборе модели аппроксимации. При оценивании параметров толщины методами из данного класса были получены относительно маленькие погрешности при зашумлении изображения импульсным шумом по сравнению с методом круглой рамки.

3.1 Прямые методы аппроксимации

Алгоритм поиска толщины состоит из четырех последовательных действий. На первом шаге получается необходимый профиль с исходного изображения. После этого наступает этап предварительной обработки, на котором полученный профиль контрастируется, если необходимо проводится сглаживание профиля и инвертирование. В результате этого этапа мы имеем профиль с отсчетами, расположенными в интервале от 0 до 1. После этого мы проводим аппроксимацию исходного профиля модельной функцией, а затем анализируем полученную функцию и производим оценку параметров толщины объекта.

Модель Rect

Представим срез функции яркости, взятый перпендикулярно направлению сосуда, в виде прямоугольного сигнала (12). Эта модель хорошо себя показывает на идеальных изображениях или изображениях, прошедших предварительную пороговую обработку.

$$y(x, D) = \text{Rect}\left(\frac{x}{D}\right) = \begin{cases} 1, & |x| \leq D/2; \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (12)$$

где D – искомая толщина ветви древовидного объекта.

Реальные изображения не обладают четким разделением на 2 уровня яркости, поэтому модифицируем формулу (12), чтобы расширить область её применимости:

$$y(x, D) = \begin{cases} F_{\max}, & |x - x_c| \leq D/2; \\ F_{\min}, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (13)$$

где x_c – координата центра скачка яркости; F_{\max} – максимальная яркость скачка; F_{\min} – средняя яркость фона.

Для определения параметров модели воспользуемся методом моментов [64]. Т.е. приравняем теоретические обобщенные моменты модельной функции к эмпирическим:

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N W_k(n) \tilde{f}(n) = \frac{1}{|S|} \int_S W_k(x) f(x, D) dx, \quad (14)$$

где $W_k(x) = x^{k-1}$, $k = \overline{1, m}$, S – область интегрирования.

Применяя метод моментов к модели Rect, получим:

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \tilde{f}(n) = \frac{1}{2a} \int_{-D/2}^{D/2} dx = \frac{D}{2a}, \quad (15)$$

где a – половина длины профиля.

$$D = \frac{2a}{N} \sum_{n=1}^N \tilde{f}(n) = 2a \cdot Mx(\tilde{f}(n)). \quad (16)$$

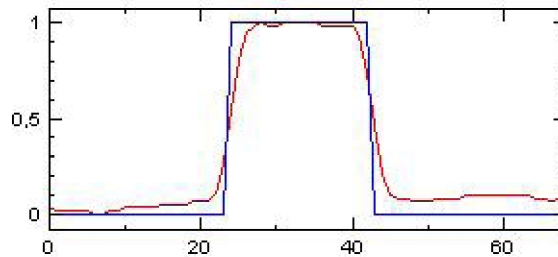


Рис. 21. Пример аппроксимации исходного профиля функцией Rect

Из формулы (15) видно, что толщина сосуда оценивается следующим образом:

Использование метода моментов позволяет не центрировать исходный профиль перед поиском параметров. Результат работы метода прямой аппроксимации исходного профиля моделью Rect представлен на рис. 21.

Модель ДРФ

Модель, основанная на использовании дробно-рациональной функции:

$$y(x, D) = \frac{D^2}{x^2 + D^2}, \quad (17)$$

где D – значение, пропорциональное искомой толщине.

Для поиска параметров модели применяем так же, как и в случае с аппроксимацией прямоугольным сигналом, метод моментов. Для первого момента получим:

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \tilde{f}(n) = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a \frac{D^2}{x^2 + D^2} dx = \frac{D}{a} \operatorname{arctg} \frac{a}{D}. \quad (18)$$

Для решения этого уравнения воспользуемся методом последовательного приближения Ньютона [65]. Для этого сначала выбираем начальное приближение оценки толщины, а потом уточняем, используя формулу (19) до тех пор, пока изменение на каждом шаге не достигнет требуемой точности.

$$D_{n+1} = D_n - \frac{f(D_n)}{f'(D_n)}. \quad (19)$$

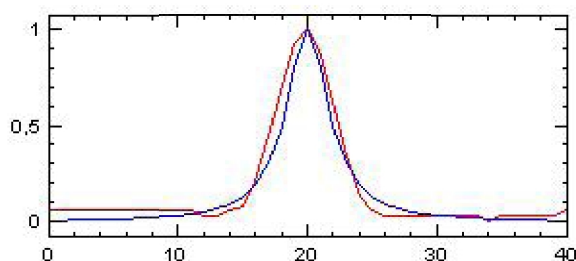


Рис. 22. Пример аппроксимации профиля моделью ДРФ

Пример результата аппроксимации, полученной таким образом, можно видеть на рис. 22.

3.1.1 Аппроксимация профиля ступенчато-многочленной моделью

Отличительной особенностью ступенчато-многочленной модели является то, что многочлен аппроксимирует только область самого сосуда, а константы – фоновую область.

1. Парабола 2-й степени + две ступени (общий случай)

В данном случае аппроксимирующая функция имеет вид (рис. 23):

$$y = \begin{cases} C_1, & x < A; \\ ax^2 + bx + c, & A \leq x \leq B; \\ C_2, & x > B. \end{cases} \quad (20)$$

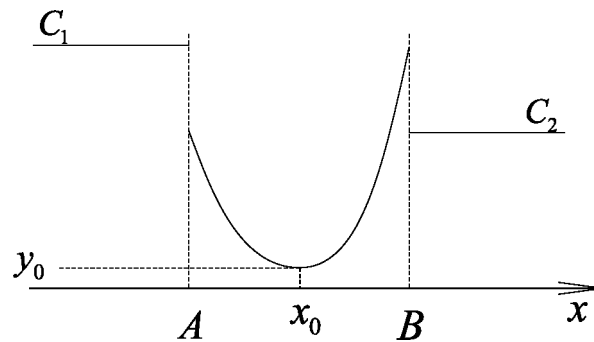


Рис. 23. Парабола 2-й степени + две ступени. Общий вид

При использовании МНК подлежащий минимизации функционал выражается формулой:

$$J = \sum_{x_i < A} (C_1 - y_i)^2 + \sum_{A \leq x_i \leq B} (ax_i^2 + bx_i + c - y_i)^2 + \sum_{x_i > B} (C_2 - y_i)^2 \rightarrow \min. \quad (21)$$

Функцию (21) нельзя дифференцировать по A и B , поэтому временно предположим их известными.

Тогда, приравнявая нулю производные по оставшимся параметрам, получаем следующее решение:

$$C_1 = \frac{1}{N_1} \sum_{x_i < A} y_i, \quad (22)$$

где N_1 – число таких точек, в которых $x_i < A$.

Аналогично

$$C_2 = \frac{1}{N_3} \sum_{x_i > B} y_i, \quad (23)$$

где N_3 – число таких точек, в которых $x_i > B$.

Коэффициенты параболы находятся из системы уравнений:

$$\begin{cases} a \sum x_i^4 + b \sum x_i^3 + c \sum x_i^2 = \sum x_i^2 y_i; \\ a \sum x_i^3 + b \sum x_i^2 + c \sum x_i = \sum x_i y_i; \\ a \sum x_i^2 + b \sum x_i + c \sum 1 = \sum y_i. \end{cases} \quad (24)$$

В уравнениях (24) суммы берутся по точкам, в которых $A \leq x_i \leq B$. Нахождение A и B придётся вести каким-либо методом оптимизации (нахождение минимума функции (21) двух переменных, так как остальные пять переменных вычисляются по формулам (22), (23) и (24)). Координаты вершины параболы определяются формулами $x_0 = -\frac{b}{2a}$, $y_0 = c - \frac{b^2}{4a}$. Левая граница толщины – такая

точка x_n , которая лежит левее x_0 , и в которой имеет место равенство

$$ax_n^2 + bx_n + c = y_0 + \frac{2}{3}(C_1 - y_0). \quad (25)$$

Аналогично правая граница толщины – такая точка x_n , которая лежит правее x_0 , и в которой имеет место равенство

$$ax_n^2 + bx_n + c = y_0 + \frac{2}{3}(C_2 - y_0). \quad (26)$$

Собственно толщина равна величине

$$t = x_n - x_n \quad (27)$$

Коэффициент $2/3$ в формулах (25) и (26) подобран эмпирически из наглядных соображений. Теоретическое значение приведено ниже (п. 3.1.2).

Описанная модель (20) имеет недостаток – разрывы в точках A и B . Возможно, что лучше (визуально) профиль сосуда описывает модель без разрывов, хотя её среднеквадратическая погрешность и будет немного больше.

2. Парабола 2-й степени + две ступени (без разрывов)

Аппроксимирующая функция имеет такой же вид (20) (рис. 24), но накладываются условия непрерывности:

$$\begin{cases} ax^2 + bx + c \Big|_{x=A} = C_1; \\ ax^2 + bx + c \Big|_{x=B} = C_2. \end{cases} \quad (28)$$

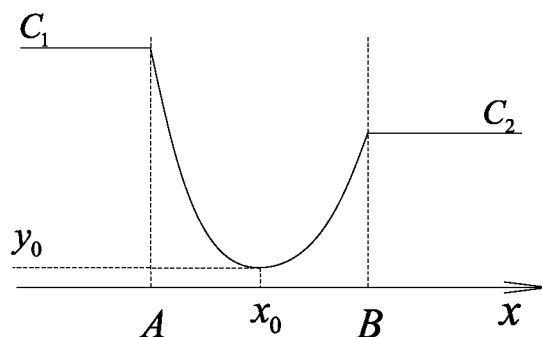


Рис. 24. Парабола 2-й степени + две ступени, без разрывов

Формулы (22) и (23) для ступеней C_1 и C_2 сохраняются. Условия непрерывности (28) сокращают число неизвестных параметров – два из них выражаются через другие:

$$b = \frac{C_2 - C_1}{B - A} - a(B + A), \quad c = \frac{C_1 B - C_2 A}{B - A} + aAB. \quad (29)$$

Подставив величины (29) во второе слагаемое функционала (21), после преобразований получим:

$$J_1 = \sum_{A < x_i < B} \left\{ a \left[x_i^2 - (A+B)x_i + AB \right] + \frac{C_2 - C_1}{B-A} x_i + \frac{C_1 B - C_2 A}{B-A} - y_i \right\}^2 \rightarrow \min_a. \quad (30)$$

Неравенства под знаком суммы строгие, так как в точках А и В выражение в квадратных скобках равно нулю. Приравняв производную от (30) по a нулю, получим уравнение с одним неизвестным:

$$\begin{aligned} & a \left\{ \sum x_i^4 - 2(A+B) \sum x_i^3 + [(A+B)^2 + 2AB] \sum x_i^2 - \right. \\ & \left. - 2AB(A+B) \sum x_i + A^2 B^2 \sum 1 \right\} + \\ & + \frac{C_2 - C_1}{B-A} \left\{ \sum x_i^3 - (A+B) \sum x_i^2 + AB \sum x_i \right\} + \\ & + \frac{C_1 B - C_2 A}{B-A} \left\{ \sum x_i^2 - (A+B) \sum x_i + AB \sum 1 \right\} = \\ & = \sum y_i x_i^2 - (A+B) \sum y_i x_i + AB \sum y_i. \end{aligned} \quad (31)$$

После нахождения a оставшиеся коэффициенты находятся по (29). Нахождение A, B и толщины производится так же, как и для предыдущей модели. Эта модель программно реализована. Результат работы аппроксимации представлен на рис. 25.

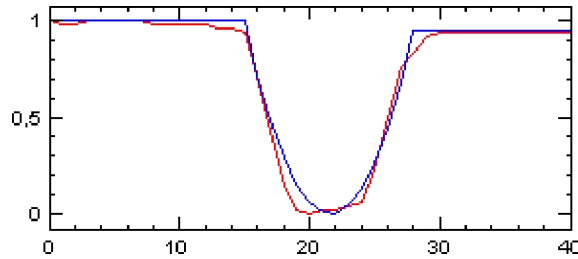


Рис. 25. Пример проведения аппроксимации профиля моделью параболы

У обеих моделей есть недостаток – большой объём вычислений при решении двумерной задачи оптимизации. Сократить его можно двумя способами. Первый заключается в использовании того факта,

что нам надо найти толщину сосуда не в одной точке, а вдоль всей трассы. Последовательные точки трассы находятся достаточно близко друг к другу, это означает, что параметры соседних профилей отличаются достаточно мало. Поэтому полную задачу оптимизации можно производить редко, а в остальных случаях в качестве начального приближения использовать результат от предыдущего профиля, что резко снижает количество шагов алгоритма. Второй способ (причём он не отменяет целиком первый) состоит в замене двумерной задачи оптимизации двумя одномерными. Это можно сделать, используя симметризованный профиль. При этом отдельно вычисляются толщины слева и справа от центральной точки профиля. Идея ранее была использована при применении методов измерения толщины, предполагающих (в отличие от параболы) примерную симметричность профиля относительно его центральной точки [см. ниже]. Это условие в ряде случаев нарушается из-за реальной несимметричности профиля или прохождения трассы не по центральной линии сосуда. Поэтому берут каждую половину профиля, симметрично отражают и затем складывают две толщины. В нашем случае объём вычислений сокращается за счёт того, что симметричная аппроксимирующая функция имеет меньше параметров.

3. Парабола 2-й степени + ступень (симметричный случай без разрывов)

В данном случае аппроксимирующая функция имеет вид (считаем, что начало координат помещено в центре симметризованного профиля) (рис. 26):

$$y = \begin{cases} C, & |x| \geq A; \\ ax^2 + c, & |x| \leq A. \end{cases} \quad (32)$$

Условие непрерывности:

$$ax^2 + c \Big|_{x=\pm A} = C. \quad (33)$$

В силу симметрии функция чётная, а вершина параболы лежит в точке $(0, c)$.

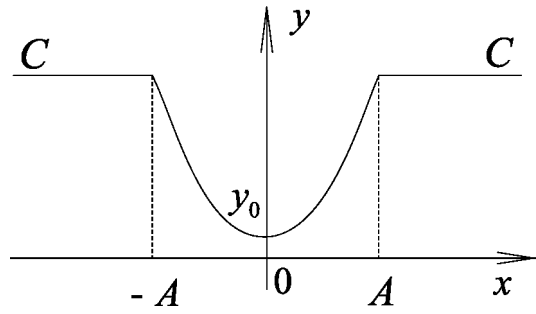


Рис. 26. Парабола 2-й степени + ступень, симметричный случай без разрывов

Подлежащий минимизации функционал выражается формулой

$$J = \sum_{|x_i| \geq A} (C - y_i)^2 + \sum_{|x_i| < A} (ax_i^2 + c - y_i)^2 \rightarrow \min. \quad (34)$$

За счёт условия непрерывности сокращается число параметров:

$$c = C - aA^2. \quad (35)$$

Аналогично (22) имеем

$$C = \frac{1}{N_1} \sum_{|x_i| \geq A} y_i, \quad (36)$$

где N_1 – число таких точек, в которых $|x_i| \geq A$.

Подставив равенство (33) во второе слагаемое функционала (34), после преобразований получим:

$$J_1 = \sum_{|x_i| < A} \left\{ a(x_i^2 - A^2) + C - y_i \right\}^2 \rightarrow \min_a. \quad (37)$$

Приравняв производную от (37) по a нулю, получим уравнение с одним неизвестным:

$$\begin{aligned} a \left\{ \sum x_i^4 - 2A^2 \sum x_i^2 + A^4 \sum 1 \right\} = \\ = \sum y_i x_i^2 - A^2 \sum y_i - C \sum x_i^2 + CA^2 \sum 1. \end{aligned} \quad (38)$$

После нахождения a оставшийся коэффициент c находится по (35).

Нахождение A ведётся каким-либо методом нахождения минимума функции (34) одной переменной, так как остальные три переменные вычисляются по формулам (37), (38), (35).

Правая граница толщины – такая точка x_n , которая лежит правее нуля, и в которой имеет место равенство

$$ax_n^2 + c = y_0 + \frac{2}{3}(C - y_0), \quad (39)$$

или с учётом координат вершины $x_n = \sqrt{\frac{2}{3a}(C - c)}$. Собственно толщина равна величине

$$t = 2x_n. \quad (40)$$

В первом приближении модель, описанная выше, вполне достаточна, но есть некоторые мелкие недостатки. Если центр профиля недостаточно близок к центру сосуда, то на одном из симметризованных профилей в центре будет не один минимум, а два минимума и максимум между ними. Это не очень согласуется с моделью параболы, в то же время отказ от симметризации сильно увеличивает объём вычислений (см. выше). Кроме того, при определённых условиях (наличие отблеска) подобный вид профиля получается и без симметризации. Оба вида профиля можно учесть, если использовать вместо параболы многочлен четвёртой степени.

4. Парабола 4-й степени + ступень (симметричный случай без разрывов)

В данном случае аппроксимирующая функция имеет вид (начало координат помещено в центре симметризованного профиля) (рис. 27):

$$y = \begin{cases} P, & |x| \geq A; \\ ax^4 + bx^2 + c, & |x| \leq A. \end{cases} \quad (41)$$

Условие непрерывности:

$$ax^4 + bx^2 + c \Big|_{x=\pm A} = P. \quad (42)$$

В силу симметрии функция чётная, вершина кривой лежит в точке $(0, c)$. Точка минимума лежит в точке (x_0, y_0) , координаты которой зависят от числа экстремумов кривой (наличия ямки). А именно, если нет ямки ($-b/2a \leq 0$), то $x_0 = 0, y_0 = c$; если есть ямка ($-b/2a > 0$), то $x_0 = \pm\sqrt{-b/2a}, y_0 = c - b^2/4a$. Здесь мы предположили, что $a > 0$ – ветви направлены вверх, исключительный случай (он, очевидно, маловероятен) будет упомянут ниже.

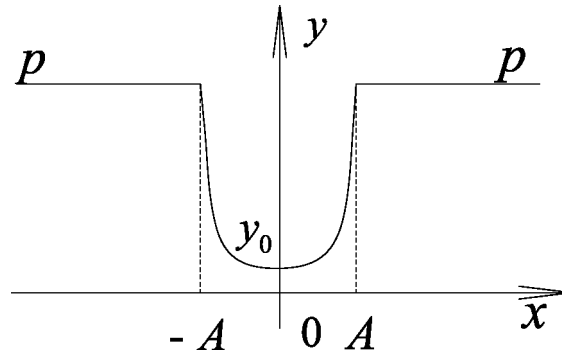


Рис. 27. Парабола 4-й степени + ступень, симметричный случай без разрывов

Подлежащий минимизации функционал выражается формулой:

$$J = \sum_{|x_i| \geq A} (P - y_i)^2 + \sum_{|x_i| < A} (ax_i^4 + bx_i^2 + c - y_i)^2 \rightarrow \min. \quad (43)$$

За счёт условия непрерывности сокращается число параметров:

$$c = P - aA^4 - bA^2. \quad (44)$$

Аналогично (36) имеем:

$$P = \frac{1}{N_1} \sum_{|x_i| \geq A} y_i, \quad (45)$$

где N_1 – число таких точек, в которых $|x_i| \geq A$.

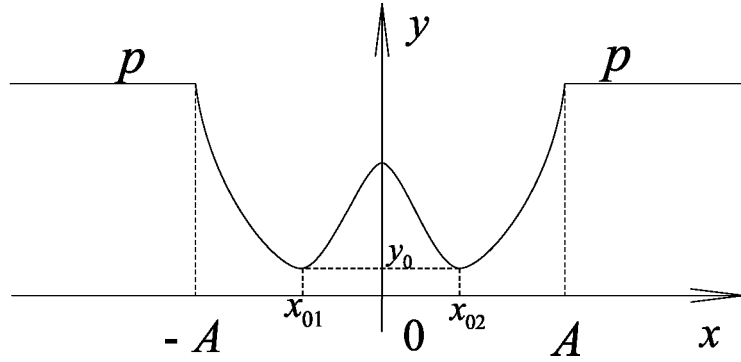


Рис. 28. Поиск значений, удовлетворяющих минимуму функционала

Подставив равенство (44) во второе слагаемое функционала (43), после преобразований получим:

$$J_1 = \sum_{|x_i| < A} \left\{ a(x_i^4 - A^4) + b(x_i^2 - A^2) + P - y_i \right\}^2 \rightarrow \min_{a,b} \quad (46)$$

Приравняв производные от (46) по a и b нулю, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} a(\sum x_i^8 - 2A^4 \sum x_i^4 + A^8 \sum 1) + \\ + b(\sum x_i^6 - A^2 \sum x_i^4 - A^4 \sum x_i^2 + A^6 \sum 1) = \\ = \sum y_i x_i^4 - A^4 \sum y_i - P \sum x_i^4 + PA^4 \sum 1, \\ a(\sum x_i^6 - A^2 \sum x_i^4 - A^4 \sum x_i^2 + A^6 \sum 1) + \\ + b(\sum x_i^4 - 2A^2 \sum x_i^2 + A^4 \sum 1) = \\ = \sum y_i x_i^2 - A^2 \sum y_i - P \sum x_i^2 + PA^2 \sum 1. \end{cases} \quad (47)$$

Решив эту систему, найдём a и b ; c определяется из равенства (44). Нахождение A ведётся каким-либо методом нахождения минимума функции (46) одной переменной, так как остальные четыре переменные вычисляются из равенств (45), (47), (44).

Правая граница толщины – такая точка x_n , которая лежит правее точки x_0 , и в которой имеет место равенство:

$$ax_n^4 + bx_n^2 + c = y_0 + \frac{2}{3}(P - y_0). \quad (48)$$

Причём требуется брать наибольший (по модулю) корень. Это условие необходимо для предотвращения случая, показанного на рис. 29. Собственно толщина равна величине $t = 2x_n$.

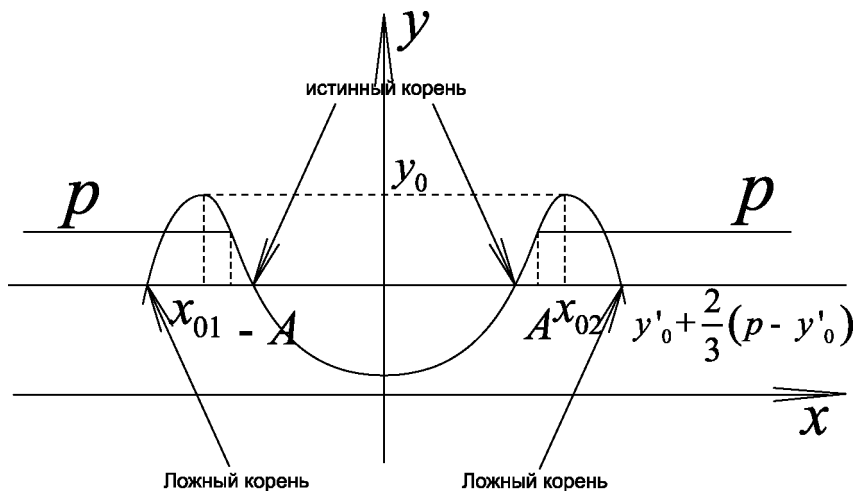


Рис. 29. Истинные и ложные корни выражения, удовлетворяющего минимуму функционала

Ранее упоминался исключительный случай, когда в целом ветви идут вниз, так как $a < 0$, но в области сосуда вверх, так как $b > 0$ (48). При этом в точках экстремумов максимум меняется на минимум и наоборот, поэтому приведённые выше рассуждения становятся неверными.

В этом случае поступаем следующим образом. Если y_0 окажется больше P , то положим $x_0 = 0, y_0 = c$; и далее действуем, как в общем случае (см. формулу (48)). Отличие состоит в том, что требует-

ся брать наименьший (по модулю) корень. Коэффициент $2/3$ в формуле (48) подобран эмпирически из наглядных соображений и взят таким же, как и в случае параболы 2-й степени. Отличие в том, что теоретическое значение не является константой.

3.1.2 Выбор уровня функции вычисления толщины

При определении толщины сосуда существуют два плохо формализуемых (в настоящее время) вопроса. Первый – выбор диаметра рамки, который в ряде методов равен длине профиля. Второй – в аппроксимационных методах, если аппроксимирующая функция отлична от константы (прямоугольника), необходимо выбрать, какой уровень значения функции соответствует границе сосуда. Сейчас оба эти вопроса решаются экспериментальным или интуитивным способом [45]. Однако здесь приводятся подходы, позволяющие эти вопросы решить конструктивным образом.

В дальнейшем изложении будем использовать ряд предположений. Профиль считается симметризованным и обращённым – сосуд светлее фона. Аппроксимирующая функция считается нормированной, если максимум равен единице, минимум (подставка) нулю. Аппроксимирующая функция при возрастании аргумента стремится к нулю. Направление сосуда считается известным, поэтому профиль является перпендикулярным к трассе.

Далее будет рассмотрено несколько аппроксимирующих функций и для них будут приведены уровни значений функции и соответствующие толщины.

1. Прямоугольник (*Rect*)

Эта модель очень проста (рис. 30), в ней нет вопроса выбора уровня, но на ней можно привести доказательство правила выбора радиуса рамки, и в дальнейшем, действуя по аналогии, доказать выбор уровня.

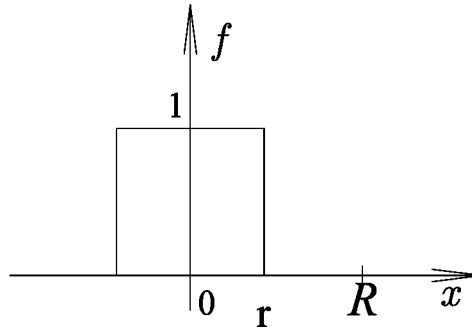


Рис. 30. Аппроксимирующая функция Rect

В данном случае аппроксимирующая функция имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq r; \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (49)$$

где R – радиус рамки.

Для двухградационного изображения наибольшая дисперсия яркости достигается в случае равенства площадей, занимаемых каждой градацией. Здесь мы это докажем для одномерного случая и получим правило для выбора радиуса рамки.

$$\begin{aligned} \overline{f} &= \frac{2}{2R} \int_0^R f(x) dx = \frac{r}{R}, & \overline{f^2} &= \frac{2}{2R} \int_0^R f^2(x) dx = \frac{r}{R}, \\ Df &= \overline{f^2} - (\overline{f})^2 = \frac{r}{R} - \frac{r^2}{R^2}. \end{aligned} \quad (50)$$

Максимум функции (50) равен одной четверти и достигается при $R = R_0 = 2r$. Отсюда вытекает правило выбора радиуса рамки: оптимальный радиус рамки равен двум толщинам сосуда. В таком виде правило нельзя применить на практике, так как толщины мы ещё не знаем. Реально это правило можно использовать тремя способами:

1) взять пробное значение радиуса рамки, вычислить начальное значение толщины, и на его основе получить новое значение радиуса (возможно выполнение нескольких итераций);

2) аналогичен предыдущему, но новое значение радиуса используется не для текущей, а следующей точки трассы;

3) изменяя размер рамки, найти такой, при котором достигается максимум дисперсии яркости на профиле (не аппроксимированной).

Оптимальность понимается в следующем смысле: конфигурация с максимумом дисперсии является наиболее устойчивой к шумам.

При модели прямоугольника толщина t равна параметру r , то есть можно записать равенство:

$$t = R_0 / 2. \quad (51)$$

Мы распространяем формулу (51) на произвольную модель. Таким образом, получаем правило вычисления толщины: толщина равна половине оптимального радиуса рамки при выбранной модели аппроксимации. Уровень функции, строго говоря, приводится, только из соображений наглядности. Далее приведём результаты действия этого правила на нескольких моделях аппроксимации.

2. Степенная функция

В данном случае аппроксимирующая функция имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{|x|}{r}\right)^n, & |x| \leq r; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (52)$$

Параметр n не обязательно целый, но должен быть положительным.

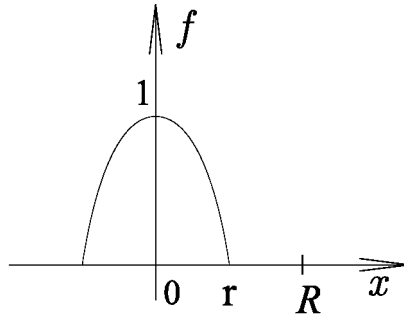


Рис. 31. Аппроксимирующая степенная функция

Вычислим дисперсию.

$$\bar{f} = \frac{r}{R} \cdot \frac{n}{n+1}, \quad \overline{f^2} = \frac{r}{R} \cdot \frac{2n^2}{(n+1)(2n+1)},$$

$$Df = \frac{r}{R} \cdot \frac{2n^2}{(n+1)(2n+1)} - \frac{r^2}{R^2} \cdot \frac{n^2}{(n+1)^2}. \quad (53)$$

Максимум функции (53) равен $\frac{n^2}{(2n+1)^2}$ и достигается при

$$R = R_0 = r \cdot \frac{2n+1}{n+1}. \text{ Исходя из формулы (51) получаем значение тол-$$

щины:

$$t = r \cdot \frac{2n+1}{2n+2}. \quad (54)$$

Отметим, что, как и следовало ожидать, при $n \rightarrow \infty$ получаются значения для модели прямоугольника.

Значение толщины (54) соответствует уровню функции $f(x=t) = 1 - \left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^n$. Приведём значения уровня для частных случаев.

n	Уровень
1	$\frac{1}{4} = 0.25$
2	$\frac{11}{36} \approx 0.306$
3	$\frac{169}{512} \approx 0.33$
4	$\frac{3439}{10000} \approx 0.344$
∞	$1 - \frac{1}{\sqrt{e}} \approx 0.393$

Из этой таблицы следует, что при модели параболы 2-й степени – формулы (25), (26) и (39) – точное значение коэффициента равно не $\frac{2}{3} \approx 0.667$, а (с учётом обращения профиля) $\frac{25}{36} \approx 0.694$. Что касается формулы (48), то здесь ситуация хуже – в модели параболы 4-й степени присутствуют два слагаемых, кроме того, может быть ямка. Если нет ямки, то, вероятнее всего, коэффициент лежит между 0.656 ($n = 4$) и 0.694, поэтому $2/3$ вполне допустим. Если ямка есть, то обосновать коэффициент, исходя из отдельных степеней, трудно.

3. Дробно-рациональная функция

В данном случае аппроксимирующая функция имеет вид:

$$f(x) = \frac{r^2}{x^2 + r^2}. \quad (55)$$

Для упрощения вычислений, рассмотрим приближённое вычисление дисперсии, предполагая, что пределы можно расширить до бесконечности. Благодаря этому выражение для дисперсии, как и в предыдущих двух пунктах, будет иметь простой вид: $c_1/R - c_2/R^2$, позволяющий аналитически найти максимум.

$$\overline{f} = \frac{1}{2R} \int_{-R}^R \frac{r^2}{x^2 + r^2} dx \approx \frac{1}{R} \int_0^{+\infty} \frac{r^2}{x^2 + r^2} dx = \frac{r}{R} \cdot \frac{\pi}{2},$$

$$\overline{f^2} = \frac{1}{2R} \int_{-R}^R \left(\frac{r^2}{x^2 + r^2} \right)^2 dx \approx \frac{1}{R} \int_0^{+\infty} \frac{r^4}{(x^2 + r^2)^2} dx = \frac{r}{2R} \cdot \frac{\pi}{2},$$

$$Df = \frac{1}{R} \cdot \frac{\pi r}{4} - \frac{1}{R^2} \cdot \frac{\pi^2 r^2}{4}. \quad (56)$$

Максимум функции (56) равен $1/16$ и достигается при $R = R_0 = 2\pi r$.

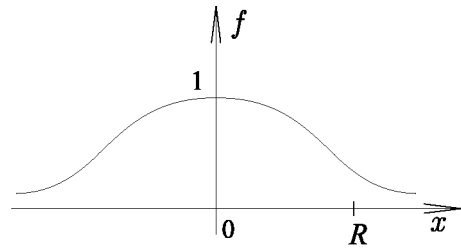


Рис. 32. Аппроксимирующая дробно-рациональная функция

Исходя из формулы (51) получаем значение толщины:

$$t = \pi r. \quad (57)$$

Это значение толщины соответствует уровню функции

$$f(x=t) = \frac{1}{1+\pi^2} \approx 0.092. \text{ Полученные значения толщины и уровня}$$

вызывают сомнения – толщина получается слишком большой, а уровень слишком низким по сравнению с наглядным представлением и моделями из пункта 2. Возможно, это связано с тем, что замена пределов на бесконечные является слишком грубой из-за того, что функция убывает медленно.

Для проверки данного предположения, сделаем точный расчёт.

$$\bar{f} = \frac{r}{R} \operatorname{arctg} \frac{R}{r}, \quad \overline{f^2} = \frac{r^2}{2(r^2 + R^2)} + \frac{r}{2R} \operatorname{arctg} \frac{R}{r},$$

$$Df = \frac{r^2}{2(r^2 + R^2)} + \frac{r}{2R} \operatorname{arctg} \frac{R}{r} - \frac{r^2}{R^2} \operatorname{arctg}^2 \frac{R}{r}. \quad (58)$$

Найдём максимум функции (58). Введём безразмерный параметр $y = R/r$. Тогда выражение для дисперсии примет вид:

$$Df = \frac{1}{2(1+y^2)} + \frac{1}{2y} \operatorname{arctg}(y) - \frac{1}{y^2} \operatorname{arctg}^2 y. \quad (59)$$

Чтобы найти максимум этой функции, необходимо решить следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{d(Df)}{dy} = & -\frac{y}{(1+y^2)^2} - \frac{1}{2y^2} \operatorname{arctg}(y) + \frac{1}{2y(1+y^2)} + \\ & + \frac{2}{y^3} \operatorname{arctg}^2 y - \frac{2}{y^2} \operatorname{arctg}(y) \frac{1}{1+y^2} = 0. \end{aligned} \quad (60)$$

Корень уравнения лежит на отрезке [3.5; 3.6], причём намного ближе к 3.5, поэтому примем $y = 3.5$. Максимум функции (58) равен 0.086 и достигается при $R = R_0 = 3.5r$. Таким образом, значение толщины:

$$t = 1.75r. \quad (61)$$

Это значение толщины соответствует уровню функции $f(x=t) = 16/65 \approx 0.246$. Новые значения толщины и уровня значительно правдоподобнее и должны использоваться в практических расчётах.

4. Функция Гаусса

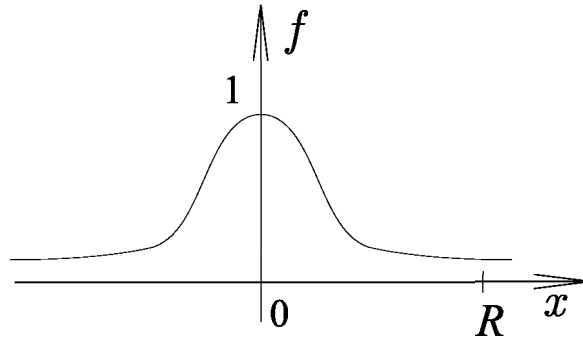


Рис. 33. Аппроксимирующая функция Гаусса

В данном случае аппроксимирующая функция имеет вид:

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}}. \quad (62)$$

Вначале рассмотрим приближённое вычисление дисперсии, предполагая, что благодаря намного более быстрому убыванию функции, чем в пункте 3, пределы можно расширить до бесконечных. Затем мы докажем, что это сделать можно.

$$\begin{aligned} \bar{f} &= \frac{1}{2R} \int_{-R}^R \exp\left(-\frac{x^2}{\sigma^2}\right) dx \approx \frac{1}{2R} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{\sigma^2}\right) dx = \frac{1}{2R} \sigma \sqrt{\pi}, \\ \bar{f}^2 &= \frac{1}{2R} \int_{-R}^R \exp\left(-\frac{2x^2}{\sigma^2}\right) dx \approx \frac{1}{2R} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{2x^2}{\sigma^2}\right) dx = \frac{1}{2R} \sigma \sqrt{\pi} \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ Df &= \frac{\sigma}{R} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} - \frac{\sigma^2}{R^2} \cdot \frac{\pi}{4}. \end{aligned} \quad (63)$$

Максимум функции (63) равен $1/8$ и достигается при $R = R_0 = \sigma \sqrt{2\pi} \approx 2.507\sigma$. Исходя из формулы (51) получаем значение толщины:

$$t = \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \quad (64)$$

Это значение соответствует уровню $e^{-\pi/2} \approx 0.208$.

Теперь рассмотрим точное вычисление. Если пределы не заменять на бесконечные, то ответ выражается через функцию [55]:

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt, \\ \bar{f} &= \frac{\sigma}{R} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \Phi\left(\frac{R}{\sigma}\right), \\ \bar{f}^2 &= \frac{\sigma}{R} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \cdot \Phi\left(\frac{\sqrt{2}R}{\sigma}\right), \end{aligned}$$

$$Df = \frac{\sigma}{R} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \cdot \Phi\left(\frac{\sqrt{2}R}{\sigma}\right) - \frac{\sigma^2}{R^2} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \Phi^2\left(\frac{R}{\sigma}\right). \quad (65)$$

Найдём максимум функции (65). Введём безразмерный параметр $y = R/\sigma$. Тогда выражение для дисперсии примет вид

$$Df = \frac{1}{y} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \cdot \Phi(y\sqrt{2}) - \frac{1}{y^2} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \Phi^2(y). \quad (66)$$

Чтобы найти максимум этой функции, необходимо решить следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{d(Df)}{dy} = & -\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{y^2} \cdot \Phi(y\sqrt{2}) + \frac{1}{y} e^{-2y^2} + \\ & + \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{y^3} \cdot \Phi^2(y) - \sqrt{\pi} \cdot \frac{1}{y^2} \cdot \Phi(y) e^{-y^2} = 0. \end{aligned} \quad (67)$$

Приближённое (с точностью 0.05) значение его корня равно 2.5, что в пределах точности корня не отличается от значения 2.507, полученного при замене пределов. Это означает, что мы можем использовать значения, полученные ранее формулу (64).

5. Парабола 4-й степени

В данном случае аппроксимирующая функция имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{x}{a}\right)^4 \pm \left(\frac{x}{b}\right)^2, & |x| \leq r; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (68)$$

Знак минус соответствует кривой без ямки, а плюс с ямкой (68).

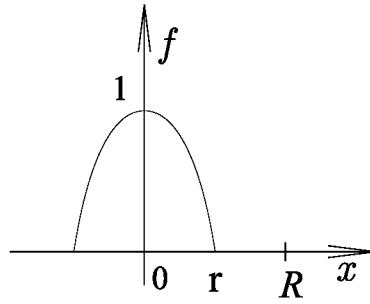


Рис. 34. Аппроксимация параболой 4-й степени (без ямки)

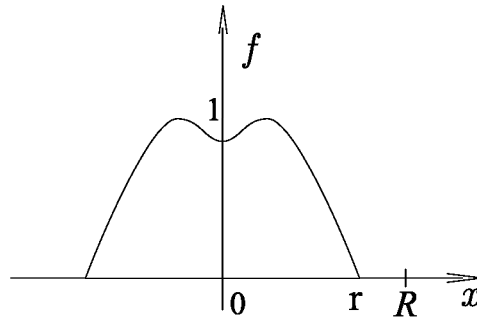


Рис. 35. Аппроксимация параболой 4-й степени (с ямкой)

Величина r – такое значение x , при котором $f(x) = 0$.

Исключительный случай (см. (68)) с учётом обращения профиля, в котором коэффициент при 4-й степени положителен не будем рассматривать по причине его малой вероятности и выпадения из общего вида рассматриваемых функций.

Рассмотрим сначала вариант со знаком минус. Величина r равна

$$r = \frac{a\sqrt{\sqrt{a^4 + 4b^4} - a^2}}{b\sqrt{2}}. \quad (69)$$

Вычислим дисперсию.

$$\bar{f} = \frac{1}{R} \cdot \left(r - \frac{r^3}{3b^2} - \frac{r^5}{5a^4} \right),$$

$$\overline{f^2} = \frac{1}{R} \cdot \left(r - \frac{2r^3}{3b^2} + \left(\frac{1}{b^4} - \frac{2}{a^4} \right) \frac{r^5}{5} + \frac{2r^7}{7a^4b^2} + \frac{r^9}{9a^8} \right),$$

$$Df = \frac{A}{R} - \frac{B}{R^2}, \quad (70)$$

где введены обозначения:

$$A = r - \frac{2r^3}{3b^2} + \left(\frac{1}{b^4} - \frac{2}{a^4} \right) \frac{r^5}{5} + \frac{2r^7}{7a^4b^2} + \frac{r^9}{9a^8},$$

$$B = \left(r - \frac{r^3}{3b^2} - \frac{r^5}{5a^4} \right)^2. \quad (71)$$

Максимум функции (70) равен $\frac{A^2}{4B}$ и достигается при

$$R = R_0 = \frac{2B}{A}.$$

Исходя из формулы (51) получаем значение толщины:

$$t = \frac{B}{A}. \quad (72)$$

Явный вид не приводим ввиду его большой сложности, по этой же причине не приводим значение уровня, кроме того, в отличие от моделей из предыдущих формул, он не является константой.

В случае варианта со знаком плюс формулы сохраняют силу с точностью до обозначений. А именно, немного изменяются выражения для r , A , B :

$$r = \frac{a\sqrt{\sqrt{a^4 + 4b^4} + a^2}}{b\sqrt{2}}, \quad (73)$$

$$A = r + \frac{2r^3}{3b^2} + \left(\frac{1}{b^4} - \frac{2}{a^4} \right) \frac{r^5}{5} - \frac{2r^7}{7a^4b^2} + \frac{r^9}{9a^8},$$

$$B = \left(r + \frac{r^3}{3b^2} - \frac{r^5}{5a^4} \right)^2. \quad (74)$$

Аналогичным образом можно для любой модели аппроксимации найти теоретически обоснованное значение толщины и оптимальный размер рамки (длину профиля).

3.2 Спектральные методы

В основе этой группы методов лежит преобразование Фурье [64]. Дискретный спектр $F(m)$ конечной последовательности $f(n)$ определяется следующим образом:

$$F(m) = \sum_{n=-N/2}^{N/2} f(n) \exp(-i \frac{2\pi}{N} nm). \quad (75)$$

Для обеспечения инвариантности к сдвигу профиля относительно центра сосуда будем производить аппроксимацию квадрата модуля спектра, который является вещественной четной функцией. Таким образом, задача параметрической аппроксимации спектра профиля заключается в минимизации целевой функции:

$$S(D) = \sum_{m=0}^{N-1} \left(F^2(m, D) - |\tilde{F}(m)|^2 \right)^2 \rightarrow \min_D, \quad (76)$$

где $\tilde{F}(m) = \sum_{n=-N/2}^{N/2} \tilde{f}(n) \exp(-i \frac{2\pi}{N} nm)$, дискретный спектр исходного профиля.

В некоторых случаях для уменьшения времени получения оценки применяется метод последовательного приближения, при этом сначала осуществляется определение толщины каким-либо относительно быстрым методом, а затем методом бинарного поиска производится уточнение полученного значения. Недостаток такого подхода – усложнение реализации алгоритма.

Модель Sync

Эта модель представляет собой спектральный аналог модели Rect. Дискретный спектр последовательности модели Rect:

$$\begin{aligned} \text{Sync}(m, D) &= F(m, D) = \\ &= \sum_{n=-N/2}^{N/2} \text{Rect}\left(\frac{n}{D}\right) \exp\left(i \frac{2\pi}{N} nm\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi m}{N}(1+D)\right)}{\sin\frac{\pi m}{N}}. \end{aligned} \quad (77)$$

Высокочастотные компоненты спектра отвечают за шумовые составляющие сигналы, поэтому будем проводить аппроксимацию только главного лепестка спектра, ширина которого обратно пропорциональна ширине сосуда. Этот факт позволяет нам упростить процедуру оценивания толщины до поиска первого локального минимума спектра исходного профиля. Для ускорения работы метода вычисления проводятся в два этапа. На первом этапе оценка принимается равной оценке полученной применением модели Rect на исходном профиле, затем уточняем результат, проводя поиск локального минимума спектра исходного профиля. Для найденного таким образом значения частоты Ω вычисляем оценку толщины по формуле (78).

$$D = \frac{2\pi}{\Omega}. \quad (78)$$

Такой подход позволяет сократить время выполнения метода в среднем на 30%. Результат проведения аппроксимации спектра исходного профиля моделью Sync представлен на рис. 36.

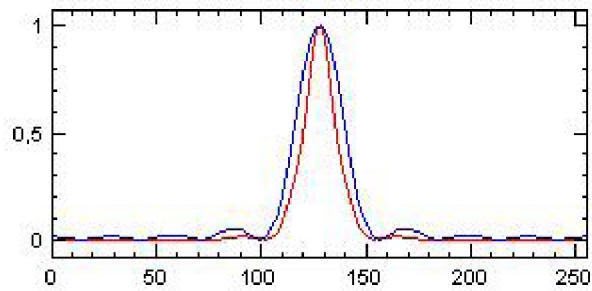
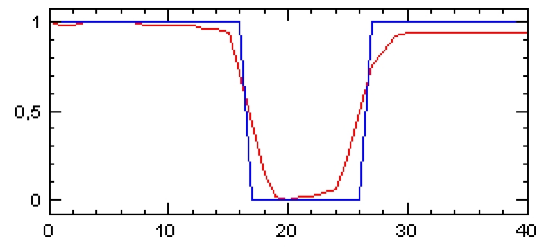


Рис. 36. Пример аппроксимации профиля моделью *Synс*

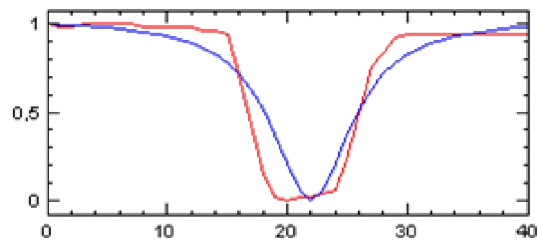
3.3 Примеры аппроксимации

На рис. 37 показаны результаты аппроксимации одного и того же профиля или его спектра рассмотренными выше моделями.

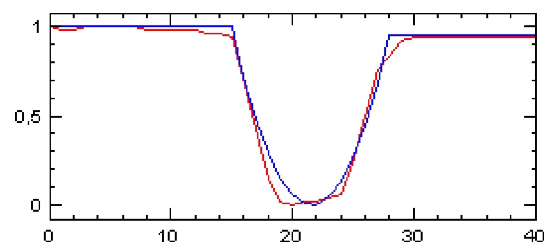
Данные методы оценивания толщины были исследованы с использованием имитационного моделирования тестовых изображений, для которых параметры были известны априорно. При этом вид тестовых изображений максимально соответствовал реальным изображениям. В качестве тестового объекта использовались прямолинейные и криволинейные участки ветвей древовидных объектов. Примеры результатов оценивания толщины приведены ниже (табл. 1). Достоинством описанных методов является их высокая точность и помехоустойчивость. Недостатком является необходимость указания сечения, а также вычислительная сложность.



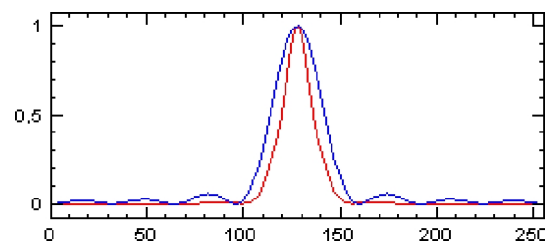
a)



б)



в)









г)

Рис. 37. Применение различных аппроксимационных методов:
 а) модель Rect; б) модель ДРФ; в) модель парабола; г) модель Sinc

Таблица 1

Примеры результатов оценивания толщины

	Истинное значение толщины	Аппроксимация спектра ф-цией Гаусса	Аппроксимация спектра ф-цией квадрата Гаусса	Аппроксимация спектра ф-цией Sinc	Аппроксимация спектра ф-цией Sinc ²	Аппроксимация профиля дробно-рациональной функцией
	6	6,59	6,60	5,84	6,14	5,19
	14	13,99	14,67	13,16	13,60	13,05
	5	5,79	5,91	5,13	5,48	5,53
	5	5,19	5,35	4,32	4,96	4,03
	20	19,91	20,02	18,05	18,61	18,26
	10	9,59	9,92	8,67	9,23	8,52

4 МЕТОДЫ МОРФОЛОГИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ДРЕВОВИДНЫХ СТРУКТУР ДИАГНОСТИЧЕСКИХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

В данной главе описан подход, позволяющий модифицировать геометрические признаки таким образом, чтобы учесть морфологические особенности древовидных структур [56, 59, 60, 62, 63, 64, 65]. В качестве примеров диагностических признаков будут использованы:

1. Прямолинейность Pr , характеризующая степень отклонения функции средней линии сосуда от прямолинейного хода. В качестве базовой оценки прямолинейности, будем использовать отношение длины кривой L_v к длине L отрезка, соединяющего начальную и конечную точки кривой.

2. Извитость I , характеризующая скорость изменения функции средней линии сосуда. В качестве базовой оценки, будем использовать определение извитости для гармонической кривой с амплитудой A и частотой ω , т.е. величину, равную произведению A и ω .

Данный метод может быть использован для обеспечения инвариантности признаков, увеличения степени устойчивости признаков к шумам, а также для разработки новых признаков.

После ввода диагностическое изображение глазного дна подвергается обработке с целью получения центральных линий сосудов, например с использованием метода трассировки [60], упомянутого выше. Полученное дискретное представление центральной линии сосуда является исходными данными для разработанных методов и алгоритмов.

Исходную непрерывную центральную линию сосуда определим в параметрическом виде:

$$\vec{\gamma}(t) \in \mathbf{R}^2, t \in [t_1, t_2]. \quad (79)$$

Будем считать, что $\vec{\gamma}(t)$ представляет собой регулярную кривую с натуральной параметризацией.

Входными данными является последовательность точек:

$$\{\vec{x}_i\}_{i=1}^N. \quad (80)$$

Она определяет среднюю линию сосуда, где $\vec{x}_i \in \mathbf{R}^2$ — координаты точек средней линии после дискретизации, N — количество точек после дискретизации. Рассматривается случай эквидистантой дискретизации исходной непрерывной центральной линии (см. 38).

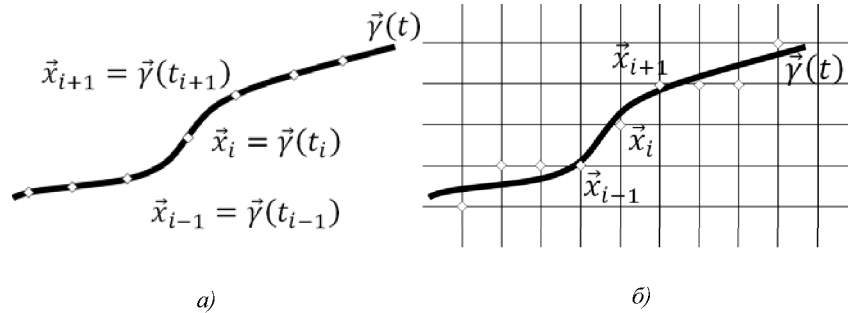


Рис. 38. Дискретизация кривой: а) по параметру, б) на прямоугольной сетке

Следует рассматривать случаи дискретизации исходной кривой: случай дискретизации кривой по параметру и случай дискретизации кривой на прямоугольной сетке (рис. 38). Первый случай имеет скорее теоретический интерес и может выступать как модель или служить эталоном при проведении экспериментальных исследований. Второй случай встречается в реальных задачах при обработке цифрового изображения [61].

4.1 Разбиение кривых на лепестки

Основа морфологического анализа – разбиение центральной линии на части (морфемы) с последующим оцениванием геометрических характеристик этих частей и расчётом на основе полученных значений морфологических признаков центральной линии в целом.

Каждую непрерывную центральную линию можно разбить на части бесконечным числом способов. Например, один из подходов, применимый к дважды непрерывно дифференцируемым централь-

ным линиям $\vec{\gamma}(t)$ с конечным числом точек перегиба на некотором отрезке $[a, b]$, заключается в разбиении линии на основе точек перегиба. Саму последовательность точек X , по которой происходит разбиение можно записать в виде следующего выражения:

$$X = \left\{ x_n = \vec{\gamma}(t) : \frac{\partial^2 \vec{\gamma}(t)}{\partial t^2} \Big|_{t=t_n} = 0 \right\}; n = \overline{0, N}; \quad (81)$$

$$a \leq t_0 < t_1 < \dots < t_N \leq b,$$

где $N+1$ – количество точек перегиба.

Будем называть *лепестками* области, ограниченные кривой между двумя соседними точками разбиения и отрезком, соединяющим эти две точки. Пример разбиения кривой представлен на рис. 40. Области, соответствующие лепесткам, заштрихованы.

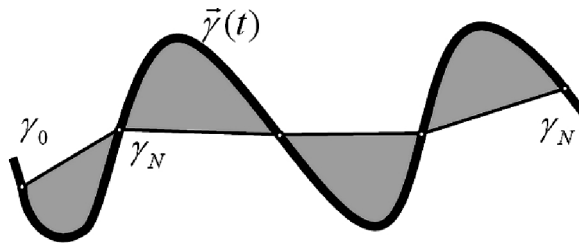


Рис. 39. Пример кривой разбитой на лепестки

В случаи дискретного представления центральной линии сосуда, удобно использовать не последовательность точек, по которым произведено разбиение на кривые, а последовательности $H = \{H_k\}_{k=1}^N$ и $E = \{E_k\}_{k=1}^N$ – соответственно номеров начальных и конечных точек лепестков в последовательности (80).

4.2 Оценивание геометрических параметров лепестков

Для построения морфологических признаков используются описанные ниже геометрические характеристики лепестков.

Рассмотрим рис. 40: первой точкой i -го лепестка будем называть точку $a_i = \vec{x}_{H_i}$, последней точкой – $b_i = \vec{x}_{E_i}$. Отрезок $\overline{a_i b_i}$ будем называть основанием i -го лепестка, а его длину $T_i = |\overline{a_i b_i}|$ полупериодом лепестка. Максимальное значение расстояний от точек лепестка до его основания назовём амплитудой лепестка и будем обозначать A_i . Вычислить A_i можно по следующей формуле (82):

$$A_i = \max_{k=H_i, E_i} d_i(\vec{x}_k), \quad (82)$$

где $d_i(\vec{x}_k)$ – расстояние от точки \vec{x}_k до её проекции на отрезок $\overline{a_i b_i}$.

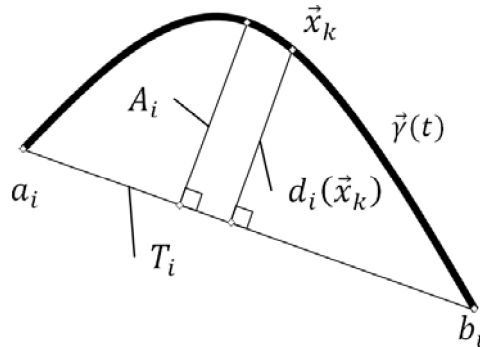


Рис. 40. Пример лепестка центральной линии

Оцениваются величины L_i – длина дуги лепестка и S_i – площадь лепестка, имеющие очевидный смысл.

Для вычисления геометрических параметров лепестков используется линейная интерполяция отсчётов кривой, что позволяет существенно упростить расчёты при сохранении приемлемой точности.

Указанные выше геометрические параметры могут быть вычислены с использованием матриц (δ_{ij}) расстояний и (φ_{ij}) углов по формулам (86), (87) и (85). Элементы матрицы (δ_{ij}) для последова-

тельности (80) и могут быть записаны в виде следующего выражения:

$$\delta_{ij} = \|\bar{x}_j - \bar{x}_i\|, \quad (83)$$

где $i, j \in \overline{1, N}$, $\|\bar{x}\|$ – евклидова норма вектора \bar{x} . Элементы матрицы (φ_{ij}) для последовательности (80) и могут быть записаны в виде следующего выражения:

$$\varphi_{ij} = \begin{cases} \alpha(\bar{x}_j - \bar{x}_i), & \text{если } i < j; \\ 0, & \text{если } i = j; \\ \varphi_{ji} & \text{если } i > j, \end{cases} \quad (84)$$

где $i, j \in \overline{1, N}$, $\alpha(\bar{x})$ – скалярная функция векторного аргумента, значение которой есть угол между указанным вектором и осью абсцисс. Площадь лепестка оценивается по формуле (85):

$$S_i = \left| \frac{1}{2} \sum_{k=H_i}^{E_i-1} ((c_k + c_{k+1}) \delta_{k(k+1)} \cos \varphi_{k(k+1)}) - \frac{1}{4} \delta_{H_i E_i}^2 \sin 2\varphi_{H_i E_i} \right|, \quad (85)$$

$$c_k = \begin{cases} c_{k-1} + \delta_{k(k-1)} \sin \varphi_{k(k-1)}, & \text{если } \forall i = \overline{1, K} \rightarrow k \neq H_i; \\ 0, & \text{если } \exists i = \overline{1, K} \rightarrow k = H_i. \end{cases}$$

Модуль первого слагаемого в формуле (85) представляет собой сумму площадей трапеций (рис. 41, площадь i -й трапеции заштрихована сверху вниз). Модуль последнего слагаемого представляет собой площадь прямоугольного треугольника с гипотенузой $\delta_{H_i E_i}$ и одним из углов $\alpha_{H_i E_i}$ (рис. 41, площадь треугольника заштрихована снизу вверх). Последнее выражение в формуле (85) представляет собой значения длин сторон трапеций, упомянутых выше. T_i – расстояние между первой и последней точками i -го лепестка, то есть между точками в последовательности (80) с номерами H_i и E_i соответственно, что, по определению матрицы расстоя-

ний, и есть значение $\delta_{H_i E_i}$ (86). L_i – сумма расстояний от первой точки лепестка до второй, от второй к третьей и так далее до последней точки лепестка (86), что при линейной интерполяции соответствует длине дуги лепестка (рис. 41).

$$T_i = \delta_{H_i E_i};$$

$$L_i = \sum_{k=H_i}^{E_i-1} \delta_{k(k+1)}. \quad (86)$$

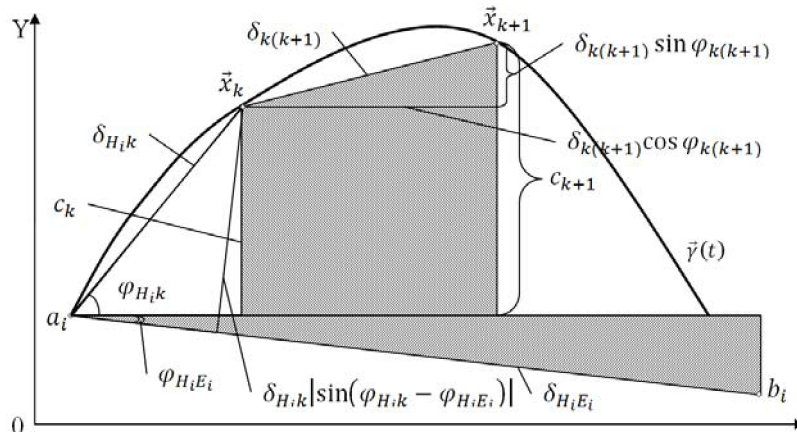


Рис. 41. К объяснению формул (85), (86) и (87)

Задача максимизации (82) на дискретизованной кривой сводится к последовательному перебору значений $d_i(\bar{x}_k)$ для всех точек, принадлежащих отрезку. Из определений матриц углов и расстояний и из соотношений сторон в прямоугольном треугольнике (рис. 41) можно видеть, что $d_i(\bar{x}_k) = \delta_{H_i k} |\sin(\varphi_{H_i k} - \varphi_{H_i E_i})|$, и, следовательно, выражение (82) тождественно выражению (87):

$$A_i = \max_{k=H_i, E_i} \delta_{H_i k} |\sin(\varphi_{H_i k} - \varphi_{H_i E_i})|. \quad (87)$$

Дополнительно будем использовать величины (88):

$$\tilde{T}_i = \frac{\pi S_i}{2A_i}; \quad \tilde{A}_i = \frac{\pi S_i}{2T_i}, \quad (88)$$

соответственно, значение полупериода лепестка синуса, амплитуда которого A_i , а площадь – S_i , и значение амплитуды лепестка синуса, полупериод которого T_i , а площадь – S_i . Для вычисления этих величин воспользуется формулой площади синуса S на полупериоде (то есть площадь лепестка синуса), по известным амплитуде A и полупериоду T (89):

$$S = \int_0^T A \sin \frac{\pi x}{T} dx = \frac{2}{\pi} AT. \quad (89)$$

4.3 Оценивание признаков

На основе геометрических параметров лепестков формируются новые признаки $Pr_1, Pr_2, I_{11}, I_{12}, I_{21}$ и I_{22} , первые два из которых характеризуют прямолинейность, а остальные – извитость. Эти признаки вычисляются по следующим формулам (90):

$$Pr_n = \frac{\bar{L}_v}{\bar{T}_v}; \quad I_{mn} = \frac{\pi \bar{A}_m}{\bar{T}_n}, \quad (90)$$

где $m, n \in \{1, 2\}$, \bar{L}_v – средняя длина дуги лепестков; \bar{T}_1 и \bar{T}_2 – средние полупериоды лепестков; а \bar{A}_1 и \bar{A}_2 – средние амплитуды лепестков. Перечисленные величины могут быть вычислены по формулам (91) на основе оценивания геометрических характеристик лепестков.

$$\begin{aligned} \bar{L}_v &= \frac{1}{K-2} \sum_{i=2}^{K-1} L_i; \\ \bar{T}_1 &= \frac{1}{K-2} \sum_{i=2}^{K-1} T_i; \quad \bar{A}_1 = \frac{1}{K-2} \sum_{i=2}^{K-1} A_i; \end{aligned} \quad (91)$$

$$\bar{T}_2 = \frac{1}{K-2} \sum_{i=2}^{K-1} \tilde{T}_i; \quad \bar{A}_2 = \frac{1}{K-2} \sum_{i=2}^{K-1} \tilde{A}_i.$$

Для достижения инвариантности при усреднении отбросим первый и последний лепестки кривой. Отметим, что для гармонических кривых, взятых на отрезке, кратном полупериоду, значения новых признаков совпадают со значениями ранее описанных признаков (при условии, что длина этого отрезка больше одного периода функции), то есть $I = I_{11} = I_{12} = I_{21} = I_{22}$ и $Pr = Pr_1 = Pr_2$.

Рассмотрим, как изменяются значения новых признаков в зависимости от параметров лепестка на примере расчёта признаков лепестка треугольника с длиной основания T и высотой A (рис. 42).

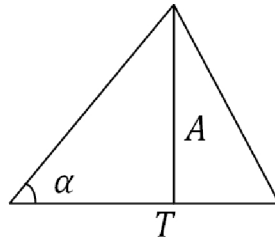


Рис. 42. Пример лепестка треугольника

Подставляя в (90) следующие значения:

$$\bar{L}_v = \frac{A}{\sin \alpha} + \sqrt{A^2 + \left(T - \frac{A}{\operatorname{tg} \alpha}\right)^2}; \quad \bar{T}_1 = T; \quad \bar{A}_1 = A; \quad \bar{T}_2 = \frac{T}{\pi}; \quad \bar{A}_2 = \frac{A}{\pi},$$

получим значения признаков:

$$Pr_1 = \frac{A}{T \sin \alpha} + \sqrt{\frac{A^2}{T^2} + \left(1 - \frac{A}{T \operatorname{tg} \alpha}\right)^2}; \quad Pr_2 = \pi Pr_1;$$

$$I_{11} = I_{22} = \frac{\pi A}{T}; \quad I_{12} = \frac{\pi^2 A}{T}; \quad I_{21} = \frac{A}{T}.$$

Наибольший интерес представляет признак Pr_1 , так как Pr_2 прямо пропорционален Pr_1 , а остальные признаки являются константа-

ми при фиксированных A и T . Ниже приведён график зависимости значения признака Pr_1 для треугольного лепестка при различных фиксированных значениях отношения A к T и варьируемом значении параметра α (рис. 43).

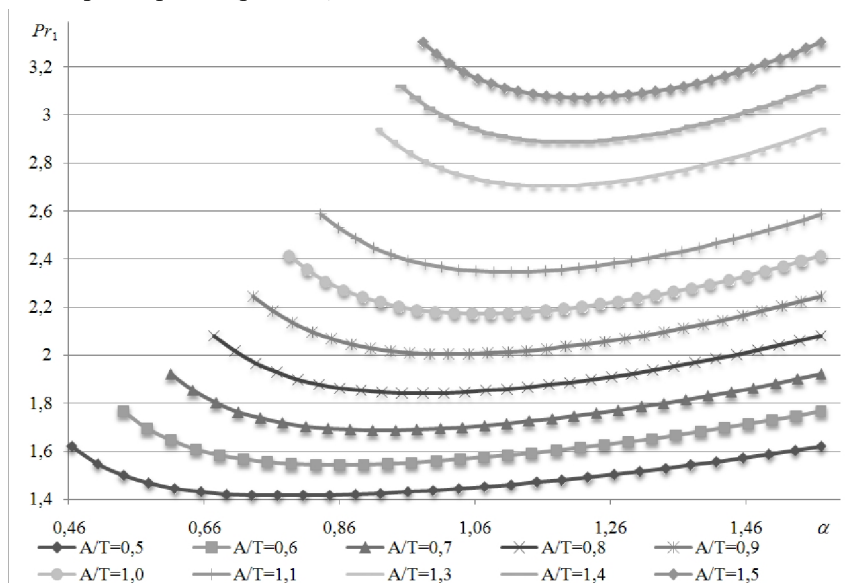


Рис. 43. Зависимость значений признака Pr_1 от значения параметра α

4.4 Матрица видимости

Опишем ещё один подход к разбиению на лепестки, основанный на анализе матриц видимости кривой. Под *матрицей видимости* кривой подразумевается симметричная квадратная матрица (a_{ij}) , состоящая из нулей и единиц, являющаяся индикатором взаимной видимости точек кривой, представленной в форме (80). Точки с номерами i и j в последовательности (80) считаются взаимно видимыми ($a_{ij} = a_{ji} = 1$), если отрезок, соединяющий точки \bar{x}_i и \bar{x}_j , не пересекается ни с одним из отрезков, соединяющих соседние точки \bar{x}_{i+1} и \bar{x}_{i+2} , \bar{x}_{i+2} и \bar{x}_{i+3} , ..., \bar{x}_{j-2} и \bar{x}_{j-1} . В случае, если пересечение существует, точки с номерами i и j будем считать взаимно невидимыми ($a_{ij} = a_{ji} = 0$).

Значения элементов матрицы (a_{ij}) можно записать в виде выражения:


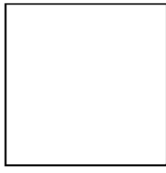


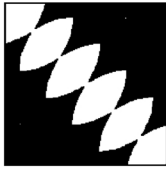
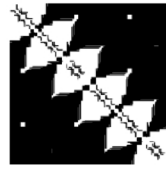

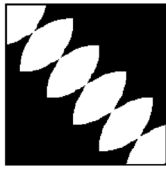
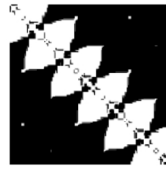




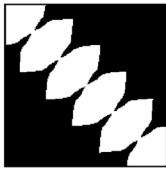
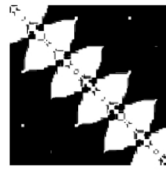

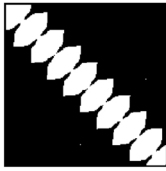
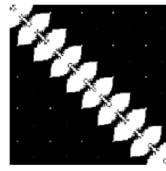
$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } \exists k : (i+1 < k < j) \rightarrow L_{\bar{x}}(i, j, k-1, k) \notin \{\emptyset, [\bar{x}_{k-1}, \bar{x}_k]\}; \\ 1, & \text{если } \forall k : (i+1 < k < j) \rightarrow L_{\bar{x}}(i, j, k-1, k) \in \{\emptyset, [\bar{x}_{k-1}, \bar{x}_k]\}; \\ 1, & \text{если } (i = j) \vee (i = j-1); \\ a_{ji}, & \text{если } i > j; \end{cases} \quad (92)$$

где $i, j \in \{1, 2, \dots, N\}$; $L_{\bar{x}}(i, j, k-1, k)$ – множество точек пересечения отрезков $[\bar{x}_i, \bar{x}_j]$ и $[\bar{x}_{k-1}, \bar{x}_k]$.

Полученная матрица будет инвариантной к ортогональным преобразованиям (сдвигу, повороту, масштабированию) исходной последовательности точек (80).

Вычисление матрицы видимости непосредственно с помощью выражения (92) требует порядка $O(N^3)$ операций определения множества точек пересечения прямой с отрезком.

Таблица 2.
Матрицы видимости

Вид кривой	1	2
		
		
		
		
		
		

Для визуального анализа матрицы видимости представляются в виде бинарного изображения, где белым точкам соответствуют значения матрицы видимости, равные единице, а чёрным – нули (табл. 2), где колонка 1 – матрицы видимости при дискретизации кривой по параметру, колонка 2 – матрицы видимости при дискретизации кривой на прямоугольной сетке.

Вид визуализированной матрицы видимости в случае дискретизации кривой на прямоугольной сетке и при дискретизации кривой по параметру значительно различается (табл. 2).

При дискретизации кривой на прямоугольной сетке матрица видимости получается «изрезанной» и «угловатой». При дискретизации кривой по параметру матрица видимости представляет собой области с гладкими границами.

Опишем подробнее способ разбиения центральной линии сосуда на лепестки, основанный на матрице видимости. Рассмотрим последовательности взаимно видимых точек кривой в форме (80). На матрице видимости эта последовательность отображается в квадрат, состоящий из единиц, диагональ которого лежит на главной диагонали матрицы видимости. То есть, если H – номер первой точки в последовательности взаимно видимых точек последовательности (80), а E – номер последней, должно выполняться тождество (93):

$$\sum_{i=H}^E \sum_{j=H}^E a_{ij} \equiv (E - H + 1)^2. \quad (93)$$

Как критерий разбиения кривой, представленной в форме (80), на лепестки будем использовать разбиение кривой на множество последовательностей взаимно видимых точек такое, что любые две из этих последовательностей имеют не более одной общей точки и суммарная площадь квадратов, соответствующих этим последовательностям на матрице видимости, максимальна. То есть условием разбиения кривой на лепестки будет (94):

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^{\hat{K}} (\hat{E}_k - \hat{H}_k + 1)^2 \xrightarrow{\hat{K}=1, \overline{N}, \{\hat{E}_k\}, \{\hat{H}_k\}} \max; \\ 1 \leq \hat{H}_1 < \hat{H}_2 < \dots < \hat{H}_{k-1} < \hat{H}_k \leq N; \\ 1 \leq \hat{E}_1 < \hat{E}_2 < \dots < \hat{E}_{k-1} < \hat{E}_k \leq N; \\ \hat{H}_1 \leq \hat{E}_1 < \hat{H}_2 \leq \hat{E}_2 < \dots < \hat{H}_k \leq \hat{E}_k, \end{array} \right. \quad (94)$$

где максимизация функционала ведётся по всевозможным \hat{K} – количеству всевозможных последовательностей взаимно видимых точек, $\{\hat{H}_k\}_{k=1}^{\hat{K}}$ и $\{\hat{E}_k\}_{k=1}^{\hat{K}}$ – соответственно начальные и конечные точки последовательностей взаимно видимых точек.

Количество лепестков, полученных в результате максимизации функционала (94), будем обозначать K , а соответствующие последовательности номеров начальных и конечных точек $\{H_k\}_{k=1}^K$ и $\{E_k\}_{k=1}^K$.

4.5 Метод плавающего горизонта

Матрица видимости по своему определению является результатом работы некоторого алгоритма определения видимых точек. Следовательно, можно найти алгоритм, позволяющий сократить вычислительные затраты, связанные с построением матрицы видимости, на основе стандартных алгоритмов и методов компьютерной графики. Алгоритм вычисления матрицы видимости основан на методе плавающего горизонта. Метод плавающего горизонта используется для удаления невидимых линий трехмерного представления функций, описывающих поверхность в виде $F(x, y, z) = 0$. Главная идея данного метода заключается в сведении трехмерной задачи к двумерной путем пересечения исходной поверхности последовательностью параллельных секущих плоскостей, имеющих постоянные значения координат x , y или z .

Рис. 44а является примером, где указанные параллельные плоскости определяются постоянными значениями z . Функция $F(x, y, z) = 0$ сводится к последовательности кривых, лежащих в каждой из этих параллельных плоскостей, например, к последовательности $y = f(x, z)$ или $x = g(y, z)$, где z – постоянно на каждой из заданных параллельных плоскостей.

То есть поверхность теперь складывается из последовательности кривых, лежащих в каждой из этих плоскостей (рис. 44б). Здесь предполагается, что полученные кривые являются однозначными функциями независимых переменных. Если спроецировать полученные кривые на плоскость $z = 0$ (рис. 44в), то сразу становится ясна идея алгоритма удаления невидимых участков исходной поверхности.

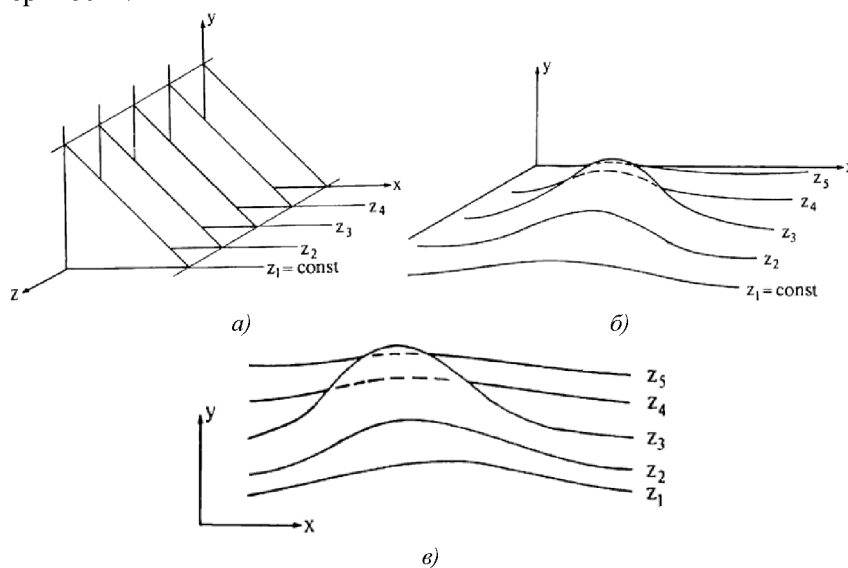


Рис. 44. К объяснению алгоритма плавающего горизонта

Алгоритм сначала упорядочивает плоскости $z = const$ по возрастанию расстояния до них от точки наблюдения. Затем для каждой плоскости, начиная с ближайшей к точке наблюдения, строится кри-

вая, лежащая на ней, то есть для каждого значения координаты x в пространстве изображения определяется соответствующее значение y . Алгоритм удаления невидимой линии заключается в следующем:

Если на текущей плоскости при некотором заданном значении x соответствующее значение y на кривой больше максимума или меньше минимума по y для всех предыдущих кривых при этом x , то текущая кривая видима. В противном случае она невидима.

Реализация данного алгоритма достаточно проста. Для хранения максимальных значений y при каждом значении x используются два массива, длина которых равна числу различимых точек (разрешению) по оси X в пространстве изображения. Значения, хранящиеся в этих массивах, представляют собой текущие значения верхнего и нижнего «горизонтов». Поэтому по мере рисования каждой очередной кривой эти горизонты «плавают» – верхний «всплывает», нижний «тонет». На рис. 45 показан типичный результат работы алгоритма плавающего горизонта для функции $y = 0.2 \sin x \cos z - 1.5e^{-a} \cos 1.75a$, $a = (x - \pi)^2 + (z - \pi)^2$ в интервале $[0; 2\pi]$.

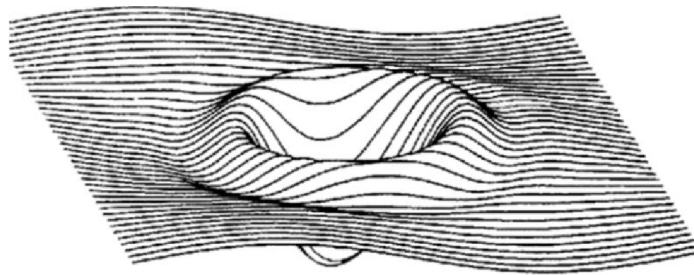


Рис. 45. Результат работы алгоритма плавающего горизонта

4.6 Приближённое вычисление матриц видимости

Опишем алгоритм оценивания матриц видимости, основанный на методе плавающего горизонта. В алгоритме вычисления матрицы

Вычисление матрицы видимости с помощью записанного алгоритма требует порядка $O(N^2)$ операций, то есть сложность у алгоритма прямо пропорциональна количеству элементов вычисляемой матрицы видимости.

Рассмотрим работу алгоритма на примере последовательности, состоящей из следующих точек $\{(1;3),(2;3),(4;5),(6,1),(7;4),(10;7)\}$ (рис. 47а). Наибольший интерес представляет внутренний цикл алгоритма (рис. 47, выделен жирным), значения переменных для всех шагов этого цикла представлены на рис. 47в. Значение матрицы видимости, полученной в ходе работы алгоритма, приведено на рис. 47б.

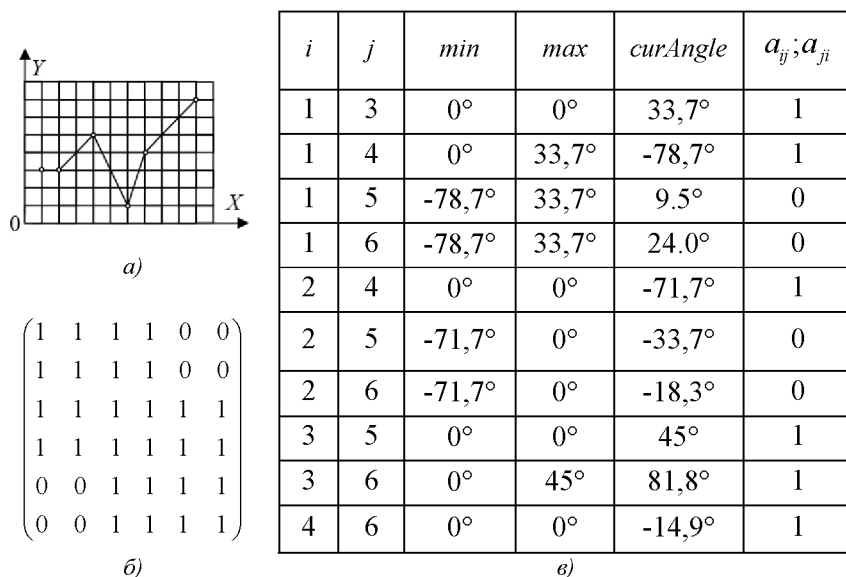


Рис. 47. К объяснению работы алгоритма: а) исходная кривая, б) матрица видимости, в) значения переменных на разных шагах алгоритма

Легко обнаружить, что матрица углов для случая дискретизации кривой по параметру не имеет резких изменений при переходе от одного элемента матрицы к другому, в отличие от матриц углов для случая дискретизации кривой на прямоугольных сетках (рис. 48),

значение угла кодируется псевдоцветом, соответствующим этому углу на цветовой окружности. То есть, матрица углов для случая дискретизации кривой на прямоугольных сетках после визуализации представляет собой совокупность областей с резкими очертаниями границ между ними, в случае визуализации матрицы углов кривой, дискретизованной по параметру, изображение получается без резких контуров (за исключением главной диагонали).

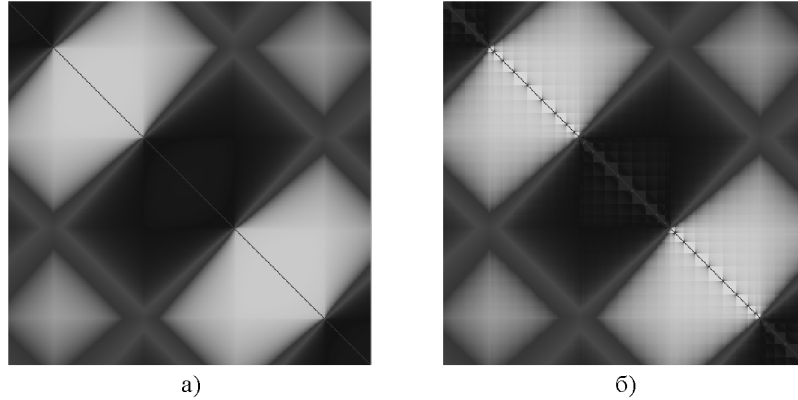


Рис. 48. Визуализация матрицы углов: а) дискретизация кривой по параметру, б) дискретизация на прямоугольной сетке

Для разрушения контуров при обработке сигналов традиционно используются фильтры низких частот. В силу свойств периодичности углов применение классических способов линейной фильтрации невозможно. Воспользуемся методом фильтрации, основанном на представлении углов в виде комплексных чисел: действительностнозначная матрица (φ_{ij}) была заменена на комплекснозначную матрицу c_{ij} такую, что выполняются равенства (95):

$$|c_{ij}| = \delta_{ij}; \arg c_{ij} = \varphi_{ij}, \quad (95)$$

где $|c|$ – модуль комплексного числа c , δ_{ij} и φ_{ij} определены в (83) и (84) соответственно.

Применим к полученной матрице (c_{ij}) низкочастотный фильтр с использованием функции Гаусса, которую в частотной области можно записать в виде следующего выражения (96):

$$H_{ij} = e^{-0.5\sigma^2\left(i-\frac{N}{2}\right)^2\left(j-\frac{N}{2}\right)^2}, \quad (96)$$

где σ определяет ширину полосы пропускания фильтра в частотной области.

Фильтрацию матрицы углов следует производить в частотной области, так как на практике длина сигнала составляет $N^2 \approx 40000 - 90000$. Первоначально получим БПФ комплекснозначного сигнала (c_{ij}) . Результирующий спектр \tilde{C} умножаем на спектр (96). Полученный спектр \tilde{S} подвергнем обратному БПФ. От каждого элемента результирующего сигнала (\hat{c}_{ij}) возьмём аргумент, который и является отфильтрованной матрицей углов $(\hat{\varphi}_{ij})$ (97):

$$\hat{\varphi}_{ij} = \arg \hat{c}_{ij}. \quad (97)$$

Таким образом, алгоритм приближённого вычисления матрицы видимости состоит из следующей последовательности шагов:

1. Получение матрицы углов (φ_{ij}) .
2. Преобразование матрицы углов (φ_{ij}) в $(\hat{\varphi}_{ij})$ посредством низкочастотной фильтрации.
3. Вычисление матрицы видимости с использованием описанного выше алгоритма, где вместо матрицы углов используется отфильтрованная матрица углов $(\hat{\varphi}_{ij})$.

4.7 Имитационное моделирование кривых

Имитационное моделирование широко используется в исследовательской практике для сравнения различных методов, проверки устойчивости различных методов и др. Обычно используют модели,

для которых выполняются условия: 1) модель схожа с реальным объектом по некоторым критериям; 2) есть возможность оценить или задать необходимые для исследования параметры модели.

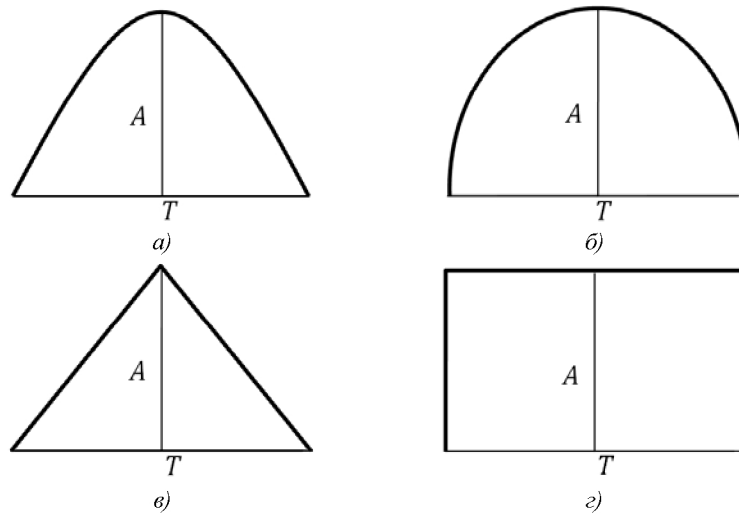


Рис. 49. Примеры моделей лепестков: а) «синус», б) «эллипс», в) «треугольник», г) «прямоугольник»

Данный раздел посвящён описанию моделей и способу генерации центральных линий. Описанные модели и алгоритмы могут применяться (и успешно применяются) для проведения экспериментальных исследований признаков, использующих в качестве входных данных последовательность отсчётов, аналогичную (80).

Будем использовать модели, отличающиеся по морфологическим параметрам, для которых существует достаточно простой способ оценивания описанных выше признаков: модели центральных линий сосудов, состоящих из последовательностей лепестков определённого вида (формы). В зависимости от вида входящих в состав центральной линии лепестков будем выделять модели: «синус», «эллипс», «треугольник» и «прямоугольник» (рис. 49).

Каждый из этих видов лепестков можно задать двумя параметрами, один из которых будем называть амплитудой и обозначать A ,

второй – полупериодом и обозначать T . Образующие лепестков синуса, эллипса и косинуса можно задать в виде кривых, заданных уравнениями (98), (99) и (100) соответственно:

$$\vec{\gamma}_{sin}(t; A, T) = \left(t; A \sin \frac{\pi t}{T} \right); \quad (98)$$

$$\vec{\gamma}_{ellipse}(t; A, T) = \left(t; A \sqrt{\frac{4t}{T} \left(1 - \frac{t}{T} \right)} \right); \quad (99)$$

$$\vec{\gamma}_{triangle}(t; A, T) = \begin{cases} \left(t; \frac{2At}{T} \right), & t < \frac{T}{2}; \\ \left(t; 2A \frac{T-t}{T} \right), & t \geq \frac{T}{2}, \end{cases} \quad (100)$$

где A и T фиксированы, а t меняется на отрезке $[0; T]$.

Образующую лепестка прямоугольника можно задать в виде кривой, заданной уравнением:

$$\vec{\gamma}_{rect}(t; A, T) = \begin{cases} (0; t), & t < A; \\ (t - A; A), & A \leq t < A + T; \\ (T; 2A + T - t), & t \geq A + T, \end{cases} \quad (101)$$

где A и T фиксированы, а t меняется на отрезке $[0; A+T]$.

Для дискретизации кривой с равным шагом по хорде и на равномерной квадратной сетке, будет использоваться вспомогательный алгоритм «получения следующей точки кривой». Этот алгоритм, для заданной векторной функции $\vec{\gamma}(t)$ действительного аргумента ($t \in R$) и начального значения аргумента t_1 , определяет аргумент $t_2 > t_1$, для которого точка $\vec{\gamma}(t_2)$ удалена от заданной точки \vec{p} на расстояние r . Для краткости будем называть этот алгоритм *алгоритмом A*. Определение искомой точки осуществляется методом дихотомии с точностью ε :

1. $t_R = t_1 + r$; $\bar{x}_R = \bar{\gamma}(t_R)$.
2. Если $|\bar{p} - \bar{x}_R| > r$, перейти к шагу 4.
3. $t_R = t_R + r$; $\bar{x}_R = \bar{\gamma}(t_R)$. Перейти к шагу 2.
4. $t_L = t_1$; $\bar{x}_L = \bar{\gamma}(t_L)$.
5. Если $|\bar{x}_L - \bar{x}_R| > \varepsilon$, перейти к шагу 10.
6. $t_H = 0.5(t_R + t_L)$; $\bar{x}_H = \bar{\gamma}(t_H)$.
7. Если $|\bar{p} - \bar{x}_H| < r$, перейти к шагу 9.
8. $t_R = t_H$, $\bar{x}_R = \bar{x}_H$, перейти к шагу 5.
9. $t_L = t_H$, $\bar{x}_L = \bar{x}_H$, перейти к шагу 5.
10. $t_2 = 0.5(t_R + t_L)$.

Ниже приведён упрощённый вариант алгоритма дискретизации кривой по параметру с равным шагом по хорде:

1. $i = 1$; $t_1 = t_s$.
2. $\bar{p} = \bar{\gamma}(t_1)$; $\bar{x}_i = \bar{p}$; $i = i + 1$.
3. Если $t_1 \geq t_e$, перейти к шагу 6.
4. Алгоритм А.
5. $t_1 = t_2$, перейти к шагу 2.
6. $N = i - 1$.

Входными параметрами для данного алгоритма являются векторная функция $\bar{\gamma}(t)$ действительного аргумента ($t \in R$), t_e и t_s , соответственно аргументы функции $\bar{\gamma}(t)$, определяющие отрезок на котором будет производиться дискретизация, r – длина хорды, ε –

точность вычислений алгоритма А. Выходными данными является $\{\bar{x}_i\}_{i=1}^N$ – представление дискретизованной кривой в форме (80).

Ниже приведён упрощённый вариант алгоритма дискретизации на прямоугольной сетке с равномерным шагом h :

1. $i = 1$; $r = h$; $t_1 = t_S$; $\bar{p} = \bar{y}(t_1)$, $\bar{p}_d = [\bar{p}]$, $\bar{x}_i = \bar{p}_d$; $i = i + 1$.
2. Если $t_1 \geq t_e$, перейти к шагу 15.
3. Алгоритм А.
4. $t_1 = t_2$; $\bar{p} = \bar{y}(t_1)$.
5. $\bar{p}_1 = \bar{p}_d + (0; h)$, $\bar{p}_2 = \bar{p}_d + (h; h)$, $\bar{p}_3 = \bar{p}_d + (h; 0)$.
6. $\bar{p}_4 = \bar{p}_d + (h; -h)$, $\bar{p}_5 = \bar{p}_d + (0; -h)$, $\bar{p}_6 = \bar{p}_d + (-h; -h)$.
7. $\bar{p}_7 = \bar{p}_d + (-h; 0)$, $\bar{p}_8 = \bar{p}_d + (-h; h)$.
8. $\bar{p}_{min} = \bar{p}_1$; $d_{min} = |\bar{p}_1 - \bar{p}|$; $j = 2$.
9. Если $|\bar{p}_j - \bar{p}| > d_{min}$, перейти к шагу 11.
10. $\bar{p}_{min} = \bar{p}_j$; $d_{min} = |\bar{p}_j - \bar{p}|$.
11. $j = j + 1$.
12. Если $j < 9$, перейти к шагу 9.
13. $\bar{p}_d = \bar{p}_{min}$; $\bar{x}_i = \bar{p}_d$; $i = i + 1$.
14. Перейти к шагу 2.
15. $N = i - 1$.

В алгоритме использовалось обозначение $[\bar{p}]$ – округлить каждую координату вектора \bar{p} до ближайшего целого значения. Входные параметры у алгоритма В те же, что и у алгоритма Б, за исключением дополнительного параметра h – величины равномерного шага. Выходными данными является $\{\bar{x}_i\}_{i=1}^N$ – представление дискретизованной кривой в форме (80).

Функции (98), (99) и (100) обладают таким свойством: при отрицательном параметре A , форма лепестка не меняется, происходит лишь зеркальное отражение получаемой кривой относительно оси OX . Это позволяет достаточно просто моделировать кривые, состоящие из последовательности лепестков, таким образом, что ориентация лепестка относительно оси OX , меняется при переходе от одного лепестка к другому (как это происходит у гармонических функций). Функция (101) таким свойством не обладает, но достаточно легко может быть модифицирована (102):

$$\bar{\gamma}_{rect}(t; A, T) = \begin{cases} (0; t \operatorname{sign} A), & t < |A|; \\ (t - |A|; A), & |A| \leq t < |A| + T; \\ (T; 2A + (T - t) \operatorname{sign} A), & t \geq |A| + T, \end{cases} \quad (102)$$

эта функция удовлетворяет указанному выше свойству.

На рис. 50, приведены примеры синтезированных кривых с параметрами $A = 40$ и $T = 132$.

Геометрические характеристики синтезируемых кривых могут быть легко вычислены по известным параметрам амплитуды A и полупериода T .

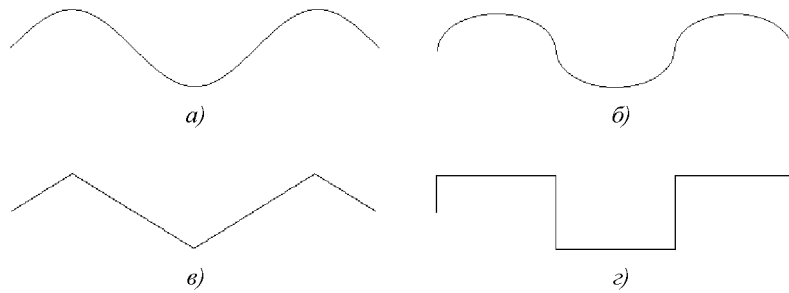


Рис. 50. Имитационное моделирование кривых из лепестков: а) синуса, б) эллипса, в) треугольника, г) прямоугольника

Опишем способ вычисления длины дуги лепестков синуса и эллипса:

$$L_{sin} = \frac{2T\sqrt{1-I^2}}{\pi} E(k_{sin}); \quad (103)$$

$$L_{ellipse} = \max\{2A; T\} E(k_{ellipse}),$$

где L_{sin} – длина дуги лепестка синуса, $E(k)$ – полный эллиптический интеграл второго рода, $L_{ellipse}$ – длина дуги лепестка эллипса, I , k_{sin} и $k_{ellipse}$ могут быть вычислены по следующим формулам:

$$I = \frac{\pi A}{T}; \quad k_{sin}^2 = \frac{I}{1+I}; \quad (104)$$

$$k_{ellipse}^2 = 1 - \min\left\{\frac{4A^2}{T^2}; \frac{T^2}{4A^2}\right\}.$$

Полный эллиптический интеграл второго рода не может быть выражен в виде элементарных функций, поэтому был использован численный метод для вычисления данного интеграла с использованием ряда [55]:

$$E(k) \approx \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^N \left(\frac{(2n-1)!!}{2^n \cdot n!} \right)^2 k^{2n}, \quad (105)$$

где принято обозначение $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)$.

Значения длины дуги и площадей для каждой из рассмотренных моделей лепестков кривой представлены в табл. 3.

Таблица 3

Теоретические значения геометрических характеристик лепестков

Вид модели	Площадь	Длина дуги
синус	$\frac{2AT}{\pi}$	L_{sin}
эллипс	$\frac{\pi AT}{4}$	$L_{ellipse}$
треугольник	$\frac{AT}{2}$	$\sqrt{4A^2 + T^2}$
прямоугольник	AT	$2A + T$

Амплитуды, полупериода, длины дуги и площади лепестка достаточно для оценивания разработанных признаков. То есть синтезированные кривые можно использовать в качестве эталона для проведения экспериментов по оцениванию точности вычисления признаков на дискретизованных кривых.

Таким образом, в данной главе описан подход к оцениванию морфологических характеристик ветки древовидных структур, основанный на разбиении кривых на лепестки. Представлен способ моделирования центральных линий сосудов с использованием четырёх моделей лепестков. Это может стать основой для дальнейших исследований и построения признакового пространства эффективного с точки зрения классификации патологических изменений сосудистой системы.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Амплитуда колебаний толщины ветви	2.1
Ветвь	2.1
Дискретный спектр	3.2
Древовидный объект	2.4
Дробно-рациональная функция	3
Извилистость	2.3
Извилистость толщины	2.3
Кривизна	2.3
Лепестки кривой	4.1
Матрица видимости	4.4
Метод плавающего горизонта	4.5
Нормированная аппроксимирующая функция	3.1.2
Прямолинейность	2.1
Синтезированное изображение	Введение
Сосуд	1
Структура древовидного объекта	2.4
Фантомное изображение	Введение
Функция Rect	3
Функция Гаусса	3
Частота колебаний толщины	2.1
Четкообразность ветви	2.1

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бранчевский, С.Л. Применение новых методов распознавания и обработки изображений для оценки патологии сосудистой системы сетчатки / С.Л. Бранчевский, А.Б. Дурасов, Н.Ю. Ильясова, А.В.Устинов, А.Г. Храмов // Тезисы доклада на 2-ой международной конференции "Распознавание-95", Курск, 1995, с.231-233.
2. Fhang, H.R. Quantitative study of diabetic retinopathy by computerized image analysis / H.R. Fhang, L. Tian// Cheeng-hua-Ven-Ko-Isa-Chih, 1993, jul, 29(4), 218-220, 1990 г.
3. Hozman, J. Biomedical Image Processing Applications / J. Hozman, M. Bernas, R. Kubinec, D. Drabek, J. Trnka, J. Varenka, J. Danes, S. Javorsky // Publishing House of the Czech Technical University: Biomedical Engineering & Biotechnology, Praha, p.22, 1994.
4. Lalonde, M. Automatic visual quality assessment in optical fundus images / M. Lalonde, L. Gagnon, and M.-C. Boucher // Proceedings of Vision Interface (VI 2001), pp. 259-264. Ottawa, Canada, June 7-9, 2001.
5. Richard, S.B. Newsom Retinal vessel measurement: comparison between observer and computer driven methods / S.B. Newsom Richard, Paul M. Sullivan, Sal M. B. Rassam, Roger Jagoe, and Eva M. Kohner // Graefe's Arch. Clin. Exp. Ophthalmol., 1992, 230., 221-225.
6. Горелик, А.Л. Современное состояние проблемы распознавания / А.Л. Горелик, И.Б. Гуревич, В.А. Скрипкин. - М.: Высшая школа, 1985. с.160.
7. Фу, К. Последовательные методы в распознавании образов и обучении машин / К. Фу. - М.: Наука, 1971. - с.256.
8. Фукунага, К. Введение в статистическую теорию распознавания образов / К. Фукунага. - М.: Наука, 1979. - с.368.
9. Горелик, А.Л. Методы распознавания / А.Л. Горелик, В.А. Скрипкин. - М.: Высшая школа, 1984. с.208.
10. Ту, Дж. Принцип распознавания образов / Дж. Ту, Р. Гонсалес. - М.: Наука, 1986.

11. Дуда, Р. Распознавание образов и анализ сцен / Р. Дуда, П. Харт. - М.: Мир, 1976.
12. Фор, А. Восприятие и распознавание образов / А. Фор. - М.: Машиностроение, 1989 г.
13. Анисимов, Б.В. Распознавание и цифровая обработка изображений / Б.В. Анисимов, В.Д. Курганов, В.К. Злобин. - М.: Высшая школа, 1983.
14. Патрик, Э. Основы теории распознавания образов / Э. Патрик. - М.: Советское радио, 1980.
15. Журавлёв, Ю.И. Распознавание, классификация, прогноз / Ю.И. Журавлёв. - М.: Наука, 1992.
16. Неймарк Распознавание образов и медицинская диагностика / Неймарк. - М.: Наука, 1978.
17. Kuznetsov, S.O. Segmentation and pattern recognition of a composite image produced by a system of elements with neural-network architecture / S.O. Kuznetsov, I.V. Nuidel, and V.G Yakhno, A.V. Holden, V.I. Kryukov, Nonlinear Science, Theory and Applications// Neurocomputers and Attention (Manchester University Press, 1990)
18. Marr, D. Vision: A Computational Investigation into the human Representation and Processing of Visual Information / D. Marr // (San Francisco, 1982).
19. Mehre, Segmentation of fingerprint images using the direction image / Mehre, N.N. Murthy, S. Kapoor and B. Chatterjee // Pattern recognition, 20(4) (1987).
20. Kawagoe, Fingerprint pattern classification / Kawagoe and A. Tojo // Pattern recognition 12(3) (1984).
21. Okune, Kh. Application of self-teaching algorithm for fingerprint identification / Kh. Okune, [et al.] // 47 (1979) 137-146.
22. Kravchinsky, Application of neural networks for analyzing and encoding of fingerprints / Kravchinsky, S.O. Kuznetsov, I.V. Nuidel, A.G. Khobotov, A.U. Sharov and V. G Yakhno // Neurocomputing 4 (1992) 65-74.

23. Гончаровский, В.В. Реконструктивная обработка и анализ изображений в задачах вычислительной диагностики / В.В. Гончаровский, И.В. Кочин, А.Н. Матвиенко.- М., МГУ, 1993, с.140.
24. Fhang, H.R. Quantitative study of diabetic retinopathy by computerized image analysis / H.R. Fhang, L. Tian // Cheeng-hua-Ven-Ko-Isa-Chih, 1993, jul, 29(4), 218-220, 1990 г.
25. Бранчевский, С.Л. Новый метод анализа флуоресцентных ангиограмм с применением компьютерной техники / С.Л. Бранчевский, К.В. Овчинников, А.Ю. Миллер // Офтальмологический журнал, 1990. N8.
26. Brantchevsky, S.L. Method for the distinguishing and quantitative evaluation of the elements of pathological patterns in the retina (pathology of microcirculation) / S.L. Brantchevsky, Yu.V Vasiliev, A.B. Durasov, N.Yu. Iliasova, A.V. Ustinov // Proceedings SPIE, vol 2363, pp.236-242.
27. Rassam, S.M.B. Accurate vessel width measurement from fundus photographs: a new concept / S.M.B. Rassam, V. Patel, E.M. Kohner, [et al.] // British Journal of Ophthalmology, 1994:78., 24-29.
28. Zhou, L. High precision retinal vessel diameter measurement in angiography / L. Zhou, J.M. Chokreff, L.J. Singerman // Invest.Ophthalmol.Vis.Sci., 1992, 33., 840.
29. Volkova, S.E. Methods for analysing the images of blood preparations / S.E. Volkova, N.Yu. Ilyasova, A.V. Ustinov, A.G. Khramov // Optics & Laser Technology, vol. 27, pp. 255-261, 1995.
30. Richard, S.B. Retinal vessel measurement: comparison between observer and computer driven methods / S.B. Newsom Richard, Paul M. Sullivan, Sal M.B. Rassam, Roger Jagoe, and Eva M. Kohner // Graefe's Arch.Clin.Exp.Ophthalmol., 1992, 230., 221-225.
31. Богнер, Р. Введение в цифровую фильтрацию. / Р. Богнер, А. Константинович // Пер. с англ. - М.: <Мир> 1976, 216
32. Гольденберг, Л. Цифровая обработка сигналов / Л. Гольденберг, Б. Матюшкин, М. Поляк.- М.: Радио и связь, 1985,-312 с.

33. Гончаровский, В. Реконструктивная обработка и анализ изображений в задачах вычислительной диагностики. / В. Гончаровский, И.В. Кочин, А.Н. Матвиенко. - М.: МГУ, 1993, с.140.
34. Горбань, А.Н. Обучение нейронных сетей / А.Н. Горбань // М.: ParaGraph, 1990. - 160с.
35. Горбань, А.Н. Нейронные сети на персональном компьютере / А.Н. Горбань, Д.А. Россиев // Новосибирск: Наука, 1996. 276с.
36. Грузман, И.С. Математические задачи компьютерной томографии / И.С. Грузман // Соросовский образовательный журнал. 2001. Т. 7, № 5. С. 117 - 121.
37. Грузман, И.С. Цифровая обработка изображений в информационных системах / И.С. Грузман, В.С. Киричук, В.П. Косых // Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2002. – 352 с.
38. Бранчевский, С.Л. Компьютерный мониторинг состояния глазного дна у больных сахарным диабетом / С.Л. Бранчевский // Автореферат диссертации кандидата медицинских наук - Самара: Куйбышевский медицинский институт имени Д.И.Ульянова, 1991.
39. Jomier, J. Quantification of Retinopathy of Prematurity via Vessel Segmentation / J. Jomier, D.K. Wallace, S.R. Aylward // Proceedings of MICCAI 2003, LNCS 2879 620-626.
40. Ching-Wen, Yang Computer-aided diagnostic detection system of venous beading in retinal images / Yang Ching-Wen, Ma Dye-Jyun, Chao Shuenn-Ching, Si Cin Li, Ni Cin Ku, Wang Chuin-Mu, Wen Chia-Hsin, Lo Chien-Shun, Chung Pau-Choo, Chang Chein-I, Che Guevara Ernesto // Optical Engineering, Vol.39, No.5, 2000, pp.1293-1303
41. Mendels, F. Identification of the Optic Disk Boundary in Retinal Images Using Active Contours / F. Mendels, C. Heneghan, J.P. Thiran // Proceedings of the Irish Machine Vision and Image Processing Conference (1999) 103-115
42. Chanwimaluang, T. An Efficient Algorithm for Extraction of Anatomical Structures in Retinal Images / T. Chanwimaluang, G. Fan // Proc.

IEEE International Conference on Image Processing, Barcelona, Spain, September 2003

43. Baranov, V.G. Discrete fan-shaped Radon transform for net-like structures' centerlines detection / V.G. Baranov, A.G. Khramov // Journal "Computer Optics", Vol. 23 (2002) 44-47

44. Ильясова, Н.Ю. Восстановление связности линий на бинарных изображениях древовидных структур / Н.Ю. Ильясова, А.А. Ковалёв, А.В. Куприянов, А.Г. Храмов // сб.Компьютерная оптика, N23, 2002, с. 58-61.

45. Ильясова, Н.Ю. Оценивание геометрических параметров ветвей трехмерных древовидных и сетчатых структур на примере изображения сосудистой системы сердца / Н.Ю. Ильясова, А.В. Куприянов, А.В. Устинов [и др.] // Компьютерная оптика. 2002. - № 23. С. 48-52.

46. Chutatape, O. Retinal blood vessels detection and tracking by matched Gaussian and Kalman filters / O. Chutatape, L. Zheng, M.S. Krishnan // Proceedings of the 20th International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society, Vol.20, No.6, 1998.

47. Chwialkowski, M.P. A method for fully automated quantitative analysis of arterial flow using flow-sensitized MR-images / M.P. Chwialkowski, Y.M. Ibrahim, F.L. Hong, R.M. Peshock // Comp. Med. Imaging and Graphics, vol.20, 1996, pp.365-378.

48. Davidov, A.N. Aviation turbine blades' strain state computing using holographic interferometry / A.N. Davidov, D.S. Elenevsky, A.G. Khramov, M.E. Kolotnikov, Yu.N. Shaposhnikov // 5th International Workshop on Digital Image Processing and Computer Graphics «Image Processing and Computer Optics», 1994, p.56-57.

49. Зимов, С.А. Азбука рисунков природы / С.А. Зимов. – М.: Наука, 1993.

50. Александров, О.П. Геометрическое моделирование: учеб. пособие / О.П. Александров // КуАИ.-Куйбышев, 1988 г.

51. Жданов, Ю.А. Энтропия информации в органической химии / Ю.А. Жданов. – Ростов. Из-во РГУ, 1979.

52. Шульпин, Г. Подсчитаем число изомеров или рассказ о том, сколь плодотворным оказывается союз математики и химии / Г. Шульпин // Наука и жизнь, 8, 1984, с76-81.
53. Корепанов, А.О. Метод определения оптимального пространственного направления сосудов в задаче восстановления 3D топологии коронарной системы / А.О. Корепанов, Н.Ю. Ильясова, А.В. Куприянов, А.Г. Храмов, Н.И. Махно // сб.Компьютерная оптика, N24, 2002, с. 152-154.
54. Korepanov, A.O. «A Method for Determination of an Optimal Spatial Direction of Vessels in the Problem of Reconstructing the 3D Topology of a Coronary System» / A.O. Korepanov, N.Yu. Il'yasova, A.V. Kupriyanov, and A.G. Khramov // Pattern Recognition and Image Analysis, Vol. 13, No. 2, 2003, p. 287-289.
55. Янке, Е. Специальные функции. Формулы, графики, таблицы / Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Лёш. – М.: Наука, 1977. – 344 с., ил.
56. Jomier, J. Quantification of Retinopathy of Prematurity via Vessel Segmentation / J. Jomier, D.K. Wallace, S.R. Aylward // Proceedings of MICCAI 2003, LNCS 2879. – 2003. – P. 620-626.
57. Никитаев, В.Г. Компьютерный офтальмологический комплекс "АТЛАНТ - РЕТИНА". Автоматизированная система обработки изображений "АТЛАНТ - БИОПСИЯ" / В.Г. Никитаев, А.Н. Проничев, А.К. Погорелов [и др.] // www.eyeneews.ru.
58. Нероев, В.В. Компьютерный метод в лечении и прогнозировании оптического неврита при рассеянном склерозе / В.В. Нероев, И.З. Карлова, М.В. Будзинская [и др.] // www.eyeneews.ru.
59. Петровский, А.Н. Оценка микроциркуляторных нарушений методом видеомикроскопии / А.Н.Петровский, С.П. Вчерашнюк, М.А. Каде // www.medlinks.ru.
60. Osareh, A. Classification and Localisation of Diabetic-Related Eye Disease / A. Osareh, M. Mirmehdi, B. Thomas [et al.] // ECCV 2002, LNCS 2353. – 2002. – P. 502-516.

61. Ilyasova, N.Yu. An Expert Computer System for Diagnosing Eye Diseases from Retina Images / N.Yu. Ilyasova, A.V. Ustinov, V.G. Baranov // Optical Memory and Neural Networks, Vol. 9. – 2000. – № 2. P. 133-145.
62. Ching-Wen, Yang Computer-aided diagnostic detection system of venous beading in retinal images / Yang Ching-Wen, Ma Dye-Jyun, Chao Shuenn-Ching [et al.]. // Optical Engineering, Vol.39. – 2000. – №5. – P. 1293-1303.
63. Роджерс, Д. Алгоритмические основы машинной графики: Пер. с англ / Д. Роджерс. – М.: Мир, 1989. – 512 с., ил.
64. Методы компьютерной обработки изображений / Под ред. В.А. Сойфера. – М.: Физматлит, 2001. – 784 с.
65. Основы вычислительной математики /Под. ред. Б.П. Демидовича. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1963. – 659 с.

Учебное издание

*Ильясова Наталья Юрьевна
Куприянов Александр Викторович
Корепанов Андрей Олегович
Ананьин Михаил Александрович*

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И МЕТОДЫ
ОЦЕНИВАНИЯ ДИАГНОСТИЧЕСКИХ
ПАРАМЕТРОВ ДРЕВОВИДНЫХ СТРУКТУР**

Учебное пособие

Научный редактор С. Н. Х о н и н а
Редакторская обработка Т. И. К у з н е ц о в а
Корректорская обработка Н. А. Б е р е з и н а
Доверстка А. А. Г н у т о в а

Подписано в печать 20.12.07. Формат 60x84 1/16.

Бумага офсетная. Печать офсетная.

Печ.л. 6,5.

Тираж 120 экз. Заказ . ИП – ж108/2006.

Самарский государственный
аэрокосмический университет.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

Изд-во Самарского государственного
аэрокосмического университета.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.