МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ АКАДЕМИКА С. П. КОРОЛЁВА
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

В. В. Юдинцев

Теоретическая механика

Интерактивное мультимедийное пособие

Самара 2011

УДК 531

Авторы:
Юдинцев Вадим Вячеславович

Юдинцев, В. В. Теоретическая механика [Электронный ресурс] : интерактивное мультимедийное пособие / В. В. Юдинцев; Минобрнауки России, Самар. гос. аэрокосм. ун-т им. С. П. Королёва (Нац. Исслед. Ун-т) – Электрон. текстовые и граф. данные. (37 Мб). – Самара, 2011. – 1 эл. опт. диск (CD-ROM). – Систем. требования: ПК Pentium; Windows 2000 или выше.

Данный научно-образовательный контент разработан в обеспечение учебной подготовки студентов второго курса (3 и 4 семестры) факультета летательных аппаратов специальностей: 160100.65 Самолето- и вертолетостроение; 160400.65 Проектирование, производство и эксплуатация ракет и ракетно-космических комплексов; 011000.62 Механика. Прикладная математика (дополнительные материалы http://fla.ssau.ru/moodle/course/view.php?id=3).

©Самарский государственный
аэрокосмический университет, 2011

Оглавление

I Кинематика **12**

1 Основные понятия и задачи кинематики **13**

2 Кинематика точки **15**

2.1 Способы задания движения 15

2.1.1 Естественный 16

2.1.2 Векторный 17

2.1.3 Координатный 17

2.2 Определение скорости 19

2.2.1 Векторный способ задания движения 19

2.2.2 Естественный способ задания движения 20

2.2.3 Координатный способ задания движения 22

2.3 Определение ускорения 23

2.3.1 Естественный способ задания движения 26

2.3.2 Координатный способ задания движения 30
2.4 Частные случаи движения материальной точки 32
2.4.1 Равномерное движение 32
2.4.2 Равнопеременное движение 32

3 Кинематика твердого тела **36**
3.1 Поступательное движение твёрдого тела 37
3.2 Вращательное движение твёрдого тела 40
3.2.1 Угловая скорость и угловое ускорение 41
3.2.1.1 Равномерное вращение 43
3.2.1.2 Равнопеременное вращение 43
3.2.2 Скорости и ускорения точек тела, вращающегося вокруг неподвижной оси 44
3.2.3 Вектор угловой скорости и углового ускорения 46
3.2.4 Векторные выражения скорости и ускорения, формулы Эйлера 46
3.3 Плоское движение твёрдого тела 53
3.3.1 Разложение плоского движения на поступательное и вращательное 53
3.3.2 Теорема о скоростях точек плоской фигуры 55
3.3.3 Мгновенный центр скоростей 57
3.3.3.1 Случаи определения положения МЦС 57
3.3.4 Теорема об ускорениях точек плоской фигуры 59
3.4 Движение тела вокруг неподвижной точки 65
3.4.1 Углы Эйлера 66

3.4.2 Теорема Эйлера 66
3.4.3 Скорости и ускорения точек 68
3.4.3.1 Определение скорости точки тела 68
3.4.3.2 Определение ускорения точки тела 71
3.5 Свободное движение твердого тела 73
3.5.1 Скорости точек 73
3.5.2 Ускорения точек 75
3.6 Сложное движение точки 75
3.6.1 Производная вектора в подвижной и неподвижной системе координат 76
3.6.2 Теорема о сложении скоростей 78
3.6.3 Теорема о сложении ускорений 79
3.6.3.1 Правило Жуковского 81
3.7 Сложное движение твёрдого тела 85
3.7.1 Сложение поступательных движений 85
3.7.2 Сложение вращений твердого тела вокруг пересекающихся осей 86
3.7.2.1 Сложение скоростей 86
3.7.2.2 Сложение ускорений 88
3.7.3 Кинематические уравнения Эйлера 89
3.7.4 Сложение вращений твердого тела вокруг параллельных осей 91
3.7.4.1 Пара вращений 92
3.7.4.2 Сложение скоростей 92
3.7.5 Сложение поступательных и вращательных движений 96

3.7.5.1 Частный случай 1, кинематический винт . . . 96
3.7.5.2 Частный случай 2 . . . 96
3.7.5.3 Частный случай 3 . . . 98

II Динамика 99

4 Основные понятия и задачи динамики 100
4.1 Связи . . . 102
4.1.1 Гладкая поверхность . . . 103
4.1.2 Сферический шарнир . . . 103
4.1.3 Цилиндрическая шарнирно-неподвижная опора . . . 104
4.1.4 Цилиндрическая шарнирно-подвижная опора . . . 104
4.2 Аксиома связей . . . 104
4.3 Аксиомы механики . . . 104
4.4 Момент силы . . . 106
4.4.1 Момент силы относительно точки. . . . 106
4.4.2 Момент силы относительно оси. . . . 108
4.5 Силы трения . . . 110
4.5.1 Реакции шероховатых связей . . . 111
4.5.2 Трение качения . . . 112

5 Системы сил 114
5.1 Система сходящихся сил . . . 114
5.2 Система параллельных сил . . . 115

5.3 Пара сил 118
5.4 Параллельный перенос силы 119
5.5 Произвольная система сил 121
5.5.1 Перемена центра приведения 123
5.5.2 Теорема Вариньона 125
5.6 Условия равновесия систем сил 125
5.6.1 Условия равновесия произвольной системы сил 125
5.6.2 Условия равновесия плоской системы сил 127
5.6.3 Условия равновесия параллельной системы сил 128

6 Динамика точки **130**
6.1 Основное уравнение динамики 130
6.2 Дифференциальное уравнение движения материальной точки 131
6.3 Две задачи динамики 131
6.3.1 Первая задача динамики 132
6.3.2 Вторая задача динамики 133
6.4 Относительное движение материальной точки 139
6.4.1 Дифференциальное уравнение относительного движения точки 140
6.4.2 Принцип относительности классической механики . . . 142
6.4.3 Случай относительного покоя 142
6.4.4 Отклонение падающих тел к востоку 143

7 Геометрия масс **146**
7.1 Центр масс механической системы 147

7.2 Моменты инерции относительно оси 148
7.2.1 Радиус инерции 150
7.2.2 Момент инерции тонкого однородного стержня 150
7.2.3 Момент инерции однородной круглой пластинки 152
7.2.4 Момент инерции относительно оси однородного цилиндра 152
7.2.5 Моменты инерции относительно параллельных осей . . 154
7.3 Моменты инерции механической системы относительно осей, проходящих через заданную точку 156
7.3.1 Эллипсоид инерции 159
7.3.2 Вычисление моментов инерции твердого тела относительно произвольных осей 160

8 Теоремы об изменении основных динамических величин системы 162
8.1 Количество движения системы 162
8.1.1 Теорема об изменении количества движения системы . 164
8.2 Теорема о движении центра масс системы 168
8.3 Теорема об изменении главного момента количества движения 171
8.3.1 Главный момент количества движения механической системы 171
8.3.2 Кинетический момент твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси 173
8.3.3 Кинетический момент твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки 174

8.3.4 Теорема об изменении момента количества движения относительно неподвижного центра 176
8.3.5 Теорема об изменении момента количества движения относительно подвижного центра 178
8.4 Теорема об изменении кинетической энергии 181
8.4.1 Работа силы и системы сил 181
8.4.2 Элементарная и полная работа сил 181
8.4.2.1 Работа силы тяжести 184
8.4.2.2 Работа силы упругости 185
8.4.2.3 Работа силы тяготения 186
8.4.3 Работа сил, приложенных к твёрдому телу 187
8.4.3.1 Работа внутренних сил 187
8.4.3.2 Поступательное движение твёрдого тела . . . 188
8.4.3.3 Вращение твёрдого тела вокруг неподвижной оси 188
8.4.3.4 Общий случай движения свободного твёрдого тела 190
8.4.4 Силовое поле 190
8.4.4.1 Потенциальная энергия 191
8.4.4.2 Силовая функция 195
8.4.4.3 Поле силы тяжести 196
8.4.4.4 Поле центральной силы притяжения 197
8.4.5 Теорема об изменении кинетической энергии материальной точки 198

8.4.5.1 Теорема об изменении кинетической энергии точки в относительном движении 200
8.4.6 Кинетическая энергия механической системы 201
8.4.6.1 Теорема Кёнига 202
8.4.7 Кинетическая энергия твёрдого тела 203
8.4.7.1 Поступательное движение 203
8.4.7.2 Вращение твёрдого тела вокруг неподвижной оси 203
8.4.7.3 Сферическое движение твёрдого тела 204
8.4.7.4 Общий случай движения твёрдого тела 204
8.4.7.5 Кинетическая энергия твердого тела при плоском движении 205
8.4.8 Теорема об изменении кинетической энергии системы . 206
8.4.8.1 Закон сохранения механической энергии . . . 207
8.4.8.2 Теорема об изменении кинетической энергии относительного движения 208

9 Метод кинетостатики **211**
9.1 Принцип Даламбера 211
9.2 Вычисление главного вектора и главного момента сил инерции твердого тела 215
9.2.1 Определение главного вектора сил инерции 215
9.2.2 Определение главного момента сил инерции 216
9.2.2.1 Поступательное движение. 216

9.2.2.2 Вращение твердого тела, имеющего плоскость материальной симметрии, вокруг неподвижной оси, перпендикулярной этой плоскости. 217
9.2.2.3 Плоское движение твердого тела, имеющего плоскость материальной симметрии. 219

10 Аналитическая механика **222**
10.1 Связи 222
10.2 Виртуальные и действительные перемещения 224
10.2.1 Виртуальная работа 227
10.2.2 Идеальные связи 228
10.3 Обобщенные координаты 229
10.3.1 Обобщенные силы 230
10.3.2 Вычисление обобщенных сил 231
10.4 Общее уравнение динамики 232
10.5 Общее уравнение статики 233
10.6 Уравнение Лагранжа II-го рода 235
10.7 Выражение кинетической энергии через обобщенные скорости и координаты 238
10.8 Уравнение Лагранжа второго рода в случае потенциальных сил. 241
10.9 Равновесие механических систем 242
10.9.1 Устойчивость положения равновесия 243
10.9.2 Определение устойчивого положения равновесия системы с несколькими степенями свободы 245
10.9.3 Малые колебания системы с одной степенью свободы . 249

10.9.4 Малые колебания системы с двумя степенями свободы 251

III Динамика твердого тела 255

10.10 Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси 256
10.10.1 Уравнения движения 256
10.10.2 Динамические и статические реакции 260
10.11 Движение твердого тела вокруг неподвижной точки 261
10.11.1 Динамические уравнения Эйлера 261
10.11.2 Случай Эйлера Пуансо 263
10.11.3 Элементарная теория Гироскопа 267
10.11.3.1 Основные допущения элементарной теории гироскопа 267
10.11.3.2 Теорема Резаля 269
10.11.3.3 Основное свойство гироскопа 269
10.12 Движение свободного твердого тела 270
Список литературы 272

Часть I

Кинематика

Глава 1

Основные понятия и задачи кинематики

1ч

Теоретическая механика - это наука, изучающая общие законы механического движения и механического взаимодействия материальных тел.

Механическое движение - это изменение с течением времени положения в пространстве материальных тел или взаимного положения их частей. Движение имеет *относительный характер*: одно из тел считают условно неподвижным и относительно него рассматривают движение других тел. С условно-неподвижным телом обычно связывают систему взаимно ортогональных осей, которые образуют систему отсчета.

Кинематика - раздел механики, где изучается механическое движение

материальных тел в пространстве с геометрической точки зрения.

Система отчета - это совокупность системы координат и часов, связанных с телом, по отношению к которому изучается движение. Время в классической механике универсально - его течение одинаково во всех точках пространства и не зависит от движения материи.

Пространство в механике рассматривается как трехмерное, евклидово, однородное, изотропное. *Евклидово пространство* - это пространство, свойства которого описываются аксиомами евклидовой геометрии. Эта геометрия названа по имени её создателя Евклида, жившего в III веке до нашей эры.

Простейшим материальным телом является *материальная точка. Материальная точка* - это тело, размерами которого пренебрегают при решении задачи. Например, при исследовании движения Земли вокруг Солнца, и Землю и Солнце можно считать материальными точками, поскольку их размеры гораздо меньше расстояния между ними. С другой стороны, если предметом исследования является движение космического аппарата под действием его двигателей, то в этом случае уже нельзя рассматривать аппарат как точку, а следует учитывать его размеры, распределение масс. Такой объект может рассматриваться как *абсолютно твердое тело (твердое тело)* - материальное тело, расстояния между точками которого не изменяются. *Система материальных точек* - выделенное каким либо образом множество материальных точек.

Задачей кинематики является разработка способов задания движения тел и методов определения скоростей ускорений и других кинематических величин точек системы [4], [1].

Глава 2

Кинематика точки

1ч

2.1. Способы задания движения

С течением времени движущаяся точка описывает в пространстве некоторую кривую - *траекторию* - геометрическое место точек положений движущейся точки. Траектории бывают *прямолинейные* и *криволинейные*. Изучение движения точки есть определение её положения в заданной системе координат в заданный момент времени, определение скорости и ускорения.

Существует три способа задания движения точки: *естественный, векторный и координатный.*

2.1.1. Естественный

Если известна траектория движения точки, то её положение на траектории может задаваться криволинейной координатой s - длиной траектории от начала координат до текущего положения точки в момент времени t. С течением времени величина s меняется, поэтому s есть функция времени:

$$s = f(t)$$

Если известна траектория точки направление отчета s на траектории и закон ее движения $s = f(t)$, то движение точки задано.

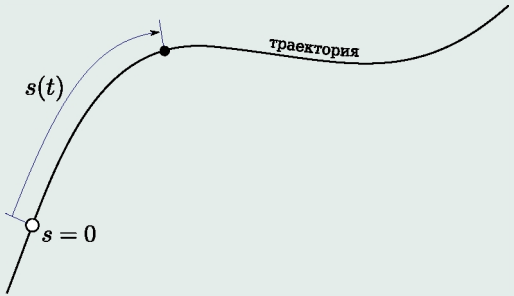


Рис. 2.1. Естественный способ задания движения точки

Пример 1. *Точка движется по окружности радиуса* $R = 1м$ *по закону* $s(t) = 2t^2 м$.

2.1.2. Векторный

Положение точки может задаваться вектором, проведенным из выбранного неподвижного центра O. Для определения положение точки необходимо знать закон изменения вектора от времени:

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

Траектория точки будет определятся как геометрическое место точек концов радиус-вектора $\vec{r}$ (годограф).

2.1.3. Координатный

Положение точки в пространстве может быть задано тремя координатами в прямоугольной декартовой системе координат:

$$\begin{cases} x &= f_1(t), \\ y &= f_2(t), \\ z &= f_3(t). \end{cases} \tag{2.1}$$

Эти уравнения есть уравнения движения точки в декартовых координатах. Уравнения движения (2.1) можно рассматривать как параметрическое уравнения кривой - траектории точки. Исключив из этих уравнений время, можно получить уравнение траектории в координатной форме.

Пример 2. *Уравнение движения точки задано в виде:*

$$\begin{cases} x &= a\cos(t), \\ y &= b\sin(t), \\ z &= 0, \end{cases}$$

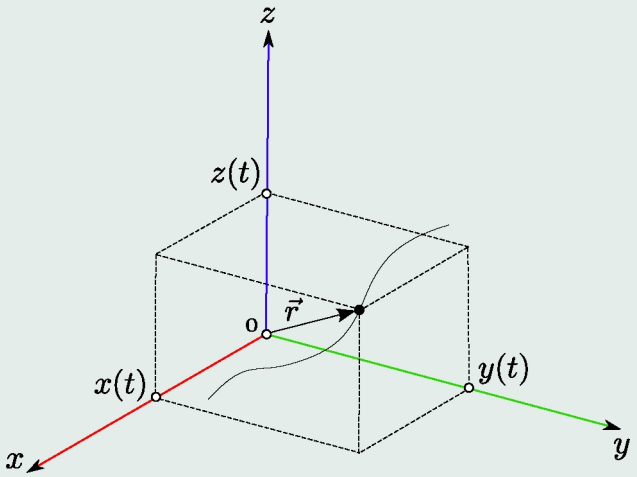


Рис. 2.2. Координатный способ задания движения точки

Возведя в квадрат, и затем сложив первое и второе уравнения, получим уравнение эллипса на плоскости OXY:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

2.2. Определение скорости

В процессе движения меняется положение точки в пространстве. Для оценки быстроты изменения положения точки и определения направления ее движения вводится понятие скорости. *Скорость* - векторная величина, характеризующая быстроту движения точки в данной системе отчета.

2.2.1. Векторный способ задания движения

Пусть движение точки задано в векторной форме. В момент времени t положение точки определяется радиус-вектором $\vec{r}$, а в момент времени $t+\Delta t$ радиус вектором $\vec{r}_1$. Вектор $\vec{r}$ за время Δt получает приращение $\Delta\vec{r}$:

$$\vec{r}_1 = \vec{r} + \Delta\vec{r}.$$

Скоростью точки будет предел отношения приращения вектора к интервалу времени на котором произошло это приращение:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \tag{2.2}$$

Вектор скорости точки в данный момент времени равен производной от радиус-вектора точки по времени.

2.2.2. Естественный способ задания движения

Пусть положение точки на известной траектории задается функцией времени:

$$s = f(t).$$

Определим в пространстве произвольный центр - точку O. Определим вектор, выходящий из O и заканчивающийся в точке. Этим действием задано движение точки при помощи вектора $\vec{r}(t)$, который можно рассматривать и как функцию от s:

$$\vec{r} = \vec{r}(s).$$

Скорость точки определится следующим образом (используется правило дифференцирования сложной функции):

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}(s)}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\frac{ds}{dt}$$

Производная $\frac{d\vec{r}}{ds}$ определяется как предел следующего отношения:

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s}.$$

Направление вектора $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s}$ совпадает с направлением вектора $\Delta\vec{r}$. При стремлении Δs к нулю вектор $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s}$ будет стремиться к направлению касательной к траектории в данной точке. С другой стороны, очевидно, что модуль отношения перемещения точки к длине дуги, по которому произошло это пере-

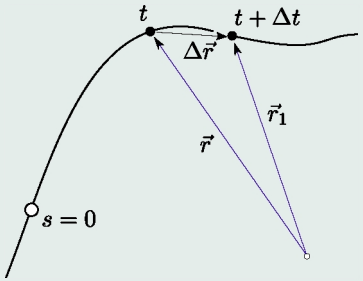


Рис. 2.3. К определению скорости точки

мещение, при стремлении дины дуги к нулю, будет равно 1:

$$\lim_{\Delta s \to 0} \left| \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} \right| = 1. \tag{2.3}$$

Таким образом, вектор $\frac{d\vec{r}}{ds}$ имеет модуль равный единице, и направлен по касательной к траектории с сторону увеличения координаты s.

Второй множитель $\frac{ds}{dt}$ представляет собой алгебраическую величину скорости. Если обозначить *единичный вектор* $\frac{d\vec{r}(s)}{dt}$ как $\vec{\tau}$, то вектор скорости можно записать следующим образом:

$$\vec{v} = \vec{\tau} \frac{ds}{dt}.$$

Первый множитель задает направление скорости - по касательной к траектории, второй - ее величину. Поскольку $\vec{\tau}$ всегда направлен по касательной

в сторону увеличения координаты s, то направление скорости определяется знаком функции $\frac{ds}{dt}$ (в заданный момент времени). То есть, если $\frac{ds}{dt} < 0$, то скорость $\vec{v}$ точки направлена в противоположную сторону вектора $\vec{\tau}$.

2.2.3. Координатный способ задания движения

Пусть движение точки задано уравнениями:

$$\begin{cases} x &= f_1(t), \\ y &= f_2(t), \\ z &= f_3(t). \end{cases}$$

Обозначим орты (единичные векторы) координатных осей x, y, z как $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Тогда вектор $\vec{r}$, определяющий положение точки можно записать следующим образом:

$$\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}x + \vec{k}z$$

Воспользуемся результатами предыдущего пункта и запишем скорость точки:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(\vec{i}x + \vec{j}x + \vec{k}z)}{dt}.$$

Учитывая, что орты $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ неподвижны:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{i}\frac{dx}{dt} + \vec{j}\frac{dy}{dt} + \vec{k}\frac{dz}{dt}.$$

или:

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}.$$

Таким образом, проекции скорости точки на неподвижные оси декартовой системы координат определяются следующим образом:

$$v_x = \frac{dx}{dt},\ v_y = \frac{dy}{dt},\ v_z = \frac{dz}{dt}.$$

Зная проекции скорости, можно определить её модуль:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2},$$

а также направление векора скорости по отношению к осям координат ("направляющие косинусы"):

$$\cos(\measuredangle \vec{v}, \vec{i}) = \frac{v_x}{v},\ \cos(\measuredangle \vec{v}, \vec{j}) = \frac{v_y}{v},\ \cos(\measuredangle \vec{v}, \vec{k}) = \frac{v_z}{v}.$$

2.3. Определение ускорения

При неравномерном и криволинейном движении меняется как модуль так и направление вектора скорости. *Ускорение* точки характеризует быстроту изменения направления и модуля скорости точки.

Пусть в момент времени t точка имела скорость $\vec{v}$, а в момент времени $t+\Delta t$ точка занимает новое положение M_1 и имеет скорость $\vec{v}_1$. Новый вектор скорости определяется следующим образом:

$$\vec{v}_1 = \vec{v} + \Delta\vec{v}.$$

Среднее ускорение за интервал времени Δt есть отношение приращения скорости к интервалу Δt:

$$\vec{a}_{cp} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}.$$

Ускорением точки является предел отношения приращения скорости точки

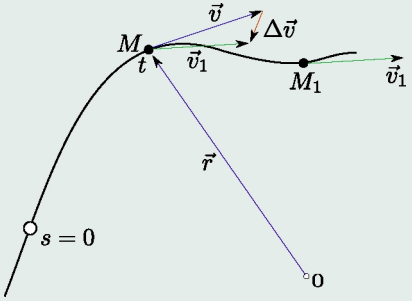


Рис. 2.4. К определению ускорения точки

к приращению времени при стремлении последнего к нулю. То есть вектор ускорения есть первая производная вектора скорости или, учитывая определение скорости (2.2), вторая производная радиус-вектора точки:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \qquad (2.4)$$

Вектор среднего ускорения $\vec{a}_{cp}$ лежит в плоскости треугольника, образованного векторами $\vec{v}$, $\vec{v}_1$ и $\Delta\vec{v}$ (рисунок 2.4). При стремлении точки M_1

к M эта плоскость занимает свое предельное положение и называется *соприкасающейся плоскостью*. Если траектория точки - плоская кривая, то соприкасающаяся плоскость совпадает с плоскостью кривой. Таким образом, *вектор ускорения лежит в соприкасающейся плоскости и направлен в сторону вогнутости траектории.*

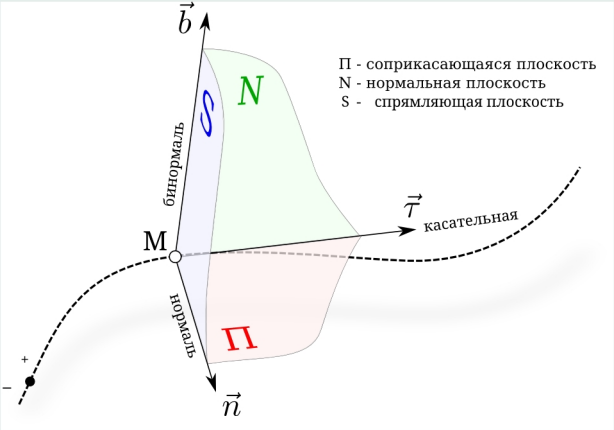


Рис. 2.5. Естественные координатные оси

Построим в точке M соприкасающуюся плоскость П, нормальную плоскость N, перпендикулярную касательной к траектории и спрямляющую плоскость, рисунок 2.5. По линиям пересечения этих трех плоскостей направлены *оси естественного трехгранника*. Естественными координатными осями называют три взаимно перпендикулярные оси: касательная, направленная в

сторону возрастания дуговой координаты, главная нормаль, направленная в сторону вогнутости кривой и бинормаль, образующая с осями $\vec{\tau}$, $\vec{n}$ правую тройку векторов. Направление естественных осей меняется в процессе движения точки.

2.3.1. Естественный способ задания движения

Запишем скорость точки, используя единичный вектор, задающий направление касательной к траектории:

$$\vec{v} = \vec{\tau}\frac{ds}{dt}.$$

Продифференцируем это выражение по времени:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{dt}\frac{ds}{dt} + \vec{\tau}\frac{d^2s}{dt^2} \tag{2.5}$$

Рассмотрим производную $\frac{d\vec{\tau}}{dt}$, которую можно записать следующим образом:

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{ds}\frac{ds}{dt}. \tag{2.6}$$

Производная $\frac{d\vec{\tau}}{ds}$ определяется как предел отношения изменения орта (за счет его поворота) $\Delta\vec{\tau}$ к Δs. Это отношение определяет вектор средней кривизны $\vec{K}_{cp}$ траектории на участке MM_1. Предел вектора $\vec{K}_{cp}$ при стремлении Δs к нулю, называется вектором кривизны кривой в точке:

$$\vec{K} = \lim_{\Delta s \to 0}\frac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta s} = \frac{d\vec{\tau}}{dt}.$$

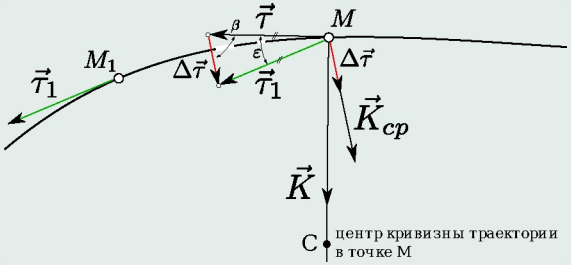


Рис. 2.6. К определению радиуса кривизны траектории

Из равнобедренного треугольника, образованного векторами $\vec{\tau}$, $\vec{\tau}_1$ и $\Delta\vec{\tau}$ можно найти модуль вектора $\Delta\vec{\tau}$ (рисунок 2.6):

$$|\Delta\vec{\tau}| = 2\tau \sin(\varepsilon/2) \approx 2 \cdot 1 \cdot \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

тогда вектор кривизны $\vec{K}$ можно записать следующим образом:

$$|\vec{K}| = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{|\Delta\vec{\tau}|}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\varepsilon}{\Delta s} = \frac{1}{\rho},$$

где ρ - радиус кривизны траектории в точке. Направление вектора $\vec{K}$ есть предельное направление вектора средней кривизны, который лежит в плоскости, созданной векторами $\vec{\tau}$, $\vec{\tau}_1$ и $\Delta\vec{\tau}$. Как было отмечено выше, предельное положение этой плоскости определяет соприкасающуюся плоскость, то есть вектор $\vec{K}$ лежит в соприкасающейся плоскости. Выразим угол β между ка-

сательным вектором $\vec{\tau}$ и вектором $\vec{K}_{ср}$:

$$\beta = \frac{\pi - \varepsilon}{2}.$$

При стремлении Δs к нулю, угол ε также стремится к нулю, следовательно угол β стремится к прямому углу. Из этого следует, что вектор $\vec{K}$ направлен по главной нормали τ и его можно представить в виде:

$$\vec{K} = \vec{n}\frac{1}{\rho} = \vec{n}\frac{1}{MC}.$$

Используя выражение для производной $\frac{d\vec{\tau}}{ds}$, перепишем производную скорости (2.6):

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{ds}\frac{ds}{dt} = \vec{n}\frac{1}{\rho}\frac{ds}{dt}$$

и выражение для ускорения (2.5):

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{dt}\frac{ds}{dt} + \vec{\tau}\frac{d^2s}{dt^2} = \vec{n}\frac{v^2}{\rho} + \vec{\tau}\frac{d^2s}{dt^2}. \qquad (2.7)$$

Другими словами, ускорение точки складывается из двух векторов: вектора, направленного по нормали к траектории и вектора, направленного по касательной к траектории:

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau},$$

где $\vec{a}_n$ - вектор нормального ускорения, $\vec{a}_\tau$ - вектор касательного ускорения.

Таким образом, если известна траектория точки и закон её движения $s(t)$, то полное ускорение точки определяется как сумма двух ортогональных векторов - нормального и касательного ускорения. Величина нормального ускорения определяется скоростью точки и радиусом кривизны траектории:

$$\boxed{a_n = \frac{v^2}{\rho}}$$

Величина касательного ускорения определяется как вторая производная от дуговой координаты точки по времени:

$$\boxed{a_\tau = \frac{d^2 s}{dt^2}}$$

Ускорение a_τ положительно, если оно направлено по вектору $\vec{\tau}$.

Если точка совершает *прямолинейное движение*, то радиус кривизны траектории равен бесконечности, следовательно *нормальное ускорение равно нулю*. Касательное ускорение равно нулю лишь в том случае если точка движется по траектории с постоянной величиной скорости. Однако, даже если величина скорости точки постоянна, но точка двигается по криволинейной траектории, то полное ускорение точки отлично от нуля, поскольку изменяется направление вектора скорости.

Полное ускорение точки определяется как сумма касательного и нормального ускорений. Величина полного ускорения, вследствие ортогональности $\vec{a}_\tau$ и $\vec{a}$, определяется следующим образом:

$$\boxed{a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}}$$

2.3.2. Координатный способ задания движения

Пусть движение точки задано уравнениями:

$$\begin{cases} x &= f_1(t), \\ y &= f_2(t), \\ z &= f_3(t). \end{cases}$$

Радиус-вектор точки определяется при помощи ортов неподвижной системы координат:

$$\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}x + \vec{k}z.$$

Учитывая (2.4) вектор ускорения запишется так:

$$\vec{a} = \vec{i}\frac{dx}{dt} + \vec{j}\frac{dy}{dt} + \vec{k}\frac{dz}{dt}.$$

Таким образом, проекции вектора ускорения на оси координат определяются следующим образом:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt},\ a_y = \frac{dv_y}{dt},\ a_z = \frac{dv_z}{dt},$$

Или, выражая v_x, v_y, v_z :

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2},\ a_y = \frac{d^2y}{dt^2},\ a_z = \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Зная проекции ускорения на оси, можно определить полное ускорение:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Касательное ускорение при координатном способе задания движения определяется следующим образом:

$$|a_\tau| = \left|\frac{d}{dt}\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}\right| = \left|\frac{v_x a_x + v_y a_y + v_z a_z}{\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}}\right|.$$

Нормальное ускорение, определяется после вычисления полного и касательного:

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}.$$

Пример 3. *Найти радиус кривизны траектории и ускорение точки, если задан закон её движения по плоскости в координатной форме:*

$$\begin{cases} x &= t^2, \\ y &= 3t. \end{cases}$$

Определим скорость точки:

$$v_x = \dot{x} = 2t,\ v_y = \dot{y} = 3,\ v = \sqrt{v_x^2+v_y^2} = \sqrt{4t^2+9}.$$

Ускорение точки:

$$a_x = \dot{v}_x = 2,\ a_y = \dot{v}_y = 0,\ a = \sqrt{a_x^2+a_y^2} = \sqrt{2^2+0^2} = 2.$$

Касательное ускорение точки:

$$a_\tau = \dot{v} = \frac{8t}{2\sqrt{4t^2+9}} = \frac{4t}{\sqrt{4t^2+9}}.$$

Нормальное ускорение:

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \sqrt{2^2 - \frac{16t^2}{4t^2+9}} = \sqrt{\frac{(4t^2+9)4 - 16t^2}{4t^2+9}} = \frac{6}{\sqrt{4t^2+9}}.$$

Радиус кривизны:

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{(4t^2+9)\sqrt{4t^2+9}}{6} = \frac{1}{6}(4t^2+9)^{3/2}.$$

2.4. Частные случаи движения материальной точки

2.4.1. Равномерное движение

$$a_\tau = 0,\ |\vec{v}| = v = const.$$

2.4.2. Равнопеременное движение

$$a_\tau = const,\ a_\tau = \frac{dv}{dt} \Rightarrow a_\tau dt = dv \Rightarrow v = v_0 + a_\tau(t - t_0).$$

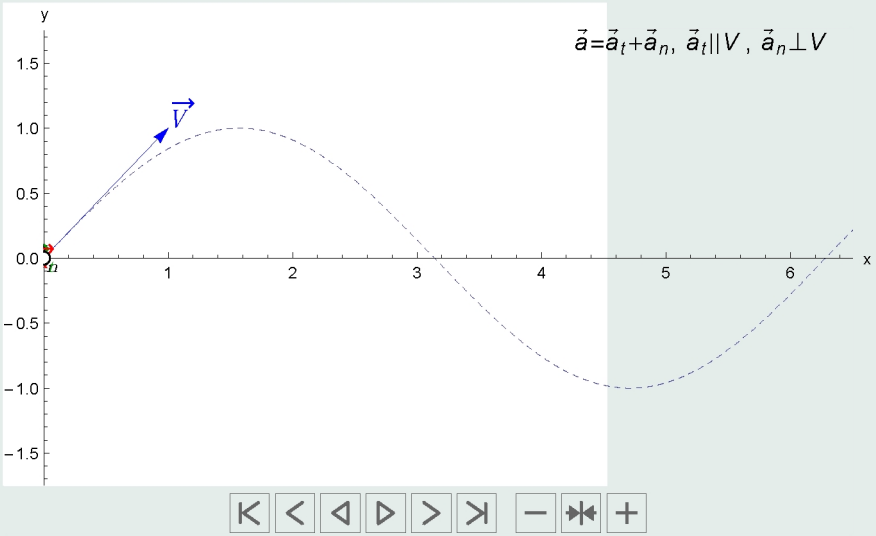


Рис. 2.7. Скорость и ускорение точки

Если в начальный момент времени $t_0 = 0$, то выражение для скорости точки примет вид:

$$\boxed{v = v_0 + a_\tau t}.$$

Проинтегрировав последнее выражение, найдем пройденный путь:

$$v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow vdt = ds \Rightarrow \int_0^t vdt = \int_{s_0}^s ds \Rightarrow \int_0^t (v_0 + a_\tau t)dt = \int_{s_0}^s ds$$

$$v_0 t + \frac{a_\tau t^2}{2} = s - s_0 \Rightarrow \boxed{s = s_0 + v_0 t + \frac{a_\tau t^2}{2}}$$

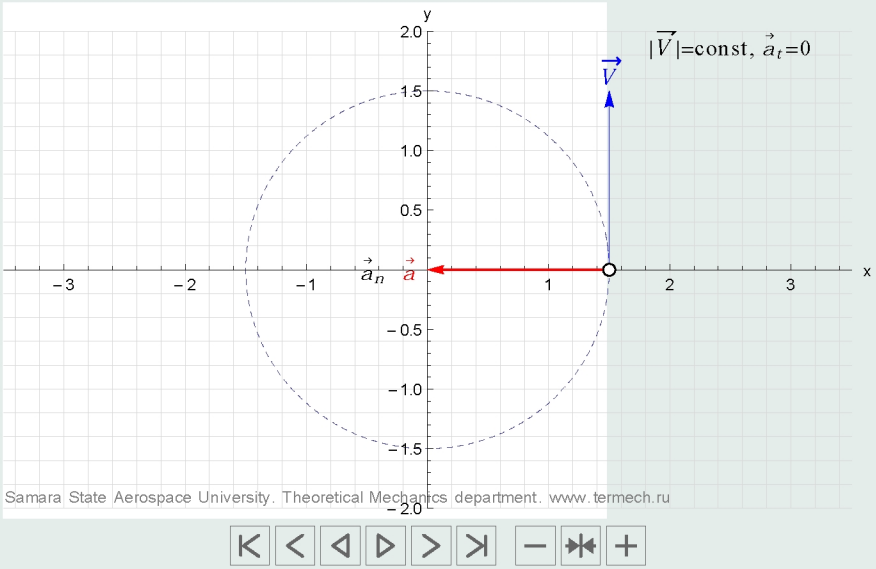


Рис. 2.8. Скорость и ускорение точки при равномерном движении по окружности

Глава 3

Кинематика твердого тела

8ч

Пять видов движения твёрдого тела:

1) поступательное;

2) вращательное (вращение вокруг неподвижной оси);

3) плоское (плоскопараллельное);

4) сферическое;

5) общий случай.

3.1. Поступательное движение твёрдого тела

Поступательное движение - движение при котором прямая, связанная с телом, в процессе движения остается параллельной своему исходному положению.

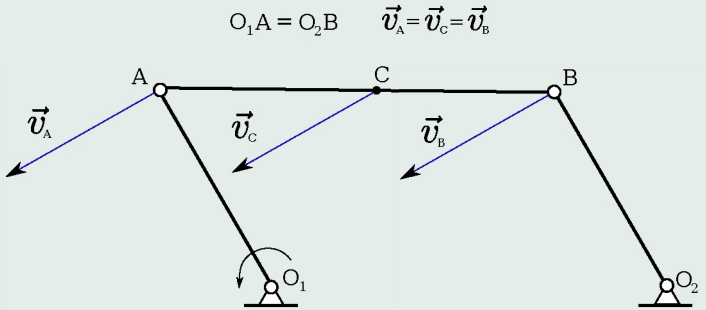


Рис. 3.1. Механиз с поступательно движущемся звеном AB

Теорема 1. *Все точки, поступательно движущегося твёрдого тела, описывают одинаковые траектории. В каждый момент времени скорости и ускорения всех точек тела равны.*

Доказательство. Действительно, радиус вектор некоторой точки B твёрдого тела можно записать как сумму двух векторов: радиус-вектора некоторой

другой точки тела - полюса (точка A), и радиус-вектора, проведённого из точки A в точку B:

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{AB}. \tag{3.1}$$

Поскольку прямая, на которой лежит вектор r_{AB} остается параллельной своим положениям в предыдущие моменты времени, то годограф вектора $\vec{r}_B$, который является траекторией точки B, будет смещён относительно траектории точки A на величину вектора $\vec{r}_{AB}$. Продифференцировав выражение (3.1), получим соотношение между скоростями и ускорениями точек поступательно движущегося тела:

$$\vec{v}_B = \frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\vec{r}_{AB}}{dt} = \vec{v}_A + 0 = \vec{v}_A.$$

и

$$\vec{a}_B = \frac{d^2\vec{r}_B}{dt^2} = \frac{d\vec{v}_A}{dt} = \vec{a}_A.$$

Учитывая, что выбраны произвольные точки A и B, полученные соотношения справедливы для любых двух точек поступательно движущегося твёрдого тела. □

Таким образом, *все точки поступательно движущегося твёрдого тела имеют одинаковую скорость и ускорение*, поэтому изучение поступательного движения твёрдого тела сводится к изучению движения одной его точки. Уравнениями поступательного движения являются уравнения движения любой точки тела

$$\begin{cases} x_c = f_1(t), \\ y_c = f_2(t), \\ z_C = f_3(t). \end{cases}$$

Траектория точек поступательно движущегося тела может быть любой. На рисунке 3.1 приведен пример механизма, звено AB которого совершает поступательное движение, при этом траектории точек A и B - окружности.

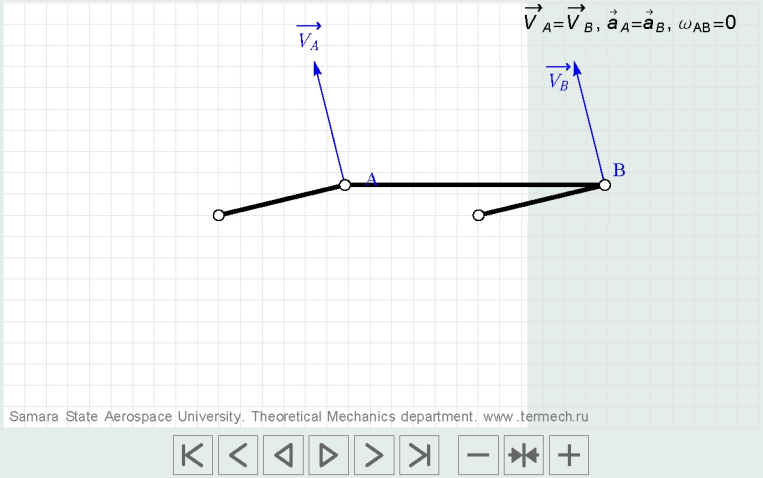


Рис. 3.2. Поступательное движение звена AB

3.2. Вращательное движение твёрдого тела

Вращательное движение - движение при котором все точки, принадлежащие некоторой прямой, жестко связанной с телом, в процессе движения остаются неподвижными. Эта прямая называется осью вращения тела. Траектории точек, не лежащих на оси вращения, представляют собой окружности, плоскости которых перпендикулярны оси вращения. Положение вра-

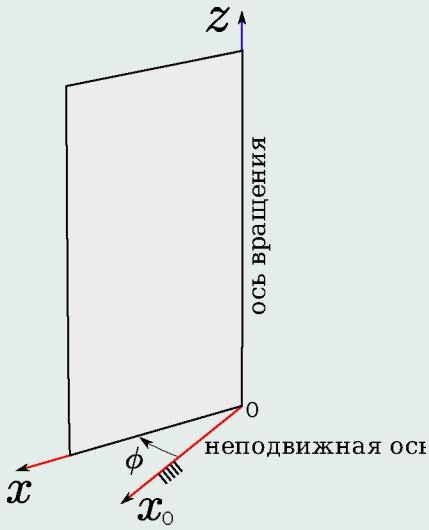


Рис. 3.3. Вращательное движение тела

Домашняя
Назад
На весь экран
Закрыть

щающегося тела определяется углом φ между подвижной и неподвижной полуплоскостями, проходящими через ось вращения тела. Подвижная полуплоскость жёстко связана с вращающимся телом. Этот угол поворота называется *углом поворота тела*. Угол поворота считается положительным если отложен от неподвижной к подвижной плоскости по вращению часовой стрелки если смотреть по направлению оси Oz.

Таким образом, положение твёрдого тела определяется углом φ, который в общем случае является функцией времени, следовательно уравнение вращательного движения твёрдого тела имеет вид:

$$\varphi = f(t).$$

Значение угла выражают в радианах. Один радиан - это центральный угол длина дуги которого равна радиусу.

3.2.1. Угловая скорость и угловое ускорение

Угловая скорость - величина, характеризующая быстроту изменения угла поворота φ с течением времени. При вращении твёрдого тела вокруг неподвижной оси его угол поворота за время Δt изменится на величину $\Delta\varphi$. Отношение приращения угла поворота к приращению времени определяет среднюю угловую скорость:

$$\omega_{ср} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}.$$

При стремлении Δt к нулю, мгновенная угловая скорость определяется как производная функции угла поворота по времени:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}.$$

Знак производной в момент времени t определяет направление вращения твёрдого тела: если $\frac{d\varphi}{dt} < 0$, то угол поворота уменьшается, в противном случае - увеличивается. Единицей измерения угловой скорости является радиан/с.

Угловое ускорение - величина, характеризующая быстроту изменения угловой скорости с течением времени. Среднее угловое ускорение определяется как отношение приращения угловой скорости к интервалу времени на котором это приращение произошло:

$$\varepsilon_{cp} = \frac{\Delta\Omega}{\Delta t}.$$

При стремлении Δt к нулю, мгновенное угловое ускорение определится как производная угловой скорости по времени:

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}.$$

Знак последнего выражения в конкретный момент времени будет определять является ли вращательное движение замедленным или ускоренным. Единицей измерения углового ускорения является радиан/c^2.

3.2.1.1. Равномерное вращение

Вращение твердого тела с постоянной угловой скоростью называется равномерным. При равномерном вращении угол поворота тела меняется пропорционально времени:

$$\frac{d\varphi}{dt} = const = \omega \Rightarrow d\varphi = \omega dt \Rightarrow \int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \omega \int_0^t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi - \varphi_0 = \omega t \Rightarrow \varphi = \varphi_0 + \omega t. \quad (3.2)$$

3.2.1.2. Равнопеременное вращение

Вращение твердого тела с постоянным угловым ускорением называется равнопеременным. При равнопеременном вращении угловая скорость тела меняется пропорционально времени (увеличивается или уменьшается):

$$\frac{d\omega}{dt} = const = \varepsilon \Rightarrow d\omega = \varepsilon dt \Rightarrow \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \varepsilon \int_0^t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega - \omega_0 = \varepsilon t \Rightarrow \omega = \omega_0 + \varepsilon t. \quad (3.3)$$

Угол поворота будет изменятся пропорционально квадрату времени:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 + \varepsilon t \Rightarrow d\varphi = (\omega_0 + \varepsilon t)dt \Rightarrow$$

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \int_0^t (\omega_0 + \varepsilon t)dt \Rightarrow \varphi - \varphi_0 = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}. \quad (3.4)$$

3.2.2. Скорости и ускорения точек тела, вращающегося вокруг неподвижной оси

Пусть в момент времени $t_0 = 0$ некоторая произвольная точка A, принадлежащая телу и не лежащая на оси его вращения совпадала с точкой O. Траекторией точки A будет окружность радиуса $R = AC$ где C - точка принадлежащая оси вращения и плоскости траектории точки A. Зададим положение уравнение движения точки A естественный способ задания движения. Будем отсчитывать положение точки A на траектории от её начального положения длиной дуги OA:

$$\widehat{OA} = s(t) = R\varphi(t).$$

Тогда, скорость точки A определяется следующим образом:

$$v_A = \frac{ds}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}R = \dot{\varphi}R = \omega R.$$

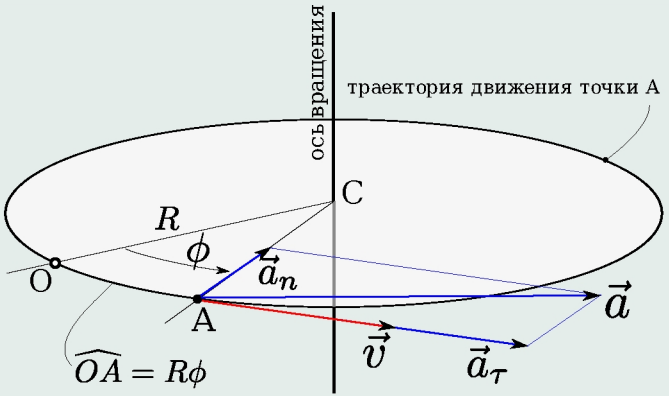


Рис. 3.4. К определению скорости и ускорения точки A

Т.е. скорость точки пропорциональна расстоянию до оси вращения. Ускорение точки будет содержать две составляющие: вращательную и центростремительную. Вращательное ускорение определится как производная величины скорости точки:

$$a_\tau = \frac{dv_A}{dt} = \frac{d\omega}{dt} R = \varepsilon R.$$

Зная радиус кривизны траектории и скорость точки, можно легко определить ее центростремительное ускорение, которое направлено к оси вращения:

$$a_n = \frac{v_A^2}{R}.$$

3.2.3. Вектор угловой скорости и углового ускорения

Введем *вектор угловой скорости* $\vec{\omega}$, который направлен вдоль оси вращения твёрдого тела и модуль которого равен величине угловой скорости тела. Направление вектора зададим так, чтобы видеть вращение тела по часовой стрелки если смотреть на него по направлению вектора угловой скорости.

Аналогичным образом введем *вектор углового ускорения* $\vec{\varepsilon}$, который направлен вдоль оси вращения твёрдого тела и модуль которого равен величине углового ускорения тела. Направление вектора будет совпадать с направлением вектора $\vec{\omega}$ при ускоренном движении - вращении и будет противоположно вектору угловой скорости при замедленном движении. Вектор углового ускорения $\vec{\varepsilon}$ можно определить как производную вектора $\vec{\omega}$:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\omega}{dt}.$$

3.2.4. Векторные выражения скорости и ускорения, формулы Эйлера

На рисунке 3.5 показана точка M, принадлежащая твёрдому телу, которое вращается вокруг неподвижной оси. Радиус-вектор точки $\vec{r}_M$ определяет её положение относительно точки O принадлежащей оси вращения тела. Модуль скорость точки M определится следующим образом:

$$v_M = \omega |\vec{r}_m| \sin\varphi.$$

С другой стороны, модуль векторного произведения $\vec{\omega}$ и $\vec{r}_M$ приводит к тому же результату:

$$|\vec{\omega} \times \vec{r}_M| = |\vec{\omega}||\vec{r}_M| \sin\varphi.$$

Скорость точки M направлена также, как и результат векторного произведения. Таким образом, *вращательная скорость точки M твёрдого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси равна векторному произведению вектора угловой скорости тела на радиус-вектор точки M относительно любой точки на оси вращения.*

$$\boxed{\vec{v}_M = \vec{\omega} \times \vec{r}_M} \tag{3.5}$$

Если выбрать систему координат, определить проекции угловой скорости тела и радиус-вектора точки M тела на оси выбранной системы, то можно определить проекции вращательной скорости точки на оси этой системы, используя запись векторного произведения в координатной форме:

$$\vec{v}_M = \vec{\omega} \times \vec{r}_M = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{pmatrix}$$

Раскрывая определитель, получим явные выражения для проекций скорости точки, которые называются *формулами Эйлера*:

$$\boxed{v_x = \omega_y z - \omega_z y,\ v_y = \omega_z x - \omega_x z,\ v_z = \omega_x y - \omega_y x} \tag{3.6}$$

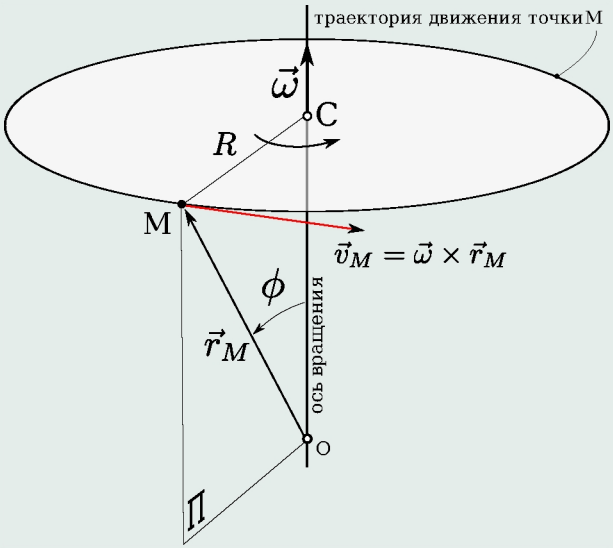


Рис. 3.5. Скорость точки тела при вращении вокруг неподвижно оси

Продифференцируем выражение (3.5) для того, чтобы определить ускорение точки M при вращении вокруг неподвижной оси:

$$\vec{a}_M = \frac{d\vec{v}_M}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}_M + \vec{\omega} \times \frac{\vec{r}_M}{dt}.$$

$\frac{d\vec{\omega}}{dt}$ есть угловое ускорение твёрдого тела, а $\frac{\vec{r}_M}{dt}$ - скорость точки M. Следо-

вательно:

$$\vec{a}_M = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_M + \vec{\omega} \times \vec{v}_M,$$

или (рисунок 3.6)

$$\boxed{\vec{a}_M = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_M + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_M)} \qquad (3.7)$$

Модуль первого слагаемого определяется образом:

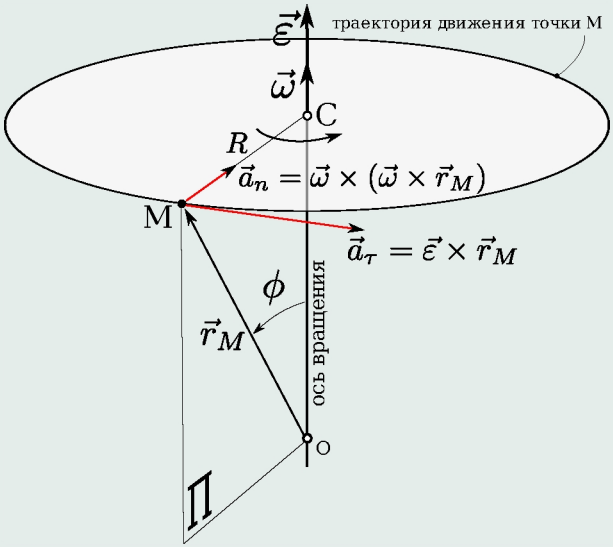


Рис. 3.6. Ускорение точки тела при вращении вокруг неподвижно оси

$$|\vec{\varepsilon} \times \vec{r}_M| = |\vec{\varepsilon}||\vec{r}_M| \sin\varphi,$$

из чего следует, что величина первого слагаемого совпадает с вращательным ускорением точки M. Направление результата векторного произведения первого слагаемого также будет совпадать с направлением вектора вращательного ускорения $\vec{a}_\tau$. Таким образом, вращательное ускорение точки твёрдого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, равно векторному произведению вектора углового ускорения тела на радиус-вектор точки относительно любой точки на оси вращения.

Величина центростремительного ускорения при движении точки по окружности определяется как:

$$a_n = \frac{v_M^2}{R} = \omega^2 R.$$

С другой стороны, модуль векторного произведения

$$|\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_M)| = |\vec{\omega} \times \vec{v}_M| = \omega v_M \sin 90^\circ = \omega v_M = \omega\omega R = \omega^2 R.$$

То есть, модуль векторного произведения второго слагаемого (3.7) совпадает с величиной центростремительного ускорения. Направление вектора $\vec{\omega} \times \vec{v}_M$ также направлено к центру окружности по которой двигается точка M: результат векторного произведения есть вектор перпендикулярный векторам $\vec{\omega}$ и $\vec{v}_M$, см. рисунок 3.6.

Таким образом, *центростремительное ускорение точки твёрдого тела, вращающегося вокруг неподвижно оси, равно векторному произведению вектора угловой скорости тела на вектор вращательной скорости точки.*

Пример 4. *Тело вращается вокруг неподвижной оси, совпадающей с осью Ox, неподвижной системы координат. Зависимость угла поворота тела от времени определяется выражением:* $\varphi = 2t^2$ *радиан. Найти скорость и ускорение точки тела, имеющей координаты* $x = 1м, y = 2м, z = 3м$ *в момент времени* $t = 1c$ *(рисунок 3.7). Вектор угловой скорости направлен*

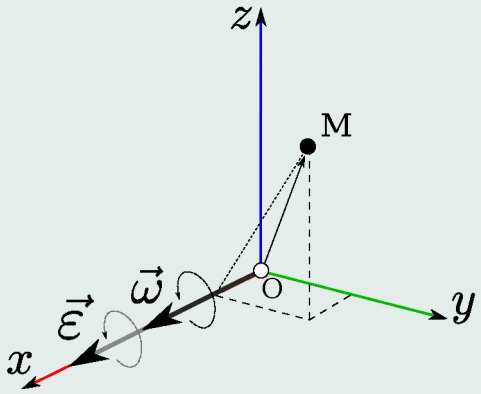


Рис. 3.7. Вращение вокруг неподвижной оси

вдоль оси Ox. В момент времени $t = 1c$ *величина угловой скорости равна* $\omega = \dot{\varphi} = 4t = 4\frac{1}{c}$. *Координаты вектора угловой скорости на оси:* $\omega_x = 4, \omega_y = 0, \omega_z = 0$.

Проекции скорости точки на оси координат определим, используя урав-

нения Эйлера:

$$\begin{aligned} v_x &= \omega_y z - \omega_z y = 0 \cdot 3 - 0 \cdot 2 = 0 м/с, \\ v_y &= \omega_z x - \omega_x z = 0 \cdot 1 - 4 \cdot 3 = -12 м/с, \\ v_z &= \omega_x y - \omega_y x = 4 \cdot 2 - 0 \cdot 1 = 8 м/с, \end{aligned}$$

модуль скорость:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{0 + 12^2 + 8^2} = \sqrt{208} м/с.$$

Величина углового ускорения определяется как производная угловой скорости: $\varepsilon = \dot{\omega} = 4\frac{1}{c^2}$. Вектор углового ускорения также направлен вдоль оси Ox и имеет координаты $\varepsilon_x = 4, \varepsilon_y = 0, \varepsilon_z = 0$.

Проекции вращательного ускорения точки на оси координат определим используя координатную запись векторного произведения, подобно тому как это было сделано для записи скорости точки:

$$\begin{aligned} a_x^\tau &= \varepsilon_y z - \varepsilon_z y = 0 \cdot 3 - 0 \cdot 2 = 0 м/с^2, \\ a_y^\tau &= \varepsilon_z x - \varepsilon_x z = 0 \cdot 1 - 4 \cdot 3 = -12 м/с^2, \\ a_z^\tau &= \varepsilon_x y - \varepsilon_y x = 4 \cdot 2 - 0 \cdot 1 = 8 м/с^2. \end{aligned}$$

Модуль вращательного ускорения:

$$a^\tau = \sqrt{0^2 + 12^2 + 8^2} = \sqrt{208} м/с^2.$$

Осестремительное ускорение определим как произведение квадрата угловой скорости вращения тела на расстояние от оси вращения (ось Ox) до точки:

$$a^n = \omega^2 \sqrt{z^2 + y^2} = 4\sqrt{9 + 4} = 4\sqrt{13} м/с^2.$$

Модуль ускорения точки:

$$a = \sqrt{(a^t)^2 + (a^n)^2} = \sqrt{208 + 16 \cdot 13} = 2\sqrt{104} м/с^2.$$

3.3. Плоское движение твёрдого тела

Плоским движением твёрдого тела является движение при котором каждая его точка движется в плоскости параллельной некоторой неподвижно плоскости.

Для изучения плоского движения твёрдого тела достаточно изучить движение плоской фигуры в ее плоскости.

3.3.1. Разложение плоского движения на поступательное и вращательное

Всякое непоступательное движение плоской фигуры в её плоскости можно рассматривать как совокупность двух перемещений: поступательного перемещения плоской фигуры вместе с произвольной точкой - полюсом, и поворота вокруг полюса. При этом поступательное перемещение зависит от выбора полюса, а угол поворота - нет (рисунок 3.8). Положение плоской фигуры на плоскости можно задать тремя параметрами: координатами некоторой точки фигуры и углом между одной из осей координат (например, осью Ox) и отрезком, жёстко связанным с плоской фигурой (рисунок 3.9).

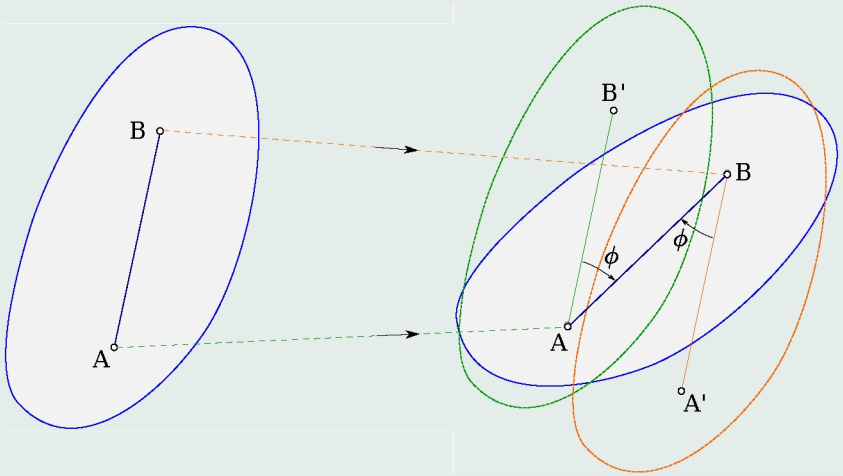


Рис. 3.8. Разложение плоского движения на поступательное и вращательное

Уравнения плоского движения твёрдого тела будут иметь вид:

$$\begin{cases} x_o &= f_1(t) \\ y_o &= f_2(t) \\ \phi &= f_3(t) \end{cases}$$

Домашняя
Назад
На весь экран
Закрыть

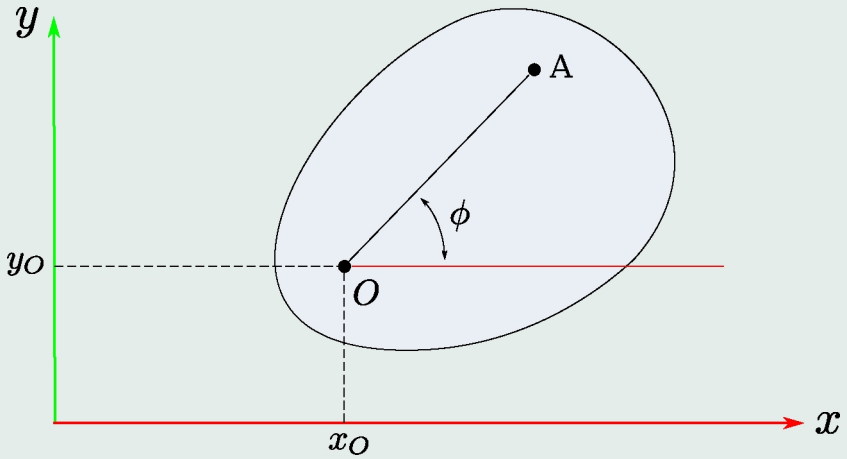


Рис. 3.9. Три параметра, задающие положение плоской фигуры на плоскости

3.3.2. Теорема о скоростях точек плоской фигуры

Теорема 2. *Скорость любой точки плоской фигуры равна геометрической сумме скорости полюса и скорости этой точки в её вращении вместе с плоской фигурой вокруг полюса.*

Доказательство. Действительно, для любой точки A, принадлежащей плоской фигуре, справедливо следующее выражение:

$$\vec{r}_A = \vec{r}_O + \vec{r}_{OA},\ |\vec{r}_{OA}| = const.$$

Тогда скорость точки A ($\vec{v}$)определится следующим образом:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}_O}{dt} + \frac{d\vec{r}_{OA}}{dt} = \vec{v}_O + \frac{d\vec{r}_{OA}}{dt},$$

где $\vec{v}_O$ - скорость полюса. Поскольку модуль вектора $\vec{r}_{OA}$ остается постоянным, то его производная будет определять скорость вращательную скорость точки A вокруг полюса O - $\vec{v}_{AO}$:

$$\vec{v}_{AO} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{OA}$$

Таким образом:

$$\boxed{\vec{v}_A = \vec{v}_O + \vec{v}_{AO}} \tag{3.8}$$

□

Доказательство 1. *Проекции скоростей точек плоской фигуры на ось, проходящую через эти точки, алгебраически равны. Действительно, спроецируем (3.8) на направление OA:*

$$Пр_{OA}\vec{v}_A = Пр_{OA}\vec{v}_O + Пр_{OA}\vec{v}_{AO}, \text{ но}$$
$$\vec{v}_{AO} \perp \overrightarrow{OA} \Longrightarrow Пр_{OA}\vec{v}_{AO} = 0 \Longrightarrow Пр_{OA}\vec{v}_A = Пр_{OA}\vec{v}_O.$$

Доказательство 2. *Концы скоростей точек точек неизменяемого отрезка лежат на одной прямой и делят эту прямую на части, пропорциональные расстояниям между соответствующими точками отрезка.*

3.3.3. Мгновенный центр скоростей

При плоском движении твёрдого тела, если его угловая скорость отлична от нуля, в каждый момент времени существует точка, связанная с плоской фигурой, скорость которой в этот момент времени равна нулю. Эта точка называется *мгновенным центром скоростей*. Действительно, скорость некоторой точки C, определяется следующим образом:

$$\vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{v}_{CA}.$$

На перпендикуляре к скорости $\vec{v}_A$, проведённом из точки можно найти такую точку C для которой выполняется условие:

$$\vec{v}_{CA} = -\vec{v}_A,$$

следовательно скорость точки C будет равна нулю. Поскольку будет выполнятся условие $\vec{v}_A = v_{CA} = \omega AC$, то *мгновенный центр скоростей плоской фигуры лежит на перпендикуляре к скорости полюса, выходящем из полюса, на расстоянии* $AC = v_{CA}/\omega = v_A/\omega$ от полюса A.

3.3.3.1. Случаи определения положения МЦС

Если скорости двух A и B точек не равны, но параллельны, а прямая, проходящая через эти точки, перпендикулярна скоростям $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$, то МЦС также лежит на этой линии. Зная расстояние между точками A и B, величину их скоростей, можно определить расстояние до МЦС и угловую скорость тела. Поскольку треугольники CAa' и CBb' подобны, то $v_A/CA = v_B/CA$

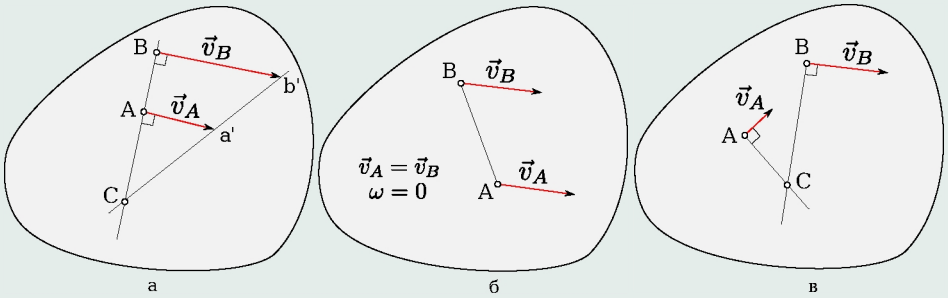


Рис. 3.10. К определению МЦС

(рисунок 3.10 а). Тогда, расстояние от МЦС до точки A определяется следующим образом:

$$AC = \frac{v_A AB}{v_B - v_A}.$$

Если скорости двух точек твёрдого тела параллельны и равны, то угловая скорость твёрдого тела равна нулю и тело совершает поступательное движение (рисунок 3.10 б).

В общем случае, МЦС лежит на пересечении перпендикуляров к скоростям точек (рисунок 3.10 в). Зная скорость одной точки и расстояние от этой точки до МЦС можно определить угловую скорость и затем скорость любой точки твёрдого тела:

$$\omega = v_A/CA \Rightarrow v_B = \omega CB.$$

3.3.4. Теорема об ускорениях точек плоской фигуры

Теорема 3. *Ускорение любой точки плоской фигуры равно геометрической сумме ускорения полюса и ускорения этой точки в её вращении вместе с плоской фигурой вокруг плюса.*

Доказательство. Запишем скорость точки B плоской фигуры (рисунок 3.11), выбрав за полюс точку A:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AB},$$

и продифференцируем его:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_{AB} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{AB})$$

Первое слагаемое есть ускорение полюса, второе - вращательное ускорение точки при вращении вокруг полюса, третье - центростремительное ускорение точки при движении вокруг полюса:

$$\boxed{\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}^{\tau}_{BA} + \vec{a}^{n}_{BA} = \vec{a}_O + \vec{a}_{BA}} \qquad (3.9)$$

□

Таким образом, *ускорение любой точки B плоской фигуры геометрически складывается из ускорения полюса и центростремительного и вращательного ускорения во вращательном движении фигуры вокруг полюса.*

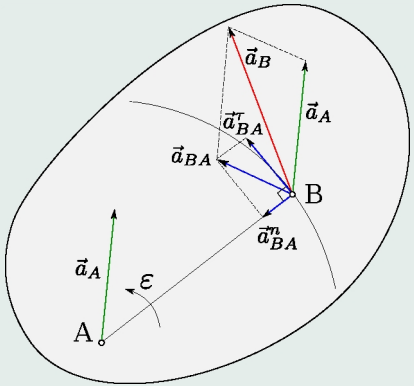


Рис. 3.11. К определению ускорения точки

Для плоской фигуры вращательное ускорение точки B при её движении вокруг полюса определяется как произведение углового ускорения фигуры на расстояние от полюса до точки B:

$$a^{\tau}_{AO} = \varepsilon AB$$

Центростремительное ускорение будет определятся скоростью движения точки вокруг полюса и расстоянием до полюса:

$$a^{n}_{AO} = \frac{V^2_{BA}}{AB} = \frac{(\omega AB)^2}{AB} = \omega^2 AB.$$

Пример 5. *На рисунке 3.12 изображён плоский кривошипно-ползунный механизм. Звено OA вращается вокруг точки O по закону* $\phi(t) = \frac{\pi}{3}t^2$. *Из-*

вестны длины звеньев OA и AB. Найти скорость и ускорение точки B, а также угловую скорость и угловое ускорение звена AB в момент времени $t = 1c$. На рисунке 3.12 изображён механизм в положении, соответствующем $t = 1c$: в этот момент времени между звеном OA и AB прямой угол.

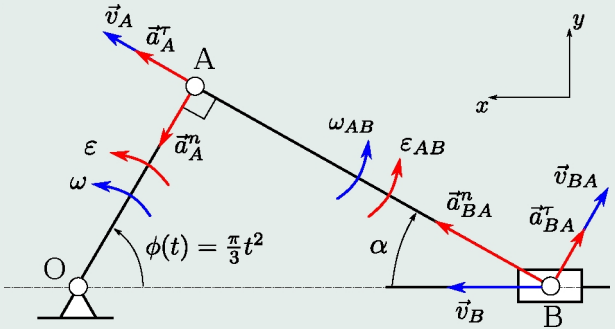


Рис. 3.12. Определение скоростей и ускорений точек плоского механизма (механизм изображен в положении, соответствующем $t = 1c$)

Для определения скорости точки B запишем теорему о скоростях плоской фигуры AB (3.8), выбрав за полюс точку A:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}. \tag{3.10}$$

Скорость точки A определим, зная что эта точка вращается вместе со

звеном OA вокруг точки A:

$$v_A = \omega OA = \dot{\phi}(t)OA$$

Скорость точки A будет направлена перпендикулярно звену OA.

В уравнении (3.10) известно направление скорости точки B: скорость точки B направлена по горизонтали. Пусть $\vec{v}_B$ направлена справа налево, в результате дальнейших вычислений знак в выражении для v_B покажет истинное направление скорости $\vec{v}_B$. Известно также направление скорости точки B при её движении вокруг полюса A: $\vec{v}_{BA} \perp AB$. Величина этой скорости определяется следующим образом:

$$v_{BA} = \omega_{AB} AB,$$

где ω_{AB} - угловая скорость звена AB. Для определения неизвестных, входящих в векторное уравнение (3.10) (скорость точки B и угловая скорость ω_{AB}), спроецируем это векторное уравнение на вертикальную и горизонтальную оси. Проекция векторов уравнения на ось x:

$$v_B = v_A \sin\phi + v_{BA} cos\alpha.$$

Проекция векторов уравнения на ось x:

$$0 = v_A \cos\phi + v_{BA} sin\alpha.$$

Из последнего уравнения определяем v_{BA} и угловую скорость звена AB:

$$v_{BA} = -\frac{v_A \cos\phi}{\sin\alpha},\ \omega_{AB} = -\frac{v_A \cos\phi}{AB \sin\alpha}.$$

Знак минус перед выражением для v_{BA} и ω_{AB} говорит о том, что действительное направление угловой скорости звена AB отличается от того что показано на рисунке. Подставляя v_{BA} в первое уравнение, найдем скорость точки B:

$$v_B = v_A \sin\phi - v_A \cos\phi \tan\alpha.$$

Ускорение точки B определим, используя теорему об ускорениях (3.9):

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}^n_{BA} + \vec{a}^\tau_{BA}. \tag{3.11}$$

Точка A вращается вместе с телом OA с известным угловым ускорением и угловой скоростью. Ускорение точки A будет складываться из вращательного и осестремительного ускорений:

$$\vec{a}_A = \vec{a}^\tau_A + \vec{a}^n_A.$$

Осестремительное ускорение, направленное к оси вращения, определится следующим образом:

$$a^n_A = \omega^2 OA = \dot{\phi}(t) OA$$

Вращательное ускорение точки A, перпендикулярно OA и равно:

$$a^\tau_A = \varepsilon OA = \dot{\omega} OA = \ddot{\phi}(t) OA$$

Ускорение точки B, входящее в уравнение (3.11) направлено вдоль оси x. Предположим, что ускорение $\vec{a}_B$ направлено справа налево. Направления компонент полного ускорение точки B при ее движении вокруг точки A:

$\vec{a}^n_{BA}$ и $\vec{a}^\tau_{BA}$, показаны на рисунке 3.12. Зная угловую скорость вращения звена AB, определим осестремительное ускорение точки B при её движении вокруг полюса (точка A):

$$a^n_{BA} = \omega^2_{AB} AB.$$

Вращательное ускорение точки B вокруг полюса выражается следующим образом:

$$a^\tau_{BA} = \varepsilon_{AB} AB.$$

Спроецируем векторное уравнение на оси x и y. Проекция на ось x:

$$a_B = a^n_A \cos\phi + a^\tau_A \sin\phi + a^n_{BA} \cos\alpha - a^\tau_{BA} \sin\alpha.$$

Проекция на ось y:

$$0 = -a^n_A \sin\phi + a^\tau_A \cos\phi + a^n_{BA} \sin\alpha + a^\tau_{BA} \cos\alpha. \qquad (3.12)$$

Из последнего уравнения определяем вращательное ускорение точки B вокруг полюса и угловое ускорение звена AB:

$$a^\tau_{BA} = \frac{a^n_A \sin\phi - a^\tau_A \cos\phi - a^n_{BA} \sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \varepsilon_{AB} = \frac{a^\tau_{BA}}{AB}.$$

Подставив a^τ_{BA} в уравнение (3.12) найдем ускорение точки B:

$$a_B = a^n_A \cos\phi + a^\tau_A \sin\phi + a^n_{BA} \cos\alpha - (a^n_A \sin\phi - a^\tau_A \cos\phi - a^n_{BA} \sin\alpha) \tan\alpha.$$

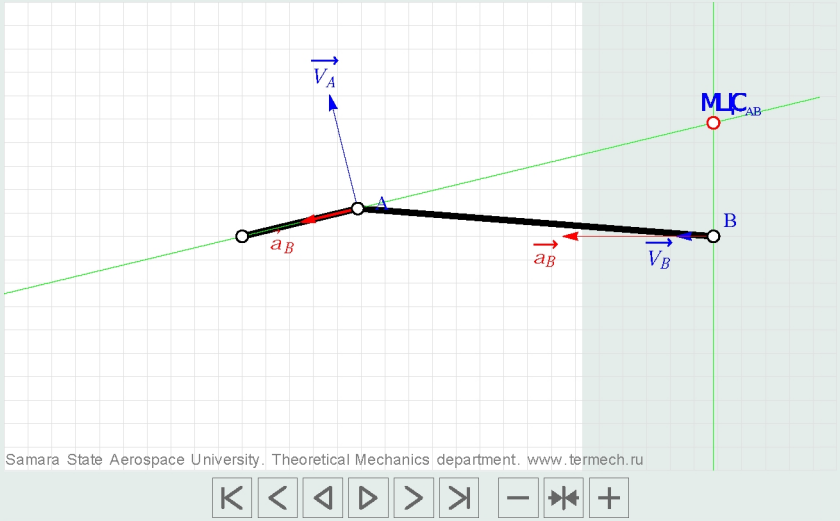


Рис. 3.13. Мгновенный центр скоростей звена AB

3.4. Движение тела вокруг неподвижной точки

Рассмотрим движение твёрдого тела, одна из точек которого остается неподвижной. Траектории всех точек такого тела лежат на сферических поверхностях с центром в неподвижной точке. Поэтому движение тела, име-

ющего одну неподвижную точку называют сферическим.

Твёрдое тело с одной закреплённой точкой имеет три степени свободы - три параметра определяют положение такого тела относительно системы координат.

3.4.1. Углы Эйлера

Простейшей и широко используемой системой переменных является система трёх углов - углов Эйлера: ψ - угол прецессии, θ - угол нутации, ϕ - угол собственного вращения. На рисунке приведена схема выполнения этих трёх последовательных поворотов. Первый поворот выполняется вокруг оси z_1 на угол ψ, второй поворот - вокруг новой оси x' на угол θ, и третий поворот - вокруг новой оси z'', которая совпадает с осью z_2 на угол ϕ.

3.4.2. Теорема Эйлера

Теорема 4. *Твёрдое тело, имеющее одну неподвижную точку, можно переместить из одного положения в любое другое поворотом вокруг некоторой оси, проходящей через неподвижную точку. Эта ось называется осью конечного поворота твёрдого тела.*

Доказательство. Рассмотрим две точки A и B, находящиеся на одинаковом расстоянии от неподвижной точки, рисунок 3.15. Пусть в процессе поворота эти точи заняли новое положение A', B'. Проведем через исходные точки A и B эти точки в новом положении A', B' дуги больших кругов, плоскости

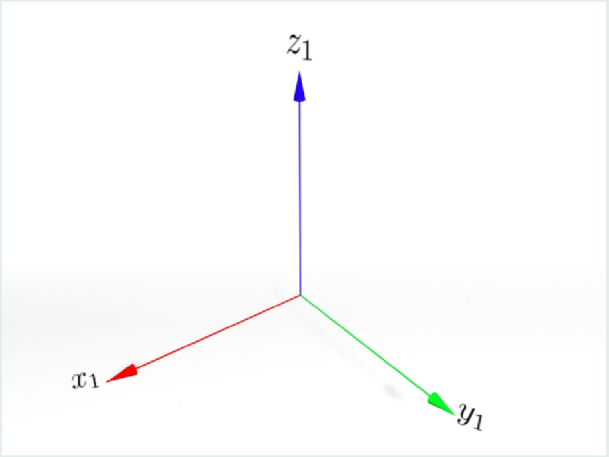


Рис. 3.14. Углы Эйлера [анимация]

которых проходят через неподвижную точку. Также проведем дуги больших кругов через точки B, B' и A, A'. Через середину дуги AA' (точка M) и BB' (точка N) проведем дуги больших кругов которые пересекутся в точке P. Дуги AP и $A'P'$ равны т.к. они являются сторонами равнобедренного сферического треугольника с высотой MP. Также равны дуги BP и $B'P$, принадлежащие равнобедренному треугольнику BPB'. С учётом равенства $AB = A'B'$, очевидно, что сферические треугольники APB и $A'PB'$

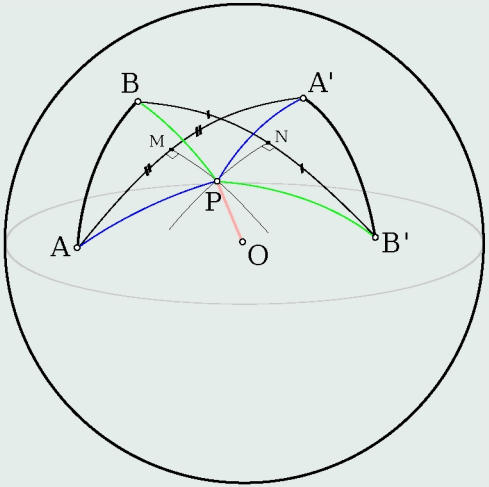


Рис. 3.15. К теореме Эйлера

равны и имеют общую вершину. Треугольник APB можно совместить с треугольником $A'PB'$ *единственным* поворотом вокруг оси, проходящей через неподвижную точку - центр окружности и точку P. □

3.4.3. Скорости и ускорения точек

3.4.3.1. Определение скорости точки тела

Рассмотрим движение точки, жёстко связанной с телом, вращающимся вокруг неподвижной точки O. Свяжем с телом систему координат $Ox_2y_2z_2$, которая будет вращаться вместе с телом относительно неподвижной системы

$Ox_1y_1z_1$. Радиус-вектор точки в системе $Ox_2y_2z_2$ зададим вектором $\vec{r}$:

$$\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z.$$

Для определения скорости точки, продифференцируем последнее выражение по времени, учитывая то, что орты $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ задают подвижный базис, а координаты вектора в этом базисе постоянны:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{i}}{dt}x + \frac{d\vec{j}}{dt}y + \frac{d\vec{k}}{dt}z.$$

Умножим обе части последовательно на $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Учитывая взаимную ортогональность ортов:

$$\vec{i}\cdot\vec{j} = 0,\ \vec{i}\cdot\vec{k} = 0,\ \vec{j}\cdot\vec{k} = 0,$$

получим проекции скорости на оси подвижной системы координат:

$$\begin{aligned}
\vec{v}\cdot\vec{i} = \quad v_x &= \frac{d\vec{i}}{dt}\cdot\vec{i}x + \frac{d\vec{j}}{dt}\cdot\vec{i}y + \frac{d\vec{k}}{dt}\cdot\vec{i}z,\\
\vec{v}\cdot\vec{j} = \quad v_y &= \frac{d\vec{i}}{dt}\cdot\vec{j}x + \frac{d\vec{j}}{dt}\cdot\vec{j}y + \frac{d\vec{k}}{dt}\cdot\vec{j}z,\\
\vec{v}\cdot\vec{k} = \quad v_z &= \frac{d\vec{i}}{dt}\cdot\vec{k}x + \frac{d\vec{j}}{dt}\cdot\vec{k}y + \frac{d\vec{k}}{dt}\cdot\vec{k}z,
\end{aligned}$$

Скалярное произведение вектора производной орта на исходный орт $\frac{d\vec{i}}{dt}\cdot\vec{i}$ будет равно нулю, поскольку:

$$\vec{i}\cdot\vec{i} = 1 \to \frac{d(\vec{i}\cdot\vec{i})}{dt} = 0 \to 2\frac{d\vec{i}}{dt}\cdot\vec{i} = 0.$$

Кроме того, учитывая взаимную ортогональность ортов:

$$\vec{i}\cdot\vec{j}=0\to\frac{d\vec{i}}{dt}\cdot j=-\frac{d\vec{j}}{dt}\cdot\vec{i},$$

Получим выражение для проекций скоростей точки:

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{d\vec{k}}{dt}\cdot\vec{i}z-\frac{d\vec{i}}{dt}\cdot\vec{j}y,\\ v_y &= \frac{d\vec{i}}{dt}\cdot\vec{j}x-\frac{d\vec{j}}{dt}\cdot\vec{k}z,\\ v_z &= \frac{d\vec{j}}{dt}\cdot\vec{k}y-\frac{d\vec{k}}{dt}\cdot\vec{i}y. \end{aligned}$$

Введем в рассмотрение вектор $\vec{\omega}$, проекции которого на оси подвижной системы координат определяются следующим образом:

$$\omega_x=\frac{d\vec{j}}{dt}\cdot\vec{k},\ \omega_y=\frac{d\vec{k}}{dt}\cdot\vec{i},\ \omega_z=\frac{d\vec{i}}{dt}\cdot\vec{j}.$$

Тогда проекции скорости точки будут иметь вид:

$$v_x=\omega_yz-\omega_zy,\ v_y=\omega_zx-\omega_xz,\ v_z=\omega_xy-\omega_yx.$$

Теперь вектор скорости точки можно представить в виде векторного произведения:

$$\vec{v}=\begin{pmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \omega_x & \omega_y & \omega_z\\ x & y & z\end{pmatrix}=\vec{\omega}\times\vec{r}. \qquad (3.13)$$

Таким образом, выражение скорости точки тела, совершающего сферическое движение совпадает с выражением для скорости точки тела, вращающегося вокруг неподвижной оси. Однако, при сферическом движении *вектор угловой скорости может меняется как по величине, так и по направлению.*

3.4.3.2. Определение ускорения точки тела

Ускорение точки тела, совершающего движение вокруг неподвижной точки определим продифференцировав выражение для скорости (3.13):

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\vec{\omega} \times \vec{r})}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{dr}{dt}.$$

Учитывая $\dot{\vec{r}} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ и определение углового ускорения $\dot{\vec{\omega}} = \vec{\varepsilon}$ получим выражение для ускорения точки тела в следующем виде:

$$\boxed{\vec{a} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}} \tag{3.14}$$

Первое слагаемое представляет собой вращательное ускорение:

$$\vec{a}^{\tau} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}, \tag{3.15}$$

величина которого определяется как произведение расстояния от точки тела до линии вектора $\vec{\varepsilon}$ на величину углового ускорения. Направление вращательного ускорения определяется также как и в случае вращения тела вокруг неподвижной оси (рисунок 3.7). Второе слагаемое (3.14) представляет собой осестремительное ускорение точки:

$$\vec{a}^{n} = \vec{\omega} \times \vec{v},$$

направленное по кратчайшему пути к оси мгновенного вращения, определяемой вектором $\vec{\omega}$. Следует отметить, что при вращении тела вокруг *непо-*

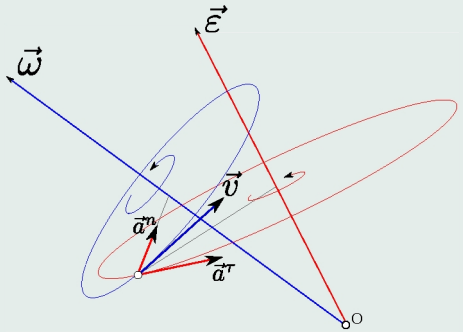


Рис. 3.16. Скорость и ускорение точки при сферическом движении твёрдого тела

движной оси, векторы угловой скорости и углового ускорения лежали на одной прямой, поэтому и вращательная скорость точки была коллинеарна её вращательному ускорению. Однако, при вращении тела вокруг неподвижной точки направления векторов $\vec{\omega}$ и $\vec{\varepsilon}$ могут не совпадать и поэтому между вращательной скоростью точки, определяемой выражением (3.13) вращательным ускорением (3.15) может быть любой угол (рисунок 3.16).

3.5. Свободное движение твердого тела

3.5.1. Скорости точек

Пусть твердое тело свободно двигается относительно неподвижной системы координат $Ox_1y_1z_1$. Разместим в точке A твердого тела *подвижную систему* координат $Ax_2y_2z_2$, которая *двигается поступательно*, то есть ось x_2 остается параллельной оси x_1, y_2 остается параллельной оси y_1 и z_2 остается параллельной оси z_1. Радиус-вектор точки B тела можно представить в виде суммы:

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{\rho}. \tag{3.16}$$

Дифференцируя (3.16) получим скорость точки B:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \frac{d\vec{\rho}}{dt}$$

Вектор ρ определяет положение точки B относительно поступательно-движущейся системы координат, поэтому его производная будет определять скорость точки B при её вращении вокруг полюса - точки A, с угловой скоростью $\vec{\omega}$:

$$\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{\rho}.$$

С учётом этого, скорость точки B примет вид:

$$\boxed{\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{\rho}} \tag{3.17}$$

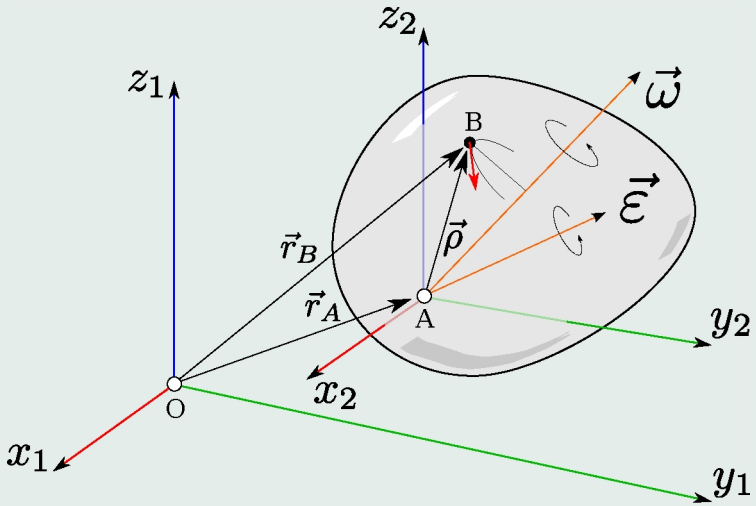


Рис. 3.17. Свободное движение твёрдого тела

Таким образом, *скорость любой точки свободного твёрдого тела геометрически складывается из скорости произвольно выбранного полюса и скорости точки во вращательном движении относительно полюса.*

Также как и для плоского движения твёрдого тела, проекции скоростей двух точек свободно движущегося тела на прямую их соединяющую равны:

$$\text{пр}(\vec{v}_B)_{AB} = \text{пр}(\vec{v}_A)_{AB} + \text{пр}(\vec{\omega} \times \vec{\rho})_{AB},$$

$$\text{но } (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) \perp \overrightarrow{AB} = \vec{\rho} \Rightarrow \text{пр}(\vec{v}_B)_{AB} = \text{пр}(\vec{v}_A)_{AB}. \quad (3.18)$$

3.5.2. Ускорения точек

Для определения скорости точки B продифференцируем (3.17) :

$$\vec{a}_B = \frac{d\vec{v}_A}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{\rho}}{dt} = \vec{a}_A + \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho})$$

Таким образом, вектор ускорения точки свободного тела равен векторной сумме ускорения полюса и ускорения этой точки в её движении вокруг полюса:

$$\boxed{\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho})}$$

3.6. Сложное движение точки

Движение материальной точки можно рассматривать по отношению к разным системам отсчёта. Задачей этой лекции является определение кинематических параметров точки в различных системах отсчёта: связь между кинематическими параметрами точки, определённым по отношению к подвижным и неподвижным системам координат.

Пусть задана некоторая условно-неподвижная система координат $x_1y_1z_1$ и подвижная система координат $x_2y_2z_2$, которая двигается относительно системы $x_1y_1z_1$. Движение точки *относительно подвижной* системы координат будем называть *относительным* движением. Движение точки *по отношению к неподвижной* системе - *абсолютным* движением и движение точки *вместе с подвижной* системой координат будем называть *переносным* дви-

жением. Соответственно будет различаться относительная $\vec{v}_r$ и переносная скорость $\vec{v}_e$, и относительное и переносное ускорение: $\vec{a}_r$ и $\vec{a}_e$.

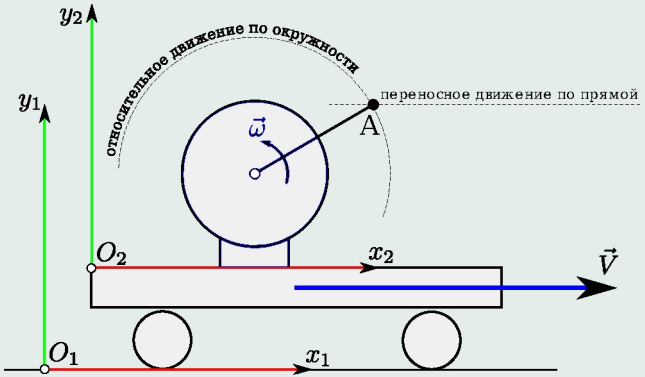


Рис. 3.18. Относительное и переносное движение точки A

3.6.1. Производная вектора в подвижной и неподвижной системе координат

Рассмотрим неподвижную систему координат $Ox_1y_1z_1$ и подвижную систему $Ox_2y_2z_2$, которая двигается произвольным образом относительно неподвижной. Пусть в подвижной системе координат задан вектор $\vec{r}$, который можно представить в виде линейной комбинации ортов подвижной системы

$\vec{i}_2, \vec{j}_2, \vec{k}_2$:

$$\vec{r} = x\vec{i}_2 + y\vec{j}_2 + z\vec{k}_2. \tag{3.19}$$

Продифференцируем вектор $\vec{r}$ по времени учитывая, что изменяются как координаты самого вектора так и направление ортов $\vec{i}_2, \vec{j}_2, \vec{k}_2$, поскольку подвижная система координат может вращаться относительно неподвижной системы:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i}_2 + \frac{dy}{dt}\vec{j}_2 + \frac{dz}{dt}\vec{k}_2 + x\frac{d\vec{i}_2}{dt} + y\frac{d\vec{j}_2}{dt} + z\frac{d\vec{k}_2}{dt}.$$

Первые три слагаемых представляют собой производную вектора $\vec{r}$ в подвижной системе координат или *локальную производную* $\frac{\tilde{d}\vec{r}}{dt}$: эти три слагаемых не учитывают движение подвижного базиса, а зависят лишь от изменения координат вектора $\vec{r}$ в подвижной системе. Последние три слагаемых перепишем, учитывая выражения для производной неизменного по модулю вектора при его вращении:

$$\frac{d\vec{i}_2}{dt} = \omega \times \vec{i}_2, \quad \frac{d\vec{j}_2}{dt} = \omega \times \vec{j}_2, \quad \frac{d\vec{k}_2}{dt} = \omega \times \vec{k}_2.$$

где ω - угловая скорость подвижной системы координат. Выражение (3.19) примет вид:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\tilde{d}\vec{r}}{dt} + \omega \times (x\vec{i}_2 + y\vec{j}_2 + z\vec{z}_2).$$

Простейшие преобразования приводят к выражению для абсолютной производной вектора:

$$\boxed{\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\tilde{d}\vec{r}}{dt} + \omega \times \vec{r}}$$

Абсолютная производная вектора равна сумме относительной производной этого вектора и векторного произведения угловой скорости подвижной системы координат на этот вектор [1].

3.6.2. Теорема о сложении скоростей

Изменение координат радиус-вектора $\vec{r}\,(x, y, z)$ будет определять движение точки относительно подвижной системы. Рассмотрим движение этой же точки относительно неподвижной системы координат. Радиус-вектор точки относительно неподвижной системы определяется как сумма радиус-вектора полюса O и радиус-вектора точки относительно подвижной системы:

$$\vec{r} = \vec{r}_O + \vec{\rho} = \vec{r}_O + (\vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z).$$

Продифференцировав последнее выражение, получим абсолютную скорость точки:

$$\vec{v} = \underbrace{\frac{d\vec{r}_O}{dt} + \left(\frac{d\vec{i}}{dt}x + \frac{d\vec{j}}{dt}y + \frac{d\vec{k}}{dt}z\right)}_{\vec{v}_e} + \underbrace{\left(\vec{i}\frac{dx}{dt} + \vec{j}\frac{dy}{dt} + \vec{k}\frac{dz}{dt}\right)}_{\vec{v}_r}. \qquad (3.20)$$

В выражение в первой скобке входят производные ортов подвижной системы координат $Ox_2y_2z_2$. Поскольку эта система координат жёстко связана с телом и совершает вращательное движение вокруг полюса O, то производная базисного вектора $\vec{i}$ будет определять скорость некоторой точки, положение которой задает этот вектор. Эта скорость определяется уже известным

выражением:

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{i}.$$

Аналогично определяются производные остальных базисных векторов. Выражение во второй скобке характеризует изменение координат точки относительно подвижной системы и представляет собой относительную скорость точки. Таким образом, абсолютная скорость точки определяется как векторная сумма ее переносной и относительной скорости.

$$\boxed{\vec{v} = \underbrace{\frac{d\vec{r}_O}{dt} + (\vec{\omega}_e \times \vec{\rho})}_{\vec{v}_e} + \vec{v}_r}$$

3.6.3. Теорема о сложении ускорений

Для определения ускорения точки, продифференцируем выражение (3.20):

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a} = \frac{d\vec{r}_O}{dt} + \left(\frac{d^2\vec{i}}{dt^2}x + \frac{d^2\vec{j}}{dt^2}y + \frac{d^2\vec{k}}{dt^2}z\right) + \left(\vec{i}\frac{d^2x}{dt^2} + \vec{j}\frac{d^2y}{dt^2} + \vec{k}\frac{d^2z}{dt^2}\right) + \\ + \left(\frac{\vec{i}}{dt}\frac{dx}{dt} + \frac{\vec{j}}{dt}\frac{dy}{dt} + \frac{\vec{k}}{dt}\frac{dz}{dt}\right). \quad (3.21)$$

Первое слагаемое определяет скорость полюса $\vec{a}_O$. Вторая производная от орта $\vec{i}$, входящая в первую скобку, определяется следующим образом:

$$\frac{d^2\vec{i}}{dt^2} = \frac{d(\vec{\omega}_e \times \vec{i})}{dt} = \vec{\varepsilon}_e \times \vec{i} + \vec{\omega}_e \times (\vec{\omega}_e \times \vec{i}).$$

Применяя это правило для ортов $\vec{i}$ и $\vec{j}$, преобразуем выражение в первой скобке к виду:

$$\left(\frac{d^2\vec{i}}{dt^2}x + \frac{d^2\vec{j}}{dt^2}y + \frac{d^2\vec{k}}{dt^2}z\right) = \vec{\varepsilon}_e \times \vec{\rho} + \vec{\omega}_e \times (\vec{\omega}_e \times \vec{\rho}).$$

Выражение во второй скобке представляет собой ускорение точки относительно подвижной системы координат. Выражение в третей скобке преобразуем следующим образом:

$$\left(\frac{\vec{i}}{dt}\frac{dx}{dt} + \frac{\vec{j}}{dt}\frac{dy}{dt} + \frac{\vec{k}}{dt}\frac{dz}{dt}\right) = (\vec{\omega} \times \vec{i})\frac{dx}{dt} + (\vec{\omega} \times \vec{j})\frac{dy}{dt} + (\vec{\omega} \times \vec{k})\frac{dk}{dt} =$$

$$= \vec{\omega} \times (\vec{i}\frac{dx}{dt} + \vec{j}\frac{dy}{dt} + \vec{k}\frac{dz}{dt}) = \vec{\omega} \times \vec{v}_e. \quad (3.22)$$

Таким образом, абсолютное ускорение точки будет определятся следующим образом:

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}_O + \vec{\varepsilon}_e \times \vec{\rho} + \vec{\omega}_e \times (\vec{\omega}_e \times \rho) + \vec{a}_r + 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r} \quad (3.23)$$

Первые три слагаемых представляют собой переносное ускорение точки, определяемое ускорением полюса и движением точки вместе с подвижной

системой координат вокруг полюса с угловой скоростью $\vec{\omega}_e$ и угловым ускорением $\vec{\varepsilon}_e$. Последнее слагаемое - это *кориолисово или поворотное ускорение - составляющая абсолютного ускорения точки в сложном движении, равная удвоенному векторному произведения угловой скорости переносного движения и относительной скорости точки.*

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_k}$$

Последнее равенство выражает теорему Кориолиса: *в случае непоступательного переносного движения абсолютное ускорение точки определяется как векторная сумма переносного, относительного и кориолисова ускорений.* При поступательном переносном движении угловая скорость $\vec{\omega}_e$ равна нулю, поэтому будет равно нулю и ускорение Кориолиса.

3.6.3.1. Правило Жуковского

Чтобы найти направление ускорения Кориолиса, можно воспользоваться правилом Жуковского. Необходимо спроецировать относительную скорость точки на плоскость, перпендикулярную оси переносного вращения, и повернуть проекцию в этой плоскости на 90 градусов в сторону переносного вращения.

Рассмотрим пример использования теорем о сложении скоростей и ускорений для решения задач кинематики точки.

Пример 6. *Точка M двигается вдоль трубки, жестко связанной со стержнем AB, вращающимся с угловой скоростью $\omega_e(t) = 3tc^{-2}$ вокруг вертикально оси. Угол между стержнем AB и трубкой 30 градусов. Известен закон*

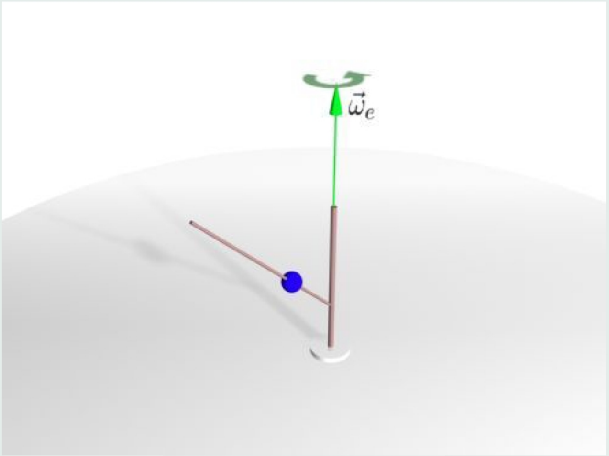


Рис. 3.19. Правило Жуковского

движения точки M вдоль трубки: $OM = 9t^2$*м. Найти абсолютное ускорение точки M. В рассматриваемой задаче точка M совершает сложное движение. Переносным движением будет движение точки вместе с трубкой вокруг оси AB, то есть переносное движение точки - это её движение по окружности. Относительное движение точки M - движение прямолинейное, вдоль оси трубки. Относительные скорость и ускорение точки*

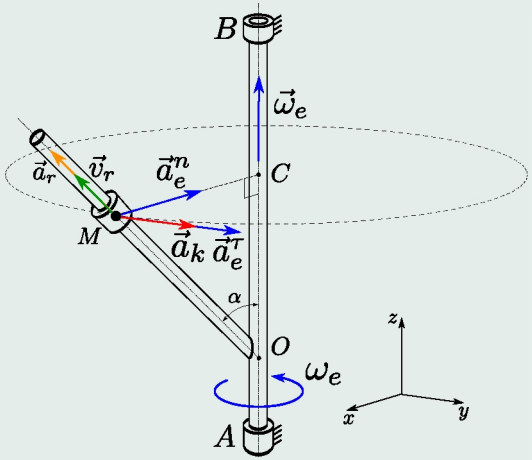


Рис. 3.20. Схема системы

определяется следующим образом:

$$v_r = (OM)'_t = 18t\text{м}/c,\ a_r = \dot{v}_r = 18\text{м}/c^2.$$

Поскольку переносное движение точки M происходит по окружности, то переносное ускорение есть сумма двух векторов: переносного вращательного $\vec{a}_e^\tau$ *и переносного осестремительного ускорений* $\vec{a}_e^n$*. Величина осестремительного переносного ускорения:*

$$a_e^n = \omega_e^2 MC = \omega_e^2 OM \sin\alpha = (3t)^2 9t^2 \sin\alpha = 81t^4 \sin\alpha\text{м}/c^2.$$

Вектор осестремительного ускорения $\vec{a}_e^n$ направлен к оси переносного вращения (от точки M к точке C). Вращательное ускорение определятся угловым ускорением переносного вращения и расстоянием от точки M до оси вращения:

$$a_e^\tau = \varepsilon_e MC = \dot{\omega}_e MC = \dot{\omega}_e OM \sin\alpha = 3\dot{9}t^2 \sin\alpha = 27t^2 \sin\alpha м/с^2.$$

Вектор вращательного ускорения $\vec{a}_e^n$ направлен по касательной к окружности, образованной радиусом CM, по направлению вращения.

Ускорение Кориолиса определим, используя правило Жуковского. Спроецируем вектор угловой скорости на плоскость перпендикулярную оси AB. Повернем проекцию на 90 градусов по направлению переносного вращения, получим направление ускорения Кориолиса, которое совпадает с направлением вращательного переносного ускорения. Величина ускорения Кориолиса определяется следующим образом:

$$a_k = 2\omega_e v_r \sin\alpha = 2\dot{3}t18 \sin\alpha = 108t \sin\alpha м/с^2.$$

Абсолютное ускорение точки M определим спроецировав векторное выражение:

$$\vec{a} = \vec{a}_e^n + \vec{a}_e^\tau + \vec{a}_r + \vec{a}_k$$

на оси подвижной системы координат $Oxyz$. Ось Ox перпендикулярная оси вращения направлена от точки C к точке M. Ось Oy перпендикулярная оси вращения и оси Ox. Ось Oz направлена вдоль оси переносного вращения. Таким образом, проекции абсолютного ускорения точки M на оси будут

иметь вид:

$$\begin{aligned} a_x &= a_r \sin\alpha - a_e^n = 18\sin\alpha - 81t^4 \text{м}/c^2, \\ a_y &= a_e^\tau + a_k = (27t^2 + 108t)\sin\alpha \text{м}/c^2, \\ a_z &= a_r \cos\alpha = 18\cos\alpha \text{м}/c^2. \end{aligned}$$

Величина абсолютного ускорения будет равна: $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

3.7. Сложное движение твёрдого тела

Рассмотрим движение твёрдого тела по отношению к двум системам координат: неподвижной и подвижной. Установим связь между кинематическими параметрами твёрдого тела в различных системах отсчёта.

3.7.1. Сложение поступательных движений

При поступательном движении подвижной системы координат $O_2x_2y_2z_2$ относительно неподвижной $O_1x_1y_1z_1$ со скоростью $\vec{v}_e$ и *поступательного* движения твердого тела относительно подвижной системы $O_2x_2y_2z_2$ со скоростью $\vec{v}_r$ абсолютная скорость точки запишется следующим образом:

$$\boxed{\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e.}$$

Очевидно, что при сложении двух поступательных движений результирующее движение также будет поступательным.

3.7.2. Сложение вращений твердого тела вокруг пересекающихся осей

3.7.2.1. Сложение скоростей

Пусть некоторое тело совершает сложное движение. Переносное и относительное движение являются вращениями с угловой скоростью $\vec{\omega}_e$, $\vec{o}mega_r$ соответственно. Проведем через векторы угловых скоростей плоскость П. Построим вектор суммы двух угловых скоростей. Модуль скорости точки С,

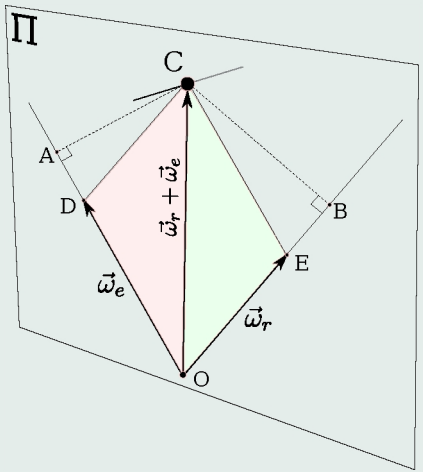


Рис. 3.21. Сложение вращений вокруг пересекающихся осей

лежащей на линии вектора $\vec{\omega}_r + \vec{\omega}_e$, в переносном движении будет определятся выражением:

$$v_e = \omega_e CA = 2S_{\triangle OCD}, \text{ т.к. CA - высота треугольника OCD}$$

Скорость точки в относительном движении определяется выражением:

$$v_e = \omega_r CB = 2S_{\triangle OCE}, \text{ т.к. CB - высота треугольника OCE}$$

Учитывая, что треугольники $\triangle OCE$ и $\triangle OCD$ равны, а направления скоростей - противоположны, то скорость точки C будет равна нулю. Из этого следует, в данный момент времени тело вращается вокруг оси определяемой вектором $\vec{\omega}_r + \vec{\omega}_e$. Тогда скорость любой точки M твердого тела определится следующим образом:

$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_e = \vec{\omega}_r \times \vec{r} + \vec{\omega}_e \times \vec{r} = (\vec{\omega}_e + \vec{\omega}_r) \times \vec{r}.$$

Абсолютная угловая скорость вращения твердого тела:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_e + \vec{\omega}_r \tag{3.24}$$

Если тело совершает одновременное вращение вокруг нескольких пересекающихся осей, то абсолютная угловая скорость будет определятся векторной суммой всех угловых скоростей:

$$\boxed{\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3 \ldots \vec{\omega}_n}$$

Таким образом, *угловая скорость абсолютного вращения тела равна векторной сумме угловых скоростей составляющих вращений.*

3.7.2.2. Сложение ускорений

Продифференцируем выражение (3.24) для определения абсолютного углового ускорения:

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}_e}{dt} + \frac{d\left(\vec{i}\omega_x + \vec{j}\omega_y + \vec{k}\omega_z\right)}{dt}.$$

Производная переносной угловой скорости есть переносное угловое ускорение. Раскрывая второе слагаемое, получим:

$$\frac{d\left(\vec{i}\omega_x + \vec{j}\omega_y + \vec{k}\omega_z\right)}{dt} = \left(\frac{d\vec{i}}{dt}\omega_x + \frac{d\vec{j}}{dt}\omega_y + \frac{d\vec{k}}{dt}\omega_z\right) + \vec{i}\frac{d\omega_x}{dt} + \vec{j}\frac{d\omega_y}{dt} + \vec{k}\frac{d\omega_z}{dt} =$$
$$= \vec{\omega}_e \times (\vec{i}\omega_x + \vec{j}\omega_y + \vec{k}\omega_z) + \vec{\varepsilon}_r = \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_r + \vec{\varepsilon}_r \quad (3.25)$$

Выражение для абсолютного углового ускорения примет вид:

$$\boxed{\vec{\varepsilon} = \varepsilon_e + \varepsilon_r + \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_r} \quad (3.26)$$

Таким образом, *абсолютное угловое ускорение твердого тела, вращающегося неравномерно вокруг двух пересекающихся осей равно векторной сумме его переносного, относительного и поворотного ускорений.* Поворотное ускорение можно записать в другой форме:

$$\vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_r = \vec{\omega}_e \times (\vec{\omega} - \vec{\omega}_e) = \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}.$$

Поворотное ускорение - *составляющее абсолютного углового ускорения твердого тела при его неравномерном вращении вокруг пересекающихся осей, равную векторному произведению угловой скорости переносного вращения на угловую скорость относительного и абсолютного вращения.*

3.7.3. Кинематические уравнения Эйлера

Найдем угловую скорость тела, вращающегося вокруг неподвижной точки по известным законам изменения углов Эйлера:

$$\psi = f_1(t),\ \theta = f_2(t),\ \phi = f_3(t).$$

Угловую скорость вращения тела представим в виде суммы трех вращений, соответствующих изменению углов ψ, θ и ϕ:

$$\vec{\omega} = \dot{\psi}\vec{k}_1 + \dot{\theta}\vec{i}' + \dot{\phi}\vec{k}_2. \tag{3.27}$$

Далее необходимо найти проекции ортов, входящих в выражение (3.27) на оси подвижной системы координат, рисунок 3.22. Представим эти проекции в виде следующей таблицы:

Орты	$\vec{i}_2$	$\vec{j}_2$	$\vec{k}_2$
$\vec{k}_1$	$\sin\theta\sin\phi$	$\sin\theta\cos\phi$	$\cos\theta$
$\vec{i}'$	$\cos\phi$	$-\sin\phi$	0
$\vec{k}_2$	0	0	1

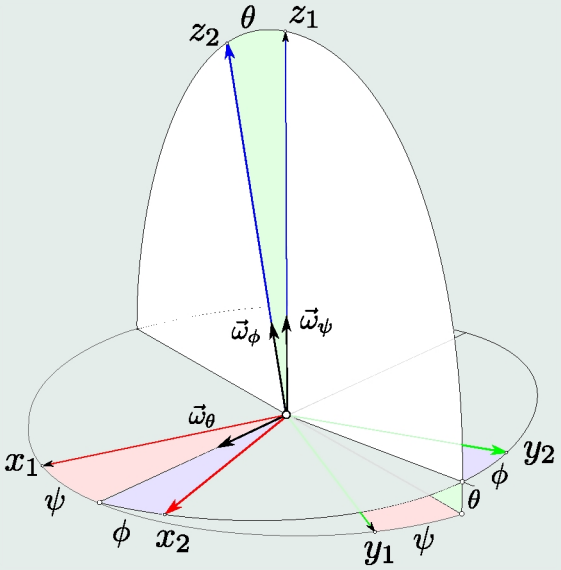


Рис. 3.22. К записи кинематических уравнений Эйлера

Зная проекции осей элементарных вращений на оси подвижной системы координат, получим выражения для проекций угловой скорости тела:

$$\begin{aligned} \omega_{x_2} &= \dot{\psi}\sin\theta\sin\phi + \dot{\theta}\cos\phi, \\ \omega_{y_2} &= \dot{\psi}\sin\theta\cos\phi - \dot{\theta}\sin\phi, \\ \omega_{z_2} &= \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\phi}, \end{aligned} \tag{3.28}$$

которые представляют собой *кинематические уравнения Эйлера*. Модуль вектора угловой скорости определятся из условия ортогональности ее проекции на оси подвижной системы:

$$\omega = \sqrt{\omega_{x_2}^2 + \omega_{y_2}^2 + \omega_{z_2}^2}.$$

Для того, чтобы найти проекции угловой скорости на оси неподвижной системы, необходимо определить проекции осей элементарных поворотов на оси неподвижной системы $Ox_1y_1z_1$ (рисунок 3.22), которые также оформим в виде таблицы:

Орты	$\vec{i}_1$	$\vec{j}_1$	$\vec{k}_1$
$\vec{k}_1$	0	0	1
$\vec{i}'$	$\cos\psi$	$-\sin\psi$	0
$\vec{k}_2$	$\sin\theta\sin\psi$	$-\sin\theta\cos\psi$	$\cos\theta$

Проекции угловой скорости на оси неподвижной системы координат будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \omega_{x_1} &= \dot{\theta}\cos\psi + \dot{\phi}\sin\theta, \sin\psi, \\ \omega_{y_1} &= \dot{\theta}\sin\psi - \dot{\phi}\sin\theta, \cos\psi, \\ \omega_{z_1} &= \dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta. \end{aligned} \tag{3.29}$$

3.7.4. Сложение вращений твердого тела вокруг параллельных осей

Рассмотрим вращение твердого тела вокруг двух параллельных осей. Твердое тело вращается вокруг оси O_2z_2 подвижной системы координат с

одновременным вращением вокруг оси O_1z_1 неподвижной системы, так что оси O_2z_2 и O_1z_1 остаются параллельны друг другу.

3.7.4.1. Пара вращений

Рассмотрим частный случай при котором угловая скорость относительного движения - вращения вокруг O_2z_2 противоположна и равна по модулю угловой скорости переносного вращения вокруг оси O_1z_1: $\vec{\omega}_e = -\vec{\omega}_r$. Такой движение называется парой вращений, рисунок 3.23. Абсолютная скорость некоторой точки M будет определяться следующим образом:

$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_e = \vec{\omega}_r \times \vec{r}_2 + \vec{\omega}_e \times \vec{r}_1 = \vec{\omega}_e \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \vec{\omega}_e \times \overrightarrow{O_1O_2}.$$

Полученный результат говорит о том, что скорость любой точки M определяется только угловой скоростью вращения и расстоянием между осями вращений. Следовательно скорости всех точек твердого тела в этом частном случае имеют одинаковую величину и направление: тело совершает поступательное движение со скоростью равной *моменту пары вращений*: $\vec{\omega}_e \times \overrightarrow{O_1O_2}$.

3.7.4.2. Сложение скоростей

Рассмотрим общий случай вращения твердого тела вокруг параллельны осей. При вращении тела с угловой скоростью $\vec{\omega}_r$ вокруг оси O_2z_2 и переносным вращением вокруг оси O_1z_1 скорость точки M определяется следующим образом:

$$\vec{v} - \vec{v}_e + \vec{v}_r = \vec{\omega}_e \times \vec{r}_1 + \vec{\omega}_r \times \vec{r}_2.$$

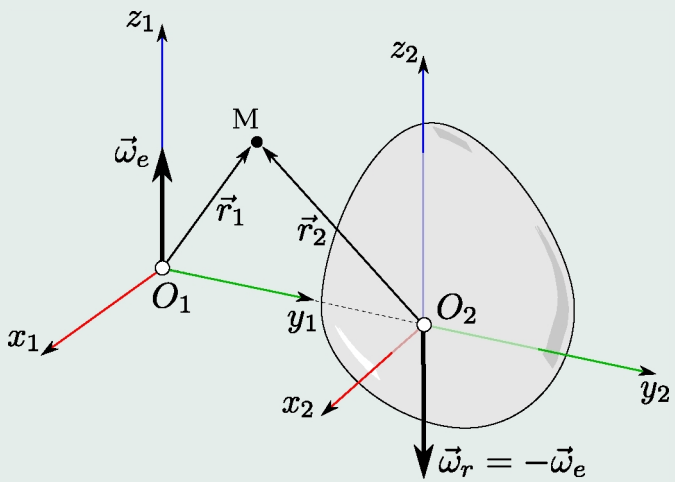


Рис. 3.23. Пара вращений

Вектор относительной скорости точки M лежит в плоскости перпендикулярной оси относительного вращения, также и переносная скорость точки M лежит в плоскости перпендикулярной оси переносного вращения (рисунок 3.24). Так как эти оси параллельны, то и результирующая скорость точки будет лежать в плоскости перпендикулярной осям вращений. Следовательно твердое тело совершает *плоское движение*. Найдем положение мгновенной оси вращения. Пусть угловые скорости переносного и относительного вращений имеют одинаковое направление. Тогда скорости точки C, лежащей на

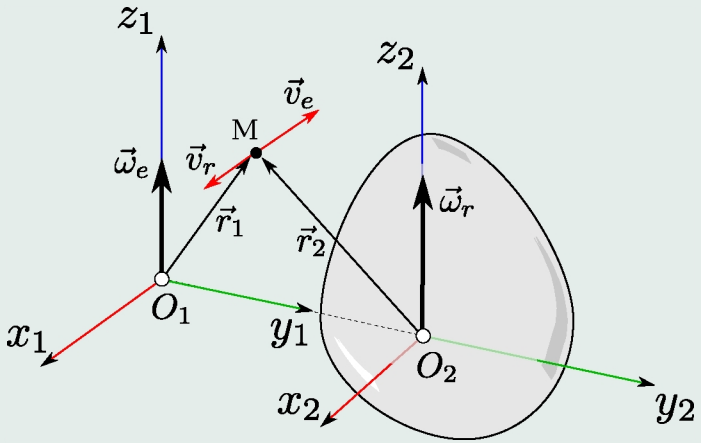


Рис. 3.24. Сложение скоростей при сложном вращении тела вокруг параллельных осей

отрезке O_1O_2 в относительном и переносном движении будут иметь противоположное направление и найдется такое положение этой точки при котором $\vec{v}_r = -\vec{v}_e$:

$$\omega_e O_1C = \omega_r O_2C \text{ или } \frac{O_1C}{O_2C} = \frac{\omega_r}{\omega_e}$$

То есть точка C делит отрезок O_1O_2 внутренним образом на части обратно пропорциональные модулям угловых скоростей вращений.

При разнонаправленных угловых скоростях составляющих вращений мгновенная ось результирующего вращения лежит вне отрезка O_1O_2, но на этой же прямой. Пусть угловая скорость относительного вращения больше чем угловая скорость переносного вращения. Тогда мгновенный центр скоростей лежит на прямой отрезка O_1O_2 со стороны системы $O_2x_2y_2z_2$ и:

$$\omega_r O_2C = \omega_e O_1C \text{ или } \frac{O_1C}{O_2C} = \frac{\omega_r}{\omega_e}$$

То есть точка C делит отрезок O_1O_2 внешним образом на части обратно пропорциональные модулям угловых скоростей вращений.

Используя полученный результат, скорость любой точки M можно записать следующим образом (рисунок 3.24):

$$\vec{v} = \vec{\omega}_e \times \vec{r}_1 + \vec{\omega}_r \times \vec{r}_2 = \vec{\omega}_e \times (\overrightarrow{O_1C} + \vec{\rho}) + \vec{\omega}_r \times (\overrightarrow{O_2C} + \vec{\rho}) \qquad (3.30)$$

Так как точка C является мгновенным центром скоростей, то:

$$\vec{v}_C = \omega_e \times \overrightarrow{O_1C} + \omega_r \times \overrightarrow{O_2C} = 0,$$

поэтому выражение (3.30) примет следующий вид:

$$\vec{v} = \vec{\omega}_e \times \overrightarrow{O_1C} + \vec{\omega}_e \times \vec{\rho} + \vec{\omega}_r \times \overrightarrow{O_2C} + \vec{\omega}_r \times \vec{\rho}) = (\vec{\omega}_e + \vec{\omega}_r) \times \vec{\rho}.$$

Таким образом, *совокупность двух вращений, происходящих вокруг параллельных осей, но не представляющих собой пары вращений, приводится к одному вращению, мгновенная ось которого делит внутренним или внешним образом расстояние между осями составляющих вращений на части,*

обратно пропорциональные модулям угловых скоростей. Угловая скорость результирующего вращения равна векторной сумме угловых скоростей составляющих вращений [1].

3.7.5. Сложение поступательных и вращательных движений

3.7.5.1. Частный случай 1, кинематический винт

Пусть тело двигается поступательно в подвижной системе координат $O_2x_2y_2z_2$ с постоянной скоростью v_r. Подвижная система координат вращается вокруг оси O_1z_1 неподвижной системы с угловой скоростью ω_e так что $\vec{\omega}_e \parallel \vec{v}_r$. Скорость некоторой точки M твердого тела, определится следующим образом:

$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{\omega}_e \times \vec{r}.$$

Скорость точки M складывается из скорости параллельной оси O_1z_1 - $\vec{v}_r$ и скорости перпендикулярной плоскости, образованной осью O_1z_1 и точкой M. Траектория точки M принадлежит боковой поверхности цилиндра с осью, совпадающей с осью O_1z_1. Такое сложное движение тела называется кинематическим винтом, рисунок 3.25.

3.7.5.2. Частный случай 2

Рассмотрим случай когда вектор скорости относительного движения перпендикулярен оси переносного вращения: $\vec{v}_r \perp \vec{\omega}_e$. В соответствии с разделом

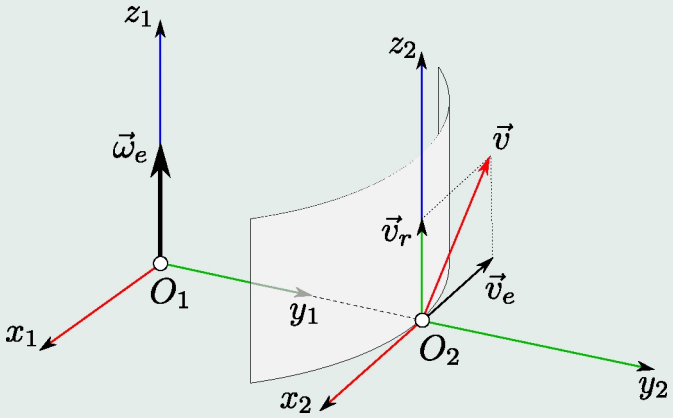


Рис. 3.25. Кинематический винт

3.7.4.1 мгновенно поступательное движение можно рассматривать как пару вращений, такой, что плоскость этой пары перпендикулярна скорости $\vec{v}_r$. Построим пару вращений так, чтобы угловая скорость одного из вращений пары $(\vec{\omega}', \vec{\omega}'')$ была равна по модулю, направлена в противоположную сторону угловой скорости $\vec{\omega}_e$ и проходила через ось вращения $O_1 z_1$. Чтобы эта пара вращений была эквивалента мгновенно поступательному движению со

скоростью $\vec{v}_r$, необходимо чтобы выполнялось условие:

$$\vec{v}_r = \overrightarrow{O_1O_3} \times \vec{\omega}''.$$

Так как угловая скорость пары вращений выбрана равной угловой скорости переносного движения, то расстояние O_1O_3 будет равно:

$$O_1O_3 = \frac{v_r}{\omega_e}$$

Таким образом, выполнено следующее преобразование:

$$(\vec{v}_r, \vec{\omega}_e) \to (\vec{\omega}', \vec{\omega}'', \vec{\omega}_e) \to \vec{\omega}'',$$

или *результирующее движение эквивалентно одному вращению вокруг оси проходящей через точку O_3 с угловой скоростью исходного вращения $\vec{\omega}_e$*

3.7.5.3. Частный случай 3

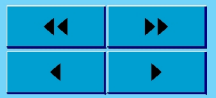
Пусть скорость поступательного движения направлена под углом ϕ к вектору угловой скорости $\vec{\omega}_e$. Скорость поступательного движения можно разложить на две составляющие: перпендикулярную и параллельную $\vec{\omega}_e$ и рассмотреть два движения, соответствующие первому и второму частным случаям:

$$(\vec{\omega}_e, \vec{v}_r) \to (\vec{\omega}_e, \vec{v}_1, \vec{v}_2),\ \vec{v}_1 \parallel \vec{\omega}_e, \vec{v}_2 \perp \vec{\omega}_e \to (\vec{v}_1, \vec{\omega}'', \vec{\omega}', \vec{\omega}_e) \to (\vec{v}_1, \vec{\omega}'').$$

Таким образом, результирующие движение будет мгновенно-винтовым.

Часть II

Динамика



Глава 4

Основные понятия и задачи динамики

В кинематике движение рассматривалось само по себе без исследования причин его вызывающих. В статике рассматривается равновесие систем под действием сил и не рассматривается механическое движение. В динамике же рассматривается связь между силами, действующими на точку или систему и движением точки или системы. *Динамика* - раздел механики, в котором изучается движение механических систем под действием сил [?].

Сила - векторная величина, являющаяся мерой механического действия одного материального тела на другое. Это действие вызывает изменение скоростей точек тела или его деформацию [?]. В каждый момент времени сила

характеризуется направлением в пространстве, величиной и точкой приложения.

Для измерения силы её сравнивают с некоторой силой, выбранной за единицу измерения. В международной системе единиц измерения физических величин (СИ) за единицу силы принят один ньютон. В технической системе единиц МКГСС за единицу силы принят одна килограмм сила (1кГ или 1кгс), $1\text{кгс} \approx 9,81\text{н}$.

Поскольку сила есть векторная величина, то задать силу можно при помощи её проекций на оси выбранной системы координат:

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k},$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - орты (единичные векторы) осей системы координат.

Совокупность нескольких сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n)$, называется *системой сил*. Если не нарушая состояния тела, одну систему систему сил можно заменить на другую и наоборот, то такие системы сил называются *эквивалентными*:

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n) \sim (\vec{P}_1, \vec{P}_2, \ldots, \vec{P}_n).$$

Если система сил эквивалентна одной силе, то эта сила называется *равнодействующей*:

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n) \sim= \vec{R}.$$

Система сил, эквивалентная нулю, называется *уравновешенной*.

При рассмотрении систем точек различают внешние и внутренние силы. *Внешняя сила* - сила, действующая на какую-либо материальную точку системы со стороны тел, не принадлежащих рассматриваемой механической

системе. *Внутренняя сила* - сила, действующая на какую либо материальную точку механической системы со стороны других материальных точек, принадлежащих рассматриваемой механической системе.

Свободное твердое тело - твердое тело на перемещение которого не наложено никаких ограничений.

Несвободное твердое тело - твердое тело, на перемещение которого наложены ограничения.

4.1. Связи

Связи - ограничения, налагаемые на положения и скорости точек механической системы, которые должны выполнятся при любых действующих на систему силах.

Все силы, действующие на несвободное тело можно разделить на 2 категории: *активные* силы, не зависящие от связей, и собственно *реакции связи*. Реакции связи называют пассивными силами, так как они возникают только при действии *активных* сил.

Реакции связей (силы реакции) - силы, действующие на материальные точки механической системы со стороны материальных тел, осуществляющих связи, наложенные на эту систему.

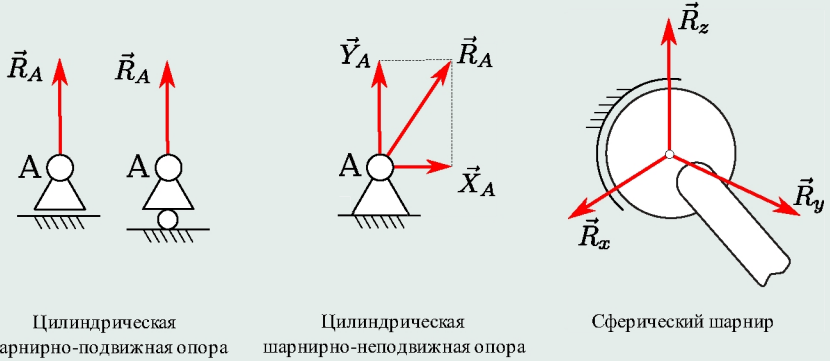


Рис. 4.1. Виды связей

4.1.1. Гладкая поверхность

Если тело опирается на гладкую поверхность, то эта поверхность ограничивает перемещение вдоль нормали к поверхности. Реакция идеально гладкой поверхности направлена по общей нормали соприкасающихся поверхностей.

4.1.2. Сферический шарнир

Сила реакции сферического шарнира проходит через центр шарнира. Направление реакции может быть любым и определяется внешними силами, поэтому силу реакции сферического шарнира можно разложить на три

составляющие: R_x, R_y, R_z.

4.1.3. Цилиндрическая шарнирно-неподвижная опора

Реакция такой опоры проходит через ось вращения и может иметь произвольное направление в плоскости перпендикулярной оси вращения.

4.1.4. Цилиндрическая шарнирно-подвижная опора

Этот вид связи ограничивает перемещение тела только вдоль одной оси, поэтому сила реакции направлена вдоль этого направления.

4.2. Аксиома связей

Всякое несвободное тело можно рассматривать как свободное, если действия связей заменить их реакциями, приложенными к данному телу.

4.3. Аксиомы механики

Две силы, приложенные к твердому телу, будут эквивалентны нулю, если они равны по модулю, действуют вдоль одной прямой и противоположно-направлены.

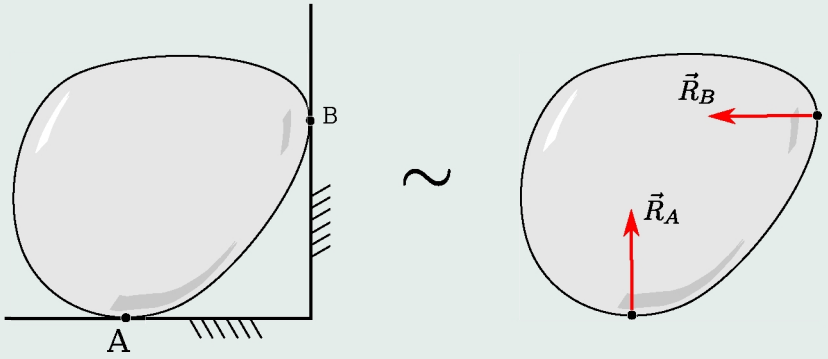


Рис. 4.2. Аксиома связей

Не нарушая состояния твердого тела к нему можно прикладывать или отбрасывать системы сил эквивалентные нулю.

Не нарушая состояния тела, точку приложения можно переносить вдоль линии её действия.

Не меняя состояние твердого тела, две силы, приложенные к одной его точке, можно заменить одной равнодействующей силой, приложенной в той-же точке и равной их геометрической сумме:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2,\ |\vec{R}| = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha},$$

где: α - угол между векторами $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$. Эта аксиома позволяет раскладывать силу на две или три составляющих.

Равновесие деформируемого твердого тела не нарушится, если жестко связать его точки и считать тело абсолютно твердым.

Принцип инерции. Изолированная материальная точка находится в состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения. Изолированная материальная точка - точка, которая не взаимодействует с другими телами или когда силы, действующие на эту точку уравновешиваются.

Системы отсчета в которых справедлив принцип инерции называются *инерциальными*.

В инерциальной системе отсчета вектор ускорения материальной точки пропорционален вектору силы, действующей на эту точку:

$$\vec{F} = m\vec{a}.$$

Силы взаимодействия двух тел равны по модулю и направлены по одной прямой в противоположные стороны.

При действии на материальную точку нескольких сил её ускорение равно сумме ускорений, которые имела бы точка при действии каждой силы в отдельности.

4.4. Момент силы

4.4.1. Момент силы относительно точки.

Момент силы относительно точки называется вектор, модуль которого равен произведению модуля силы на плечо - кратчайшее расстояние от точ-

ки до линии действия силы. Направление вектора момента силы перпендикулярно плоскости, проходящей через точку и линию действия силы, в том направлении, в котором вращение, совершаемое силой вокруг точки происходит по часовой стрелки. Зная радиус-вектор $\vec{r}$ точки приложения силы $\vec{F}$,

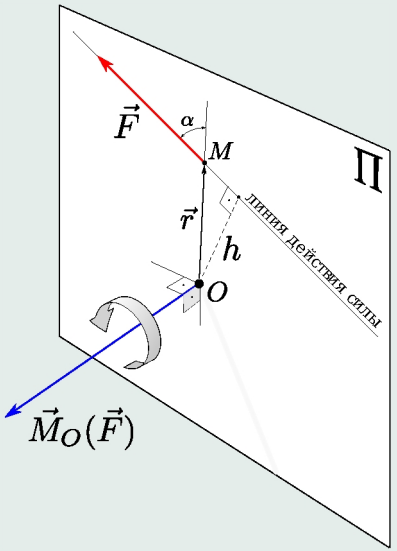


Рис. 4.3. Момент силы относительно точки

момент силы относительно точки выражается следующим образом:

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}.$$

Действительно, модуль этого векторного произведения определяется как:

$$|\vec{M}_O| = |\vec{r} \times \vec{F}| = |\vec{r}||\vec{F}| \sin \alpha.$$

В соответствии с рисунком 4.3 $|\vec{r}| \sin \alpha = h$:

$$|\vec{M}_O| = |\vec{F}|h.$$

Вектор $\vec{M}_O$, как и результат векторного произведения, перпендикулярен векторам $\vec{r}$ и $\vec{F}$, которые принадлежат плоскости П. Направление вектора $\vec{M}_O$ таково, что глядя по направлению этого вектора, кратчайшее вращение от $\vec{r}$ к $\vec{F}$ происходит по часовой стрелке. Другими словами, вектор $\vec{M}_O$ достраивает систему векторов $(\vec{r}, \vec{F})$ до правой тройки.

Зная координаты точки приложения в выбранной системе координат и проекцию силы на эти оси, момент силы может быть определен следующим образом:

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{pmatrix} = (yF_z - zF_y)\vec{i} + (zF_x - xF_z)\vec{j} + (xF_y - yF_x)\vec{k}.$$

4.4.2. Момент силы относительно оси.

Проекция момента силы относительно точки на некоторую ось, проходящую через эту точку называется моментов силы относительно оси. Этот момент силы не зависит от положения точки O на этой оси.

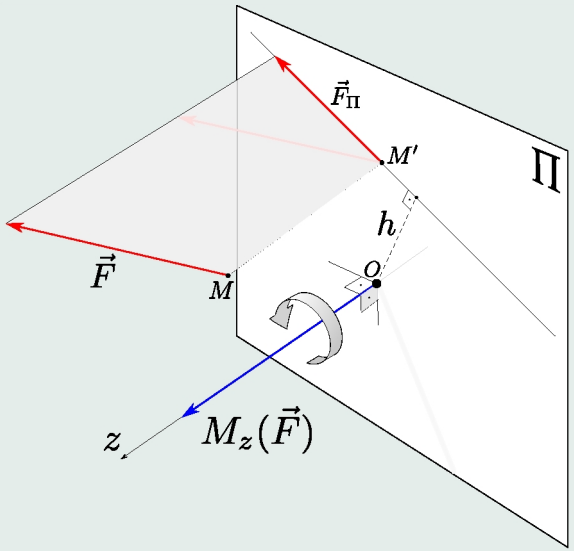


Рис. 4.4. Момент силы относительно оси

Момент силы относительно оси вычисляется как момент проекции силы $\vec{F}$ на плоскость П, перпендикулярную оси, относительно точки пересечения оси с плоскостью П (рисунок 4.4):

$$M_z(\vec{F}) = M_z(\vec{F}_\Pi) = \pm F_\Pi h.$$

Знак момента определяется направлением вращения, которое стремится придать телу сила $\vec{F}_\Pi$. Если, глядя по направлению оси Oz сила вращает тело

по часовой стрелке, но момент берется со знаком “плюс”, иначе “минус”.

4.5. Силы трения

Из опыта известно, что при движении одного тела по поверхности другого возникает сила сопротивления их относительному скольжению, которая называется *силой трения*. Сила трения определяется несколькими причинами, главная из которых связана шероховатостью контактирующих тел. В механике силу трения определяют используя эмпирические данные, которые могут быть выражены следующим образом.

При стремлении сдвинуть неподвижное тело в плоскости соприкосновения возникает сила трения величина которой может принимать любые значения от нуля до некоторого критического значения - предельной силы трения $F_{\text{пр}}$. Величина этой силы определяется внешними силами, действующими на тело. Предельная сила трения пропорциональна нормальной реакции:

$$F_{\text{пр}} = f_s N,$$

где f_s - статический коэффициент трения, определяемый опытным путем. Коэффициент зависит от материалов соприкасающихся тел, состояния поверхностей, температуры. Из последнего выражения следует, что сила трения не зависит от размера соприкасающихся поверхностей. Таким образом при равновесии сила трения не превышает предельной силы трения:

$$F \leq f_s N.$$

Примеры коэффициентов трения для разных материалов приведены в следующей таблице.

Дерево по дереву	$f_s = (0,4 \ldots 0,7)$
Металл по металлу	$f_s = (0,15 \ldots 0,25)$
Сталь по льду	$f_s = 0,027$

При движении сила трения направлена в сторону противоположную скорости и равна:

$$F = fN,$$

где f - динамический коэффициент трения скольжения, который также определяется опытным путем.

4.5.1. Реакции шероховатых связей

Реакция шероховатой связи в отличии от реакции будет слагаться из двух компонент: нормальной реакции $\vec{N}$ и силы трения $\vec{F}$. При неподвижном теле, сила трения будет расти от нуля до некоторого предельного значения, соответственно будет меняться и угол наклона результирующей реакции $\vec{R}$ от нуля до ϕ_0. Этот наибольший угол называется углом трения:

$$tg\phi_0 = \frac{F_{\text{пр}}}{N}.$$

Учитывая, что $F_{\text{пр}} = f_s N$:

$$tg\phi_0 = f_s.$$

4.5.2. Трение качения

Трением качения называется сопротивление, возникающее при качении одного тела по поверхности другого. Рассмотрим движение цилиндрического катка по плоско поверхности, рисунок 4.5. Вследствие деформации тел

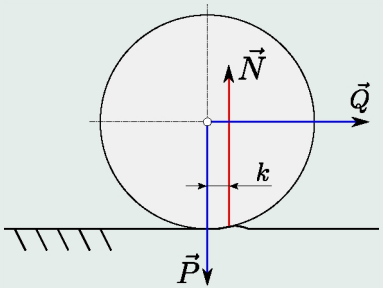


Рис. 4.5. Трение качения

сила реакции опоры N оказывается смещённой и не проходит через ось катка. В состоянии покоя это смещение увеличивается с увеличением внешней силы $\vec{Q}$ и при достижении предельной величины $Q_{\text{пр}}$ это смещение достигает некоторого значения k, которое называется коэффициентом трения качения:

$$Q_{\text{пр}} = \frac{k}{R}N,$$

где R - радиус катка. Движение начинается при $Q > Q_{\text{пр}}$. Примеры коэффициентов трения для разных материалов приведены в следующей таблице.

Дерево по дереву	$k = (0,05 \ldots 0,08)$ см
Сталь мягкая по стали	$k = 0,005$ см
Сталь закаленная по стали	$k = 0,001$ см

Глава 5

Системы сил

5.1. Система сходящихся сил

Теорема 5. *Линии действия системы сходящихся сил пересекаются в одной точке. Систему сходящихся сил можно заменить одной эквивалентной силой - равнодействующей, проходящей через точку пересечения исходной системы сил.*

Доказательство. В соответствии с аксиомой о переносе точки приложения силы, перенесем точки приложения всех сил в точку пересечения линий их действий. Последовательно попарно складывая силы, используя аксиому о сложении двух сил, приложенных в одной точке, получим равнодействую-

щую силу R:

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \ldots, \vec{F}_n) \sim (\vec{R}_{12}, \vec{F}_3, \ldots, \vec{F}_n) \sim (\vec{R}_{123}, \ldots, \vec{F}_n) \sim \vec{R}.$$

□

Вектор равнодействующей силы будет равен сумме векторов всех сил системы:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i. \tag{5.1}$$

Если известны проекции сил системы на оси координат, то можно найти проекции равнодействующей на те-же оси. Проецируя уравнение (5.1) на оси выбранной системы координат, получим:

$$\begin{aligned} R_x &= \textstyle\sum_{i=1}^{n} F_{ix}, \\ R_y &= \textstyle\sum_{i=1}^{n} F_{iy}, \\ R_z &= \textstyle\sum_{i=1}^{n} F_{iz}. \end{aligned}$$

Далее модуль равнодействующей:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}.$$

5.2. Система параллельных сил

Рассмотрим тело к которому приложены две одинаково направленные силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$. Найдем равнодействующую этой системы сил.

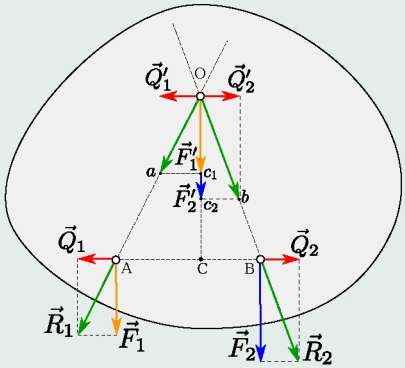


Рис. 5.1. Сложение параллельных сил

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \sim (\vec{F}_1, \vec{Q}_1, \vec{Q}_2, \vec{F}_2) \sim (\vec{R}_1, \vec{R}_2) \sim (\vec{F}'_1, \vec{Q}'_1, \vec{Q}'_2, \vec{F}'_2) \sim (\vec{F}'_1, \vec{F}'_2),$$

где $(\vec{Q}_1, \vec{Q}_2)$ и $(\vec{Q}'_1, \vec{Q}'_2)$ - две системы сил, эквивалентные нулю. Очевидно, что:

$$\vec{F}'_1 = \vec{F}_1 \text{ и } \vec{F}'_2 = \vec{F}_2,$$

поэтому равнодействующая системы сил $(\vec{F}'_1, \vec{F}'_2)$ будет определятся как следующая векторная сумма:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2.$$

Направление равнодействующей будет параллельно направлению исходных сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$. Линия действия равнодействующей пересечет отрезок AB в

Домашняя
Назад
На весь экран
Закрыть

точке C, положение которой определится из подобия треугольников AOC, aOc_1 и BOC, bOc_2:

$$\frac{F_1}{OC} = \frac{ac_1}{AC}, \frac{F_2}{OC} = \frac{bc_2}{CB} \Rightarrow \frac{F_1}{F_2} = \frac{BC}{AC}. \tag{5.2}$$

Система двух параллельных сил, направленных в одну сторону, имеет равнодействующую, параллельную этим силам, её модуль равен сумме модулей слагаемых, а линия её действия делит расстояние между точками приложения слагаемых сил внутренним образом на части, обратно пропорциональные модулям этих сил.

Если две параллельные силы направлены в противоположные стороны, то одну из них можно заменить на эквивалентную систему двух сил, направленных в одну сторону. Одну из сил эквивалентной пары поместим в точку B и пусть эта будет равна силе $\vec{F}_2$ по модулю и направлена в противоположную сторону:

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \sim (\vec{R}, \underbrace{\vec{F}_2', \vec{F}_2}_{0}) \sim \vec{R}.$$

Величина равнодействующей определяется следующим образом:

$$R = F_1 - F_2.$$

Линия действия равнодействующей пересечет прямую отрезка AB в точке C, положение которой можно определить из соотношения, которое было рассмотрено выше (5.2):

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{BC}{AC}.$$

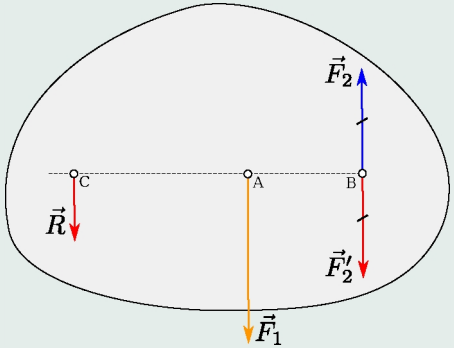


Рис. 5.2. Сложение параллельных сил

Две не равные по модулю противоположно направленные параллельные силы имеют равнодействующую, параллельную этим силам. Модуль равнодействующей равен разности модулей слагаемых, а линия действия делит расстояние между точками приложения слагаемых сил внешним образом на части обратно пропорциональные модулям этих сил.

5.3. Пара сил

Если две силы параллельны направлены в разные стороны и имеют одинаковый модуль, то такая система сил называет *парой сил* или просто *парой*. Пара сил представляет собой неуравновешенную систему сил, которую нель-

зя свести к равнодействующей.

Пусть к телу приложена пара сил. Выберем в пространстве произвольный полюс - точку O и найдем сумму моментов сил пары относительно этой точки (рисунок 5.3):

$$\vec{M}_O(\vec{F}) + \vec{M}_O(\vec{F}') = \overrightarrow{OA} \times \vec{F} + \overrightarrow{OB} \times \vec{F}' = \overrightarrow{OA} \times \vec{F} - \overrightarrow{OB} \times \vec{F} = \\ = (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}) \times \vec{F} = \overrightarrow{BA} \times \vec{F}. \quad (5.3)$$

Таким образом, момент пары сил не зависит от выбора полюса а определяется расстоянием между линиями действия сил - плечом пары - и величиной силы:

$$M(\vec{F}, \vec{F}') = hF.$$

Момент пары представляет собой вектор, перпендикулярный плоскости пары, равный по модулю произведению модуля одной из сил пары на плечо пары и направленный в сторону, откуда вращение пары видно происходящем против хода часовой стрелки. Вектор момента пары сил есть *свободный вектор*: у него нет точки приложения как у вектора силы.

Пара сил будет эквивалентна нулю только в случае если момент этой пары равен нулю.

5.4. Параллельный перенос силы

Силу приложенную к какой либо точке твердого тела можно перенести с сохранением направления в другую точку тела с добавлением пары сил,

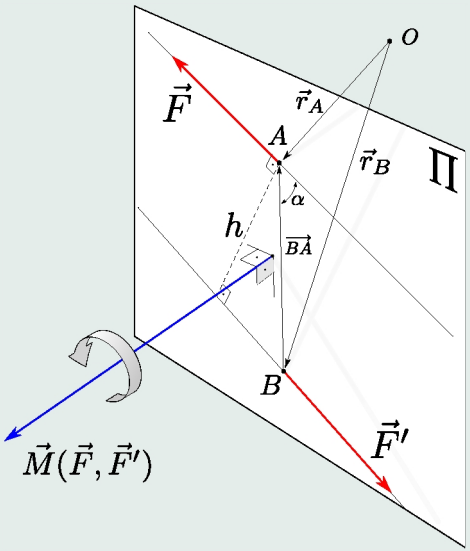


Рис. 5.3. Момент пары сил

момент которой равен моменту данной силы относительно новой точки приложения (рисунок 5.4):

$$\vec{F} \sim (\vec{F}', \vec{F}, \vec{F}'') \sim (\vec{F}', \underbrace{(\vec{F}, \vec{F}'')}_{\text{пара сил}}).$$

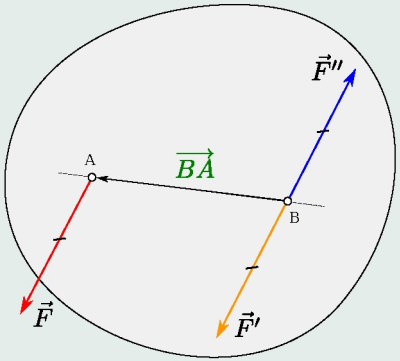


Рис. 5.4. Параллельный перенос силы

Момент пары $(\vec{F}, \vec{F}'')$ определяется следующим образом:

$$\vec{M}(\vec{F}, \vec{F}'') = \overrightarrow{BA} \times F.$$

5.5. Произвольная система сил

Рассмотрим твердое тело к которому приложена произвольная система сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \ldots, \vec{F}_n)$.

Главный вектор системы сил - величина, равная сумме всех сил систе-

мы:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i.$$

Сумму моментов сил относительно какого либо полюса называют *главным моментом системы* сил относительно этого полюса.

Теорема 6. *Теорема Пуансо. Всякую пространственную систему сил можно заменить эквивалентной системой, состоящей из одной силы, приложенной в какой-либо точке тела, называемой центром приведения, и равной главному вектору данной системы сил, и одной пары сил, момент которой равен главному моменту всех сил относительно выбранного центра приведения:*

$$\vec{F}_O = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$
$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_O(\vec{F}_i) = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_k \times \vec{F}_k$$

Введя систему отсчета в центре приведения, зная координаты точек приложения всех сил, можно найти проекции главного вектора и главного момента на оси системы координат:

$$F_{Ox} = \sum_{i=1}^{n} F_{ix}, \qquad F_{Oy} = \sum_{i=1}^{n} F_{iy}, \qquad F_{Oz} = \sum_{i=1}^{n} F_{iz},$$
$$M_{Ox} = \sum_{i=1}^{n} M_{Ox}(\vec{F}_i), \quad M_{Oy} = \sum_{i=1}^{n} M_{Oy}(\vec{F}_i), \quad M_{Oz} = \sum_{i=1}^{n} M_{Oz}(\vec{F}_i)$$

Проекции вектора главного момента могут вычислены следующим образом:

$$\begin{aligned} M_{Ox} &= \sum_{i=1}^{n} (y_i F_{iz} - z_i F_{iy}), \\ M_{Oy} &= \sum_{i=1}^{n} (z_i F_{ix} - x_i F_{iz}), \\ M_{Oz} &= \sum_{i=1}^{n} (x_i F_{iy} - y_i F_{ix}). \end{aligned}$$

Вычислив проекции главного вектора и главного момента, легко определить и модуль:

$$F_O = \sqrt{F_{Ox}^2 + F_{Oz}^2 + F_{Oz}^2},\ M_O = \sqrt{M_{Ox}^2 + M_{Oz}^2 + M_{Oz}^2}.$$

Если к телу приложена произвольная система сил, то угол между главным вектором и главным моментом может быть любым, этот угол можно определить, записав их скалярное произведение:

$$\vec{F_O} \cdot \vec{M_O} = F_O M_O \cos(F_O, M_O), \Longrightarrow \cos(F_O, M_O) = \\ = \frac{\vec{F_O} \cdot \vec{M_O}}{F_O M_O} = \frac{F_{Ox} M_{Ox} + F_{Oy} M_{Oy} + F_{Oz} M_{Oz}}{F_O M_O}. \quad (5.4)$$

5.5.1. Перемена центра приведения

Пусть пространственная система сил приведена к центру O и заменена результирующей силой $\vec{R}$ и парой с моментом $\vec{M}_0$, который с направлением $\vec{R}$ образует некоторый угол α. Приведём все силы рассматриваемой системы к новому центру O'. Очевидно, что главный вектор сил не изменится при приведении к новому центру:

$$\vec{R'} = \sum \vec{F_i} = \vec{R}.$$

Главный момент изменится, поскольку изменится момент сил системы относительно нового центра:

$$\vec{M'} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r_i'} \times \vec{F_i} = \sum_{i=1}^{n} (\vec{r_i} - \vec{OO'}) \times \vec{F_i}$$

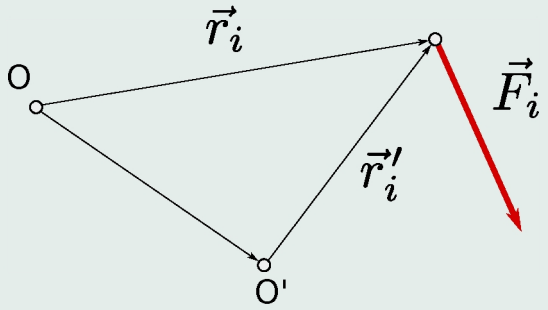


Рис. 5.5. Новый центр приведения

$$\vec{M}' = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i - \sum_{i=1}^{n} \vec{OO}' \times \vec{F}_i.$$

Первое слагаемое в последнем выражении представляет собой главный момент относительно старого центра, поэтому:

$$\vec{M}' = \vec{M} - \sum_{i=1}^{n} \vec{OO}' \times \vec{F}_i = \vec{M} - \vec{OO}' \times \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{M} + \vec{O'O} \times \vec{R}.$$

Таким образом, при изменении центра приведения главный момент изменится на величину, равную моменту главного вектора относительно нового центра приведения.

5.5.2. Теорема Вариньона

Теорема 7. *Если система сил имеет равнодействующую, то момент этой равнодейтсвующей относительно произвольного центра равен сумме моментов всех сил системы относительно того же центра.*

Доказательство. Пусть некотороая система сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$ имеет равнодействующую $\vec{R} = \sum \vec{F}_i$. Перенесем равнодействующую в произвольную точку O. При этом к системе добавится пара сил $(\vec{R}, \vec{R}'')$

$$\vec{M} = \mathrm{mom}_O \vec{R}$$

С другой стороны, M – это главный момент системы сил относительно центра O, равный сумме моментов всех сил относительно этого центра:

$$\vec{M} = \sum \mathrm{mom}_O \vec{F}_i.$$

Сравнивая два последних выражения, получаем теорему Вариньона:

$$mom_O \vec{R} = \sum \mathrm{mom}_O \vec{F}_i.$$

□

5.6. Условия равновесия систем сил

5.6.1. Условия равновесия произвольной системы сил

Поскольку при изменении центра приведения равнодействующая $\vec{R}$ не меняется, поэтому для того, чтобы система сил была в равновесии необхо-

димо, чтобы $\vec{R} = 0$. Если же $\vec{R} = 0$, то система сил приводится к одной паре, момент которой, в этом случае, не меняется при изменении центра приведеления, следовательно для равновесия необходимо, чтобы $\vec{M} = 0$. Таким образом имеются два векторных условия равновесия произвольной системы сил:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F_i} = 0$$

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{mom}_O \vec{F_i} = 0$$

Эти условия являются достаточными: если $\vec{R} = 0$, то система приводится к паре с моментом $\vec{M}$, если же $\vec{M} = 0$, то рассматриваемая система эквивалентна нулю.

Два векторных условия равновесия можно спроецировать на оси координат и получить шесть скалярных условий равновесия произвольной системы сил:

$$\sum F_{ix} = 0, \qquad \sum M_x(\vec{F_i}) = 0, \tag{5.5}$$

$$\sum F_{iy} = 0, \qquad \sum M_y(\vec{F_i}) = 0, \tag{5.6}$$

$$\sum F_{iz} = 0, \qquad \sum M_z(\vec{F_i}) = 0. \tag{5.7}$$

5.6.2. Условия равновесия плоской системы сил

Векторные условия равновесия плоской системы сил (положим, что все силы находятся в плоскости Oxy) необходимо спрецировать на три оси: первое векторное уравнение на оси x и y, второе уравнение – уравнение моментов – на ось z:

$$\sum F_{ix} = 0, \tag{5.8}$$

$$\sum F_{iy} = 0 \tag{5.9}$$

$$\sum M_z(\vec{F_i}) = 0. \tag{5.10}$$

Таким образом для равновесия плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы:

- сумма проекций всех сил на каждую из двух координатных осей, произвольно выбранных в плоскости действия сил, равнялась нулю;
- сумма моментов все сил относительно любого центра приведения равнялась нулю.

Необходимые и достаточные условия равновесия плоской системы сил можно выразить в двух других формах:

1) Для равновесия плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы сумма моментов всех сил относительно каждого из трех произвольных, но не лежащих на одной прямой центров (A, B, C) равнялась нулю

(теорема о трех моментах):

$$\sum M_A(\vec{F}_i) = 0,\ \sum M_B(\vec{F}_i) = 0,\ \sum M_C(\vec{F}_i) = 0.$$

2) Для равновесия плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы сумма моментов всех сил относительно двух произвольных центров и сумма проекций всех сил на произвольную ось, не перпендикулярную к прямой, соединяющей эти центры, равнялись нулю:

$$\sum M_A(\vec{F}_i) = 0,\ \sum M_B(\vec{F}_i) = 0,\ \sum (F_i)_l = 0.$$

5.6.3. Условия равновесия параллельной системы сил

Пусть силы параллельной системы сил направлены вдоль оси z. Тогда, условия равновесия плоской системы сил запишутся следующим образом:

$$\sum F_{iz} = 0,\ \sum M_x(\vec{F}_i) = \sum y_i F_{iz} = 0,\ \sum M_y(\vec{F}_i) = -\sum x_i F_{iz} = 0.$$

Для *плоской* системы параллельных сил остается только два условия равновесия:

$$\sum F_{iz} = 0,\ \sum M_y(\vec{F}_i) = \sum x_i F_{iy} = 0.$$

Другая форма условий равновесия

$$\sum M_{yA}(\vec{F}_i) = 0,\ \sum M_{yB}(\vec{F}_i) = 0.$$

где центры A и B не лежат на прямой параллельной силам.

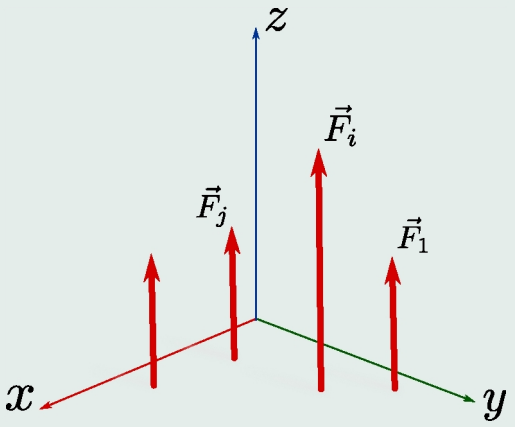


Рис. 5.6. Система параллельных сил

Глава 6

Динамика точки

Основное уравнение динамики. Первая (обратная) задача динамики. Вторая (прямая) задача динамики. Относительное движение материальной точки. Уравнение относительного движения.

6.1. Основное уравнение динамики

Фундаментальное значение для всей динамики имеет следующий закон (второй закон Ньютона): сила, действующая на материальную точку, сообщает ей ускорение, которое в инерциальной системе отсчета пропорциональ-

но величине силы и имеет направление силы:

$$\boxed{m\vec{a} = \vec{F}} \tag{6.1}$$

6.2. Дифференциальное уравнение движения материальной точки

Пусть положение точки M в инерциальной системе отсчета задается вектором $\vec{r}$ и пусть на точку действует сила, зависящая в общем случае от положения точки, ее скорости и времени. Основное уравнение динамики для точки M можно записать в виде:

$$\boxed{m\frac{d^2r}{dt^2} = \vec{F}(\vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dt}, t)} \tag{6.2}$$

Это уравнение есть векторное *дифференциальное уравнение движения материальной точки*. Это уравнение можно проецировать на оси декартовой системы координат и получить три скалярных уравнения:

$$m\ddot{x} = F_x,\ m\ddot{y} = F_y,\ m\ddot{z} = F_z.$$

6.3. Две задачи динамики

Из основного закона динамики можно вывести две категории задач. *Первая задача динамики* заключается в определении сил по заданному движе-

нию тела. Т.е необходимо определить силы, которые под действием которых происходит некоторое заданное движение. *Вторая задача динамики* заключается в определении движения при заданных силах.

6.3.1. Первая задача динамики

Первая задача динамики предполагает заданным движение материальной точки по которому необходимо найти силы, обеспечивающие это движение.

Пример 7. *Материальная точка движется в плоскости xy. Закон движения точки задан в виде [2]:*

$$x(t) = a\sin(kt+\varepsilon),\ \ y(t) = b\sin(kt+\delta)+c,\ \ a,b,\varepsilon,delta,c = const.$$

Найти силу, под действием которой происходит это движение.

Подставляя в уравнение (6.2) выражения для координат, получим:

$$F_x = -mk^2\underbrace{a\sin(kt+\varepsilon)}_{x(t)},\ \ F_y = -mk^2\underbrace{b\sin(kt+\delta)}_{y(t)-c} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_X = -mk^2x(t),\ \ F_y = -mk^2y(t)+mk^2c. \quad (6.3)$$

Вектор силы можно записать следующим образом:

$$\vec{F} = -mk^2\vec{r}+mk^2\vec{j},$$

где $\vec{r} = x\vec{i}+y\vec{j}$.

6.3.2. Вторая задача динамики

Вторая задача динамики предполагает известными силы, действующие на материальную точку, по которым необходимо найти закон движения точки. В простейшем случае сила в правой части дифференциальных уравнений движения может зависеть: *от времени*, *от положения точки* и от *скорости точки*. В общем случае вторая задача динамики сводится к решению системы *дифференциальных уравнений*:

$$\begin{cases} m\ddot{x} &= F_x(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z},t), \\ m\ddot{y} &= F_y(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z},t), \\ m\ddot{z} &= F_z(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z},t). \end{cases} \tag{6.4}$$

Общее решение системы дифференциальных уравнений (6.4) имеет следующий вид:

$$\begin{cases} x &= x(t,C_1,C_2,C_3,C_4,C_5,C_6), \\ y &= y(t,C_1,C_2,C_3,C_4,C_5,C_6), \\ z &= z(t,C_1,C_2,C_3,C_4,C_5,C_6). \end{cases} \tag{6.5}$$

В функции (6.8) входят 6 постоянных интегрирования, таким образом, функции (6.8) определяют множество решений дифференциальных уравнений (6.4) при разных начальных условиях движения. Например, траектория материальной точки под действием силы тяжести будет зависеть от начального положения, начальной скорости и направления скорости ее движения. Задавшись начальными значениями положения и скорости точки можно определить конкретный вид закона движения, траектории. Начальный условия

имеют следующий вид:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x(0) & = & x_0, & y(0) & = & y_0, & z(0) & = & z_0, \\ \dot{x}(0) & = & \dot{x}_0, & \dot{y}(0) & = & \dot{y}_0, & \dot{z}(0) & = & \dot{z}_0. \end{array}\right. \tag{6.6}$$

Используя начальные условия, можно определить постоянные интегрирования, входящие в выражения (6.8). Подставив в значения координат и скоростей для t=0, получим:

$$\left\{\begin{array}{ll} x_0 = x(0,_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6), & \dot{x}_0 = \dot{x}(0,_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6), \\ y_0 = y(0,_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6), & \dot{y}_0 = \dot{y}(0,_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6), \\ z_0 = z(0,_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6), & \dot{z}_0 = \dot{z}(0,_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6). \end{array}\right. \tag{6.7}$$

Уравнения (**??**) представляют собой систему уравнений относительно постоянных интегрирования, решая которые, получим:

$$C_i = f_i(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0), \ i = 1, \ldots, 6.$$

Подставив найденные значения C_i в (6.8), получим решение:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & F_1(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0), \\ y & = & F_2(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0), \\ z & = & F_3(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0). \end{array}\right. \tag{6.8}$$

Пример 8. *Движение точки под действием постоянной силы. Рассмотрим задачу баллистики: получим уравнения движения материальной точки под действием силы тяжести. Поместим начало координат в точку в*

которой находится точка в начальный момент времени. Направим ось Ox по горизонтали, а ось Oy вертикально вверх. Дифференциальные уравнения движения материальной точки имеют вид:

$$\left\{ \begin{array}{rcccl} m\ddot{x} & = & \sum F_{ix} & = & 0, \\ m\ddot{y} & = & \sum F_{iy} & = & -mg. \end{array} \right. \tag{6.9}$$

Проинтегрируем первое дифференциальное уравнение:

$$m\ddot{x} = 0 \Rightarrow \dot{x} = C_1 = const \Rightarrow x = C_1 t + C_2,$$

где C_1, C_2 - постоянные интегрирования, которые определим из начальных условий. Пусть тело брошено под углом α к горизонту с начальной скоростью v_0 (движение происходит в плоскости Oxy). Проекция начальной скорости на горизонтальную ось определится следующим образом:

$$v_{0x} = v_0 \cos\alpha.$$

Подставим начальные условия в полученное решение:

$$\begin{array}{lcl} \dot{x}(0) = v_{0x} & \Rightarrow & C_1 = v_0 \cos\alpha, \\ x(0) = 0 & \Rightarrow & C_1 \cdot 0 + C_2 = 0, \Rightarrow C_2 = 0. \end{array}$$

Проинтегрируем второе дифференциальное уравнение системы (6.9):

$$m\ddot{y} = -mg \Rightarrow \ddot{y} = -g \Rightarrow \dot{y} = C_3 - gt \Rightarrow y = C_4 + C_3 t - \frac{gt^2}{2}.$$

Постоянные интегрирования C_3 и C_4 определим из начальных условий:

$$\dot{y}(0) = v_{y0} = v_0 \sin\alpha \Rightarrow C_3 - g \cdot 0 = v_0 \sin\alpha \Rightarrow C_3 = v_0 \sin\alpha,$$
$$y(0) = 0 \Rightarrow C_4 + C_3 \cdot 0 - \frac{g \cdot 0^2}{2} = 0 \Rightarrow C_4 = 0.$$

Таким образом решение системы дифференциальных уравнений (6.9) имеет вид:

$$x = v_0 t \cos\alpha, \ y = v_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2}.$$

Исключив из решения время, получим уравнение траектории:

$$y = x \operatorname{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha}.$$

Траекторией точки является парабола, вершина которой находится в наивысшей точке и ветви которой направлены вниз.

Проекции скорости точки на оси координат меняются по следующему закону:

$$v_x = v_0 \cos\alpha, \ v_y = v_0 \sin\alpha - gt.$$

То есть, горизонтальное движение равномерное, а вертикальное - равнопеременное.

Пример 9. *Движение материальной точки под действием силы, зависящей от скорости точки. Рассмотрим вертикальное движение точки под действием силы тяжести с учетом сопротивления воздуха. Пусть движение точки начинается в момент времени $t = 0$ с нулевой начальной*

скоростью вниз под действием силы тяжести. Ось Oy направим вертикально вниз, начало координат совпадает с начальным положением точки. Таким образом, начальные условия имеют следующий вид:

$$t = 0, y_0 = 0, \dot{y}_0 = 0.$$

Предположим, что сопротивление воздуха R пропорционально скорости точки:

$$R = \alpha v.$$

Тогда на материальную точку будет действовать сила mg, направленная вниз и сила R, направленная вверх - в противоположную сторону вектора скорости точки. Дифференциальное уравнение движения в проекции на ось Oy будет иметь вид:

$$m\ddot{y} = mg - \alpha v, \text{ или } \ddot{y} = -g - \alpha v.$$

Произведя замену $\dot{y} = v$, понизим порядок уравнения:

$$\frac{dv}{dt} = g - kv,$$

Проинтегрируем это уравнение, разделяя переменные:

$$\frac{dv}{g - kv} = dt$$

Введя новую переменную $u = g - kv$, получим следующее выражение:

$$-\frac{1}{k}\frac{du}{u} = dt \Rightarrow \ln u = -kt + C_1 \Rightarrow \ln(g - kv) = -kt + C_1.$$

Определим постоянную интегрирования из начальных условий:

$$\ln(g - kv_0) = -k \cdot 0 + C_1 \Rightarrow \ln g = C_1,$$

после чего зависимость скорости от времени примет вид

$$\ln(g - kv) = -kt + \ln g, \text{ или } \ln\frac{g - kv}{g} = -kt.$$

Из последнего выражения, найдем зависимость скорости от времени:

$$\ln\frac{g - kv}{g} = -kt \Rightarrow \frac{g - kv}{g} = e^{-kt} \Rightarrow v = \frac{g}{k}(1 - e^{-kt}).$$

При стремлении времени к бесконечности, скорость стремится к g/k. Это объясняется тем, что сила сопротивления возрастая воздуха стремится к силе тяжести и следовательно сумма сил, действующих на точку стремится к нулю. Проинтегрируем последнее выражение для получения уравнения движения точки:

$$dy = \frac{g}{k}(1 - e^{-kt})dt \Rightarrow y = \frac{g}{k}t + \frac{g}{k^2}e^{-kt} + C_2.$$

Постоянную интегрирования найдем, используя начальные условия:

$$y(0) = 0 \Rightarrow \frac{g}{k} \cdot 0 + \frac{g}{k^2}e^{-k\cdot 0} + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = -\frac{g}{k^2}.$$

После подстановки постоянной интегрирования, уравнение движения точки примет вид:

$$y = \frac{g}{k}t + \frac{g}{k^2}\left(e^{-kt} - \frac{g}{k^2}\right).$$

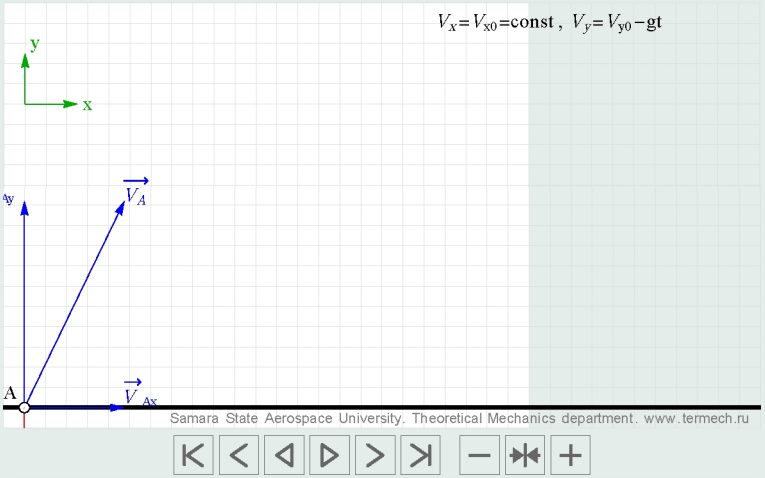


Рис. 6.1. Движение точки в однородном гравитационном поле - задача баллистики

6.4. Относительное движение материальной точки

В главе освященной кинематике точки были получены выражения связывающие относительную и абсолютную скорости и ускорения материальной точки. Эти результаты позволят записать уравнения движения точки в

неинерциальных системах отсчета.

Абсолютное ускорение материальной точки, которое входит в основное уравнение динамики, при сложном движении, определяется известной теоремой Кориолиса (3.6.3):

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_k.$$

6.4.1. Дифференциальное уравнение относительного движения точки

Подставив выражение для абсолютного ускорения в основное уравнение динамики (6.2), получим:

$$m\vec{a}_r = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i - m\vec{a}_e - m\vec{a}_k.$$

Введя следующие обозначения для второго и третьего слагаемого в правой части, которые имеют размерность силы:

$$\vec{\Phi}_e = -m\vec{a}_e,\ \vec{\Phi}_k = -m\vec{a}_k,$$

получим *основное уравнение динамики относительного движения материальной точки*:

$$\boxed{m\vec{a}_r = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i + \vec{\Phi}_e + \vec{\Phi}_k} \qquad (6.10)$$

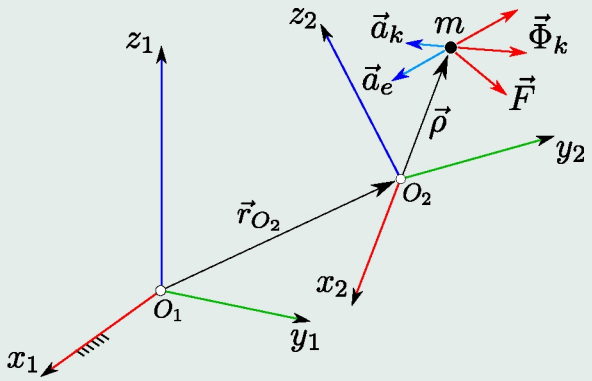


Рис. 6.2. К уравнению движения точки относительно неинерциальной системы координат

где $\vec{\Phi}_e$, $\vec{\Phi}_k$ - *переносная и кориолисова силы инерции.* Таким образом, *в случае непоступательного переносного движения, относительное движение материальной точки можно рассматривать как абсолютное, если к действующим на точку силам присоединить переносную и кориолисову силы инерции.*

6.4.2. Принцип относительности классической механики

Из уравнений (6.10) следует, что если подвижная система координат двигается равномерно и прямолинейно относительно неподвижной системы, то относительное ускорение точки равно абсолютному $\Phi_e = 0, \Phi_r = 0$ и следовательно движение точки в подвижной и неподвижной системе будет одинаково. Все такие подвижные системы являются инерциальными системами и движение точки относительно этих систем можно рассматривать как абсолютное. Из этого следует, что анализ движения точки по отношению к такой подвижной системе не позволяет определить двигается ли эта система на самом деле или покоится. Строго говоря, *никакие механические явления, происходящие в среде, не могут обнаружить ее прямолинейного и равномерного поступательного движения.* В XX веке этот принцип, лежащий в основе теории относительности, был распространен на все физические явления [?].

6.4.3. Случай относительного покоя

Рассмотрим условия относительного равновесия материальной точки, т.е. когда материальная точка не не двигается относительно подвижной системы отсчета. Если точка покоится относительно подвижной системы координат, то её относительное ускорение равно нулю:

$$m\vec{a}_r = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i + \vec{\Phi}_e + \vec{\Phi}_k,\ v_r = 0,\ a_r = 0 \ \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i + \vec{\Phi}_e = 0.$$

Таким образом, *если материальная точка находится в состоянии относительного покоя, то векторная сумма приложенных к точке сил и переносной силы инерции равна нулю.*

6.4.4. Отклонение падающих тел к востоку

Рассмотрим движение материальной точки под действием силы тяжести. Пусть в начальный момент времени точка находилась на высоте H_0 от земли и имела нулевую начальную скорость относительно подвижной системы координат $Oxyz$. Ось Oz - направлена вертикально вверх, ось Oy по касательной к меридиану, ось Oz перпендикулярно плоскости меридиана. Запишем дифференциальное уравнение относительного движения, учитывая из внешних только притяжения Земли, действующую на точку:

$$m\vec{a}_r = \vec{P} + \vec{\Phi}_e + \vec{\Phi}_k,$$

Сумма силы притяжения $\vec{P}$ и переносной центробежной силы инерции равно силе тяжести тела $\vec{G}$ и направлена по вертикали:

$$m\vec{a}_r = m\vec{g} + \vec{\Phi}_k.$$

Спроецируем это векторное дифференциальное уравнение на ось Ox и Oz:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -2m\omega_e v_r \cos\phi, \\ m\ddot{z} = -mg. \end{cases}$$

Интегрируя первое уравнение получим закон движения точки вдоль оси z:

$$\ddot{z} = -g \Rightarrow \dot{z} = -gt + C_1 \Rightarrow z = -\frac{gt^2}{2} + C_1 t + C_2.$$

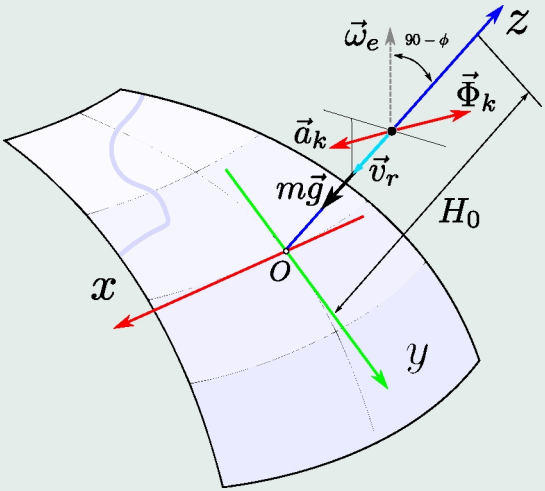


Рис. 6.3. Отклонение падающих тел к востоку

Учитывая начальные условия $z(0) = H_0$ и $\dot{z}(0) = 0$:

$$\dot{z} = -gt, \; z = H_0 - \frac{gt^2}{2}.$$

При интегрировании второго уравнения сделаем допущение о том, что направление относительной скорости мало отличается от направления вертикали:

$$v_r = v_z = |\dot{z}| = gt.$$

После этого допущения, дифференциальное уравнение движения точки вдоль оси x примет вид:

$$m\ddot{x} = -2m\omega_r g t \cos\phi.$$

Интегрируя это дифференциальное уравнение, получим:

$$\dot{x} = -\omega_e g t^2 \cos\phi + C_3,\ x = -\frac{1}{3}\omega_e g t^3 \cos\phi + C_3 t + C_4.$$

Учитывая начальные условия: $x(0) = 0, dotx(0) = 0$:

$$\dot{x} = -\omega_e g t^2 \cos\phi,\ x = -\frac{1}{3}\omega_e g t^3 \cos\phi.$$

Определим из уравнения движения вдоль оси z момент падения на Землю:

$$0 = H_0 - \frac{g t_k^2}{2} \ \Rightarrow\ t_k = \sqrt{\frac{2H_0}{g}}.$$

Подставив время падения точки в уравнение движения вдоль оси x, получим отклонение точки от вертикали:

$$x = -\frac{1}{3}\omega_e g \frac{8H^3}{g^3}\cos\phi.$$

Для широты г. Самара ($\phi = 53.2^o$) и начальной высоты точки 100м максимальное отклонение будет равно:

$$x = -\frac{1}{3}\frac{2\pi}{24\cdot 3600} g \frac{8100^3}{9.81^3}\cos 53.2^o \approx 1.3\text{см}.$$

Домашняя
Назад
На весь экран

Глава 7

Геометрия масс

Рассмотрим механическую систему состоящую из множества материальных точек движение которых взаимосвязаны. Такая совокупность материальных точек называется *материальной системой*. Примером такой системы может служить твердое тело.

Массой материальной системы называется сумма масс всех точек этой системы:

$$M = \sum_{k=1}^{n} m_k.$$

Закрыть

7.1. Центр масс механической системы

Центр масс материальной системы - это геометрическая точка, радиус вектор $\vec{r}_c$ которой определяется следующим образом:

$$\boxed{\vec{r}_c = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{n} m_k \vec{r}_k} \tag{7.1}$$

Если известны координаты каждой точки материальной системы (x_k, y_k, z_k) в декартовой системе координат, то координаты центра масс можно вычислить используя следующие выражения:

$$x_c = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{n} m_k \vec{x}_k,\ y_c = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{n} m_k \vec{y}_k,\ z_c = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{n} m_k \vec{z}_k.$$

Если рассматриваемая материальная система представляет собой твердое тело, то центр масс необходимо вычислять используя интегралы вместо сумм:

$$\boxed{\vec{r}_c = \frac{1}{M}\int_V \vec{r}\,dm},$$

где $\vec{r}$ - радиус вектор элементарной массы dm.

7.2. Моменты инерции относительно оси

При поступательном движении тела мерой инертности тела является масса, т.е. ускорение тела будет пропорционально силе, действующей на тело или точку:

$$\vec{a} = \vec{F}/m.$$

При вращении тела вокруг некоторой оси мера инерции будет является момент инерции.

Моментом инерции твердого тела относительно оси есть скалярная величина, равная сумме произведений массы каждой точки тела на квадрат расстояния от точки до оси. Определим момент инерции твердого тела относительно оси z, рисунок 7.1. Из каждой точки тела опустим на ось z перпендикуляр, тогда момент инерции тела относительно оси z определится следующим образом:

$$J_z = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2.$$

Если известны координаты точек, то расстояние от точки до оси z можно вычислить как сумму квадратов ее координат x_i, y_i:

$$r_i^2 = x_i^2 + y_i^2,$$

тогда выражение для момента тела можно переписать в виде:

$$\boxed{J_z = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i^2 + y_i^2)}$$

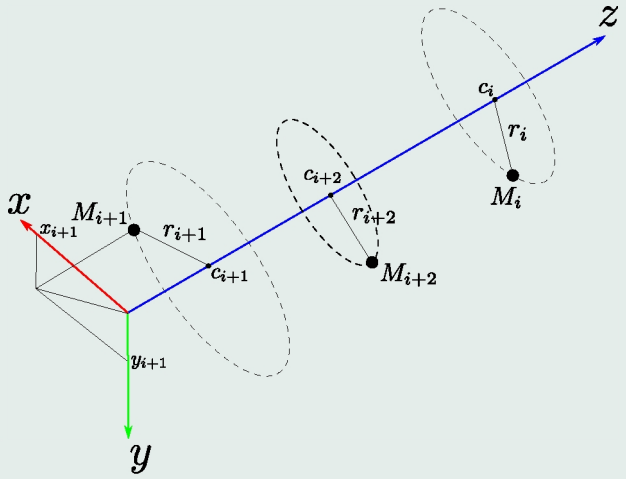


Рис. 7.1. К определению момента инерции относительно оси

Аналогичным образом определяются моменты инерции твердого тела относительно других осей:

$$J_x = \sum_{i=1}^{n} m_i(y_i^2 + z_i^2),\ J_y = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i^2 + z_i^2).$$

Размерность момента инерции в системе СИ [кг $\cdot$ м^2].

7.2.1. Радиус инерции

Момент инерции твердого тела относительно оси, например оси z, можно представить в форме произведения массы тела и квадрата величины, называемой радиусом инерции i_z:

$$J_z = m_i i_z^2.$$

То есть *радиус инерции это расстояние* от оси до точки массой равной массе всего тела, при котором момент инерции этой точки относительно оси будет равен моменту инерции всего тела.

7.2.2. Момент инерции тонкого однородного стержня

Найдем момент инерции тонкого однородного стержня относительно оси проходящей через его центра масс, 7.2. Разобъем стержень на множество

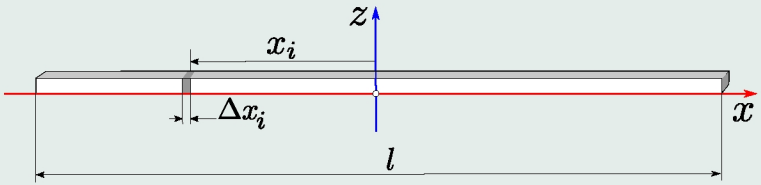


Рис. 7.2. К определению момента инерции тонкого стержня

малых элементов длиной Δx_i и массой m_i. Момент инерции стержня вокруг оси z определится следующим образом:

$$J_z = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i^2. \tag{7.2}$$

Масса участка стержня длиной Δx_i определяется как отношение массы всего стержня l к площади его сечения S:

$$m_i = \frac{m}{S}\Delta x_i = \rho S \Delta x_i,$$

где S - площадь сечения стержня. Подставив выражение для m_i в 7.2 получим:

$$J_z = \sum_{i=1}^{n} \rho S \Delta x_i x_i^2.$$

Переходя в последнем выражении от суммы к интегралу:

$$J_z = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho S \Delta x_i x_i^2.$$

или

$$J_z = \int_{-\frac{l}{2}} \frac{l}{2} \rho S x^2 dx = S\rho \frac{1}{3}(\frac{l^3}{8} + \frac{l^3}{8}) = \frac{S\rho l^3}{12}.$$

Учитывая, что произведение площади сечения стержня на его длину и плотность есть масса стержня, момент инерции однородного стержня относитель-

но оси, проходящей через его центр, будет иметь вид:

$$\boxed{J_z = \frac{ml^2}{12}}$$

7.2.3. Момент инерции однородной круглой пластинки

Определим момент инерции круглой пластины относительно оси проходящей через ее центр и перпендикулярной ее плоскости, рисунок 7.3. Момент инерции элементарного элемента пластины массы Δm относительно оси z определяется следующим образом:

$$J_{zi} = \Delta m r^2 = \frac{m}{\pi R^2} r \Delta\phi \Delta r r^2.$$

где $\frac{m}{\pi R^2}$ - масса приходящаяся на единицу площади пластины. Переходя к двойному интегралу, получим выражение для момента инерции всей пластины:

$$J_z = \frac{m}{\pi R^2} \int_0^R \int_0^{2\pi} r^3 d\phi dr = \frac{m}{\pi R^2} \int_0^R r^3 2\pi = \frac{2m}{R^2} \frac{1}{4} R^4 = \frac{mR^2}{2}.$$

7.2.4. Момент инерции относительно оси однородного цилиндра

Момент инерции цилиндра относительно его оси симметрии легко определить используя результаты предыдущего раздела, где определён момент

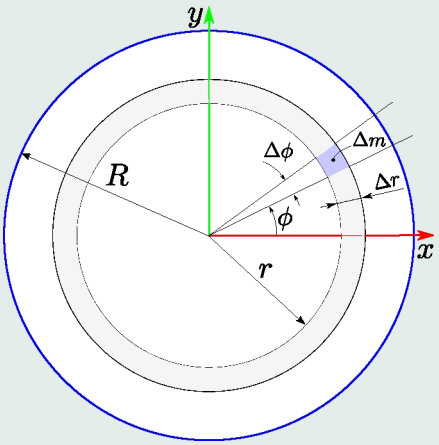


Рис. 7.3. К определению момента инерции круглой пластины

инерции круглой пластины. Разбив цилиндр на множество пластин, его момент инерции можно определить как сумму моментов инерции составляющих его круглых пластин:

$$J_z = \sum \Delta J_z = \sum \frac{m_i R^2}{2} = \sum m_i \frac{R^2}{2} = \frac{M R^2}{2},$$

где M - масса цилиндра.

7.2.5. Моменты инерции относительно параллельных осей

Теорема 8. *Теорема Гюйгенса-Штейнера. Момент инерции тела относительно некоторой оси равен сумме момента инерции относительно оси, проходящей через центр масс параллельно данной, и произведения массы тела на квадрат расстояния между осями.*

Доказательство. Найдем связь между моментами инерции относительно параллельных осей, одна из которых проходит через центр масс тела. На рисунке 7.4 изображена ось z, проходящая через центр масс тела и ось z', параллельная оси z. Момент инерции элементарной массы dm относительно оси z будет определяется следующим образом:

$$dJ_z = \rho^2 dm,$$

а момент инерции всего тела относительно этой оси, определяется как интеграл по всему объему тела:

$$J_z = \int_V \rho^2 dm.$$

Момент инерции твердого тела относительно оси z' будет определяться следующим образом:

$$J_{z'} = \int_V \rho_1^2 dm.$$

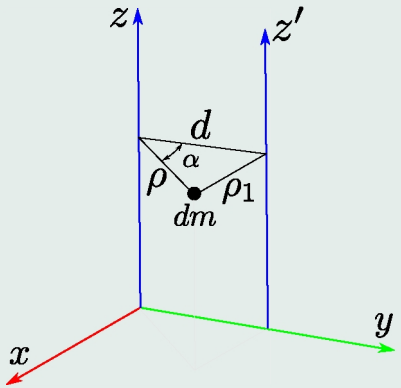


Рис. 7.4. К теореме Гюйгенса-Штейнера

По теореме косинусов определим сторону треугольника ρ_1 (рисунок 7.4):

$$\rho_1^2 = \rho^2 + d^2 - 2\rho d\cos\alpha.$$

Учитывая, что $\rho\cos\alpha = y$, где y - координата y элементарной массы относительно осей, проходящих через центр масс:

$$\rho_1^2 = \rho^2 + d^2 - 2dy.$$

Момент инерции твердого тела относительно оси z' примет вид:

$$J_{z'} = \int_V (\rho^2 + d^2 - 2dy)dm = \int_V \rho^2 dm + d^2\int_V dm - 2d\underbrace{\int_V ydm}_{=0},$$

$\int_V ydm = 0$ следует из определения центра масс твердого тела. Таким образом, окончательная вид связи между моментами инерции относительно параллельных осей:

$$\boxed{J_{z'} = J_z + md^2} \tag{7.3}$$

□

7.3. Моменты инерции механической системы относительно осей, проходящих через заданную точку

Определим момент инерции тела относительно произвольной оси ν, проходящей через начало координат системы $Oxyz$, рисунок 7.5. Момент инерции тела будет иметь вид:

$$J_\nu = \sum \Delta m_i h_i^2 \tag{7.4}$$

Расстояние от точки до оси $O\nu$ определим, рассмотрев треугольник OM_iK_i:

$$h_i^2 = (OM_i)^2 + (OK_i)^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 + (OK_i)^2, \tag{7.5}$$

где x_i, y_i, z_i - координаты точки M_i массы Δm_i. Поскольку OK_i есть проекция отрезка OM_i на ось $O\nu$, а отрезок OM_i можно представить в виде суммы векторов:

$$\overrightarrow{OM_i} = x_i\vec{i} + y_i\vec{j} + z_i\vec{k} = OM_i\cos\alpha\vec{i} + OM_i\cos\beta\vec{j} + OM_i\cos\gamma\vec{k},$$

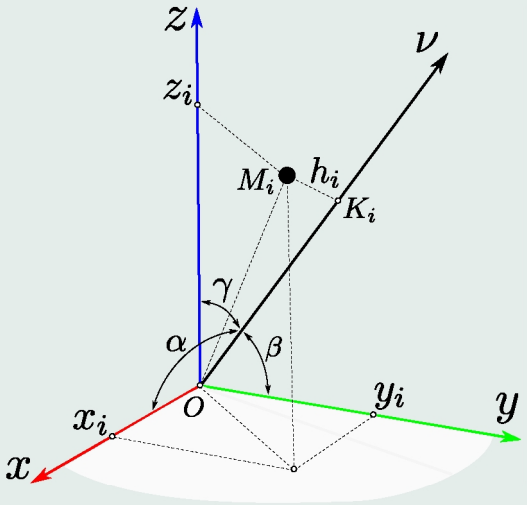


Рис. 7.5. К вычислению момента инерции тела относительно оси

то проекцию $\overrightarrow{OM_i}$ на ось $O\nu$ можно записать в виде:

$$OK_i = OM_i \cos\alpha + OM_i \cos\beta + OM_i \cos\gamma.$$

Подставляя h_i, с учетом последнего выражения в (7.5) получим:

$$h_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 + (x_i \cos\alpha + y_i \cos\beta + z_i \cos\gamma)^2$$

Умножим первые три слагаемых на $1 = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma$:

$$h_i^2 = (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) + (x_i \cos\alpha + y_i \cos\beta + z_i \cos\gamma)^2,$$

раскрывая скобки, получим:

$$h_i^2 = (y_i^2 + z_i^2)\cos^2\alpha + (z_i^2 + x_i^2)\cos^2\beta + (x_i^2 + y_i^2)\cos^2\gamma - 2y_iz_i\cos\beta\cos\gamma - \\ - 2z_ix_i\cos\gamma\cos\alpha - 2x_iy_i\cos\alpha\cos\beta. \quad (7.6)$$

Подтавим полученное выражение для h_i^2 в (7.4):

$$J_\nu = \cos^2\alpha\sum\Delta m_i(y_i^2 + z_i^2) + \cos^2\beta\sum\Delta m_i(z_i^2 + x_i^2) + \\ + \cos^2\gamma\sum\Delta m_i(x_i^2 + y_i^2) - 2\cos\beta\cos\gamma\sum\Delta m_iy_iz_i - \\ - 2\cos\gamma\cos\alpha\sum\Delta m_iz_ix_i - 2\cos\alpha\cos\beta\sum\Delta m_ix_iy_i. \quad (7.7)$$

В первые три слагаемых входят множители, представляющие собой моменты инерции тела относительно осей координат:

$$J_x = \sum\Delta m_i(y_i^2 + z_i^2),\ J_y = \sum\Delta m_i(z_i^2 + x_i^2),\ J_z = \sum\Delta m_i(x_i^2 + y_i^2).$$

Суммы последних трех слагаемых представляют собой *центробежные моменты инерции*:

$$J_{yz} = \sum\Delta m_iy_iz_i,\ J_{zx} = \sum\Delta m_iz_ix_i,\ J_{xy} = \sum\Delta m_ix_iy_i.$$

Таким образом:

$$J_\nu = J_x\cos^2\alpha + J_y\cos^2\beta + J_z\cos^2\gamma - \\ - 2J_{yz}\cos\beta\cos\gamma - 2J_{zx}\cos\gamma\cos\alpha - 2J_{xy}\cos\alpha\cos\beta. \quad (7.8)$$

Матрица, составленная из осевых J_x, J_y, J_z и взятых с обратным знаком центробежных моментов инерции называется тензором инерции:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{pmatrix}. \tag{7.9}$$

7.3.1. Эллипсоид инерции

Отложим вдоль оси $O\nu$ отрезок $ON = \frac{1}{\sqrt{J_\nu}}$, рисунок 7.5. Направляющие косинусы оси $O\nu$ выразим следующим образом:

$$\cos\alpha = \frac{x}{ON} = x\sqrt{J_\nu},\ \cos\beta = \frac{y}{ON} = y\sqrt{J_\nu},\ \cos\gamma = \frac{z}{ON} = z\sqrt{J_\nu}.$$

Выражение (7.8) примет вид:

$$J_\nu = J_x J_\nu x^2 + J_y J_\nu y^2 + J_z J_\nu z^2 - 2J_{yz} J_\nu yz - 2J_{zx} J_\nu zx - 2J_{xy} J_\nu xy$$

или

$$J_x x^2 + J_y y^2 + J_z z^2 - 2J_{yz} yz - 2J_{zx} zx - 2J_{xy} xy = 1 \tag{7.10}$$

Уравнение (7.10) представляет собой уравнение поверхности второго порядка - уравнение эллипсоида, центр которого находится в начале координат. Точка N, задающая направление оси ν принадлежит поверхности этого эллипсоида и находится на расстоянии $1/J_\nu$ от центра.

Три оси симметрии эллипсоида называют *главными осям инерции тела*, а моменты инерции относительно этих осей - *главными моментами инерции.*

Если оси координат совместить с главными осями эллипсоида инерции, то его уравнение примет простой вид:

$$J_{x0}x^2 + J_{y0}y^2 + J_{z0}z^2 = 1.$$

где J_{x0}, J_{y0}, J_{z0} - главные моменты инерции - моменты инерции относительно главных осей. *Центробежные моменты инерции в главных осях равны нулю.* Другими словами, тензор инерции в главных осях принимает диагональный вид:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} J_{x0} & 0 & 0 \\ 0 & J_{y0} & 0 \\ 0 & 0 & J_{z0} \end{pmatrix}. \tag{7.11}$$

Если начало координат расположено в центре масс системы, то эллипсоид инерции называется *центральным эллипсоидом инерции*, а его оси *главными центральными осями инерции.*

7.3.2. Вычисление моментов инерции твердого тела относительно произвольных осей

Используя теорему Гюйгенса-Штейнера (7.3) и выражение (7.8) можно найти момент инерции относительно произвольной оси. Пусть оси координат совпадают с главными центральными осями инерции. Определим момент инерции системы относительно оси ν, рисунок 7.6. Момент инерции относительно оси ν', параллельной оси ν определим при помощи формулы (7.8):

$$J_{\nu'} = J_x \cos^2\alpha + J_y \cos^2\beta + J_z \cos^2\gamma,$$

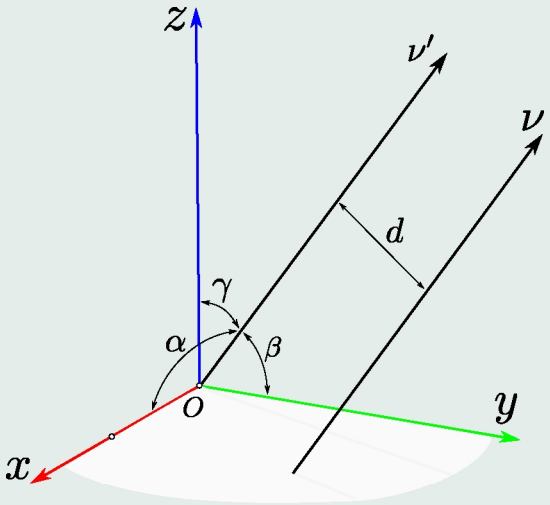
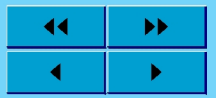


Рис. 7.6. К вычислению момента инерции тела относительно оси

где J_x, J_y, J_z - главные центральные моменты инерции. Воспользовавшись теоремой Гюйгенса-Штейнера (7.3), определим момент инерции относительно оси ν:

$$J_\nu = J_{\nu'} + md^2,$$

где m - масса всей системы.



Глава 8

Теоремы об изменении основных динамических величин системы

8.1. Количество движения системы

Количеством движения материальной точки называется вектор, имеющий направление скорости и модуль равный произведению модуля скорости на массу точки:

$$\vec{Q} = m\vec{v}.$$

Поскольку количество движения это вектор, то можно рассматривать проекции количества движения на оси координат:

$$Q_x = mv_x,\ Q_y = mv_y,\ Q_z = mv_z.$$

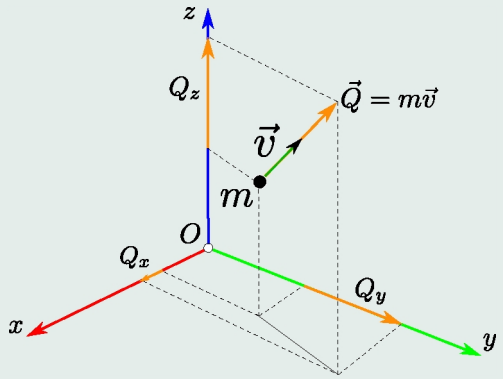


Рис. 8.1. Количество движения материальной точки

Количеством движения механической системы называется вектор, равный векторной сумме количеств движения всех материальных точек этой системы:

$$\vec{Q} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i$$

Количество движения системы можно переписать в виде:

$$\vec{Q} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i$$

или учитывая выражение (7.1):

$$\boxed{\vec{Q} = m\vec{v}_c} \tag{8.1}$$

Вектор количества движения системы имеет модуль, равный произведению массы системы на скорость ее центра масс и направление этой скорости. Проецируя (8.1) на оси координат, получим проекции количества движения механической системы на оси координат:

$$Q_x = mv_{cx},\ Q_y = mv_{cy},\ K_z = mv_{cz}.$$

где v_{cx}, v_{cy}, v_{cz} - проекции скорости центра масс системы на оси координат.

8.1.1. Теорема об изменении количества движения системы

Используя выражение для количества движения материальной точки, основное уравнения динамики приведем к следующему виду:

$$m\vec{a} = \frac{md\vec{v}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F} \tag{8.2}$$

Выражение (8.2) представляет собой запись теоремы об изменении количества движения точки в дифференциальной форме: *производная по времени от количества движения материальной точки геометрически равна равнодействующей сил, приложенных к этой точке.* Для механической системы справедлива следующая теорема.

Теорема 9. *Производная по времени от количества движения механической системы геометрически равна главному вектору внешних сил, действующих на эту систему:*

$$\boxed{\frac{d\vec{Q}}{dt} = F^e} \tag{8.3}$$

Доказательство. Запишем дифференциальные уравнения движения точек системы:

$$m_k \frac{dv_k}{dt} = F_k^e + F_k^i,\ k = 1 \dots n.$$

В соответствии третьим законом Ньютона, силы взаимодействия двух точек системы, которые являются внутренними силами равны по модулю и противоположны по направлению. Следовательно внутренние силы, входят в сумму $\vec{F^i} = \sum_{k=1}^{n} F_k^i$ попарно, при этом сумма сил взаимодействия двух точек равна нулю, поэтому и сумма всех внутренних сил равна нулю:

$$\vec{F^i} = \sum_{k=1}^{n} F_k^i = 0$$

Складывая все n уравнений и учитывая, что векторная сумма всех внутренних сил равна нулю, получим:

$$\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{n} m_k\vec{v}_k = \vec{F}^e + \vec{F}^i$$

где $\vec{F}^e, \vec{F}^i$ - векторные суммы внешних и внутренних сил, действующих на систему. Таким образом, теорема об изменении количества движения системы примет вид:

$$\boxed{\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{F}^e}$$

□

В проекциях на оси координат теорема об изменении количества движения примет вид:

$$\frac{dQ_x}{dt} = F_x^e,\ \frac{dQ_y}{dt} = F_x^y,\ \frac{dQ_z}{dt} = F_x^z.$$

Доказательство 3. *Внутренние силы не влияют на изменение количества движения механической системы.*

Доказательство 4. *Если главный вектор всех внешних сил, действующих на систему, равен нулю, то вектор количества движения системы остается постоянным по величине и направлению:*

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{F}^e,\ \vec{F}^e = 0 \ \Rightarrow\ \vec{Q} = const$$

Доказательство 5. *Если проекция главного вектора всех внешних сил, приложенных к системе, на некоторую неподвижную ось равна нулю, то проекция количества движения материальной системы на эту ось остается постоянной, например:*

$$\frac{dQ_x}{dt} = F_x^e,\ \vec{F}_x^e = 0 \ \Rightarrow\ \vec{Q}_x = const.$$

Второе и третье следствия представляют собой *законы сохранения импульса.*

Сформулируем теорему об изменении количества движения в интегральной форме. Для этого введем понятие импульса силы. Преобразуем основное уравнение динамики (6.1) следующим образом:

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = F,\ \Rightarrow\ d(m\vec{v}) = \underbrace{\vec{F}dt}_{d\vec{S}}. \tag{8.4}$$

Выражение в правой части представляет собой элементарный импульс силы $\vec{F}dt$. Рассматривая конечный интервал времени движения точки от $t_0 = 0$, до t, интегрируя (8.4) получим:

$$m\vec{v} - m\vec{v}_0 = \underbrace{\int_0^t \vec{F}dt}_{\vec{S}^e}.$$

Правая часть последнего уравнения представляет собой импульс силы за промежуток времени $[0, t]$. Перепишем теорему об изменении количества

движения (8.3) в виде:

$$d\vec{Q} = \vec{F}^e dt.$$

Интегрируя в пределе от t_0 до t, получим:

$$\int_{t_0}^{t} d\vec{Q} = \int_{t_0}^{t} \vec{F}^e dt,$$

или

$$\vec{Q} - \vec{Q}_0 = \int_{t_0}^{t} \vec{F}^e dt = \vec{S}^e,$$

где $\vec{S}^e$ - главный вектор импульсов всех внешних сил. Таким образом, теорема об изменении количества движения в интегральной форме формулируется следующим образом: *изменение количества движения материальной системы за промежуток времени* $[t_0, t]$ *равно главному вектору импульсов внешних сил, приложенных к системе, за тот же промежуток времени.*

8.2. Теорема о движении центра масс системы

Теорема 10. *Центр масс механической системы движется так как материальная точка, в которой сосредоточена вся масса системы и к которой приложены все внешние силы, действующие на систему [1].*

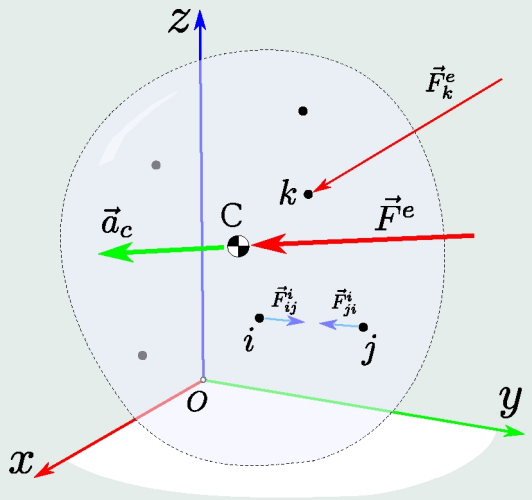


Рис. 8.2. К теореме о движении центра масс системы

Доказательство. Запишем теорему о изменении количества движения системы (8.3) с учетом (8.1):

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}_c) = \vec{F}^e. \tag{8.5}$$

Для механической системы постоянной массы:

$$m\frac{d\vec{v}_c}{dt} = \vec{F}^e. \tag{8.6}$$

Уравнение (8.6) совпадает с уравнением движения материальной точки массой m, равной массе всей системы. $\square$

В проекциях на оси декартовой системы координат, уравнение (8.6) эквивалентно трем скалярным уравнениям:

$$m\frac{dv_{cx}}{dt} = F^e_x,\ m\frac{dv_{cy}}{dt} = F^e_y,\ m\frac{dv_{cz}}{dt} = F^e_z.$$

Доказательство 6. *Одними внутренними силами нельзя изменить характер движения центра масс системы [2].*

Доказательство 7. *Если главный вектор всех внешних сил, действующих на систему равен нулю, то центр масс материальной системы находится в покое или движется равномерно и прямолинейно [2].*

$$m\frac{d\vec{v}_c}{dt} = \vec{F}^e,\ \vec{F}^e = 0, \Rightarrow\ \vec{v}_c = const. \tag{8.7}$$

Доказательство 8. *Если проекция главного вектора всех внешних сил системы на некоторую неподвижную ось равна нулю, то проекция скорости центра масс системы на эту ось не изменится [2].*

$$m\frac{dv_{cx}}{dt} = F^e_x,\ F^e_x = 0\ \Rightarrow\ \vec{v}_{cx} = const$$

Доказательство 9. *Пара сил, проложенная к твердому телу, не может изменить движение его центра масс.*

8.3. Теорема об изменении главного момента количества движения

8.3.1. Главный момент количества движения механической системы

Умножим основное уравнение динамики слева векторно на радиус-вектор точки относительно выбранного центра O:

$$m\vec{r} \times \vec{a} = \vec{r} \times \vec{F}$$

и преобразум его к виду (учитывая $\vec{v} \times \vec{v} = 0$) :

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{v}) = \vec{r} \times \vec{F}. \tag{8.8}$$

Выражение в скобках представляет собой момент количества движения материальной точки $\vec{K}_0$ относительно точки O. Правая часть уравнения (8.8) - вектор момента силы $\vec{F}$ относительно точки O. Уравнение (8.8) перепишем в следующем виде:

$$\frac{d\vec{K}_0}{dt} = \vec{M}_0. \tag{8.9}$$

Уравнение (8.9) представляет собой теорему об изменении момента количества движения материальной точки: *производная от момента количества движения материальной точки относительно какого-либо центра равна моменту силы относительно того же центра*, [2].

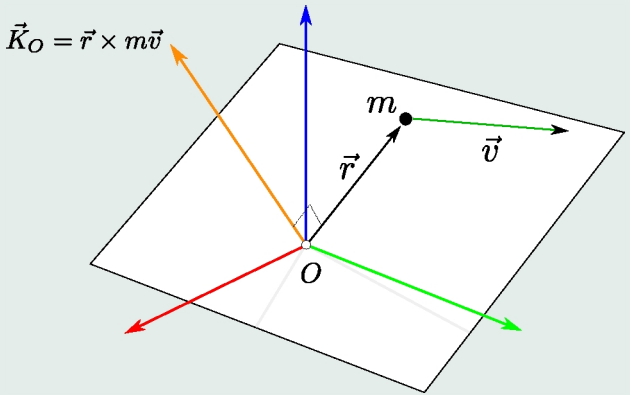


Рис. 8.3. Кинетический момент материальной точки относительно полюса O

Моментом количества движения материальной системы $\vec{K}_0$ относительно центра O называется сумма моментов количеств движения всех материальных точек, входящих в систему, относительно того же центра:

$$\vec{K}_0 = \sum_{k=1}^{n} \vec{K}_{0k} = \sum_{k=1}^{n} \vec{r}_k \times m_k \vec{v}_k, \tag{8.10}$$

где r_k - радиус-вектор точки массой m_k относительно центра O, v_k - скорость точки.

Поскольку момент количества движения есть векторная величина, то

этот вектор можно спроецировать на оси координат:

$$\begin{array}{l} K_x = \sum_{k=1}^{n} m_k(y_k v_{kz} - z_k v_{ky}), \\ K_y = \sum_{k=1}^{n} m_k(z_k v_{kx} - x_k v_{kz}), \\ K_z = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k v_{ky} - y_k v_{kx}). \end{array} \tag{8.11}$$

где x_k, y_k, z_k - координаты точки массы m_k, принадлежащей системе, v_{kx}, v_{ky}, v_{kz} - проекции скорости точки.

8.3.2. Кинетический момент твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси

Рассмотрим твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси Oz с угловой скоростью ω_z. Элемент массы dm твердого тела будет иметь скорость, которая пропорциональнаа расстоянию оси до вращения - h_z. Момент количества движения твердого тела можно определить сложив кинетические моменты элементарных масс по всему объему (рисунок 8.4):

$$K_z = \int_V \omega_z h_z^2 dm = \omega_z \underbrace{\int_V h_z^2 dm}_{J_z}.$$

Интеграл в правой части представляет собой момент инерции тела относительно оси z. Таким образом, кинетический момент или момент количества движения твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси равен произведению момента инерции тела относительно этой оси на проекцию угловой скорости тела на эту же ось.

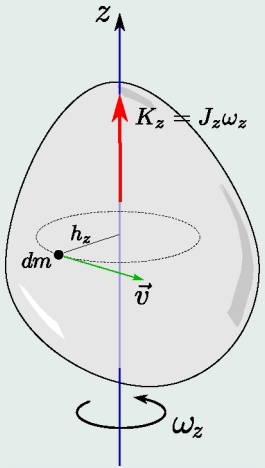


Рис. 8.4. Кинетический момент тела, вращающегося вокруг неподвижной оси

8.3.3. Кинетический момент твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки

Момент количества движения твердого тела определим, воспользовавшись выражением:

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{K}_{0k} = \sum_{k=1}^{n} \vec{r}_k \times m_k \vec{v}_k.$$

Если твердое тело имеет неподвижную точку, то скорость любой точки определяется следующим образом:

$$\vec{v}_k = \vec{\omega} \times \vec{r},$$

где $\vec{r}$ - радиус вектор точки k относительно неподвижной точки. Проекции скорости точки на оси координат определяюся следующим образом:

$$\begin{aligned} v_x &= \omega_y z - \omega_z y, \\ v_y &= \omega_z x - \omega_x z, \\ v_z &= \omega_x y - \omega_y x, \end{aligned}$$

Подставим выражение для проекций скоростей в первое равенство (8.11):

$$K_x = \sum_{k=1}^{n} y_k \left((\omega_x y_k - \omega_y x_k) - z_k (\omega_z x - \omega_x z) \right) m_k.$$

Для твердого тела сумма в последнем выражении заменяется на интеграл по всему объему V:

$$K_x = \omega_x \int_V (y^2 + z^2) dm - \omega_y \int_V xy dm - \omega_z \int_V xz dm.$$

Интеграл в первом слагаемом представляет собой момент инерции тела относительно оси x, второй и третий интегралы - это центробежные моменты инерции:

$$J_{xy} = \int_V xy dm, \;\; J_{xz} = \int_V xz dm.$$

Аналогично определяются проекции кинетического момента на другие оси:

$$K_x = J_x\omega_x - J_{xy}\omega_y - J_{xz}\omega_z,$$
$$K_y = -J_{xy}\omega_x + J_y\omega_y - J_{yz}\omega_z,$$
$$K_z = -J_{xz}\omega_x - J_{yz}\omega_y + J_z\omega_z.$$

Если оси системы координат совпадают с главными осям инерции твердого тела, то проекции кинетического момента на эти оси принимают более простой вид:

$$K_x = J_x\omega_x,$$
$$K_y = J_y\omega_y,$$
$$K_z = J_z\omega_z.$$

8.3.4. Теорема об изменении момента количества движения относительно неподвижного центра

Рассмотрим материальную систему на которую действуют внешние и внутренние силы. Выбрав в качестве полюса неподвижную точку O, запишем теорему об изменении момента количества движения для каждой точки системы:

$$\frac{d\vec{K}_i}{dt} = \vec{M}^e_{iO} + \vec{M}^i_{iO},\ i = 1 \dots n.$$

где $\vec{M}^e_{iO}$, $\vec{M}^i_{iO}$ - моменты внешних и внутреннисх сил относительно центра O. Сложим n уравнений, учитывая, что векторная сумма моментов внутренних

сил равна 0:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d\vec{K}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}^e_{iO} = \vec{M}^e_O,$$

где $\vec{M}^e_O$ - главный момент внешних сил, действующих на систему относительно центра O. Обозначая $\vec{K}_O = \sum_{i=1}^{n} \vec{K}_i$ получим уравнение, выражающее теорему об изменении кинетического момента системы:

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{M}^e_O} \tag{8.12}$$

Производная по времени от кинетического момента механической системы относительно некоторого центра векторно равна главномумоменту внешних сил, действующих на эту систему относительно того же центра. В проекциях на оси координат уравнение (8.12) примет вид:

$$\frac{dL_x}{dt} = M^e_{Ox}, \quad \frac{dL_y}{dt} = M^e_{Oy}, \quad \frac{dL_z}{dt} = M^e_{Oz}.$$

или *производная по времени от кинетического момента механической системы относительно некоторой оси равна главному моменту внешних сил относительно этой оси.*

Из (8.12) можно вывести следствия - законы сохранения кинетического момента механической системы: 1. *Если главный вектор внешних сил относительно некоторого центра все врема равен нулю, то кинетический*

момент системы относительно этого центра остается неизменным.

$$\vec{M}_O^e = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{L}_0}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L}_0 = const.$$

2. Если главный момент внешних сил относительно некоторой оси все время равен нулю, то кинетический момент механической системы относительно этой оси остается постоянным.

8.3.5. Теорема об изменении момента количества движения относительно подвижного центра

Рассмотрим движение материальной системы относительно поступательно-движущейся системы координат $O_2x_2y_2z_2$. Из характера движения подвижной системы координат следует, что переносное ускорение всех точек системы равно ускорению начала координат O_2, а ускорение кориолиса равно нулю, поэтому:

$$\vec{a}_k^e = \vec{a}_{O_2}.$$

Переносная сила инерции точки k определяется следующим образом:

$$\vec{\Phi}_k^e = -\vec{a}_k^e m_k = -\vec{a}_{O_2} m_k.$$

Добавив к внешним силам переносную силу инерции можно записать теорему об изменении кинетического момента, считая, что центр O_2 неподвижен:

$$\frac{d\vec{K}_{O_2}^r}{dt} = \vec{M}_{O_2}^e + \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_{O_2}(\vec{\Phi}_k^e).$$

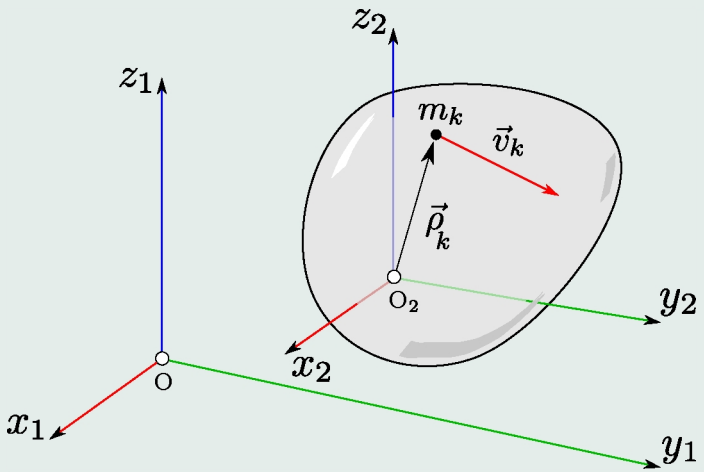


Рис. 8.5. Кинетический момент относительно подвижного центра

Последнее слагаемое преобразуем следующим образом:

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{M}_{O_2}(\vec{\Phi}_k^e) = \sum_{k=1}^{n} \vec{\rho}_k \times (-m_k \vec{a}_{O_2}) = \sum_{k=1}^{n} m_k \vec{\rho}_k \times (-\vec{a}_{O_2}).$$

Сумма в последнем слагаемом представляет собой произведение массы всей системы на радиус вектор центра масс относительно подвижно системы ко-

ординат:

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \vec{\rho}_k = M\vec{\rho}_c.$$

Момент сил инерции относительно полюса O_2 примет слудующий вид:

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{M}_{O_2}(\vec{\Phi}_k^e) = \vec{\rho}_c \times (-M\vec{a}_{O_2}).$$

Это выражение представляет собой момент переносной силы инерции центра масс системы, в предположении, что в нем сосредоточена масса всей системы, относительно подвижного центра O_2. Теорема об изменении момента количества движения относительно подвижного центра примет следующий вид:

$$\frac{d\vec{K}_{O_2}^r}{dt} = \vec{M}_{O_2}^e - \vec{M}_{O_2}(-M\vec{a}_{O_2}) \tag{8.13}$$

Если подвижный центр O_2 совпадает с центром масс системы, то

$$\frac{d\vec{K}_{O_2}^r}{dt} = \vec{M}_{O_2}^e. \tag{8.14}$$

Таким образом, если за полюс выбрать центр масс, то теорема об изменении момента количеств относительного движения по своей форме полностью совпадает с теоремой об изменении момента количеств абсолютного движения. Другими словами, движение материальной системы относительно ее центра масс происходит также, как если бы последний был неподвижен.

8.4. Теорема об изменении кинетической энергии

8.4.1. Работа силы и системы сил

Работой силы на прямолинейном участке называется произведение модуля силы на величину перемещения точки и на косинус угла между вектором силы и направлением перемещения:

$$A = Fs\cos\phi,$$

или в форме скалярного произведения:

$$A = \vec{F} \cdot \vec{s}$$

Единицей измерения работы в системе СИ является джоуль: 1 джоуль = 1 нм.

8.4.2. Элементарная и полная работа сил

В общем случае точка может двигаться по криволинейной траектории под действием переменной силы. В этом случае работу силы на некотором перемещении можно представить как сумму элементарных работ на прямолинейных участках, на которые можно разбить кривую:

$$A \approx \sum_{k=1}^{n} F_k \cos\phi_k \Delta s_k$$

Переходя от суммы к криволинейному интегралу ($\Delta s_k \to 0$) можно определить точное значение работы при перемещении точки

$$A = \int_{M_1}^{M_2} F(s)\cos\phi(s)ds. \tag{8.15}$$

Преобразуем последний интеграл к удобной для практических вычислений

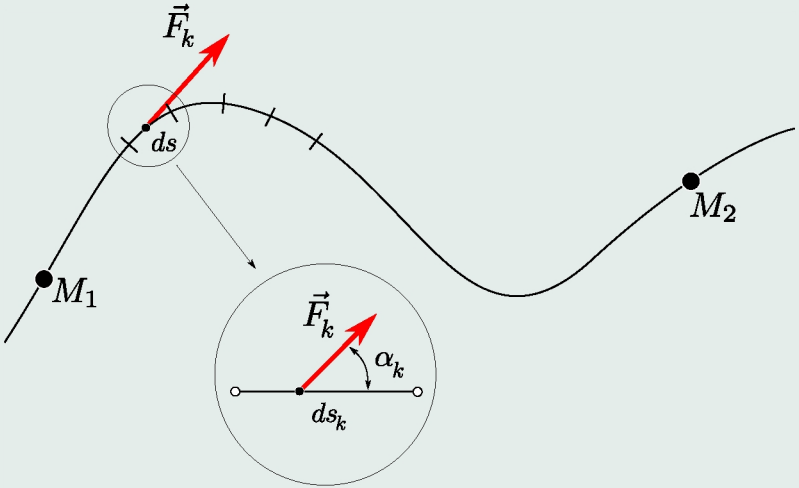


Рис. 8.6. Работа переменной силы

форме, которая не требует определения выражений для силы и угла φ как

функций криволинейной координаты s. Определим элементарную работу силы:

$$\delta A = F cos\varphi ds$$

учитывая, что дифференциал пути равен модулю дифференциала радиус-вектора:

$$\delta A = F cos\varphi |dr| = \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

или, используя проекции векторов силы и дифференциала радиус-вектора:

$$\delta A = F_x dx + F_y dy + F_z dz.$$

Тогда криволинейный интеграл (8.15) можно записать в виде криволинейного интеграла второго рода:

$$A = \int_{M_1}^{M_2} F_x dx + F_y dy + F_z dz \tag{8.16}$$

Если сила зависит только от положения точки, то работа этой силы не будет зависеть от закона движения точки по траектории. Если сила зависит от времени, то для определения работы этой силы необходимо знать закон движения точки по криволинейной траектории:

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t).$$

Тогда работу силы можно определить следующим образом:

$$A = \int_{t_1}^{t_2} (F_x \dot{x} + F_y \dot{y} + F_z \dot{z}) dt,$$

где t_1, t_2 - моменты времени в которые точка находилась в положении M_1 и M_2 соответственно.

Если на точку действует постоянная сила $\vec{F}$ неизменного направления, то работа этой силы приобретает простой вид:

$$A = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F} d\vec{r} = \vec{F} \int_{M_1}^{M_2} d\vec{r} = \vec{F}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1).$$

Выражение в скобке представляет собой перемещение точки, таким образом, работа неизменной силы будет определятся произведением величины силы на перемещение и на косинус угла между направлением силы и вектором перемещения:

$$A = F s \cos\phi.$$

8.4.2.1. Работа силы тяжести

Именно таким образом вычисляется работа силы тяжести. Работа силы тяжести равно произведению изменения высоты точки на величину силы. Знак работы определяется тем, поднимается или опускается точка. Действительно, пусть на материальную точку действует постоянная сила тяжести $\vec{G}$, направленная вдоль оси z системы декартовой системы координат. Проекции силы тяжести на оси координат:

$$G_x = 0,\ G_y = 0,\ G_z = -G.$$

Элементарная работа силы тяжести, будет определяется выражением:

$$\delta A = 0 \cdot dx + 0 \cdot dy - G \cdot dz.$$

Работа силы при перемещении точки по некоторой траектории M_1M_2:

$$A_{12} = -\int_{z_1}^{z_2} G dz = G(z_1 - z_2) = G\Delta h$$

Таким образом, *работа силы тяжести равна взятому с противоположным знаком плюс или минус произведению силы тяжести на вертикальное перемещение точки её приложения. Работа силы не зависит от траектории, по которой движется точка приложения силы, а зависит только от изменения высоты точки.*

8.4.2.2. Работа силы упругости

Рассмотрим пружину один конец которой закреплен неподвижно. При растяжении пружины на тело, вызывающее это растяжение, действует сила, зависящая от деформации пружины, и направленная в противоположно перемещению свободного конца пружины:

$$F_c = -c \cdot BC$$

Направив ось x вдоль оси пружины и расположив начало координат в точке, соответствующей недеформированному положению пружины, силу упругости можно записать следующим образом:

$$F_{cx} = -cx.$$

Работа силы упругости:

$$A_{12} = \int_{M_1M_2} F_{cx}dx + F_{cy}dz + F_{cz}dz = -\int_{x_1}^{x_2} cxdx = -\frac{c}{2}\left(x_2^2 - x_1^2\right).$$

8.4.2.3. Работа силы тяготения

Пусть на материальную точку массой m действует сила тяготения, обратно пропорциональная квадрату расстояния от точки до притягивающего центра и направленная к этому притягивающему центру:

$$F = f\frac{mm_0}{r^2}$$

где r - расстояние от точки до притягивающего центра; m_0 - масса притягивающего центра. Поместим начало координат в неподвижном притягивающем центре. Элементарная работа силы тяготения определится следующим образом:

$$\delta A = F_x dx + F_y dy + F_z dz.$$

Проекции силы тяготения на оси координат:

$$F_x = \vec{F}\cdot\vec{i} = F\cos(\vec{P},\vec{i}) = -f\frac{mm_0}{r^2}\frac{x}{r} = -f\frac{mm_0 x}{r^3},$$

$$F_y = \vec{F}\cdot\vec{j} = F\cos(\vec{P},\vec{j}) = -f\frac{mm_0}{r^2}\frac{y}{r} = -f\frac{mm_0 y}{r^3},$$

$$F_z = \vec{F}\cdot\vec{k} = F\cos(\vec{P},\vec{k}) = -f\frac{mm_0}{r^2}\frac{z}{r} = -f\frac{mm_0 z}{r^3}.$$

Учитывая последние выражения, элементарная работа принимает следующий вид:

$$\delta A = -fmm_0\frac{xdx+ydy+zdz}{r^3} = -fmm_0\frac{1}{2}\frac{d(x^2+y^2+z^2)}{r^3} =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{fmm_0 d(r^2)}{r^3} = -\frac{fmm_0 rdr}{r^3} = -\frac{fmm_0 dr}{r^2} \qquad (8.17)$$

Работа силы тяготения при перемещении точки из M_1 в M_2:

$$A_{12} = -fmm_0 \int_{M_1}^{M_2} \frac{dr}{r^2} = -fmm_0 \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = -fmm_0 \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$

Последнее выражение свидетельствует о том, что работа силы тяготения не зависит от формы траектории точки.

8.4.3. Работа сил, приложенных к твёрдому телу

8.4.3.1. Работа внутренних сил

Рассмотрим две точки твердого тела. Силы взаимодействия этих точек, в соответствии с третьим законом Ньютона, равны по модулю и противоположно направлены:

$$\vec{F}_2^i = -\vec{F}_1^i$$

Элементарные перемещения этих точек за время dt направлены вдоль скоростей точек и равны:

$$ds_1 = v_1 dt, \;\; ds_2 = v_2 dt.$$

Для твёрдого тела выполняется условие равенства проекций скоростей двух точек на линию, соединяющую эти точки, очевидно, что это условие будет выполнятся и для элементарных перемещений. Учитывая это, работа внутренних сил взаимодействия двух точек определится следующим образом:

$$F_1 ds_1 \cos(\vec{F}_1, \vec{v}_1) + F_2 ds_2 \cos(\vec{F}_2, \vec{v}_2) = F_1 ds_1 \cos(\vec{F}_1, \vec{v}_1) - F_1 ds_2 \cos(\vec{F}_2, \vec{v}_2) = 0$$

т.к. $ds_1 \cos(\vec{F}_1, \vec{v}_1) = ds_2 \cos(\vec{F}_2, \vec{v}_2)$. Поскольку каждой внутренне сие соответствует другая, равная ей по модулю и противоположная по направлению, то сумма элементарных работ всех внутренних сил будет равна нулю. Это справедливо и для работы внутренних сил на конечном перемещении. Таким образом *сумма работ внутренних сил твёрдого тела на любом его перемещении равна нулю.*

8.4.3.2. Поступательное движение твёрдого тела

При поступательном движении твёрдого тела все его точки имеют одинаковые скорости, поэтому и векторы элементарных перемещений точек равны между собой. Элементарная работа внешней силы, приложенной к точке, равна:

$$\delta A_i^e = \vec{F}_i^e \cdot d\vec{r}_i = \vec{F}_i^e \cdot d\vec{r}$$

Для всей системы:

$$\delta A^e = \sum \vec{F}_i^e \cdot d\vec{r} = \vec{F}^e \cdot d\vec{r},$$

где $\vec{F}^e$ - главный вектор внешних сил приложенных к твёрдому телу. *Элементарная работа сил, приложенных к твёрдому телу, движущемуся поступательно, равна элементарной работе главного вектора внешних сил, приложенного в любой точке тела*

8.4.3.3. Вращение твёрдого тела вокруг неподвижной оси

Определим в начале работу внешней силы $\vec{F}_i^e$, приложенной к некоторой точке твёрдого тела M_i. Для этого разложим силу на три составляющие,

направленные по естественным осям траектории точки M_i:

$$\vec{F}_i^e = \vec{F}_{i\tau}^e + \vec{F}_{in}^e + \vec{F}_{ib}^e.$$

Работа силы при перемещении точки в результате поворота твердого тела на угол $d\varphi$ определится следующим образом:

$$\delta A_i = \vec{F}_i^e \cdot d\vec{r} = F_{i\tau}^e r_i d\varphi,$$

т.к. $\vec{F}_{in}^e$ и $\vec{F}_{ib}^e$ перпендикулярны перемещению точки. Произведение $F_{i\tau}^e r_i$ представляет собой момент силы $\vec{F}_i^e$ относительно оси вращения Oz, поэтому элементарная работа силы будет определятся следующим образом:

$$\delta A_i = M_{iz}^e d\varphi.$$

Элементарная работа всех внешних сил приложенных к твёрдому телу:

$$\delta A = \sum M_{iz}^e d\varphi = M_z^e d\varphi.$$

Элементарная работа сил, приложенных к твёрдому телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси, равна произведению главного момента внешних сил относительно оси вращения на приращение угла поворота. Если при вращении твердого тела угол поворота изменяется от φ_1 до φ_2, то сумма работ сил на этом перемещении:

$$\sum A_i = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_z^e d\varphi.$$

При постоянном моменте:

$$\sum A_i = M_z^e(\varphi_2 - \varphi_1).$$

8.4.3.4. Общий случай движения свободного твёрдого тела

Пусть к свободно движущемуся твердому телу приложены внешние силы $\vec{F}_i^e, i = 1, \ldots, n$. Элементарное перемещение твердого тела можно разложить на поступательное перемещение ds_O некоторого полюса O и вращательное движение: мгновенный поворот на угол $d\varphi$ вокруг некоторой оси Ω, проходящей через полюс. Тогда элементарная работа внешних сил определится как сумма работ этих сил на поступательном и вращательном движении твёрдого тела:

$$\delta A = \sum \delta A_i^e = \vec{F}^e \cdot d\vec{r}_O + M_\Omega^e d\varphi.$$

Элементарная работа внешних сил, приложенных к свободному твёрдому телу в общем случае его движения, равна сумме элементарных работ их главного вектора на перемещении точки его приложения - полюса и главного момента этих сил относительно мгновенной оси, проходящей через полюс, на перемещении при повороте вокруг этой оси.

8.4.4. Силовое поле

Силовое поле - это область пространства в каждой точке которого на материальную точку действует сила, однозначно определенная по величине и направлению: $\vec{F}(\vec{r}, t)$, или в скалярной форме:

$$F_x = F_x(x, y, z, t), \; F_y = F_y(x, y, z, t), \; F_z = F_z(x, y, z, t).$$

Если сила зависит от времени, то поле называется нестационарным и стационарным, если сила не зависит от времени:

$$F_x = F_x(x, y, z),\ F_y = F_y(x, y, z),\ F_z = F_z(x, y, z).$$

Стационарное силовое поле обладает следующими свойствами [2]:

1) Работа сил стационарного поля зависит в общем случае от начального, конечного положения точки и траектории её движения, но не зависит от закона движения материальной точки.

2) $A_{M_1M_2} = -A_{M_2M_1}$. Работа сил стационарного поля при перемещении из точки M_1 в точку M_2 равна работе, взятой с противоположным знаком, этих сил при перемещении точки в обратном направлении по той же траектории.

При движении из точки M_1 в точку M_2 по разным траекториям работа стационарных сил будет, в общем случае, различна. Среди стационарных силовых полей существует класс полей, работа сил которых не зависит от траектории движения точки, а зависит только от начального и конечного положения точки. Такие поля называются *потенциальными* или *консервативными*.

8.4.4.1. Потенциальная энергия

Рассмотрим некоторую точку $M(x, y, z)$ в потенциальном силовом поле. Пусь в этом силовом поле определена также произвольная нулевая точка

M_0. При движении материальной точки из положения M до положения M_0 силы потенциального поля совершают работу A_{MM_0}, которая не зависит от траектории, а зависит только от координат точки M: работа сил есть функция координат точки M, эта функция называется потенциальной энергией:

$$\Pi(x, y, z) = A_{MM_0},$$

при этом предполагается, что в точке M_0 энергия равна 0. Таким образом, *потенциальной энергией материальной точки в данном положении M называется скалярная величина Π, равная той работе, которую произведут силы поля при перемещении точки из положения M в нулевое.*

Если в качестве нулевой точки выбрать некоторую точку M_0^*, то потенциальную энергию точки M можно записать следующим образом:

$$\Pi^* = A_{MM_0} + A_{M_0M_0^*}.$$

Второе слагаемое не будет зависеть от координат точки M, и таким образом, потенциальная энергия определена с точностью до некоторой произвольной постоянной.

При перемещении точки из произвольного положения M_1 в положение M_2, работа потенциальных сил может быть найдена следующим образом:

$$A_{M_1M_2} = A_{M_1M_0} + A_{M_0M_2} = \Pi_1 - \Pi_2.$$

Другими словами, *работа сил потенциального поля при перемещении материальной точки равна разности потенциальных энергий в начальный и конечной точках пути.*

Теорема 11. *Для того чтобы силовое поле*

$$F_x = F_x(x, y, z, t),\ F_y = F_y(x, y, z, t),\ F_z = F_z(x, y, z, t).$$

было потенциальным необходимо и достаточно, чтобы существовала такая непрерывная однозначная функция координат $\Pi(x, y, z)$*, называемая потенциальной энергией поля, частные производные от которой удовлетворяют равенствам:*

$$F_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x},\ F_y = -\frac{\partial \Pi}{\partial y},\ F_z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z}. \tag{8.18}$$

Доказательство. Пусть силовое поле является потенциальным. Работа силы поля при перемещении точки из положения M с координатами (x, y, z) в положение M_1 с координатами $(x + \Delta x, y, z)$ определяется следующим образом:

$$\int_x^{x+\Delta x} F_x(x, y, z)dx = \Pi(x, y, z) - \Pi(x + \Delta x, y, z).$$

По теореме о среднем, интеграл в левой части можно вычислить следующим образом:

$$\int_x^{x+\Delta x} F_x(x, y, z)dx = F_x(x + \varepsilon\Delta x, y, z)\Delta x,$$

где $0 < \varepsilon < 1$. Разделив последнее выражение на $deltax$, получим:

$$F_x(x + \varepsilon\Delta x, y, z) = -\frac{\Pi(x + \Delta x, y, z) - \Pi(x, y, z)}{\Delta x}.$$

При $\Delta x \to 0$:

$$F_x(x,y,z) = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}.$$

Аналогично можно определить выражения для F_y, F_z, выбрав в качестве координат точки M_1 $(x, y+\Delta y, z)$ и $(x, y, z+\Delta z)$ соответственно.

Достаточность условий (8.18) для потенциальности поля можно показать следующим образом. Если условия (8.18) выполнены, то элементарная работа при перемещении точки определяется следующим образом:

$$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz = -\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Pi}{\partial y}dy + \frac{\partial \Pi}{\partial z}dz\right).$$

Потенциальная энергия зависит только от координат точки, поэтому выражение, стоящее в скобках есть полный дифференциал функции Π:

$$dA = -d\Pi.$$

□

При заданных функциях F_x, F_y, F_z, для потенциального поля должны выполнятся следующие условия:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_x}{\partial y} &= \frac{\partial F_y}{\partial x} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x \partial y},\\
\frac{\partial F_y}{\partial z} &= \frac{\partial F_z}{\partial y} = -\frac{\partial \Pi}{\partial y \partial z},\\
\frac{\partial F_z}{\partial x} &= \frac{\partial F_x}{\partial z} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x \partial z}.
\end{aligned}$$

Пример 10. $F_x = xy^2$, $F_y = x^2y$, $F_z = z^2$ *Заданное поле потенциально, поскольку:*

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} = 2xy,$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y} = \frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z} = 0.$$

Потенциальную энергию поля определим, вычислив работу при перемещении точки из положения, определяемого координатами (x, y, z) *в начало координат, предполагая, что в начале координат расположена нулевая точка (потенциальная энергия в этой точке равна 0). Перемещая точку последовательно вдоль оси* z, y, x:

$$\Pi = A = A_z + A_y + A_x = \int_z^0 F_z dz + \int_y^0 F_y dy + \int_x^0 F_x dx = \\ = \int_y^0 F_y dy + \int_z^0 F_z dz = -\frac{z^3}{3} - \frac{1}{2}x^2y^2. \quad (8.19)$$

8.4.4.2. Силовая функция

В некоторых случая, вместо потенциальной энергии используют силовую функцию, которая отличается от потенциальной энергии знаком:

$$U = -\Pi$$

8.4.4.3. Поле силы тяжести

Предположим, что материальная точка движется в поле силы тяжести: на материальную точку действует сила $\vec{G}$ направленная в противоположном направлении оси Oz. Работа силы тяжести при перемещении материальной точки из одного положения в другое не зависит от траектории точки, поэтому поле сил тяжести будет потенциальным, следовательно:

$$F_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x} = 0,\ F_y = -\frac{\partial \Pi}{\partial y} = 0,\ F_z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z} = -G.$$

Таким образом, потенциальная энергия зависит только от координат, поэтому:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial z} = \frac{d\Pi}{dz} = G \Rightarrow d\Pi = Gdz,$$

интегрируя последнее выражение, получим:

$$\Pi = Gz + C$$

Если при $z = 0$ принять потенциальную энергию равной нулю, то постоянная интегрирования будет равна нулю, следовательно:

$$\Pi = Gz.$$

Потенциальная энергия системы материальных точек определится следующим образом:

$$\Pi = \sum_{k=1}^{n} z_k G_k,$$

учитывая выражение для центра тяжести системы:

$$z_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} z_k G_k}{G},$$

получим:

$$\Pi = G z_c$$

Потенциальная энергия механической системы, находящейся под действием сил тяжести, равна произведению веса системы на высоту её центра тяжести над нулевой плоскостью.

8.4.4.4. Поле центральной силы притяжения

Пусть на материальную точку массой m действует сила притяжения к центру O (начало координат):

$$F = k\frac{m}{r^2}.$$

Проекции этой силы на оси координат:

$$F_x = -k\frac{m}{r^2}\frac{x}{r} = -k\frac{m}{r^3}x$$

$$F_y = -k\frac{m}{r^2}\frac{y}{r} = -k\frac{m}{r^3}y$$

$$F_z = -k\frac{m}{r^2}\frac{z}{r} = -k\frac{m}{r^3}z$$

Дифференциал потенциальной энергии точки запишется в виде:

$$d\Pi = -(F_x dx + F_y dy + F_z dz) = k\frac{m}{r^3}(xdx + ydy + zdz). \qquad (8.20)$$

учитывая, что $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ и $rdr = xdx + ydy + zdz$:

$$d\Pi = k\frac{m}{r^3}rdr = k\frac{m}{r^2}dr$$

Интегрируя последнее выражение, получим:

$$\Pi = -\frac{km}{r} + C.$$

Предположив, что $\Pi = 0$ при $r = \inf$, получим $C = 0$, тогда:

$$\Pi = -\frac{km}{r}$$

8.4.5. Теорема об изменении кинетической энергии материальной точки

Установим связь между работой сил и изменением скорости материальной точки. Для этого умножим основное уравнение скалярно на дифференциал радиус-вектора материальной точки:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot d\vec{r} \qquad (8.21)$$

В правой части полученного уравнения стоит элементарная работа силы (равнодействующей сил, действующих на материальную точку), а левую часть можно преобразовать следующим образом:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot d\vec{r} = m\frac{d\vec{r}}{dt}\cdot d\vec{v} = m\vec{v}\cdot d\vec{v} = d\left(\frac{mv^2}{2}\right). \tag{8.22}$$

Последнее выражение в круглых скобках представляет собой кинетическую энергию материальной точки:

$$T = \frac{mv^2}{2}. \tag{8.23}$$

Выражение (8.21) принимает следующий вид:

$$dT = \delta A \tag{8.24}$$

Таким образом, *полный дифференциал кинетической энергии материальной точки равен элементарной работе действующих на эту точку сил.*

Если материальная точка перемещается по некоторой криволинейной траектории из точки M_1 в точку M_2, то проинтегрировав (8.24), получим:

$$\int_{M_1M_2} d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \int_{M_1M_2} \delta A. \tag{8.25}$$

Далее, учитывая, что криволинейный интеграл в левой части от полного дифференциала функции равен самой функции, а также учитывая, что правая часть последнего уравнения представляет собой работу силы на пути от

точки M_1 к точке M_2 - A_{12}, получим запись теоремы об изменении кинетической энергии точки в интегральной форме:

$$\frac{mv_2^1}{2} - \frac{mv_1^1}{2} = A_{12} \tag{8.26}$$

где v_1, v_2 - скорость материальной точки в положении M_1 и M_2. Таким образом, *изменение кинетической энергии материальной точки при переходе её начального в конечное положение равно сумме работ на этом перемещении всех сил, приложенных к точке.*

8.4.5.1. Теорема об изменении кинетической энергии точки в относительном движении

Запишем уравнение движения материальной точки относительно подвижной неинерциальной системы координат:

$$m\frac{\tilde{d}\vec{v}_r}{dt} = \vec{F} + \vec{R} + \vec{\Phi}_e - 2m(\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r),$$

где F - активные силы, действующие на точку; $\vec{R}$ - силы реакции; $\vec{\Phi}_e$ - переносная сила инерции; $2m(\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r)$ - кориолисова сила инерции. Умножив левую и правую часть уравнения скалярно на скорость точки, получим:

$$m\vec{v}_r \cdot \frac{\tilde{d}\vec{v}_r}{dt} = \vec{v}_r \cdot \vec{F} + \vec{v}_r \cdot \vec{R} + \vec{\Phi}_e - 2m(\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r) \cdot \vec{v}_r.$$

Последнее слагаемое равно нулю, поскольку результат векторного произведения будет перпендикулярен вектору относительной скорости точки. Таким образом:

$$d\left(\frac{mv_r^2}{2}\right) = \delta A_F + \delta A_R + \delta A_{\Phi_e} \tag{8.27}$$

или

$$dT_r = \delta A_F + \delta A_R + \delta A_{\Phi_e} \tag{8.28}$$

Интегрируя последнее уравнение, получим выражение для изменения кинетической энергии в относительном движении:

$$T_r^K - T_r^0 = A_R^{0K} + A_R^{0K} + A_{\Phi_e}^{0K}$$

Изменение кинетической энергии материальной точки в относительном движении равно сумме работ всех действующих сил и переносной силы инерции.

8.4.6. Кинетическая энергия механической системы

Кинетическая энергия механической системы представляет собой сумму кинетических энергий всех точек, входящих в рассматриваемую систему:

$$T = \sum_{i=1}^{n} T_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i v_i^2}{2}$$

8.4.6.1. Теорема Кёнига

Рассмотрим произвольно систему движущуюся систему материальных точек. Разместим в центре масс системы поступательно движущуюся систему координат $O_1x_1y_1z_1$, а движение всей механической системы будем рассматривать относительно неподвижной системы координат $O_0x_0y_0z_0$. Абсолютную скорость любой точки системы можно представить как векторную сумму скорости центра масс системы и скорости точки относительно центра масс:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_c + \vec{v}_{ir}.$$

Учитывая определение кинетической энергии системы, получим:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i(\vec{v}_c+\vec{v}_{ir})\cdot(\vec{v}_c+\vec{v}_{ir}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_c\cdot\vec{v}_c + \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_c\cdot\vec{v}_{ir} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_{ir}\cdot\vec{v}_{ir} =$$

$$= \frac{1}{2}mv_c^2 + \vec{v}_c \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_{ir} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i v_{ir}^2 \quad (8.29)$$

Принимаем во внимание, что $\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_{ir} = 0$, поскольку:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_{ir} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \rho_i\right) = \frac{d}{dt}(0) = 0,$$

где $\vec{\rho}_i$ - радиус вектор материальной точки системы относительно центра масс. Выражение для кинетической энергии системы принимает следующий вид:

$$T = \frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i v_{ir}^2.$$

Таким образом, *кинетическая энергия системы равна сумме кинетической энергии центра масс системы, масса которого равна массе всей системы, и кинетической энергии этой системы в её относительном движении относительно центра масс.*

8.4.7. Кинетическая энергия твёрдого тела

8.4.7.1. Поступательное движение

При поступательном движении твёрдого тела все его точки имеют одинаковую скорость, поэтому кинетическая энергия тела будет равна в этом случае половине произведения массы тела на квадрат его скорости:

$$T = \frac{mv^2}{2}$$

8.4.7.2. Вращение твёрдого тела вокруг неподвижной оси

При вращении твёрдого тела вокруг неподвижной оси, скорость любой точки определяется как произведение угловой скорость вращения на крат-

чайшее расстояние от этой точки до оси вращения:

$$v_i = r_i\omega.$$

Кинетическая энергия такой системы определяется следующим образом:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1} nm_i r_i^2\omega^2 = \frac{1}{2}\omega\sum_{i=1} nm_i r_i^2 = \frac{1}{2}J_z\omega^2.$$

Кинетическая энергия твёрдого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, равна половине произведения его момента инерции относительно оси вращения на квадрат угловой скорости тела.

8.4.7.3. Сферическое движение твёрдого тела

Скорости точек твёрдого тела при сферическом движении определяются как произведение угловой скорости на расстояние от точки до мгновенной оси вращения, поэтому по аналогии с предыдущим выражением, *кинетическая энергия твердого тела, совершающего сферическое движение, равна половине произведения момента инерции тела относительно мгновенной оси вращения на квадрат угловой скорости тела.*

$$T = \frac{1}{2}J_\Omega\omega^2.$$

8.4.7.4. Общий случай движения твёрдого тела

Движение твёрдого тела в общем случае можно разложить на поступательное движение вместе с центром масс и относительное сферическое

движение вокруг центра масс. Тогда кинетическая энергия определится по следующим образом:

$$T = \frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}J_{c\Omega}\omega^2.$$

Кинетическая энергия твёрдого тела в общем случае его движения равна сумме кинетической энергии тела в его переносном поступательном движении вместе с центром масс и его кинетической энергии в сферическом движении относительно центра масс.

8.4.7.5. Кинетическая энергия твердого тела при плоском движении

При плоском движении вектор угловой скорости тела перпендикулярен плоскости движения. Используя результаты предыдущего раздела получим следующее выражение для кинетчиеской энергии твердого тела при плоском движении:

$$T = \frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}J_{cz}\omega^2,$$

где J_{cz} - момент инерции твердого тела относительно оси перпендикулярной плоскости движения и проходящей через центр масс тела. Очевидно, что поскольку эта ось сохраняет свое направление, то момент инерции J_{cz} будет постоянным.

8.4.8. Теорема об изменении кинетической энергии системы

Применим теорему об изменении кинетической энергии в интегральной форме для каждой материальной точки механической системы:

$$\frac{m_i v_{i2}^2}{2} - \frac{m_i v_{i1}^2}{2} = A_i^e + A_i^i,\ i = 1, \ldots, n,$$

где A_i^e - работа внешних сил, действующих на точку, на некотором перемещении точки системы из положения M_{i1} в положение M_{i2}; A_i^i - работа внутренних сил, действующих на точку, на некотором перемещении точки системы из положения M_{i1} в положение M_{i2} Складывая все n уравнений получим:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i v_{i2}^2}{2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i v_{i1}^2}{2} = \sum_{i=1}^{n} A_i^e + \sum_{i=1}^{n} A_i^i$$

или

$$T_2 - T_1 = \sum_{i=1}^{n} A_i^e + \sum_{i=1}^{n} A_i^i.$$

Изменение кинетической энергии механической системы на некотором перемещении равно сумме работ внешних и внутренних сил, действующих на материальные точки системы на этом перемещении.

Для твердого тела теорема об изменении кинетической энергии записы-

вается проще, т.к. работа внутренних сил твердого тела равна нулю:

$$T_2 - T_1 = \sum_{i=1}^{n} A_i^e.$$

Изменение кинетической энергии твёрдого тела некотором перемещении равно сумме работ внешних сил, действующих на тело на этом перемещении.

8.4.8.1. Закон сохранения механической энергии

Рассмотрим механическую систему на которую действуют только консервативные силы: как внешние, так и внутренние. Пусть в начальный момент времени кинетическая энергия системы была равна T_0, а спустя некоторое время - T. Применяя теорему об изменении кинетической энергии в интегральной форме, получим:

$$T - T_0 = A^e + A^i.$$

Учитывая, что все силы, действующие на систему, консервативные работу этих сил можно определить как разность потенциальной энергии системы в начальный Π_0 и конечный Π моменты времени:

$$A = \Pi_0 - \Pi.$$

Таким образом:

$$T - T_0 = \Pi_0 - \Pi. \tag{8.30}$$

или

$$T + \Pi = h = const, \;\; h = T_0 + \Pi_0 \tag{8.31}$$

Уравнение (8.31) называется *интегралом энергии*. Интеграл энергии выражает закон сохранения полной механической энергии системы: *если система движется под действием одних консервативных сил, то сумма кинетической и потенциальной энергии сохраняет постоянное значение.*

8.4.8.2. Теорема об изменении кинетической энергии относительного движения

При исследовании движения механической системы относительно неинерциальной системы координат в правую часть, к работам внешних и внутренних сил, действующих на точки системы необходимо добавить работу сил инерции. Однако, учитывая результаты, полученные при записи теоремы об изменении кинетической энергии точки в относительном движении, работа кориолисовых сил инерции будет равна нулю, поэтому теорема об изменении кинетической энергии системы в ее относительном движении примет следующий вид:

$$T_r - T_{r0} = A^e + A^i + \sum_{k=1}^{n} A_{ke}$$

При поступательном движении неинерциальной системы координат, переносные ускорения всех точек системы равны ускорению начала координат подвижной системы, поэтому элементарная работа сил инерции может быть

записана следующим образом:

$$\sum_{k=1}^{n}\delta A_{ke}=\sum_{k=1}^{n}\vec{\Pi}_{ke}\cdot\tilde{d}\vec{\rho}=\sum_{k=1}^{n}\Pi_{ke}d\rho=$$
$$=-\sum_{k=1}^{n}m_k\vec{a}_{ke}\cdot d\vec{\rho}=-\sum_{k=1}^{n}m_k\vec{a}_0\cdot d\vec{\rho}=-\left(\sum_{k=1}^{n}m_k d\vec{\rho}\right)\cdot\vec{a}_0 \quad (8.32)$$

Преобразуем выражение в скобках, учитывая формулу определения положения центра масс системы точек: $\sum m_k\vec{\rho}_k=M\vec{\rho}_c$:

$$\sum_{k=1}^{n}\delta A_{ke}=-M\vec{a}_0\cdot d\vec{\rho}_c$$

Работа при перемещении системы из некоторого начального положения в конечное, определится интегрированием последнего выражения:

$$\sum_{k=1}^{n}A_{ke}=\sum_{k=1}^{n}\int\delta A_{ke}=\int(-M\vec{a}_0\cdot d\vec{\rho}_c)$$

Т.е. эта работа определится как работа переносной силы инерции центра масс, в предположении, что в нем сосредоточена масса всей системы.

Таким образом, Теорема об изменении кинетической системы в относительном движении, при поступательном переносном движении будет иметь следующий вид:

$$T_r-T_{r0}=A^e+A^r+A(-M\vec{a}_0).$$

Если ускорение полюса постоянно по модулю и направлению, то переносная сила инерции будет консервативна с потенциальной энергией: $\Pi^* = -M\vec{a}_0 \cdot \rho_c$. Если и остальные силы, действующие на систему потенциальны, то теорема об изменении кинетической энергии примет следующий вид:

$$T_r + \Pi + \Pi^* = h = const$$

Глава 9

Метод кинетостатики

9.1. Принцип Даламбера

Рассмотрим материальную точку массы m_k. Пусть на точку действуют активные силы с равнодействующей $\vec{F}_k$ и силы реакции с равнодействующей $\vec{R}_k$. Уравнение движения рассматриваемой материальной точки будет иметь следующий вид:

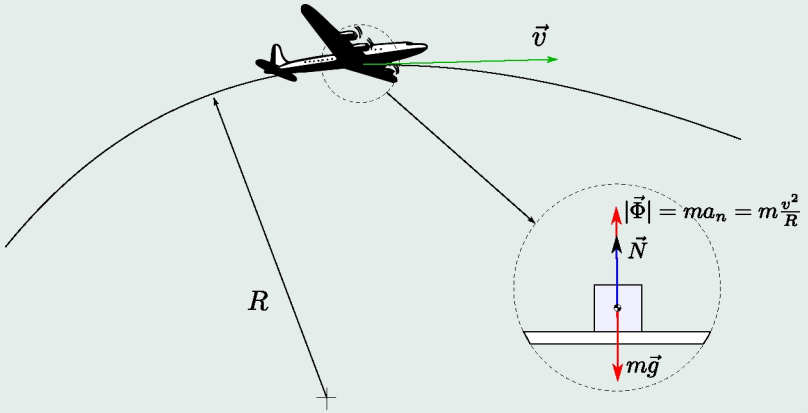
$$m_k\vec{a}_k = \vec{F}_k + \vec{R}_k.$$

Это уравнение можно привести к форме *уравнения равновесия* материальной точки, если перенести в правую часть произведение массы точки на её ускорение:

$$\vec{F}_k + \vec{R}_k + \vec{\Phi}_k = 0, \tag{9.1}$$

где $\vec{\Phi}_k = -m_k\vec{a}_k$ - *вектор, равный по модулю произведению массы точки на её ускорение и направленный в противоположную сторону ускорения, называемый силой инерции.* Уравнение (9.1) представляет собой математическую запись принципа Даламбера: *в каждый момент времени сумма векторов активных сил, реакции связей и сил инерции движущейся материальной точки равна нулю.* Принцип Даламбера обычно используется для определения реакций при известном законе движения точки.

Пример 11. *Самолет, двигаясь в вертикальной плоскости, совершает маневр "горка". Найти радиус кривизны траектории R движения самолета в наивысшей точке, чтобы вес экипажа стал равен нулю. Скорость самолета в наивысшей точке равна v=900 км/ч = 250 м/с.*



Рассмотрим материальную точку внутри самолета, находящуюся в

равновесии. На точку действует сила тяжести и сила реакции опоры. К этим силам необходимо добавить силу инерции: при движении самолета по криволинейной траектории, сила инерции направлена в противоположную сторону нормального ускорения точки, движущейся вместе с самолетом. Это ускорение равно v^2/R. Воспользовавшись уравнением кинетостатики, запишем:

$$\vec{\Phi} + \vec{N} + m\vec{g} = 0.$$

В проекции на вертикальную ось это уравнение примет вид:

$$m\frac{v^2}{R} + N - mg = 0.$$

Для того чтобы экипаж почувствовал состояние невесомости, необходимо чтобы сила реакции опоры, равная весу тел, стала равна нулю:

$$m\frac{v^2}{R} + 0 - mg = 0,$$

следовательно, радиус кривизны траектории:

$$R = \frac{v^2}{g}.$$

Для материальной системы в целом аналогичные уравнения можно получить, сложив уравнения (9.1) для каждой точки:

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k + \sum_{k=1}^{n} \vec{R}_k + \sum_{k=1}^{n} \vec{\Phi}_k.$$

или

$$\vec{F} + \vec{R} + \vec{\Phi} = 0, \tag{9.2}$$

где $\vec{F}$ - главный вектор всех активных сил, действующих на систему, $\vec{R}$ - главный вектор сил реакции. Уравнение (9.2) можно сформулировать следующим образом: *в каждый момент времени сумма главных векторов активных сил, реакции связей и сил инерции движущейся материальной системы равна нулю.*

Выбрав в качестве полюса произвольную точку O, запишем уравнение моментов:

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{r}_k \times \vec{F}_k + \sum_{k=1}^{n} \vec{r}_k \times \vec{R}_k + \sum_{k=1}^{n} \vec{r}_k \times \vec{\Phi}_k,$$

или, введя обозначения $\vec{M}_O, \vec{M}_O^R, \vec{M}_O^\Phi$ для главного момента активных сил, сил реакции и сил инерции:

$$\vec{M}_O + \vec{M}_O^R + \vec{M}_O^\Phi = 0 \tag{9.3}$$

где $\vec{r}_k$ - радиус вектор точки относительно полюса O. Таким образом, *в каждый момент времени сумма главных моментов активных сил, реакций связей и сил инерции движущейся материальной системы равна нулю.* При вычислении главного вектора и главного момента внешних сил и сил реакции следует учитывать, что главный вектор и главный момент внутренних сил равен нулю.

Векторные уравнения (9.2) и (9.3), в проекциях на оси декартовой системы координат, приводят к шести уравнениям, которые можно рассматривать

как уравнения равновесия тела по действием активных сил, сил реакции и сил инерции.

Приведенные уравнения можно использовать для вычисления сил реакций при заданном движении тела.

9.2. Вычисление главного вектора и главного момента сил инерции твердого тела

9.2.1. Определение главного вектора сил инерции

Сравнивая выражение (9.2) с векторной записью теоремы об изменении количества движения:

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{F}^e,$$

можно сделать вывод о том, что *главный вектор сил инерции равен производной по времени от количества движения материальной системы, умноженной на -1* [2]. Аналогично, записав теорему об изменении момента количества движения системы в виде:

$$\vec{F}^e - \frac{d\vec{K}}{dt} = 0,$$

можно сделать вывод о том, что *главный момент всех сил инерции равен производной по времени от момента количества движения материальной*

системы, умноженной на -1 [2].

Поскольку производная количества движения твердого тела определяется как:

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = M\vec{a}_c,$$

то *главный вектор сил инерции твердого тела при любом его движении равен силе инерции его центра масс, в предположении, что в нем сосредоточена масса всей системы*:

$$\vec{\Phi} = -M\vec{a}_c. \tag{9.4}$$

9.2.2. Определение главного момента сил инерции

Определим главный момент сил инерции твердого тела в некоторых частных случаях.

9.2.2.1. Поступательное движение.

При поступательном движении ускорения всех точек равны, поэтому главный момент сил инерции относительно центра масс будет равен нулю. Действительно:

$$M_\Phi^C = -\sum \vec{\rho}_i \times m_i\vec{a}_i = -\sum \vec{\rho}_i \times m_i\vec{a}_c = -\underbrace{\sum m_i\vec{\rho}_i}_{=0} \times\vec{a}_c = 0.$$

Таким образом, при поступательном движении твердого тела силы инерции его точек приводятся к равнодействующей, приложенной в центре масс и равной главному вектору сил инерции (9.4).

9.2.2.2. Вращение твердого тела, имеющего плоскость материальной симметрии, вокруг неподвижной оси, перпендикулярной этой плоскости.

Из условия симметрии твердого тела относительно плоскости симметрии, силы инерции точек тела, лежащих на прямой, перпендикулярной плоскости симметрии будут равны и их равнодействующая будет приложена в точке пересечения прямой с плоскостью симметрии. Таким образом можно перейти к рассмотрению вращения плоской фигуры, имеющей массу, равную массе всего тела и момент инерции относительно оси вращения, равный моменту инерции тела относительно этой же оси.

Для определения главного момента сил инерции разложим ускорение и силу инерции каждой точки тела на вращательную и осестремительную (центробежную для силы инерции) составляющие. Тогда момент силы инерции *относительно центра вращения - точки O* будет определятся только вращательным ускорением, поскольку линия действия центробежных сил проходит через ось вращения:

$$M_\Phi = \sum \Phi_i^\tau r_i = -\sum m_i a_i^\tau r_i = -m_i r_i^2 \varepsilon = -\varepsilon \sum m_i r_i^2 = -J_z \varepsilon.$$

Вектор $\vec{M}_\Phi$ направлен перпендикулярно плоскости фигуры и направлен в

противоположную сторону направления вектора углового ускорения:

$$\vec{M}_{\Phi} = -J_z\vec{\varepsilon}.$$

Главный вектор (9.4) и пару сил лежащих в одной плоскости можно заменить эквивалентной силой, равной (9.4) и отстоящей от центра приведения O на расстоянии:

$$h = M_{\Phi}/\Phi. \tag{9.5}$$

При вращении твердого тела, имеющего плоскость материальной симметрии, вокруг оси, перпендикулярной этой плоскости, силы инерции точек тела приводятся к равнодействующей силе, лежащей в плоскости симметрии. Модуль и направление этой силы определяются выражением (9.4), *а расстояние от ее линии действия до точки пересечения оси вращения с плоскостью симметрии - выражением* (9.5).

Если ось вращения проходит через центра масс тела, то главный вектор внешних сил равен нулю, так как ускорение центра масс равно нулю. Поэтому *силы инерции точек приводятся к паре сил, лежащей в плоскости материальной симметрии, момент которой равен:*

$$M_{\Phi} = -J_{Cz}\varepsilon,$$

где J_{Cz} - момент инерции тела относительно главной центральной оси.

9.2.2.3. Плоское движение твердого тела, имеющего плоскость материальной симметрии.

Плоское движение твердого тела можно разложить на поступательное движение вместе с центром масс и вращательное движение вокруг оси проходящей через центр масс и перпендикулярной плоскости симметрии. Силы инерции поступательного движения приводятся к главному вектору:

$$\vec{\Phi} = -M\vec{a}_c.$$

Силы инерции точек вращательного движения приводятся к паре сил, лежащей в плоскости симметрии и имеющей момент:

$$M_\Phi = -J_{Cz}\varepsilon.$$

Таким образом, *если твердое тело, имеющее плоскость материальной симметрии, движется параллельно этой плоскости, то силы инерции точек тела приводятся к силе, приложенной в центре масс и равной главному вектору сил инерции, и к паре сил, лежащей в плоскости симметрии.*

Пример 12. *Определение динамических реакций [2]. Две материальные точки M_1 и M_2 одинаковой массы m прикреплены при помощи горизонтальных стержней равной длины к вертикальной оси AB. Пренебрегая весом стержней, определить реакции опор вала, если вся система вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси AB (рисунок 9.1). При равномерном вращении ускорения точек M_1 и M_2 будут направ-*

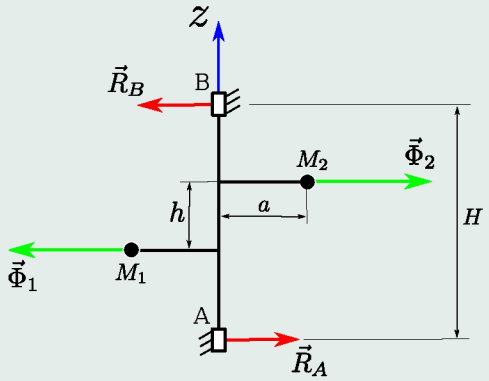


Рис. 9.1. Определение реакций опор

лены к оси вращения и будут равны:

$$a_1^n = a_2^n = \omega^2 a.$$

Силы инерции $\vec{\Phi}_1$ *и* $\vec{\Phi}_2$ *будут направлены в противоположную сторону, и эти сиы инерции образуют пару сил* $(\vec{\Phi}_1, \vec{\Phi}_2)$ *которая должна быть уравновешена парой сил образованной реакцией опор A и B. Момент пары сил инерции определяется следующим образом:*

$$M_\Phi = ma\omega^2 h.$$

Момент пары сил реакций опор (симметрия задачи позволят считать $R_A = R_B$*):*

$$M_R = R_A H.$$

Учитывая равенство моментов пар сил, получим выражение для определения реакции опоры:

$$R_A = R_B = ma\omega^2 \frac{h}{H}.$$

Глава 10

Аналитическая механика

10.1. Связи

Свободная система материальных точек - система, положения и скорости отдельных точек которой, могут принимать произвольные значения. В противном случае система называется *несвободной*.

При рассмотрении несвободной системы необходимо задать ограничения, накладываемые на координаты и скорости. Эти ограничения выражаются уравнениями связи. Так, например, если две материальный точки M_1, M_2 связаны нерастяжимым невесомым стержнем длиной l, то уравнение связи будет иметь вид:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = l^2,$$

т.е., расстояние между точками остается постоянным и равным длине стержня l. Уравнения связи могут выражаться в виде равенств, как это было в последнем примере и неравенств. В первом случае связи называются *удерживающими*, во втором случае - *неудерживающими*. Примером неудерживающей связи может быть нить к которой подвешена материальная точка (рисунок).

Если в уравнения связи не входит явно время, то такая связь называется *стационарной*, иначе связь называется нестационарной (рисунок).

Связи называются *голономными* если если их уравнения могут быть записаны в виде не содержащем производных от координат по времени или дифференциалов координат.

Связи называются *неголономными*, если их уравнения содержат неинтегрируемым образом производные от координат по времени или дифференциалы координат. Далее будут рассматриваться только голономные связи. Рассмотренная классификация связей приведена на рисунке 10.1.

При рассмотрении твердого тела следует учитывать, что несмотря на то, что тело состоит из множества материальных точек для которых можно записать бесконечное число уравнений связи, выражающих неизменность расстояния между ними, положение твердого тела задается конечным числом координат. Например положение твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси задается одним углом. Положение плоской фигуры на плоскости - тремя параметрами. Поэтому, для несвободного твердого тела следует составлять уравнения связи для параметров определяющих положение свободного тела.

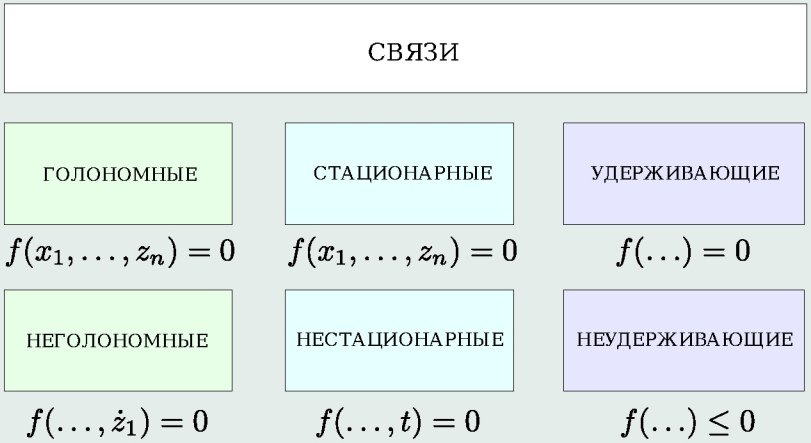


Рис. 10.1. Виды связей

10.2. Виртуальные и действительные перемещения

Рассмотрим материальную точку на которую наложена удерживающая голономная связь:

$$f(x, y, z, t) = 0.$$

В момент времени t точка занимает положение M_0, определяемое вектором $\vec{r}_0$ с координатами (x_0, y_0, z_0). Рассмотрим малое перемещение $\delta\vec{r}$ точки при

фиксированном времени, *которое допускается связями*, наложенными на точку. После разложения уравнения связи в ряд в окрестности (x_0, y_0, z_0) получим:

$$f(x_0+\delta x, y_0+\delta y, z_0+\delta z, t) = f(x_0, y_0, z_0, t) + \frac{\partial f}{\partial x}_0 \delta x + \frac{\partial f}{\partial y}_0 \delta y + \frac{\partial f}{\partial z}_0 \delta z + \dots .$$

Первое слагаемое равно нулю, поэтому:

$$f(x_0+\delta x, y_0+\delta y, z_0+\delta z, t) = \frac{\partial f}{\partial x}_0 \delta x + \frac{\partial f}{\partial y}_0 \delta y + \frac{\partial f}{\partial z}_0 \delta z + \dots$$

Виртуальным перемещением точки называется такое малое перемещение $\delta\vec{r}$, мысленно осуществляемое из данного положения при фиксированном времени t, которое с точностью до членов первого порядка малости включительно не нарушают связи [2]. Таким образом, проекции виртуального перемещения должны удовлетворять следующему уравнению:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \delta y + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0 \delta z = 0 \qquad (10.1)$$

Геометрически, вектор виртуального перемещения перпендикулярен нормали к поверхности описываемой уравнением связи, в точке (x_0, y_0, z_0):

$$f(x, y, z, t) = 0.$$

при фиксированном времени t. Виртуальных перемещений, которые удовлетворяют уравнению (10.1) может быть множество, однако *действительное*

перемещение точки, определяемое силами, действующими на точку только одно. Если связь стационарна, то в плоскости перпендикулярной поверхности в точке:

$$f(x, y, z) = 0$$

всегда можно найти виртуальное перемещение, которое будет совпадать с действительным. При нестационарной связи поверхность, определяемая урав-

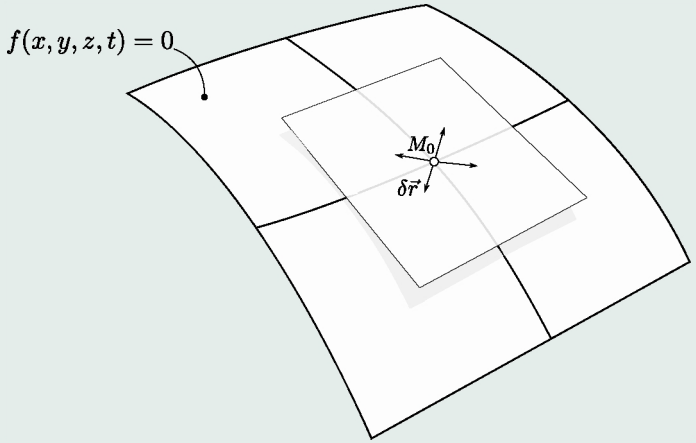


Рис. 10.2. Возможные перемещения

нением при фиксированном времени:

$$f(x, y, z, t) = 0$$

не будет содержать траекторию точки, поэтому и среди возможных перемещений не будет действительного.

Если на систему материальных точек наложено h связей:

$$f_i(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n, t) = 0,\ i = 1, \ldots, h,$$

то виртуальным перемещением системы называется малое перемещение ее точек $\delta\vec{r}_1, \delta\vec{r}_2, \ldots, \delta\vec{r}_n$ из данного положения при фиксированном времени, при котором справедливы равенства:

$$\sum_{k=1}^{n} \left[\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k} \right)_0 \delta x_k + \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_k} \right)_0 \delta y_k + \left(\frac{\partial f_i}{\partial z_k} \right)_0 \delta z_k \right] = 0, i = 1, \ldots, h.$$

10.2.1. Виртуальная работа

Виртуальной работой называется сумма работ всех сил, действующих на материальные точки системы, на виртуальном перемещении, в предположении, что на этом виртуальном перемещении силы не меняются:

$$\delta A = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k \cdot \delta\vec{r}_k.$$

10.2.2. Идеальные связи

Связи называются идеальными, если сумма работ всех реакций связей на любом виртуальном перемещении равна нулю. Обозначив равнодействующую сил реакции, действующих на точку k - $\vec{R}_k$, условие идеальности можно записать в виде:

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{R}_k \cdot \delta\vec{r}_k = 0.$$

Другими словами, *реакция идеальной связи перпендикулярна виртуальному перемещению.*

Пример 13. *Рассмотрим две материальные точки A и B, соединенные недеформируемым стержнем. Уравнение связи имеет следующей вид:*

$$(\vec{r}_A - \vec{r}_B)^2 = AB^2 = const.$$

Работа сил реакции на виртуальном перемещении:

$$\vec{R}_A \cdot \delta\vec{r}_A + \vec{R}_B \cdot \delta\vec{r}_B = \vec{R}_A \cdot \delta\vec{r}_A - \vec{R}_B \cdot \delta\vec{r}_B = \vec{R}_A \cdot (\delta\vec{r}_A - \delta\vec{r}_B)$$

Проварьировав уравнение связи, получим следующее соотношение:

$$(\vec{r}_A - \vec{r}_B) \cdot (\delta\vec{r}_A - \delta\vec{r}_B) = 0,$$

из которого следует, что вектор $(\delta\vec{r}_A - \delta\vec{r}_B)$ перпендикулярен AB. Поэтому работа сил реакций на виртуальном перемещении будет равна нулю, поскольку $\vec{R}_A \perp \overrightarrow{AB}$:

$$\vec{R}_A \cdot (\delta\vec{r}_A - \delta\vec{r}_B).$$

10.3. Обобщенные координаты

Рассматривая систему n материальных точек, на которую наложены h голономных, идеальных, удерживающих связей:

$$f_i(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n, t) = 0, \ i = 1, \ldots, h,$$

можно отметить, что число независимых координат, определяющих положение системы будет меньше $3n$ на количество уравнений связи - h:

$$s = 3n - h.$$

Таким образом, в качестве *независимых координат* можно выбрать s новых координат, при помощи которых можно однозначно задать положение системы:

$$\vec{r}_k = \vec{r}_k(q_1, q_2, \ldots, q_s). \tag{10.2}$$

Эти координаты называются *обобщенными координатами.*

Если система голономная и число независимых координат, определяющих ее положение, равно s, то столько же будет и *независимых* вариаций координат. Это количество независимых вариаций координат, определяющих положение системы, называется *числом степеней свободы.*

Для неголономной системы число степеней свободы будет меньше числа обобщенных координат. Если движение системы подчинено h голономным связям и m неголономным, которые обычно имеют следующий вид:

$$a_{r1}\dot{q}_1 + a_{r2}\dot{q}_2 + \ldots + a_{rs}\dot{q}_s + a_r = 0, \quad r = 1, \ldots, m.$$

где a_{rk}, a_r - функции обобщенных координат и времени. Вариации обобщенных координат системы будут подчинены m условиям:

$$a_{r1}\delta q_1 + a_{r2}\delta q_2 + \ldots + a_{rs}\delta q_s = 0, \quad r = 1, \ldots, m.$$

Таким образом, число независимых вариаций обобщенных координат будет равно $s - m$.

10.3.1. Обобщенные силы

Вычислим виртуальную работу активных сил, на виртуальном перемещении:

$$\delta A = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k \cdot \delta\vec{r}_k, \tag{10.3}$$

учитывая, что:

$$\delta\vec{r}_k = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_i}\delta q_i, \quad k = 1, \ldots, n,$$

выражение для виртуальной работы примет следующий вид:

$$\delta A = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k \cdot \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_i}\delta q_i.$$

Перепишем последнее уравнение, изменив порядок суммирования:

$$\delta A = \sum_{i=1}^{s} \left(\sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k \cdot \frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_i} \right) \delta q_i.$$

Выражение в скобках представляет собой *обобщенную силу* Q_i:

$$Q_i = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i}, \quad i = 1, \ldots, s. \tag{10.4}$$

Таким образом, работа сил на виртуальном перемещении будет определятся следующим образом:

$$\delta A = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \ldots + Q_s \delta q_s. \tag{10.5}$$

Размерность обобщенной силы может отличаться от размерности обычно силы, поскольку если, например, обобщенная координата q_i имеет размерность угла, то размерность обобщенной силы будет иметь размерность момента.

10.3.2. Вычисление обобщенных сил

1) Использование выражения, определяющего обобщенную силу:

$$Q_i = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i}.$$

Раскрывая скалярное произведение получим координатную форму:

$$Q_i = \sum_{k=1}^{n} \left(\vec{F}_{kx} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} + \vec{F}_{ky} \frac{\partial y_k}{\partial q_i} + \vec{F}_{kz} \frac{\partial z_k}{\partial q_i} \right).$$

2) Обобщенную силу Q_i можно определить используя выражение (10.5). Дадим системе виртуальное перемещение при котором все вариации обобщенных координат кроме δq_i равны нулю, и вычислим работу сил на этом виртуальном перемещении. Коэффициент при виртуальном перемещении в выражении для работы и определит обобщенную силу:

$$\delta A_i = Q_i \delta q_i.$$

3) Для консервативных сил обобщенные силы вычисляются следующим образом:

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}, \quad i = 1, \ldots, s.$$

Действительно, подставив в (10.4) выражение для консервативных сил:

$$F_{kx} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_k}, \; F_{ky} = -\frac{\partial \Pi}{\partial y_k}, \; F_{kz} = -\frac{\partial \Pi}{\partial z_k},$$

получим:

$$\boxed{Q_i = -\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial q_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial y_k}\frac{\partial y_k}{\partial q_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial z_k}\frac{\partial z_k}{\partial q_i} \right) = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}}$$

10.4. Общее уравнение динамики

Рассмотрим систему n материальных точек, ограниченную h идеальными удерживающими и голономными связями. На каждую точку действует

главный вектор активных сил $\vec{F}_k$ и главный вектор сил реакции $\vec{R}_k$. Уравнение движения материальной точки будет иметь следующий вид:

$$m_k\vec{a}_k = \vec{R}_k + \vec{F}_k, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Для фиксированного момента времени t, умножим каждое уравнение на виртуальное перемещение $\delta\vec{r}_k$ и сложим все n уравнений:

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\vec{F}_k - m_k\vec{a}_k\right) \delta\vec{r}_k + \sum_{k=1}^{n} \vec{R}_k\delta\vec{r}_k = 0.$$

Учитывая, что работа реакций идеальных связей на виртуальном перемещении равна нулю:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \left(\vec{F}_k - m_k\vec{a}_k\right) \delta\vec{r}_k = 0} \tag{10.6}$$

Уравнение (10.6) представляет собой общее уравнение динамики. *При движении материальной системы с идеальными и удерживающими связями работа всех активных сил $\vec{F}_k$ и сил инерции $-m_k\vec{a}_k$ на любом виртуальном перемещении равна нулю.*

10.5. Общее уравнение статики

Для механических систем находящихся в равновесии, т.е. в таком положении, в котором система может находится все время, имея в начальный

момент времени нулевые скорости всех точек, общее уравнение динамики будет иметь следующий вид:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k \cdot \delta\vec{r}_k = 0} \tag{10.7}$$

Это уравнение представляет собой *принцип виртуальных перемещений. Для того чтобы некоторое совместимое со связями положение системы было положением равновесия, необходимо и достаточно, чтобы в этом положении сумма работ активных сил на любых виртуальных перемещениях системы равнялась нулю.*

Если уравнение системы определяется s обобщенными координатами, то уравнение (10.7), представляющее собой работу активных сил на виртуальном перемещении, будет иметь вид:

$$Q_1\delta q_1 + Q_2\delta q_2 + \ldots + Q_s\delta q_s = 0.$$

Так как обобщенные координаты независимы, следовательно и вариации их независимы, поэтому для того чтобы последнее уравнение было равно нулю необходимо, чтобы все обобщенные силы были равны нулю:

$$Q_1 = 0,\ Q_2 = 0,\ Q_3 = 0, \ldots Q_s = 0.$$

Таким образом, для равновесия механической системы с идеальными, стационарными и голономными связями необходимо и достаточно, чтобы все обобщенные силы равнялись нулю.

Пример 14. *Пример*

10.6. Уравнение Лагранжа II-го рода

Запишем общее уравнение динамки в следующем виде:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\vec{F}_k - m_k\frac{d\vec{v}_k}{dt}\right)\cdot\delta\vec{r}_k = 0.$$

Подставив в последнее выражение вариацию радиус-вектора через, выраженную через вариации обобщенных координат, умножив уравнение на -1 и изменив порядок суммирования, получим:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\vec{F}_k - m_k\frac{d\vec{v}_k}{dt}\right)\cdot\sum_{i=1}^{s}\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_j}\delta q_j = \sum_{i=1}^{s}\sum_{k=1}^{n}\left(m_k\frac{d\vec{v}_k}{dt} - \vec{F}_k\right)\cdot\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_j}\delta q_j =$$

$$= \sum_{i=1}^{s}\left[\sum_{k=1}^{n} m_k\frac{d\vec{v}_k}{dt}\cdot\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_i} - \underbrace{\sum_{k=1}^{n}\vec{F}_k\cdot\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_i}}_{Q_i}\right]\delta q_i = 0. \quad (10.8)$$

Учитывая, что:

$$\sum_{k=1}^{n}\vec{F}_k\cdot\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_i} = Q_i,$$

перепишем полученное уравнение в следующем виде:

$$\sum_{i=1}^{s}\left[\sum_{k=1}^{n} m_k\frac{d\vec{v}_k}{dt}\cdot\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_i} - Q_i\right]\delta q_i = 0. \quad (10.9)$$

Первое слагаемое в квадратных скобках можно представить следующим образом:

$$\frac{d\vec{v}_k}{dt}\cdot\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_i}=\frac{d}{dt}\left(m_k\vec{v}_k\cdot\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_i}\right)-m_k\vec{v}_k\cdot\frac{d}{dt}\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_i}. \tag{10.10}$$

Выразим скорость точки через производные по общенным координатам:

$$\vec{v}_k=\frac{d}{dt}\vec{r}_k(q_1,q_2,\ldots,q_s,t)=\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_1}\dot{q}_1+\ldots+\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_s}\dot{q}_s+\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial t};$$

здесь $\dot{q}_i$ - обобщенная скорость. Из последнего уравнения следует, что:

$$\frac{\partial\vec{v}_k}{\partial\dot{q}_i}=\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_i}.$$

Найдем производную по времени от частной производной радиус-вектора $\vec{r}_k$ по обобщенной координате:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_i}=\frac{\partial^2\vec{r}_k}{\partial q_i\partial q_1}\dot{q}_1+\ldots+\frac{\partial^2\vec{r}_k}{\partial q_i\partial q_s}\dot{q}_s+\frac{\partial^2\vec{r}_k}{\partial q_i\partial t}.$$

С другой стороны, частная производная скорости точки по обобщенной координате:

$$\frac{\partial\vec{v}_k}{\partial q_i}=\frac{\partial^2\vec{r}_k}{\partial q_i\partial q_1}\dot{q}_1+\ldots+\frac{\partial^2\vec{r}_k}{\partial q_i\partial q_s}\dot{q}_s+\frac{\partial^2\vec{r}_k}{\partial q_i\partial t}.$$

Таким образом:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_i}=\frac{\partial\vec{v}_k}{\partial q_i}. \tag{10.11}$$

Заменим в уранении (10.10) $\frac{d}{dt}\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i}$ на $\frac{\partial \vec{v}_k}{\partial q_i}$, а второе слагаемое перепишем с учетом (10.11):

$$\frac{d\vec{v}_k}{dt}\cdot\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\left(m_k\vec{v}_k\cdot\frac{\partial \vec{v}_k}{\partial \dot{q}_i}\right) - m_k\vec{v}_k\cdot\frac{\partial \vec{v}_k}{\partial q_i}. \qquad (10.12)$$

Используя следующие соотношения:

$$m_k\vec{v}_k\cdot\frac{\partial \vec{v}_k}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{1}{2}m_k v_k^2\right),\ m_k\vec{v}_k\cdot\frac{\partial \vec{v}_k}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{1}{2}m_k v_k^2\right),$$

Приведем последнее равенство к виду:

$$\frac{d\vec{v}_k}{dt}\cdot\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{1}{2}m_k v_k^2\right)\right] - \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{1}{2}m_k v_k^2\right).$$

После преобразования первого слагаемого, уравнение (10.9) примет следующий вид:

$$\sum_{i=1}^{s}\left\{\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{1}{2}m_k v_k^2\right)\right] - \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{1}{2}m_k v_k^2\right)\right] - Q_i\right\}\delta q_i = 0.. \qquad (10.13)$$

или

$$\sum_{i=1}^{s}\left\{\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\sum_{k=1}^{n}\frac{m_k v_k^2}{2} - \frac{\partial}{\partial q_i}\sum_{k=1}^{n}\frac{m_k v_k^2}{2} - Q_i\right\}\delta q_i = 0. \qquad (10.14)$$

Поскольку

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{m_k v_k^2}{2} = T,$$

где T - кинетическая энергия системы, последнее уравнение можно записать следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{s}\left\{\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial T}{\partial q_i}-Q_i\right\}\delta q_i=0.$$

Так как обобщенные координаты независимы, то независимы и их вариации при голономных связях, поэтому дял кажого i выражения в скобках равны нулю:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial T}{\partial q_i}=Q_i,\quad i=1,2,\ldots,s} \tag{10.15}$$

Полученные уравнения представляют собой уравнения Лагранжа второго рода.

10.7. Выражение кинетической энергии через обобщенные скорости и координаты

Подставим в выражение кинетической энергии системы:

$$T=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}m_k v_k^2$$

скорость, выраженную через обобщенные координаты и их производные:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k \left(\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \ldots + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_s}\dot{q}_s + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial t} \right)^2 .$$

Раскрывая скобки и группируя слагаемые по степеням производных обобщенных координат, получим слеющее выражение для кинетической энергии:

$$T = T_2 + T_1 + T_0,$$

где:

$$T_2 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k \left[\left(\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1} \right)^2 \dot{q}_1^2 + \ldots + \left(\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_s} \right)^2 \dot{q}_s^2 \right] + T_{21} \tag{10.16}$$

$$T_{21} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k \left[2\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_2}\dot{q}_1\dot{q}_2 + \ldots + 2\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_{s-1}} \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_s}\dot{q}_{s-1}\dot{q}_s \right], \tag{10.17}$$

$$T_1 = \sum_{k=1}^{n} m_k \left(\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial t}\dot{q}_1 + \ldots + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_s} \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial t}\dot{q}_s \right), \tag{10.18}$$

$$T_0 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k \left(\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial t} \right)^2 . \tag{10.19}$$

Используя обозначения:

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} m_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j},\ b_i = \sum_{k=1}^{n} m_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial t},$$

функции T_2 и T_1 можно переписать в следующей форме:

$$T_2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s} a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j.$$

$$T_1 = \sum_{i=1}^{s} b_i\dot{q}_i.$$

Коэффициенты a_{ij} называются коэффициентами инерции. Коэффициенты инерции обладают следующим свойством:

$$a_{ij} = a_{ji}.$$

Таким образом,в общем случае кинетическую энергию материальной системы можно представить суммой квадратичной T_2, линейной T_1 и нулевой T_0 форм относительно обобщенных скоростей.

При стационарных связях время явно не входит в выражение радиус-вектора $\vec{r}_i$, поэтому кинетическая энергия будет квадратичной формой обобщенных скоростей:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s} a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j.$$

10.8. Уравнение Лагранжа второго рода в случае потенциальных сил.

Если на систему действуют только потенциальные силы, обобщенные силы можно выразить через частные производные по обобщенным координатам:

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}.$$

В этом случае, уравнения Лагранжа второго рода примет следующий вид:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, s$$

Уравнения Лагранжа можно преобразовать, введя функцию Лагранжа:

$$L = T - \Pi,$$

которая называется кинетическим потенциалом. Поскольку потенциальная энергия является функцией только обобщенных координат, из чего следует, что:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}_i} = 0, \quad i = 1, \ldots, s,$$

Выразив частные производные кинетической энергии следующим образом:

$$T = L + \Pi, \ \frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i}, \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i},$$

получим уравнения Лагранжа второго рода для консервативной системы:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \ldots, s. \tag{10.20}$$

10.9. Равновесие механических систем

Рассмотрим механическую систему с идеальными, стационарными и голономными связями. Конфигурация системы задается s обобщенными координатами $q_1, \ldots, q_s$. В предыдущем разделе были получены условия равновесия:

$$Q_1 = 0, Q_2 = 0, \ldots, Q_s = 0. \tag{10.21}$$

Если обобщенные силы зависят только от обобщенных координат, то последнее уравнение представляет собой систему уравнений относительно обобщенных координат из которых можно определить конфигурации системы в которых система может находится в равновесии. Поскольку предполагается, что в положении равновесия система находится в покое, поэтому даже если обобщенные силы зависят от обобщенных скоростей, для определения положения равновесия обобщенные скорости следует принять равными нулю.

Если механическая система консервативная то, для определения положения равновесия следует использовать уравнения:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_1} = 0, \ \frac{\partial \Pi}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial \Pi}{\partial q_s} = 0.$$

10.9.1. Устойчивость положения равновесия

Положение равновесия, найденное при помощи уравнений (10.21), может быть устойчивым или неустойчивым. Например, физический маятник, изображенный на рисунке **??** имеет два положения равновесия: нижнее положение - устойчивое, верхнее - неустойчивое. Действительно, любое малое отклонение от верхнего положения равновесия приведет к тому, что физический маятник в своем дальнейшем движении начнет удаляться от этого положения равновесия. Однако, при малом отклонении от нижнего положения равновесия, маятник начнет совершать колебания около этого положения равновесия.

Предположим, что в положении равновесия обобщенные координаты равны нулю. Выведем в момент времени t_0 систему из положения равновесия, сообщив ей небольшие значения обобщенных скоростей и координат, называемые *возмущения*:

$$q_1^0, \ldots, q_s^0, \dot{q}_1^0, \ldots, \dot{q}_s^0.$$

После отклонения от положения равновесия обобщенные координаты и скорости будут изменяться по некоторым законам:

$$q_1(t), \ldots, q_s(t), \dot{q}_1(t), \ldots, \dot{q}_s(t).$$

Если по $2s$ сколь угодно малым положительным числам:

$$\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_s, \varepsilon'_1, \ldots, \varepsilon'_s$$

можно найти другие $2s$ положительных числа:

$$\delta_1, \ldots, \delta_s, \delta'_1, \ldots, \delta'_s$$

Такие, что при *возмущениях*:

$$|q_1^0| \leq \delta_1, \ldots, |q_s^0| \leq \delta_s, |\dot{q}_1^0| \leq \delta_1', \ldots, |\dot{q}_s^0| \leq \delta_s'.$$

для всякого времени $t > t_0$:

$$|q_1(t)| \leq \varepsilon_1, \ldots, |q_s(t)| \leq \varepsilon_s, |\dot{q}_1(t)| \leq \varepsilon_1', \ldots, |\dot{q}_s(t)| \leq \varepsilon_s',$$

то такое положение равновесия называется *устойчивым*, в противном случае *неустойчивым*. Если с течением времени обобщенные координаты и скорости стремятся к нулю, то такое положение равновесия называется *асимптотически устойчивым*.

Теорема 12. *Теорема Лагранжа-Дирихле. Если в положении изолированного равновесия консервативной системы с идеальными и стационарными связями потенциальная энергия имеет минимум, то это положения равновесия устойчиво.*

Для системы с одной степенью свободы доказать устойчивость положения равновесия можно используя вторую производную функции потенциальной энергии: в положении устойчивого положения равновесия вторая производная $\Pi(q)$ должна быть больше нуля:

$$\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2}\right)_0 > 0.$$

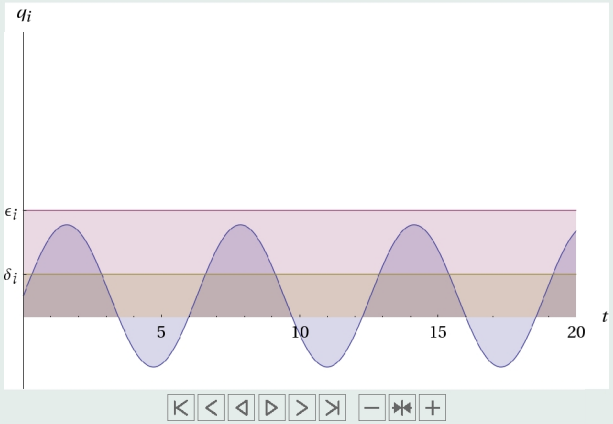


Рис. 10.3. К определению устойчивого положения равновесия

10.9.2. Определение устойчивого положения равновесия системы с несколькими степенями свободы

Для консервативной механической системы с s степенями свободы устойчивость положения равновесия определяется также из условия минимума потенциальной энергии, однако усложняется сама задача определения минимума потенциальной энергии.

Рассмотрим положение равновесия механической системы, предполагая,

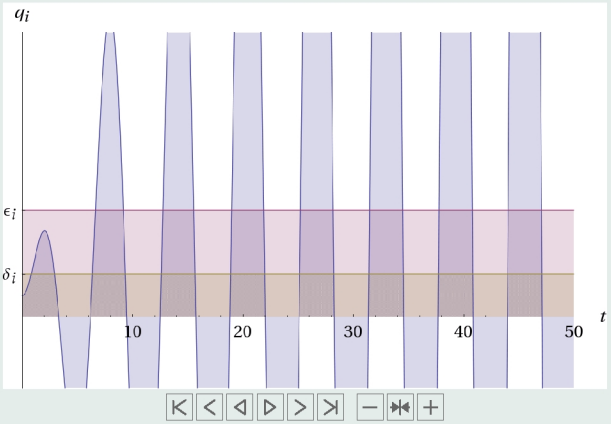


Рис. 10.4. К определению неустойчивого положения равновесия

что в положении равновесия потенциальная энергия равна нулю, а также, что в рассматриваемом положении равновесия обобщенные координаты равны нулю. Раскладывая потенциальную энергию в ряд в окрестности поло-

жения равновесия, получим:

$$\Pi(q_1, q_2, \ldots, q_s) = \Pi(0, 0, \ldots, 0) + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_1}\right)_0 + \ldots + \\ + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_s}\right)_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_1^2}\right)_0 q_1^2 + \ldots + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_s^2}\right)_0 q_s^2 + \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_1 \partial q_2}\right)_0 q_1 q_2 + \ldots + \\ + \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_{s-1} \partial q_s}\right)_0 q_{s-1} q_s + \ldots \quad (10.22)$$

Введем обозначения для коэффициентов, стоящих при второй степени обобщенных координат:

$$\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial q_j}\right)_0 = c_{ij}$$

Это коэффициенты называются *обобщенными коэффициентами жесткости* - значения второй производной кинетической энергии по обобщенным координатам в положении равновесия. Разложение в ряд потенциальной энергии перепишем в следующем виде:

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{s} c_{ij} q_i q_j + \ldots$$

Таким образом, в окрестности положения равновесия, без членов третьего и выше порядка малости, потенциальная энергия представляет собой квадратичную форму обобщенных координат. Если квадратичная форма потенциальной энергии положительно-определенная, то потенциальная энергия

в имеет в положении равновесия минимум и следовательно это положение равновесия будет устойчивым.

Положительная определенность квадратичной формы определяется теоремой Сильвестра.

Теорема 13. *Для того чтобы квадратичная форма была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы главные диагональные миноры матрицы квадратичной формы были положительны [3].*

Для матрицы:

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1s} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{s1} & c_{s2} & \dots & c_{ss} \end{pmatrix}$$

главные диагональные миноры определяются следующим образом:

$$\Delta_1 = c_{11},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix},\ \Delta_s = \begin{vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1s} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{s1} & \dots & c_{ss} \end{vmatrix}. \quad (10.23)$$

Для положительной определенности квадратичной формы необходимо, чтобы:

$$\Delta_1 > 0,\ \Delta_2 > 0, \dots \Delta_s > 0.$$

Таким образом, для определения устойчивости найденного положения равновесия необходимо, разложить потенциальную энергию в ряд в окрестности

положения равновесия по степеням $q_1, \ldots, q_s$ ограничившись членами второго порядка. Определить коэффициенты жесткости и составить определители (10.23). Если все определители больше нуля, то положение равновесия устойчиво [2].

Если потенциальная энергия в положении равновесия потенциальная энергия не имеет минимума то ответ на вопрос об устойчивости этого положения равновесия дает следующая теорема Ляпунова.

Теорема 14. *Равновесие консервативной системы неустойчиво, если отсутствие минимума потенциальной энергии определяется членами второго порядка в ее разложении в ряд по степеням q.*

10.9.3. Малые колебания системы с одной степенью свободы

Рассмотрим механическую систему с одной степенью свободы для которой найдено положение устойчивого равновесия. Конфигурация системы описывается одной обобщенной координатой q, которая равна нулю в положении устойчивого равновесия.

Для системы с одной степенью свободы кинетическая энергия имеет следующий вид:

$$T = \frac{1}{2}a(q)\dot{q}^2$$

Обобщенный коэффициент инерции $a(q)$ является функцией обобщенной координаты. Разложим в ряд функцию $a(q)$ в окрестности положения равно-

весия:

$$a(q) = a(0) + \left(\frac{da}{dq}\right)_0 q + \dots$$

Исключив все члены разложения выше первого порядка малости, получим приближенное выражение кинетической энергии:

$$T = \frac{1}{2} a \dot{q}^2.$$

Аналогично поступив с выражением для потенциальной энергии, получим ее приближенное выражение для небольших отклонений от положения равновесия:

$$\Pi = \frac{1}{2} c q^2$$

Составив уравнение Лагранжа второго рода, учитывая, что $Q = -\frac{\partial \Pi}{\partial q}$, получим:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\frac{\partial T}{\partial q} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q} \to a\ddot{q} = -cq,$$

или

$$\ddot{q} + k^2 q = 0, \tag{10.24}$$

где $k^2 = c/a$. Линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами (10.24) представляет собой дифференциальное уравнение движения малых колебаний систем около положения устойчивого равновесия.

Общее решение этого уравнения имеет следующий вид:

$$q = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt,$$

где C_1, C_2 - произвольные постоянные, определяемые из начальных условий.

10.9.4. Малые колебания системы с двумя степенями свободы

Рассмотрим консервативную систему с двумя степенями свободы с голономными стационарными связями. Конфигурация системы задается двумя обобщенными координатами q_1, q_2, которые отсчитываются от положения устойчивого равновесия, которое предполагается найденным.

Кинетическая энергия рассматриваемой системы имеет следующий вид:

$$T = \frac{1}{2}(a_{11}(q_1, q_2)\dot{q}_1^2 + 2a_{12}(q_1, q_2)\dot{q}_1\dot{q}_2 + a_{22}(q_1, q_2)\dot{q}_2^2).$$

Коэффициенты инерции являются функциями обобщенных координат. Разложим эти функции в ряд и отбросим все слагаемые ряда выше первого порядка малости и подставим полученные значения коэффициентов инерции в выражение для кинетической энергии:

$$T = \frac{1}{2}(a_{11}\dot{q}_1^2 + 2a_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + a_{22}\dot{q}_2^2),$$

где a_{11}, a_{12}, a_{22} - значения функций $a_{11}(q_1, q_2), a_{12}(q_1, q_2), a_{22}(q_1, q_2)$ в положении равновесия. Кинетическая энергия при обобщенных скоростях отличных от нуля всегда является положительной величиной, поэтому квадратичная форма обобщенных скоростей, положительно определена, поэтому:

$$a_{11} > 0, \ a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0.$$

Разложив в ряд потенциальную энергию, получим:

$$\Pi = \frac{1}{2}(c_{11}q_1^2 + 2c_{12}q_1q_2 + c_{22}q_2^2)$$

Вследствие устойчивости положения равновесия:

$$c_{11} > 0,\ c_{11}c_{22} - c_{12}^2 > 0.$$

Построим уравнения Лагранжа второго рода. Для координаты q_1:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = a_{12}\dot{q}_1 + a_{12}\dot{q}_2 \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = a_{12}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_1} = 0 \quad \frac{\partial \Pi}{\partial q_1} = c_{12}q_1 + c_{12}q_2$$

Уравнение для q_1 будет иметь следующий вид:

$$a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 = -c_{11}q_1 - c_{12}q_2.$$

Аналогично определяется уравнение для второй координаты. Учитывая, что $a_{12} = a_{21}$ и $c_{12} = c_{21}$, получим:

$$\begin{cases} a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 = 0, \\ a_{21}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 + c_{21}q_1 + c_{22}q_2 = 0. \end{cases} \tag{10.25}$$

Решение системы дифференциальных уравнений (10.25) будем искать в следующем виде:

$$q_1 = A\sin(kt + \varepsilon),\ q_2 = B\sin(kt + \varepsilon), \tag{10.26}$$

где A, B, k, ε - неизвестные постоянные. Продифференцировав (10.26) и подставив результат в выражение (10.25) получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} (-a_{11}Ak^2 - a_{12}Bk^2 + c_{11}A + c_{12}B)\sin(kt + \varepsilon) = 0, \\ (-a_{21}Ak^2 - a_{22}Bk^2 + c_{21}A + c_{22}B)\sin(kt + \varepsilon) = 0. \end{cases} \tag{10.27}$$

Для того, чтобы полученная система уравнений была справедлива для любого t необходимо, что бы коэффициенты при $\sin(kt+\varepsilon)$ были равны нулю:

$$\begin{cases} (c_{11}-a_{11}k^2)A+(c_{12}-a_{12}k^2)B=0, \\ (c_{21}-a_{21}k^2)A+(c_{22}-a_{22}k^2)B=0. \end{cases} \tag{10.28}$$

Нетривиальное решение системы (10.28) существует если ее определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} c_{11}-a_{11}k^2 & c_{12}-a_{12}k^2 \\ c_{21}-a_{21}k^2 & c_{22}-a_{22}k^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получим:

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)k^4-(a_{11}c_{22}+a_{22}c_{11}-2a_{12}c_{12})k^2+c_{11}c_{22}-c_{12}^2=0. \tag{10.29}$$

Уравнение (10.29) называют *вековым уравнением* или *уравнением частот*. Корни этого уравнения - собственные частоты системы положительны и вещественны ([1] стр. 481).

Каждому корню k_1^2, k_2^2 соответствует частное решение со "своими" A, B, ε:

$$q_{11}=A_1\sin(k_1t+\varepsilon_1), q_{12}=A_2\sin(k_2t+\varepsilon_2),\ \ k_1>0, k_2>0.$$

Общее решение будет линейной комбинацией частных решений:

$$\begin{cases} q_1=A_1\sin(k_1t+\varepsilon_1)+A_2\sin(k_2t+\varepsilon_2), \\ q_2=B_1\sin(k_1t+\varepsilon_1)+B_2\sin(k_2t+\varepsilon_2). \end{cases} \tag{10.30}$$

A_1, A_2, B_1, B_2 определяются из уравнения (10.28) после подстановки туда соответствующей собственной частоты. Система (10.28) имеет только одно

независимое уравнение. Взяв, например, первое уравнение, получим соотношение между A_i, B_i, соответствующее частоте k_i:

$$\frac{B_1}{A_1} = \frac{c_{11} - a_{11}k_i^2}{c_{12} - a_{12}k_i^2} = \mu_i, \ i = 1, 2.$$

или:

$$B_1 = \mu_1 A_1, \ B_2 = \mu_2 A_2.$$

Общее решение принимает следующий вид:

$$\begin{cases} q_1 = A_1 \sin(k_1 t + \varepsilon_1) + A_2 \sin(k_2 t + \varepsilon_2), \\ q_2 = A_1 \mu_1 \sin(k_1 t + \varepsilon_1) + A_2 \mu_2 \sin(k_2 t + \varepsilon_2). \end{cases} \tag{10.31}$$

Параметры $A_1, A_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ определяются из начальных условий.

Таким образом, движение системы с двумя степенями свободы около положения устойчивого равновесия складывается из двух независимых колебаний с частотами k_1 и k_2. Коэффициенты μ_1, μ_2 которые определяют форму колебаний, показывают во сколько раз амплитуда соответствующая главному колебанию одной из координат больше или меньше амплитуды другой координаты [2].

Часть III

Динамика твердого тела

10.10. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси

10.10.1. Уравнения движения

Рассмотрим движение твердого тела, вращающегося вокруг неподвижно оси. Движение тела будем рассматривать относительно неподвижной системы координат, ос oz которой совпадает с осью вращения тела. С твердым телом свяжем подвижную систему $Ox_2y_2z_2$ ось z_2 которой также совпадает с осью вращения тела, рисунок 10.5. Положение твердого тела будет определяться углом ϕ между плоскостями Ox_1z_1 и Ox_2z_2. Векторы реакций в опорах A и B разложим в проекции на оси подвижной системы:

$$\vec{R}_A = X_A\vec{i}_2 + Y_A\vec{j}_2 + Z_A\vec{k}_2, \vec{R}_B = X_B\vec{i}_2 + Y_B\vec{j}_2 + Z_B\vec{k}_2.$$

Теорема об изменении количества движения и момента количества движения системы для рассматриваемого тела будут иметь следующий вид:

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{F}^e + \vec{R}_A + \vec{R}_B$$

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \vec{M}_O^e + \vec{M}_O(\vec{R}_A) + \vec{M}_O(\vec{R}_B).$$

Спроецируем эти векторные уравнения на оси координат. В подвижной системе координат моменты инерции и координаты центра масс будут оставаться постоянными, поэтому целесообразно проецировать векторные уравнения именно на оси системы $Ox_2y_2z_2$.

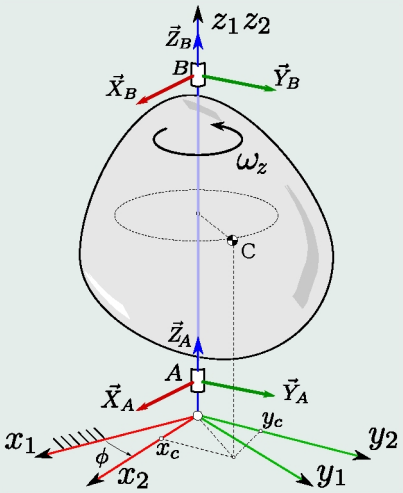


Рис. 10.5. Вращение твердого тела вкруг неподвижной оси

Определим производную вектора количества движения и момента количества движения. Векторы $\vec{Q}$ и $\vec{K}$ представим в проекциях на оси подвижной системы:

$$\vec{Q} = Q_x\vec{i}_2 + Q_y\vec{j}_2 + Q_z\vec{k}_2.$$

$$\vec{K}_O = K_x\vec{i}_2 + K_y\vec{j}_2 + K_z\vec{k}_2.$$

Воспользовавшись правилом определения абсолютной производной вектора,

заданного в подвижной системе, получим:

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \frac{\tilde{d}\vec{Q}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{Q},$$

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \frac{\tilde{d}\vec{K}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{K}_O,$$

где $\vec{\omega}$ - угловая скорость подвижной системы координат; $\tilde{d}\vec{Q}/dt$, $\tilde{d}\vec{K}_O/dt$ - относительные производные векторов. Теоремы об изменении количества движения и момента количества движения рассматриваемой системы принимают следующий вид:

$$\frac{\tilde{d}\vec{Q}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{Q} = \vec{F}^e + \vec{R}_A + \vec{R}_B \tag{10.32}$$

$$\frac{\tilde{d}\vec{K}_O}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{K} = \vec{M}^e_O + \vec{M}_O(\vec{R}_A) + \vec{M}_O(\vec{R}_B). \tag{10.33}$$

Задавшись положениями подшипников A и B:

$$\vec{r}_A = z_A\vec{k}_2,\ \vec{r}_B = z_B\vec{k}_2,$$

определим моменты реакций:

$$\vec{M}_O(\vec{R}_A) = \vec{r}_A \times \vec{R}_A = \begin{vmatrix} \vec{i}_2 & \vec{j}_2 & \vec{k}_2 \\ 0 & 0 & z_A \\ X_A & Y_A & Z_A \end{vmatrix},\ \vec{M}_O(\vec{R}_B) = \vec{r}_B \times \vec{R}_B = \begin{vmatrix} \vec{i}_2 & \vec{j}_2 & \vec{k}_2 \\ 0 & 0 & z_B \\ X_B & Y_B & Z_B \end{vmatrix},$$

или

$$M_x(\vec{R}_A) = -z_A Y_A, \quad M_y(\vec{R}_A) = z_A X_A, \quad M_z(\vec{R}_A) = 0,$$
$$M_x(\vec{R}_B) = -z_B Y_B, \quad M_y(\vec{R}_B) = z_B X_B, \quad M_z(\vec{R}_B) = 0,$$

Учитывая, что вектор угловой скорсоти тела $\vec{\omega} = \dot{\phi}\vec{k}_2$, после подстановки моментов в и и проецирования этих уравнений на оси подвижной системы координат получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned}
\tfrac{dQ_x}{dt} - \dot{\phi}Q_y &= F_x^e + X_A + X_B,\\
\tfrac{dQ_y}{dt} + \dot{\phi}Q_x &= F_y^e + Y_A + Y_B,\\
0 &= F_x^e + Z_A + Z_B,\\
\tfrac{dK_x}{dt} - \dot{\phi}K_y &= M_x^e - z_A Y_A - z_B Y_B,\\
\tfrac{dK_y}{dt} + \dot{\phi}K_x &= M_y^e + z_A X_A + z_B X_B,\\
\tfrac{dK_z}{dt} &= M_z^e.
\end{aligned}$$

Учитывая, что:

$$Q_x = -My_c\dot{\phi}, Q_y = Mx_c\dot{\phi}, Q_z = 0$$
$$K_x = -J_{xz}\dot{\phi}, K_y = -J_{yz}\dot{\phi}, Q_z = J_z\dot{\phi},$$

$$\left\{\begin{aligned}
-My_C\ddot{\phi} - Mx_C\dot{\phi}^2 &= F_x^e + X_A + X_B,\\
Mx_C\ddot{\phi} - My_C\dot{\phi}^2 &= F_y^e + Y_A + Y_B,\\
0 &= F_x^e + Z_A + Z_B,\\
-J_{xz}\ddot{\phi} + J_{yz}\dot{\phi}^2 &= M_x^e - z_A Y_A - z_B Y_B,\\
-J_{yz}\ddot{\phi} - J_{xz}\dot{\phi}^2 &= M_y^e + z_A X_A + z_B X_B,\\
\tfrac{dK_z}{dt} &= M_z^e.
\end{aligned}\right. \qquad (10.34)$$

Последнее уравнение системы (10.34) представляет собой дифференциальное уравнение движения твердого тела вокруг неподвижной оси. Зная M_z^e можно определить закон вращательного движения тела. Первые пять уравнений позволяют определить реакции в опорах.

10.10.2. Динамические и статические реакции

Если рассматриваемое твердое тело, имеющее неподвижную ось, не вращается, то левые части уравнений (10.34) равны нулю, следовательно система уравнений в целом представляет собой в этом случае уравнения равновесия из которых можно найти реакции связей, которые называются *статическими*.

Реакции, возникающие при вращении твердого тела, называют *динамическими*. Определим важные для технических задач условия при которых статические реакции равны динамическим. Очевидно, что необходимым и достаточным условием этого будет равенство нулю левой части уравнений (10.34):

$$\begin{cases} -y_C\ddot{\phi} - x_C\dot{\phi}^2 = 0, \\ x_C\ddot{\phi} - y_C\dot{\phi}^2 = 0, \\ -J_{xz}\ddot{\phi} + J_{yz}\dot{\phi}^2 = 0, \\ -J_{yz}\ddot{\phi} - J_{xz}\dot{\phi}^2 = 0. \end{cases} \tag{10.35}$$

Если рассматривать первую и вторую пару уравнений системы (10.35) как две однородные системы относительно $\ddot{\phi}$, $\dot{\phi}^2$, то можно отметить, что опре-

делители

$$\begin{vmatrix} \dot{\phi}^2 & \ddot{\phi} \\ \ddot{\phi} & -\dot{\phi}^2 \end{vmatrix} \text{ и } \begin{vmatrix} \dot{\phi}^2 & -\ddot{\phi} \\ \ddot{\phi} & \dot{\phi}^2 \end{vmatrix}$$

при вращении твердого тела будут отличны от нуля. Поэтому, равенства (10.35) будут выполнятся только если

$$x_C = y_C = 0,\ J_{yz} = Jzx = 0,$$

т. е. если центр тяжести тела лежит на оси вращения и ось вращения является главной осью. Таким образом, *при вращении абсолютно твёрдого тела не возникает добавочных давлений на ось вращения, т.е. динамические реакции равны статическим тогда и только тогда, когда осью вращения будет одна из главных центральных осей инерции тела.*

10.11. Движение твердого тела вокруг неподвижной точки

10.11.1. Динамические уравнения Эйлера

Рассмотрим твёрдое тело, имеющее одну закреплённую точку и запишем для этого тела теорему об изменении кинетического момента:

$$\frac{d\vec{K}_0}{dt} = \vec{M}_0^e, \tag{10.36}$$

где K_0 – момент количества движения тела относительно неподвижной точки, $\vec{M}_0^e$ – момент внешних сил относительно той же точки. Запишем это уравнение в скалярной форме.

Очевидно, что в неподвижной системе координат моменты инерции твердого тела будут зависеть от положения тела, поэтому целесообразно при выводе уравнений использовать систему координат связанную с твёрдым телом. В этой системе координат моменты инерции тела остаются постоянными. Если вектор кинетического момента $\vec{K}_0$ определен в системе координат твердого тела, то полная производная по времени этого вектора будет складываться из его локальной производной и слагаемого учитывающего вращение системы координат, связанной с телом:

$$\frac{\tilde{d}\vec{K}_0}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{K}_0 = \vec{M}_0^e$$

Учитывая, что проекции второго слагаемого – векторного произведения на оси подвижной системы координат определяются как:

$$\vec{\omega} \times \vec{K}_0 = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ K_x & K_y & K_z \end{pmatrix} = \vec{i}(\omega_y K_z - \omega_z K_y) + \vec{j}(\omega_z K_x - \omega_x K_z) + \\ + \vec{k}(\omega_x K_y - \omega_y K_x) \quad (10.37)$$

уравнение (10.36) в проекциях на оси системы координат, связанной с телом,

записываются следующим образом:

$$\begin{cases} dK_x/dt + (\omega_y K_z - \omega_z K_y) = M_x^e, \\ dK_y/dt + (\omega_z K_x - \omega_x K_z) = M_y^e, \\ dK_z/dt + (\omega_x K_y - \omega_y K_x) = M_z^y, \end{cases} \tag{10.38}$$

Если оси подвижной системы координат являются главными осями эллипсоида инерции тела, то последние уравнения существенно упрощаются. В этом случае проекции кинетического момента на оси координат определяются следующим образом:

$$K_x = J_x\omega_x,\ K_y = J_y\omega_y,\ K_z = J_z\omega_z.$$

Тогда уравнения (10.38) принимают следующий вид:

$$\begin{cases} I_x d\omega_x/dt + (I_z - I_y)\omega_y\omega_z = M_x^e, \\ I_y d\omega_y/dt + (I_x - I_z)\omega_z\omega_x = M_y^e, \\ I_z d\omega_z/dt + (I_y - I_x)\omega_x\omega_y = M_z^y, \end{cases} \tag{10.39}$$

Эти уравнения называются динамическими уравнениями Эйлера.

10.11.2. Случай Эйлера Пуансо

Если главный момент все внешних сил, приложенных к твёрдому телу относительно неподвижной точки равен нулю, то динамические уравнения Эйлера принимают вид

$$\begin{cases} I_x d\omega_x/dt + (I_z - I_y)\omega_y\omega_z = 0, \\ I_y d\omega_y/dt + (I_x - I_z)\omega_z\omega_x = 0, \\ I_z d\omega_z/dt + (I_y - I_x)\omega_x\omega_y = 0, \end{cases} \tag{10.40}$$

Умножив первое уравнение этой системы на $I_x\omega_x$, второе – на $I_y\omega_y$, третье – на $I_z\omega_z$ и сложив результаты, получим:

$$I_x^2\omega_x\frac{d\omega x}{dt}+I_y^2\omega_y\frac{d\omega y}{dt}+I_z^2\omega_z\frac{d\omega z}{dt}=0$$

или

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(I_x^2\omega_x^2+I_y^2\omega_y^2+I_z^2\omega_z^2)=0$$

Из этого уравнения следует, что

$$I_x^2\omega_x^2+I_y^2\omega_y^2+I_z^2\omega_z^2=K_0^2=const.$$

Другими словами, если момент внешних сил отсутствует, то сохраняется модуль момента количества движения.

Умножив первое уравнение системы (10.40) на ω_x, второе – на ω_y, третье – на ω_z и сложив результаты, получим еще один первый интеграл – интеграл энергии:

$$I_x\omega_x^2+I_y\omega_y^2+I_z\omega_z^2=2h=const.$$

Далее рассмотрим частный случай движения *осесимметричного* тела:

$$I_x=I_y\neq I_z.$$

Уравнения (10.40) принимают вид:

$$\begin{cases} I_x d\omega_x/dt+(I_z-I_y)\omega_y\omega_z=0,\\ I_y d\omega_y/dt+(I_x-I_z)\omega_z\omega_x=0,\\ I_z d\omega_z/dt=0 \end{cases} \qquad (10.41)$$

Из третьего уравнения этой системы следует, что проекция угловой скорости тела на ось z остается постоянной:

$$\omega_z = \omega_{z0} = const$$

Направим ось z_1 *неподвижной* системы координат по вектору кинетического момента $\vec{K}_0$. В этом случае, проекции вектора $\vec{K}_0$ на оси системы координат, связанной с телом будут определятся следующим образом:

$$\begin{aligned} K_x &= K_0 \sin\vartheta \sin\varphi, \\ K_y &= K_0 \sin\vartheta \cos\varphi, \\ K_z &= K_0 \cos\vartheta. \end{aligned}$$

Эти же проекции выражаются через проекции угловые скорости тела:

$$\begin{aligned} K_x &= I_x\omega_x, \\ K_y &= I_y\omega_y, \\ K_z &= I_z\omega_z. \end{aligned}$$

Учитывая неизменность проекции угловой скорости $\omega_z = \omega_{z0}$, из последних уравнений следует, что:

$$K_0 \cos\vartheta = I_z\omega_{z0} \;\Rightarrow\; \cos\vartheta = \cos\vartheta_0 = \frac{I_z\omega_{z0}}{K_0} = const.$$

т. е. угол нутации является постоянной величиной. Кинематические уравне-

ния Эйлера в этом случае имеют вид:

$$\omega_x = \dot{\psi}\sin\vartheta_0\sin\varphi,$$
$$\omega_y = \dot{\psi}\sin\vartheta_0\cos\varphi,$$
$$\omega_z = \dot{\psi}\cos\vartheta_0 + \dot{\varphi}.$$

Используя кинематические уравнения, а также записанные выше выражения для кинетического момента, получим:

$$K_0\sin\vartheta\sin\varphi = I_x = I_x\dot{\psi}\sin\vartheta_0\sin\varphi,\ K_0\sin\vartheta\cos\varphi = I_x\omega_y = I_x\dot{\psi}\sin\vartheta_0\cos\varphi$$

Откуда

$$K_0 = I_x\dot{\psi},\ \Rightarrow\ \dot{\psi} = \frac{K_0}{I_x} = n = const.$$

следовательно

$$\psi = nt + \psi_0$$

где ψ_0 – значение угла ψ в момент времени $t = 0$. Из последнего кинематического уравнения определим закон изменения угла собственного вращения:

$$\dot{\varphi} = \omega_{z0} - n\cos\vartheta_0 = n_1 = const.$$

Для начального угла собственного вращения $\varphi_0 = \varphi(0)$:

$$\varphi = n_1 + \varphi_0$$

Таким образом:

$$\vartheta = \vartheta_0,$$
$$\psi = nt + \psi_0,$$
$$\varphi = n_1 t + \varphi_0.$$

Произвольные постоянные, от которых зависит последние уравнения связаны между собой соотношением:

$$\omega_{z0} - n\cos\vartheta_0 = n_1.$$

Движение, описываемое полученными уравнениями называется регулярной прецессией. Ось симметрии тела описывает круговой конус с углом раствора ϑ_0 вокруг направления кинетического момента с постоянной угловой скоростью $\dot{\psi} = n$. Само тело вращается вокруг оси симметрии с постоянной угловой скоростью $\dot{\varphi} = n_1$.

10.11.3. Элементарная теория Гироскопа

Гироскопом называется твёрдое тело, вращающееся вокруг оси материальной симметрии, одна из точек которой неподвижна, с угловой скоростью, значительно превышающей скорость вращения самой оси симметрии.

10.11.3.1. Основные допущения элементарной теории гироскопа

Пусть гироскоп совершает быстрое вращение вокруг своей оси материальной симметрии с угловой скоростью ω_1, а эта ось вращается с угловой

скоростью ω_2, тогда абсолютная угловая скоростью гироскопа будет равна:

$$\omega = \omega_1 + \omega_2$$

Запишем проекции кинетического момента на оси главной центральной системы координат, направив ось z по оси симметрии:

$$K_x = I_x\omega_{2x},\ K_y = I_y\omega_{2y},\ K_z = I_z(\omega_1 + \omega_{2z})$$

где $I_x = I_y, I_z$ – моменты инерции гироскопа.

Угол между вектором кинетического моментом и осью симметрии. Предположим, что угловая скорость вращения оси гироскопа ω_2 перпендикулярна оси симметрии. В этом случае искомый угол будет максимальным при фиксированной ω_2. Составляющая вектора кинетического момента перпендикулярная оси симметрии будет иметь вид:

$$\mathbf{K}^* = K_x + K_y = I_x\omega_{2x} + I_y\omega_{2y} = I_c\omega_2$$

тогда

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{K^*}{K} = \frac{I_x\omega_2}{I_z\omega_1}$$

Для гироскопов обычным является соотношение осевого и поперечного момента инерции:

$$I_x/I_z \approx 0.6$$

Учитывая, что угловая скорость вращения гироскопа вокруг оси симметрии существенно больше угловой скорости самой оси, очевидно, что угол ϑ будет мал. Поэтому можно считать, что вектор кинетического момента совпадает с осью динамической симметрии гироскопа. *На этом допущении основывается элементарная или прецессионная теория гироскопа.*

10.11.3.2. Теорема Резаля

При изучении движения гироскопа удобно пользоваться кинематической интерпретацией теоремы об изменении кинетического момента, которую называют теоремой Резаля.

С одной стороны, производная вектора кинетического момента гиростата равна моменту внешних сил, приложенных к неподвижной точке

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \mathbf{M}^e$$

С другой стороны, производная вектора $\mathbf{K}$ представляет собой скорость конца этого вектора:

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \mathbf{u}$$

следовательно

$$\mathbf{u} = \mathbf{M}^e.$$

Другими словами: *скорость конца вектора момента количества движения равна главному моменту всех внешних сил.*

10.11.3.3. Основное свойство гироскопа

Если сумма моментов внешних сил, приложенных к гироскопу равна нулю, то такой гироскоп называется свободным или уравновешенным.

Очевидно, что если гироскоп не вращается, то воздействие на него кратковременной силы приведет к равномерному вращению его оси. Если же воздействовать ударной силой на быстровращающийся гироскоп, то *ось быстро*

вращающегося свободного гироскопа устойчиво сохраняет свое направление в инерциальном пространстве; удары и толчки могут вызвать вибрацию оси гироскопа очень малой амплитуды, но не отклонение ее от первоначального положения.

10.12. Движение свободного твердого тела

Пусть свободное твёрдое тело движется относительно неподвижной системы координат $O_0x_0y_0z_0$. Используя теорему о движении центра масс, можно записать:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x, \\ m\ddot{y} = F_y, \\ m\ddot{z} = F_z. \end{cases} \tag{10.42}$$

где m – масса тела, x, y, z – координаты его центра масс, F_x, F_y, F_z – проекции на оси $O_0x_0y_0z_0$ главного вектора внешних сил, действующих на тело.

Проведем через центра масс тела систему координата $O'_0x'_0y'_0z'_0$ оси которой параллельны соответствующим осям $O_0x_0y_0z_0$. С твердым телом свяжем главную центральную систему координат $Oxyz$. Движение твердого тела относительно $O'_0x'_0y'_0z'_0$ будет задано, если заданы, например, углы Эйлера, связывающие системы координат $Oxyz$ и $O'_0x'_0y'_0z'_0$.

Теорема об изменении момента количества движения применима и к от-

носительному движению вокруг центра масс, поэтому можно записать:

$$\begin{cases} J_x\dot{\omega}_x + (J_z - J_y)\omega_y\omega_z = M_x, \\ J_y\dot{\omega}_y + (J_x - J_z)\omega_z\omega_x = M_y, \\ J_z\dot{\omega}_z + (J_y - J_x)\omega_x\omega_y = M_z, \end{cases} \tag{10.43}$$

Система уравнений (10.42) и (10.43) представляет собой систему шести дифференциальных уравнений свободного твердого тела: неизвестными являются координаты центра масс тела и проекции угловой скорости тела. Если необходимо определить и углы Эйлера, то к этой системе необходимо добавить кинематические уравнения связывающие производные углов Эйлера и проекции угловой скорости тела на оси $Oxyz$:

$$\begin{cases} \dot{\psi} &= \frac{\sin\varphi}{\sin\vartheta}\omega_{x_2} + \frac{\cos\varphi}{\sin\vartheta}\omega_{y_2}, \\ \dot{\vartheta} &= \omega_{x_2}\cos\varphi - \omega_{y_2}\sin\varphi, \\ \dot{\varphi} &= -\omega_{x_2}\sin\varphi\operatorname{ctg}\vartheta - \omega_{y_2}\cos\varphi\operatorname{ctg}\vartheta + \omega_{z_2}, \end{cases}$$

Литература

1. *Бутенин, Н.В.* Курс теоретической механики: Учебник в 2-х томах. Т. I.: Статика, Кинематика. / Н.В. Бутенин, Я. Л. Лунц, Меркин Д. Р. — Наука, 1979.

2. *Бутенин, Н.В.* Курс теоретической механики: Учебник в 2-х томах. Т. II.: Динамика. / Н.В. Бутенин, Я. Л. Лунц, Меркин Д. Р. — Наука, 1979.

3. *Корн, Г.* Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. — Наука, 1970.

4. *Маркеев, А. П.* Теоретическая механика: Учебник для университетов / А. П. Маркеев. — НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001.