

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА  
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

*Л. М. Савельев, Ю. В. Скворцов, С. В. Глушков*

## СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

Утверждено редакционно-издательским советом университета  
в качестве учебного пособия

САМАРА  
Издательство СГАУ  
2011

УДК СГАУ: 629.7(075)

ББК 39.52я7

С 127

**Савельев Л. М.**

С 127      **Строительная механика летательных аппаратов : учеб. пособие /**  
*Л. М. Савельев, Ю. В. Скворцов, С. В. Глушков . - Самара: Изд-во Самар. гос.  
аэрокосм. ун-та, 2011. - 236 с.*

**ISBN 978-5-7883-0902-6**

Учебное пособие предназначено для подготовки к традиционным занятиям и самостоятельного освоения курса "Строительная механика летательных аппаратов" студентами специальностей 160100.65 "Самолёто- и вертолестроение", 160400.65 "Проектирование, производство и эксплуатация ракет и ракетно-космических комплексов", а также 151600.62 "Прикладная механика". В пособие включены примеры решения типовых задач.

Оно может быть полезно не только при изучении теоретического материала по строительной механике летательных аппаратов, но и при выполнении курсовых работ и дипломных проектов студентами 3-6 курсов.

При подготовке учебного пособия учтён многолетний опыт преподавания строительной механики на кафедре прочности летательных аппаратов СГАУ. Особую роль сыграли методические разработки Х.С. Хазанова, которые послужили основой большинства разделов настоящего пособия.

УДК СГАУ: 629.7(075)

ББК 39.52я7

**ISBN 978-5-7883-0902-6**

© Самарский государственный  
аэрокосмический университет, 2011



## СОДЕРЖАНИЕ

|                                                                                                 |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| ВВЕДЕНИЕ .....                                                                                  | 6   |
| 1 МЕХАНИКА СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ .....                                                              | 9   |
| 1.1 Способы образования ферм .....                                                              | 9   |
| 1.2 Прикрепление ферм к опорам .....                                                            | 12  |
| 1.3 Необходимые условия геометрической неизменяемости и статической<br>определимости ферм ..... | 14  |
| 1.4 Методы исследования геометрической неизменяемости ферм .....                                | 16  |
| 1.5 Методы определения усилий в стержнях ферм .....                                             | 19  |
| 2 МАТРИЧНЫЙ МЕТОД ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ДЛЯ<br>СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ .....                                    | 27  |
| 2.1 Понятие о матрице жесткости .....                                                           | 27  |
| 2.2 Преобразование координатных осей .....                                                      | 31  |
| 2.3 Матрица жесткости ферменного элемента .....                                                 | 34  |
| 2.4 Матрица жесткости балочного элемента в местной<br>системе координат .....                   | 38  |
| 2.5 Матрица жесткости балочного элемента при изгибе его в одной<br>плоскости .....              | 40  |
| 2.6 Матрица жесткости балочного элемента в общих координатах .....                              | 44  |
| 2.7 Учет внеузловой нагрузки .....                                                              | 47  |
| 2.8 Объединение элементов в стержневую систему и построение ее<br>матрицы жесткости .....       | 49  |
| 2.9 Сокращение матрицы жесткости стержневой системы и определение<br>узловых перемещений .....  | 52  |
| 3 БАЛОЧНАЯ ТЕОРИЯ ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ .....                                                | 56  |
| 3.1 Определение нормальных напряжений при изгибе<br>тонкостенных конструкций .....              | 56  |
| 3.2 Расчет касательных напряжений .....                                                         | 63  |
| 3.3 Работа тонкостенных конструкций с многозамкнутым контуром .....                             | 85  |
| 4 ОСНОВЫ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ .....                                                                 | 96  |
| 4.1 Гипотезы теории упругости .....                                                             | 96  |
| 4.2 Основные определения и обозначения .....                                                    | 97  |
| 4.3 Дифференциальные уравнения равновесия .....                                                 | 101 |

|                                                                                          |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 4.4 Напряжения в наклонных площадках. Статические<br>граничные условия .....             | 102 |
| 4.5 Главные напряжения. Инварианты тензора напряжений .....                              | 105 |
| 4.6 Соотношения между деформациями и перемещениями<br>(соотношения Коши) .....           | 107 |
| 4.7 Уравнения совместности деформаций .....                                              | 110 |
| 4.8 Закон Гука для трехосного напряженного состояния .....                               | 111 |
| 4.9 Схемы решения задач теории упругости .....                                           | 114 |
| 4.10 Решение задачи теории упругости в перемещениях .....                                | 115 |
| 4.11 Решение задачи теории упругости в напряжениях .....                                 | 117 |
| 5 ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ .....                                                  | 119 |
| 5.1 Плоская деформация .....                                                             | 119 |
| 5.2 Обобщенное плоское напряженное состояние .....                                       | 120 |
| 5.3 Основные соотношения плоской задачи .....                                            | 122 |
| 5.4 Решение плоской задачи теории упругости в напряжениях .....                          | 125 |
| 5.5 Понятие о функции напряжений .....                                                   | 127 |
| 5.6 Решение плоской задачи теории упругости в полиномах .....                            | 128 |
| 5.7 Решение плоской задачи в тригонометрических рядах .....                              | 132 |
| 5.8 Основные соотношения плоской задачи теории упругости в полярных<br>координатах ..... | 135 |
| 6 ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ .....                                             | 143 |
| 6.1 Работа внешних сил .....                                                             | 143 |
| 6.2 Потенциальная энергия деформации .....                                               | 146 |
| 6.3 Вариационное уравнение Лагранжа .....                                                | 148 |
| 6.4 Метод Ритца .....                                                                    | 151 |
| 7 ИЗГИБ ПЛАСТИН .....                                                                    | 154 |
| 7.1 Основные определения и гипотезы теории пластин .....                                 | 154 |
| 7.2 Дифференциальное уравнение изгиба пластины .....                                     | 155 |
| 7.3 Граничные условия на контуре пластины .....                                          | 161 |
| 7.4 Изгиб прямоугольной пластины равномерно<br>распределенной нагрузкой .....            | 164 |
| 7.5 Уравнение продольно-поперечного изгиба пластины .....                                | 167 |
| 8 УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАСТИН .....                                                             | 172 |
| 8.1 Уравнение устойчивости .....                                                         | 172 |
| 8.2 Устойчивость прямоугольной пластины при сжатии в одном<br>направлении .....          | 173 |

|                                                                                                                                        |            |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 8.3 Одновременное действие сдвига и сжатия .....                                                                                       | 177        |
| 8.4 Потеря устойчивости за пределом пропорциональности.....                                                                            | 178        |
| 8.5 Работа подкрепленной пластины (обшивки) после потери<br>устойчивости от сжатия .....                                               | 180        |
| 8.6 Потеря устойчивости окаймленной пластины от сдвиговых усилий                                                                       | 181        |
| <b>9 ОБОЛОЧКИ ВРАЩЕНИЯ ПРИ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ<br/>НАГРУЗКАХ .....</b>                                                                     | <b>186</b> |
| 9.1 Безмоментная теория оболочек вращения .....                                                                                        | 186        |
| 9.2 Моментная теория цилиндрической оболочки при<br>осесимметричном нагружении.....                                                    | 193        |
| <b>10 МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ.....</b>                                                                                                | <b>207</b> |
| 10.1 Вводные замечания.....                                                                                                            | 207        |
| 10.2 Перемещения, деформации и напряжения конечного элемента .....                                                                     | 208        |
| 10.3 Матрица жесткости конечного элемента .....                                                                                        | 210        |
| 10.4 Приведение распределенных внешних нагрузок к эквивалентным<br>узловым силам .....                                                 | 212        |
| 10.5 Построение матрицы жесткости упругого тела по матрицам<br>жесткости конечных элементов и определение узловых<br>перемещений ..... | 213        |
| 10.6 Построение матрицы жесткости для плоского треугольного<br>конечного элемента .....                                                | 215        |
| 10.7 Матрица жесткости плоского прямоугольного элемента.....                                                                           | 221        |
| 10.8 Совместность конечных элементов .....                                                                                             | 224        |
| 10.9 Плоский четырехузловой изопараметрический элемент.....                                                                            | 227        |
| 10.10 Схема численного интегрирования по Гауссу.....                                                                                   | 233        |
| <b>ЛИТЕРАТУРА .....</b>                                                                                                                | <b>234</b> |

## ВВЕДЕНИЕ

Строительной механикой в широком смысле называется наука о методах расчета конструкций и сооружений на прочность, жесткость и устойчивость. В строительную механику входят: сопротивление материалов, строительная механика стержневых систем, теория упругости, теория пластин и оболочек, теория пластичности и теория ползучести.

Сопротивление материалов занимается, главным образом, приближенным расчетом простых брусьев.

Теория упругости, теория пластичности и теория ползучести решают задачи расчета конструкций более строго, чем это делается в сопротивлении материалов, т.е. без использования некоторых упрощающих допущений, принятых в сопротивлении материалов и в строительной механике стержневых систем.

Решение задачи методом теории упругости позволяет определить границы применимости методов сопротивления материалов. Кроме того, теория упругости дает возможность решать большое количество задач, неразрешимых в сопротивлении материалов.

В курсе теории упругости изучаются случаи, когда в конструкции возникают лишь упругие деформации. Пластические деформации рассматриваются в теории пластичности.

В последние годы создано новое направление строительной механики – метод конечных элементов (МКЭ), в котором методы расчета дискретных и континуальных объектов объединяются на основе общего подхода к расчету различных систем.

Строительная механика летательных аппаратов изучает общие принципы, применяемые к расчету конструкций летательных аппаратов. В соответствии с типами летательных аппаратов рассматриваются ферменные конструкции, рамы, пластины и оболочки.

Впервые расчеты на прочность встречаются у Леонардо да Винчи (1452-1519 г.г.). Начало науки о прочности связывают обычно с именем Галилео Галилея (1564-1642 г.г.), когда развитие судоходства поставило задачу увеличения тоннажа судов. Дальнейшее развитие науки о прочности связано с именем Роберта Гука (1635-1703 г.г.), сформулировавшего свой закон упругости так: «Каково растяжение – такова сила». Томас Юнг (1773-1829 г.г.) в начале XIX века ввел понятие модуля упругости. К концу XVIII и началу

XIX веков были заложены основы сопротивления материалов и создана почва для возникновения теории упругости.

Основы теории упругости были разработаны в 20-х годах XIX века почти одновременно Навье, Коши и Пуассоном. Независимо друг от друга они получили по существу все основные уравнения этой теории. Тогда же появились исследования М.В. Остроградского о распространении волн в упругом теле. Дальнейший весьма существенный вклад в теорию упругости внесли Ламе и Клапейрон. Большое значение имела работа Грина (1829 г.), посвященная выводу соотношений между напряжениями и деформациями, базирующихся на принципе сохранения энергии. В дальнейшем значительный вклад в развитие теории упругости внесли следующие ученые: Сен-Венан, Кирхгоф, Ляв, Герц, Мичелл, С.П. Тимошенко, И.Г. Бубнов, Б.Г. Галеркин, П.Ф. Папкович, Г.В. Колосов, Н.И. Мусхелишвили.

Строительная механика летательных аппаратов развивалась по двум направлениям: 1) применение общих задач и методов к расчету конструкций летательных аппаратов; 2) создание новых методов решения.

Начало науки о расчете на прочность самолетов заложено в работах, проводимых с 1916 г. в МВТУ. Ценный вклад в строительную механику самолета внесли работы следующих ученых: В.Н. Беляева, А.А. Уманского, В.З. Власова, С.Н. Кана, Я.Г. Пановко и других.

Расчет любой конструкции на прочность, как и любое исследование в области технических наук, включает в себя следующие три этапа.

1. Идеализация объекта. На этом этапе рассматривается реальная конструкция и выделяются те ее особенности, которые являются наиболее существенными для рассматриваемой задачи. В результате получают расчетную схему (т.е. упрощенное изображение действительной конструкции, которое фигурирует в процессе расчета).

2. Анализ расчетной схемы. Здесь при помощи средств теории вычисляются закономерности расчетной схемы, отвечающей реальной конструкции.

3. Обратный переход от расчетной схемы к реальной конструкции и формулировка практических выводов, ради которых было предпринято ее исследование.

Содержание строительной механики относится ко второму этапу. Вопросы о выборе расчетной схемы (этап 1), а также оценки коэффициентов

безопасности и прочности конструкций (этап 3) излагаются в курсе расчета летательных аппаратов на прочность.

Основными расчетными схемами, рассматриваемыми в строительной механике летательных аппаратов являются: фермы; рамы; комбинированные стержневые системы; тонкостенные стержни; подкрепленные, однородные и трехслойные пластины и оболочки.

# **1 МЕХАНИКА СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ**

Ферма – это расчётная схема стержневой системы. Под фермой понимается стержневая система, геометрическая неизменяемость которой обеспечивается в предположении о шарнирном соединении стержней в узлах.

Геометрическая неизменяемость – это отсутствие кинематических перемещений одних элементов относительно других или способность системы не допускать относительного перемещения своих частей без деформаций.

При составлении расчётной схемы фермы каждый стержень заменяется прямой линией, представляющей его геометрическую ось; концы стержней, образующие узел, считаются сходящимися строго в одной точке; взаимное соединение стержней предполагается идеально шарнирным. Внешние силы считаются приложенными в узлах.

Под действием внешней нагрузки в стержнях ферм возникают только осевые усилия.

Если оси всех стержней лежат в одной плоскости, то ферма называется плоской. В противном случае мы имеем дело с пространственной фермой. Плоские фермы могут воспринимать только нагрузки, лежащие в их плоскости.

Ферма статически определима, если при любой внешней нагрузке усилия в стержнях могут быть определены непосредственно из условий равновесия системы и её отдельных частей.

## **1.1 Способы образования ферм**

### **1.1.1 Способ последовательного присоединения узлов**

К исходному геометрически неизменяемому элементу каждый последующий узел присоединяется с помощью двух стержней, не лежащих на одной прямой, при образовании плоской фермы и с помощью трёх стержней, не лежащих в одной плоскости, при образовании пространственной фермы.

Проследим процесс образования плоской фермы на примере, приведённом на рисунке 1.1. К заведомо неизменяемому элементу 1-2-3 (заштрихован) последовательно присоединяются узлы 4,5,6 и, наконец узел 7 с помощью двух стержней, не лежащих на одной прямой. Относительная неподвижность всех элементов здесь обеспечена.

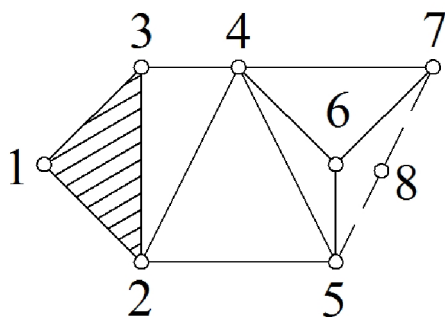


Рисунок 1.1

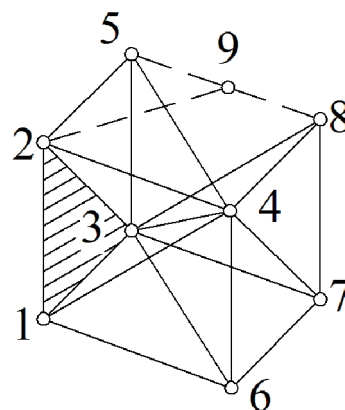


Рисунок 1.2

Узел 8 присоединяется с помощью стержней 5-8 и 7-8, лежащих на одной прямой. Узел может получить бесконечно малое перемещение в направлении, перпендикулярном этим стержням. Подобные системы называются мгновенно геометрически изменяемыми. Узел 8 присоединён неправильно. Его неподвижность относительно остальных элементов не обеспечена.

На рисунке 1.2 показан процесс образования пространственной фермы. К заведомо неизменяемому элементу 1-2-3 присоединяются с помощью трёх стержней, не лежащих в одной плоскости, последовательно узлы 4,5,6,7 и 8. Взаимная неподвижность всех элементов здесь обеспечена. А вот узел 9 присоединяется с помощью стержней 2-9, 5-9, 8-9, лежащих в одной плоскости. Он может получить бесконечно малое перемещение в направлении, перпендикулярном этой плоскости. Узел 9 присоединён неправильно.

Фермы, которые могут быть образованы последовательным присоединением узлов, называются простыми.

### 1.1.2 Способ последовательного соединения ферм

Две или несколько простых ферм соединяются между собой так, чтобы была обеспечена взаимная неподвижность.

Рассмотрим две простые плоские фермы, показанные на рисунке 1.3. Каждая из них, как геометрически неизменяемая система, имеет в плоскости 3 степени свободы. Образует сложную ферму, соединив их между собой таким образом, чтобы обеспечить их взаимную неподвижность. Полученная система должна иметь 3 степени свободы. Следовательно, при соединении ферм между собой следует наложить на систему 3 связи. Это можно реализовать, соединив фермы между собой с помощью плоского шарнира, накладывающего 2 связи, и стержня (рисунок 1.4,а) или с помощью трёх стержней (рисунок 1.4б), каждый из которых накладывает по одной связи. При этом



направления этих стержней не должны пересекаться в одной точке, которая стала бы мгновенным центром вращения одной части относительно другой.

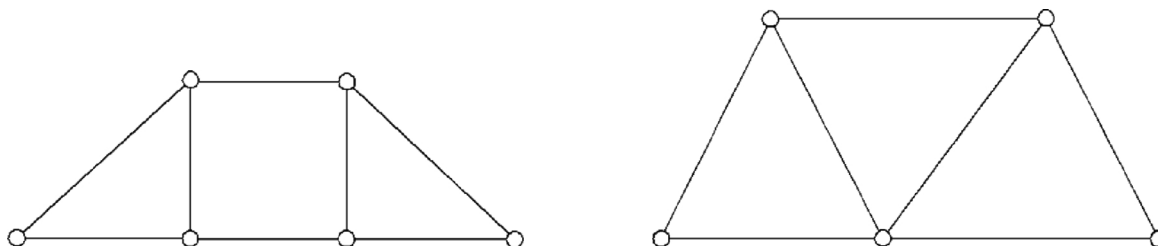


Рисунок 1.3

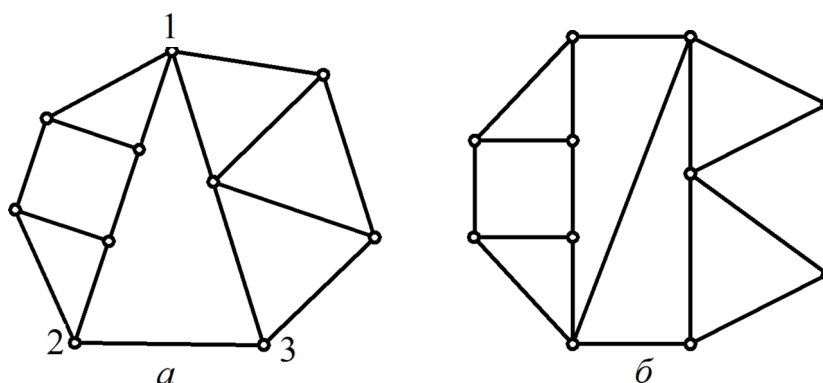


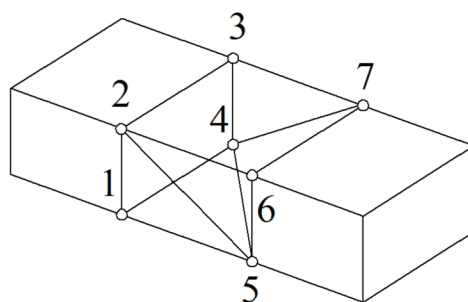
Рисунок 1.4

Направления стержней не должны быть параллельны, так как в этом случае одна часть получила бы возможность смещаться относительно другой в перпендикулярном к этим стержням направлении.

Чтобы обеспечить взаимную неподвижность двух пространственных ферм, нужно наложить на систему 6 связей. Фермы можно соединить с помощью пространственного шарнира, накладывающего 3 связи, и трёх стержней, направления которых не пересекаются на одной прямой. Это показано на рисунке 1.5, где исходные простые фермы изображены в виде параллелепипедов. Если направления стержней пересекаются на одной прямой, то эта прямая будет мгновенной осью вращения одной фермы относительно другой. В частности, оси стержней не должны лежать в двух параллельных плоскостях.

### 1.1.3 Способ замены стержней

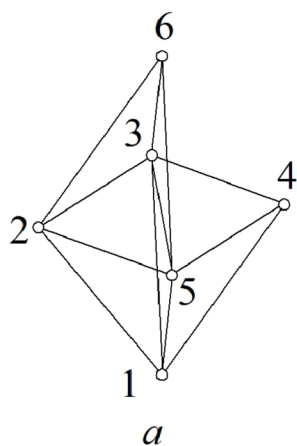
Пусть у нас имеется простая ферма. Устраним из неё один стержень и заменим его другим, расположенным иначе. При этом заменяющий стержень должен лишить систему той степени свободы, которую она получила после устранения стержня.



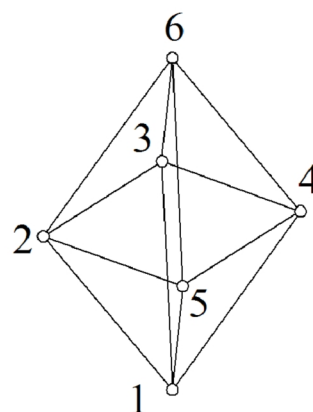
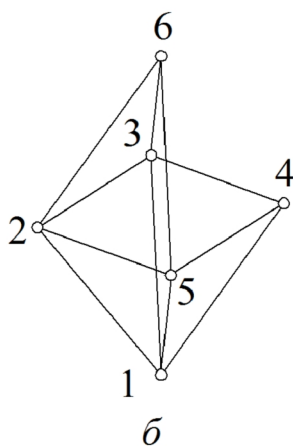
**Рисунок 1.5**

Проиллюстрируем сказанное на примере пространственной фермы, приведённой на рисунке 6. это простая ферма, она может быть образована последовательным присоединением узлов. Устраним из фермы стержень 3-5 (рисунок 1.6,б). Система превращается в механизм. Узлы 3 и 5, в частности, получают возможность смещаться друг относительно друга. Если узлы сближаются, то расстояние между узлами 4 и 6 увеличивается, и наоборот. Вместо устранённого стержня поставим стержень 4-6 (рисунок 1.7). Тем самым обеспечим взаимную неподвижность узлов 4 и 6, а, следовательно, и узлов 3 и 5. Полученная система геометрически неизменяема. Нетрудно убедиться в том, что она не может быть образована последовательным присоединением узлов. Такие фермы относятся к категории сложных ферм.

Подобным же образом можно заменить два или несколько стержней.



**Рисунок 1.6**



**Рисунок 1.7**

## 1.2 Прикрепление ферм к опорам

Плоская ферма как геометрически неизменяемая система имеет в плоскости три степени свободы, и для обеспечения неподвижности на неё следует наложить 3 связи. Для обеспечения неподвижности пространственной фермы

требуется 6 связей. Эти связи проще всего представить условно в виде опорных стержней, каждый из которых накладывает одну связь.

Таким образом, для обеспечения неподвижности плоской фермы её нужно связать с опорами с помощью трёх стержней (рисунок 1.8). Оси этих стержней не должны пересекаться в одной точке (мгновенный центр вращения) и не должны быть параллельны.

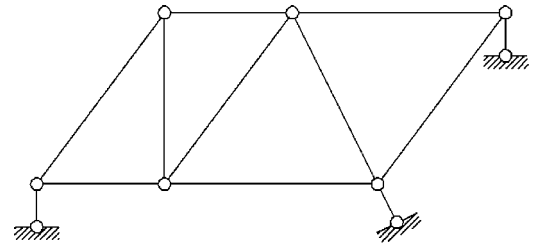


Рисунок 1.8

Пространственная ферма будет неподвижной, если связать её с опорами шестью стержнями, направления которых не пересекаются на одной прямой (рисунок 1.9). Один из возможных вариантов неправильного прикрепления пространственной фермы к опорам показан на рисунке 1.10. Прямая  $AB$ , проходящая через точку Пересечения трёх стержней 1 и параллельная остальным стержням, является мгновенной осью вращения.

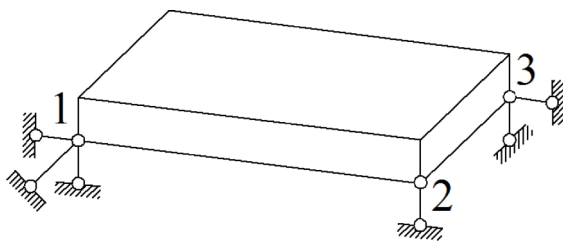


Рисунок 1.9

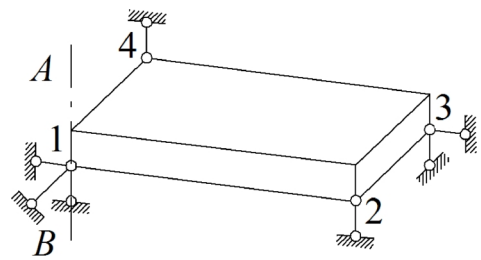


Рисунок 1.10

Помимо прикрепления ферм к опорам с помощью стержней отличаются следующие схемы опорных устройств:

- шарнирно-катковая опора (рисунок 1.11,а), препятствующая перемещению узла в направлении, перпендикулярном плоскости катания; накладывает одну связь и эквивалентна одному опорному стержню (опоры I класса);
- плоская шарнирная опора (рисунок 1.11,б), препятствующая смещению узла в двух направлениях и эквивалентная по числу накладываемых связей двум опорным стержням (опоры II класса);

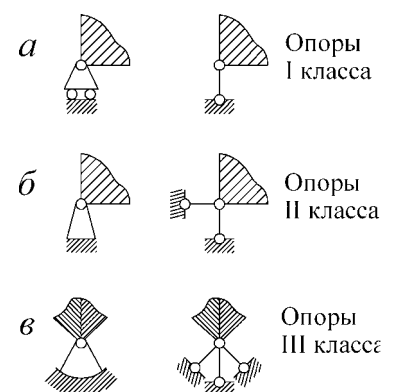


Рисунок 1.11

- пространственная шарнирная опора (рисунок 11,в), обеспечивающая полную неподвижность узла и эквивалентная трём опорным стержням (опоры III класса).

### 1.3 Необходимые условия геометрической неизменяемости и статической определимости ферм

Обозначим через  $U$  число узлов фермы, через  $C$  – количество стержней и через  $C_o$  – число опорных связей.

Ферму можно рассматривать как совокупность узлов, на которые наложены связи в виде стержней. Узел плоской фермы имеет две степени свободы, а пространственной – три. Каждый стержень, связывающий между собой два узла, накладывает на систему одну связь. Если ферма неизменяема и неподвижна, то количество наложенных связей с учётом опорных должно быть равно числу степеней свободы, которым обладали бы не связанные между собой узлы:

- для плоской фермы  $C + C_o = 2U$ ,
  - для пространственной фермы  $C + C_o = 3U$ .
- (1.1)

Если плоская ферма не прикреплена к опорам, то как неизменяемая система она должна обладать в плоскости тремя степенями свободы, а пространственная неизменяемая система имеет в этом случае шесть степеней свободы. Тогда число стержней, обеспечивающее взаимную неподвижность узлов, будет равно:

- для плоской фермы  $C = 2U - 3$ ,
  - для пространственной фермы  $C = 3U - 6$ .
- (1.2)

Зависимости (1.1) и (1.2) определяют минимально необходимое число стержней, которые могут обеспечить взаимную неподвижность узлов, и выражают необходимые условия геометрической неизменяемости ферм.

Вырежем мысленно из плоской фермы узел, как показано на рисунке 1.12. Через  $N_{i1}$ ,  $N_{i2}$  и т.д. здесь обозначены усилия в стержнях, сходящихся в узле. Для узла можно составить 2 уравнения равновесия, спроектировав все силы на оси  $x$  и  $y$ :

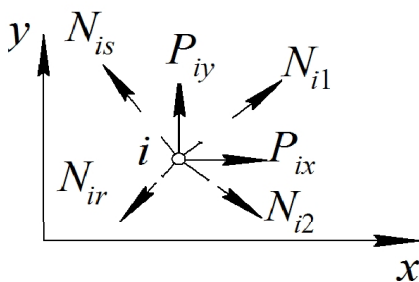


Рисунок 1.12

$$\sum x = 0, \quad \sum y = 0.$$

Уравнение  $\sum M = 0$  удовлетворяется тождественно, так как оси всех стержней и направление внешней нагрузки проходят через одну точку – ось шарнира. Для узла пространственной фермы можно составить три уравнения равновесия. Для плоской фермы, имеющей  $U$  узлов, общее число уравнений равновесия будет равно  $2U$ , а для пространственной –  $3U$ .

В случае неподвижной системы число стержней с учётом опорных, в которых можно из уравнений статики определить усилия, равно:

$$\begin{aligned} & - \text{ для плоской фермы} & C + C_o = 2U, \\ & - \text{ для пространственной фермы} & C + C_o = 3U. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Если ферма не прикреплена к опорам, то для плоской нужно затратить три уравнения равновесия, а для пространственной шесть уравнений на уравновешивание внешней нагрузки. Число стержней, в которых уравнения статики позволяют найти усилия, будет теперь равно:

$$\begin{aligned} & - \text{ для плоской фермы} & C = 2U - 3, \\ & - \text{ для пространственной фермы} & C = 3U - 6. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Равенствами (1.3) и (1.4) устанавливаются необходимые условия статической определимости ферм. Нетрудно заметить, что они совпадают с необходимыми условиями геометрической неизменяемости (1.1) и (1.2). Правда, здесь имеется одно принципиальное различие. Чтобы ферма могла быть статически определимой, условия (1.3) и (1.4) должны строго выполняться. А геометрически неизменяемыми стержневые системы могут быть и в том случае, когда число стержней превышает минимально необходимое, определяемое условиями (1.1) и (1.2).

Можно доказать следующую теорему. Всякая геометрически неизменяемая ферма, имеющая минимально необходимое число стержней, статически определима. Обратно, статически определимая стержневая система геометрически неизменяема. Отсюда следует, что если при минимально необходимом числе стержней система оказывается статически неопределимой, то она геометрически изменяема, т.е. некоторые стержни ориентированы неправильно.

Таким образом, чтобы доказать геометрическую неизменяемость стержневой системы, достаточно показать, что она статически определима.

## **1.4 Методы исследования геометрической неизменяемости ферм**

Полагаем, что стержневая система удовлетворяет необходимому условию геометрической неизменяемости, и рассмотрим несколько методов, позволяющих установить, является ли она в действительности неизменяемой.

### **1.4.1 Метод построения**

Заключается в том, что заново воспроизводится процесс образования и прикрепления к опорам стержневой системы. Если при этом не окажется неправильно присоединённых узлов или отдельных частей, то система геометрически неизменяема. Всё это детально рассмотрено в подразделах 1.1 и 1.2.

### **1.4.2 Метод разрушения**

Заключается в последовательном отбрасывании отдельных узлов или заведомо неизменяемых частей фермы, относительная неподвижность которых обеспечена минимально необходимым числом связей. Систему можно предварительно снять с опор, если она прикреплена минимально необходимым числом правильно ориентированных связей.

Если оказывается возможным таким образом «разрушить» всю систему, то она геометрически неизменяема. В случае изменяемости стержневой системы всегда обнаружится узел или часть системы, прикреплённая неправильно.

Рассмотрим стержневую систему, представленную на рисунке 1.13. Для неё  $U = 10$ ,  $C = 17$ . Необходимое условие геометрической неизменяемости (ГН) и статической определимости (СО)  $C = 2U - 3$  удовлетворяются. Следуя методу разрушения, снимем узел 1, прикреплённый с помощью двух стержней, не лежащих на одной прямой. Аналогично снимаются последовательно узлы 2, 8, 10, 9, 5, 7 и 6. Систему удалось «разрушить». Следовательно, на рисунке 1.13 изображена геометрически неизменяемая стержневая система, т.е. ферма.

У стержневой системы на рисунке 1.14  $U = 8$ ,  $C = 13$ ,  $C_o = 3$  и необходимое условие ГН и СО удовлетворяется. Система прикреплена к опорам с помощью трёх стержней, не пересекающихся в одной точке, так что её можно снять с опор. Снимем теперь правильно присоединённые узлы 8 и 3 и обнаружим, что узел 5 прикреплён к остальной части с помощью стержней 2-5 и 7-5, лежащих на одной прямой. Вывод – система геометрически изменяема.

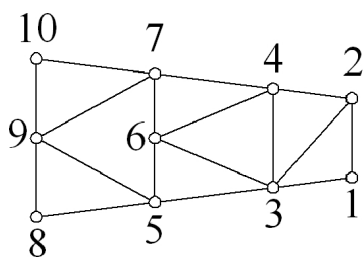


Рисунок 1.13

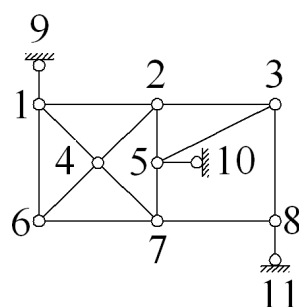


Рисунок 1.14

Стержневая система на рисунке 1.15,а удовлетворяет необходимому условию ГН и СО, так как здесь  $U = 8$ ,  $C = 13$ ,  $C_o = 3$ . В ней можно выделить простые фермы  $A$  и  $B$ , заштрихованные на рисунке 1.15,б.

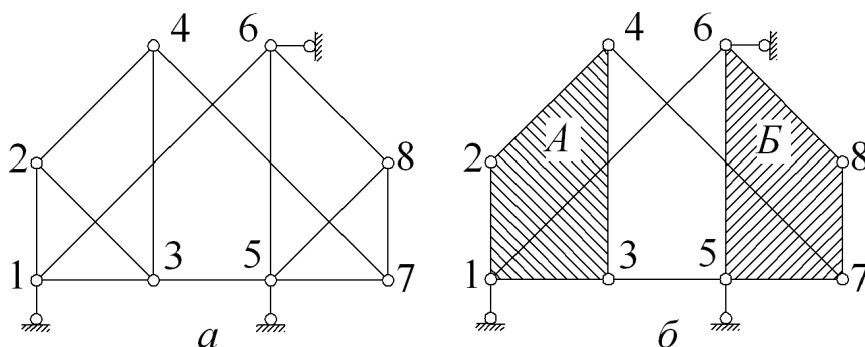


Рисунок 1.15

Прикрепление к опорам осуществлено минимально необходимым числом правильно ориентированных связей, так, что можно систему снять с опор. Теперь можно разъединить неизменяемые части  $A$  и  $B$ , потому что они связаны между собой тремя стержнями, не пересекающимися в одной точке. Стержневая система «разрушена». Она геометрически неизменяема.

### 1.4.3 Метод нулевых нагрузок

В стержнях статически определимой фермы усилия определяются из уравнений равновесия при произвольной внешней нагрузке. В частности, когда нет внешней нагрузки, то усилия во всех стержнях должны быть равны нулю. Если мы можем доказать, что при отсутствии внешней нагрузки усилия во всех стержнях равны нулю, то система статически определима, а следовательно, и геометрически неизменяема. В этом и заключается суть метода нулевых нагрузок.

В некоторых случаях равенство нулю усилий в стержнях фермы при отсутствии внешней нагрузки может быть установлено очень просто, если воспользоваться двумя леммами.

1. Если к плоскому узлу фермы, содержащему два стержня, не лежащих на одной прямой (рисунок 1.16,а), или пространственному узлу, содержащему три стержня, не лежащих в одной плоскости (рисунок 1.16,б), не приложено внешней нагрузки, то усилия в стержнях равны нулю.

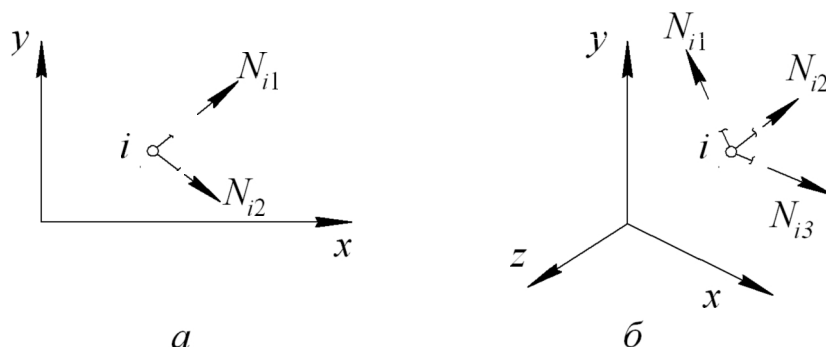


Рисунок 1.16

2. Если к плоскому узлу фермы, содержащему три стержня, из которых два лежат на одной прямой (рисунок 1.17,а), или пространственному узлу, содержащему  $n$  стержней, из которых  $n-1$  лежат в одной плоскости (рисунок 1.17,б), не приложена внешняя нагрузка, то в отдельно стоящих стержнях усилия равны нулю (на рисунке 1.17  $N_{i1} = 0$ ).

Забегая вперед, отметим, что если к узлу рассматриваемого типа приложена внешняя нагрузка, то в отдельно стоящем стержне можно из уравнений равновесия сразу определить усилия.

Иногда при использовании метода нулевых нагрузок удаётся сначала из равновесия всей системы показать, что усилия в отдельных опорных связях равны нулю, а затем уже исследовать усилия в стержнях самой фермы.

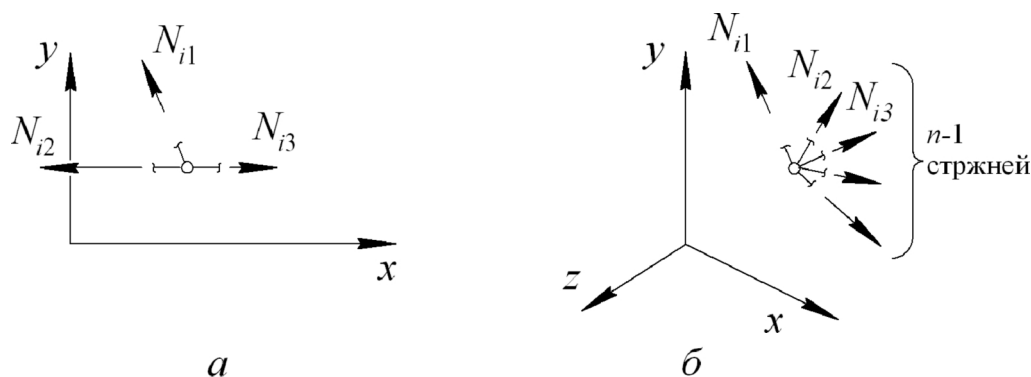


Рисунок 1.17



В качестве примера рассмотрим расчётную схему, приведённую на рисунке 1.18. Здесь  $U = 7$ ,  $C = 10$ ,  $C_o = 4$ , и необходимое условие ГН и СО (1.1) удовлетворяется. Для узла 2 стержень 2-5 отдельно стоящий. Согласно лемме 2 усилие в нём равно нулю. Далее можно рассмотреть узлы в последовательности 5, 1, 2, 6, 7, 3, 4 и убедиться, что в соответствии с леммой 1 усилия во всех стержнях, включая опорные, равны нулю. Система геометрически неизменяема.

У пространственной фермы на рисунке 1.19  $U = 6$ ,  $C = 12$ . Условие  $C = 3U - 6$  удовлетворяется. Для узла 1 стержень 1-2 отдельно стоящий, усилие в нём равно нулю. Рассматривая теперь узлы в последовательности 2, 3, 1, 4 и используя лемму 1, приходим к выводу, что усилия во всех стержнях равны нулю и заданная стержневая система геометрически неизменяема.

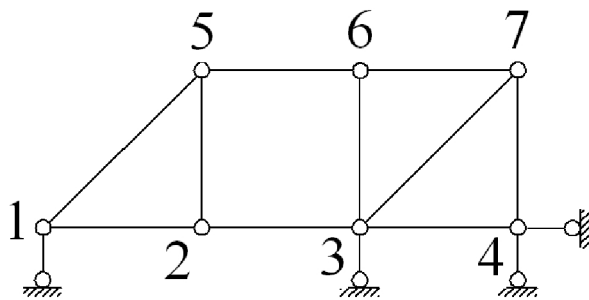


Рисунок 1.18

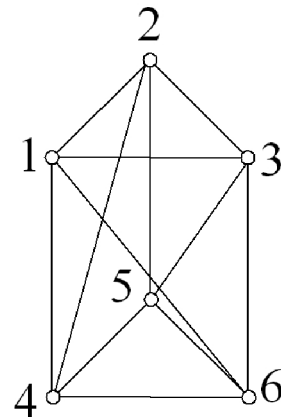


Рисунок 1.19

Итак, если удаётся доказать, что при отсутствии внешней нагрузки усилия во всех стержнях равны нулю, то стержневая система геометрически неизменяема. Ну, а если простейшие приёмы, изложенные в настоящем параграфе, не позволяют это показать? В этом случае следует прибегнуть к более универсальному методу исследования геометрической неизменяемости – к методу замены связей, который будет рассмотрен несколько позже.

## 1.5 Методы определения усилий в стержнях ферм

### 1.5.1 Метод вырезания узлов

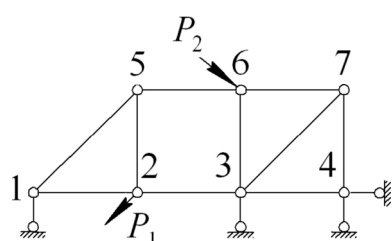
Мысленно вырезаются отдельные узлы фермы. Действие на узел отброшенной части фермы заменяется неизвестными усилиями в стержнях. Для всех узлов составляются уравнения равновесия. Если ферма статически определима, то из решения полученной системы уравнений можно всегда опре-

делить усилия в стержнях. Однако при расчёте сложных ферм система уравнений может оказаться весьма высокого порядка.

Методом вырезания узлов целесообразно пользоваться при определении усилий в стержнях простых ферм, которые могут быть образованы последовательным присоединением узлов. Исследование геометрической неизменяемости подобных ферм удобно проводить методом разрушения, снимая последовательно узлы, прикреплённые минимально необходимым числом правильно ориентированных стержней. В таком же порядке следует обходить узлы и при определении усилий в стержнях. Тогда для каждого узла количество неизвестных усилий будет равно числу уравнений равновесия.

Если при этом ферма свободная и находится на опорах, то целесообразно предварительно определить опорные реакции.

Вырезанием узлов следует решать и фермы, исследование геометрической неизменяемости которых осуществляется методом нулевых нагрузок.



**Рисунок 1.20**

Подобная ферма приведена на рисунке 1.20. Из равновесия узла 2 сразу определяется усилие в отдельно стоящем стержне 2-5, после чего усилия в остальных стержнях могут быть определены методом вырезания узлов. При этом узлы обходятся в таком же порядке, как и при исследовании неизменяемости фермы методом нулевых нагрузок (см. пояснения к рисунку 1.18).

### 1.5.2 Метод сквозных сечений или моментных точек

Плоская ферма разрезается на две части таким образом, чтобы в сечение попали три стержня (рисунок 1.21). Действие одной части на другую заменяется неизвестными усилиями в стержнях. Уравнения равновесия представляются в виде равенства нулю моментов всех сил относительно точек пересечения направлений каждой пары стержней, попавших в сечение. Из уравнений моментов относительно узла 2 определяется усилие  $N_{3-5}$ , относительно узла 5 – усилие  $N_{2-4}$ , относительно точки  $K$  (пересечение направлений стержней 2-4 и 3-5) – усилие  $N_{2-5}$ .

Если два из попавших в сечение стержней параллельны, то одно из уравнений моментов заменяется суммой проекций всех сил на ось, перпендикулярную направлению этих стержней. В представленной на рисунке 1.22 ферме таким образом находится усилие в стержне 2-5.

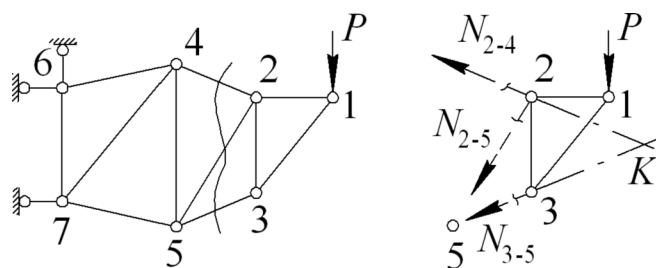


Рисунок 1.21

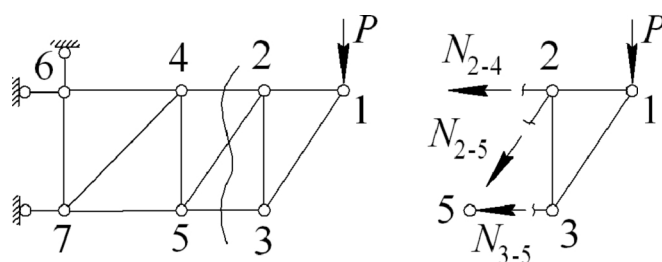


Рисунок 1.22

Преимущество метода моментных точек заключается в том, что каждое уравнение равновесия содержит только одно неизвестное усилие. Но рассмотренные нами фермы относятся к категории простых и, в общем-то, могут быть решены методом вырезания узлов.

### 1.5.3 Метод замены связей

Это наиболее общий метод решения сложных ферм. Рассмотрим его на примере известной уже нам пространственной фермы, представленной на рисунке 1.23,а. Методом вырезания узлов усилия в стержнях здесь целесообразно определять, так как в каждом узле сходится более трёх стержней.

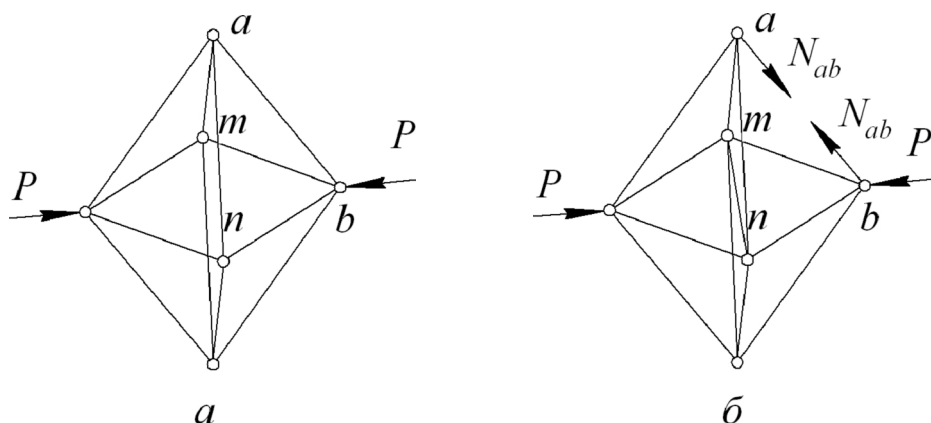


Рисунок 1.23

Удалим из фермы один стержень, например, стержень  $ab$ . Заменим его другим стержнем, расположенным так, чтобы преобразованная система была

неизменяемой и решалась простейшим способом. Этим требованиям удовлетворяет стержень  $mn$  (рисунок 1.23,б). Полученная ферма, как мы убедились в подразделе 1.1, может быть образована последовательным присоединением узлов. Приложим теперь к узлам  $a$  и  $b$  неизвестные пока силы  $N_{ab}$ , с которым устранённый стержень действует на оставшуюся часть.

Рассмотрим два состояния преобразованной фермы. В одном из них (рисунок 1.24) к ферме приложена только внешняя нагрузка. Усилия в стержнях фермы, соответствующие этому состоянию, будем отмечать сверху индексом «о». Во втором состоянии приложим к узлам  $a$  и  $b$  в направлении устранённого стержня силы, равные единице, и будем отмечать соответствующие усилия в стержнях чёрточкой сверху. Кроме того, условимся буквой  $N$  обозначать только усилия в стержнях заданной фермы, а усилия в заменяющем стержне обозначим буквой  $T$ .

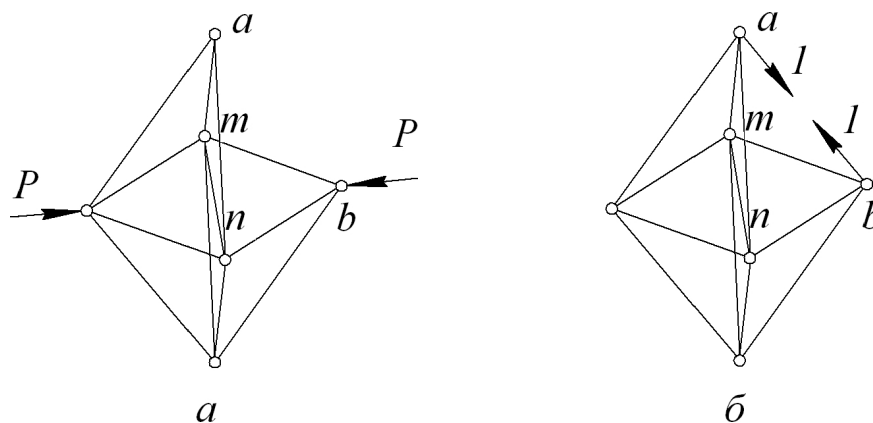


Рисунок 1.24

Пользуясь принципом независимости действия сил, запишем для усилия в заменяющем стержне

$$T_{mn} = T_{mn}^o + \bar{T}_{mn} N_{ab} = 0.$$

Здесь  $T_{mn}^o$  — усилие в заменяющем стержне только от внешней нагрузки,  $\bar{T}_{mn}$  — усилие в заменяющем стержне в единичной системе, а  $N_{ab}$  следует понимать как число, показывающее во сколько раз усилие в стержне  $ab$  больше единицы. Так как в исходной ферме (рисунок 1.23,а) стержня  $mn$  нет, то полное усилие  $T_{mn} = 0$ .

Последнее равенство можно рассматривать как уравнение относительно  $N_{ab}$ . Тогда получим

$$N_{ab} = -\frac{T_{mn}^o}{\bar{T}_{mn}}. \quad (1.5)$$

Зная  $N_{ab}$ , можно определить усилие в произвольном стержне по формуле

$$N_{rs} = N_{rs}^o + \bar{N}_{rs} N_{ab}. \quad (1.6)$$

Как же выбрать расположение заменяющего стержня, чтобы преобразованная система была безусловно геометрически неизменяемой и решалась простейшим способом? Практически это осуществляется методом разрушения. После того, как стержень устранён, снимаются последовательно узлы, прикреплённые минимально необходимым числом правильно ориентированных стержней. В процессе «разрушения» мы обнаружим, где следует поставить заменяющий стержень, чтобы полученная система была неизменяемой. Усилия в стержнях такой фермы будут определяться методом вырезания узлов, причём обходить узлы нужно при этом в таком же порядке, в каком производилось разрушение исходной системы.

Метод замены связей может быть использован и для исследования геометрической неизменяемости системы. Обратимся к формуле (1.5). Если знаменатель правой части отличен от нуля, т.е.  $\bar{T}_{mn} \neq 0$ , то для усилия в стержне  $ab$  получается конечное, вполне определённое значение. Значит, исходная стержневая система статически определима. Следовательно, она геометрически неизменяема.

Если  $\bar{T}_{mn} = 0$ , то  $N_{ab}$  обращается либо в бесконечность, либо в неопределённость. Система при минимально необходимом числе стержней оказывается статически неопределимой. Значит, она геометрически изменяема.

Таким образом, признаком геометрической неизменяемости является отличие от нуля усилия в заменяющем стержне, если в направлении устранённого стержня к узлам фермы приложены силы, равные единице.

На рисунке 1.25 представлена стержневая система, удовлетворяющая необходимому условию (1.1). Ни одним из рассмотренных ранее методов не представляется возможным исследовать её неизменяемость и определить усилия в стержнях. Устраним стержень 6-7. Пользуясь методом разрушения, снимем узел 6, присоединённый с помощью двух стержней, не лежащих на одной прямой. Далее могут быть аналогично сняты узлы 4, 5, 1. Обнаружим, что теперь стержень 2-3 может вращаться относительно шарнира 3. Чтобы

обеспечить неподвижность узла 2, поставим заменяющий стержень 2– $m$  (в нашем случае это опорный стержень).

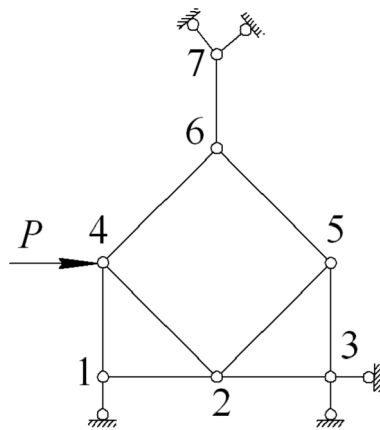


Рисунок 1.25

Рассмотрим два состояния преобразованной фермы. На рисунке 1.26,а к узлам 6 и 7 в направлении устранённого стержня приложены единичные силы, а на рисунке 1.26,б – внешняя нагрузка. На схемах показаны значения усилий в стержнях, вызванные приложенными силами. Для растянутых стержней стрелки направлены от узла, для сжатых – к узлу.

Из рисунка 1.26,б видно, что усилие в заменяющем стержне в единичной системе отлично от нуля ( $\bar{T}_{mn} = -1$ ). Следовательно, стержневая система, представленная на рисунке 1.25, геометрически неизменяема.

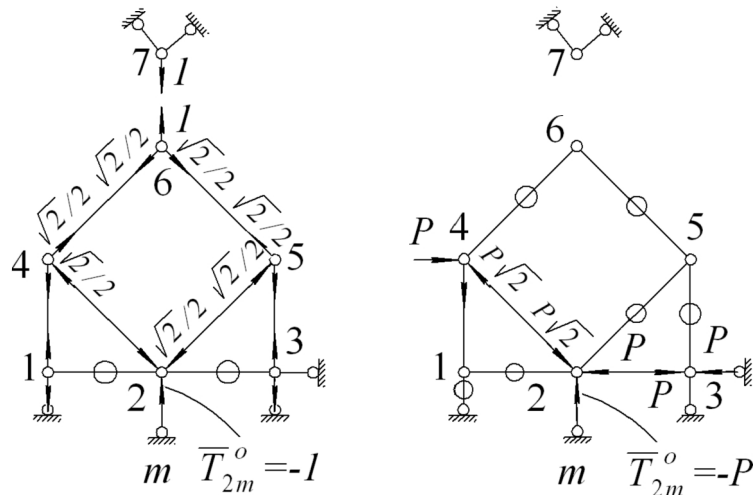


Рисунок 1.26

Усилие в заменяющем стержне 2– $m$  от внешней нагрузки равно  $T_{2m}^o = -P$ . Для усилия в устранённом стержне получим

$$N_{6-7} = -\frac{T_{2m}^o}{\bar{T}_{2m}} = -P.$$

Можно теперь определить усилия в остальных стержнях фермы. Например, для стержня 2-4 имеем

$$N_{2-4} = N_{2-4}^o + \bar{N}_{2-4} N_{6-7} = -P\sqrt{2} + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(-P) = -P\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

В примере на рисунке 1.27,а замена осуществляется, в принципе, так же, как и в предыдущем случае. При определении усилия в заменяющем стержне  $2-m$  от единичных нагрузок следует учесть, что для узлов 4 и 5 стержни 4-2 и 5-2 отдельно стоящие (рисунок 1.27,б). Поскольку к узлам не приложены внешние силы, усилия в стержнях 4-2 и 5-2 равны нулю. Равно нулю и усилие в заменяющем стержне ( $\bar{T}_{2m} = 0$ ). Система на рисунке 1.27,а статически неопределима и геометрически изменяема.

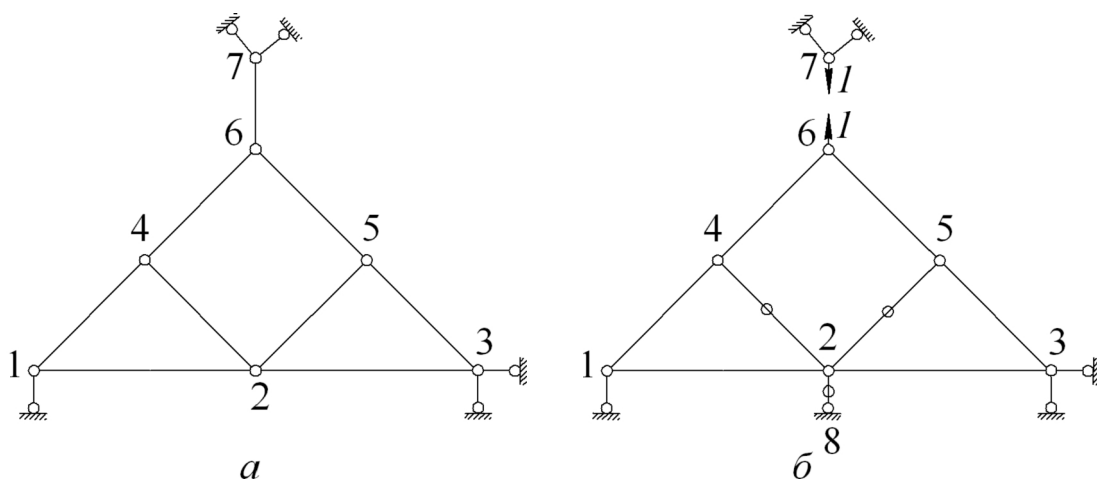


Рисунок 1.27

Иногда замены одного стержня оказывается недостаточно, чтобы получить заведомо неизменяемую преобразованную систему. В этих случаях можно осуществить замену двух или нескольких стержней.

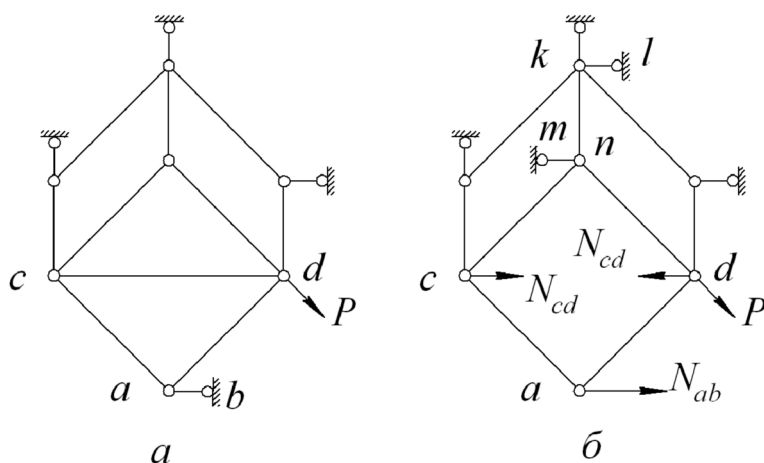


Рисунок 1.28

Стержневая система на рисунке 28,а может быть преобразована к простой неизменяемой заменой стержней  $ab$  и  $cd$ , например, на стержни  $mn$  и  $kl$ , в чём убеждаемся, используя метод разрушения. К узлам  $a$  и  $b$ ,  $c$  и  $d$

прикладываем в направлении устранённых стержней неизвестные усилия  $N_{ab}$  и  $N_{cd}$  (рисунок 1.28,б). Систему уравнений для определения этих усилий запишем из условия равенства нулю полных усилий  $T_{mn}$  и  $T_{kl}$  в заменяющих стержнях:

$$\begin{aligned} T_{mn}^o + \bar{T}_{mn}^{ab} N_{ab} + \bar{T}_{mn}^{cd} N_{cd} &= 0 \\ T_{kl}^o + \bar{T}_{kl}^{ab} N_{ab} + \bar{T}_{kl}^{cd} N_{cd} &= 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

Здесь  $T_{mn}^o$  и  $T_{kl}^o$  – усилия в заменяющих стержнях только от внешней нагрузки (рисунок 1.29,а);  $\bar{T}_{mn}^{ab}$  и  $\bar{T}_{kl}^{ab}$  – усилия в заменяющих стержнях от единичных сил, приложенных к узлам  $a$  и  $b$  (рисунок 1.29,б);  $\bar{T}_{mn}^{cd}$  и  $\bar{T}_{kl}^{cd}$  – усилия в заменяющих стержнях от единичных сил, приложенных к узлам  $c$  и  $d$  (рисунок 1.29,в).

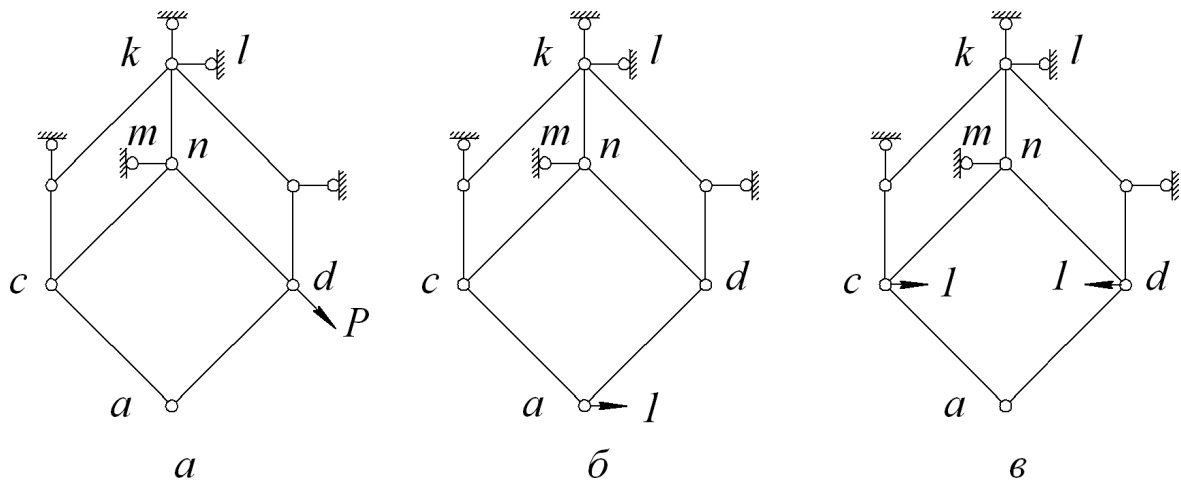


Рисунок 1.29

Составим определитель из коэффициентов при неизвестных  $N_{ab}$  и  $N_{cd}$  системы уравнений (1.7):

$$\Delta = \begin{vmatrix} \bar{T}_{mn}^{ab} & \bar{T}_{mn}^{cd} \\ \bar{T}_{kl}^{ab} & \bar{T}_{kl}^{cd} \end{vmatrix}. \quad (1.8)$$

Если определитель  $\Delta \neq 0$ , то система уравнений (1.7) имеет решение. Исходная стержневая система статически определима и геометрически неизменяема.

Если определитель  $\Delta = 0$ , то исходная система статически неопределима и геометрически изменяема.



## 2 МАТРИЧНЫЙ МЕТОД ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ДЛЯ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

### 2.1 Понятие о матрице жесткости

Рассмотрим консольную балку, нагруженную силой на свободном конце (рисунок 2.1). Вертикальное перемещение точки приложения силы, как известно, равно

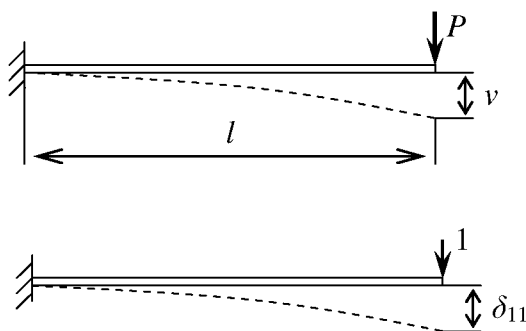


Рисунок 2.1

$$v = \delta_{11} P,$$

где  $\delta_{11} = l^3 / (3EI)$  – коэффициент податливости (численно равный перемещению от единичной силы);  $E$  – модуль упругости;  $I$  – момент инерции поперечного сечения балки.

Если перемещение  $v$  задано, то из этой формулы можно найти силу, необходимую для создания такого перемещения

$$P = \frac{1}{\delta_{11}} v = k v,$$

где

$$k = \frac{1}{\delta_{11}} = \frac{3EI}{l^3}.$$

Величина  $k$  называется коэффициентом жесткости консольной балки. Если положить  $v = 1$ , то сила  $P$  будет равна  $k$ . Отсюда вытекает физический смысл коэффициента жесткости.  $k$  есть сила, которую необходимо приложить на конце балки, чтобы ее прогиб равнялся единице.

Пусть, далее, к той же балке приложены две силы, как показано на рисунке 2.2. Используя известные методы, можно найти перемещения  $v_1$  и  $v_2$  в направлении этих

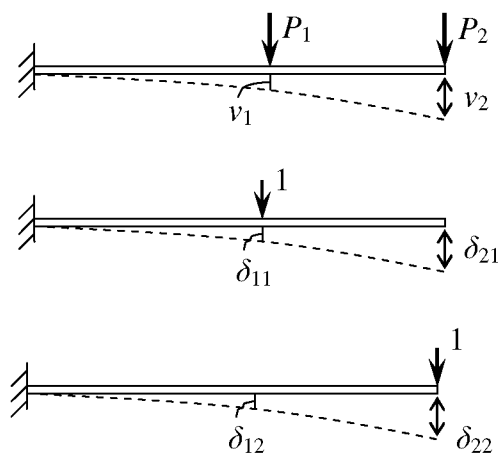


Рисунок 2.2

сил

$$\begin{aligned} v_1 &= \delta_{11}P_1 + \delta_{12}P_2; \\ v_2 &= \delta_{21}P_1 + \delta_{22}P_2, \end{aligned}$$

где коэффициенты  $\delta_{ij}$ , называемые коэффициентами влияния, зависят от геометрических размеров и модуля упругости  $E$ . Запишем эти соотношения в матричной форме

$$[v] = [\Delta][P],$$

где

$$[v] = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}; \quad [P] = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}; \quad [\Delta] = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} - \text{матрица податливости.}$$

Если принять, что перемещения  $[v]$  известны, то из этого выражения можно найти силы  $[P]$ , вызывающие данные перемещения:

$$[P] = [\Delta]^{-1}[v] = [K][v].$$

Матрица  $[K] = [\Delta]^{-1}$  имеет следующую структуру

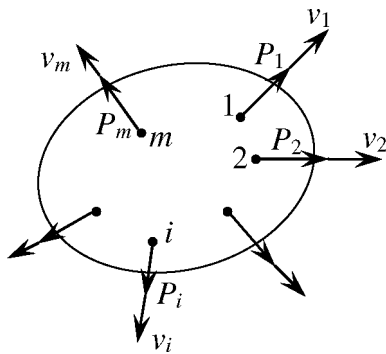
$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}$$

и называется матрицей жесткости рассматриваемой системы.

Согласно теореме Максвелла о взаимности перемещений  $\delta_{12} = \delta_{21}$ , следовательно, матрица  $[\Delta]$  является симметричной. Обратная к ней матрица  $[K]$  будет также симметричной (т.е.  $K_{12} = K_{21}$ ).

Теперь рассмотрим общий случай, когда на произвольное упругое тело действует система из  $m$  сил (рисунок 2.3), которую представим матрицей

$$[P] = \{P_1 \ P_2 \ \dots \ P_m\}.$$



**Рисунок 2.3**

Здесь и далее фигурные скобки обозначают матрицу столбец.

Пусть перемещения точек приложения сил  $[P]$  (в дальнейшем эти точки будем называть узлами) в направлении этих сил образуют матрицу

$$[v] = \{v_1 \ v_2 \ \dots \ v_m\}.$$

Предположим, что перемещения  $[v]$  нам известны, а силы, необходимые для создания этих перемещений, определяются соотношением

$$[P] = [K][v].$$

Матрица  $[K]$ , связывающая силы  $[P]$  с соответствующими им перемещениями  $[v]$ , называется матрицей жесткости рассматриваемого тела.

Представим это соотношение в развернутом виде

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_i \\ P_j \\ \vdots \\ P_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1i} & K_{1j} & \cdots & K_{1m} \\ K_{21} & K_{22} & \cdots & K_{2i} & K_{2j} & \cdots & K_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ K_{i1} & K_{i2} & \cdots & K_{ii} & K_{ij} & \cdots & K_{im} \\ K_{j1} & K_{j2} & \cdots & K_{ji} & K_{jj} & \cdots & K_{jm} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ K_{m1} & K_{m2} & \cdots & K_{mi} & K_{mj} & \cdots & K_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_i \\ v_j \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix}.$$

Выпишем  $i$ -ую и  $j$ -ую строчки из этого матричного равенства

$$\begin{aligned} P_i &= K_{i1}v_1 + K_{i2}v_2 + \dots + K_{ii}v_i + K_{ij}v_j + \dots + K_{im}v_m; \\ P_j &= K_{j1}v_1 + K_{j2}v_2 + \dots + K_{ji}v_i + K_{jj}v_j + \dots + K_{jm}v_m. \end{aligned}$$

Физический смысл коэффициента  $K_{ij}$  можно выяснить, полагая перемещение  $v_j = 1$ , а все остальные перемещения равными нулю; тогда  $P_i = K_{ij}$ . Отсюда следует, что коэффициент  $K_{ij}$  представляет собой силу, возникающую в узле  $i$ , когда перемещение  $v_j$  равно единице, а все остальные перемещения равны нулю. Иначе говоря, если закрепить тело во всех узлах, кроме узла  $j$ , и приложить такую силу  $P_j$ , чтобы перемещение  $v_j$  равнялось единице, то  $P_j = K_{jj}$ , а реакция на тело в узле  $i$  будет равна  $K_{ij}$ .

Применяя теорему Бетти о взаимности работ, можно показать, что матрица жесткости всегда симметрична.

Если силы  $P_i$  имеют произвольное направление, то удобно разложить эти силы по координатным осям  $x, y, z$  и ввести для каждого узла  $i$  матрицу сил

$$[P_i] = \{P_{ix} \ P_{iy} \ P_{iz}\}.$$

Тогда  $[v_i]$  будет также матрицей-столбцом, элементы которой суть перемещения узла  $i$  по координатным осям:

$$[v_i] = \{v_{ix} \ v_{iy} \ v_{iz}\}.$$

В этом случае связь между силами и перемещениями можно по-прежнему определять записанным ранее соотношением, только элементами  $K_{ij}$  матрицы  $[K]$ , представляющей уже блочную матрицу, будут квадратные подматрицы размера  $3 \times 3$ .

Для практических вычислений удобнее иногда пользоваться сквозной нумерацией компонент узловых сил и перемещений. В этом случае силы  $P_{1x}$ ,  $P_{1y}$ ,  $P_{1z}$ , действующие в узле 1, обозначаются соответственно через  $P_1$ ,  $P_2$  и  $P_3$ ; силы  $P_{2x}$ ,  $P_{2y}$ ,  $P_{2z}$ , действующие в узле 2, – через  $P_4$ ,  $P_5$ ,  $P_6$  и т.д. При такой индексации элементы матрицы сил для узла  $i$  будут иметь номера  $3i - 2$ ,  $3i - 1$  и  $3i$ , т.е.

$$[P_i] = \begin{bmatrix} P_{ix} \\ P_{iy} \\ P_{iz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{3i-2} \\ P_{3i-1} \\ P_{3i} \end{bmatrix}.$$

Аналогично для перемещений будем иметь

$$[v_i] = \begin{bmatrix} v_{ix} \\ v_{iy} \\ v_{iz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{3i-2} \\ v_{3i-1} \\ v_{3i} \end{bmatrix}.$$

Наконец, в самом общем случае в каждом узле могут помимо сил действовать моменты относительно координатных осей. Тогда подматрицы  $[P_i]$  и  $[v_i]$  будут состоять из шести компонент, которые мы условимся перечислять в следующем порядке:

$$[P_i] = \{P_{ix} \ P_{iy} \ P_{iz} \ M_{ix} \ M_{iy} \ M_{iz}\};$$

$$[v_i] = \{v_{ix} \ v_{iy} \ v_{iz} \ \theta_{ix} \ \theta_{iy} \ \theta_{iz}\},$$

где  $M_{iq}$  и  $\theta_{iq}$  – моменты и углы поворота относительно оси  $q$ . Если использовать сквозную нумерацию сил и перемещений, то будем иметь

$$[P_i] = \{P_{6i-5} \ P_{6i-4} \ P_{6i-3} \ P_{6i-2} \ P_{6i-1} \ P_{6i}\};$$

$$[v_i] = \{v_{6i-5} \ v_{6i-4} \ v_{6i-3} \ v_{6i-2} \ v_{6i-1} \ v_{6i}\}.$$

Подматрицы  $[K_{ij}]$  будут иметь размер  $6 \times 6$ .

## 2.2 Преобразование координатных осей

Компоненты матриц  $[P_i]$ ,  $[v_i]$  являются проекциями сил и перемещений на координатные оси, поэтому они зависят от принятой системы координат. Выбор этой системы произволен. Для расчета конструкции обычно применяют координатную систему, используемую в чертежах. Однако для вычисления матриц жесткости отдельных конструктивных элементов может оказаться выгоднее воспользоваться местной системой координат. Для каждого конструктивного элемента местная система координат выбирается так, чтобы свести к минимуму вычислительную работу. В таких случаях после отыскания матрицы жесткости в местных координатах необходимо выполнить переход к общей системе координат.

Пусть  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$  и  $x, y, z$  – соответственно местная и общая системы координатных осей. Перемещения в этих системах координат будем обозначать через  $[\bar{v}]$  и  $[v]$ , а силы – через  $[\bar{P}]$  и  $[P]$ .

Если перемещения (линейные и угловые) произвольного узла  $i$  в общей системе координат спроектировать на местные координатные оси, то получим связь между  $[\bar{v}_i]$  и  $[v_i]$  вида

$$[\bar{v}_i] = [\lambda_0][v_i], \quad (2.1)$$

где  $[\lambda_0]$  – матрица, составленная из косинусов углов между осями  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$  и  $x, y, z$ .

Подобные соотношения могут быть записаны для всех узлов рассматриваемого тела. Введем блочно-диагональную матрицу, в которой число блоков, расположенных вдоль главной диагонали, равно числу узлов:

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} [\lambda_0] & [0] & \cdots & [0] \\ [0] & [\lambda_0] & \cdots & [0] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [0] & [0] & \cdots & [\lambda_0] \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{c|c|c|c} \lambda_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \lambda_0 & \cdots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \cdots & \lambda_0 \end{array} \right].$$

Здесь и далее разделительные штриховые линии означают, что элементами матрицы являются подматрицы.

Все равенства типа (2.1) можно объединить в одно

$$[\bar{v}] = \begin{bmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \\ \vdots \\ \bar{v}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix}$$

или

$$[\bar{v}] = [\lambda][v]. \quad (2.2)$$

Матрица  $[\lambda]$  представляет собой матрицу преобразования координат.

Придадим точкам тела возможные перемещения и обозначим через  $[\delta\bar{v}]$  матрицу возможных перемещений узлов в местной системе координат, а через  $[\delta v]$  – в общей. На основании вышеизложенного

$$[\delta\bar{v}] = [\lambda][\delta v]. \quad (2.3)$$

Если узловые силы отнесены к местной системе координат, то на возможных перемещениях они произведут работу

$$[\delta\bar{v}]^T[\bar{P}],$$

если же они отнесены к общей системе координат, то работа будет равна

$$[\delta v]^T[P].$$

Поскольку работа не зависит от того, в какой системе координат производятся вычисления, можно записать

$$[\delta v]^T[P] = [\delta\bar{v}]^T[\bar{P}]$$

или с учетом (2.3)

$$[\delta v]^T[P] = [\delta v]^T[\lambda]^T[\bar{P}],$$

откуда в силу независимости элементов матрицы  $[\delta v]$  находим

$$[P] = [\lambda]^T[\bar{P}]. \quad (2.4)$$

Выражая теперь силы  $[\bar{P}]$  через перемещения

$$[\bar{P}] = [\bar{K}][\bar{v}] = [\bar{K}][\lambda][v],$$

где  $[\bar{K}]$  – матрица жесткости в местных координатах, получим

$$[P] = [\lambda]^T[\bar{K}][\lambda][v].$$

Это соотношение связывает силы и перемещения в общей системе координат в стандартной форме

$$[P] = [K][v],$$

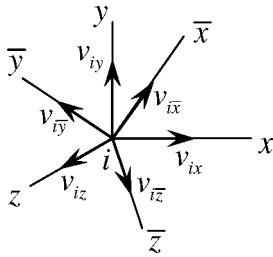
где матрица

$$[K] = [\lambda]^T [\bar{K}] [\lambda] \quad (2.5)$$

представляет собой матрицу жесткости в общей системе координат.

Таким образом, если матрица жесткости  $[\bar{K}]$  в местной системе координат известна, то для вычисления матрицы жесткости в общей системе координат достаточно построить матрицу  $[\lambda]$ , т.е. задача сводится к составлению  $[\lambda_0]$ .

В качестве примера рассмотрим составление матрицы  $[\lambda_0]$  для случая, когда в каждом узле имеется по три линейных перемещения в направлении координатных осей. На рисунке 2.4 показаны проекции перемещения узла  $i$



**Рисунок 2.4**

на координатные оси двух систем – местной и общей. Обе матрицы  $[v_i]$  и  $[\bar{v}_i]$  будут состоять здесь из трех элементов:

$$[v_i] = \begin{bmatrix} v_{ix} \\ v_{iy} \\ v_{iz} \end{bmatrix}; \quad [\bar{v}_i] = \begin{bmatrix} v_{i\bar{x}} \\ v_{i\bar{y}} \\ v_{i\bar{z}} \end{bmatrix}.$$

Обозначим косинус угла между осью  $\bar{p}$  ( $\bar{p} = \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ ) местной системы координат и осью  $q$  ( $q = x, y, z$ ) общей системы координат через  $\lambda_{\bar{p}q}$ . Тогда, проектируя перемещения  $v_{ix}, v_{iy}, v_{iz}$  на ось  $\bar{x}$ , получим

$$v_{i\bar{x}} = v_{ix} \lambda_{\bar{x}x} + v_{iy} \lambda_{\bar{x}y} + v_{iz} \lambda_{\bar{x}z} = [\lambda_{0\bar{x}}][v_i],$$

где

$$[\lambda_{0\bar{x}}] = [\lambda_{\bar{x}x} \ \lambda_{\bar{x}y} \ \lambda_{\bar{x}z}].$$

Аналогично выразим  $v_{i\bar{y}}$  и  $v_{i\bar{z}}$  через  $[v_i]$ :

$$v_{i\bar{y}} = [\lambda_{0\bar{y}}][v_i]; \quad v_{i\bar{z}} = [\lambda_{0\bar{z}}][v_i].$$

Здесь

$$[\lambda_{0\bar{y}}] = [\lambda_{\bar{y}x} \ \lambda_{\bar{y}y} \ \lambda_{\bar{y}z}]; \quad [\lambda_{0\bar{z}}] = [\lambda_{\bar{z}x} \ \lambda_{\bar{z}y} \ \lambda_{\bar{z}z}].$$

Отсюда находим

$$[v_i] = \begin{bmatrix} v_{ix} \\ v_{iy} \\ v_{iz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{0\bar{x}} \\ \lambda_{0\bar{y}} \\ \lambda_{0\bar{z}} \end{bmatrix} [v_i].$$

Сопоставляя эту запись с определением  $[\lambda_0]$ , получим

$$[\lambda_0] = \begin{bmatrix} \lambda_{0\bar{x}} \\ \lambda_{0\bar{y}} \\ \lambda_{0\bar{z}} \end{bmatrix}.$$

Матрица  $[\lambda]$  имеет блочно-диагональный вид лишь в том случае, когда в матрицах  $[\bar{v}]$  и  $[v]$  узловые перемещения перечисляются в одном и том же порядке:

$$[\bar{v}] = \{\bar{v}_1 \mid \bar{v}_2 \mid \bar{v}_3 \mid \cdots \mid \bar{v}_m\};$$

$$[v] = \{v_1 \mid v_2 \mid v_3 \mid \cdots \mid v_m\}.$$

### 2.3 Матрица жесткости ферменного элемента

Ферменным элементом будем называть прямолинейный стержень, который присоединяется к другим конструктивным элементам посредством идеальных шарниров. Если к нему не приложены поперечные силы, то он будет испытывать лишь растяжение или сжатие. Выведем матрицу жесткости такого элемента, выбрав местные координаты таким образом, чтобы ось  $\bar{x}$  совпадала с продольной осью стержня (рисунок 2.5). Узлами являются концы стержня  $i$  и  $j$ , в которых действуют силы  $\bar{P}_i$  и  $\bar{P}_j$ , направленные вдоль оси  $\bar{x}$ .

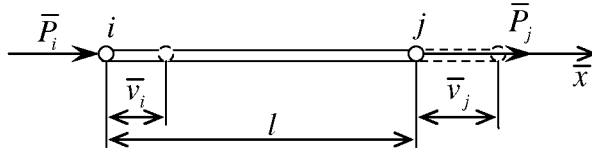


Рисунок 2.5

Перемещения этих узлов вдоль оси стержня обозначим  $\bar{v}_i$  и  $\bar{v}_j$ .

Узловые силы и перемещения в местной системе координат образуют матрицы

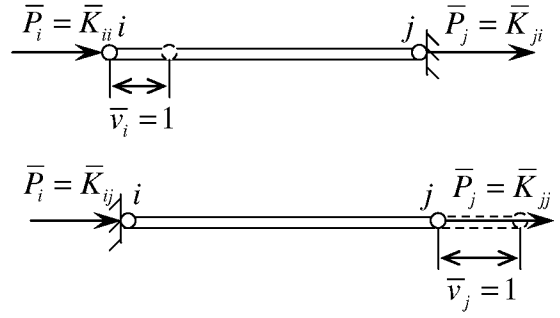
$$[\bar{P}] = \begin{bmatrix} \bar{P}_i \\ \bar{P}_j \end{bmatrix}; \quad [\bar{v}] = \begin{bmatrix} \bar{v}_i \\ \bar{v}_j \end{bmatrix},$$

которые связаны зависимостью  $[\bar{P}] = [\bar{K}][\bar{v}]$  или

$$\begin{bmatrix} \bar{P}_i \\ \bar{P}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{K}_{ii} & \bar{K}_{ij} \\ \bar{K}_{ji} & \bar{K}_{jj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}_i \\ \bar{v}_j \end{bmatrix}.$$



Для вычисления элементов матрицы жесткости  $[\bar{K}]$  стержня предположим сначала, что узел  $i$  получил единичное перемещение в положительном направлении оси  $\bar{x}$ , в то время как узел  $j$  остался неподвижным (рисунок 2.6). В соответствии с физическим смыс-



**Рисунок 2.6**

лом сила  $\bar{P}_i$ , создающая такую деформацию совпадает численно с величиной  $\bar{K}_{ii}$  а реакция  $\bar{P}_j$  в закрепленном узле  $j$  – с величиной  $\bar{K}_{ji}$ .

Воспользуемся далее известной из сопротивления материалов формулой

$$\Delta l = \frac{Pl}{EF}$$

для изменения длины  $l$  стержня, нагруженного осевой силой  $P$  ( $E$  – модуль упругости;  $F$  – площадь поперечного сечения стержня). Подставив сюда  $\Delta l = \bar{v}_i = 1$ ;  $P = \bar{P}_i = \bar{K}_{ii}$ , находим

$$\bar{K}_{ii} = \frac{EF}{l}.$$

Из условия равновесия стержня следует равенство  $\bar{P}_j = -\bar{P}_i$ , так что с учетом записанного соотношения имеем

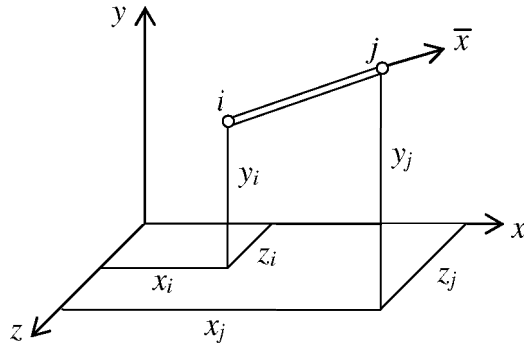
$$\bar{K}_{ji} = -\bar{K}_{ii} = -\frac{EF}{l}.$$

Совершенно аналогично рассмотрим деформирование стержня по второй схеме. Это дает значения

$$\bar{K}_{jj} = -\bar{K}_{ij} = \frac{EF}{l}.$$

Таким образом, матрица жесткости ферменного элемента в местной системе координат оказывается равной

$$[\bar{K}] = \frac{EF}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$



**Рисунок 2.7**

Отнесем теперь ферменный элемент  $i-j$  к общей системе координат (рисунок 2.7). Пусть ось стержня составляет с осями  $x, y, z$  углы, косинусы которых равны

$$\lambda_{xx} = \frac{l_x}{l}; \quad \lambda_{xy} = \frac{l_y}{l}; \quad \lambda_{xz} = \frac{l_z}{l},$$

где

$$l_x = x_j - x_i; \quad l_y = y_j - y_i; \quad l_z = z_j - z_i$$

– проекции стержня на координатные оси (которые должны вычисляться с учетом знака);

$$l = \sqrt{l_x^2 + l_y^2 + l_z^2}.$$

Перемещение каждого узла имеет составляющие по всем трем осям общей системы координат, поэтому в этой системе матрица перемещений узла  $i$  будет иметь три элемента:

$$[v_i] = \{v_{ix} \ v_{iy} \ v_{iz}\}.$$

Силы, действующие в узле  $i$ , образуют матрицу

$$[P_i^e] = \{P_{ix}^e \ P_{iy}^e \ P_{iz}^e\}.$$

Индексом “ $e$ ” будем отмечать в общей системе координат те величины, которые относятся к отдельному элементу. Так,  $[P_i^e]$  будет означать подматрицу сил, действующих в узле  $i$  на элемент  $e$ , в отличие от подматрицы  $[P_i]$  внешних сил, приложенных к узлу  $i$  конструкции. Ясно, что  $[v_i^e] = [v_i]$ .

Проектируя перемещения узла  $i$  в общей системе координат на направление местной оси  $\bar{x}$ , получим

$$\bar{v}_i = v_{ix} \lambda_{xx} + v_{iy} \lambda_{xy} + v_{iz} \lambda_{xz}.$$

Если ввести обозначение

$$[\lambda_0] = [\lambda_{0\bar{x}}] = [\lambda_{xx} \ \lambda_{xy} \ \lambda_{xz}],$$

то можно записать

$$\bar{v}_i = [\lambda_0][v_i].$$

Для стержня в целом получим

$$\begin{bmatrix} \bar{v}_i \\ \bar{v}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_0 & | & 0 \\ 0 & | & \lambda_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ v_j \end{bmatrix}$$

или

$$[\bar{v}] = [\lambda][v^e],$$

где

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} \lambda_0 & | & 0 \\ 0 & | & \lambda_0 \end{bmatrix}. \quad (2 \times 6)$$

Выражение для матрицы жесткости в общей системе координат будет иметь вид

$$[K^e] = [\lambda]^T [\bar{K}] [\lambda] = \begin{bmatrix} \lambda_0^T & | & 0 \\ 0 & | & \lambda_0^T \end{bmatrix} \frac{EF}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_0 & | & 0 \\ 0 & | & \lambda_0 \end{bmatrix} = \frac{EF}{l} \begin{bmatrix} d & | & -d \\ -d & | & d \end{bmatrix}, \quad (2.7)$$

где  $[d] = [\lambda_0]^T [\lambda_0]$  – подматрица размером  $3 \times 3$ .

Используя обозначения

$$[P^e] = \begin{bmatrix} P_i^e \\ P_j^e \end{bmatrix}; \quad [v^e] = \begin{bmatrix} v_i \\ v_j \end{bmatrix},$$

можно записать матрицу жесткости в блочном виде

$$\begin{bmatrix} P_i^e \\ P_j^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{ii}^e & | & K_{ij}^e \\ K_{ji}^e & | & K_{jj}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ v_j \end{bmatrix}, \quad (2.8)$$

где

$$[K_{ii}^e] = [K_{jj}^e] = -[K_{ij}^e] = -[K_{ji}^e] = \frac{EF}{l} [\lambda_0]^T [\lambda_0].$$

Если рассматриваемый стержень  $i$ - $j$  является элементом плоской фермы, то в общей системе координат каждый узел имеет перемещения лишь в направлении двух осей (например,  $x$  и  $y$ ):

$$[v_i] = \begin{bmatrix} v_{ix} \\ v_{iy} \end{bmatrix}; \quad [P_i^e] = \begin{bmatrix} P_{ix}^e \\ P_{iy}^e \end{bmatrix},$$

а матрица  $[\lambda_0] = [\lambda_{xx} \ \lambda_{xy}]$ .

Подматрица  $[d]$  будет иметь размер  $2 \times 2$ .

## 2.4 Матрица жесткости балочного элемента в местной системе координат

Балочным элементом будем называть прямолинейный брус, способный воспринимать в общем случае все виды нагрузок (растяжение-сжатие, изгиб в двух плоскостях и кручение). В качестве узлов  $i, j$  элемента возьмем его концы. Местные оси координат выберем так, чтобы ось  $\bar{x}$  совпадала с продольной осью стержня, а оси  $\bar{y}$  и  $\bar{z}$  совпадали с главными центральными осями его поперечного сечения. В каждом узле будем рассматривать шесть перемещений (три линейных и три угловых) и соответствующие им силовые факторы, как показано на рисунке 2.8.

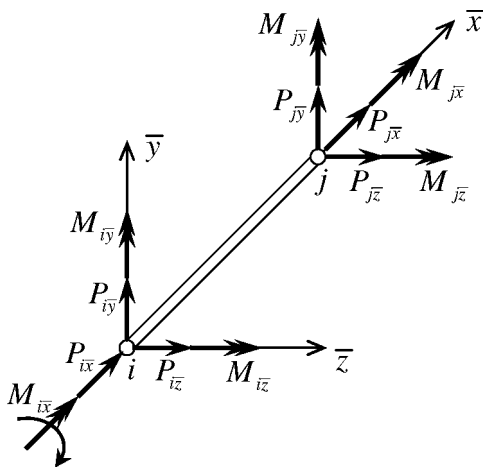


Рисунок 2.8

Матрицы сил и перемещений для всего стержня можно составить, как и ранее, перечисляя сначала силы (перемещения) узла  $i$ , а затем  $j$ , т.е.

$$[\bar{P}] = \begin{bmatrix} \bar{P}_i \\ \bar{P}_j \end{bmatrix}; \quad [\bar{v}] = \begin{bmatrix} \bar{v}_i \\ \bar{v}_j \end{bmatrix}.$$

Однако здесь удобнее расположить перемещения и силы в ином порядке. При выбранной системе местных осей узловые силы распадаются на четыре группы, которые можно рассматривать независимо друг от друга. Так, силы  $P_{ix}$  и  $P_{jx}$  вызывают только осевую деформацию бруса и определяются перемещениями  $v_{ix}$  и  $v_{jx}$ . образуем из них соответствующие подматрицы, которые обозначим через  $[\bar{P}_a]$  и  $[\bar{v}_a]$ :

$$[\bar{P}_a] = \begin{bmatrix} P_{ix} \\ P_{jx} \end{bmatrix}; \quad [\bar{v}_a] = \begin{bmatrix} v_{ix} \\ v_{jx} \end{bmatrix}.$$

Эти подматрицы связаны равенством

$$[\bar{P}_a] = [\bar{K}_a][\bar{v}_a],$$

где  $[\bar{K}_a]$  – некоторая квадратная матрица размером  $2 \times 2$ .

Далее силы  $P_{iy}$ ,  $P_{jy}$ , а также моменты  $M_{iz}$ ,  $M_{jz}$  вызывают изгиб бруса только в плоскости  $\bar{x}\bar{y}$  и определяются перемещениями  $v_{iy}$ ,  $v_{jy}$  и углами поворота  $\theta_{iz}$ ,  $\theta_{jz}$ . Из этих компонент составим подматрицы

$$[\bar{P}_b] = \begin{bmatrix} P_{i\bar{y}} \\ M_{i\bar{z}} \\ P_{j\bar{y}} \\ M_{j\bar{z}} \end{bmatrix}; \quad [\bar{v}_b] = \begin{bmatrix} v_{i\bar{y}} \\ \theta_{i\bar{z}} \\ v_{j\bar{y}} \\ \theta_{j\bar{z}} \end{bmatrix}; \quad [\bar{P}_b] = [\bar{K}_b][\bar{v}_b].$$

Аналогично образуем подматрицы сил и перемещений

$$[\bar{P}_c] = \begin{bmatrix} P_{i\bar{z}} \\ M_{i\bar{y}} \\ P_{j\bar{z}} \\ M_{j\bar{y}} \end{bmatrix}; \quad [\bar{v}_c] = \begin{bmatrix} v_{i\bar{z}} \\ \theta_{i\bar{y}} \\ v_{j\bar{z}} \\ \theta_{j\bar{y}} \end{bmatrix}; \quad [\bar{P}_c] = [\bar{K}_c][\bar{v}_c],$$

определяющих изгиб бруса в плоскости  $\bar{x}\bar{z}$ .

Наконец, кручения стержня вокруг оси  $\bar{x}$  характеризуют подматрицы

$$[\bar{P}_d] = \begin{bmatrix} M_{i\bar{x}} \\ M_{j\bar{x}} \end{bmatrix}; \quad [\bar{v}_d] = \begin{bmatrix} \theta_{i\bar{x}} \\ \theta_{j\bar{x}} \end{bmatrix}; \quad [\bar{P}_d] = [\bar{K}_d][\bar{v}_d].$$

Образуем теперь матрицы  $[\bar{P}]$  и  $[\bar{v}]$  в следующем виде

$$[\bar{P}] = \{\bar{P}_a \mid \bar{P}_b \mid \bar{P}_c \mid \bar{P}_d\};$$

$$[\bar{v}] = \{\bar{v}_a \mid \bar{v}_b \mid \bar{v}_c \mid \bar{v}_d\}.$$

Тогда соотношение

$$[\bar{P}] = [\bar{K}][\bar{v}]$$

в развернутом виде запишется так

$$\begin{bmatrix} \bar{P}_a \\ \bar{P}_b \\ \bar{P}_c \\ \bar{P}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{K}_a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{K}_b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{K}_c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{K}_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}_a \\ \bar{v}_b \\ \bar{v}_c \\ \bar{v}_d \end{bmatrix}.$$

Таким образом, при выбранном расположении компонент  $[\bar{P}]$  и  $[\bar{v}]$  матрица жесткости  $[\bar{K}]$  оказывается блочно-диагональной:

$$[\bar{K}] = \begin{bmatrix} \bar{K}_a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{K}_b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{K}_c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{K}_d \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

Подматрицы  $[\bar{K}_a]$  и  $[\bar{K}_d]$  имеют размер 2x2, а подматрицы  $[\bar{K}_b]$  и  $[\bar{K}_c]$  – размер 4x4.

Переходя к вычислению отдельных блоков матрицы жесткости, начнем с подматрицы  $[\bar{K}_a]$ . Эта матрица, очевидно, совпадает с матрицей жесткости ферменного элемента в местной системе координат:

$$[\bar{K}_a] = \frac{EF}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.10)$$

Рассмотрим кручение бруса. Сечение  $j$  относительно сечения  $i$  закручивается на угол  $\theta_{j\bar{x}} - \theta_{i\bar{x}}$  (рисунок 2.9). Из курса сопротивления материалов из-

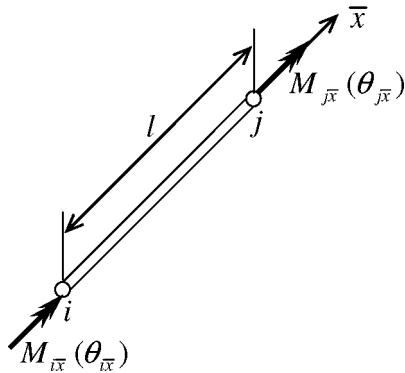


Рисунок 2.9

вестно, что крутящий момент в сечении бруса  $M_{j\bar{x}}$ , необходимый для создания такого угла закручивания, равен

$$M_{j\bar{x}} = \frac{GI_{кр}}{l} (\theta_{j\bar{x}} - \theta_{i\bar{x}}) = \frac{GI_{кр}}{l} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{i\bar{x}} \\ \theta_{j\bar{x}} \end{bmatrix},$$

где  $GI_{кр}$  – жесткость стержня на кручение.

Из уравнения равновесия имеем также

$$M_{i\bar{x}} = -M_{j\bar{x}} = \frac{GI_{кр}}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{i\bar{x}} \\ \theta_{j\bar{x}} \end{bmatrix}.$$

Объединяя эти равенства, получим

$$\begin{bmatrix} M_{i\bar{x}} \\ M_{j\bar{x}} \end{bmatrix} = \frac{GI_{кр}}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{i\bar{x}} \\ \theta_{j\bar{x}} \end{bmatrix}.$$

Таким образом,

$$[\bar{K}_d] = \frac{GI_{кр}}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

## 2.5 Матрица жесткости балочного элемента при изгибе его в одной плоскости

Рассмотрим изгиб в плоскости  $\bar{x}\bar{y}$ . Пусть  $u_{\bar{y}}$  – прогиб бруса на расстоянии  $\bar{x}$  от левого конца (рисунок 2.10).

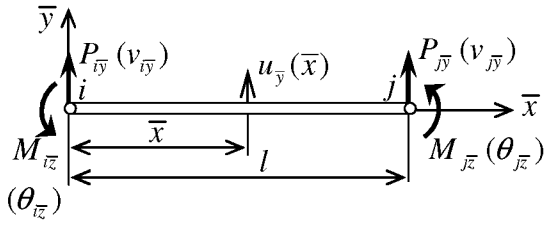


Рисунок 2.10

погонная поперечная нагрузка.

Согласно технической теории изгиба бруса прогиб  $u_y$  однозначно определяется узловыми перемещениями  $[\bar{v}_b]$ . В матричных обозначениях это означает существования равенства

$$u_y(\bar{x}) = [\alpha(\bar{x})][\bar{v}_b], \quad (2.12)$$

где  $[\alpha(\bar{x})]$  – матрица-строка, четыре элемента которой являются функциями координаты  $\bar{x}$ . Эта матрица будет получена позже, а сейчас перейдем к вычислению подматрицы  $[\bar{K}_b]$ , считая, что матрица  $[\alpha(\bar{x})]$  известна.

Зная прогиб  $u_y$ , можно найти изгибающие моменты и перерезывающие (или поперечные) силы по формулам

$$M = EI_{\bar{z}} \frac{d^2 u_y}{d\bar{x}^2}; \quad Q = EI_{\bar{z}} \frac{d^3 u_y}{d\bar{x}^3}$$

или с учетом (1)

$$M = EI_{\bar{z}} [\alpha''(\bar{x})][\bar{v}_b]; \quad Q = EI_{\bar{z}} [\alpha'''(\bar{x})][\bar{v}_b]; \quad (2.13)$$

Положительные направления изгибающих моментов и перерезывающих сил приведены на рисунке 2.11. В узлах  $i$  и  $j$  эти перерезывающие силы и изгибающие моменты должны равняться узловым силам и моментам.

Тогда мы можем записать

$$\begin{aligned} P_{iy} &= Q(0) = EI_{\bar{z}} [\alpha'''(0)][\bar{v}_b]; \\ M_{iy} &= -M(0) = -EI_{\bar{z}} [\alpha''(0)][\bar{v}_b]; \\ P_{jy} &= -Q(l) = -EI_{\bar{z}} [\alpha'''(l)][\bar{v}_b]; \\ M_{jy} &= M(l) = EI_{\bar{z}} [\alpha''(l)][\bar{v}_b] \end{aligned}$$

или в матричной форме

Дифференциальное уравнение изогнутой оси бруса имеет вид

$$EI_{\bar{z}} \frac{d^4 u_y}{d\bar{x}^4} = q,$$

где  $I_{\bar{z}}$  – момент инерции поперечного сечения относительно оси  $\bar{z}$ ;  $q$  –

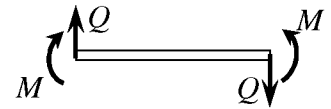


Рисунок 2.11

$$\begin{bmatrix} P_{\bar{y}} \\ M_{\bar{z}} \\ P_{\bar{jy}} \\ M_{\bar{jz}} \end{bmatrix} = EI_{\bar{z}} \begin{bmatrix} \alpha'''(0) \\ -\alpha''(0) \\ -\alpha'''(l) \\ \alpha''(l) \end{bmatrix} [\bar{v}_b].$$

Таким образом,

$$[\bar{K}_b] = EI_{\bar{z}} \begin{bmatrix} \alpha'''(0) \\ -\alpha''(0) \\ -\alpha'''(l) \\ \alpha''(l) \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

Приступим к отысканию матрицы  $[\alpha]$ . В рассматриваемом случае распределенная нагрузка  $q$  отсутствует, поэтому прогиб  $u_{\bar{y}}$  определяется из однородного уравнения

$$\frac{d^4 u_{\bar{y}}}{d\bar{x}^4} = 0.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$u_{\bar{y}} = C_1 + C_2 \bar{x} + C_3 \bar{x}^2 + C_4 \bar{x}^3, \quad (2.15)$$

где  $C_1, C_2, \dots, C_4$  – произвольные постоянные, подлежащие определению из граничных условий. Предполагая узловые перемещения известными, граничные условия запишем так:

$$\begin{aligned} \text{при } \bar{x} = 0 \rightarrow & \quad 1) u_{\bar{y}} = v_{\bar{iy}}; \quad 2) u'_{\bar{y}} = \theta_{\bar{iz}}; \\ \text{при } \bar{x} = l \rightarrow & \quad 3) u_{\bar{y}} = v_{\bar{jy}}; \quad 4) u'_{\bar{y}} = \theta_{\bar{jz}}. \end{aligned}$$

Дифференцируя перемещение по  $\bar{x}$ , получим

$$\frac{du_{\bar{y}}}{d\bar{x}} = C_2 + 2C_3 \bar{x} + 3C_4 \bar{x}^2.$$

Из граничных условий 1) и 2) находим

$$C_1 = v_{\bar{iy}}; \quad C_2 = \theta_{\bar{iz}}.$$

Из граничных условий 3) и 4) имеем

$$\begin{aligned} C_3 l^2 + C_4 l^3 &= v_{\bar{jy}} - v_{\bar{iy}} - \theta_{\bar{iz}} l; \\ 2C_3 l + 3C_4 l^2 &= \theta_{\bar{jz}} - \theta_{\bar{iz}}. \end{aligned}$$



Решая эту систему из двух уравнений, получим

$$C_3 = \frac{3}{l^2}(v_{j\bar{y}} - v_{i\bar{y}}) - \frac{1}{l}(\theta_{j\bar{z}} + 2\theta_{i\bar{z}});$$

$$C_4 = -\frac{2}{l^3}(v_{j\bar{y}} - v_{i\bar{y}}) + \frac{1}{l^2}(\theta_{j\bar{z}} + \theta_{i\bar{z}}).$$

Подставляя найденные значения постоянных в уравнение изогнутой оси бруса (2.15), запишем

$$u_{\bar{y}} = \left(1 - 3\frac{\bar{x}^2}{l^2} + 2\frac{\bar{x}^3}{l^3}\right)v_{i\bar{y}} + \left(\frac{\bar{x}}{l} - 2\frac{\bar{x}^2}{l^2} + \frac{\bar{x}^3}{l^3}\right)l\theta_{i\bar{z}} + \left(3\frac{\bar{x}^2}{l^2} - 2\frac{\bar{x}^3}{l^3}\right)v_{j\bar{y}} + \left(-\frac{\bar{x}^2}{l^2} + \frac{\bar{x}^3}{l^3}\right)l\theta_{j\bar{z}}.$$

Таким образом,

$$[\alpha(\bar{x})] = \begin{bmatrix} \left(1 - 3\frac{\bar{x}^2}{l^2} + 2\frac{\bar{x}^3}{l^3}\right) & \left(\frac{\bar{x}}{l} - 2\frac{\bar{x}^2}{l^2} + \frac{\bar{x}^3}{l^3}\right)l & \left(3\frac{\bar{x}^2}{l^2} - 2\frac{\bar{x}^3}{l^3}\right) & \left(-\frac{\bar{x}^2}{l^2} + \frac{\bar{x}^3}{l^3}\right)l \end{bmatrix};$$

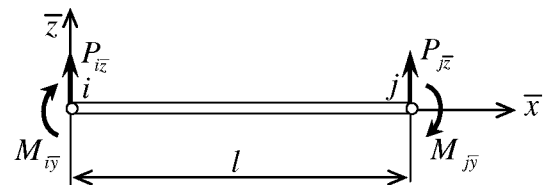
$$[\alpha''(\bar{x})] = \frac{1}{l^2} \begin{bmatrix} -6 + 12\frac{\bar{x}}{l} & (-4 + 6\frac{\bar{x}}{l})l & (6 - 12\frac{\bar{x}}{l}) & (-2 + 6\frac{\bar{x}}{l})l \end{bmatrix};$$

$$[\alpha'''(\bar{x})] = \frac{1}{l^3} [12 \quad 6l \quad -12 \quad 6l].$$

Подставляя найденные значения производных в формулу (2.14), окончательно получим

$$[\bar{K}_b] = \frac{EI_{\bar{z}}}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

Рассмотрим теперь изгиб бруса в плоскости  $\bar{x}\bar{z}$  (рисунок 2.12). В этой плоскости положительные узловые моменты (а также углы поворота) направлены по сравнению с предыдущим случаем в противоположную сторону. В остальном же оба случая идентичны.



**Рисунок 2.12**

Таким образом, подматрицу  $[\bar{K}_c]$  можно получить из  $[\bar{K}_b]$ , меняя знаки во втором и четвертом столбцах, а также во второй и четвертой строках, со-

ответствующих моментам и углам поворота. Кроме того, вместо  $I_{\bar{z}}$  следует подставить  $I_{\bar{y}}$ . В итоге получим

$$[\bar{K}_c] = \frac{EI_{\bar{y}}}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & -6l & -12 & -6l \\ -6l & 4l^2 & 6l & 2l^2 \\ -12 & 6l & 12 & 6l \\ -6l & 2l^2 & 6l & 4l^2 \end{bmatrix}. \quad (2.17)$$

Формулы для  $[\bar{K}_a]$ ,  $[\bar{K}_b]$ ,  $[\bar{K}_c]$  и  $[\bar{K}_d]$  определяют матрицу жесткости бруса в местной системе координат.

## 2.6 Матрица жесткости балочного элемента в общих координатах

Принятый при выводе матрицы  $[\bar{K}]$  порядок расположения элементов матриц сил и перемещений для дальнейших рассуждений оказывается неудобным. Поэтому в общей системе координат матрицу  $[v^e]$  для бруса  $i$ - $j$  образуем следующим образом:

$$[v^e] = \begin{bmatrix} v_i \\ v_j \end{bmatrix}; \quad [v_i] = \{v_{ix} \ v_{iy} \ v_{iz} \ \theta_{ix} \ \theta_{iy} \ \theta_{iz}\}$$

или, если ввести обозначения

$$[\tilde{v}_i] = \{v_{ix} \ v_{iy} \ v_{iz}\}; \quad [\theta_i] = \{\theta_{ix} \ \theta_{iy} \ \theta_{iz}\},$$

то

$$[v_i] = \begin{bmatrix} \tilde{v}_i \\ \theta_i \end{bmatrix}.$$

Матрица соответствующих узловых сил имеет вид

$$[P^e] = \begin{bmatrix} P_i^e \\ P_j^e \end{bmatrix}; \quad [P_i^e] = \{P_{ix}^e \ P_{iy}^e \ P_{iz}^e \ M_{ix}^e \ M_{iy}^e \ M_{iz}^e\}.$$

Выразим перемещения в местной системе координат  $[\bar{v}]$  через перемещения в общей системе координат  $[v^e]$ , т.е. построим матрицу  $[\lambda]$ :

$$[\bar{v}] = [\lambda][v^e].$$

В местной системе координат мы имеем

$$[\bar{v}] = \{\bar{v}_a \mid \bar{v}_b \mid \bar{v}_c \mid \bar{v}_d\},$$

где, к примеру,

$$[\bar{v}_a] = \{v_{i\bar{x}} \ v_{i\bar{y}}\} \text{ и т.д.}$$

Проектируя линейные перемещения узла  $i$  в общей системе координат на ось  $\bar{x}$ , получим

$$v_{i\bar{x}} = [\lambda_{0\bar{x}}][\tilde{v}_i], \quad \text{где } [\lambda_{0\bar{x}}] = [\lambda_{\bar{x}\bar{x}} \ \lambda_{\bar{x}\bar{y}} \ \lambda_{\bar{x}\bar{z}}].$$

Точно так же будем иметь

$$v_{i\bar{y}} = [\lambda_{0\bar{y}}][\tilde{v}_i]; \quad v_{i\bar{z}} = [\lambda_{0\bar{z}}][\tilde{v}_i],$$

где

$$[\lambda_{0\bar{y}}] = [\lambda_{\bar{y}\bar{x}} \ \lambda_{\bar{y}\bar{y}} \ \lambda_{\bar{y}\bar{z}}]; \quad [\lambda_{0\bar{z}}] = [\lambda_{\bar{z}\bar{x}} \ \lambda_{\bar{z}\bar{y}} \ \lambda_{\bar{z}\bar{z}}].$$

Для углов поворота получаются аналогичные выражения:

$$\theta_{i\bar{x}} = [\lambda_{0\bar{x}}][\theta_i]; \quad \theta_{i\bar{y}} = [\lambda_{0\bar{y}}][\theta_i]; \quad \theta_{i\bar{z}} = [\lambda_{0\bar{z}}][\theta_i].$$

Построим в итоге связь между матрицами  $[\bar{v}]$  и  $[v^e]$  в следующем виде:

$$\begin{bmatrix} v_{i\bar{x}} \\ v_{j\bar{x}} \\ v_{i\bar{y}} \\ \theta_{i\bar{z}} \\ v_{j\bar{y}} \\ \theta_{j\bar{z}} \\ v_{i\bar{z}} \\ \theta_{i\bar{y}} \\ v_{j\bar{z}} \\ \theta_{j\bar{y}} \\ \theta_{i\bar{x}} \\ \theta_{j\bar{x}} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_{0\bar{x}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{0\bar{x}} & 0 \\ \lambda_{0\bar{y}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{0\bar{z}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{0\bar{y}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{0\bar{z}} \\ \lambda_{0\bar{z}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{0\bar{y}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{0\bar{z}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{0\bar{y}} \\ 0 & \lambda_{0\bar{x}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{0\bar{x}} \end{bmatrix}}_{[\lambda]} \begin{bmatrix} \tilde{v}_i \\ \theta_i \\ \tilde{v}_j \\ \theta_j \end{bmatrix}.$$

Зная матрицу преобразования координат  $[\lambda]$ , можно вычислить матрицу жесткости в общей системе координат. Для этого следует воспользоваться стандартной формулой, которая была получена ранее:

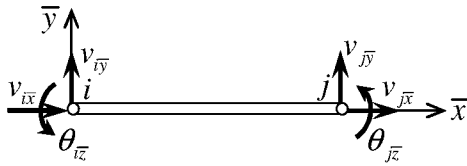
$$[K^e] = [\lambda]^T [\bar{K}] [\lambda].$$

Если общая система координат совпадает с местной, то

$$[\lambda_{0\bar{x}}] = [1 \ 0 \ 0]; \quad [\lambda_{0\bar{y}}] = [0 \ 1 \ 0]; \quad [\lambda_{0\bar{z}}] = [0 \ 0 \ 1].$$

В этом случае данное преобразование будет заключаться в простой перестановке расположения элементов матрицы жесткости.

Рассмотрим особо частный случай, когда брус является элементом плоской рамы. При этом каждый узел получает поступательные перемещения в направлении двух координатных осей и угловое перемещение в плоскости этих осей (рисунок 2.13).



**Рисунок 2.13**

Матрица перемещений в местной системе координат имеет вид

$$[\bar{v}] = \begin{bmatrix} \bar{v}_a \\ \bar{v}_b \end{bmatrix}.$$

В общей системе координат имеем

$$[v^e] = \begin{bmatrix} \bar{v}_i \\ \theta_i \\ \bar{v}_j \\ \theta_j \end{bmatrix}, \quad \text{где } [\tilde{v}_i] = \begin{bmatrix} v_{ix} \\ v_{iy} \end{bmatrix}; \quad \theta_i = \theta_{iz} = \theta_{i\bar{z}}.$$

Вводя теперь новые обозначения

$$[\lambda_{0\bar{x}}] = [\lambda_{\bar{x}\bar{x}} \ \lambda_{\bar{x}\bar{y}}]; \quad [\lambda_{0\bar{y}}] = [\lambda_{\bar{y}\bar{x}} \ \lambda_{\bar{y}\bar{y}}]$$

и проектируя компоненты матрицы  $[v^e]$  на направления местных осей, получим

$$\begin{bmatrix} v_{i\bar{x}} \\ v_{j\bar{x}} \\ v_{i\bar{y}} \\ \theta_{i\bar{z}} \\ v_{j\bar{y}} \\ \theta_{j\bar{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{0\bar{x}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{0\bar{x}} & 0 \\ \lambda_{0\bar{y}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{0\bar{y}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}_i \\ \theta_i \\ \bar{v}_j \\ \theta_j \end{bmatrix}.$$

Отсюда для плоской рамы получаем

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} \lambda_{0\bar{x}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{0\bar{x}} & 0 \\ \lambda_{0\bar{y}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{0\bar{y}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, для любого стержневого элемента (ферменного или балочного) мы имеем в общей системе координат одну и ту же запись в блочном виде для матрицы жесткости, а именно

$$\begin{bmatrix} P_i^e \\ P_j^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{ii}^e & K_{ij}^e \\ K_{ji}^e & K_{jj}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ v_j \end{bmatrix}. \quad (2.18)$$

## 2.7 Учет внеузловой нагрузки

До сих пор мы предполагали, что внешняя нагрузка действует на конструкцию только в узлах. Рассмотрим случай, когда на элемент бруса действуют и внеузловые нагрузки. Рассмотрим типовой элемент  $i-j$  в местных координатах.

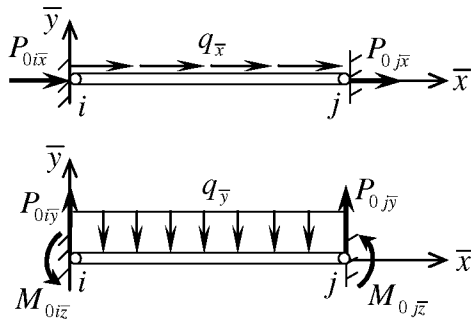


Рисунок 2.14

Если узловые перемещения элемента равны нулю, то внешняя нагрузка вызовет появление реакций в виде сил и моментов (рисунок 2.14).

Образуем из них подматрицы  $[\bar{P}_{0a}]$ ,  $[\bar{P}_{0b}]$ ,  $[\bar{P}_{0c}]$  и  $[\bar{P}_{0d}]$ , соблюдая тот же порядок перечисления сил, что и в матрицах  $[\bar{P}_a]$ ,  $[\bar{P}_b]$ ,  $[\bar{P}_c]$  и  $[\bar{P}_d]$ :

$$[\bar{P}_{0a}] = \begin{bmatrix} P_{0i\bar{x}} \\ P_{0j\bar{x}} \end{bmatrix}; \quad [\bar{P}_{0b}] = \begin{bmatrix} P_{0i\bar{y}} \\ M_{0i\bar{z}} \\ P_{0j\bar{y}} \\ M_{0j\bar{z}} \end{bmatrix}, \quad \text{аналогично } [\bar{P}_{0c}] \text{ и } [\bar{P}_{0d}].$$

Значения реакций для многих встречающихся на практике видов нагружения имеются в справочной литературе.

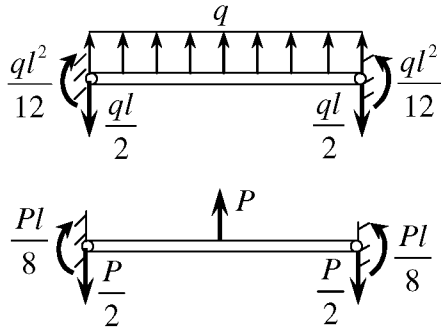


Рисунок 2.15

В частном случае действия постоянной распределенной нагрузки (рисунок 2.15) будем иметь

$$[\bar{P}_{0b}] = \begin{bmatrix} -\frac{ql}{2} \\ -\frac{ql^2}{12} \\ -\frac{ql}{2} \\ \frac{ql^2}{12} \end{bmatrix}.$$

Объединяя все подматрицы, можно записать

$$[\bar{P}_0] = \{\bar{P}_{0a} \mid \bar{P}_{0b} \mid \bar{P}_{0c} \mid \bar{P}_{0d}\}.$$

При вычислении  $[\bar{P}_0]$  предполагалось, что узловые перемещения отсутствуют. Если же узлы бруса получают перемещения, определяемые матрицей  $[\bar{v}]$ , то дополнительные узловые силы, необходимые для их создания, находятся, как и ранее, произведением  $[\bar{K}][\bar{v}]$ . Таким образом, при наличии внеузловой нагрузки матрицу узловых сил можно найти по формуле

$$[\bar{P}] = [\bar{K}][\bar{v}] + [\bar{P}_0]. \quad (2.19)$$

Перейдем в этом соотношении к общей системе координат

$$[\lambda]^T[\bar{P}] = [\lambda]^T[\bar{K}][\bar{v}] + [\lambda]^T[\bar{P}_0],$$

далее, используя  $[\bar{v}] = [\lambda][v^e]$ , получим

$$[\lambda]^T[\bar{P}] = [\lambda]^T[\bar{K}][\lambda][v^e] + [\lambda]^T[\bar{P}_0].$$

С учетом полученных ранее формул  $[\lambda]^T[\bar{K}][\lambda] = [K^e]$  и  $[\lambda]^T[\bar{P}] = [P^e]$  запишем

$$[P^e] = [K^e][v^e] + [P_0^e] \quad (2.20)$$

или

$$\begin{bmatrix} P_i^e \\ P_j^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{ii}^e & K_{ij}^e \\ K_{ji}^e & K_{jj}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ v_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{0i}^e \\ P_{0j}^e \end{bmatrix}.$$

## 2.8 Объединение элементов в стержневую систему и построение ее матрицы жесткости

Будем исходить из того, что мы имеем для любого стержневого элемента матрицу жесткости в общей системе координат, записанную в блочном виде. Обозначим через  $[v_i]$  матрицу перемещений типового узла  $i$ . Общее число узлов в системе обозначим через  $m$ . Матрицу внешних сил, действующих в направлении перемещений  $[v_i]$ , обозначим через  $[P_i]$ . Матрицы узловых сил и перемещений для всей конструкции составим следующим образом:

$$[P] = \{P_1 \mid P_2 \mid \cdots \mid P_i \mid \cdots \mid P_m\};$$

$$[v] = \{v_1 \mid v_2 \mid \cdots \mid v_i \mid \cdots \mid v_m\}.$$

Для каждого из узлов  $i$  в самом общем случае имеем

$$[P_i] = \{P_{ix} \ P_{iy} \ P_{iz} \ M_{ix} \ M_{iy} \ M_{iz}\};$$

$$[v_i] = \{v_{ix} \ v_{iy} \ v_{iz} \ \theta_{ix} \ \theta_{iy} \ \theta_{iz}\}.$$

При отсутствии внеузловой нагрузки связь между матрицами  $[P]$  и  $[v]$  может быть представлена в виде

$$[P] = [K][v], \quad (2.21)$$

где  $[K]$  – матрица жесткости системы.

Если же помимо узловых сил действуют внеузловые нагрузки, то можно рассуждать так же, как и в случае отдельного стержня. Предположим, что все узлы защемлены. Тогда в результате действия внеузловой нагрузки со стороны наложенных связей возникнут силы реакций. Перечисляя реакции, действующие в узле  $i$ , в том же порядке, что и для  $[P_i]$ , образуем подматрицу  $[P_{0i}]$ .

Для всей конструкции можно составить матрицу

$$[P_0] = \{P_{01} \mid P_{02} \mid \cdots \mid P_{0i} \mid \cdots \mid P_{0m}\}.$$

Если, далее, узлы имеют некоторые смещения  $[v]$ , то для их создания необходимо дополнительно приложить силы, величина которых зависит от жесткостных характеристик системы. Таким образом, будем иметь

$$[P] = [K][v] + [P_0], \quad (2.22)$$

Выясним, каким образом можно найти матрицы  $[K]$  и  $[P_0]$ , зная матрицы  $[K^e]$  и  $[P_0^e]$  для всех элементов, образующих систему.

Запишем уравнение (2.22) в блочной форме

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_i \\ \vdots \\ P_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1i} & K_{1j} & \dots & K_{1m} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2i} & K_{2j} & \dots & K_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ K_{i1} & K_{i2} & \dots & K_{ii} & K_{ij} & \dots & K_{im} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ K_{m1} & K_{m2} & \dots & K_{mi} & K_{mj} & \dots & K_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_i \\ v_j \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{01} \\ P_{02} \\ \vdots \\ P_{0i} \\ \vdots \\ P_{0m} \end{bmatrix},$$

где подматрицы  $[K_{ij}]$  в самом общем случае имеют размер  $6 \times 6$ .

Выпишем  $i$ -ую строку

$$[P_i] = [K_{i1}][v_1] + [K_{i2}][v_2] + \dots + [K_{ii}][v_i] + [K_{ij}][v_j] + \dots + [K_{im}][v_m] + [P_{0i}]. \quad (2.23)$$

Для вычисления подматриц  $[K_{ij}]$  и  $[P_{0i}]$  рассмотрим равновесие узла  $i$  (рисунок 2.16). В этом узле соединяется ряд стержней. В узле приложена внешняя нагрузка, образующая матрицу  $[P_i]$ .

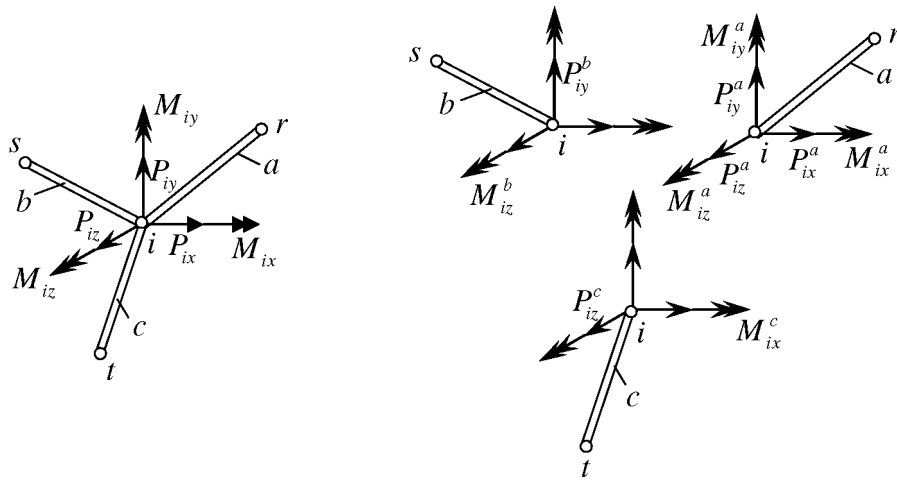


Рисунок 2.16

Мысленно разомкнем стержни в узле  $i$ . В узле  $i$  каждого из стержневых элементов возникают узловые силы, определяемые перемещениями  $[v^e]$  и внеузловыми нагрузками. Так, например, для стержня  $a$  можно записать

$$[P^a] = [K^a][v^a] + [P_0^a]$$

или в блочном виде

$$\begin{bmatrix} P_i^a \\ P_r^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{ii}^a & K_{ir}^a \\ K_{ri}^a & K_{rr}^a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ v_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{0i}^a \\ P_{0r}^a \end{bmatrix}.$$



Отсюда получим выражение для матрицы сил, действующих в узле  $i$  на рассматриваемый элемент  $a$ :

$$[P_i^a] = [K_{ii}^a][v_i] + [K_{ir}^a][v_r] + [P_{0i}^a]. \quad (2.24)$$

Аналогично, для двух других стержней  $b$  и  $c$ :

$$\begin{aligned} [P_i^b] &= [K_{ii}^b][v_i] + [K_{is}^b][v_s] + [P_{0i}^b]; \\ [P_i^c] &= [K_{ii}^c][v_i] + [K_{it}^c][v_t] + [P_{0i}^c]. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Вместе с тем, узел  $i$  под действием внешних сил и внутренних усилий находится в равновесии, следовательно, можно записать

$$\begin{aligned} P_{ix} &= P_{ix}^a + P_{ix}^b + P_{ix}^c; \\ \hline M_{ix} &= M_{ix}^a + M_{ix}^b + M_{ix}^c; \\ \hline \end{aligned}$$

или в матричной форме

$$[P_i] = [P_i^a] + [P_i^b] + [P_i^c].$$

Подставляя сюда выражения (2.24) и (2.25), получим

$$[P_i] = ([K_{ii}^a] + [K_{ii}^b] + [K_{ii}^c])[v_i] + [K_{ir}^a][v_r] + [K_{is}^b][v_s] + [K_{it}^c][v_t] + ([P_{0i}^a] + [P_{0i}^b] + [P_{0i}^c]).$$

Сопоставим полученный результат с записанной ранее  $i$ -ой строкой (2.23). Прежде всего замечаем, что в этом выражении отсутствуют члены, содержащие перемещения тех узлов  $j$ , которые не связаны с узлом  $i$  непосредственно с помощью стержня. Это означает, что соответствующие подматрицы  $[K_{ij}]$  являются нулевыми. Если же узлы  $i$  и  $j$  связаны стержнем  $e$ , то множителем при  $[v_j]$  является подматрица жесткости  $[K_{ij}^e]$  этого стержня в общей системе координат. Наконец, множитель при  $[v_i]$ , являющийся диагональным элементом матрицы  $[K]$ , равен

$$[K_{ii}] = \sum_e [K_{ii}^e],$$

где суммирование производится по всем стержням, сходящимся в узле  $i$ .

Аналогичное правило суммирования получается и для вычисления матрицы  $[P_{0i}]$ , которая находится по формуле

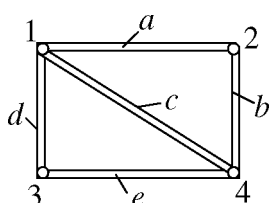
$$[P_{0i}] = \sum_e [P_{0i}^e].$$

Таким образом, матрицу жесткости стержневой системы можно образовывать из матриц жесткости разрозненных элементов по следующему правилу:

- 1)  $[K_{ij}] = 0$ , если узлы  $i$  и  $j$  не принадлежат одновременно к одному из стержней;
- 2)  $[K_{ij}] = [K_{ij}^e]$ , если узлы  $i$  и  $j$  связаны стержнем  $e$ ;
- 3)  $[K_{ii}] = \sum_e [K_{ii}^e]$ , где суммирование производится по всем стержням, сходящимся в узле  $i$ ;
- 4)  $[P_{0i}] = \sum_e [P_{0i}^e]$ .

Если мы будем рассматривать ферменную конструкцию, все наши рассуждения остаются в силе, меняется только размер подматриц  $[K_{ij}]$ , она станет размером  $3 \times 3$ .

Пример:



$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11}^a + K_{11}^c + K_{11}^d & K_{12}^a & K_{13}^c & K_{14}^c \\ K_{21}^a & K_{22}^a + K_{22}^b & 0 & K_{24}^b \\ K_{31}^d & 0 & K_{33}^d + K_{33}^c & K_{34}^c \\ K_{41}^c & K_{42}^b & K_{43}^c & K_{44}^b + K_{44}^c + K_{44}^e \end{bmatrix}$$

## 2.9 Сокращение матрицы жесткости стержневой системы и определение узловых перемещений

До сих пор мы предполагали, что зависимость

$$[P] = [K][v] + [P_0] \quad (2.26)$$

служит для определения сил  $[P]$ , необходимых для создания известных перемещений. Если же наоборот, известны силы, действующие в узлах стержневой системы, то равенство можно рассматривать как систему линейных алгебраических уравнений относительно перемещений  $[v]$ :

$$[K][v] = [P] - [P_0]. \quad (2.27)$$

Если конструкция закреплена, то перемещения соответствующих узлов в направлении опорных связей равны нулю, остальные же перемещения подлежат определению.

Рассмотрим пример фермы (рисунок 2.17). Все компоненты перемещений можно расположить таким образом, чтобы в матрице  $[v]$  сначала перечислялись все неизвестные, а затем известные (нулевые) перемещения. Матрицу неизвестных перемещений будем обозначать  $[v_\alpha]$ . Для нашего случая она равна

$$[v_\alpha] = \{v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4 \ v_6 \ v_7 \ v_8 \ v_9 \ v_{12}\}.$$

Матрицу известных (нулевых) перемещений будем обозначать через  $[v_\beta]$ . Она равна

$$[v_\beta] = \{v_5 \ v_{10} \ v_{11}\} = 0.$$

Тогда будем иметь

$$[v] = \begin{bmatrix} v_\alpha \\ v_\beta \end{bmatrix}.$$

Поскольку порядок перечисления сил в матрицах  $[P]$  и  $[P_0]$  всегда должен строго соответствовать порядку следования перемещений в матрице  $[v]$ , то необходимо записать

$$[P] = \begin{bmatrix} P_\alpha \\ P_\beta \end{bmatrix}; \quad [P_0] = \begin{bmatrix} P_{0\alpha} \\ P_{0\beta} \end{bmatrix}.$$

В матрицу  $[P_\alpha]$  входят известные внешние силы, действующие в направлении неизвестных перемещений  $[v_\alpha]$ . Подматрица  $[P_\beta]$  содержит неизвестные силы, действующие по направлению наложенных связей и представляющие собой реакции опор. Матрицу жесткости конструкции также представим в блочном виде

$$\begin{bmatrix} K_{\alpha\alpha} & K_{\alpha\beta} \\ K_{\beta\alpha} & K_{\beta\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_\alpha \\ v_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_\alpha \\ P_\beta \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P_{0\alpha} \\ P_{0\beta} \end{bmatrix}. \quad (2.28)$$

Отсюда следуют два матричных равенства

$$\begin{aligned} [K_{\alpha\alpha}][v_\alpha] + [K_{\alpha\beta}][v_\beta] &= [P_\alpha] - [P_{0\alpha}]; \\ [K_{\beta\alpha}][v_\alpha] + [K_{\beta\beta}][v_\beta] &= [P_\beta] - [P_{0\beta}]. \end{aligned}$$

Учитывая, что  $[v_\beta] = 0$ , их можно переписать

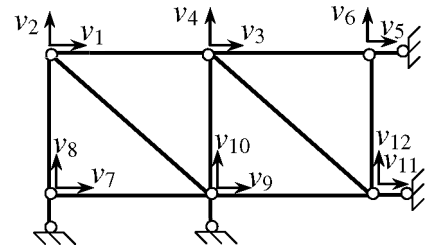


Рисунок 2.17

$$[K_{\alpha\alpha}][v_\alpha] = [P_\alpha] - [P_{0\alpha}]; \quad (2.29)$$

$$[K_{\beta\alpha}][v_\alpha] = [P_\beta] - [P_{0\beta}]. \quad (2.30)$$

Равенство (2.29) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных перемещений  $[v_\alpha]$ . Решая данную систему, находим

$$[v_\alpha] = [K_{\alpha\alpha}]^{-1}([P_\alpha] - [P_{0\alpha}]).$$

Здесь  $[K_{\alpha\alpha}]$  – так называемая сокращенная матрица жесткости, которая получается из полной путем вычеркивания строк и столбцов, имеющих номера известных перемещений.

Далее из (2.30) можно определить неизвестные реакции:

$$[P_\beta] = [K_{\beta\alpha}][K_{\alpha\alpha}]^{-1}([P_\alpha] - [P_{0\alpha}]) + [P_{0\beta}].$$

Если перемещения узлов конструкции найдены, то для любого элемента  $e$  ( $i$ - $j$ ) будет известна матрица перемещений узлов в общей системе координат:

$$[v^e] = \begin{bmatrix} v_i \\ v_j \end{bmatrix}.$$

Используя формулу преобразования координат, можно найти матрицу перемещений в местных координатах

$$[\bar{v}] = [\lambda][v^e]$$

и далее по формуле

$$[\bar{P}] = [\bar{K}][\bar{v}] + [\bar{P}_0]$$

определить узловые силы в местной системе координат. Зная силы, действующие на концах стержня, можно найти усилие в ферменном элементе или построить эпюры перерезывающих сил и изгибающих моментов для балочного элемента. Подобные вычисления можно выполнить для всех стержней.

Если конструкция не закреплена, то непосредственно из уравнения (2.27) перемещения найти нельзя, так как полная матрица жесткости для всей конструкции  $[K]$  является вырожденной. Действительно, силы, действующие на свободную конструкцию, не могут быть произвольными; они должны удовлетворять уравнениям равновесия. Таких уравнений будет шесть для пространственной системы и три для плоской. Таким образом, в случае пространственной конструкции шесть элементов матрицы  $[P] - [P_0]$  в уравнении (2.27) определяются через остальные, являясь некоторыми линейными ком-

бинациями последних. Но тогда и соответствующие шесть элементов матрицы-столбца  $[K][v]$  будут также линейными комбинациями остальных. Это говорит о том, что строки матрицы жесткости связаны между собой линейными зависимостями. Определитель подобной матрицы равен нулю, т.е. матрица жесткости для свободного тела является вырожденной.

Это обстоятельство математически отражает тот физически очевидный факт, что перемещения свободного тела не определяются однозначно действующими на него силами, поскольку оно может получить произвольное перемещение в пространстве как жесткое целое.

Поэтому для расчета свободной стержневой системы ее нужно предварительно закрепить с помощью минимально необходимого числа правильно ориентированных связей так, чтобы устранить возможность ее перемещения как жесткого целого.

Для решения системы линейных алгебраических уравнений (2.29) используются различные методы – как точные (прямые), так и приближенные (итерационные). Чаще всего применяется одна из разновидностей прямого метода исключения по Гауссу. При этом учитываются такие специфические свойства матрицы жесткости как симметрия, положительная определенность и ленточная структура.

Данный метод расчета стержневых систем называется матричным методом перемещений, так как в качестве основных неизвестных принимаются перемещения узлов. Он позволяет решать как статически определимые, так и неопределимые конструкции. Причем чем больше внешних связей, тем ниже порядок разрешающей системы уравнений (2.29). Этим данный метод выгодно отличается от метода сил, который используется в сопротивлении материалов для раскрытия статической неопределимости.

### **3 БАЛОЧНАЯ ТЕОРИЯ ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ**

При создании летательных аппаратов широкое применение получили тонкостенные конструкции. Они представляют собой удлинённые оболочки цилиндрической или конической формы с произвольным контуром поперечного сечения и удовлетворяют требованиям минимальной массы конструкции при ее достаточной жесткости и прочности. Как правило, тонкая обшивка подкрепляется продольным силовым набором. Крыло самолета, его фюзеляж, корпус летательного аппарата можно отнести к подкрепленным тонкостенным конструкциям.

Точный расчет подобных конструкций представляет сложную и громоздкую задачу. Поэтому в инженерной практике находят широкое применение прикладные методы расчета, базирующиеся на ряде допущений. Далее излагается один из таких методов, так называемая балочная теория расчета тонкостенных конструкций. Эта теория позволяет довольно просто рассчитывать нормальные и касательные напряжения в сложных пространственных конструкциях.

#### **3.1 Определение нормальных напряжений при изгибе тонкостенных конструкций**

##### **3.1.1 Основные допущения**

Рассмотрим тонкостенную конструкцию, которая в естественном ненагруженном состоянии имеет форму цилиндрической оболочки. Поверхность, делящую пополам толщину оболочки  $\delta$ , условимся называть срединной поверхностью. Пересечение этой поверхности с плоскостью поперечного сечения будем называть средней линией сечения (штрихпунктирная линия на рисунке 3.1).

Материал, из которого изготовлена оболочка, и ее толщина могут быть различными по контуру сечения, но вдоль продольной оси  $z$  оболочки будем считать их неизменяющимися.

Кроме того, материал предположим идеально упругим, подчиняющимся закону Гука при любых деформациях.

Полагаем, что конструкция имеет достаточное количество поперечных диафрагм (нервюр), жестких в своей плоскости. Благодаря этому форма поперечного сечения при нагружении оболочки не изменяется.

Толщину оболочки считаем достаточно малой, что позволяет принять нормальные и касательные напряжения равномерно распределенными по толщине.

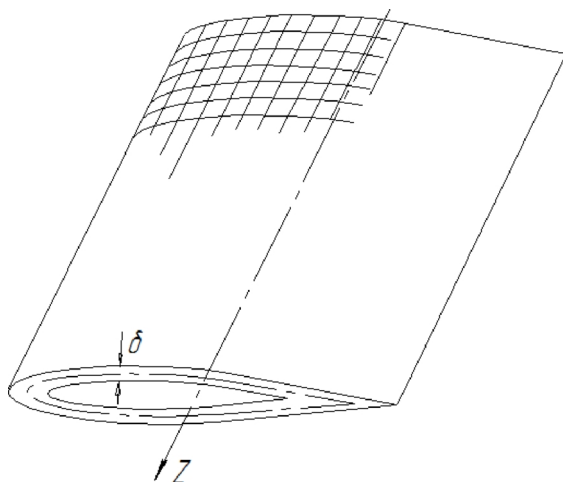


Рисунок 3.1

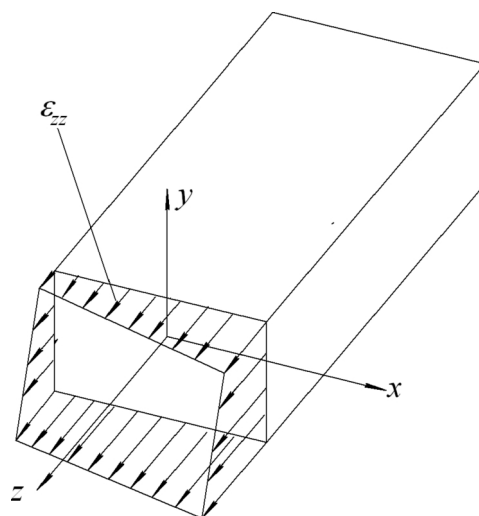


Рисунок 3.2

Примем следующее допущение о характере деформации конструкции. Будем считать, что относительные удлинения  $\varepsilon_{zz}$  волокон обшивки в направлении оси  $z$  подчиняются закону плоскости (гипотеза Беляева В.Н.)

$$\varepsilon_{zz} = ax + by + c, \quad (3.1)$$

где  $x$  и  $y$  – декартовы координаты точек средней линии сечения (плоскость  $xOy$  совпадает с плоскостью сечения);  $a$ ,  $b$ ,  $c$  – некоторые константы.

Если от плоскости поперечного сечения отложить в направлении оси  $z$  векторы, равные относительной деформации  $\varepsilon_{zz}$  в данной точке средней линии сечения, то согласно принятому допущению концы векторов будут лежать в одной плоскости (рисунок 3.2).

### 3.1.2 Определение нормальных напряжений в сечении тонкостенной конструкции

Рассмотрим тонкостенную конструкцию с поперечным сечением произвольного очертания (рисунок 3.3). Рассечём мысленно оболочку на две части плоскостью, перпендикулярной к ее образующим, одну часть отбросим и рассмотрим силы, с которыми эта часть конструкции действует на оставшуюся. Пусть в этом сечении изгибающие моменты  $M_z$  и  $M_y$ , а также нормальные усилия  $N_z$  известны.

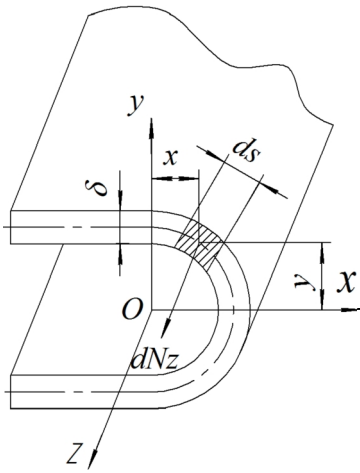


Рисунок 3.3

Выделим в плоскости  $xOy$  бесконечно малый элемент поперечного сечения длиной  $ds$ . При изгибе конструкции в поперечном сечении возникают нормальные напряжения  $\sigma$ . Так как напряжения по толщине оболочки постоянны, то равнодействующая  $dN_z$  нормальных усилий в пределах выделенного элемента  $ds$  будет равна

$$dN_z = \sigma \delta ds. \quad (3.2)$$

Сила  $dN_z$  даст относительно оси  $x$  элементарный момент, равный

$$dM_x = \sigma y \delta ds. \quad (3.3)$$

Проинтегрировав правую и левую части последнего равенства по всему сечению, получим момент внутренних усилий относительно оси  $x$ . Он должен быть равен изгибающему моменту в сечении

$$M_x = \int_l \sigma y \delta ds, \quad (3.4)$$

где  $l$  – длина срединной линии контура.

Аналогично рассуждая, получим для изгибающего момента относительно оси  $y$  равенство

$$-M_y = \int_l \sigma x \delta ds. \quad (3.5)$$

Положительными считаются моменты, действующие против хода часовой стрелки, при взгляде с положительного направления соответствующей оси.

Равнодействующая всех нормальных усилий будет равна

$$N_z = \int_l \sigma \delta ds. \quad (3.6)$$

Для определения нормальных напряжений воспользуемся законом Гука

$$\sigma = E \varepsilon_{zz}. \quad (3.7)$$

Здесь  $E$  – модуль упругости материала оболочки.

Если конструкция изготовлена из различных материалов, то модуль упругости для разных участков сечения не будет одинаковым. Для удобства дальнейших рассуждений приведем все элементы сечения к одному материалу с модулем упругости  $E_0$ , для чего равенство (3.7) перепишем в следующем виде:



$$\sigma = \frac{E}{E_0} E_0 \varepsilon_{zz}. \quad (3.8)$$

Отношение модуля упругости материала рассматриваемого волокна  $E$  к модулю  $E_0$  назовем редуцированными коэффициентами (коэффициентом приведения) и обозначим его через  $\varphi$ :

$$\varphi = \frac{E}{E_0}. \quad (3.9)$$

Тогда равенство (1.8) можно записать иначе:

$$\sigma = \varphi E_0 \varepsilon_{zz}. \quad (3.10)$$

Подставив в последнее равенство деформацию  $\varepsilon_{zz}$  из формулы (3.1), получим:

$$\sigma = \varphi E_0 (ax + by + c) = \varphi (Ax + By + C). \quad (3.11)$$

где  $A = aE_0$ ,  $B = bE_0$ ,  $C = cE_0$ .

Отметим, что произведение

$$E_0 \varepsilon_{zz} = E_0 (ax + by + c) = \sigma_r \quad (3.12)$$

есть, очевидно, напряжение, которое возникло бы при деформации  $\varepsilon_{zz}$  в рассматриваемом волокне, если бы оно было изготовлено из материала с модулем упругости  $E_0$ .

Тогда можно записать

$$\sigma = \varphi \sigma_r. \quad (3.13)$$

Уравнения для определения констант  $A$ ,  $B$ ,  $C$  вытекают из равенств (3.4)...(3.6). Подставив в них выражение (3.11) для нормального напряжения, будем иметь

$$\begin{aligned} M_x &= A \int_l \varphi x y \delta ds + B \int_l \varphi y^2 \delta ds + C \int_l \varphi y \delta ds \\ -M_y &= A \int_l \varphi x^2 \delta ds + B \int_l \varphi x y \delta ds + C \int_l \varphi x \delta ds \\ N_z &= A \int_l \varphi x \delta ds + B \int_l \varphi y \delta ds + C \int_l \varphi \delta ds \end{aligned} \quad (3.14)$$

Проанализируем полученные выражения. С учётом (3.13) зависимость (3.6), можно представить в виде

$$N_z = \int_l \sigma \delta ds = \int_l \sigma_r \varphi \delta ds,$$

откуда следует, что произведение  $\varphi \delta ds$  представляет собой площадь сечения элемента, изготовленного из материала с модулем упругости  $E_0$  и работающего с напряжениями  $\sigma_r$ . Величину  $\varphi \delta ds = dF_r$  будем называть приведенной к модулю упругости  $E_0$  площадью элемента. Тогда интеграл

$$\int_l \varphi \delta ds = F_r$$

можно назвать площадью поперечного сечения конструкции, приведенного к модулю  $E_0$ . И в дальнейшем индексом  $r$  будем отмечать другие геометрические характеристики приведенного сечения. Так, например, интегралы

$$\int_l \varphi y \delta ds = \tilde{S}_{rx}, \quad \int_l \varphi x \delta ds = \tilde{S}_{ry}$$

представляют собой статические моменты, а

$$\int_l \varphi y^2 \delta ds = I_{rx}, \quad \int_l \varphi x^2 \delta ds = I_{ry}, \quad \int_l \varphi x y \delta ds = I_{rxy}$$

– осевые и центробежный моменты инерции приведенного сечения относительно осей  $x$  и  $y$ .

Значения статических моментов и моментов инерции зависят как от геометрии поперечного сечения, так и от выбранной системы координат. Если начало координат совпадает с центром тяжести приведенного сечения, то статические моменты  $\tilde{S}_{rx}$  и  $\tilde{S}_{ry}$ , обращаются в нуль. Если, кроме того, оси  $x$  и  $y$  направлены по главным осям инерции приведенного сечения, то центробежный момент инерции  $I_{rxy} = 0$ . В этом случае из равенств (3.14) имеем

$$A = -\frac{M_x}{I_{ry}}, \quad B = \frac{M_y}{I_{rx}}, \quad C = \frac{N_r}{F_r}. \quad (3.15)$$

Подставляя (3.15) в (3.11), получим следующую окончательную формулу для определения нормальных выражений:

$$\sigma = \varphi \left( \frac{M_x}{I_{rx}} y - \frac{M_y}{I_{ry}} x + \frac{N_r}{F_r} \right). \quad (3.16)$$

Если все элементы конструкции изготовлены из одного материала, то редуцированный коэффициент  $\varphi = 1$ , и мы приходим к известной формуле сопротивления материалов для нормальных напряжений при изгибе в двух плоскостях и растяжении бруса.

### 3.1.3 Пример расчета нормальных напряжений в тонкостенной конструкции

Пусть требуется определить нормальные напряжения в тонкостенной конструкции швеллерного типа от действия изгибающего момента  $M_x$  (рисунок 3.4). Конструкция изготовлена из одного материала, следовательно, редуцированный коэффициент  $\varphi$  следует принять равным единице. Оси  $x$  и  $y$  являются главными центральными осями инерции поперечного сечения.

Для расчета нормальных напряжений следует, согласно (3.16), воспользоваться формулой

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} y.$$

Момент инерции поперечного сечения  $I_x$  можно представить в виде суммы моментов инерции отдельных частей сечения:

$$I_x = I'_x + 2I''_x,$$

где  $I'_x = \frac{\delta a^3}{12}$  – момент инерции вертикальной стенки, а  $I''_x = \delta b \left( \frac{a}{2} \right)^2$  – момент инерции горизонтальной полки.

Тогда

$$I_x = \frac{\delta a^3}{12} + \frac{\delta b a^2}{2} = \frac{\delta a^2}{2} \left( \frac{a}{b} + b \right). \quad (3.17)$$

Эпюра нормальных напряжений представлена на рисунке 3.5. Максимальные напряжения будут иметь место в точках контура со значением  $y = \frac{a}{2}$ .

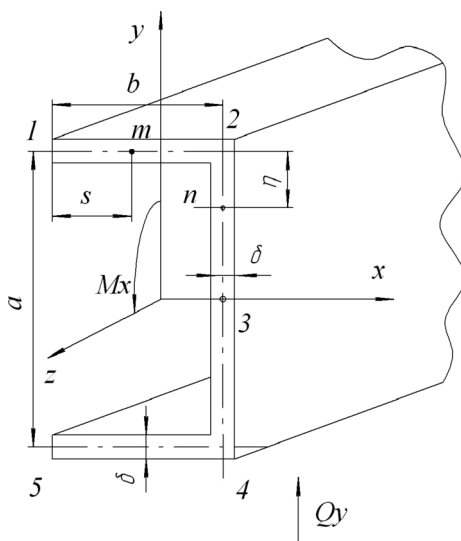


Рисунок 3.4

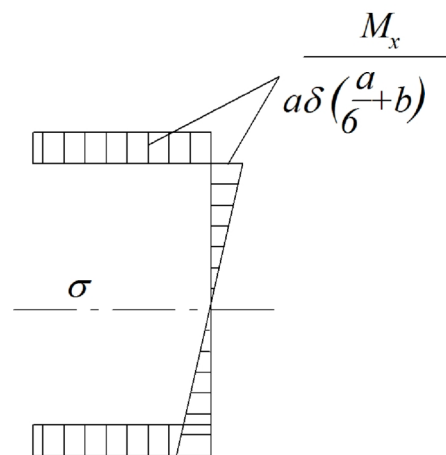


Рисунок 3.5

### 3.1.4 Нормальные напряжения в тонкостенных конструкциях, подкрепленных продольным набором

Реальные авиационные конструкции имеют, как правило, продольные силовые элементы - лонжероны, стрингеры. Продольные элементы (пояса) занимают небольшой участок поперечного сечения. В связи с этим можно считать, что сечение представляет собой тонкостенный контур, в ряде точек которого расположены сосредоточенные площади (рисунок 3.6).

В пределах каждого элемента нормальные напряжения  $\sigma_i$  будем считать постоянными. Тогда нормальное усилие в поясе с номером  $i$  будет  $N_i = \sigma_i F_i$ , при этом равнодействующая всех нормальных усилий  $N_z$  и изгибающие моменты в сечении конструкции будут равны:

$$N_z = \oint \sigma \delta ds + \sum_{i=1}^n \sigma_i F_i, \quad (3.18)$$

$$M_x = \oint \sigma y \delta ds + \sum_{i=1}^n \sigma_i y_i F_i, \quad (3.19)$$

$$-M_y = \oint \sigma x \delta ds + \sum_{i=1}^n \sigma_i x_i F_i. \quad (3.20)$$

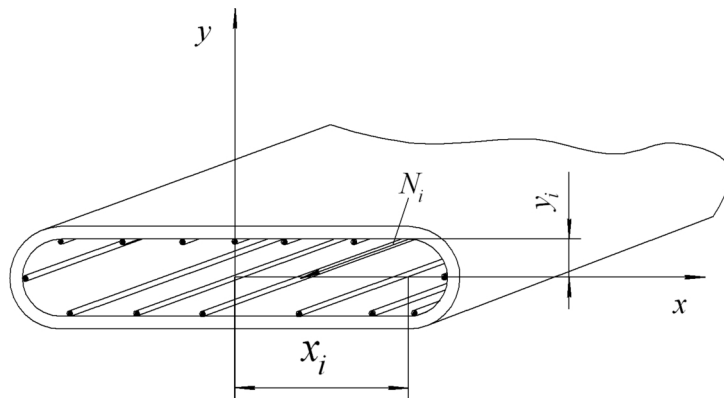


Рисунок 3.6

Чтобы получить формулу для вычисления нормальных напряжений, необходимо повторить вывод, аналогичный изложенному в 3.1.2, учитывая, что напряжения в оболочке и в поясах ( $\sigma$  и  $\sigma_i$  соответственно) определяются согласно плоскому закону распределения деформаций:

$$\sigma = \varphi(Ax + By + C), \quad (3.21)$$

$$\sigma_i = \varphi_i(Ax_i + By_i + C). \quad (3.22)$$

Подставляя зависимости (3.21) и (3.22) в равенства (3.18)...(3.20), приходим к следующей окончательной формуле:

$$\sigma = \varphi \left( \frac{M_x}{I_{rx}} y - \frac{M_y}{I_{ry}} x + \frac{N_z}{F_r} \right). \quad (3.23)$$

Итак, полученная формула имеет такой же вид, как и для неподкрепленной конструкции. Но здесь следует иметь в виду, что при вычислении приведенной площади  $F$  и моментов инерции необходимо учитывать продольные элементы.

Так для конструкции, изображенной на рисунке 3.6, будем иметь

$$F_r = \oint \varphi \delta ds + \sum_{i=1}^n \varphi_i F_i, \\ I_{rx} = \oint \varphi y^2 \delta ds + \sum_{i=1}^n \varphi_i y_i^2 F_i, \quad (3.24)$$

где  $F_i$  – площадь поперечного сечения элемента продольного набора,  $n$  – число продольных элементов.

По мере уменьшения толщины обшивки доля изгибающего момента, воспринимаемого оболочкой, уменьшается. Чем мощнее пояса, тем большую часть изгибающего момента они могут воспринять.

В конструкции с очень тонкой обшивкой доля изгибающего момента, воспринимаемого ею, становится настолько незначительной, что можно работой обшивки пренебречь. Тогда при вычислении приведенных моментов инерции и площадей нужно учитывать только площади сечений продольных поясов, т.е.

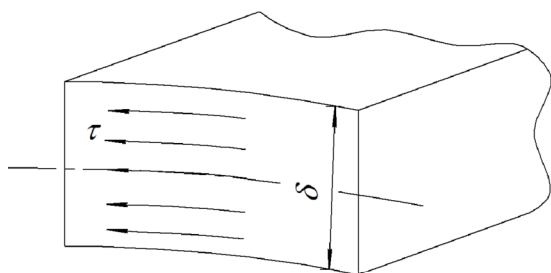
$$I_{rx} = \sum_{i=1}^n \varphi_i y_i^2 F_i, \quad I_{ry} = \sum_{i=1}^n \varphi_i x_i^2 F_i, \quad F_r = \sum_{i=1}^n \varphi_i F_i. \quad (3.25)$$

## 3.2 Расчет касательных напряжений

### 3.2.1 Определение касательных напряжений в тонкостенных конструкциях с открытым контуром поперечного сечения

Перейдем к определению касательных напряжений. Будем полагать, что поверхность оболочки свободна от касательных сил, действующих в направлении оси  $z$ . Это приводит к тому, что в поперечном сечении оболочки вблизи поверхности вектор полного касательного напряжения  $\tau$  будет направлен по касательной к контуру сечения.

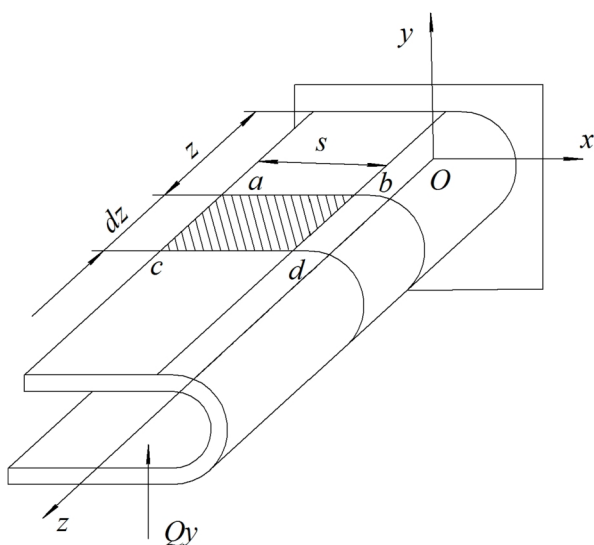
Так как оболочка тонкая, то вектор касательного напряжения считают направленным по касательной к средней линии контура (рисунок 3.7).



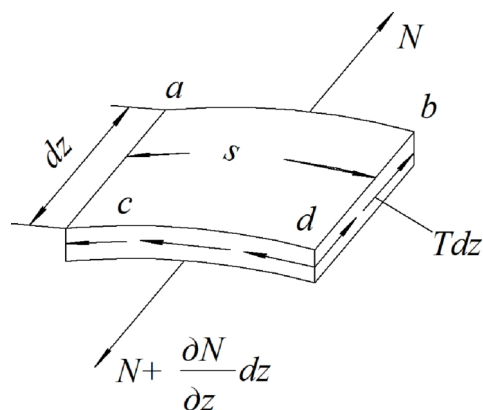
**Рисунок 3.7**

Пусть требуется определить касательные напряжения в точке  $b$  поперечного сечения конструкции, представленной на рисунке 3.8. Для простоты рассуждений полагаем, что имеет место только изгиб относительно оси  $x$ . Тогда, очевидно,  $M_y = 0$ ,  $Q_x = 0$ ,  $N_z = 0$ . Оси  $x$  и  $y$  здесь и в дальнейшем – главные центральные оси инерции поперечного сечения, приведенного к одному материалу.

Проведем мысленно через точку  $b$  сечение, перпендикулярное оси  $z$ , и еще одно по образующей перпендикулярно к срединной поверхности. Третье сечение проведем на расстоянии  $dz$  от точки  $b$ . Рассмотрим равновесие элемента  $abcd$ , выделенного таким образом (рисунок 3.9).



**Рисунок 3.8**



**Рисунок 3.9**

При изгибе конструкции в ее элементах возникают нормальные напряжения. Обозначим равнодействующую нормальных усилий в площадке  $ab$  поперечного сечения через  $N$ . В площадке  $cd$  равнодействующая нормальных усилий равна  $\left(N + \frac{\partial N}{\partial z} dz\right)$ , так как от сечения к сечению изгибающий момент изменяется. Равновесие выделенного элемента возможно лишь в том случае, когда в продольном разрезе  $bd$  действуют касательные напряжения  $\tau$ .

Как отмечалось в 3.1.1, напряжения  $\tau$  в тонкостенных конструкциях можно считать постоянными по толщине. Это позволяет оперировать не напряжениями, а погонными усилиями  $T = \tau\delta$ , приходящимися на единицу длины сечения.

Спроектируем все силы, действующие на элемент  $abcd$ , на ось  $z$ :

$$\left( N + \frac{\partial N}{\partial z} dz \right) - N - Tdz = 0. \quad (3.26)$$

Отсюда

$$T = \frac{\partial N}{\partial z}. \quad (3.27)$$

Равнодействующая нормальных усилий  $N$  равна

$$N = \int_0^s \sigma \delta ds. \quad (3.28)$$

Для нормальных напряжений  $\sigma$  в случае изгиба относительно оси  $x$  имеем

$$\sigma = \varphi \frac{M_x}{I_{rx}} y. \quad (3.29)$$

Подставим (3.29) в равенство (3.28) и учтем, что  $M_x$  и  $I_{rx}$  от координаты  $s$  не зависят:

$$N = \frac{M_x}{I_{rx}} \int_0^s \varphi y \delta ds. \quad (3.30)$$

Интеграл в последнем равенстве представляет собой статический момент относительно оси  $x$  части приведенного сечения, заключенного между свободным краем конструкции (точка  $a$ ) и точкой  $b$ , где определяются касательные напряжения:

$$S_{rx} = \int_0^s \varphi y \delta ds. \quad (3.31)$$

Тогда

$$N = \frac{M_x}{I_{rx}} S_{rx}. \quad (3.32)$$

Теперь остаётся согласно (3.27) продифференцировать правую часть полученного равенства. При этом нужно иметь в виду, что  $I_{rx}$  есть величина постоянная,  $S_{rx}$  от координаты  $z$  не зависит, а перерезывающая сила  $Q_y$  связана с изгибающим моментом известной зависимостью  $Q_y = \frac{\partial M_x}{\partial z}$ .

Тогда

$$T = \frac{Q_y}{I_{rx}} S_{rx}. \quad (3.33)$$

Итак, получили формулу для определения величины погонной касательной силы  $T$  в продольном разрезе, проходящем через точку  $b$ . В соответствии с законом парности касательных напряжений в точке  $b$  поперечного сечения будет действовать такая же погонная касательная сила.

Анализ этой формулы показывает, что вдоль оси  $z$  погонные касательные силы изменяются пропорционально перерезывающей силе  $Q_y$ , а по сечению – пропорционально статическому моменту  $S_{rx}$ .

Для касательных напряжений будем иметь

$$\tau = \frac{T}{\delta} = \frac{Q_y S_{rx}}{I_{rx} \delta}. \quad (3.34)$$

Проведя аналогичный вывод для случая изгиба относительно оси  $y$ , получим следующую формулу:

$$T = \frac{Q_x}{I_{ry}} S_{ry}. \quad (3.35)$$

При одновременном изгибе относительно осей  $x$  и  $y$  результаты, полученные по формулам (3.33) и (3.35), нужно алгебраически просуммировать.

Если конструкция не имеет продольных элементов, то эпюра статических моментов  $S_{rx}$ , вычисленных по (3.31), будет плавной, без скачков (рисунок 3.10,а).

Если же оболочка подкреплена продольным набором, то статический момент будет определять формула

$$S_{rx} = \int_0^s \varphi y \delta ds + \sum_{i=1}^m \varphi_i y_i F_i, \quad (3.36)$$

где  $m$  – число продольных элементов на участке дуги длиной  $s$  от начала координат.

При этом эпюра  $S_{rx}$  будет иметь вид, показанный на рисунке 3.10,б.

В случае очень тонкой обшивки нормальными усилиями в ней пренебрегают и считают, что обшивка работает только на сдвиг, величина статического момента  $S_{rx}$  в этом случае подсчитывается по формуле



$$S_{rx} = \sum_{i=1}^m \varphi_i y_i F_i. \quad (3.37)$$

При этом на эпюре статических моментов на участках между соседними поясами значения статического момента остаются постоянными (рисунок 3.11).

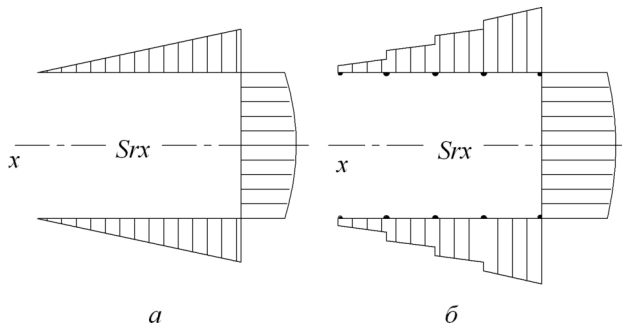


Рисунок 3.10

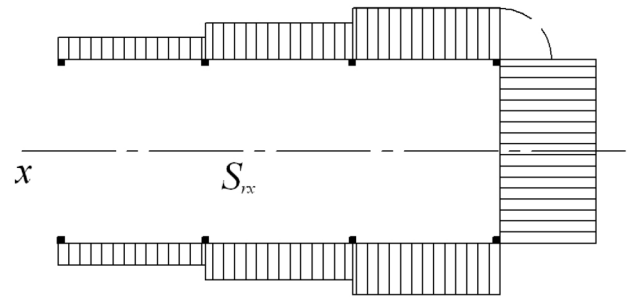


Рисунок 3.11

### 3.2.2 Примеры расчёта касательных напряжений в тонкостенных конструкциях с открытым контуром поперечного сечения

Пример 1. Определим погонные касательные усилия в тонкостенной конструкции швеллерного типа от действия перерезывающей силы  $Q_y$ . Размеры сечения и нагрузка показаны на рисунке 3.4.

Момент инерции поперечного сечения был найден в 3.1.3 и получился равным

$$J_x = \frac{\delta a^2}{2} \left( \frac{a}{b} + b \right), \quad (3.38)$$

Для определения касательных напряжений найдём статический момент для точки  $m$  верхней полки на расстоянии  $s$  от свободного края сечения.

$$S_x^{(m)} = \frac{\delta a}{2} s.$$

Для точки  $n$  на расстоянии  $\eta$  от верхней полки

$$S_x^{(n)} = \frac{\delta ab}{2} + \delta \eta \left( \frac{a}{2} - \frac{\eta}{2} \right) = \frac{\delta ab}{2} + \frac{1}{2} \delta \eta (a - \eta). \quad (3.39)$$

Отсюда видно, что на горизонтальной полке статический момент изменяется по линейному закону, а на вертикальной стенке – по закону квадратной параболы. Эпюра изменения статического момента по сечению представлена на рисунке 3.12, а. Умножив все ординаты этой эпюры на постоянный множитель  $Q_y/J_x$ , получим эпюру погонных касательных сил  $T$  (рису-

нок 3.12,б). Максимальное значение погонной касательной силы будет в точке 3 сечения.

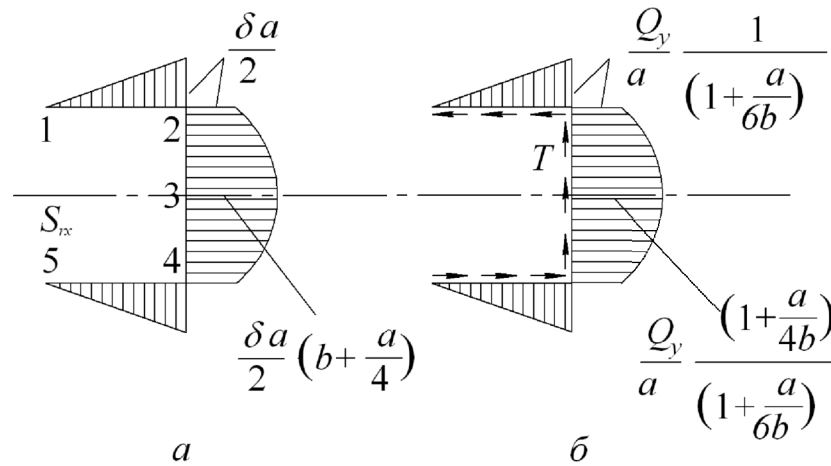


Рисунок 3.12

**Пример 2.** Определим погонные касательные силы в тонкостенной конструкции, представляющей собой круговую цилиндрическую оболочку, разрезанную по образующей (рисунок 3.13).

Для определения момента инерции сечения конструкции выделим бесконечно малый элемент, определяемый двумя радиусами – под углом  $\alpha$  и  $\alpha + d\alpha$  от края контура. Момент инерции этого элемента равен

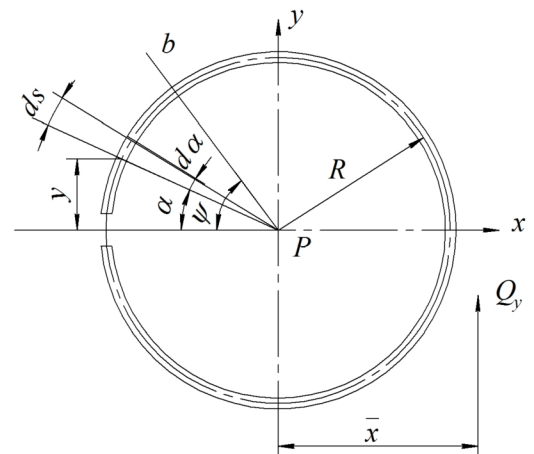


Рисунок 3.13

$$dJ_x = \delta y^2 ds = \delta (R \sin \alpha)^2 R d\alpha.$$

Интегрируя это выражение по  $\alpha$  в пределах от 0 до  $2\pi$ , имеем

$$J_x = \delta R^3 \int_0^{2\pi} \sin^2 \alpha d\alpha = \delta R^3 \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} d\alpha = \delta R^3 \left[ \frac{\alpha}{2} - \frac{\sin 2\alpha}{4} \right]_0^{2\pi} = \pi \delta R^3. \quad (3.40)$$

Пусть требуется найти касательное напряжение в точке  $b$ , определяемой углом  $\psi$  (рисунок 3.13). Для этого нужно найти статический момент соответствующей части поперечного сечения. Вычислим сначала статический момент выделенного бесконечно малого элемента

$$dS_x = \delta y ds = \delta R^2 \sin \alpha d\alpha.$$

Интегрируя по  $\alpha$  в пределах от 0 до  $\psi$ , получим

$$S_x = \delta R^2 \int_0^\psi \sin \alpha d\alpha = -\delta R^2 \cos \alpha \Big|_0^\psi = \delta R^2 (1 - \cos \psi).$$

Подставляя полученные выражения в формулу (3.33), имеем

$$T = \frac{Q_y}{\pi R} (1 - \cos \psi). \quad (3.41)$$

Эпюры статических моментов и погонных касательных сил показаны на рисунке 3.14, а, б.

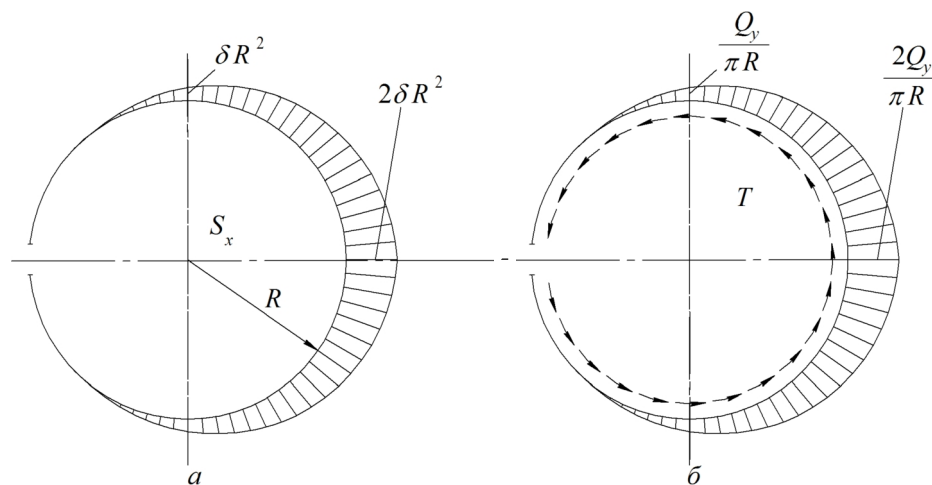


Рисунок 3.14

Найденные погонные касательные силы представляют собой внутренние силы, с которыми одна часть конструкции через данное сечение действует на другую ее часть. Если рассматривается действие отсечённой части консоли  $A$  на оставшуюся часть  $B$  (рисунок 3.15), то равнодействующая касательных усилий должна быть направлена в

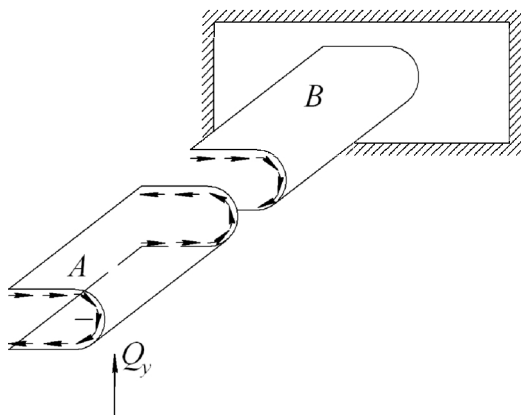


Рисунок 3.15

сторону внешней нагрузки. Если же рассматривается действие оставшейся части на отсечённую, то касательные силы должны быть направлены так, чтобы они уравнивали внешнюю нагрузку, т.е. равнодействующая касательных сил должна быть направлена против внешней нагрузки.

В дальнейшем условимся везде рассматривать действие отсеченной на оставшуюся. Следовательно, погонные касательные силы будут давать рав-

нодействующую, направленную в сторону внешней нагрузки (рисунки 3.12,б и 3.14,б).

### 3.2.3 Центр изгиба открытых сечений

Рассмотрим изгиб конструкции с открытым контуром поперечного сечения относительно оси  $x$ . Произведение  $Tds$  (рисунок 3.16) представляет собой элементарную касательную силу. Сумма проекций всех элементарных касательных сил на ось  $y$  равняется перерезывающей силе  $Q_y$ . Выясним, где проходит равнодействующая этих касательных усилий.

Для этого выберем в плоскости  $XOY$  произвольный полюс  $P$ . Элементарная касательная сила даст относительно выбранного полюса момент

$$dM = T \rho ds ,$$

где  $\rho$  – длина перпендикуляра, опущенного из полюса  $P$  на направление силы  $Tds$  (на направление касательной к средней линии контура).

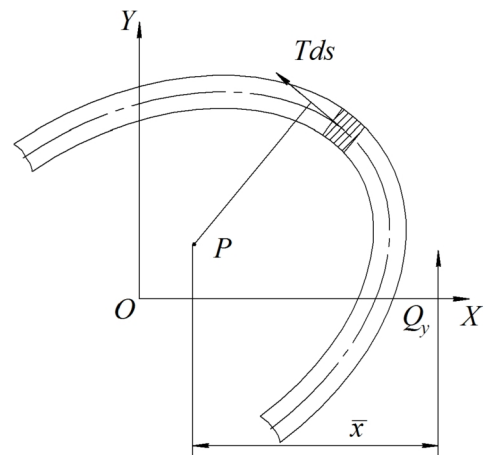


Рисунок 3.16.

Обозначим расстояние от равнодействующей до выбранного полюса через  $\bar{x}$ . Согласно теореме Вариньона (момент равнодействующей относительно какой-либо точки равен сумме моментов сил составляющих относительно той же точки) получим

$$Q_y \bar{x} = \int_l T \rho ds , \quad (3.42)$$

$$\bar{x} = \frac{1}{Q_y} \int_l T \rho ds . \quad (3.43)$$

Учитывая формулу (3.33), имеем

$$\bar{x} = \frac{1}{J_{rx}} \int_l S_{rx} \rho ds . \quad (3.44)$$

Рассматривая изгиб относительно оси  $y$ , аналогично получим

$$\bar{y} = \frac{1}{J_{ry}} \int_l S_{ry} \rho ds . \quad (3.45)$$

Из последних двух формул видно, что координаты  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$  не зависят от внешней нагрузки, а зависят лишь от геометрии поперечного сечения и материала. Через точку с координатами  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$  проходит равнодействующая касательных сил.

тельных усилий, возникающих в поперечном сечении. Эта точка называется центром изгиба открытого сечения.

Итак, центром изгиба открытого сечения называется точка, через которую проходит равнодействующая касательных усилий.

Линия, проходящая через центры изгиба всех сечений, называется осью изгиба конструкции. Она, очевидно параллельна оси  $z$ .

Из сказанного вытекает, что конструкции с открытым контуром поперечного сечения могут воспринимать только такие внешние нагрузки, которые проходят через ось изгиба. В противном случае внутренние силы не в состоянии уравновесить внешнюю нагрузку.

Следовательно, все выведенные ранее формулы для конструкций с открытым контуром сечения справедливы лишь в том случае, если внешние нагрузки проходят через ось изгиба.

Обратимся к примерам предыдущего параграфа. Пусть требуется определить положение центра изгиба сечения, изображённого на рисунке 3.4.

Эпюра погонных касательных сил представлена на рисунке 3.17. Если выбрать полюс в нижнем правом углу сечения, то момент относительно него дадут лишь касательные силы, действующие в верхней полке сечения. Плечо  $\rho$  здесь будет постоянным и равным высоте профиля  $a$ . Тогда согласно (3.43)

$$\bar{x} = \frac{a}{Q_y} \int_0^b T ds.$$

Последний интеграл представляет собой равнодействующую касательных сил верхней полки или площадь эпюры  $T$  на рассматриваемом участке

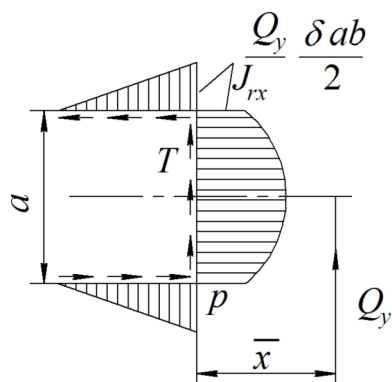


Рисунок 3.17

$$\int_0^b T ds = \frac{Q_y}{J_{rx}} \frac{\delta ab}{2} \frac{b}{2}.$$

Отсюда с учётом формулы (2.13)

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{b^2 a^2 \delta}{4 J_{rx}} = \frac{b^2 a^2 \delta}{4 \frac{\delta a^2}{2} \left( b + \frac{a}{6} \right)} = \\ &= \frac{b}{2 \left( 1 + \frac{a}{6b} \right)}. \end{aligned}$$

Определим теперь положение центра изгиба сечения, показанного на рисунке 3.13. Воспользуемся для расчёта формулой

$$\bar{x} = \frac{1}{J_{rx}} \int_l S_{rx} \rho ds.$$

За полюс выберем центр окружности. Тогда  $\rho = R = \text{const}$ . Статический момент изменяется по закону  $S_{rx} = \delta R^2 (1 - \cos \psi)$ . Момент инерции  $J_{rx} = \pi \delta R^3$ . Следовательно:

$$\bar{x} = \frac{1}{\pi \delta R^3} \int_0^{2\pi} \delta R^2 (1 - \cos \psi) R R d\psi = \frac{R}{\pi} \int_0^{2\pi} (1 - \cos \psi) d\psi = 2R.$$

В рассмотренных примерах мы определили одну из координат центра изгиба – координату  $\bar{x}$ .

Можно показать, что если поперечное сечение конструкции имеет ось симметрии, то центр изгиба лежит на этой оси. На рисунке 3.18 представлена эпюра погонных касательных сил для тонкостенной конструкции швеллерного типа при действии силы  $Q_x$ . Смена знака статического момента на оси симметрии свидетельствует о том, что поток касательных сил изменил своё направление. В результате, в симметричных точках поперечного сечения величины погонных касательных сил равны, а их направления – симметричны.

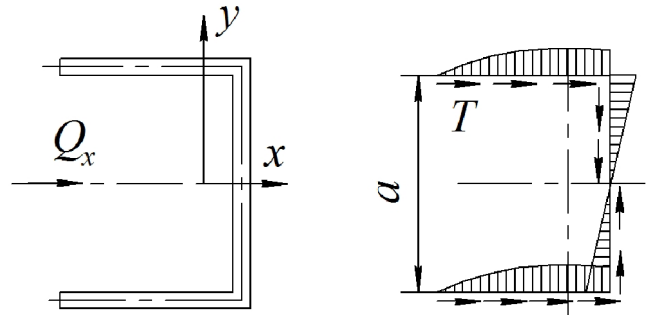


Рисунок 3.18

Для определения координаты  $\bar{y}$  центра изгиба удобнее полюс выбрать на оси симметрии. Тогда момент от внутренних сил верхней половины сечения уравнивается моментом внутренних сил нижней половины:

$$Q_x \bar{y} = \int_l T \rho ds = 0, \text{ отсюда } \bar{y} = 0,$$

то есть центр изгиба лежит на оси симметрии сечения.

Если сечение имеет две оси симметрии, то центр изгиба будет находиться в точке пересечения этих осей, то есть совпадает с центром тяжести поперечного сечения.



### 3.2.4 Касательные напряжения в тонкостенных конструкциях с однозамкнутым контуром поперечного сечения

Рассмотрим тонкостенную конструкцию с произвольным однозамкнутым контуром поперечного сечения (рисунок 3.19). Пусть требуется определить погонные касательные силы в точке  $b$  поперечного сечения. Полагаем, что нагрузка, приложенная к оболочке, вызывает изгиб относительно одной из главных осей инерции поперечного сечения, например, относительно оси  $x$ . В сечении действует перерезывающая сила  $Q_y$ , параллельная главной оси  $y$ .

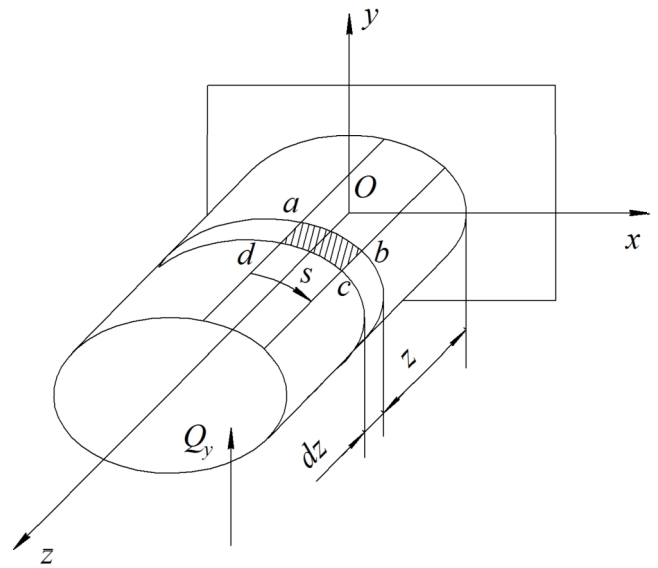


Рисунок 3.19

Выделим мысленно элемент конструкции четырьмя сечениями. Три из них проводятся так же, как и в конструкциях с открытым контуром: два сечения — перпендикулярно оси  $z$  на расстоянии  $dz$  друг от друга и одно — по образующей, проходящей через точку  $b$ . Четвертое сечение проводится по образующей, проходящей через произвольно выбираемую точку  $a$ . От этой точки отсчитывается координата  $s$ . Пусть  $N$  и  $N + \frac{\partial N}{\partial z} dz$  — равнодействующие нормальных усилий, действующих в площадках  $ab$  и  $cd$  (рисунок 3.20). Разность этих сил уравнивается касательными усилиями в продольных разрезах, проходящих через точки  $a$  и  $b$ .

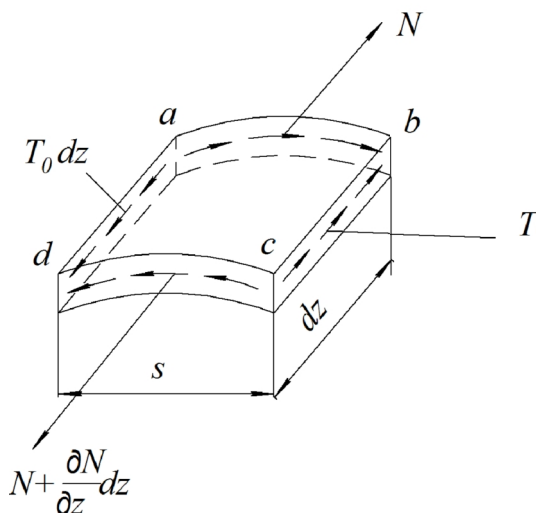


Рисунок 3.20

Обозначим через  $T$  погонную касательную силу в продольном разрезе, проходящем через точку  $b$ . В силу закона парности касательных напряжений погонная касательная сила в точке  $b$  поперечного сечения будет также  $T$ . Через  $T_0$  обозначим погонную касательную силу в продольном разрезе, проходящем через точку  $a$ .

Запишем уравнение элемента  $abcd$ , спроектировав все силы на ось  $z$ :

$$\left( N + \frac{\partial N}{\partial z} dz \right) - N - T dz + T_0 dz = 0 ,$$

откуда имеем:

$$T = T_0 + \frac{\partial N}{\partial z} . \quad (3.46)$$

Как и для открытого контура

$$N = \int_0^s \sigma \delta ds = \frac{M_x}{I_{rx}} S_{rx}$$

$$\frac{\partial N}{\partial z} = \frac{Q_y}{I_{rx}} S_{rx} \quad (3.47)$$

Подставив (3.47) в (3.46), получим:

$$T = T_0 + \frac{Q_y}{I_{ex}} S_{rx} . \quad (3.48)$$

Здесь  $S_{rx}$  – статический момент относительно оси  $x$  части  $ab$  приведенного сечения.

Сравним полученный результат с формулой (3.33) для определения погонных касательных сил в открытом контуре. Видим, что второе слагаемое последней формулы представляет собой погонную касательную силу в предположении, что конструкция разомкнута по образующей, проходящей через точку  $a$ . Обозначим ее через  $T^*$ :

$$T^* = \frac{Q_y}{I_{rx}} S_{rx} . \quad (3.49)$$

Тогда:

$$T = T_0 + T^* . \quad (3.50)$$

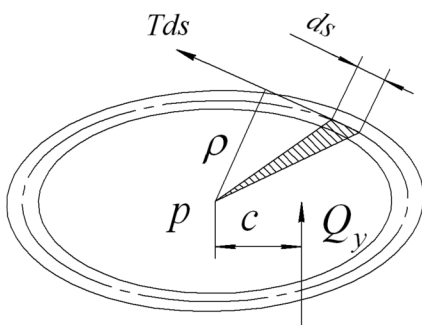


Рисунок 3.21

Равнодействующая погонных касательных сил  $T$  равна перерезывающей силе в сечении  $Q_y$ . Момент равнодействующей относительно выбранного полюса должен быть равен сумме моментов элементарных касательных сил относительно того же полюса (рисунок 3.21):

$$Q_y c = \oint T \rho ds . \quad (3.51)$$



Здесь  $c$  – расстояние от полюса до линии действия равнодействующей  $Q_y$  касательных усилий,  $\rho$  – длина перпендикуляра, опущенного из полюса на направление касательной к контуру.

Подставив в (3.51) значение усилия  $T$  из (3.50), получим:

$$Q_y c = \oint (T_0 + T^*) \rho ds. \quad (3.52)$$

Поскольку касательное усилие в начале отсчета дуг  $T_0$  – величина постоянная, имеем:

$$Q_y c = T_0 \oint \rho ds + \oint T^* \rho ds.$$

Отсюда:

$$T_0 = \frac{Q_y c - \oint T^* \rho ds}{\oint \rho ds}. \quad (3.53)$$

Интеграл  $\oint \rho ds$  имеет простой геометрический смысл. Из рисунка 3.21 видно, что произведение  $\rho ds$  представляет собой удвоенную площадь заштрихованного треугольника. Проинтегрировав эту величину по всему контуру, получим удвоенную площадь фигуры, ограниченной средней линией контура. Обозначим эту удвоенную площадь через  $\Omega$ :

$$\Omega = \oint \rho ds.$$

Тогда:

$$T_0 = \frac{Q_y c - \oint T^* \rho ds}{\Omega}. \quad (3.54)$$

При расчетах по формуле (3.54) нужно учитывать знаки моментов. Условимся как для внешних нагрузок, так и для внутренних сил положительными считать моменты, действующие против хода часовой стрелки, если смотреть против оси  $z$ .

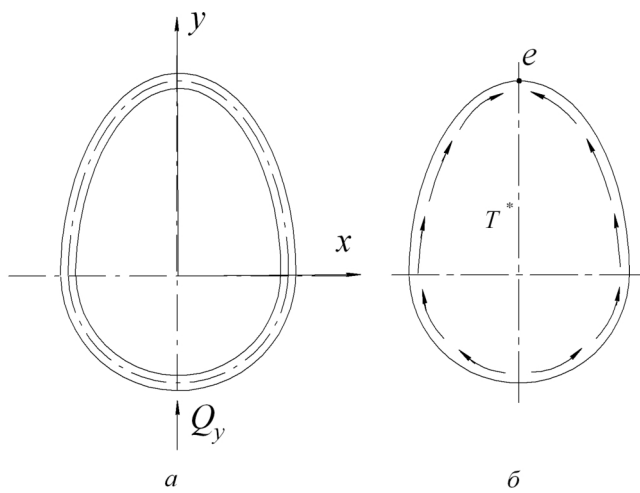
Если единственной внешней нагрузкой является крутящий момент, то сила  $Q_y = 0$ , и мы приходим к известной из курса сопротивления материалов формуле для кручения тонкостенных труб:

$$T = \frac{M_z}{\Omega}. \quad (3.55)$$

Порядок расчета однозамкнутого контура сводится к следующему.

1. Выбираем точку  $a$  в качестве начала отсчета дуг.

2. Определяем по формуле (3.49) величину погонных касательных сил  $T^*$  как для открытого контура.
3. Выбираем в сечении полюс, относительно которого подсчитываем момент  $\oint T^* \rho ds$  касательных сил  $T^*$ .
4. Вычисляем момент  $Q_y c$  внешней нагрузки относительно произвольно выбранного полюса.
5. По формуле (3.54) находим касательное усилие  $T_0$  в начальной точке.
6. Вычисляем суммарные значения погонных касательных сил во всех точках поперечного сечения по формуле (3.50).



**Рисунок 3.22**

Рассмотрим один частный случай – тонкостенную конструкцию, имеющую плоскость симметрии. Кроме того, пусть внешняя нагрузка лежит в этой плоскости (рисунок 3.22,а).

Выбираем в качестве начала отсчета дуг точку  $e$  на оси симметрии (рисунок 3.22,б). Тогда в симметричных точках поперечного сечения погонные касательные

силы  $T^*$  будут равны по величине, а их направления симметричны. Если теперь выбрать полюс на оси симметрии, то  $c = 0$  и

$$\oint T^* \rho ds = 0, \quad Q_y c = 0.$$

Отсюда  $T_0 = 0$ , и мы получим

$$T = T^* = \frac{Q_y}{I_{rx}} S_{rx}. \quad (3.56)$$

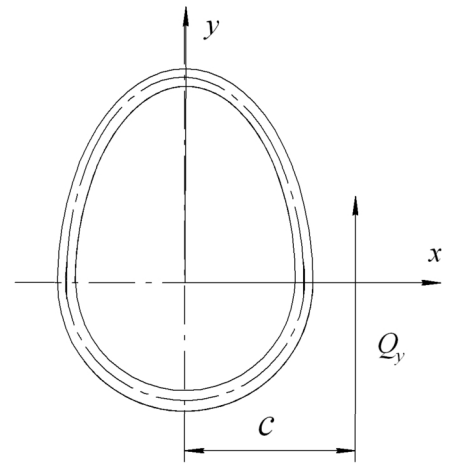
Итак, если начальную точку выбрать на оси симметрии, то в рассматриваемом случае расчетная формула упрощается.

Если внешняя нагрузка параллельна плоскости симметрии, но не лежит в ней (рисунок 3.23), то имеем:

$$T = \frac{Q_y c}{\Omega} + \frac{Q_y}{I_{rx}} S_{rx} \quad (3.57)$$

Мы рассматривали изгиб конструкции относительно оси  $x$ . Если же в сечении действует перерезывающая сила  $Q_x$ , то определение погонных касательных сил проводится также по формуле (3.50), но усилие  $T^*$  следует вычислять по формуле

$$T^* = \frac{Q_x}{I_{ry}} S_{ry} \quad (3.58)$$



**Рисунок 3.23**

В тонкостенной конструкции с замкнутым контуром сечения могут развиваться такие внутренние силы, которые в состоянии уравновесить внешнюю нагрузку, приложенную произвольным образом. Эти внутренние силы однозначно определяются из уравнений статики. Следовательно, системы с однозамкнутым контуром поперечного сечения статически определимы и геометрически неизменяемы.

### **3.2.5 Примеры расчета касательных усилий в однозамкнутом контуре**

Пример 1. Определить величину погонных касательных сил в сечении, представленном на рисунке 3.24,а. Конструкция нагружена вертикальной нагрузкой  $Q_y$ , действующей на расстоянии  $0,5R$  от вертикальной стенки.

При вычислении момента инерции имеем в виду, что сечение состоит из полуокружности и прямоугольной стенки:

$$I_{rx} = \frac{\pi \delta R^3}{2} + \frac{\delta (2R)^3}{12} = 2,237 \delta R^3.$$

Если выбрать начало отсчета дуг на оси симметрии сечения (точка 1), то закон изменения погонных касательных сил  $T^*$  на криволинейном участке будет таким же, как в примере 2 (3.41). На вертикальной стенке погонные касательные силы изменяются по закону квадратной параболы. Характерные ординаты эпюры  $T^*$  приведены на рисунке 3.24,б.

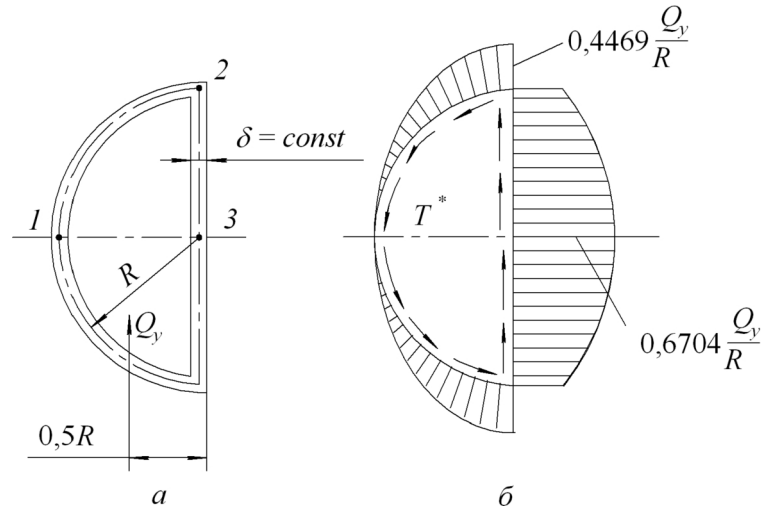


Рисунок 3.24

Для определения усилий  $T_0$  выберем полюс в центре окружности. Тогда момент внутренних сил  $T^*$  будет равен

$$\oint T^* \rho ds = 2 \frac{Q_y}{I_{rx}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \delta R^2 (1 - \cos \psi) R \cdot R d\varphi = 2 \frac{Q_y \delta R^4}{I_{rx}} (\psi - \sin \varphi) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0,5102 Q_y R.$$

Момент внешней нагрузки относительно выбранного полюса с учетом знака

$$Q_y c = -Q_y \frac{R}{2}.$$

Удвоенная площадь фигуры, ограниченной средней линией контура:

$$\Omega = \pi R^2.$$

Отсюда

$$T_0 = \frac{-0,5 Q_y R - 0,5102 Q_y R}{\pi R^2} = -0,3216 \frac{Q_y}{R},$$

и

$$T = T_0 + T^* = -0,3216 \frac{Q_y}{R} + T^*.$$

Вид эпюры  $T$  представлен на рисунке 3.25. В характерных точках имеем

$$T_1 = -0,3216 \frac{Q_y}{R};$$

$$T_2 = -0,3216 \frac{Q_y}{R} + 0,4469 \frac{Q_y}{R} = 0,1253 \frac{Q_y}{R};$$

$$T_3 = -0,3216 \frac{Q_y}{R} + 0,6704 \frac{Q_y}{R} = 0,3488 \frac{Q_y}{R}.$$

**Пример 2.** Определить погонные касательные силы в тонкостенной конструкции, подкреплённой продольными поясами из одного материала, при условии, что обшивка тонкая и работает только на сдвиг (рисунок 3.26).

Расчет следует начать с определения положения центральной оси  $x$  по формуле

$$y_c = \frac{\tilde{S}_{rx'}}{F_r} \quad (3.59)$$

здесь  $\tilde{S}_{rx'}$  – статический момент приведенного сечения относительно вспомогательной оси  $x'$ ,  $F_r$  – площадь всего поперечного сечения, приведенного к одному материалу.

Поскольку обшивка работает только на сдвиг, при вычислении геометрических характеристик поперечного сечения следует учитывать только площади сечений продольных поясов в соответствии с (3.25) и (3.37), полагая  $\varphi_i = 1$ .

Тогда для статического момента всего поперечного сечения относительно произвольно выбранной оси  $x'$  будем иметь

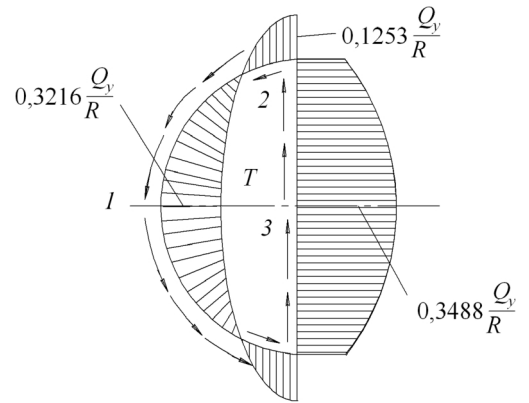
$$\tilde{S}_{rx'} = \sum F_i y_i = 2F \cdot 2a = 4Fa,$$

$$F_r = 6F.$$

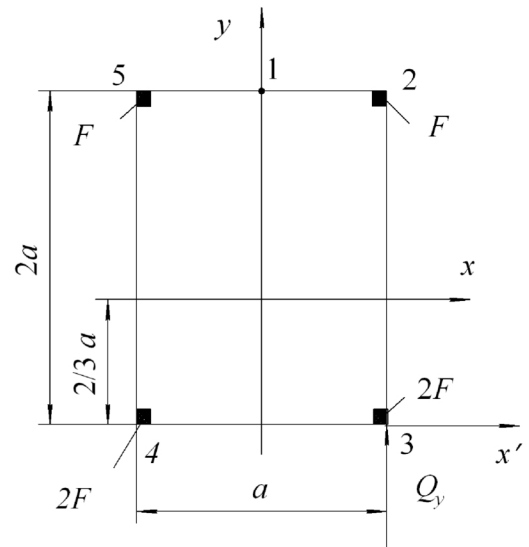
В соответствии с формулой (3.59) найдем положение центра тяжести поперечного сечения

$$y_c = \frac{2}{3}a.$$

Далее, приняв точку 1, лежащую на оси симметрии, за начало отсчета дуг определим значения погонной касательной силы  $T^*$  по (3.49). Для этого



**Рисунок 3.25**



**Рисунок 3.26**

найдем момент инерции поперечного сечения и значения статического момента в характерных точках поперечного сечения (рисунок 3.45):

$$I_{rx} = 2 \left[ 2F \left( \frac{2a}{3} \right)^2 + F \left( \frac{4a}{3} \right)^2 \right] = \frac{16}{3} Fa^2,$$

$$S_{rx}^{(1)} = 0, \quad S_{rx}^{(2)} = 0, \quad S_{rx}^{(2')} = \frac{4}{3} Fa, \quad S_{rx}^{(3)} = \frac{4}{3} Fa, \quad S_{rx}^{(3')} = 0,$$

$$S_{rx}^{(4)} = 0, \quad S_{rx}^{(4')} = -\frac{4}{3} Fa, \quad S_{rx}^{(5)} = -\frac{4}{3} Fa, \quad S_{rx}^{(5')} = 0.$$

Здесь  $S_{rx}^{(2)}$  – значение статического момента в точке 2 при подходе к этой точке слева,  $S_{rx}^{(2')}$  – значение  $S_{rx}$  при подходе к этой точке справа и т. д.

Эпюра погонных касательных сил  $T^*$  будет обратно симметричной (рисунок 3.27). Если выбрать полюс на оси симметрии, то величина погонной касательной силы  $T_0$  окажется равной

$$T_0 = \frac{Q_y c}{\Omega} = \frac{Q_y a}{2 \cdot 2(a \cdot 2a)} = \frac{Q_y}{8a}.$$

Вид эпюры погонной силы  $T_0$  представлен на рисунке 3.28. Суммируя по точкам значения касательных сил  $T^*$  и  $T_0$ , получим эпюру погонных сил  $T$  в данном контуре (рисунок 3.29).

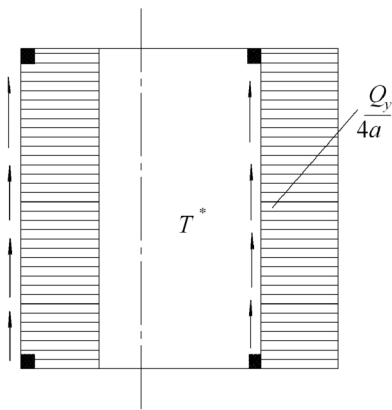


Рисунок 3.27

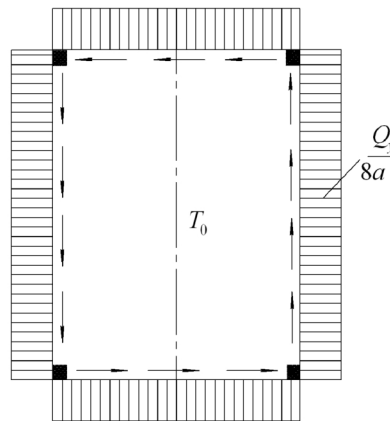


Рисунок 3.28

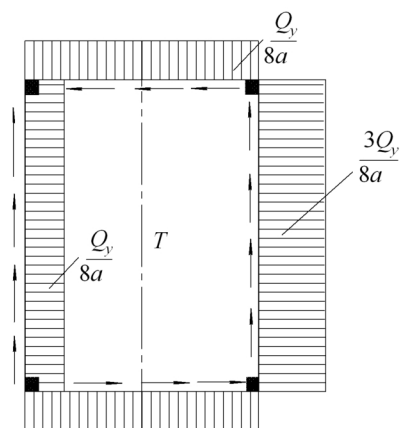


Рисунок 3.29

### 3.2.6. Определение упругих перемещений в тонкостенных конструкциях

Рассмотрим тонкостенную конструкцию, нагруженную системой сил  $P_1, P_2, P_3$  (рисунок 3.30). Пусть требуется определить перемещение точки  $a$

в направлении  $i-i$ , то есть проекцию полного перемещения точки  $a$  на направление  $i-i$  (точка  $a$  и направление  $i-i$  взяты произвольно).

Воспользуемся принципом возможных перемещений, который для упругой системы можно сформулировать следующим образом. Если упругая система находится в равновесии под действием внешних нагрузок, то работа внешних сил  $\delta' A$  на возможных перемещениях будет равна вариации потенциальной энергии системы  $\delta' U$ :

$$\delta' A = \delta' U. \quad (3.60)$$

Возможными перемещениями в механике называют любые бесконечно малые перемещения, допускаемые в данный момент связями системы.

Исходное состояние данной конструкции будем называть «системой  $P$ ». Введем в рассмотрение еще одно состояние конструкции, где единственной внешней нагрузкой является единичная сила, проложенная в точке  $a$  в направлении искомого перемещения. Это состояние конструкции будем называть единичной системой «1» (рисунок 3.31).

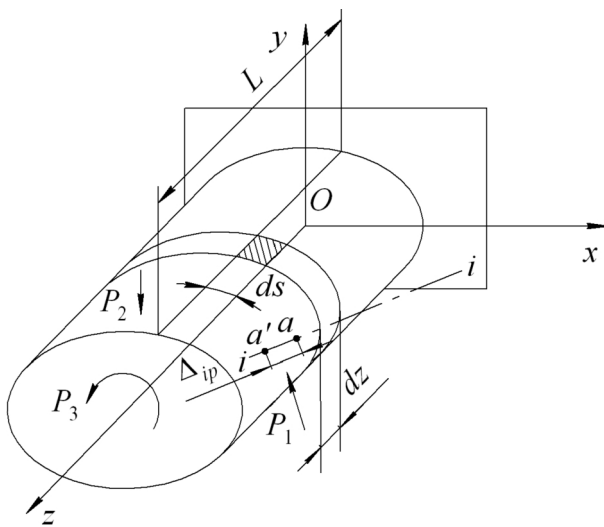


Рисунок 3.30

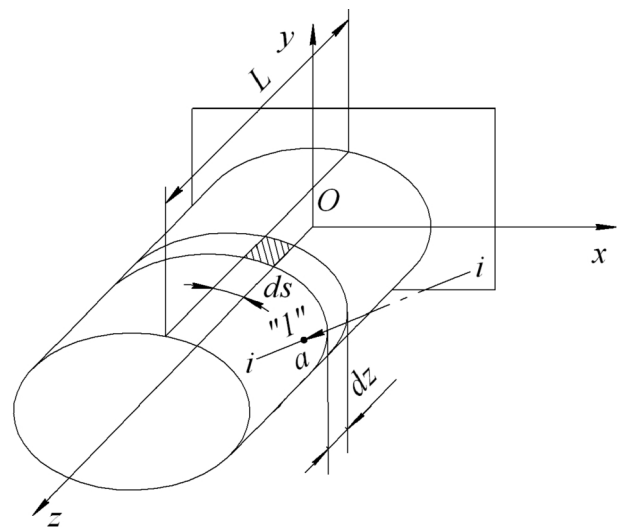


Рисунок 3.31

Применим принцип возможных перемещений к единичной системе. За возможные перемещения системы «1» примем действительные перемещения системы « $P$ », умноженные на весьма малый коэффициент  $\beta$ . Тогда точка  $a$  системы «1» будет иметь перемещение

$$\beta \Delta_{ip}. \quad (3.61)$$

Напомним, что во время, когда системе сообщаются возможные перемещения, величины и направления внешних и внутренних сил остаются неизменными.

Работа внешних сил системы «1» на возможных перемещениях определится выражением

$$\delta' A = 1 \cdot \beta \Delta_{ip}. \quad (3.62)$$

Для вычисления изменения потенциальной энергии деформации единичной системы воспользуемся зависимостью

$$\delta' U = \int \oint_L \int_{-\delta/2}^{-\delta/2} (\bar{\sigma} \delta' \bar{\epsilon}_{zz} + \bar{\tau} \delta' \bar{\epsilon}_{zs}) dv, \quad (3.63)$$

где  $\bar{\sigma}$ ,  $\bar{\tau}$  – нормальные и касательные напряжения, возникающие в конструкции от единичной нагрузки;  $\delta' \bar{\epsilon}_{zz}$ ,  $\delta' \bar{\epsilon}_{zs}$  – вариации деформаций, вызванные возможными перемещениями единичной системы, равные, в соответствии со сказанными выше

$$\delta' \bar{\epsilon}_{zz} = \beta \epsilon_{zz}, \quad \delta' \bar{\epsilon}_{zs} = \beta \epsilon_{zs}, \quad (3.64)$$

где  $\epsilon_{zz}$ ,  $\epsilon_{zs}$  – деформации в системе «P»,  $dv$  – элемент объема.

Действительные деформации системы «P», связаны с напряжениями  $\sigma$  и  $\tau$  законом Гука:

$$\epsilon_{zz} = \frac{\sigma}{E}, \quad \epsilon_{zs} = \frac{\tau}{G}. \quad (3.65)$$

Подставим (3.59) и (3.65) в выражение (3.63) и выполним интегрирование по толщине оболочки

$$\delta' U = \int \oint_L (\bar{\sigma} \beta \frac{\sigma}{E} + \bar{\tau} \beta \frac{\tau}{G}) \delta dz ds. \quad (3.66)$$

Приравняем, согласно (3.60), работу внешних сил (3.62) вариации потенциальной энергии системы (3.66):

$$\beta \Delta_{ip} = \beta \int \oint_L (\bar{\sigma} \frac{\sigma}{E} + \bar{\tau} \frac{\tau}{G}) \delta dz ds.$$

После сокращения на ненулевой множитель  $\beta$  получим

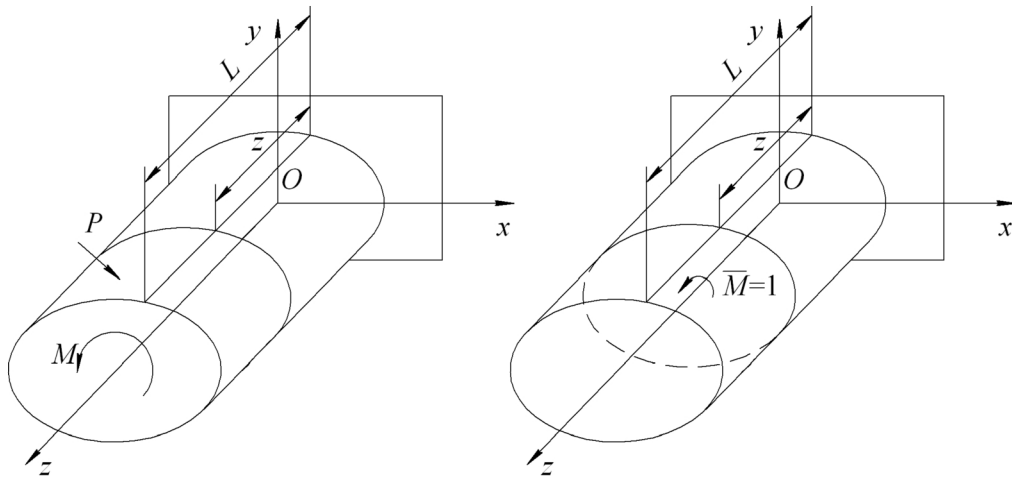
$$\Delta_{ip} = \int \oint_L (\bar{\sigma} \frac{\sigma}{E} + \bar{\tau} \frac{\tau}{G}) \delta dz ds. \quad (3.67)$$

Наконец, если в последнем равенстве перейти к погонным касательным усилиям  $T = \tau \delta$  и  $\bar{T} = \bar{\tau} \delta$ , то формула для расчета упругих перемещений примет следующий вид:

$$\Delta_{ip} = \int \oint_L \left( \frac{\bar{\sigma} \sigma \delta}{E} + \frac{\bar{\tau} \tau}{G \delta} \right) dz ds. \quad (3.68)$$



Рассмотрим частный случай. Пусть требуется определить угол поворота сечения оболочки, находящегося на расстоянии  $z$  от заделки (рисунок 3.32).



**Рисунок 3.32**

Для этого к конструкции в интересующем нас сечении прикладываем момент относительно оси  $z$ , равный единице. В этом случае нормальные напряжения  $\bar{\sigma}$  будут равны нулю и первое слагаемое под интегралом в (3.68) исчезнет. Погонная касательная сила  $T$  на участке от заделки до сечения  $z$  равна

$$\bar{T} = \frac{1}{\Omega},$$

а вне этого участка равняется нулю. Тогда для угла поворота сечения получится следующее выражение:

$$\theta = \frac{1}{\Omega} \int_0^z \oint \frac{T}{G\delta} dz ds. \quad (3.69)$$

Относительный (погонный) угол закручивания оболочки определим путем дифференцирования выражения (3.69) по  $z$ :

$$\alpha = \frac{d\theta}{dz} = \frac{1}{\Omega} \oint \frac{T ds}{G\delta}. \quad (3.70)$$

### 3.2.7 Центр изгиба тонкостенной конструкции с однозамкнутым контуром поперечного сечения

При произвольной внешней нагрузке перемещение поперечного сечения замкнутой тонкостенной конструкции может быть представлен в виде линейного смещения какой-либо точки и поворота относительно этой точки (рисунок 3.33). Для любой конструкции с однозамкнутым контуром попереч-

ного сечения всегда можно найти такую прямую, параллельную оси  $z$ , проходя через которую внешняя нагрузка не вызывает поворота сечений, а только их поступательные перемещения. Такая деформация системы называется простым изгибом, а ось, обладающая таким свойством, – осью изгиба. Точка пересечения поперечного сечения конструкции с осью изгиба называется центром изгиба сечения.

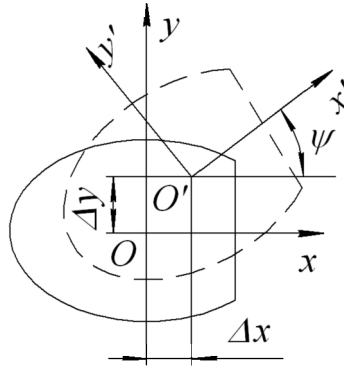


Рисунок 3.33

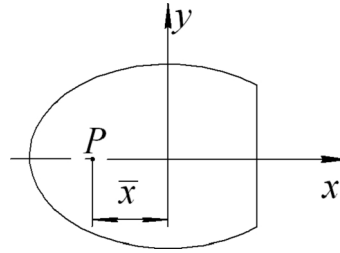


Рисунок 3.34

Найдем положение этой точки для заданной конструкции. Рассмотрим действие нагрузки, перпендикулярной оси  $x$  (рисунок 3.34). Поскольку контур замкнутый, то касательные усилия в нем определяются согласно (3.49), (3.50) и (3.54). Поэтому можно записать

$$T = \frac{Q_y}{I_{rx}} S_{rx} + \frac{1}{\Omega} \left( Q_y \bar{x} - \oint T^* \rho ds \right). \quad (3.71)$$

Здесь  $\bar{x}$  – расстояние от произвольно выбранного полюса до линии действия силы  $Q_y$ .

Преобразуем последнее выражение:

$$T = \frac{Q_y}{I_{rx}} S_{rx} + \frac{1}{\Omega} \left( Q_y \bar{x} - \oint \frac{Q_y}{I_{rx}} S_{rx} \rho ds \right)$$

или

$$T = Q_y \left( \frac{S_{rx}}{I_{rx}} + \frac{\bar{x}}{\Omega} - \frac{1}{\Omega I_{rx}} \oint S_{rx} \rho ds \right). \quad (3.72)$$

Подставим в (3.70) выражение (3.72) и результат приравняем нулю:

$$\frac{Q_y}{\Omega} \left[ \frac{1}{I_{rx}} \oint \frac{S_{rx} ds}{G \delta} + \frac{\bar{x}}{\Omega} \oint \frac{ds}{G \delta} - \frac{1}{\Omega I_{rx}} \oint S_{rx} \rho ds \oint \frac{ds}{G \delta} \right] = 0. \quad (3.73)$$

Равенство (3.73) возможно, если выражение, стоящее в квадратных скобках, равно нулю:

$$\frac{1}{I_{rx}} \oint \frac{S_{rx} ds}{G\delta} + \frac{\bar{x}}{\Omega} \oint \frac{ds}{G\delta} - \frac{1}{\Omega I_{rx}} \oint S_{rx} \rho ds \oint \frac{ds}{G\delta} = 0. \quad (3.74)$$

Отсюда находим положение линии действия силы  $Q_y$ , при котором будет иметь место простой изгиб конструкции:

$$\bar{x} = \frac{1}{I_{rx}} \oint S_{rx} \rho ds - \frac{\Omega}{I_{rx}} \frac{\oint \frac{S_{rx} ds}{G\delta}}{\oint \frac{ds}{G\delta}}. \quad (3.75)$$

Повторяя аналогичные рассуждения для случая нагружения силой  $Q_x$ , получим вторую координату искомой точки:

$$\bar{y} = \frac{1}{I_{ry}} \oint S_{ry} \rho ds - \frac{\Omega}{I_{ry}} \frac{\oint \frac{S_{ry} ds}{G\delta}}{\oint \frac{ds}{G\delta}}. \quad (3.76)$$

Итак, в поперечном сечении существует такая точка с координатами  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$ , проходя через которую внешняя нагрузка не вызывает поворота сечения. Нагрузка же, не проходящая через ось изгиба, вызывает помимо деформаций изгиба еще и поворот сечения конструкции.

Между осью изгиба тонкостенных конструкций с открытым и замкнутым поперечным сечениями имеется принципиальное различие.

Для открытого сечения ось изгиба является линией обязательного приложения внешней нагрузки. Нагрузки, не проходящие через ось изгиба, не могут быть уравновешены соответствующими внутренними силами в поперечном сечении.

Для конструкций с замкнутым сечением ось изгиба является линией действия внешней нагрузки, не вызывающей поворотов сечений, т.е. обеспечивающей простой изгиб системы. Нагрузки же, не проходящие через ось изгиба, вызывают поворот сечений, но они могут восприниматься системой.

### 3.3 Работа тонкостенных конструкций с многозамкнутым контуром

Нормальные напряжения в тонкостенных конструкциях с многозамкнутым контуром поперечного сечения могут быть найдены по формуле (3.16) согласно принятому закону плоского распределения относительных деформаций.

Задача определения касательных напряжений в многозамкнутых контурах оказывается более сложной. Переход от разомкнутой конструкции к замкнутой можно рассматривать как замыкание по образующей – наложение одной связи. Так как однозамкнутый контур статически определим, то  $n$ -замкнутый контур будет  $(n-1)$  раз статически неопределим. Раскрытие статической неопределимости может быть выполнено общими методами строительной механики. Так, если решать задачу (рисунок 3.35,а) методом сил, то необходимо выбрать основную систему, устранив лишние связи. В трехзамкнутом контуре следует провести два разреза вдоль образующих (рисунок 3.35,б). В направлении устраненных связей нужно приложить неизвестные усилия  $X_1$  и  $X_2$  и записать условия равенства нулю перемещений в направлении устраненных связей (канонические уравнения).

Рассмотрим иной способ раскрытия статической неопределимости, разработанный проф. Х.С. Хазановым.

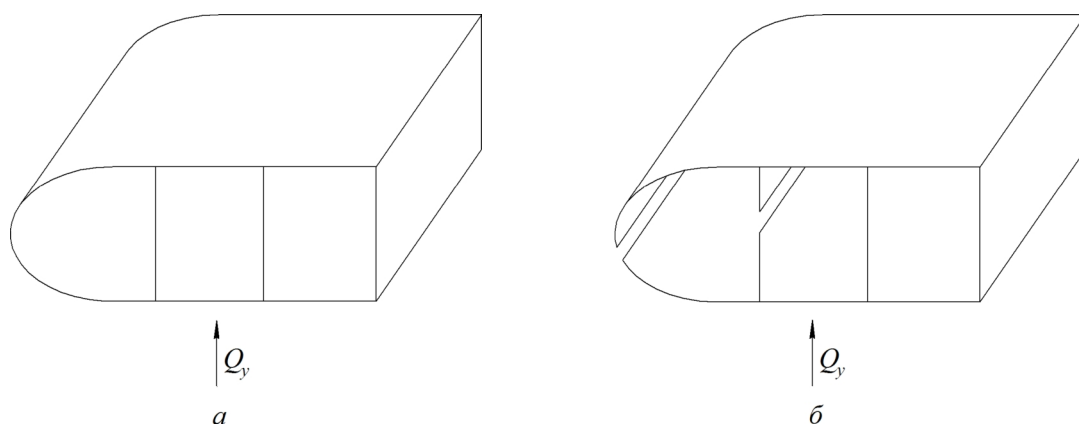


Рисунок 3.35

### 3.3.1 Касательные напряжения в тонкостенных конструкциях с многозамкнутым контуром поперечного сечения при произвольной внешней нагрузке

Рассмотрим тонкостенную конструкцию с трехзамкнутым контуром поперечного сечения, нагруженную произвольной внешней нагрузкой  $Q_y$  (рисунок 3.36). Эта нагрузка вызывает изгиб и закручивание ее поперечных сечений, причем каждый из замкнутых контуров закручивается на один и тот же угол  $\alpha$ , т.е.

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha. \quad (3.77)$$

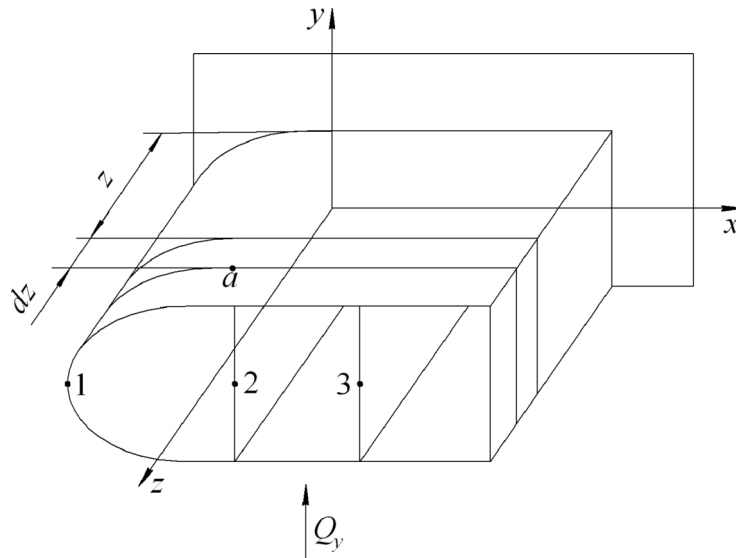


Рисунок 3.36

В пределах контура сечения конструкции выберем три точки 1, 2, 3, касательные усилия в которых обозначим через  $X_1$ ,  $X_2$  и  $X_3$ . Пусть требуется найти погонную касательную силу  $T_a$  в точке  $a$ .

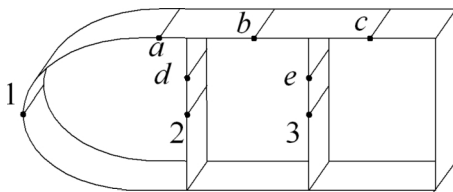


Рисунок 3.37

Выделим элемент конструкции, показанный на рисунке 3.36, и покажем его отдельно (рисунок 3.37). Проведем два сечения вдоль образующих через точки 1 и  $a$  и рассмотрим равновесие выделенного таким образом элемента конструкции (рисунок 3.38).

Обозначим равнодействующую нормальных напряжений на задней грани отсеченной части через  $N_a$ . Тогда на передней грани будет действовать сила, равная  $\left(N_a + \frac{\partial N_a}{\partial z} dz\right)$ . Равновесие отсеченной части возможно лишь тогда, когда в продольных сечениях действуют касательные усилия  $T_a$ . Спроектируем все силы на ось  $z$ :

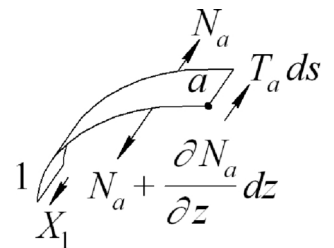


Рисунок 3.38

$$\left(N_a + \frac{\partial N_a}{\partial z} dz\right) - N_a + X_1 dz - T_a dz = 0.$$

Отсюда

$$T_a = X_1 + \frac{\partial N_a}{\partial z}.$$

Согласно формулам (3.47)...(3.49)

$$\frac{\partial N_a}{\partial z} = \frac{Q_y}{I_{rx}} S_{rx} = T^*,$$

где  $T^*$  – погонная касательная сила в точке  $a$  в предположении, что конструкция разомкнута по образующей, проходящей через точку 1. Итак:

$$T_a = X_1 + T^*. \quad (3.78)$$

Найдем далее погонную касательную силу  $T_b$  в точке  $b$ . Выделим часть конструкции, проводя продольные сечения вдоль образующих, проходящих через точки 1, 2,  $b$ , и рассмотрим, как и ранее, равновесие отсеченной части (рисунок 3.39). Равнодействующую нормальных напряжений, действующих по задней грани, обозначим  $N_b$ . Если спроектировать все силы на ось  $z$ , то можно получить

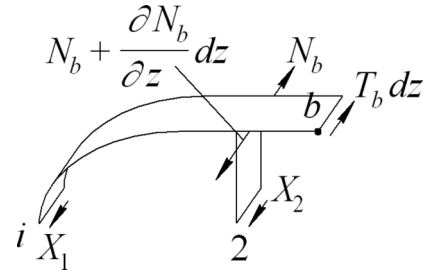


Рисунок 3.39

$$\left( N_b + \frac{\partial N_b}{\partial z} dz \right) - N_b + X_1 dz + X_2 dz - T_b dz = 0.$$

или

$$T_b = X_1 + X_2 + \frac{\partial N_b}{\partial z}. \quad (3.79)$$

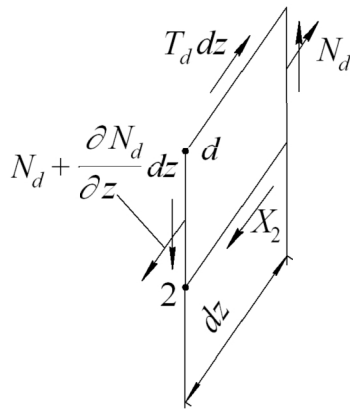
Здесь  $\frac{\partial N_b}{\partial z} = T^*$  – погонная касательная сила в точке  $b$  в предположении, что конструкция разомкнута по образующим, проходящим через точки 1 и 2.

Рассуждая аналогичным образом, можно показать, что значение погонной касательной силы в точке  $c$  третьего контура будет равно

$$T_c = X_1 + X_2 + X_3 + T^*. \quad (3.80)$$

Здесь  $T^*$  – касательная сила в точке  $c$  в предположении, что конструкция разомкнута по образующим, проходящим через точки 1, 2 и 3.

Чтобы определить усилия на промежуточных стенках, возьмем, например, на первой из стенок точку  $d$  (рисунок 3.37) и выделим элемент стенки двумя сечениями, проходящими через точки 2 и  $d$ . Рассмотрим равновесие этой части стенки. Спроектируем все силы на ось  $z$  (рисунок 3.40):



$$\left( N_d + \frac{\partial N_d}{\partial z} dz \right) - N_d - T_d dz + X_2 dz = 0;$$

$$T_d = X_2 + \frac{\partial N_d}{\partial z} = X_2 + T_d^*. \quad (3.81)$$

Аналогично получаем

$$T_e = X_3 + T_e^*. \quad (3.82)$$

Запишем (3.78)...(3.82) в виде одной формулы.

**Рисунок 3.40** Для этого введем три вспомогательные функции  $\bar{T}_1$ ,  $\bar{T}_2$ ,  $\bar{T}$ , изображенные на рисунке 3.41. Тогда выражения (3.78)...(3.82) можно представить следующим образом:

$$T = T^* + \bar{T}_1 X_1 + \bar{T}_2 X_2 + \bar{T}_3 X_3 = T^* + \sum_{k=1}^3 \bar{T}_k X_k. \quad (3.83)$$

На рисунке 3.41 условно показаны направления усилий  $X_1$ ,  $X_2$  и  $X_3$ .

Угол закручивания  $i$ -го контура определяется формулой

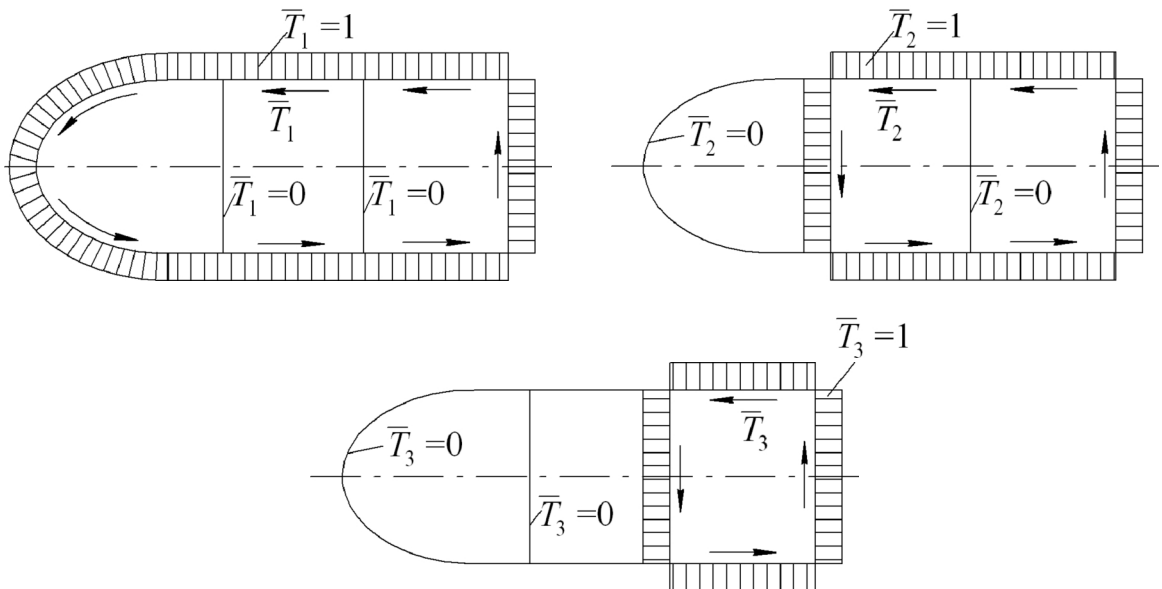
$$\alpha_i = \frac{1}{\Omega_i} \oint_{(i)} \frac{T}{G\delta} ds \quad i=1, 2, 3, \quad (3.84)$$

где интегрирование выполняется по  $i$ -тому контуру.

Это равенство с учетом условия (3.77) представим таким образом:

$$\alpha \Omega_i = \oint \frac{T \bar{T}_i}{G\delta} ds, \quad (3.85)$$

где интегрирование формально распространяется на всё сечение.



**Рисунок 3.41**

Подставив значения  $T$  (3.83) в (3.85), получим

$$\alpha \Omega_i = \oint \frac{\bar{T}_i}{G\delta} (T^* + \bar{T}_1 X_1 + \bar{T}_2 X_2 + \bar{T}_3 X_3) ds. \quad (3.86)$$

Поскольку  $X_1$ ,  $X_2$  и  $X_3$  постоянны, то их можно вынести за знаки интегралов.

Тогда ( $i = 1, 2, 3$ )

$$\alpha \Omega_i = \oint \frac{T^* \bar{T}_i}{G\delta} ds + X_1 \oint \frac{\bar{T}_1 \bar{T}_i}{G\delta} ds + X_2 \oint \frac{\bar{T}_2 \bar{T}_i}{G\delta} ds + X_3 \oint \frac{\bar{T}_3 \bar{T}_i}{G\delta} ds. \quad (3.87)$$

Уравнения (3.87) можно представить в таком виде:

$$\alpha \Omega_i = \Delta_i^* + \sum_{k=1}^3 \delta_{ik} X_k, \quad i = 1, 2, 3, \quad (3.88)$$

где

$$\Delta_i^* = \oint \frac{T^* \bar{T}_i}{G\delta} ds, \quad \delta_{ik} = \oint \frac{\bar{T}_i \bar{T}_k}{G\delta} ds. \quad (3.89)$$

Коэффициенты (3.89) подсчитываются путем перемножения эпюр  $T^*$  (рисунок 3.42) и  $\bar{T}_i$  (рисунок 3.41). Система трех уравнений (3.88) содержит четыре неизвестных величины  $X_i$  и  $\alpha$ , для определения которых нужно к условиям совместности деформации (3.77) добавить уравнение равновесия. Для этого, выбрав произвольную точку внутри контура за полюс (рисунок 3.43), запишем равенство моментов внешних и внутренних сил относительно  $T^*$  этого полюса:

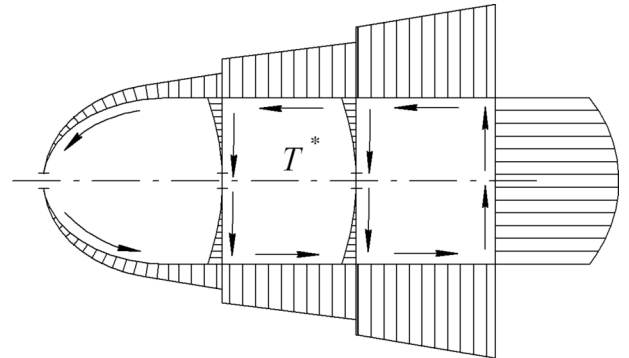


Рисунок 3.42

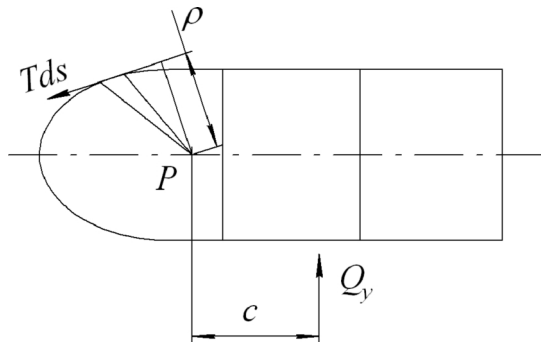


Рисунок 3.43

$$M_p = Q_y c = \oint T \rho ds. \quad (3.90)$$

С учетом (3.83) имеем

$$M_p = \oint \left( T^* + \sum_{k=1}^3 \bar{T}_k X_k \right) \rho ds \quad (3.91)$$

или

$$M_p = \oint T^* \rho ds + \sum_{k=1}^3 X_k \oint \bar{T}_k \rho ds.$$

Учитывая, что по  $k$ -тому контуру  $\bar{T}_k = 1$ , будем иметь



$$\oint \bar{T}_k \rho ds = \Omega_k, \quad (3.92)$$

где  $\Omega_k$  – удвоенная площадь, ограниченная средней линией  $k$ -го контура.

Уравнение равновесия (3.90), наконец, примет вид

$$M_p = \oint T^* \rho ds + \sum_{k=1}^3 X_k \Omega_k. \quad (3.93)$$

Из системы уравнений (3.88) и (3.93) можно определить неизвестные касательные силы  $X_1$ ,  $X_2$  и  $X_3$  и угол  $\alpha$  для рассматриваемой тонкостенной конструкции при произвольной внешней нагрузке и далее по формуле (3.83) рассчитать значение погонной касательной силы в любой точке много замкнутого контура поперечного сечения.

Расчет касательных усилий при произвольной внешней нагрузке конструкции можно выполнить, разбив на его две части: на расчёт простого изгиба и расчёт свободного кручения. Ниже рассмотрим эти частные случаи нагружения.

### 3.3.2 Касательные напряжения в тонкостенных конструкциях с много замкнутым контуром поперечного сечения при простом изгибе

При простом изгибе поперечные сечения тонкостенной конструкции не поворачиваются относительно оси  $z$ , а лишь получают поступательные перемещения вдоль осей  $x$  и  $y$ . Отсутствие поворота сечений можно записать в виде равенства нулю относительных углов закручивания каждого из контуров. Поэтому уравнения (3.88) примут следующий вид:

$$\Delta_i^* + \sum_{k=1}^3 \delta_{ik} X_k = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.94)$$

Решив систему уравнений (3.94), можно найти неизвестные  $X_i$  и затем определить касательные усилия при простом изгибе в соответствии с формулой (3.83):

$$T_{изг} = T^* + \sum_{k=1}^3 \bar{T}_k X_k. \quad (3.95)$$

Примерный вид эпюры  $T_{изг}$  представлен на рисунке 3.44.

При простом изгибе тонкостенной конструкции равнодействующая всех внешних сил проходит через ось изгиба рассматриваемой конструкции. Поэтому с помощью уравнения (3.93) можно определить координату центра

изгиба поперечного сечения много замкнутого контура  $\bar{x}$ , полагая, что  $M_p = Q_y \bar{x}$ :

$$\bar{x} = \frac{1}{Q_y} \left( \oint T^* \rho ds + \sum_{k=1}^3 X_k \Omega_k \right). \quad (3.96)$$

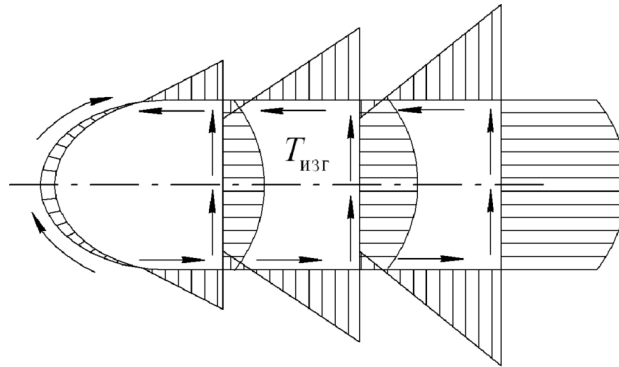


Рисунок 3.44

С другой стороны, координату центра изгиба сечения тонкостенной конструкции можно найти и как точку, через которую проходит равнодействующая касательных усилий при простом изгибе (см. 3.43):

$$\bar{x} = \frac{1}{Q_y} \oint T_{изг} \rho ds, \quad (3.97)$$

что также приводит к выражению (3.96).

### 3.3.3. Касательные напряжения при свободном кручении многозамкнутых конструкций

Рассмотрим тонкостенную конструкцию с трехзамкнутым контуром поперечного сечения, нагруженную крутящим моментом  $M_{кр}$  (рисунок 3.45).

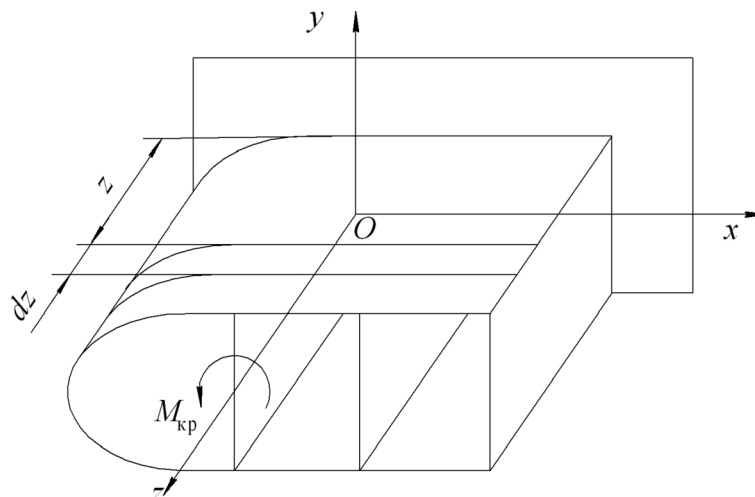


Рисунок 3.45

Записывая уравнения равновесия отдельных частей конструкции, можно выяснить, как распределяются по контурам погонные касательные силы. Выделим элемент конструкции, приведенной на рисунке 3.45, и покажем его

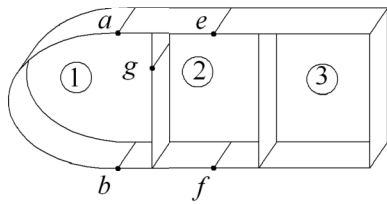


Рисунок 3.46

отдельно (рисунок 3.46). Проведем два сечения через произвольные точки  $a$  и  $b$  в пределах первого контура и рассмотрим равновесие выделенной части конструкции (рисунок 3.47). спроектировав все усилия на ось  $z$ , получим

$$T_b dz - T_a dz = 0; \quad T_a = T_b = T_1. \quad (3.98)$$

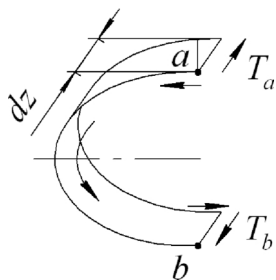


Рисунок 3.47

Из рисунка 3.47 видно, что в контуре действует постоянная погонная сила  $T_1$ .

Проведем два продольных сечения через точки  $e$  и  $f$  (рисунок 3.48). Из условия равновесия отсеченной части получим

$$T_e dz = T_f dz = 0; \quad T_e = T_f = T_2. \quad (3.99)$$

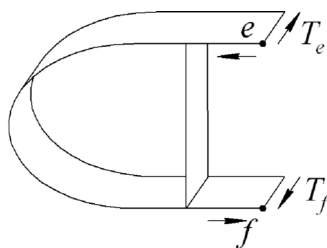


Рисунок 3.48

То есть и во втором контуре действует постоянный по величине поток касательных сил  $T_2$ .

Рассуждая аналогичным образом, можем убедиться, что и в третьем контуре погонная касательная сила постоянна и равна  $T_3$  (рисунок 3.49).

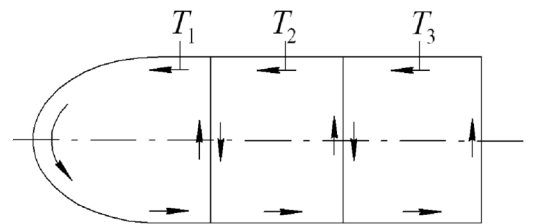


Рисунок 3.49

Выясним, чему равны касательные силы на промежуточных стенках. Возьмем точку  $g$  на стенке между первым и вторым контурами. Проведем сечения через точки  $a$ ,  $e$  и  $g$  (рисунок 3.50):

$$T_1 dz - T_2 dz - T_3 dz = 0, \quad T_g = T_{1-2} = T_1 - T_2. \quad (3.100)$$

Из формулы (3.100) видно, что в промежуточной стенке касательная сила равна разности усилий, действующих в двух смежных контурах.

Аналогично можно показать, что и в промежуточной стенке между вторым и третьим контурами касательная сила  $T_{2-3}$  будет равна

$$T_{2-3} = T_2 - T_3. \quad (3.101)$$

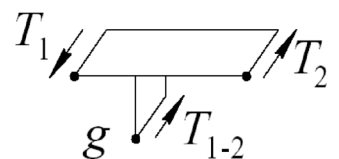


Рисунок 3.50

Итак, поток внутренних касательных сил в трехзамкнутом контуре может быть представлен в виде трех замкнутых потоков касательных сил  $T_1$ ,  $T_2$  и  $T_3$  по контурам. Найти эти силы можно, записав условия совместности деформаций (3.77), которые с учетом формул (3.84), (3.97)...(3.100) примут следующий вид:

$$\begin{aligned}\alpha\Omega_1 &= T_1 \oint_{(1)} \frac{ds}{G\delta} - T_2 \int_{1-2} \frac{ds}{G\delta}; \\ \alpha\Omega_2 &= -T_1 \int_{1-2} \frac{ds}{G\delta} + T_2 \oint_{(2)} \frac{ds}{G\delta} - T_3 \int_{2-3} \frac{ds}{G\delta}; \\ \alpha\Omega_3 &= T_3 \oint_{(3)} \frac{ds}{G\delta} - T_2 \int_{2-3} \frac{ds}{G\delta}.\end{aligned}\quad (3.102)$$

К этим уравнениям следует добавить еще одно уравнение статики

$$M_{кр} = \oint T \rho ds \quad (3.103)$$

или

$$M_{кр} = T_1\Omega_1 + T_2\Omega_2 + T_3\Omega_3. \quad (3.104)$$

Эпюра погонных касательных сил при свободном кручении представлена на рисунке 3.51.

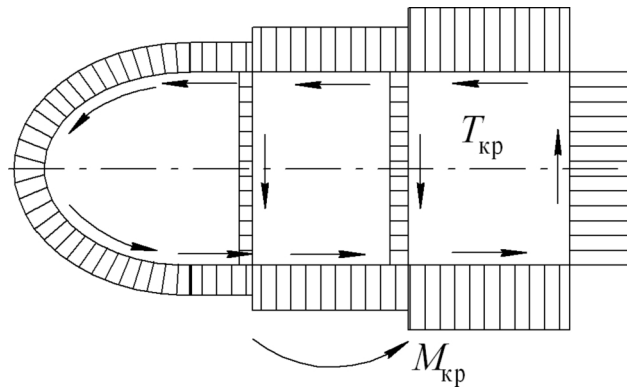


Рисунок 3.51

Задачу о свободном кручении тонкостенных конструкций с многозамкнутым контуром поперечного сечения можно решить несколько иначе, рассматривая ее как частный случай расчета многозамкнутых конструкций при произвольной внешней нагрузке. Тогда в соответствии с методикой расчета погонных касательных сил, изложенной в (3.77), следует принять  $Q_y = 0$ ,  $T^* = 0$ ,  $\Delta_i^* = 0$ . Так как на конструкцию действует только крутящий момент. При этом уравнения (3.88) и (3.93) примут следующий вид:

$$\alpha \Omega_i = \sum_{k=1}^3 \delta_{ik} X_k, \quad i = 1, 2, 3, \quad (3.105)$$

$$M_{\text{кр}} = \sum_{k=1}^3 X_k \Omega_k. \quad (3.106)$$

Для рассматриваемой задачи уравнения (3.98) и (3.106) представляют систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными:  $X_1$ ,  $X_2$  и  $X_3$  и  $\alpha$ .

Решив эту систему, можно определить значения погонных касательных сил во всех точках поперечного сечения рассматриваемой конструкции по формуле:

$$T_{\text{кр}} = \sum_{k=1}^3 \bar{T}_k X_k \quad (3.107)$$

Если расчет тонкостенной конструкции, нагруженной произвольной внешней нагрузкой, разбивается на два этапа – расчет при простом изгибе и расчет при свободном кручении, – то окончательную эпюру погонных касательных сил  $T$  можно получить, суммируя по точкам эпюры, представленные на рисунках 3.44 и 3.51.

## 4 ОСНОВЫ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

### 4.1 Гипотезы теории упругости

1. Гипотеза сплошности строения упругого тела. По этой гипотезе тело, непрерывное до деформации, остается непрерывным и после деформации, т.е. предполагается отсутствие пустот, разрывов и т.д. Совершенно очевидно, что данное предположение противоречит действительности. Первые исследования по теории упругости строились, исходя из дискретности строения вещества. Большие математические трудности вынудили отказаться от принятия дискретной схемы строения твердого тела и перейти к данной гипотезе.

2. Гипотеза о естественном ненапряженном состоянии. Согласно этой гипотезе существующие до приложения нагрузок начальные напряжения в теле, характер и величина которых зависит от истории возникновения тела, полагаются равными нулю.

3. Следующей предпосылкой классической теории упругости является наделение материала свойством идеальной упругости, т.е. свойством материала после снятия нагрузки возвращаться в естественное ненапряженное состояние.

4. Следующая гипотеза теории упругости – это наделение материала свойством шаровой изотропии. Шаровая изотропия материала понимается в том смысле, что физико-механические свойства одинаковы по всем направлениям.

5. Большое количество задач теории упругости решается с использованием принципа локальности эффекта самоуравновешенных внешних нагрузок (принцип Сен-Венана). Согласно этому принципу если в какой-либо малой части тела приложена уравновешенная система сил, то эффект от действия этой нагрузки быстро затухает.

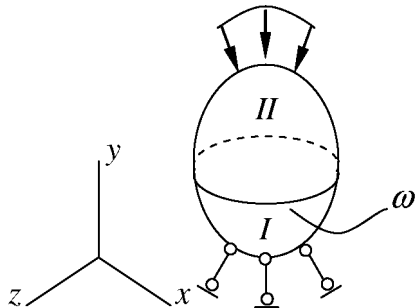
6. Гипотеза о малости перемещений. Перемещения считаются малыми по сравнению с линейными размерами тела. Следствием этого является малость деформаций в сравнении с единицей.

7. Гипотеза о справедливости закона Гука. Напряжения и деформации связаны линейной зависимостью.

Все эти допущения позволяют построить простейший вариант теории упругости.

## 4.2 Основные определения и обозначения

Рассмотрим некоторое тело, ограниченное поверхностью  $\omega$  (рисунок 4.1). Тело произвольно нагружено и закреплено. Все силы, действующие на тело, можно разделить на две группы:



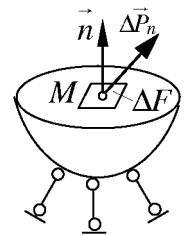
**Рисунок 4.1**

– поверхностные силы, действующие на поверхности тела. Проекции этих нагрузок на координатные оси обозначим через  $p_x$ ,  $p_y$ ,  $p_z$  [Н/м<sup>2</sup>];

– объемные (или массовые силы), распределенные по всему объему. Их проекции на координатные оси обозначим как  $R_x$ ,  $R_y$ ,  $R_z$  [Н/м<sup>3</sup>]. К объемным силам относятся собствен-

ный вес (сила тяжести), сила магнитного притяжения, инерционные силы.

Под действием приложенных сил тело находится в равновесии. Мысленно разрежем его произвольной плоскостью на две части (часть I и часть II), а затем часть II отбросим (рисунок 4.2). Действие отброшенной части на оставшуюся нужно заменить силами, распределенными по всему сечению (чтобы удовлетворить уравнениям равновесия).



**Рисунок 4.2**

Рассмотрим точку  $M$ , находящуюся в центре площадки  $\Delta F$ . Ориентация площадки характеризуется вектором нормали  $\vec{n}$ . По этой площадке действует сила величиной  $\Delta \vec{P}_n$ . Среднее напряжение определяется следующим образом:

$$\frac{\Delta \vec{P}}{\Delta F} = \vec{\sigma}_n \text{ ср.}$$

Вычисляя предел этого отношения при устремлении  $\Delta F \rightarrow 0$ , получим значение напряжения в точке  $M$ :

$$\lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{P}_n}{\Delta F} = \frac{d\vec{P}_n}{dF} = \vec{\sigma}_n.$$

Нижний индекс  $n$  подчеркивает, что вектор  $\vec{\sigma}_n$ , называемый вектором напряжения, зависит от ориентации площадки.

Напряжение – это интенсивность внутренних сил упругости, с которыми одна часть тела действует на другую через заданную площадку.

Пусть для точки  $M$  известны векторы полных напряжений для трех взаимно перпендикулярных площадок. Совместим координатные оси с направлениями этих площадок.

Векторы напряжений разложим на составляющие по координатным осям (рисунок 4.3):

$$\vec{\sigma}_x = \sigma_{xx}\vec{i} + \sigma_{xy}\vec{j} + \sigma_{xz}\vec{k};$$

$$\vec{\sigma}_y = \sigma_{yx}\vec{i} + \sigma_{yy}\vec{j} + \sigma_{yz}\vec{k};$$

$$\vec{\sigma}_z = \sigma_{zx}\vec{i} + \sigma_{zy}\vec{j} + \sigma_{zz}\vec{k},$$

где  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  – единичные орты. В обозначении  $\sigma_{ij}$  первый индекс характеризует ориентацию площадки, а второй – направление действия напряжения.

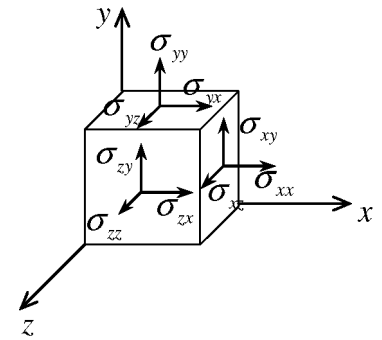


Рисунок 4.3

За положительное направление нормальных напряжений примем направление, совпадающее с внешней нормалью к площадке. Если внешняя нормаль к площадке направлена в сторону положительного направления координатной оси, то положительные касательные напряжения направлены по двум другим осям. Если внешняя нормаль к площадке направлена в противоположную сторону положительного направления координатной оси, то положительные касательные напряжения направлены против двух других координатных осей.

Совокупность девяти величин  $\sigma_{ij}$ , характеризующих напряженное состояние в данной точке тела, определяет тензор напряжений

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}.$$

Тензор – это физическая величина, которая располагается в ряду известных величин: скаляр, вектор. Как будет показано далее, из уравнений равновесия следует, что

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx}, \quad \sigma_{xz} = \sigma_{zx}, \quad \sigma_{yz} = \sigma_{zy}.$$

Таким образом, тензор напряжений симметричен относительно главной диагонали и имеет только шесть независимых компонент.

Рассмотрим далее перемещения точки  $M$ , принадлежащей телу (рисунок 4.4). Обозначим новое положение этой точки через  $M_1$ . Спроектируем перемещения точки  $M$  на оси координат и будем обозначать проекции их



через  $u_x$ ,  $u_y$ ,  $u_z$ . Перемещение точки  $M$  полностью характеризуется этими величинами.

Рассмотрим теперь перемещения параллелепипеда, выделенного из тела. Если ребра параллелепипеда не изменяют своей длины и углы между ребрами также не меняются, то для определения нового положения выделенного элемента нужно кроме перемещения точки  $u_x$ ,  $u_y$ ,  $u_z$  задать еще углы поворота относительно координатных осей  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$  (рисунок 4.5). В общем случае параллелепипед будет испытывать еще и деформацию.

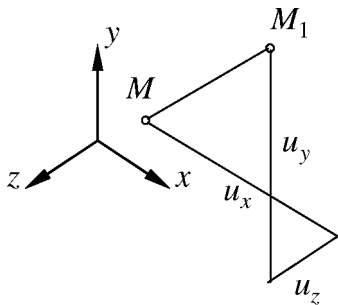


Рисунок 4.4

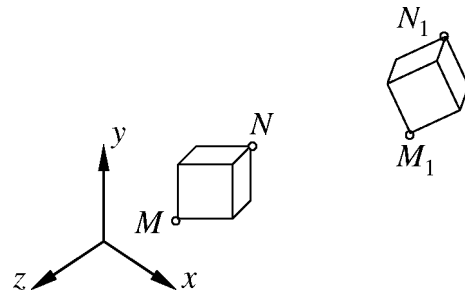


Рисунок 4.5

Деформацию любого элементарного объема тела можно разложить на ряд отдельных простейших деформаций. Для параллелепипеда это будут три удлинения ребер и три сдвиговые деформации.

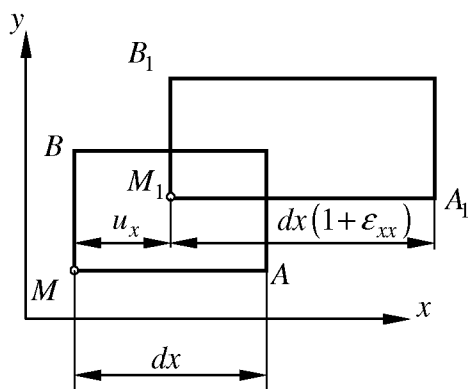


Рисунок 4.6

Пусть ребро  $MA$  после деформации займет положение  $M_1A_1$  (рисунок 4.6). Длина его после деформации станет равной

$$dx(1 + \varepsilon_{xx}),$$

где  $\varepsilon_{xx}$  – относительное удлинение ребра.

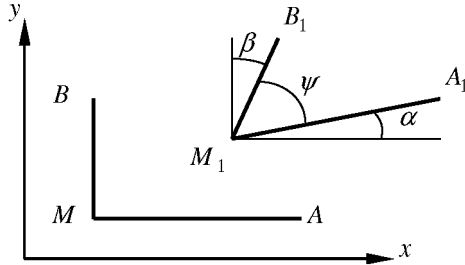
Положительными линейными деформациями считаются удлинения, а отрицательными – укорочения. Аналогично вводятся линейные деформации  $\varepsilon_{yy}$  и  $\varepsilon_{zz}$ .

Рассмотрим теперь такую деформацию параллелепипеда, когда меняется угол между ребрами (рисунок 4.7). Деформация сдвига определяется как искажение прямого угла

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\pi}{2} - \psi = \alpha + \beta.$$

Деформации сдвига  $\epsilon_{yz}$  и  $\epsilon_{zx}$  вводятся аналогично.

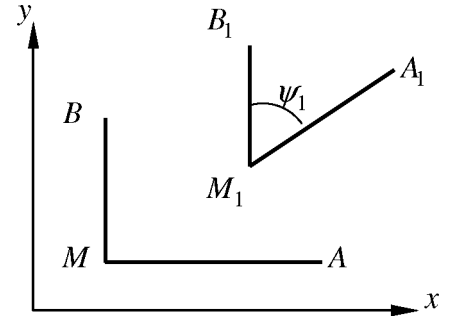
Угловая деформация считается положительной, если прямой угол между ребрами, направленными вдоль положительных координатных осей, уменьшается.



**Рисунок 4.7**

Шесть независимых деформаций полностью описывают деформацию тела в точке и образуют тензор деформации

$$T_{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \frac{\epsilon_{xy}}{2} & \frac{\epsilon_{xz}}{2} \\ \frac{\epsilon_{yx}}{2} & \epsilon_{yy} & \frac{\epsilon_{yz}}{2} \\ \frac{\epsilon_{zx}}{2} & \frac{\epsilon_{zy}}{2} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix}.$$



**Рисунок 4.8**

Следует заметить, что линейная деформация приводит к изменению формы элемента и объема. Деформация сдвига не приводит к изменению объема.

Подсчитаем относительное изменение объема тела. Объем тела до деформации равен  $d\tau = dx dy dz$ . Объем тела в деформированном состоянии  $d\tau_1 = dx(1 + \epsilon_{xx}) dy(1 + \epsilon_{yy}) dz(1 + \epsilon_{zz})$ . Относительное изменение объема будет равно

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{d\tau_1 - d\tau}{d\tau} = (1 + \epsilon_{xx})(1 + \epsilon_{yy})(1 + \epsilon_{zz}) - 1 = \\ &= \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz} + \epsilon_{xx}\epsilon_{yy} + \epsilon_{yy}\epsilon_{zz} + \epsilon_{zz}\epsilon_{xx} + \epsilon_{xx}\epsilon_{yy}\epsilon_{zz} - \epsilon_{xx}\epsilon_{yy}\epsilon_{zz}. \end{aligned}$$

Пренебрегая величинами второго и третьего порядка малости (т.к. деформации малы по сравнению с единицей), записываем выражение для относительного изменения объема:

$$\theta = \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}.$$

### 4.3 Дифференциальные уравнения равновесия

Рассмотрим тело, находящееся в равновесии. Из этого тела около некоторой точки  $M(x, y, z)$  мысленно вырежем бесконечно малый параллелепипед (рисунок 4.9).

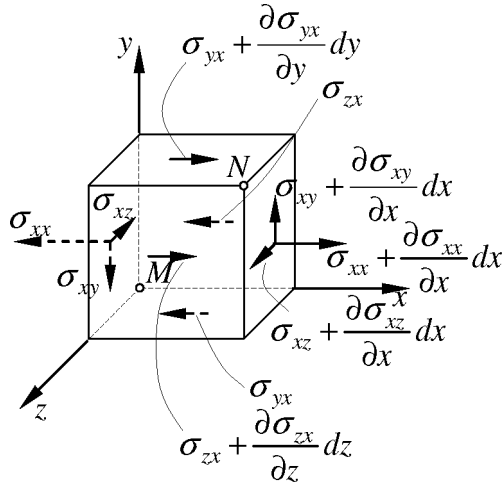


Рисунок 4.9

На площадке с нормалью  $-x$  действует напряжение  $\vec{\sigma}_x$  с компонентами  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{xy}$ ,  $\sigma_{xz}$ . На противоположной площадке (с нормалью  $x$ ) эти компоненты получают приращения. Аналогично можно показать напряжения и на других площадках. Отметим, что на остальных площадках на рисунке 4.9 показаны напряжения только вдоль оси  $x$  (чтобы не загромождать рисунок).

Отметим, что на выделенный элемент помимо напряжений действуют также объемные силы  $R_x d\tau$ ;  $R_y d\tau$ ;  $R_z d\tau$ , где.

Составим уравнение равновесия в проекции на ось  $x$ . При этом для перехода от напряжений к силам умножаем каждое напряжение на площадь грани, по которой оно действует:

$$\left( \sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx \right) dy dz - \sigma_{xx} dy dz + \left( \sigma_{yx} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dz - \sigma_{yx} dx dz + \left( \sigma_{zx} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} dz \right) dx dy - \sigma_{zx} dx dy + R_x dx dy dz = 0.$$

Аналогично записываются уравнения равновесия в проекции на оси  $y$  и  $z$ .

Координаты точки  $N$  будут определяться следующим образом:

$$N(x + dx, y + dy, z + dz).$$

Под действием напряжений, действующих на гранях параллелепипеда, а также объемных сил элемент должен находиться в равновесии, т.е. должны удовлетворяться шесть уравнений равновесия

$$\left( \sum X = 0; \sum Y = 0; \sum Z = 0; \sum M_x = 0; \sum M_y = 0; \sum M_z = 0 \right).$$

После деления на объем параллелепипеда  $d\tau = dxdydz$  уравнения равновесия примут вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} + R_x &= 0; \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} + R_y &= 0; \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + R_z &= 0.\end{aligned}\tag{4.1}$$

Соотношения (4.1) называются дифференциальными уравнениями равновесия.

Из уравнений моментов вытекает закон парности касательных напряжений:

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx}, \quad \sigma_{yz} = \sigma_{zy}, \quad \sigma_{zx} = \sigma_{xz}.$$

Если ввести матричные обозначения

$$[\sigma_x] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \end{bmatrix}, \quad [\sigma_y] = \begin{bmatrix} \sigma_{yx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{yz} \end{bmatrix}, \quad [\sigma_z] = \begin{bmatrix} \sigma_{zx} \\ \sigma_{zy} \\ \sigma_{zz} \end{bmatrix}, \quad [R] = \begin{bmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{bmatrix},$$

то уравнения равновесия примут вид

$$\frac{\partial [\sigma_x]}{\partial x} + \frac{\partial [\sigma_y]}{\partial y} + \frac{\partial [\sigma_z]}{\partial z} + [R] = 0.\tag{4.1a}$$

#### **4.4 Напряжения в наклонных площадках. Статические граничные условия**

Пусть нам известны напряжения, возникающие в трех взаимно-перпендикулярных площадках, проходящих через точку  $M$  (рисунок 4.10). Совместим координатные плоскости с этими площадками.

Пусть требуется найти напряжения, действующие в произвольной площадке с нормалью  $\vec{n}$ , проходящей через точку  $M$ .

Таким образом, нужно найти  $\vec{\sigma}_n$ . Компоненты этого вектора в направлении координатных осей мы обозначим как  $\sigma_{nx}$ ,  $\sigma_{ny}$ ,  $\sigma_{nz}$ .

Нормаль  $\vec{n}$  образует с направлениями координатных осей углы, косинусы которых мы будем обозначать следующим образом:

$$n_x = \cos(n, x);$$

$$n_y = \cos(n, y);$$

$$n_z = \cos(n, z).$$

Перпендикулярно вектору  $\vec{n}$  проведем плоскость на бесконечно малом расстоянии от точки  $M$ . Точки пересечения плоскости с координатными осями обозначим через  $A$ ,  $B$  и  $C$ . Через  $d\omega$  обозначим площадь  $\Delta ABC$ . Тогда

$$\text{площадь } \Delta AMC = d\omega \cdot n_y,$$

$$\text{площадь } \Delta AMB = d\omega \cdot n_z,$$

$$\text{площадь } \Delta BMC = d\omega \cdot n_x.$$

Под действием этих напряжений и напряжений на площадке  $ABC$  ( $\sigma_{nx}$ ,  $\sigma_{ny}$ ,  $\sigma_{nz}$ ) бесконечно малый тетраэдр должен находиться в равновесии:

$$\sum x = 0: \sigma_{nx}d\omega - \sigma_{xx}d\omega n_x - \sigma_{yx}d\omega n_y - \sigma_{zx}d\omega n_z + R_x d\tau = 0.$$

Аналогично записываются два других уравнения равновесия. Отбрасывая объемные силы как бесконечно малые более высокого порядка малости, получим

$$\begin{aligned} \sigma_{nx} &= \sigma_{xx}n_x + \sigma_{yx}n_y + \sigma_{zx}n_z, \\ \sigma_{ny} &= \sigma_{xy}n_x + \sigma_{yy}n_y + \sigma_{zy}n_z, \\ \sigma_{nz} &= \sigma_{xz}n_x + \sigma_{yz}n_y + \sigma_{zz}n_z. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Зная проекции вектора напряжений на оси  $x$ ,  $y$  и  $z$ , найдем нормальную составляющую вектора напряжения, возникающего на площадке с нормалью  $\vec{n}$ :

$$\sigma_{nn} = \sigma_{nx}n_x + \sigma_{ny}n_y + \sigma_{nz}n_z = \sigma_{xx}n_x^2 + \sigma_{yy}n_y^2 + \sigma_{zz}n_z^2 + 2(\sigma_{xy}n_xn_y + \sigma_{zx}n_zn_x + \sigma_{yz}n_y n_z).$$

Абсолютное значение полного напряжения (длину вектора напряжения) можно вычислить по следующей формуле:

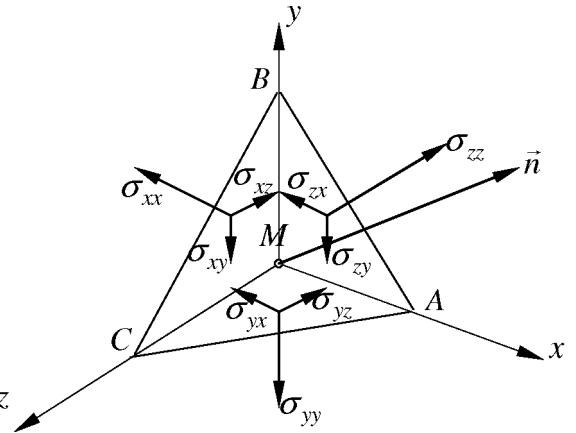


Рисунок 4.10

$$|\vec{\sigma}_n| = \sqrt{\sigma_{nx}^2 + \sigma_{ny}^2 + \sigma_{nz}^2}.$$

Касательная составляющая  $\tau_n$  полного напряжения может быть найдена как

$$\tau_n = \sqrt{|\vec{\sigma}_n|^2 - \sigma_{nn}^2},$$

или

$$\tau_n = \sqrt{\sigma_{nx}^2 + \sigma_{ny}^2 + \sigma_{nz}^2 - \sigma_{nn}^2}.$$

Введем матричное обозначение

$$[\sigma_n] = \begin{bmatrix} \sigma_{nx} \\ \sigma_{ny} \\ \sigma_{nz} \end{bmatrix},$$

тогда вместо (4.2) запишем

$$[\sigma_n] = [\sigma_x]n_x + [\sigma_y]n_y + [\sigma_z]n_z. \quad (4.2a)$$

Если еще ввести обозначения

$$[n] = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix}, \quad [T] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{zy} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix},$$

то будем иметь

$$[\sigma_n] = [T][n].$$

Пусть теперь наклонная площадка совпадает с границей поверхности тела. В этом случае

$$\sigma_{nx} = p_x, \quad \sigma_{ny} = p_y, \quad \sigma_{nz} = p_z.$$

Таким образом, вместо компонент напряжения  $\sigma_n$  в формулах (4.2) будут фигурировать компоненты поверхностных сил:

$$\begin{aligned} p_x &= \sigma_{xx}n_x + \sigma_{yx}n_y + \sigma_{zx}n_z, \\ p_y &= \sigma_{xy}n_x + \sigma_{yy}n_y + \sigma_{zy}n_z, \\ p_z &= \sigma_{xz}n_x + \sigma_{yz}n_y + \sigma_{zz}n_z. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Соотношения (4.3) представляют собой статические граничные условия, которым должны удовлетворять напряжения на поверхности тела.

Если ввести обозначение

$$[p] = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix},$$

то формулы (4.3) примут вид

$$[p] = [\sigma_x]n_x + [\sigma_y]n_y + [\sigma_z]n_z. \quad (4.3a)$$

#### 4.5 Главные напряжения. Инварианты тензора напряжений

Из бесчисленного множества наклонных площадок, которые можно мысленно провести через исследуемую точку тела, будем считать главными те, на которых касательное напряжение отсутствует, т.е.  $\tau_n = 0$ . Таким образом, полное напряжение и нормальное напряжение для главной площадки совпадают по величине и по направлению.

Из этого условия определим главные напряжения и положения площадок, на которых они действуют.

Предположим, что нам известно положение одной из главных площадок с напряжением  $\sigma$  (рисунок 4.11). Для нее справедливо равенство

$$[\sigma_n] = [T][n], \quad (4.4)$$

где

$$[\sigma_n] = \begin{bmatrix} \sigma_{nx} \\ \sigma_{ny} \\ \sigma_{nz} \end{bmatrix}, \quad [n] = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix}, \quad [T] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{zy} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}.$$

С другой стороны, так как площадка с нормалью  $\vec{n}$  главная, то

$$\begin{aligned} \sigma_{nx} &= \sigma n_x; \\ \sigma_{ny} &= \sigma n_y; \\ \sigma_{nz} &= \sigma n_z, \end{aligned}$$

т.е.

$$[\sigma_n] = \sigma[n] = \sigma[E_3][n], \quad (4.5)$$

где  $[E_3]$  – единичная матрица:

$$[E_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

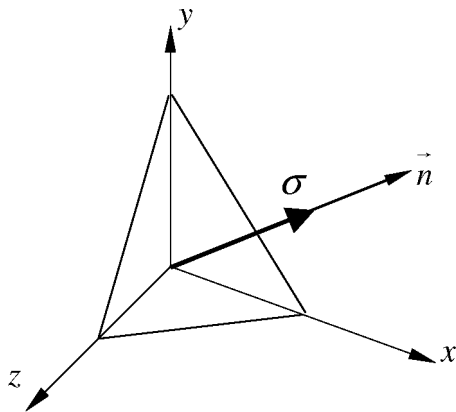


Рисунок 4.11

В этих формулах  $\sigma$  – искомое главное напряжение. Приравняв (4.4) и (4.5), получим

$$\begin{aligned}\sigma[E_3][n] &= [T][n]; \\ [T][n] - \sigma[E_3][n] &= [0]; \\ ([T] - \sigma[E_3])[n] &= [0].\end{aligned}$$

Выражение в скобках обозначим как

$$[B] = [T] - \sigma[E_3].$$

Тогда

$$[B][n] = [0]. \quad (4.6)$$

Это – однородная система линейных алгебраических уравнений относительно направляющих косинусов. Тривиальное решение  $[n] = [0]$  не имеет физического смысла (так как направляющие косинусы одновременно не могут быть равны нулю). Направляющие косинусы связаны между собой соотношением

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1. \quad (4.7)$$

Нетривиальное решение системы (4.6) возможно, если определитель матрицы коэффициентов системы равен нулю:

$$\begin{vmatrix} \sigma_{xx} - \sigma & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} - \sigma & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} - \sigma \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрыв определитель, получим кубическое уравнение

$$\sigma^3 - J_1\sigma^2 + J_2\sigma - J_3 = 0, \quad (4.8)$$

где

$$\begin{aligned}J_1 &= \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}, \\ J_2 &= \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{yy} & \sigma_{zy} \\ \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{vmatrix}, \\ J_3 &= \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{vmatrix}.\end{aligned}$$



Здесь  $J_1, J_2, J_3$  – так называемые инварианты тензора напряжений.

Можно доказать, что благодаря симметрии тензора напряжений уравнение (4.8) имеет три действительных корня. Будем их обозначать следующим образом:  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ .

Напряженное состояние не зависит от выбора системы координат. Следовательно,  $\sigma_1, \sigma_2$  и  $\sigma_3$  также не будут зависеть от системы координат. Это означает, что коэффициенты уравнения  $J_1, J_2$  и  $J_3$  инварианты по отношению к преобразованию координат.

Через напряжения в главных площадках инварианты выражаются по формулам:

$$\begin{aligned} J_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \\ J_2 &= \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1, \\ J_3 &= \sigma_1\sigma_2\sigma_3. \end{aligned}$$

Если  $J_3 \neq 0$ , то уравнение (4.8) имеет три ненулевых корня. Такое напряженное состояние называется объемным.

Если  $J_3 = 0$ , а  $J_2 \neq 0$ , то уравнение (4.8) приобретает вид

$$\sigma(\sigma^2 - J_1\sigma + J_2) = 0.$$

И одно из главных напряжений будет нулевым. Это так называемое плоское напряженное состояние.

Если  $J_3 = 0, J_2 = 0$ , то уравнение (4.8) запишется следующим образом:

$$\sigma^2(\sigma - J_1) = 0.$$

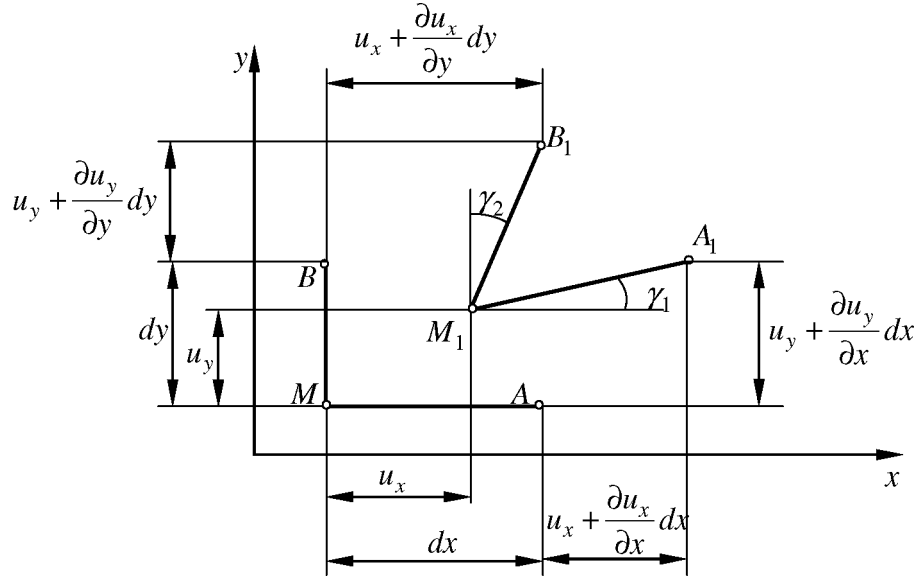
В этом случае два главных напряжения равны нулю – это одноосное (или линейное) напряженное состояние.

#### **4.6 Соотношения между деформациями и перемещениями (соотношения Коши)**

Рассмотрим бесконечно малый параллелепипед с ребрами  $dx, dy$  и  $dz$ , выделенный из сплошного тела около заданной точки  $M$  плоскостями, параллельными координатным осям. При деформации тела изменятся длины его ребер и искажутся первоначально прямые углы между ними.

Рассмотрим перемещения точки  $M$  и соседних с ней точек в проекции на плоскость  $xOy$  (рисунок 4.12). Точки имеют следующие координаты:

$$M(x, y, z); \quad A(x + dx, y, z); \quad B(x, y + dy, z).$$



**Рисунок 4.12**

Перемещения точки  $M$  обозначим через  $u_x, u_y, u_z$ . Точка  $A$ , отстоящая от точки  $M$  на бесконечно малом расстоянии  $dx$ , получит перемещение, составляющие которого будут отличаться от составляющих перемещения точки  $M$  на бесконечно малую величину за счет изменения координаты  $x$ :

$$u_x^A = u_x(x + dx, y, z) = u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx;$$

$$u_y^A = u_y(x + dx, y, z) = u_y + \frac{\partial u_y}{\partial x} dx.$$

Аналогично для точки  $B$  можно записать

$$u_x^B = u_x(x, y + dy, z) = u_x + \frac{\partial u_x}{\partial y} dy;$$

$$u_y^B = u_y(x, y + dy, z) = u_y + \frac{\partial u_y}{\partial y} dy.$$

В силу малости угла  $\gamma_1$  за длину ребра  $M_1A_1$  можно принять его проекцию на ось  $x$ . Тогда относительное удлинение вдоль оси  $x$  будет равно

$$\epsilon_{xx} = \frac{M_1A_1 - MA}{MA} \approx \frac{u_x^A - u_x}{dx} = \frac{u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx - u_x}{dx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}.$$

Аналогично находятся относительные удлинения вдоль осей  $y$  и  $z$ . Таким образом, для линейных деформаций получим

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}; \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}; \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}. \quad (4.9)$$

Сдвиговая деформация  $\varepsilon_{xy}$  может быть записана как

$$\varepsilon_{xy} = \gamma_1 + \gamma_2.$$

В силу малости углов поворота

$$\gamma_1 \approx \operatorname{tg} \gamma_1 = \frac{u_y^A - u_y}{dx} = \frac{u_y + \frac{\partial u_y}{\partial x} dx - u_y}{dx} = \frac{\partial u_y}{\partial x},$$

$$\gamma_2 \approx \operatorname{tg} \gamma_2 = \frac{u_x^B - u_x}{dy} = \frac{u_x + \frac{\partial u_x}{\partial y} dy - u_x}{dy} = \frac{\partial u_x}{\partial y}.$$

Тогда

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}; \quad \varepsilon_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}; \quad \varepsilon_{zx} = \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}. \quad (4.10)$$

Формулы (4.9) и (4.10) называются геометрическими соотношениями Коши. Их можно представить одним матричным равенством

$$[\varepsilon] = [L][u], \quad (4.11)$$

связывающим матрицы-столбцы деформаций  $[\varepsilon] = \{\varepsilon_{xx} \ \varepsilon_{yy} \ \varepsilon_{zz} \ \varepsilon_{xy} \ \varepsilon_{yz} \ \varepsilon_{zx}\}$  и перемещения  $[u] = \{u_x \ u_y \ u_z\}$ .

Через  $[L]$  в (4.11) обозначен матричный дифференциальный оператор вида

$$[L] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}.$$

## 4.7 Уравнения совместности деформаций

Изучая деформацию тела, мы вырезали из него элементарные параллелепипеды и рассматривали их деформирование. Очевидно, что деформации смежных элементов не могут быть какими угодно, они должны быть увязаны между собой. Тело, сплошное до деформации, должно оставаться сплошным и после деформации. Представим себе тело расчлененным тремя системами взаимно перпендикулярных плоскостей на элементарные параллелепипеды (рисунок 4.13).

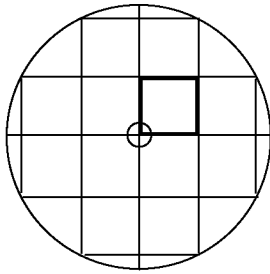


Рисунок 4.13

Ребра смежных элементов должны удлиняться одинаково. Углы могут также меняться, но сумма углов четырех смежных элементов должна равняться  $360^\circ$ . То есть между деформациями должны быть какие-то зависимости.

Рассуждая по-другому, можно также прийти к этому выводу. Так, перемещения любой точки сплошного тела определяется тремя функциями  $u_x$ ,  $u_y$  и  $u_z$ ; деформации же данной точки определяются шестью функциями  $\epsilon_{xx}$ ,  $\epsilon_{yy}$ ,  $\epsilon_{zz}$ ,  $\epsilon_{xy}$ ,  $\epsilon_{yz}$  и  $\epsilon_{zx}$ . Соотношения Коши показывают, что если заданы три функции перемещений, то этим определяются все шесть составляющих деформаций. Таким образом, все шесть функций для компонент деформаций произвольно задать нельзя, между ними должны существовать какие-то зависимости. Чтобы их получить, необходимо исключить перемещения из соотношений Коши.

Продифференцируем дважды по  $y$  первое и по  $x$  второе соотношения в формулах (4.9):

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u_x}{\partial x \partial y^2}; \quad \frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 u_y}{\partial y \partial x^2}.$$

Затем сложим их:

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \underbrace{\left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)}_{\epsilon_{xy}}.$$

Таким образом, приходим к соотношению

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \epsilon_{xy}}{\partial x \partial y}.$$

Выполнив круговую подстановку индексов, можно получить еще два аналогичных уравнения.

Для получения еще трех уравнений продифференцируем по недостающему индексу соотношения (4.10):

$$\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} = \frac{\partial^2 u_x}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z \partial x};$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} = \frac{\partial^2 u_y}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y \partial x};$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} = \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z \partial y}.$$

Из первого уравнения вычтем второе и прибавим третье. Результат продифференцируем по  $x$ :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( 2 \frac{\partial^2 u_x}{\partial y \partial z} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z}.$$

С помощью круговой подстановки можно записать еще два уравнения.

В итоге получим следующие шесть уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y}; & \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z}, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial y \partial z}; & \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z \partial x}, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{zx}}{\partial z \partial x}; & \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

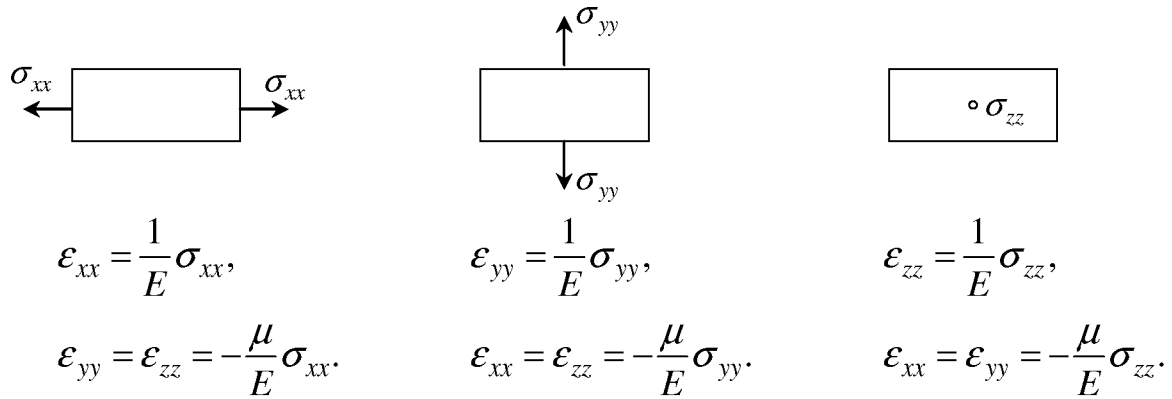
Они называются уравнениями совместности или неразрывности деформаций Сен-Венана.

Уравнения совместности играют важную роль в теории упругости. С их помощью можно раскрыть статическую неопределимость задачи теории упругости.

#### 4.8 Закон Гука для трехосного напряженного состояния

Для совместного рассмотрения теории напряжений и теории деформаций необходимо установить зависимости между напряжениями и деформациями, которые называются физическими, так как определяются физическими свойствами материалов.

Используемые при построении теории упругости гипотезы позволяют применять принцип независимости действия сил и элементарные законы (при одноосном растяжении и сдвиге) для вычисления деформаций в любом направлении внутри рассматриваемого параллелепипеда (рисунок 4.14).



**Рисунок 4.14**

Связь между сдвиговыми деформациями и касательными напряжениями можно представить независимо для каждой из трех плоскостей.

Таким образом, на основании принципа независимости действия сил находим полные деформации при совместном действии всех напряжений:

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{xx} &= \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \mu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})]; & \epsilon_{xy} &= \frac{1}{G} \sigma_{xy}; \\
 \epsilon_{yy} &= \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \mu(\sigma_{zz} + \sigma_{xx})]; & \epsilon_{yz} &= \frac{1}{G} \sigma_{yz}; \\
 \epsilon_{zz} &= \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \mu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})]; & \epsilon_{zx} &= \frac{1}{G} \sigma_{zx},
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

где  $E$  – модуль упругости;  $G$  – модуль сдвига;  $\mu$  – коэффициент Пуассона.

Упругие постоянные материала связаны между собой равенством

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}.$$

Формулы (4.13) представляют собой закон Гука для изотропного тела, т.е. тела, обладающего во всех направлениях одинаковыми упругими свойствами.

Вводя матрицы-столбцы напряжений и деформаций

$$\begin{aligned}
 [\sigma] &= \{\sigma_{xx} \ \sigma_{yy} \ \sigma_{zz} \ \sigma_{xy} \ \sigma_{yz} \ \sigma_{zx}\}; \\
 [\epsilon] &= \{\epsilon_{xx} \ \epsilon_{yy} \ \epsilon_{zz} \ \epsilon_{xy} \ \epsilon_{yz} \ \epsilon_{zx}\},
 \end{aligned}$$

закон Гука (4.13) можно представить в матричном виде

$$[\varepsilon] = [\Phi][\sigma], \quad (4.14)$$

где

$$[\Phi] = \frac{1}{E} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\mu & -\mu & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & 1 & -\mu & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & -\mu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) \end{array} \right].$$

Разрешая это матричное уравнение относительно напряжений, можно записать

$$[\sigma] = [\kappa][\varepsilon], \quad (4.15)$$

где  $[\kappa] = [\Phi]^{-1}$ .

Получим явное выражение для матрицы  $[\kappa]$ . Для этого сложим первые три соотношения закона Гука:

$$\underbrace{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}}_{\theta} = \frac{1}{E} \underbrace{(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})}_{J_1} (1 - 2\mu),$$

$$\theta = \frac{(1 - 2\mu)}{E} J_1 \Rightarrow J_1 = \frac{E}{(1 - 2\mu)} \theta.$$

Перепишем первое соотношение закона Гука, прибавляя и вычитая  $\mu\sigma_{xx}$ :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} \left( (1 + \mu)\sigma_{xx} - \mu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \right) = \frac{1 + \mu}{E} \sigma_{xx} - \frac{\mu}{E} J_1.,$$

Отсюда

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1 + \mu}{E} \sigma_{xx} - \frac{\mu}{1 - 2\mu} \theta.$$

Так как  $\frac{1 + \mu}{E} = \frac{1}{2G}$ , окончательно получим закон Гука в форме Ламе:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 2G\varepsilon_{xx} + \lambda\theta; & \sigma_{xy} &= G\varepsilon_{xy}; \\ \sigma_{yy} &= 2G\varepsilon_{yy} + \lambda\theta; & \sigma_{yz} &= G\varepsilon_{yz}; \\ \sigma_{zz} &= 2G\varepsilon_{zz} + \lambda\theta; & \sigma_{zx} &= G\varepsilon_{zx}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Здесь  $\lambda = \frac{2G\mu}{1-2\mu}$ .

Перепишав эти равенства в виде:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= 2G\varepsilon_{xx} + \frac{2G\mu}{1-2\mu}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) = \frac{2G\mu}{1-2\mu}((1-2\mu)\varepsilon_{xx} + \mu(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})) = \\ &= \frac{2G\mu}{1-2\mu}((1-\mu)\varepsilon_{xx} + \mu(\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})); \\ \sigma_{xy} &= G\varepsilon_{xy} = \frac{2G}{1-2\mu} \frac{1-2\mu}{2} \varepsilon_{xy}.\end{aligned}$$

Приходим к выражению (4.15), в котором

$$[\kappa] = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{bmatrix} 1-\mu & \mu & \mu & 0 & 0 & 0 \\ \mu & 1-\mu & \mu & 0 & 0 & 0 \\ \mu & \mu & 1-\mu & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2} \end{bmatrix}.$$

#### 4.9 Схемы решения задач теории упругости

Совокупность дифференциальных уравнений равновесия (4.1), геометрических (4.11) и физических (4.14) или (4.15) соотношений образуют систему из 15 уравнений, в которые входят шесть компонент напряжений, шесть компонент деформаций и три компоненты перемещения. Таким образом, получается замкнутая система уравнений:

$$\frac{\partial[\sigma_x]}{\partial x} + \frac{\partial[\sigma_y]}{\partial y} + \frac{\partial[\sigma_z]}{\partial z} + [R] = 0;$$

$$[\varepsilon] = [L][u];$$

$$[\sigma] = [\kappa][\varepsilon].$$

К этим соотношениям необходимо присоединить граничные условия. Обозначим через  $\omega_p$  и  $\omega_u$  части поверхности тела  $\omega$ , где заданы значения поверхностных сил и перемещений соответственно. Тогда на  $\omega_p$  должны удовлетворяться статические граничные условия (4.2)



$$[p] = [\sigma_x]n_x + [\sigma_y]n_y + [\sigma_z]n_z,$$

а на  $\omega_u$  – геометрические (или кинематические) граничные условия:

$$u_x = u_{x0}; \quad u_y = u_{y0}; \quad u_z = u_{z0}, \quad (4.17)$$

где  $u_{x0}, u_{y0}, u_{z0}$  – заданные значения перемещений.

Решение задачи теории упругости можно искать либо «в перемещениях», либо «в напряжениях». В первом случае за основные неизвестные функции принимают перемещения  $u_x(x, y, z)$ ,  $u_y(x, y, z)$ ,  $u_z(x, y, z)$ , а систему уравнений теории упругости сводят к трем уравнениям относительно этих функций. Для этого напряжения в дифференциальных уравнениях равновесия (4.1) выражают по закону Гука (4.15) через деформации, а последние по формулам Коши (4.11) – через перемещения. Статические граничные условия (4.2) здесь также следует записать через перемещения.

Другой подход заключается в том, что за основные неизвестные функции принимают напряжения. Для их отыскания следует в первую очередь использовать дифференциальные уравнения равновесия (4.1). К ним для раскрытия статической неопределенности присоединяют условия совместности деформаций (4.12). Чтобы можно было ими воспользоваться, нужно выразить в них по закону Гука (4.14) деформации через напряжения.

#### 4.10 Решение задачи теории упругости в перемещениях

Уравнения упругого равновесия в перемещениях получим путем исключения компонент тензора напряжений из уравнений равновесия, используя закон Гука.

Запишем первое из уравнений равновесия:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} + R_x = 0.$$

Согласно закону Гука в форме Ламе:

$$\sigma_{xx} = 2G\varepsilon_{xx} + \lambda\theta; \quad \sigma_{yx} = G\varepsilon_{yx}; \quad \sigma_{zx} = G\varepsilon_{zx}.$$

Воспользуемся далее соотношениями Коши и выражением для объемной деформации:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}; \quad \varepsilon_{yx} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}; \quad \varepsilon_{zx} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x};$$

$$\theta = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}.$$

Тогда получим

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= 2G \frac{\partial u_x}{\partial x} + \lambda \theta; \\ \sigma_{yx} &= G \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right); \\ \sigma_{zx} &= G \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right).\end{aligned}$$

Подставим данные выражения в уравнение равновесия:

$$\begin{aligned}2G \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} + G \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial z} \right) + R_x &= 0; \\ G \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) + G \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} + R_x &= 0.\end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (\text{оператор Лапласа})$$

и

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) = \frac{\partial \theta}{\partial x},$$

получим так называемые уравнения Ляме:

$$\begin{aligned}G \nabla^2 u_x + (G + \lambda) \frac{\partial \theta}{\partial x} + R_x &= 0; \\ G \nabla^2 u_y + (G + \lambda) \frac{\partial \theta}{\partial y} + R_y &= 0; \\ G \nabla^2 u_z + (G + \lambda) \frac{\partial \theta}{\partial z} + R_z &= 0.\end{aligned} \tag{4.18}$$

Если задача решена и найдены перемещения  $u_x$ ,  $u_y$  и  $u_z$ , то с помощью соотношений Коши можно найти деформации, а по известным деформациям с помощью закона Гука можно найти напряжения.

Запишем уравнения Ламе в матричной формулировке, преобразовав их следующим образом:

$$G + \lambda = G + \frac{2G\mu}{1-2\mu} = \frac{G - 2G\mu + 2G\mu}{1-2\mu} = \frac{G}{1-2\mu};$$

$$G\nabla^2 u_x + \frac{G}{1-2\mu} \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial z} \right) + R_x = 0;$$

$$\frac{G}{1-2\mu} \left( (1-2\mu)\nabla^2 u_x + \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial z} \right) + R_x = 0.$$

Введем матрицу-столбец  $[u] = \{u_x \ u_y \ u_z\}$ .

Тогда уравнения Ламе можно переписать в матричном виде

$$\underbrace{\frac{G}{1-2\mu} \begin{bmatrix} (1-2\mu)\nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} & (1-2\mu)\nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} & \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2}{\partial z \partial y} & (1-2\mu)\nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{bmatrix}}_{[L_1]} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} + [R] = 0$$

или

$$[L_1][u] + [R] = 0. \quad (4.19)$$

#### 4.11 Решение задачи теории упругости в напряжениях

Трех уравнений равновесия

$$\frac{\partial[\sigma_x]}{\partial x} + \frac{\partial[\sigma_y]}{\partial y} + \frac{\partial[\sigma_z]}{\partial z} + [R] = 0,$$

недостаточно для определения шести неизвестных функции. Дополнительные уравнения можно получить из условий совместности деформаций путем замены деформаций с помощью закона Гука напряжениями.

Выполняя данные преобразования и используя уравнения равновесия, получим

$$(1+\mu)\nabla^2 \sigma_{xx} + \frac{\partial J_1}{\partial x^2} = -(1+\mu) \left( \frac{\mu}{1-\mu} \left( \frac{\partial R_x}{\partial x} + \frac{\partial R_y}{\partial y} + \frac{\partial R_z}{\partial z} \right) + 2 \frac{\partial R_x}{\partial x} \right),$$

$$(1+\mu)\nabla^2 \sigma_{yy} + \frac{\partial J_1}{\partial y^2} = -(1+\mu) \left( \frac{\mu}{1-\mu} \left( \frac{\partial R_y}{\partial y} + \frac{\partial R_z}{\partial z} + \frac{\partial R_x}{\partial x} \right) + 2 \frac{\partial R_y}{\partial y} \right),$$

$$\begin{aligned}
(1+\mu)\nabla^2\sigma_{zz} + \frac{\partial J_1}{\partial z^2} &= -(1+\mu)\left(\frac{\mu}{1-\mu}\left(\frac{\partial R_z}{\partial z} + \frac{\partial R_x}{\partial x} + \frac{\partial R_y}{\partial y}\right) + 2\frac{\partial R_z}{\partial z}\right), \quad (4.20) \\
(1+\mu)\nabla^2\sigma_{xy} + \frac{\partial J_1}{\partial x\partial y} &= -(1+\mu)\left(\frac{\partial R_x}{\partial y} + \frac{\partial R_y}{\partial x}\right), \\
(1+\mu)\nabla^2\sigma_{yz} + \frac{\partial J_1}{\partial y\partial z} &= -(1+\mu)\left(\frac{\partial R_y}{\partial z} + \frac{\partial R_z}{\partial y}\right), \\
(1+\mu)\nabla^2\sigma_{zx} + \frac{\partial J_1}{\partial z\partial x} &= -(1+\mu)\left(\frac{\partial R_z}{\partial x} + \frac{\partial R_x}{\partial z}\right).
\end{aligned}$$

Данные соотношения называются уравнениями Бельтрами-Мичелла.

Напряжения при этом должны удовлетворять статическим граничным условиям на поверхности (4.2). После определения напряжений можно по закону Гука определить деформации и из геометрических соотношений Коши – перемещения.

Можно доказать теорему о единственности решения задачи теории упругости. Если получено решение задачи, удовлетворяющее всем уравнениям теории упругости, то оно единственное. Следовательно, безразлично, каким путем найдено или угадано решение той или иной задачи. Важно лишь, чтобы не были нарушены никакие соотношения теории упругости.

## 5 ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Задача теории упругости в общем случае приводится к сложной системе дифференциальных уравнений, найти решение которой весьма проблематично. Однако существует широкий класс важных в практическом отношении более простых задач, в которых перемещения, деформации и напряжения зависят лишь от двух координат (например,  $x$  и  $y$ ). Этот класс задач под общим названием «плоская задача теории упругости» подразделяется на плоскую деформацию и обобщенное плоское напряженное состояние.

### 5.1 Плоская деформация

Если в процессе нагружения все точки тела перемещаются только параллельно одной плоскости (плоскости  $xy$ , например), то соответствующее деформированное состояние называется плоской деформацией.

Примером здесь может служить тело, помещенное между двумя абсолютно жесткими плитами, расстояние между которыми остается неизменным, и сжимаемое силами, параллельными плоскостям плит (рисунок 5.1,а).

В таких же условиях работает длинное призматическое или цилиндрическое тело при действии нагрузки, перпендикулярной оси тела и постоянной вдоль нее. Близкими к этому случаю являются задачи о плотине (рисунок 5.1,б), тоннеле метрополитена и т.д.

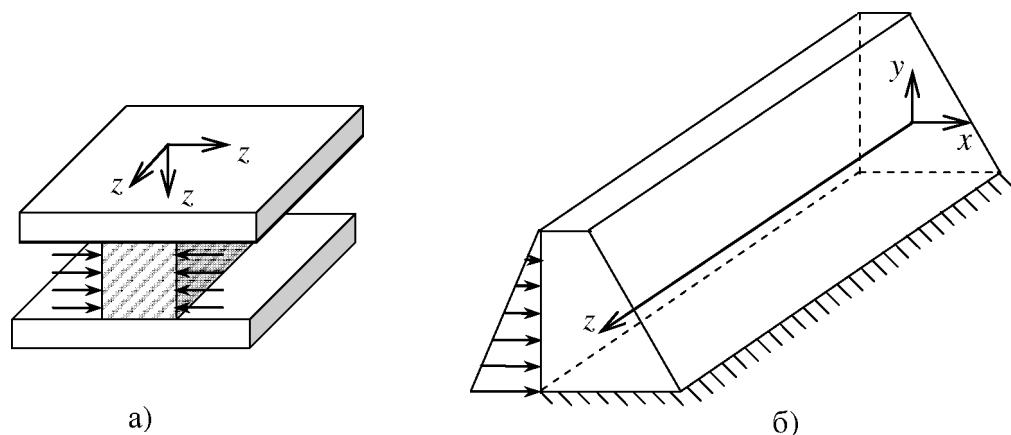


Рисунок 5.1

Таким образом, для плоской деформации имеем

$$u_x = u_x(x, y), u_y = u_y(x, y), u_z = 0.$$

Деформации согласно соотношениям Коши

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} = \varepsilon_{xx}(x, y); & \varepsilon_{xy} &= \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} = \varepsilon_{xy}(x, y); \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial u_y}{\partial y} = \varepsilon_{yy}(x, y); & \varepsilon_{yz} &= \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} = 0; \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0; & \varepsilon_{zx} &= \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} = 0.\end{aligned}$$

На основании закона Гука получим

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \sigma_{xx}(x, y); & \sigma_{yy} &= \sigma_{yy}(x, y); & \sigma_{xy} &= \sigma_{xy}(x, y); \\ \sigma_{yz} &= 0; & \sigma_{zx} &= 0; & \sigma_{zz} &\neq 0.\end{aligned}$$

Отметим, что  $\sigma_{zz}$  самостоятельного значения не имеет, поскольку на основании равенства

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \mu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] = 0$$

вычисляется через два других напряжения по формуле

$$\sigma_{zz} = \mu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}).$$

Таким образом, основными искомыми величинами здесь являются напряжения  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{xy}$ , деформации  $\varepsilon_{xx}$ ,  $\varepsilon_{yy}$ ,  $\varepsilon_{xy}$  и перемещения  $u_x$ ,  $u_y$ .

## 5.2 Обобщенное плоское напряженное состояние

Рассмотрим тонкую пластину, параллельную плоскости  $xu$  и нагруженную объемными и по контуру поверхностными силами, параллельными ее

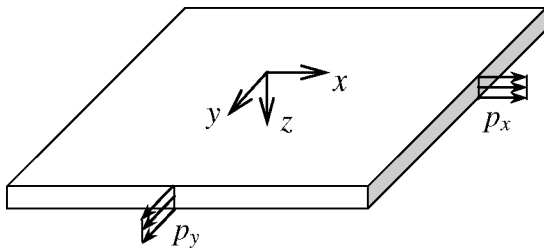


Рисунок 5.2

плоскости и равномерно распределенными по толщине (рисунок 5.2). В этом случае на плоских поверхностях (основаниях) пластины

$$\sigma_{zz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = 0.$$

Если предположить, что толщина пластины исчезающе мала, то эти напряжения будут равны нулю и внутри пластины. Напряжения  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  и  $\sigma_{xy}$  будут постоянны по толщине. Такое напряженное состояние называется плоским напряженным состоянием.

В практических инженерных задачах толщина пластины имеет вполне определенную конечную величину, хотя и малую по сравнению с остальными размерами.

Напряжения  $\sigma_{zz}$ ,  $\sigma_{yz}$  и  $\sigma_{zx}$  могут появиться внутри пластины, но вследствие малой толщины они не смогут достигнуть заметной величины. Мы будем, вследствие этого, пренебрегать данными напряжениями и считать их равными нулю. Напряжения  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  и

$\sigma_{xy}$  могут по толщине немного изменяться. Будем брать их среднее по толщине значение  $\sigma_{xx}^{cp}$ ,  $\sigma_{yy}^{cp}$  и  $\sigma_{xy}^{cp}$  (рисунок 5.3). В дальнейшем индекс «ср» будем опускать. Рассмотренный случай с введенными допущениями будем называть обобщенным плоским напряженным состоянием.

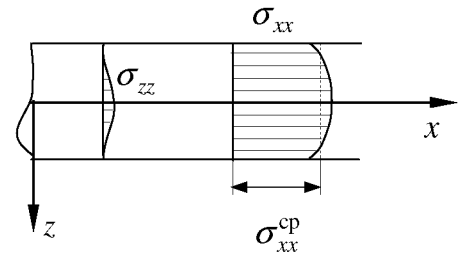


Рисунок 5.3

Таким образом, для обобщенного плоского напряженного состояния имеем

$$\sigma_{zz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = 0; \quad \sigma_{xx} = \sigma_{xx}(x, y); \quad \sigma_{yy} = \sigma_{yy}(x, y); \quad \sigma_{xy} = \sigma_{xy}(x, y).$$

Из закона Гука следует, что при обобщенном плоском напряженном состоянии деформации сдвига

$$\varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zx} = 0.$$

А так как

$$\sigma_{zz} = \frac{2G}{1-2\mu} [\mu(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) + (1-\mu)\varepsilon_{zz}] = 0,$$

имеем также

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\mu}{1-\mu} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}).$$

Следовательно, деформация  $\varepsilon_{zz}$  самостоятельного значения не имеет.

Таким образом, в случае обобщенного плоского напряженного состояния мы имеем дело с теми же неизвестными, что и в случае плоской деформации.

### 5.3 Основные соотношения плоской задачи

Выпишем основные уравнения теории упругости применительно к плоской задаче. Из трех дифференциальных уравнений равновесия остается два. В матричной записи они имеют вид

$$\frac{\partial[\sigma_x]}{\partial x} + \frac{\partial[\sigma_y]}{\partial y} + [R] = 0, \quad (5.1)$$

где  $[\sigma_x] = \{\sigma_{xx} \sigma_{xy}\}$ ;  $[\sigma_y] = \{\sigma_{yx} \sigma_{yy}\}$ ;  $[R] = \{R_x R_y\}$ .

Для напряжений в наклонных площадках имеем

$$\sigma_{nx} = \sigma_{xx}n_x + \sigma_{yx}n_y; \quad \sigma_{ny} = \sigma_{xy}n_x + \sigma_{yy}n_y. \quad (5.2)$$

Матричная запись статических граничных условий будет иметь вид

$$[p] = [\sigma_x]n_x + [\sigma_y]n_y, \quad (5.3)$$

где  $[p] = \{p_x p_y\}$ .

Из уравнений Коши остается только три соотношения:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}; \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}; \quad \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}. \quad (5.4)$$

Наибольшие упрощения получаются в условиях совместности деформаций, из которых остается только одно уравнение:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (5.5)$$

Для плоской деформации остальные уравнения удовлетворяются тождественно, для обобщенного напряженного состояния – приближенно.

Рассмотрим физические соотношения.

а). Закон Гука для обобщенного плоского напряженного состояния.

В силу того что  $\sigma_{zz} = \sigma_{zx} = \sigma_{zy} = 0$ , закон Гука можно записать как

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \mu\sigma_{yy}); \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E}(\sigma_{yy} - \mu\sigma_{xx}); \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{2(1+\mu)}{E}\sigma_{xy}. \end{aligned}$$



Введем обозначения  $[\sigma] = \{\sigma_{xx} \ \sigma_{yy} \ \sigma_{xy}\}$ ,  $[\varepsilon] = \{\varepsilon_{xx} \ \varepsilon_{yy} \ \varepsilon_{xy}\}$  и запишем закон Гука в матричном виде:

$$[\varepsilon] = [\Phi][\sigma],$$

где

$$[\Phi] = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\mu & 0 \\ -\mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\mu) \end{bmatrix}. \quad (5.6)$$

Закон Гука в обратной форме:

$$[\sigma] = [\kappa][\varepsilon],$$

где  $[\kappa] = [\Phi]^{-1}$ .

Для явного вычисления матрицы  $[\kappa]$  запишем следующие равенства:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \mu\sigma_{yy}); \\ \mu\varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E}(\sigma_{yy}\mu - \mu^2\sigma_{xx}). \end{aligned}$$

Сложим их:

$$\varepsilon_{xx} + \mu\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}(1 - \mu^2)\sigma_{xx}.$$

Отсюда можно выразить напряжение  $\sigma_{xx}$ :

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1 - \mu^2}(\varepsilon_{xx} + \mu\varepsilon_{yy}).$$

Аналогично можно найти напряжение  $\sigma_{yy}$ :

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{1 - \mu^2}(\varepsilon_{yy} + \mu\varepsilon_{xx}).$$

Тогда

$$[\kappa] = \frac{E}{1 - \mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \mu}{2} \end{bmatrix}. \quad (5.7)$$

б). Закон Гука для плоской деформации.

По закону Гука

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} \left[ \sigma_{xx} - \mu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \right],$$

но для плоской деформации

$$\sigma_{zz} = \mu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}).$$

Поэтому

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} \left[ \sigma_{xx} - \mu\sigma_{yy} - \mu^2(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \right] = \frac{1}{E} \left[ \sigma_{xx}(1 - \mu^2) - \mu\sigma_{yy}(1 + \mu) \right].$$

Окончательно имеем равенства

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1 + \mu}{E} \left[ (1 - \mu)\sigma_{xx} - \mu\sigma_{yy} \right]; \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1 + \mu}{E} \left[ -\mu\sigma_{xx} + (1 - \mu)\sigma_{yy} \right]; \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{2(1 + \mu)}{E} \sigma_{xy}. \end{aligned}$$

Тогда матрица  $[\Phi]$  запишется как

$$[\Phi] = \frac{1 + \mu}{E} \begin{bmatrix} 1 - \mu & -\mu & 0 \\ -\mu & 1 - \mu & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \quad (5.8)$$

Если ввести обозначения

$$E' = \frac{E}{1 - \mu^2}; \quad \mu' = \frac{\mu}{1 - \mu},$$

то закон Гука можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E'} \left[ \sigma_{xx} - \mu'\sigma_{yy} \right]; \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E'} \left[ \sigma_{yy} - \mu'\sigma_{xx} \right]; \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{2(1 + \mu')}{E'} \sigma_{xy}, \end{aligned}$$

причем

$$\frac{1 + \mu'}{E'} = \frac{\left(1 + \frac{\mu}{1 - \mu}\right)1 - \mu^2}{E} = \frac{\left(\frac{1 - \mu + \mu}{1 - \mu}\right)1 - \mu^2}{E} = \frac{1 + \mu}{E}.$$

Эта запись совпадает с законом Гука для плоского напряженного состояния с учетом замены  $E$  на  $E'$ ,  $\mu$  на  $\mu'$ .

Таким образом, матрицы  $[\kappa]$  и  $[\Phi]$  для плоской деформации можно получить из аналогичных матриц для обобщенного плоского напряженного состояния путем формальной замены  $E$  на  $E'$  и  $\mu$  на  $\mu'$ :

$$[\kappa] = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{bmatrix} 1-\mu & \mu & 0 \\ \mu & 1-\mu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2} \end{bmatrix}. \quad (5.9)$$

#### 5.4 Решение плоской задачи теории упругости в напряжениях

Решение плоской задачи теории упругости удобно выполнять в напряжениях. Для отыскания трех функций  $\sigma_{xx}(x, y)$ ,  $\sigma_{yy}(x, y)$  и  $\sigma_{xy}(x, y)$  мы имеем два дифференциальных уравнения равновесия

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + R_x &= 0; \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + R_y &= 0. \end{aligned}$$

Для раскрытия статической неопределимости к ним необходимо добавить уравнение совместности деформаций

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y},$$

в котором деформации следует выразить по закону Гука через напряжения. Рассмотрим случай обобщенного плоского напряженного состояния:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \mu \sigma_{yy}]; \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \mu \sigma_{xx}]; \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{2(1+\mu)}{E} \sigma_{xy}. \end{aligned}$$

Продифференцируем первые два соотношения дважды по  $x$  и  $y$ .

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} = \frac{1}{E} \left[ \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial y^2} - \mu \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y^2} \right];$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{1}{E} \left[ \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x^2} \right].$$

Для получения уравнения совместности, содержащего только нормальные напряжения, поступим следующим образом:

$$\frac{\partial \varepsilon_{yx}}{\partial y} = \frac{2(1+\mu)}{E} \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y}; \quad \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial x} = \frac{2(1+\mu)}{E} \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x}.$$

Но из уравнений равновесия имеем

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} = -\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} - R_x; \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} = -\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} - R_y.$$

Подставим последние два равенства в выражения для первых производных сдвиговых деформаций:

$$\frac{\partial \varepsilon_{yx}}{\partial y} = -\frac{2(1+\mu)}{E} \left( \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + R_y \right);$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial x} = -\frac{2(1+\mu)}{E} \left( \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + R_x \right).$$

Далее вычислим смешанные производные от каждого из этих выражений:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{yx}}{\partial x \partial y} = -\frac{2(1+\mu)}{E} \left( \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2} + \frac{\partial R_y}{\partial y} \right);$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial y \partial x} = -\frac{2(1+\mu)}{E} \left( \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial R_x}{\partial x} \right).$$

Просуммируем их и разделим результат на два:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial y \partial x} = -\frac{(1+\mu)}{E} \left( \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2} \right) - \frac{(1+\mu)}{E} \left( \frac{\partial R_x}{\partial x} + \frac{\partial R_y}{\partial y} \right).$$

Подставим теперь полученные соотношения в уравнение совместности деформаций. Опустив множитель  $1/E$ , будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial y^2} - \mu \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} + (1 + \mu) \left( \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2} \right) = \\ = -(1 + \mu) \left( \frac{\partial R_x}{\partial x} + \frac{\partial R_y}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = -(1 + \mu) \left( \frac{\partial R_x}{\partial x} + \frac{\partial R_y}{\partial y} \right); \\ \nabla^2 (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = -(1 + \mu) \left( \frac{\partial R_x}{\partial x} + \frac{\partial R_y}{\partial y} \right), \end{aligned} \quad (5.10)$$

где  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  – оператор Лапласа.

Для плоской деформации в уравнении (5.10) следует заменить  $\mu$  на  $\frac{\mu}{1 - \mu}$ .

В итоге имеем три уравнения с тремя неизвестными:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + R_x &= 0; \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + R_y &= 0; \\ \nabla^2 (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) &= -(1 + \mu) \left( \frac{\partial R_x}{\partial x} + \frac{\partial R_y}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (5.11)$$

При этом должны удовлетворяться условия на контуре пластины (т.е. граничные условия).

## 5.5 Понятие о функции напряжений

При решении плоской задачи теории упругости в напряжениях необходимо найти три функции  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  и  $\sigma_{xy}$ , удовлетворяющие трем дифференциальным уравнениям (5.11) и граничным условиям.

Будем предполагать, что объемные силы  $R_x$  и  $R_y$  являются постоянными или отсутствуют. Уравнение совместности деформаций примет вид

$$\nabla^2 (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 0. \quad (5.12)$$

Если мы выразим напряжения через некоторую функцию  $\varphi(x, y)$  следующим образом:

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - R_x y - R_y x, \quad (5.13)$$

то два дифференциальных уравнения равновесия будут удовлетворяться тождественно.

Подстановка же соотношений (5.13) в уравнение (5.12) дает

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi = 0 \quad (5.14)$$

или

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0.$$

Таким образом, решение плоской задачи теории упругости сводится к отысканию одной функции  $\varphi$ , удовлетворяющей бигармоническому уравнению (5.14) и граничным условиям на контуре (боковой поверхности).

Функция  $\varphi$  называется функцией напряжений (или функцией Эри).

## 5.6 Решение плоской задачи теории упругости в полиномах

Решение плоской задачи в полиномах является примером решения обратной задачи. Будем предполагать, что объемные силы отсутствуют, т.е.  $R_x = R_y = 0$ . Задача сводится к отысканию функции Эри, удовлетворяющей дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0; \quad (5.15)$$

при этом напряжения вычисляются по формулам

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}.$$

Будем решение дифференциального уравнения (5.15) искать в виде полиномиальных функций от  $x$ ,  $y$ :

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 + \dots,$$

где

$$\varphi_0 = A_0;$$

$$\varphi_1 = A_1 x + B_1 y;$$

$$\varphi_2 = A_2 x^2 + B_2 xy + C_2 y^2;$$

$$\varphi_3 = A_3 x^3 + B_3 x^2 y + C_3 xy^2 + D_3 y^3;$$

$$\varphi_4 = A_4 x^4 + B_4 x^3 y + C_4 x^2 y^2 + D_4 xy^3 + E_4 y^4 \text{ и т.д.}$$

Полиномы  $\varphi_0$ ,  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  и  $\varphi_3$  удовлетворяют бигармоническому уравнению тождественно. Функции  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$  не представляют интереса, так как напряжения, соответствующие им оказываются равными нулю.

Рассмотрим полином  $\varphi_4$ .

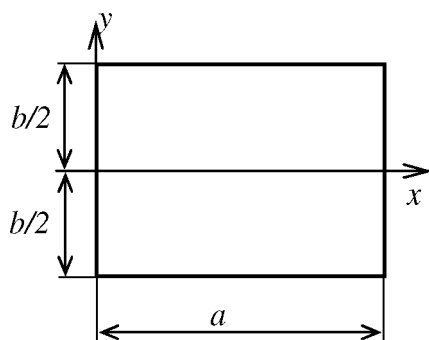
$$\frac{\partial^4 \varphi_4}{\partial x^4} = 24A_4; \quad \frac{\partial^4 \varphi_4}{\partial y^4} = 24E_4; \quad \frac{\partial^4 \varphi_4}{\partial x^2 \partial y^2} = 4C_4.$$

Следовательно, после подстановки в бигармоническое уравнение получим равенство

$$24A_4 + 8C_4 + 24E_4 = 0; \quad E_4 = -\left(A_4 + \frac{1}{3}C_4\right).$$

Четыре постоянные  $A_4, B_4, C_4$  и  $D_4$  здесь могут быть выбраны произвольно, а  $E_4$  выражается через них. Подобные соотношения можно установить и для коэффициентов полиномов более высоких степеней.

Подобрать функцию  $\varphi$  в той или иной задаче бывает не легко. Поэтому, как правило, сначала решают обратную задачу. Задаваясь отдельными полиномиальными членами, можно найти напряжения, а затем из статических граничных условий выяснить, каким внешним нагрузкам соответствует это решение.



**Рисунок 5.4**

Например, рассмотрим прямоугольную пластину (рисунок 5.4). Запишем для нее статические граничные условия:

$$p_x = \sigma_{xx}n_x + \sigma_{yx}n_y,$$

$$p_y = \sigma_{xy}n_x + \sigma_{yy}n_y.$$

При  $x=0$  ( $n_x = -1, n_y = 0$ ):

$$p_x = -\sigma_{xx}; \quad p_y = -\sigma_{xy}.$$

При  $x=a$  ( $n_x = 1, n_y = 0$ ):  $p_x = \sigma_{xx}; \quad p_y = \sigma_{xy}.$

При  $y=-b/2$  ( $n_x = 0, n_y = -1$ ):  $p_x = -\sigma_{yx}; \quad p_y = -\sigma_{yy}.$

При  $y=b/2$  ( $n_x = 0, n_y = 1$ ):  $p_x = \sigma_{yx}; \quad p_y = \sigma_{yy}.$

Различные полиномиальные функции и соответствующие им условия нагружения пластины представлены на рисунке 5.5.

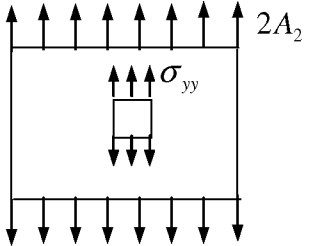
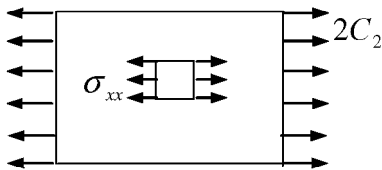
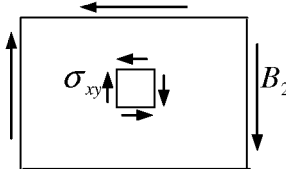
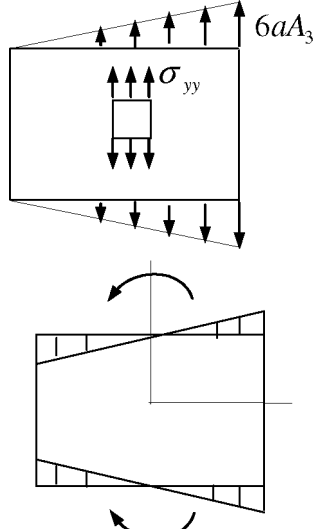
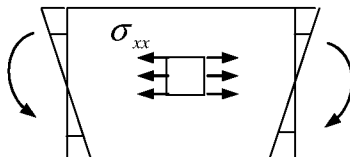
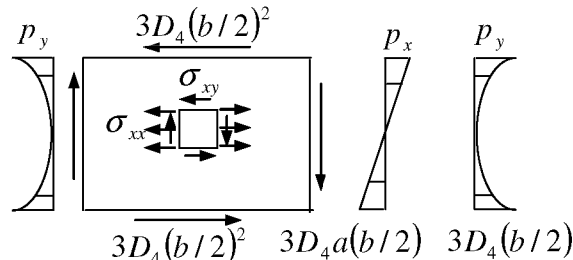
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |                                                                                       |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>1. <math>\varphi_2 = A_2 x^2</math>.<br/> <math>\sigma_{xx} = 0</math>; <math>\sigma_{yy} = 2A_2</math>; <math>\sigma_{xy} = 0</math>.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                     |    |
| <p>2. <math>\varphi_2 = C_2 y^2</math>.<br/> <math>\sigma_{xx} = 2C_2</math>; <math>\sigma_{yy} = 0</math>; <math>\sigma_{xy} = 0</math>.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                     |     |
| <p>3. <math>\varphi_2 = B_2 xy</math>.<br/> <math>\sigma_{xx} = 0</math>; <math>\sigma_{yy} = 0</math>; <math>\sigma_{xy} = -B_2</math>.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                      |    |
| <p>4. <math>\varphi_3 = A_3 x^3</math>.<br/> <math>\sigma_{xx} = 0</math>; <math>\sigma_{yy} = 6A_3 x</math>; <math>\sigma_{xy} = 0</math>.</p> <p>Чтобы придать физический смысл такому напряженному состоянию, удобно начало системы координат перенести в центр пластинки, и тогда напряженное состояние будет соответствовать чистому изгибу пластины в своей плоскости в направлении оси <math>y</math>.</p> |  |
| <p>5. <math>\varphi_3 = D_3 y^3</math><br/> <math>\sigma_{xx} = 6D_3 y</math> <math>\sigma_{yy} = 0</math> <math>\sigma_{xy} = 0</math></p>                                                                                                                                                                                                                                                                       |  |
| <p>6. <math>\varphi_4 = D_4 xy^3</math><br/> <math>\sigma_{xx} = 6D_4 xy</math> <math>\sigma_{yy} = 0</math><br/> <math>\sigma_{xy} = -3D_4 y^2</math></p>                                                                                                                                                                                                                                                        |   |

Рисунок 5.5



Приведенные функции могут быть использованы при решении простейших задач.

Рассмотрим, в частности, задачу об изгибе в своей плоскости консольной пластины единичной толщины силой на конце (рисунок 5.6).

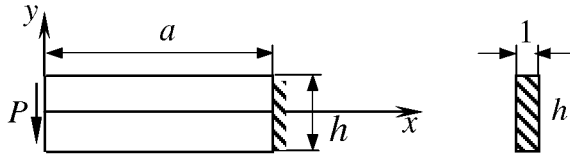


Рисунок 5.6

Будем считать, что сила  $P$  передается на пластину (балку) касательными усилиями, распределенными по торцу. Подберем подходящую функцию напряжений. Из условий на контуре следует искать такое

решение, при котором верхняя и нижняя поверхности консоли не несут нагрузок, а на левом конце есть касательные усилия. Получим его путем комбинирования рассмотренных решений, а именно, возьмем функцию  $\varphi$  в виде

$$\varphi = B_2 xy + D_4 xy^3.$$

Первое слагаемое здесь соответствует чистому сдвигу, второе описывает напряженное состояние, в котором касательные напряжения сверху и снизу направлены так же, как и при чистом сдвиге, напряжения  $\sigma_{xx}$  изменяются по линейному закону и слева равны нулю, а напряжения  $\sigma_{yy}$  всюду равны нулю.

Зная функцию  $\varphi$ , найдем напряжения

$$\sigma_{xx} = 6D_4 xy; \quad \sigma_{yy} = 0; \quad \sigma_{xy} = -(B_2 + 3D_4 y^2).$$

Для определения постоянных  $B_2$  и  $D_4$  можно записать следующие граничные условия:

$$1) \text{ при } y = \pm \frac{h}{2} \quad \sigma_{xy} = 0; \quad 2) \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xy} dy = P.$$

Из первого условия следует, что

$$B_2 + 3D_4 \frac{h^2}{4} = 0,$$

откуда

$$B_2 = -3D_4 \left(\frac{h}{2}\right)^2, \quad \text{так что} \quad \sigma_{xy} = 3D_4 \left[ \left(\frac{h}{2}\right)^2 - y^2 \right].$$

Второе условие дает

$$P = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} 3D_4 \left[ \left( \frac{h}{2} \right)^2 - y^2 \right] dy = 3D_4 \left[ \left( \frac{h}{2} \right)^2 y - \frac{y^3}{3} \right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = 3D_4 \left[ \left( \frac{h}{2} \right)^2 h - \frac{2}{3} \left( \frac{h}{2} \right)^3 \right] =$$

$$= \frac{1}{2} D_4 h^3.$$

Следовательно,

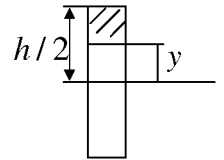
$$D_4 = \frac{2P}{h^3}; \quad B_2 = -\frac{3}{2} \frac{P}{h}.$$

Тогда

$$\sigma_{xx} = \frac{12P}{h^3} xy, \quad \sigma_{yy} = 0, \quad \sigma_{xy} = \frac{6P}{h^3} \left[ \left( \frac{h}{2} \right)^2 - y^2 \right].$$

Так как

$$I = \frac{1 \cdot h^3}{12}, \quad Px = M_z, \quad S = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{h}{2} \right)^2 - y^2 \right],$$



то

$$\sigma_{xx} = \frac{M}{I} y, \quad \sigma_{xy} = \frac{P}{I} S,$$

где  $I$  – момент инерции поперечного сечения;  $S$  – статический момент отсеченной части площади.

Решение совпадает с результатом, полученным в сопротивлении материалов. Если мы теперь проинтегрируем соотношения Коши, то найдем и перемещения. При этом условию заделки удастся удовлетворить лишь приближенно. Это говорит о том, что решение, взятое в виде полинома, является приближенное решение.

## 5.7 Решение плоской задачи в тригонометрических рядах

Рассмотрим прямоугольную пластину с толщиной равной единице. Исследуем напряженное состояние пластины при действии нагрузки  $q(x)$ , приложенной к верхнему краю пластины (рисунок 5.7). Частное решение бигармонического уравнения

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0$$

можно искать в виде произведения двух функций от  $x$  и  $y$ :

$$\varphi_n(x, y) = \psi_n(x) \cdot f_n(y).$$

В качестве функции от  $x$  можем взять

$$\psi_n(x) = \sin \frac{\pi n}{a} x = \sin \alpha_n x; \quad \alpha_n = \frac{\pi n}{a}.$$

Тогда

$$\varphi_n(x, y) = f_n(y) \sin \alpha_n x.$$

Общее решение далее можно взять в виде

$$\varphi_n(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(y) \sin \alpha_n x. \quad (5.16)$$

Подставляя решение в такой форме в бигармоническое уравнение, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \alpha_n^4 f_n(y) - 2 \alpha_n^2 \frac{d^2 f_n}{dy^2} + \frac{d^4 f_n}{dy^4} \right) \sin \alpha_n x = 0.$$

Это уравнение обращается в тождество при любых значениях аргумента  $x$ , если каждая функция  $f_n(y)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d^4 f_n}{dy^4} - 2 \alpha_n^2 \frac{d^2 f_n}{dy^2} + \alpha_n^4 f_n = 0. \quad (5.17)$$

Это дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами, характеристическое уравнение которого имеет вид

$$k^4 - 2 \alpha_n^2 k^2 + \alpha_n^4 = 0,$$

$$(k^2 - \alpha_n^2)^2 = 0,$$

$$(k - \alpha_n)^2 (k + \alpha_n)^2 = 0,$$

$$k_{1,2} = \alpha_n, \quad k_{3,4} = -\alpha_n.$$

Так как корни характеристического уравнения кратны, то решение дифференциального уравнения можно записать в следующем виде:

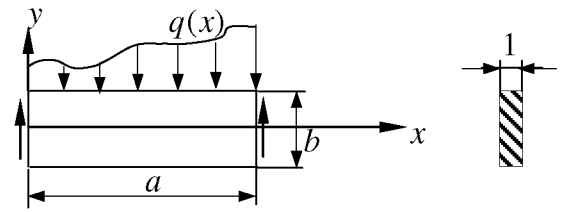


Рисунок 5.7

$$f_n(y) = A_{1n} e^{\alpha_n y} + A_{2n} e^{-\alpha_n y} + A_{3n} y e^{\alpha_n y} + A_{4n} y e^{-\alpha_n y}.$$

Имея в виду, что

$$e^{\pm \alpha_n y} = \operatorname{ch} \alpha_n y \pm \operatorname{sh} \alpha_n y,$$

перейдем к гиперболическим функциям:

$$f_n(y) = B_{1n} \operatorname{ch} \alpha_n y + B_{2n} \operatorname{sh} \alpha_n y + y(B_{3n} \operatorname{ch} \alpha_n y + B_{4n} \operatorname{sh} \alpha_n y).$$

Тогда

$$\varphi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} [B_{1n} \operatorname{ch} \alpha_n y + B_{2n} \operatorname{sh} \alpha_n y + y(B_{3n} \operatorname{ch} \alpha_n y + B_{4n} \operatorname{sh} \alpha_n y)] \sin \alpha_n x. \quad (5.18)$$

Напряжения могут быть вычислены по формулам

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n''(y) \sin \alpha_n x, \\ \sigma_{yy} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -\sum_{n=1}^{\infty} f_n(y) \alpha_n^2 \sin \alpha_n x, \\ \sigma_{xy} &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = -\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(y) \alpha_n \cos \alpha_n x. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Постоянные интегрирования  $B_{in}$  находятся из условий на сторонах  $y = \pm \frac{b}{2}$ :

$$\text{при } y = \frac{b}{2}: \quad \sigma_{xy} = p_x = 0, \quad \sigma_{yy} = p_y = -q(x);$$

$$\text{при } y = -\frac{b}{2}: \quad \sigma_{xy} = -p_x = 0, \quad \sigma_{yy} = -p_y = 0.$$

Отсюда вытекают равенства

$$\begin{aligned} 1) -\sum_{n=1}^{\infty} f_n' \left( \frac{b}{2} \right) \alpha_n \cos \alpha_n x &= 0; & 2) -\sum_{n=1}^{\infty} f_n \left( \frac{b}{2} \right) \alpha_n^2 \sin \alpha_n x &= -q(x); \\ 3) -\sum_{n=1}^{\infty} f_n' \left( -\frac{b}{2} \right) \alpha_n \cos \alpha_n x &= 0; & 4) -\sum_{n=1}^{\infty} f_n \left( -\frac{b}{2} \right) \alpha_n^2 \sin \alpha_n x &= 0. \end{aligned}$$

Поверхностную нагрузку  $q(x)$  разложим в ряд Фурье по синусам:

$$q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n \sin \alpha_n x,$$

где

$$q_n = \frac{2}{a} \int_0^a q(x) \sin \alpha_n x dx.$$

Тогда для каждого значения  $n$  будем иметь четыре уравнения для нахождения четырех постоянных интегрирования:

$$\begin{aligned} 1) \quad f_n' \left( \frac{b}{2} \right) &= 0; & 2) \quad \alpha_n^2 f_n \left( \frac{b}{2} \right) &= q_n; \\ 3) \quad f_n' \left( -\frac{b}{2} \right) &= 0; & 4) \quad f_n \left( -\frac{b}{2} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда находятся постоянные  $B_{1n}, B_{2n}, B_{3n}, B_{4n}$ .

## 5.8 Основные соотношения плоской задачи теории упругости в полярных координатах

При решении плоской задачи встречаются тела, ограниченные поверхностями кругового цилиндра и радиально расходящимися плоскостями. В этих случаях переход от декартовой системы координат к полярной значительно упрощает решение.

В полярной системе координат положение любой точки на плоскости определяется двумя величинами: радиус-вектором  $r$  и полярным углом  $\theta$ , отсчитываемым от полярной оси.

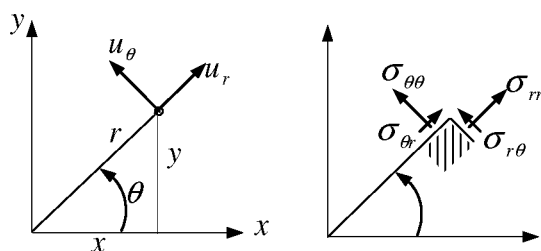


Рисунок 5.8

Обозначим через  $u_r$  и  $u_\theta$  проекции перемещения на оси  $r$  и  $\theta$ . Установим связь полярных и декартовых координат (рисунок 5.8):

$$x = r \cos \theta; \quad y = r \sin \theta;$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x}.$$

На площадках, перпендикулярных осям полярной системы координат действуют следующие напряжения:  $\sigma_{rr}$  и  $\sigma_{\theta\theta}$  – соответственно радиальное и окружное нормальные напряжения;  $\sigma_{\theta r}$  – касательное напряжение.

### 5.8.1 Дифференциальные уравнения равновесия в полярных координатах

Выделим из пластины бесконечно малый элемент. Для этого проведем два луча под углом  $\theta$  и  $\theta + d\theta$ , а также две дуги радиусом  $r$  и  $r + dr$  (рисунок 5.9).

Покажем силы, действующие на границах элемента. Объемные силы обозначим через  $R_r$  и  $R_\theta$ . Ввиду малости угла  $d\theta$  примем

$$\cos \frac{d\theta}{2} = 1; \quad \sin \frac{d\theta}{2} = \frac{d\theta}{2}.$$

Объем элемента единичной толщины равен

$$d\tau = 1 \cdot dr \cdot r d\theta.$$

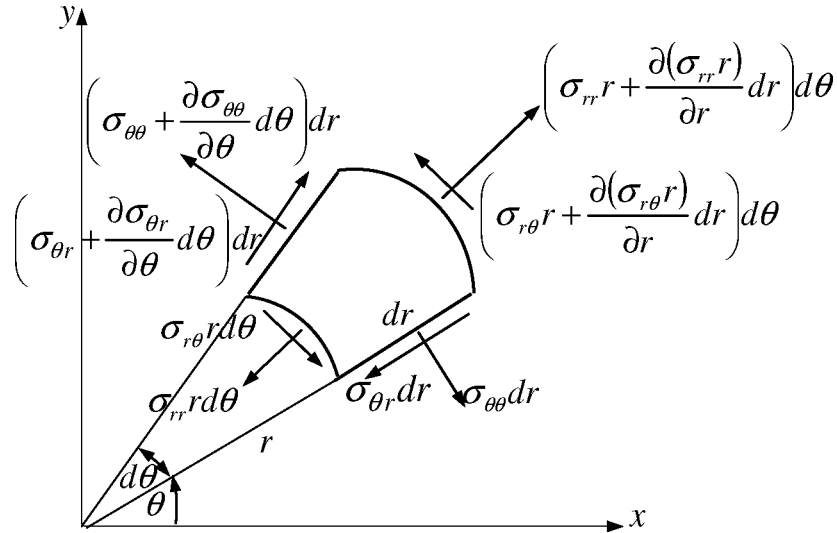


Рисунок 5.9

Спроектируем все силы на радиальное направление:

$$\left[ \cancel{\sigma_{rr}r} + \frac{\partial}{\partial r}(\sigma_{rr}r) \right] d\theta - \cancel{\sigma_{rr}rd\theta} + \left( \cancel{\sigma_{\theta r}} + \frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial \theta} d\theta \right) dr - \cancel{\sigma_{\theta r}dr} -$$

$$- \left( \sigma_{\theta\theta} + \cancel{\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} d\theta} \right) dr \frac{d\theta}{2} - \sigma_{\theta\theta} dr \frac{d\theta}{2} + R_r dr r d\theta = 0.$$

Сокращая на  $drd\theta$  и отбрасывая бесконечно малые более высокого порядка, получим

$$\frac{\partial}{\partial r}(\sigma_{rr}r) + \frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial \theta} - \sigma_{\theta\theta} + R_r r = 0$$

или

$$r \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \sigma_{rr} + \frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial \theta} - \sigma_{\theta\theta} + R_r r = 0.$$

Второе уравнение можно записать, спроектировав все силы на тангенциальное направление.

Окончательно дифференциальные уравнения равновесия в полярной системе координат имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + R_r &= 0; \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + 2 \frac{\sigma_{r\theta}}{r} + R_\theta &= 0. \end{aligned} \quad (5.20)$$

### 5.8.2 Геометрические соотношения в полярной системе координат

Рассмотрим бесконечно малый элемент до деформирования и после (рисунок 5.10).

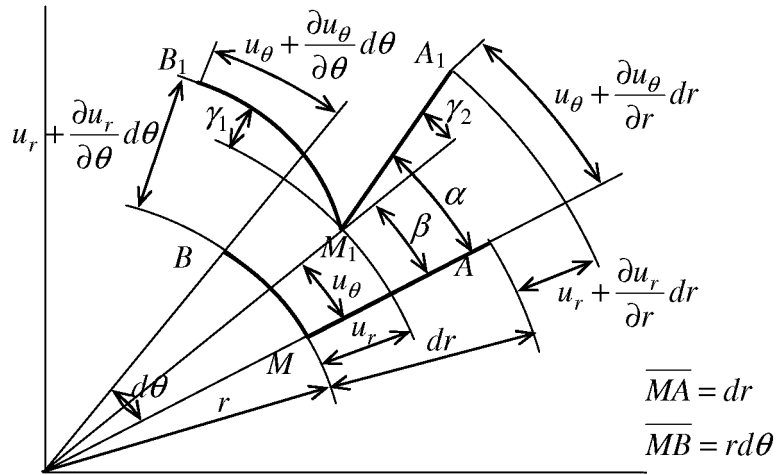


Рисунок 5.10

В силу малости перемещений для радиальной деформации можно записать

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\overline{M_1 A_1} - \overline{MA}}{\overline{MA}} = \frac{u_r^A - u_r^M}{dr} = \frac{u_r + \frac{\partial u_r}{\partial r} dr - u_r}{dr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}.$$

Окружную деформацию представим в виде суммы двух слагаемых

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon'_{\theta\theta} + \varepsilon''_{\theta\theta},$$

где  $\varepsilon'_{\theta\theta}$  – деформация за счет только перемещения  $u_r$ ;  $\varepsilon''_{\theta\theta}$  – деформация за счет только перемещения  $u_\theta$ :

$$\varepsilon'_{\theta\theta} = \frac{(r + u_r)d\theta - rd\theta}{rd\theta} = \frac{u_r}{r};$$

$$\varepsilon''_{\theta\theta} = \frac{u_\theta^B - u_\theta^M}{rd\theta} = \frac{u_\theta + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}d\theta - u_\theta}{rd\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}.$$

Деформация сдвига равна сумме двух углов

$$\varepsilon_{r\theta} = \gamma_1 + \gamma_2,$$

где

$$\gamma_1 \approx \text{tg } \gamma_1 = \frac{u_r^B - u_r^M}{rd\theta} = \frac{u_r + \frac{\partial u_r}{\partial \theta}d\theta - u_r}{rd\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta};$$

$$\gamma_2 = \alpha - \beta; \quad \beta = \frac{u_\theta}{r};$$

$$\alpha \approx \text{tg } \alpha = \frac{u_\theta^a - u_\theta^M}{dr} = \frac{u_\theta + \frac{\partial u_\theta}{\partial r}dr - u_\theta}{dr} = \frac{\partial u_\theta}{\partial r}.$$

Окончательно получим

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}; \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right); \\ \varepsilon_{r\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}. \end{aligned} \tag{5.21}$$

### 5.8.3 Закон Гука в полярных координатах

Если ввести матрицы

$$[\sigma] = \{\sigma_{rr} \ \sigma_{\theta\theta} \ \sigma_{r\theta}\}; \quad [\varepsilon] = \{\varepsilon_{rr} \ \varepsilon_{\theta\theta} \ \varepsilon_{r\theta}\},$$

то закон Гука можно представить как

$$[\sigma] = [\kappa][\varepsilon]; \quad [\varepsilon] = [\Phi][\sigma].$$

Здесь  $[\kappa]$  и  $[\Phi]$  полностью совпадают с выведенными ранее матрицами.



#### 5.8.4 Решение плоской задачи теории упругости в полярных координатах в напряжениях

Предположим, что объемные силы отсутствуют. Мы имеем два уравнения равновесия

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + 2 \frac{\sigma_{r\theta}}{r} = 0 \end{cases}$$

и уравнение совместности деформаций, которое в декартовой системе координат имеет вид

$$\nabla^2 (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 0,$$

где

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Оператор Лапласа в полярной системе координат записывается как

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}.$$

Для плоского напряженного состояния  $\sigma_{zz} = 0$  и тогда

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = I_1 = \sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta},$$

где  $I_1$  – первый инвариант тензора напряжений (не зависящий от выбора системы координат).

Поэтому уравнение совместности деформаций можно записать как

$$\nabla^2 (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) = 0. \quad (5.22)$$

Можно доказать, что это уравнение будет справедливо и для случая плоской деформации.

Если ввести функцию напряжений  $\varphi$ , через которую напряжения вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}; \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}; \end{aligned} \quad (5.23)$$

$$\sigma_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right),$$

то уравнения равновесия будут удовлетворяться тождественно. При этом уравнение совместности деформаций примет вид

$$\nabla^2 \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right) = 0$$

или

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi = 0.$$

Таким образом, как и в декартовой системе координат, решение задачи здесь сводится к решению бигармонического уравнения.

### 5.8.5 Решение плоской задачи теории упругости в полярных координатах в тригонометрических рядах

Как отмечалось выше, решение плоской задачи сводится к решению бигармонического уравнения относительно функции напряжений

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi = 0,$$

где

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}.$$

Для ряда задач частные решения данного дифференциального уравнения удобно отыскивать в виде

$$\varphi_n(r, \theta) = f_n(r) \cos n\theta \quad (\text{или} \quad \sin n\theta).$$

А полное решение представить в виде суммы

$$\varphi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(r) \cos n\theta.$$

Найдем  $\varphi_n(r, \theta)$  из условия  $\nabla^2 \nabla^2 \varphi_n = 0$ . Сначала найдем

$$\nabla^2 \varphi_n = \left( \frac{d^2 f_n}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df_n}{dr} - \frac{n^2}{r^2} f_n \right) \cos n\theta = L(f_n(r)) \cos n\theta,$$

где  $L = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r^2}$  – дифференциальный оператор.

Тогда

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi_n = \nabla^2 (L(f_n) \cos n\theta) = L(L(f_n)) \cos n\theta = 0.$$

Поскольку  $\cos n\theta \neq 0$ , то

$$L(L(f_n)) = 0$$

или

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r^2} \right) \left( \frac{d^2 f_n}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df_n}{dr} - \frac{n^2}{r^2} f_n \right) = 0.$$

Раскрыв скобки, получим

$$\frac{d^4 f_n}{dr^4} + A \frac{1}{r} \frac{d^3 f_n}{dr^3} + B \frac{1}{r^2} \frac{d^2 f_n}{dr^2} + C \frac{1}{r^3} \frac{df_n}{dr} + D \frac{1}{r^4} f_n = 0.$$

Уравнение с переменными коэффициентами такого вида называется уравнением Эйлера. Известно, что с помощью замены  $r = e^t$  его можно привести к уравнению с постоянными коэффициентами. Частными решениями последнего уравнения являются функции вида  $e^{kt} = r^k$ . Таким образом, частные решения уравнения Эйлера можно сразу искать в виде  $r^k$ .

Вычислим сначала производные

$$\frac{dr^k}{dr} = kr^{k-1}; \quad \frac{d^2 r^k}{dr^2} = k(k-1)r^{k-2}.$$

Далее находим

$$L(r^k) = k(k-1)r^{k-2} + kr^{k-2} - n^2 r^{k-2} = (k^2 - n^2)r^{k-2};$$

$$L(L(r^k)) = (k^2 - n^2)L(r^{k-2}).$$

Введем обозначение  $k-2 = \bar{k}$ , тогда

$$L(L(r^k)) = (k^2 - n^2)L(r^{\bar{k}})$$

или

$$(k^2 - n^2)(\bar{k}^2 - n^2)r^{\bar{k}-2} = 0.$$

Поскольку  $r^{\bar{k}-2} \neq 0$ , получаем характеристическое уравнение

$$(k^2 - n^2)((k-2)^2 - n^2) = 0$$

или

$$(k-n)(k+n)(k-2-n)(k-2+n) = 0.$$

Корнями этого уравнения являются

$$k_{1,2} = \pm n; \quad k_{3,4} = 2 \pm n.$$

Если  $n \geq 2$ , то кратных корней не будет; для  $n = 0$  и  $n = 1$  получаются кратные корни. Рассмотрим отдельно эти случаи.

При  $n \geq 2$  решение можно записать в виде

$$f_n(r) = A_n r^n + B_n r^{-n} + C_n r^{2+n} + D_n r^{2-n}. \quad (5.24)$$

При  $n = 1$  ( $k_1 = 1$ ;  $k_2 = -1$ ;  $k_3 = 3$ ;  $k_4 = 1$ ):

$$f_1(r) = A_1 r + B_1 r^{-1} + C_1 r^3 + D_1 r \ln r. \quad (5.25)$$

При  $n = 0$  ( $k_1 = 0$ ;  $k_2 = 0$ ;  $k_3 = 2$ ;  $k_4 = 2$ ):

$$f_0(r) = A_0 + B_0 \ln r + C_0 r^2 + D_0 r^2 \ln r. \quad (5.26)$$

Случай  $\varphi_0 = f_0(r)$  соответствует осесимметричному напряженному состоянию. Из условия однозначности перемещений можно показать, что для этого состояния  $D_0 = 0$ .

## 6 ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Вариационные принципы составляют основу различных приближенных методов решения задач теории упругости. Эти методы позволяют находить хотя и приближенные, но достаточно точные для практических целей решения многих задач, не прибегая к интегрированию сложной системы дифференциальных уравнений теории упругости. Вариационные принципы составляют теоретический фундамент и МКЭ.

### 6.1 Работа внешних сил

Рассмотрим упругое тело, находящееся в равновесии под действием  $n$  сил (рисунок 6.1). Представим эти силы матрицей-столбцом

$$[P] = \{P_1 \ P_2 \ \dots \ P_n\}$$

и введем матрицу перемещений

$$[v] = \{v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n\}.$$

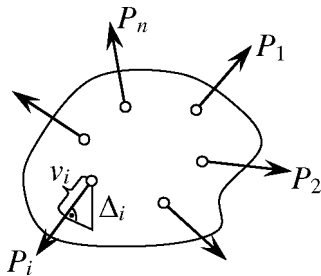


Рисунок 6.1

Здесь  $v_i$  есть проекция полного перемещения  $\Delta_i$  точки приложения силы  $P_i$  на направление этой силы.

Вычислим работу, которую совершают силы  $[P]$  в процессе деформирования тела. Будем полагать, что имеет место статическое нагружение, т.е. внешняя нагрузка возрастает настолько медленно, что можно не учитывать инерционные силы. Для вычисления работы можно принять, что все силы возрастают одновременно от нуля до своего конечного значения. Тогда для линейно-упругого тела зависимость между силами  $P_i$  и соответствующими перемещениями  $v_i$  будет линейной (рисунок 6.2). Следует подчеркнуть, что перемещение  $v_i$  вызвано действием всех сил. Площадь под диаграммой представляет собой работу

$$A_i = \frac{1}{2} P_i v_i,$$

которую совершает сила  $P_i$  в процессе нагружения тела.

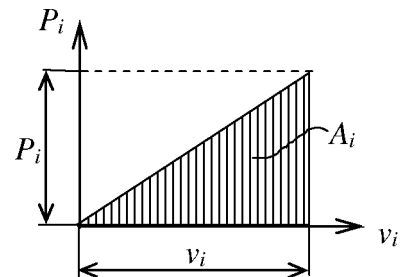


Рисунок 6.2

Суммарная работа, затраченная на деформирование тела, будет равна

$$A = \sum_{i=1}^n A_i = \frac{1}{2} (P_1 v_1 + P_2 v_2 + \dots + P_n v_n)$$

или

$$A = \frac{1}{2} [P]^T [v] = \frac{1}{2} [v]^T [P]. \quad (6.1)$$

Полученный результат выражает теорему Клапейрона, согласно которой работа, произведенная внешними силами при статическом деформировании линейно-упругого тела, равна полусумме произведений окончательных значений сил на окончательные значения соответствующих им перемещений.

Обобщим эту теорему на случай действия объемных и поверхностных сил

$$[R] = \{R_x \ R_y \ R_z\}, \quad [p] = \{p_x \ p_y \ p_z\}.$$

Сначала рассмотрим бесконечно малые силы  $[R]d\tau$  и  $[p]d\omega$ , где  $d\tau$  и  $d\omega$  – элементы объема и поверхности тела соответственно. Работа этих сил будет равна

$$\frac{1}{2}[u]^T[R]d\tau \quad \text{и} \quad \frac{1}{2}[u]^T[p]d\omega,$$

где  $[u] = \{u_x \ u_y \ u_z\}$  – матрица перемещений точек тела.

Последующее интегрирование дает полную работу, затраченную на деформирование тела:

$$A = \frac{1}{2} \left( \int_{\tau} [u]^T [R] d\tau + \int_{\omega} [u]^T [p] d\omega \right). \quad (6.2)$$

При возрастании сил от  $[P]$  до  $[P] + [\delta P]$ , где  $[\delta P] = \{\delta P_1 \ \delta P_2 \dots \delta P_n\}$  – матрица бесконечно малых приращений внешних сил, перемещения также получают приращения, определяемые матрицей  $[\delta v] = \{\delta v_1 \ \delta v_2 \dots \delta v_n\}$ . При

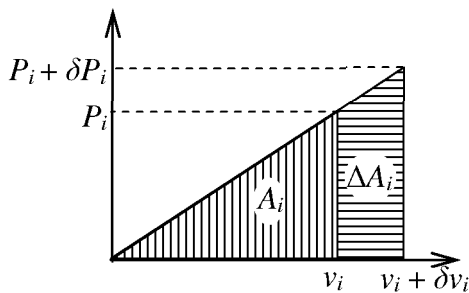
этом приращение  $\Delta A_i$  работы  $A_i$  численно равно площади трапеции (рисунок 6.3):

$$\Delta A_i = P_i \delta v_i + \frac{1}{2} \delta P_i \delta v_i.$$

Для всей системы сил получаем

$$\Delta A = \sum_{i=1}^n \Delta A_i = [\delta v]^T [P] + \frac{1}{2} [\delta v]^T [\delta P].$$

Первое слагаемое является главной



**Рисунок 6.3**

частью приращения  $\Delta A$  и называется вариацией работы внешних сил:

$$\delta A = [\delta v]^T [P]. \quad (6.3)$$

Если на тело действуют объемные и поверхностные силы, то

$$\delta A = \int_{\tau} [\delta u]^T [R] d\tau + \int_{\omega} [\delta u]^T [p] d\omega,$$

где  $[\delta u] = \{\delta u_x \delta u_y \delta u_z\}$  – матрица бесконечно малых приращений перемещений точек тела.

Всю поверхность тела можно представить в виде  $\omega = \omega_u + \omega_p$ , где  $\omega_u$  – часть поверхности, на которой заданы перемещения;  $\omega_p$  – часть поверхности, где заданы поверхностные нагрузки. Для практических приложений полезно ограничиться такими функциями  $[\delta u]$ , которые на  $\omega_u$  обращаются в нуль. Тогда

$$\delta A = \int_{\tau} [\delta u]^T [R] d\tau + \int_{\omega_p} [\delta u]^T [p] d\omega. \quad (6.4)$$

Такие бесконечно малые перемещения  $[\delta u]$ , которые удовлетворяют лишь требованию непрерывности внутри тела и наложенным на него связям называются возможными (или виртуальными).

Из сказанного следует, что  $\delta A$  можно трактовать не только как вариацию действительной работы, но и как работу внешних сил на возможных перемещениях.

Введем далее в рассмотрение потенциал внешних сил  $\Pi$ . В случае действия сосредоточенных сил

$$\Pi = -[v]^T [P] \quad (6.5)$$

и представляет собой работу, необходимую для перемещения точек приложения сил  $[P]$  в исходное положение, которые они занимали до деформации тела; значения сил при этом сохраняются неизменными (рисунок 6.4).

Рассматривая  $\Pi$  как функцию перемещений  $[v]$ , для вариации запишем

$$\delta \Pi = -\delta([v]^T [P]) = -[\delta v]^T [P]$$

или с учетом (3)

$$\delta \Pi = -\delta A. \quad (6.6)$$

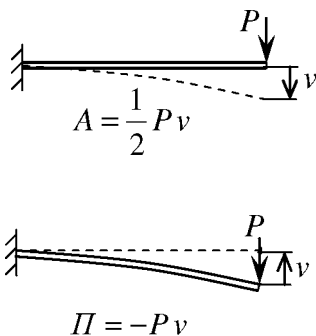


Рисунок 6.4

Равенство (6.6) положим в основу определения  $\Pi$  для случая произвольного нагружения. Тогда при действии объемных и поверхностных сил с точностью до произвольной постоянной можно записать

$$\Pi = -\left(\int_{\tau} [u]^T [R] d\tau + \int_{\omega_p} [u]^T [p] d\omega\right). \quad (6.7)$$

## 6.2 Потенциальная энергия деформации

Если к упругому телу приложить силы, то они совершат работу, которая затрачивается исключительно на деформацию; других затрат здесь нет. При этом изменится потенциальная энергия положения внешних сил. Это изменение численно равно работе внешних сил. В результате изменения потенциальной энергии внешних сил деформируемое тело накапливает потенциальную энергию деформации.

Для вычисления этой энергии деформации выделим элементарный параллелепипед с ребрами  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  и определим работу сил, действующих по граням этого элемента. Рассмотрим сначала действие нормального напряжения  $\sigma_{xx}$  (рисунок 6.5). Поскольку длина элемента при деформировании возрастает на  $\varepsilon_{xx} dx$ , силы  $\sigma_{xx} dydz$  в соответствии с теоремой Клапейрона производят работу, равную

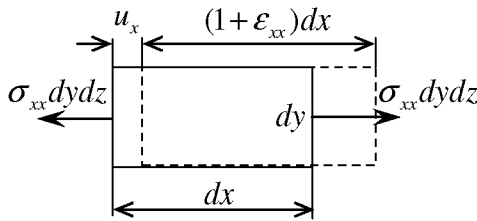


Рисунок 6.5

$$\frac{1}{2} \sigma_{xx} \varepsilon_{xx} dx dy dz = \frac{1}{2} \sigma_{xx} \varepsilon_{xx} d\tau.$$

Рассмотрим далее действие касательного напряжения  $\sigma_{xy}$  (рисунок 6.6). Сила  $\sigma_{xy} dxdz$  производит работу на перемещении  $\varepsilon_{xy} dy$ . Эта работа будет равна

$$\frac{1}{2} \sigma_{xy} \varepsilon_{xy} dx dy dz = \frac{1}{2} \sigma_{xy} \varepsilon_{xy} d\tau.$$

Рассматривая аналогично все остальные компоненты напряженного состояния, найдем накопленную в элементе энергию, равную суммарной работе внутренних сил:

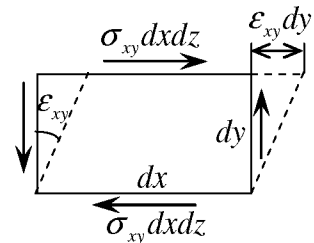


Рисунок 6.6

$$dU = \frac{1}{2} (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \varepsilon_{yy} + \sigma_{zz} \varepsilon_{zz} + \sigma_{xy} \varepsilon_{xy} + \sigma_{yz} \varepsilon_{yz} + \sigma_{zx} \varepsilon_{zx}) d\tau.$$



Вводя матрицы напряжений и деформаций

$$[\sigma] = \{\sigma_{xx} \ \sigma_{yy} \ \sigma_{zz} \ \sigma_{xy} \ \sigma_{yz} \ \sigma_{zx}\};$$

$$[\varepsilon] = \{\varepsilon_{xx} \ \varepsilon_{yy} \ \varepsilon_{zz} \ \varepsilon_{xy} \ \varepsilon_{yz} \ \varepsilon_{zx}\},$$

перепишем это выражение в кратком виде

$$dU = \frac{1}{2} [\sigma]^T [\varepsilon] d\tau = \frac{1}{2} [\varepsilon]^T [\sigma] d\tau.$$

Величина

$$W = \frac{dU}{d\tau} = \frac{1}{2} [\sigma]^T [\varepsilon] = \frac{1}{2} [\varepsilon]^T [\sigma] \quad (6.8)$$

представляет собой энергию деформации единицы объема упругого тела и называется удельной потенциальной энергией деформации. Потенциальная энергия деформации, накопленная всем телом, будет равна

$$U = \int_{\tau} W d\tau. \quad (6.9)$$

Пользуясь законом Гука  $[\varepsilon] = [\Phi][\sigma]$  или  $[\sigma] = [\kappa][\varepsilon]$  можно выразить величину  $W$  только через напряжения

$$W(\sigma) = \frac{1}{2} [\sigma]^T [\Phi] [\sigma] \quad (6.10)$$

или только через компоненты деформации

$$W(\varepsilon) = \frac{1}{2} [\varepsilon]^T [\kappa] [\varepsilon]. \quad (6.11)$$

Предположим теперь, что напряжения  $[\sigma]$  получили бесконечно малые приращения

$$[\delta\sigma] = \{\delta\sigma_{xx} \ \delta\sigma_{yy} \ \delta\sigma_{zz} \ \delta\sigma_{xy} \ \delta\sigma_{yz} \ \delta\sigma_{zx}\}.$$

Тогда перемещения точек тела  $[u]$  также получат приращения

$$[\delta u] = \{\delta u_x \ \delta u_y \ \delta u_z\}.$$

Применяя формулы Коши, можно найти и соответствующие приращения деформаций

$$[\delta\varepsilon] = \{\delta\varepsilon_{xx} \ \delta\varepsilon_{yy} \ \delta\varepsilon_{zz} \ \delta\varepsilon_{xy} \ \delta\varepsilon_{yz} \ \delta\varepsilon_{zx}\}.$$

Покажем на рисунке 6.7 для линейно-упругого тела зависимость между одноименными компонентами деформации  $\varepsilon_{ij}$  и напряжения  $\sigma_{ij}$  ( $i, j = x, y, z$ ). При этом работа  $\sigma_{ij}$ , отнесенная к единице объема, будет равна

$$W_{ij} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij},$$

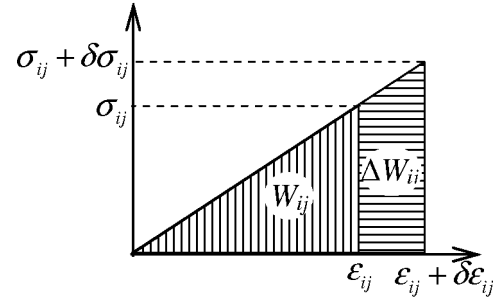


Рисунок 6.7

а приращение этой работы при изменении напряжений и деформаций будет определяться равенством

$$\Delta W_{ij} = \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2} \delta \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij}.$$

Суммарное изменение удельной энергии деформации, обусловленное действием всех компонент напряжения, определится как сумма

$$\Delta W = \sum \Delta W_{ij} = [\delta \varepsilon]^T [\sigma] + \frac{1}{2} [\delta \varepsilon]^T [\delta \sigma].$$

Главная часть этого приращения дает вариацию удельной потенциальной энергии деформации

$$\delta W = [\delta \varepsilon]^T [\sigma]. \quad (6.12)$$

Если под  $[\delta u]$  понимать возможные перемещения, то матрица  $[\delta \varepsilon]$  будет определять возможные деформации, которые выражаются через компоненты  $[\delta u]$  по формулам Коши. Тогда  $\delta W$  следует трактовать как удельную работу действительных напряжений на возможных перемещениях.

Интегрируя по всему объему тела, найдем вариацию потенциальной энергии деформации

$$\delta U = \int_{\tau} \delta W d\tau = \int_{\tau} [\delta \varepsilon]^T [\sigma] d\tau. \quad (6.13)$$

### 6.3 Вариационное уравнение Лагранжа

Рассмотрим тело, находящееся в равновесии под действием внешних нагрузок  $[R]$  и  $[p]$ . Дадим точкам тела дополнительные возможные перемещения  $[\delta u]$ . Этим возможным перемещениям соответствуют возможные деформации  $[\delta \varepsilon]$ . Вариация потенциальной энергии деформации согласно (6.13) будет равна

$$\delta U = \int_{\tau} [\delta \varepsilon]^T [\sigma] d\tau = \int_{\tau} (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta \varepsilon_{yy} + \sigma_{zz} \delta \varepsilon_{zz} + \sigma_{xy} \delta \varepsilon_{xy} + \sigma_{yz} \delta \varepsilon_{yz} + \sigma_{zx} \delta \varepsilon_{zx}) d\tau.$$

Преобразуем подынтегральное выражение. Для этого воспользуемся сначала формулами Коши и запишем

$$\delta \varepsilon_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(\delta u_x); \quad \dots \quad ; \delta \varepsilon_{zx} = \frac{\partial}{\partial z}(\delta u_x) + \frac{\partial}{\partial x}(\delta u_z).$$

Группируя члены и вводя матрицы  $[\sigma_x] = \{\sigma_{xx} \ \sigma_{xy} \ \sigma_{xz}\}$  и т.д., а также  $\frac{\partial}{\partial x}[\delta u] = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}(\delta u_x) \ \frac{\partial}{\partial x}(\delta u_y) \ \frac{\partial}{\partial x}(\delta u_z) \right\}$  и т.д., перепишем выражение для  $\delta U$  в следующем виде:

$$\delta U = \int_{\tau} \left( \frac{\partial}{\partial x}[\delta u]^T [\sigma_x] + \frac{\partial}{\partial y}[\delta u]^T [\sigma_y] + \frac{\partial}{\partial z}[\delta u]^T [\sigma_z] \right) d\tau.$$

Используя очевидное преобразование типа

$$\frac{\partial f}{\partial t} \cdot \varphi = \frac{\partial(f\varphi)}{\partial t} - f \frac{\partial \varphi}{\partial t},$$

приведем это выражение к виду

$$\begin{aligned} \delta U = & \int_{\tau} \left( \frac{\partial}{\partial x}([\delta u]^T [\sigma_x]) + \frac{\partial}{\partial y}([\delta u]^T [\sigma_y]) + \frac{\partial}{\partial z}([\delta u]^T [\sigma_z]) \right) d\tau - \\ & - \int_{\tau} [\delta u]^T \left( \frac{\partial[\sigma_x]}{\partial x} + \frac{\partial[\sigma_y]}{\partial y} + \frac{\partial[\sigma_z]}{\partial z} \right) d\tau. \end{aligned}$$

Первый интеграл заменим поверхностным, применяя формулу Остроградского-Гаусса

$$\int_{\tau} \left( \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + \frac{\partial Q_z}{\partial z} \right) d\tau = \int_{\omega} (Q_x n_x + Q_y n_y + Q_z n_z) d\omega,$$

где  $n_x, n_y, n_z$  – направляющие косинусы внешней нормали к поверхности  $\omega$ , ограничивающей область  $\tau$ , где заданы произвольные дифференцируемые функции  $Q_x, Q_y, Q_z$ .

В результате, учитывая, что на  $\omega_u$   $[\delta u] = 0$ , получим

$$\delta U = \int_{\omega_p} [\delta u]^T ([\sigma_x] n_x + [\sigma_y] n_y + [\sigma_z] n_z) d\omega - \int_{\tau} [\delta u]^T \left( \frac{\partial[\sigma_x]}{\partial x} + \frac{\partial[\sigma_y]}{\partial y} + \frac{\partial[\sigma_z]}{\partial z} \right) d\tau.$$

Поскольку предполагалось, что в исходном состоянии тело находится в равновесии, то напряжения должны удовлетворять уравнениям статики:

$$\frac{\partial[\sigma_x]}{\partial x} + \frac{\partial[\sigma_y]}{\partial y} + \frac{\partial[\sigma_z]}{\partial z} = -[R];$$

$$[\sigma_x]n_x + [\sigma_y]n_y + [\sigma_z]n_z = [p] \quad \text{на } \omega_p.$$

Отсюда имеем

$$\delta U = \int_{\omega_p} [\delta u]^T [p] d\omega + \int_{\tau} [\delta u]^T [R] d\tau.$$

Согласно (6.4) в правой части этого равенства находится вариация работы внешних сил  $\delta A$ , и мы приходим окончательно к равенству

$$\boxed{\delta U = \delta A.} \quad (6.14)$$

Это уравнение выражает собой принцип возможных перемещений (или принцип виртуальных работ) применительно к упругому телу, согласно которому работа внешних сил на возможных перемещениях равна вариации потенциальной энергии деформации.

Полагая в соответствии с (6.6)  $\delta \Pi = -\delta A$ , приведем равенство (6.14) к виду

$$\delta(U + \Pi) = 0.$$

Величина

$$V = U + \Pi \quad (6.15)$$

называется полной потенциальной энергией системы, а равенство

$$\boxed{\delta V = 0} \quad (6.16)$$

называется вариационным уравнением Лагранжа.

Поскольку  $U$  и  $\Pi$  вычисляются для равновесного состояния тела, уравнение Лагранжа утверждает, что в состоянии равновесия полная потенциальная энергия системы имеет стационарное значение. Исследуя знак второй вариации  $\delta^2 V$ , можно строго показать, что это стационарное значение является минимумом.

В самом деле, если тело, находящееся в состоянии устойчивого равновесия, под действием какого-либо внешнего воздействия несколько изменит свою форму, то после устранения этого воздействия оно снова займет первоначальное положение. При возвращении в исходное положение будет совершена работа, т.е. высвободится некоторое количество потенциальной энер-

гии. Значит, в соседнем положении тело обладает большей потенциальной энергией, чем в положении устойчивого равновесия.

Уравнение Лагранжа получено в предположении, что тело находится в равновесии, и поэтому оно представляет собой необходимое условие равновесия тела. Можно показать, что оно является также и достаточным условием равновесия. Таким образом, если удастся найти перемещения, удовлетворяющие уравнению (6.16), то при этом автоматически будут удовлетворены уравнения равновесия, а также статические граничные условия.

Изложенные выше соображения позволяют сформулировать вариационный принцип Лагранжа: из всех перемещений, допускаемых наложенными на тело связями, в действительности имеют место такие, при которых полная потенциальная энергия системы  $V$  минимальна.

Располагая вариационным уравнением Лагранжа, можно дать вариационную постановку задачи теории упругости: если задача решается в перемещениях, то требуется найти такие перемещения  $[u]$ , которые непрерывны внутри тела, удовлетворяют геометрическим граничным условиям и минимизируют полную потенциальную энергию системы  $V$ .

#### 6.4 Метод Ритца

Метод Ритца (или Ритца-Тимошенко) – это приближенный метод решения задач теории упругости, заключающийся в прямой минимизации полной энергии системы  $V$ . Следуя этому методу, перемещения будем искать в следующем виде:

$$\begin{aligned} u_x(x, y, z) &= u_{x0}(x, y, z) + \sum_{k=1}^m a_{xk} u_{xk}(x, y, z); \\ u_y(x, y, z) &= u_{y0}(x, y, z) + \sum_{k=1}^m a_{yk} u_{yk}(x, y, z); \\ u_z(x, y, z) &= u_{z0}(x, y, z) + \sum_{k=1}^m a_{zk} u_{zk}(x, y, z). \end{aligned} \quad (6.17)$$

Здесь  $a_{xk}, a_{yk}, a_{zk}$  – некоторые постоянные, подлежащие отысканию; остальные же величины представляют собой выбранные заранее подходящие функции координат (аппроксимирующие функции). На выбираемые функции накладываются ограничения. Наше решение должно удовлетворять геометрическим граничным условиям при любых значениях параметров  $[a] = \{a_{x1} a_{x2} \dots a_{zm}\}$ . Это будет обеспечиваться, если на поверхности  $\omega_u$  функции

$u_{x0}, u_{y0}, u_{z0}$  будут принимать заданные значения, а функции  $u_{xk}, u_{yk}, u_{zk}$  – обращаться в нуль. Постоянные  $[a]$  подбираются таким образом, чтобы при выбранных функциях (6.17) полная энергия системы была минимальна.

Таким образом, параметры  $[a]$  следует искать из условия минимума  $V$ :

$$\delta V = 0,$$

где  $V = U + \Pi$ .

Согласно (6.9)

$$U = \int_{\tau} W d\tau.$$

Воспользуемся выражением для  $W$  в форме (6.11):

$$W = \frac{1}{2}[\varepsilon]^T[\kappa][\varepsilon]$$

и заменим в нем деформации через перемещения по формулам Коши. Если теперь в полученное равенство подставить приближенные выражения для перемещений (6.17), то удельная энергия деформации  $W$  будет представлена как известная функция координат  $x, y, z$  и постоянных  $[a]$ :

$$W = W(x, y, z, a).$$

После подстановки этого выражения в формулу для  $U$  и интегрирования по всему объему тела потенциальная энергия деформации окажется квадратичной функцией искомых постоянных:

$$U = U(a).$$

Подставим далее заданные функции  $[R]$  и  $[p]$ , а также перемещения в форме (6.17) в выражение для потенциала внешних сил

$$\Pi = -\left(\int_{\tau} [u]^T [R] d\tau + \int_{\omega_p} [u]^T [p] d\omega\right).$$

После интегрирования получим линейную функцию

$$\Pi = \Pi(a).$$

Таким образом, полная энергия системы может быть записана как функция параметров  $[a]$ :

$$V = U(a) + \Pi(a) = V(a).$$

Поэтому ее вариация будет равна

$$\delta V = \frac{\partial V}{\partial a_{x1}} \delta a_{x1} + \frac{\partial V}{\partial a_{x2}} \delta a_{x2} + \dots + \frac{\partial V}{\partial a_{zm}} \delta a_{zm}.$$

Введем обозначения

$$[\delta a] = \{ \delta a_{x1} \delta a_{x2} \dots \delta a_{zm} \}; \quad \frac{\partial V}{\partial [a]} = \left\{ \frac{\partial V}{\partial a_{x1}} \frac{\partial V}{\partial a_{x2}} \dots \frac{\partial V}{\partial a_{zm}} \right\}.$$

Тогда

$$\delta V = [\delta a]^T \frac{\partial V}{\partial [a]}.$$

Согласно уравнению Лагранжа это выражение должно быть равно нулю. В силу независимости вариаций  $[\delta a]$  получаем

$$\frac{\partial V}{\partial [a]} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial U}{\partial a_{ik}} = -\frac{\partial \Pi}{\partial a_{ik}} \quad (i = x, y, z; \quad k = 1, 2, \dots, m).$$

Эти равенства заключают в себе систему линейных алгебраических уравнений относительно искоемых постоянных  $[a]$ . Общее число уравнений равно  $3m$ , поэтому система является замкнутой.

Если постоянные  $[a]$  найдены, то выражения для перемещений (6.17) дают приближенное решение задачи. По формулам Коши можно найти деформации, а затем по закону Гука – напряжения.

В заключение заметим, что МКЭ можно рассматривать как специфическую форму метода Ритца. Специфика заключается в том, что предполагаемый закон изменения перемещений в МКЭ задается не сразу по всей области, а поэлементно.

## 7 ИЗГИБ ПЛАСТИН

### 7.1 Основные определения и гипотезы теории пластин

Пластиной называется цилиндрическое или призматическое тело, высота которого мала по сравнению с размером в плане (рисунок 7.1).

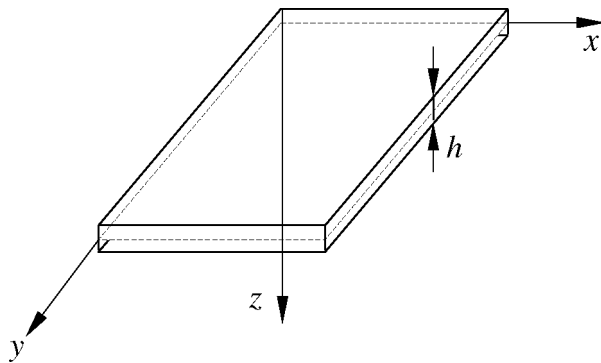


Рисунок 7.1

С точки зрения работы (по напряженному состоянию) пластины подразделяются на три класса: 1) жесткие; 2) гибкие; 3) мембраны (абсолютно гибкие).

Жесткие пластины – такие, у которых прогиб мал по сравнению с толщиной, т.е.

$$\frac{w_{\max}}{h} \leq \frac{1}{4},$$

где  $w_{\max}$  – максимальный прогиб пластины;  $h$  – толщина.

Гибкие пластины – такие, у которых прогиб соизмерим с толщиной.

Абсолютно гибкие пластины (мембраны) – такие, у которых прогиб значительно превосходит толщину.

Рассмотрим пластину, находящуюся под действием поперечной нагрузки (рисунок 7.2).

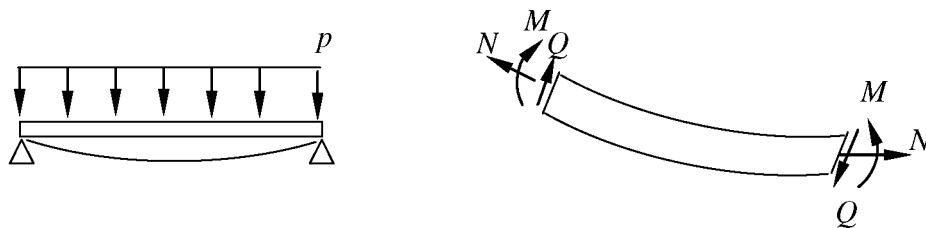


Рисунок 7.2

Для жестких пластин нормальные силы  $N$  малы и ими пренебрегают. Учитываются только изгибные напряжения, т.е. силы  $Q$  и моменты  $M$ . Для мембран изгибные напряжения малы по сравнению с напряжениями от нормальных усилий  $N$ . Напряжения в этом случае почти постоянны по толщине.



Для расчета гибких пластин следует учитывать как изгибные, так и мембранные напряжения. В дальнейшем будем рассматривать только жесткие пластины.

Для сведения трехмерной задачи теории упругости к двумерной введем следующие гипотезы.

1. Гипотеза о нерастяжимости срединной плоскости: ввиду малости прогиба можно считать, что перемещение точек срединной плоскости происходит перпендикулярно этой плоскости.

2. Гипотеза прямых нормалей Кирхгофа: любой прямолинейный элемент, нормальный к срединной плоскости пластины, остается прямолинейным и нормальным к срединной плоскости после деформирования, и его длина не изменяется (т.е.  $\varepsilon_{zz} = 0$ ;  $\varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zx} = 0$ ).

3. Гипотеза об отсутствии давления между слоями: отсутствует давление между слоями, т.е. принимается, что  $\sigma_{zz} = 0$ , поскольку оно мало по сравнению с другими напряжениями. Слой называется геометрическое место точек, равноудаленных от срединной плоскости.

## 7.2 Дифференциальное уравнение изгиба пластины

### 7.2.1 Перемещения и деформации

Рассмотрим деформацию пластины. Перемещения вдоль осей  $x$  и  $y$  обозначим через  $u_x$  и  $u_y$  соответственно, а вдоль оси  $z$  через  $w$ . Покажем сечение пластины  $y = \text{const}$  (рисунок 7.3).

Угол поворота нормали  $\alpha$  согласно гипотезе прямых нормалей равен углу поворота касательной к деформированной срединной плоскости. Из курса высшей математики известно, что тангенс угла наклона касательной к некоторой функции равен производной от этой функции. В сечении  $y = \text{const}$  мы имеем функцию прогибов  $w = w(x)$ , поэтому тангенс угла наклона касательной к этой функции будет равен  $\frac{\partial w}{\partial x}$ . В силу малости перемещений и углов поворота  $\text{tg } \alpha \approx \alpha$  и, следовательно,  $\alpha = \frac{\partial w}{\partial x}$ .

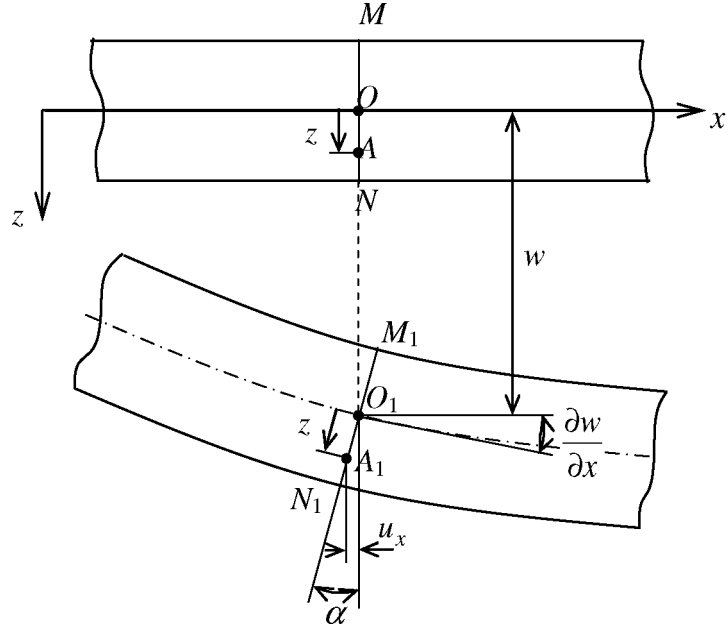


Рисунок 7.3

Из рисунка 7.3 видно, что  $u_x = -z \frac{\partial w}{\partial x}$ . Аналогичное выражение получается и для перемещения  $u_y$ . Таким образом, имеем

$$u_x = -z \frac{\partial w}{\partial x}; \quad u_y = -z \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (7.1)$$

Для нахождения деформаций воспользуемся формулами Коши:

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \\ \epsilon_{yy} &= \frac{\partial u_y}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \\ \epsilon_{xy} &= \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (7.2)$$

### 7.2.2 Связь напряжений с деформациями

Так как согласно гипотезе о ненадавливании слоев  $\sigma_{zz} = 0$ , закон Гука можно записать в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{E}{1-\mu^2} (\epsilon_{xx} + \mu \epsilon_{yy}); \\ \sigma_{yy} &= \frac{E}{1-\mu^2} (\epsilon_{yy} + \mu \epsilon_{xx}); \end{aligned} \quad (7.3)$$

$$\sigma_{xy} = G\varepsilon_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)}\varepsilon_{xy}.$$

Подставив (7.2) в формулы (7.3), получим

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= -\frac{Ez}{1-\mu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ \sigma_{yy} &= -\frac{Ez}{1-\mu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\ \sigma_{xy} &= -\frac{Ez}{1+\mu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.\end{aligned}\quad (7.4)$$

### 7.2.3 Погонные усилия и моменты

Рассмотрим, какие усилия создаются напряжениями в сечениях пластины, нормальных к ее срединной плоскости. В самом общем случае в сечениях пластины могут возникать следующие погонные силовые факторы:  $N_x$ ,  $N_y$ ,  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $Q_x$ ,  $Q_y$ ,  $T$ ,  $M_{xy}$ . На рисунке 4 показаны их положительные направления.

Подсчитаем эти усилия, для чего выдели из пластины бесконечно малый элемент четырьмя сечениями (рисунок 7.5).

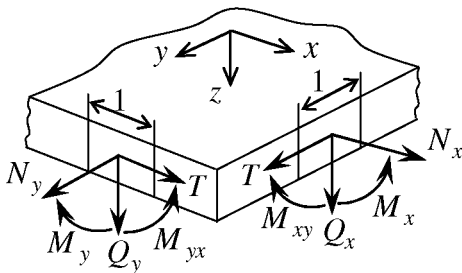


Рисунок 7.4

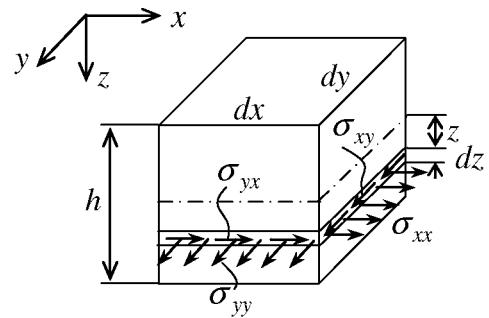


Рисунок 7.5

На площадке, перпендикулярной оси  $x$ , равнодействующая нормальных напряжений будет равна

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xx} dy dz = N_x dy,$$

где  $N_x$  – погонная нормальная сила.

Подставляя сюда первое выражение в (7.4), получим

$$N_x = -\frac{E}{1-\mu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z dz = 0.$$

Аналогично  $N_y = 0$ . Подсчитаем погонный изгибающий момент  $M_x$  в площадке с нормалью, совпадающей с осью  $x$ :

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \sigma_{xx} dy dz = M_x dy;$$

$$M_x = -\frac{E}{1-\mu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \underbrace{\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 dz}_{h^3/12}.$$

Аналогичное выражение получается и для погонного момента  $M_y$ . Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} M_x &= -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \\ M_y &= -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \end{aligned} \quad (7.5)$$

где  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$  – жесткость пластины на изгиб.

Погонная касательная сила в рассматриваемом сечении с учетом (7.4) будет равна нулю:

$$T = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xy} dz = -\frac{E}{1+\mu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z dz = 0.$$

В силу парности касательных напряжений на другой площадке получим такой же результат.

Найдем крутящий момент:

$$M_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \sigma_{xy} dz = -\frac{E}{1+\mu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 dz = -\frac{Eh^3}{12(1+\mu)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

или

$$M_{xy} = -D(1-\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (7.6)$$

В силу парности касательных напряжений  $M_{yx} = M_{xy}$ .

Таким образом, удалось в уравнениях исключить координату  $z$  и свести трехмерную задачу к двумерной.

Если известны погонные моменты, то, комбинируя формулы (7.4)...(7.6), можно найти напряжения:

$$\sigma_{xx} = \frac{M_x}{I} z; \quad \sigma_{yy} = \frac{M_{yy}}{I} z; \quad \sigma_{xy} = \frac{M_{xy}}{I} z,$$

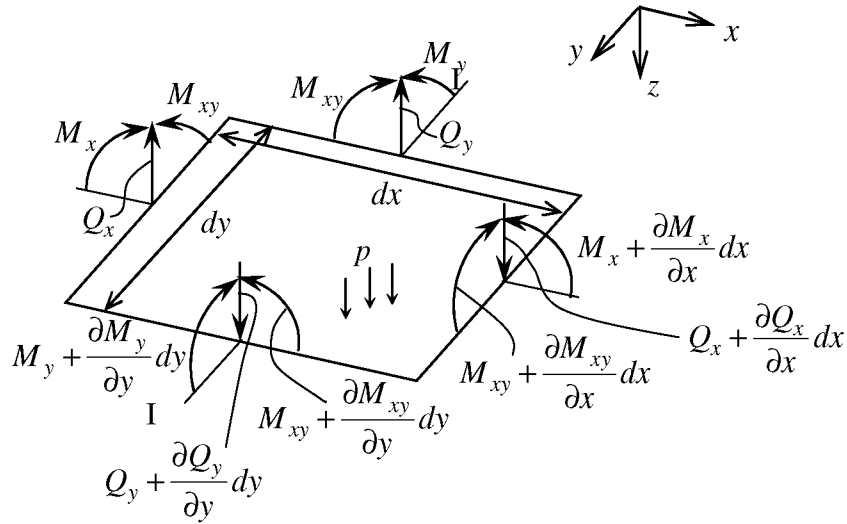
где  $I = \frac{1 \cdot h^3}{12}$  – погонный момент инерции.

Согласно принятой гипотезе прямых нормалей в процессе деформирования сохраняется прямой угол между нормальным элементом и срединной плоскостью, т.е. поперечные сдвиги отсутствуют  $\varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zx} = 0$ . Тогда в соответствии с законом Гука касательные напряжения  $\sigma_{yz}$  и  $\sigma_{zx}$  (а, следовательно, и перерезывающие силы  $Q_x$ ,  $Q_y$ ) равны нулю. В действительности они не равны нулю, так как это противоречит условиям равновесия.

#### 7.2.4 Дифференциальные уравнения равновесия

Ненайденными остались перерезывающие силы  $Q_x$  и  $Q_y$ . Определим их, рассматривая равновесие бесконечно малого элемента срединной плоскости пластины размером  $dx$  и  $dy$ .

Изобразим элемент пластины и покажем погонные силы и моменты, действующие по его граням (рисунок 7.6).



**Рисунок 7.6**

Спроектируем все силы на направление оси  $z$  ( $\sum z = 0$ ):

$$\left( \cancel{Q_x} + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx \right) dy - \cancel{Q_x} dy + \left( \cancel{Q_y} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy \right) dx - \cancel{Q_y} dx + p dx dy = 0;$$

$$\left( \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p \right) dx dy = 0.$$

Получаем первое уравнение равновесия

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p = 0. \quad (7.7)$$

Запишем сумму моментов относительно оси I-I ( $\sum M_{I-I} = 0$ ):

$$\left( \cancel{M_x} + \frac{\partial M_x}{\partial x} dx \right) dy - \cancel{M_x} dy + \left( \cancel{M_{xy}} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} dy \right) dx - \cancel{M_{xy}} dx -$$

$$- \left( Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx \right) dy \frac{dx}{2} - Q_x dy \frac{dx}{2} = 0.$$

Величиной  $\frac{\partial Q_x}{\partial x} dx dy \frac{dx}{2}$  пренебрегаем по сравнению с остальными

членами. Аналогично можно получить второе уравнение. Итак, имеем

$$\begin{aligned} Q_x &= \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}; \\ Q_y &= \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Подставим выражения для моментов (7.5) и (7.6) в (7.8):

$$\begin{aligned} Q_x &= \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} = -D \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \cancel{\mu \frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial x}} + (1 - \cancel{\mu}) \frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial x} \right] = \\ &= -D \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -D \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 w), \end{aligned}$$

где  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  – оператор Лапласа.

Таким образом, перерезывающие силы можно также выразить через прогиб:

$$Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w; \quad Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w. \quad (7.9)$$

Подставим (7.9) в уравнение равновесия (7.7):

$$-D \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \nabla^2 w + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \nabla^2 w \right] + p = 0$$

или

$$D \nabla^2 \nabla^2 w = p. \quad (7.10)$$

Данное равенство называется дифференциальным уравнением изгиба пластины (или уравнением Софи Жермен, 1811).

Уравнение (10) можно записать в развернутом виде:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{D}.$$

### 7.3 Граничные условия на контуре пластины

При интегрировании уравнения Софи Жермен появятся произвольные постоянные, которые должны быть определены из условий на контуре пластины. Рассмотрим прямоугольную пластину размером  $a \times b$ . На краях, параллельных оси  $x$ , должны быть заданы четыре граничных условия, так как порядок дифференциального уравнения равен четырем. Аналогично для сто-

рон, параллельных оси  $y$ . Таким образом, получается по два условия на каждом краю. Рассмотрим различные способы закрепления.

1. Жесткая заделка (рисунок 7.7).

При  $y = 0$  и  $y = b$ :

$$1) w = 0; \quad 2) \frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

При  $x = 0$  и  $x = a$ :

$$3) w = 0; \quad 4) \frac{\partial w}{\partial x} = 0.$$

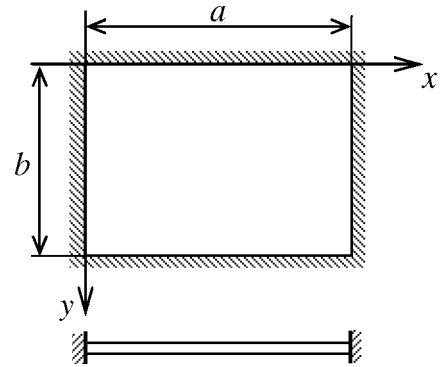


Рисунок 7.7

2. Свободное опирание (рисунок 7.8).

При  $x = 0$  и  $x = a$ :

$$1) w = 0; \quad 2) M_x = 0.$$

Имеем

$$M_x = -D_x \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0,$$

но  $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$ , так как вдоль кромок  $x = 0$  и

$x = a$  прогиб равен нулю. Следовательно, второе условие ( $M_x = 0$ ) можно также записать через функцию прогиба:

$$2) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0.$$

Аналогично при  $y = 0$  и  $y = b$ :

$$3) w = 0; \quad 4) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$$

3. Свободный край (рисунок 7.9).

На свободном крае ( $x = a$ ) должны обращаться в нуль изгибающий момент  $M_x$ , перерезывающая сила  $Q_x$  и крутящий момент  $M_{xy}$ , т.е. вместо двух необходимых условий здесь появляются три.

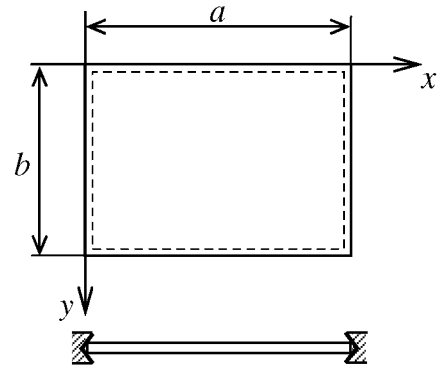


Рисунок 7.8



Такое противоречие связано с тем, что задача решается приближенно, и поэтому всем граничным условиям удовлетворить нельзя. Однако это противоречие можно устранить, объединив два последних условия.

Рассмотрим крутящий момент, распределенный вдоль стороны  $x = a$ . На длине  $dy$  здесь действует момент  $M_{xy} dy$ .

Представим его в виде пары сил  $M_{xy}$  с плечом  $dy$  (рисунок 7.10).

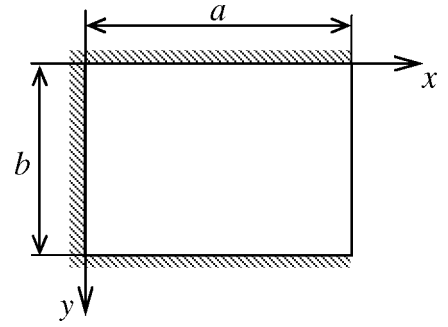


Рисунок 7.9

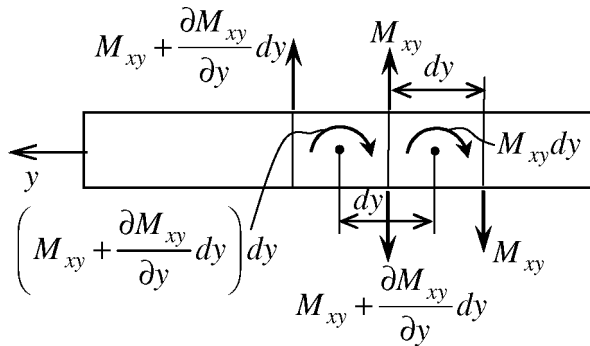


Рисунок 7.10

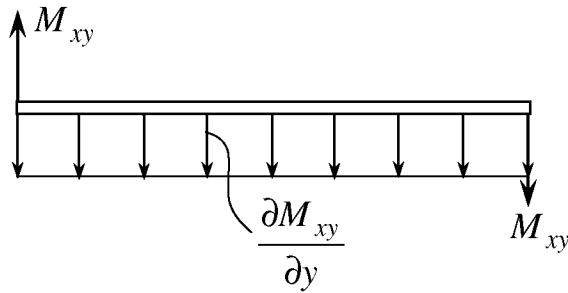


Рисунок 7.11

силы  $M_{xy}$ .

Полученную погонную нагрузку можно объединить с перерезывающей силой  $Q_x$  и считать, что действует приведенная поперечная сила, или перерезывающая сила в смысле Кирхгофа, или обобщенная перерезывающая сила:

$$Q_x^* = Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}; \quad Q_y^* = Q_y + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}.$$

На соседнем элементе длиной  $dy$  крутящий момент будет больше на бесконечно малую величину за счет изменения координаты  $y$ . При этом на границах бесконечно малых участков будут действовать по две противоположно направленных силы, разность которых составляет

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} dy.$$

Таким образом, можно считать, что по свободному краю действует погонная вертикальная нагрузка интенсивностью  $\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}$

(рисунок 7.11). В угловых точках будут возникать сосредоточенные

Таким образом, на каждой грани пластины вместо трех усилий (изгибающего момента, крутящего момента и перерезывающей силы) можно рассматривать только два: изгибающий момент и обобщенную перерезывающую силу.

Итак, на свободном крае:

$$1) M_x = 0; \quad 2) Q_x^* = 0.$$

#### 7.4 Изгиб прямоугольной пластины равномерно распределенной нагрузкой

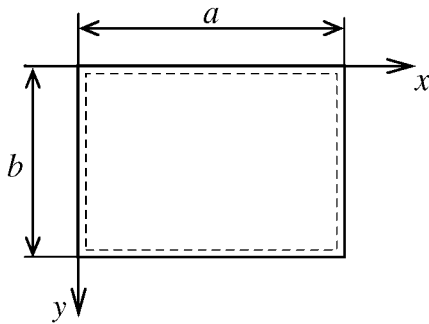


Рисунок 7.12

Рассмотрим свободно опертую по всему контуру прямоугольную пластину со сторонами  $a$  и  $b$  (рисунок 7.12). Пластина нагружена давлением  $p = \text{const}$ .

Прогиб должен удовлетворять дифференциальному уравнению изгиба

$$D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = p. \quad (7.11)$$

На сторонах пластины должны удовлетворяться следующие граничные условия:

$$\text{при } x=0, \quad x=a \rightarrow 1) w=0; \quad 2) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0;$$

$$\text{при } y=0, \quad y=a \rightarrow 1) w=0; \quad 2) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$$

Навье в 1820 г. предложил искать решение дифференциального уравнения в виде двойного тригонометрического ряда:

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{\pi m}{a} x \sin \frac{\pi n}{b} y, \quad (7.12)$$

где  $m, n$  – целые положительные числа;  $A_{mn}$  – коэффициенты ряда.

Легко видеть, что данное решение удовлетворяет всем граничным условиям, так как

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \left( \frac{\pi m}{a} \right)^2 \sin \frac{\pi m}{a} x \sin \frac{\pi n}{b} y;$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \left( \frac{\pi n}{b} \right)^2 \sin \frac{\pi m}{a} x \sin \frac{\pi n}{b} y.$$

Таким образом, остается удовлетворить только дифференциальному уравнению. Подставим выражение для прогиба (7.12) в дифференциальное уравнение (7.11)

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \underbrace{\left[ \left( \frac{\pi m}{a} \right)^4 + 2 \left( \frac{\pi m}{a} \right)^2 \left( \frac{\pi n}{b} \right)^2 + \left( \frac{\pi n}{b} \right)^4 \right]}_K \sin \frac{\pi m}{a} x \sin \frac{\pi n}{b} y = \frac{p}{D};$$

$$K = \left[ \left( \frac{\pi m}{a} \right)^2 + \left( \frac{\pi n}{b} \right)^2 \right]^2 = \frac{\pi^4}{a^4} \left[ m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2} \right]^2.$$

Введем обозначение  $\gamma = \frac{a}{b}$ , тогда

$$K = \frac{\pi^4}{a^4} \left[ m^2 + n^2 \gamma^2 \right]^2.$$

Правую часть дифференциального уравнения (нагрузку) также представим в виде ряда: (ряда Фурье):

$$\frac{p}{D} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin \frac{\pi m}{a} x \sin \frac{\pi n}{b} y.$$

Подставляя в дифференциальное уравнение и приравнявая коэффициенты при одинаковых тригонометрических функциях, получим

$$A_{mn} \frac{\pi^4}{a^4} \left[ m^2 + n^2 \gamma^2 \right]^2 = B_{mn}.$$

Следовательно,

$$A_{mn} = \frac{B_{mn}}{\frac{\pi^4}{a^4} \left[ m^2 + n^2 \gamma^2 \right]^2}. \quad (7.13)$$

Известно, что если мы имеем на отрезке  $0 \leq x \leq a$  функцию  $f(x)$ , то ее можно представить в виде тригонометрического ряда:

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin \frac{\pi m}{a} x,$$

где

$$B_m = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \sin \frac{\pi m}{a} x dx.$$

Аналогично для функции двух переменных в области  $0 \leq x \leq a$ ;  
 $0 \leq y \leq b$ :

$$f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin \frac{\pi m}{a} x \sin \frac{\pi n}{b} y,$$

где

$$B_{mn} = \frac{2}{a} \frac{2}{b} \int_0^a \int_0^b f(x, y) \sin \frac{\pi m}{a} x \sin \frac{\pi n}{b} y dx dy.$$

В нашем случае  $p = \text{const}$ :

$$B_{mn} = \frac{4}{ab} \frac{p}{D} \int_0^a \sin \frac{\pi m}{a} x dx \int_0^b \sin \frac{\pi n}{b} y dy.$$

Вычислим входящие сюда интегралы:

$$\int_0^a \sin \frac{\pi m}{a} x dx = -\frac{a}{\pi m} \cos \frac{\pi m}{a} x \Big|_0^a = \frac{a}{\pi m} (1 - \cos \pi m) = \begin{cases} 0 & \text{при четных } m; \\ \frac{2a}{\pi m} & \text{при нечетных } m. \end{cases}$$

Аналогично

$$\int_0^b \sin \frac{\pi n}{b} y dy = \begin{cases} 0 & \text{при четных } n; \\ \frac{2b}{\pi n} & \text{при нечетных } n. \end{cases}$$

Таким образом,

$$B_{mn} = \begin{cases} 0 & \text{при } m \text{ или } n \text{ четных;} \\ \frac{16p}{D\pi^2 mn} & \text{при } m \text{ и } n \text{ нечетных.} \end{cases}$$

Тогда

$$A_{mn} = \frac{16pa^4}{D\pi^6 (m^2 + n^2 \gamma^2)^2 mn} \quad \text{при нечетных } m \text{ и } n; \quad (7.14)$$

$$A_{mn} = 0 \quad \text{при четных } m \text{ или } n.$$

Окончательно для прогиба можно записать

$$w = \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{16pa^4}{\pi^6 Dmn(m^2 + \gamma^2 n^2)^2} \sin \frac{\pi m}{a} x \sin \frac{\pi n}{b} y;$$

$$w = \frac{16pa^4}{D\pi^6} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi m}{a} x \sin \frac{\pi n}{b} y}{mn(m^2 + \gamma^2 n^2)^2}. \quad (7.15)$$

Зная прогибы, можно найти изгибающие моменты:

$$M_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right);$$

$$M_x = \frac{16pa^2}{\pi^4} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{m^2 + \mu \gamma^2 n^2}{mn(m^2 + \gamma^2 n^2)^2} \sin \frac{\pi m}{a} x \sin \frac{\pi n}{b} y. \quad (7.16)$$

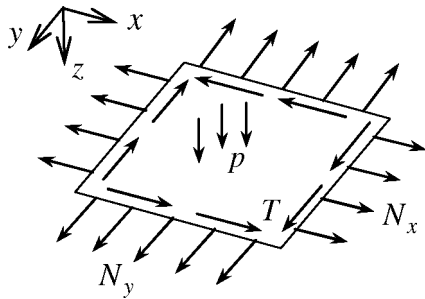
Ряды для прогиба сходятся хорошо. Ряды для изгибающих моментов дают несколько худшую сходимость. Так, для квадратной пластины (т.е. при  $\gamma=1$ ) в центре пластины с удержанием только четырех членов ряда

$$\begin{pmatrix} m=1 \\ n=1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m=1 \\ n=3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n=3 \\ m=1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m=3 \\ n=3 \end{pmatrix}$$

получаем для прогиба точное значение, а для момента ошибка составляет 2,1%.

## 7.5 Уравнение продольно-поперечного изгиба пластины

Рассмотрим пластину, нагруженную кроме давления  $p$  еще и силами  $N_x, N_y, T$ , лежащими в срединной плоскости пластины (рисунок 7.13).



**Рисунок 7.13**

можно записать

В этом случае нельзя изгиб рассматривать отдельно от мембранных усилий.

Введем допущение: ввиду малости прогибов поперечные перемещения не влияют на закон изменения сил в срединной плоскости. (Для гибких пластин это несправедливо).

Используя гипотезу прямых нормалей,

$$u_x = u_x^0 - z \frac{\partial w}{\partial x}; \quad u_y = u_y^0 - z \frac{\partial w}{\partial y},$$

где  $u_x^0$  и  $u_y^0$  – перемещения точек срединной плоскости под действием сил, лежащих в этой плоскости.

Далее согласно соотношениям Коши получим

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_x^0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; & \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial u_y^0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{\partial u_x^0}{\partial y} + \frac{\partial u_y^0}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\end{aligned}$$

или

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{xx}^0 - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{yy}^0 - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \quad \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{xy}^0 - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},$$

где  $\varepsilon_{xx}^0$ ,  $\varepsilon_{yy}^0$  и  $\varepsilon_{xy}^0$  – деформации срединной плоскости (они зависят лишь от координат  $x$  и  $y$ ).

Воспользуемся законом Гука:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \sigma_{xx}^0 - \frac{Ez}{1-\mu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \\ \sigma_{yy} &= \sigma_{yy}^0 - \frac{Ez}{1-\mu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right); \\ \sigma_{xy} &= \sigma_{xy}^0 - \frac{Ez}{1+\mu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},\end{aligned}$$

где  $\sigma_{xx}^0$ ,  $\sigma_{yy}^0$  и  $\sigma_{xy}^0$  – мембранные напряжения.

Вычислим погонные силы, действующие в сечениях пластины:

$$N_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xx} dz = h \sigma_{xx}^0 - \frac{E}{1-\mu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z dz.$$

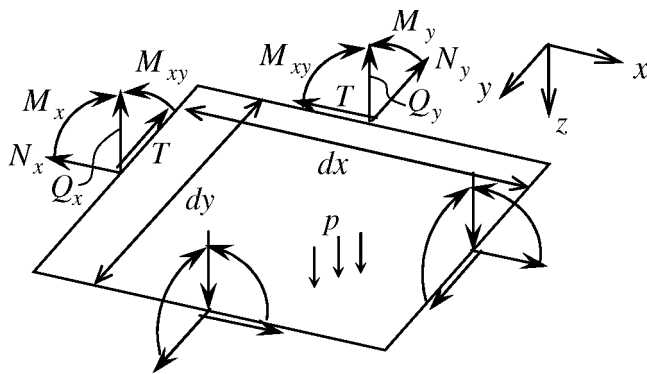
Аналогично находятся остальные силы. Таким образом, получим

$$N_x = h \sigma_{xx}^0; \quad N_y = h \sigma_{yy}^0; \quad T = h \sigma_{xy}^0.$$

Вычислим погонные моменты:

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xx} z dz = \sigma_{xx}^0 \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z dz - \frac{E}{1-\mu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \underbrace{\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 dz}_{\frac{h^3}{12}} = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right).$$

В итоге получаются такие же формулы, что и при изгибе пластины.

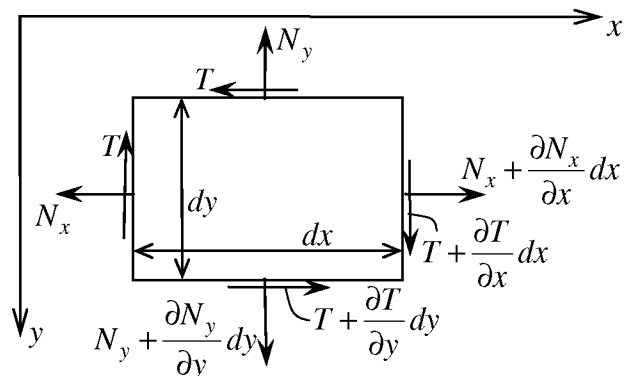


**Рисунок 7.14**

Рассмотрим равновесие бесконечно малого элемента срединной плоскости пластины (рисунок 7.14).

При проектировании сил пластину в данном случае следует изображать в деформированном состоянии. При этом косинус малого угла будем считать равным единице, а синус – самому углу.

Покажем вид сверху (рисунок 7.15). На основании допущения о невлиятии прогибов на закон изменения сил, действующих в срединной плоскости, будем пренебрегать проекциями сил  $Q_x$  и  $Q_y$  на оси  $x$  и  $y$ .



**Рисунок 7.15**

Составим уравнение равновесия в проекции на ось  $x$ :

$$\left( N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx \right) dy - \cancel{N_x dy} + \left( T + \frac{\partial T}{\partial y} dy \right) dx - \cancel{T dx} = 0.$$

Аналогично записывается уравнение для оси  $y$ . Таким образом, имеем

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial x} = 0. \quad (7.17)$$

Эти уравнения (после деления на толщину пластины) совпадают с дифференциальными уравнениями равновесия плоской задачи теории упругости.

Можно показать, что в уравнениях моментов силы в срединной плоскости дают члены более высокого порядка малости, поэтому данные уравнения получаются такими же, как и для поперечного изгиба:

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}; \quad Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}.$$

Запишем проекцию сил на ось  $z$ . Здесь существенны все члены.

Перерезывающие силы и внешняя нагрузка, как и ранее, дают составляющие

$$\left( \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p \right) dx dy.$$

Рассмотрим проекцию сил  $N_x$  (рисунок 7.16):

$$-N_x \frac{\partial w}{\partial x} dy + \left( N_x \frac{\partial w}{\partial x} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx + \frac{\partial N_x}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} dx \right) dy = \left( N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial N_x}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} \right) dx dy.$$

Аналогично для сил  $N_y$ :

$$\left( N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial N_y}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \right) dx dy.$$

Касательные усилия также проектируются на нормаль (рисунок 7.17). Рассмотрим сначала силы  $T$  на площадках, параллельных оси  $y$ :

$$-T \frac{\partial w}{\partial y} dy + \left( T \frac{\partial w}{\partial y} + T \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx + \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} dx \right) dy = \left( T \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) dx dy.$$

Аналогично для площадок, параллельных оси  $x$ :

$$\left( T \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} \right) dx dy.$$

Складывая все составляющие на ось  $z$ , получим:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2T \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} +$$

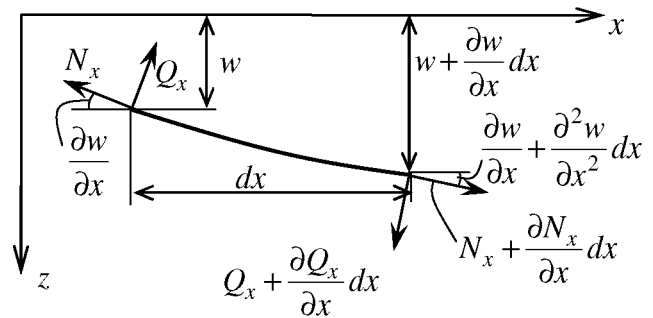


Рисунок 7.16



$$+\frac{\partial w}{\partial x}\underbrace{\left(\frac{\partial N_x}{\partial x}+\frac{\partial T}{\partial y}\right)}_0+\frac{\partial w}{\partial y}\underbrace{\left(\frac{\partial T}{\partial x}+\frac{\partial N_y}{\partial y}\right)}_0=0.$$

При этом выражения в скобках равны нулю на основании уравнений равновесия (7.17).

Выражение для

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x}+\frac{\partial Q_y}{\partial y}$$

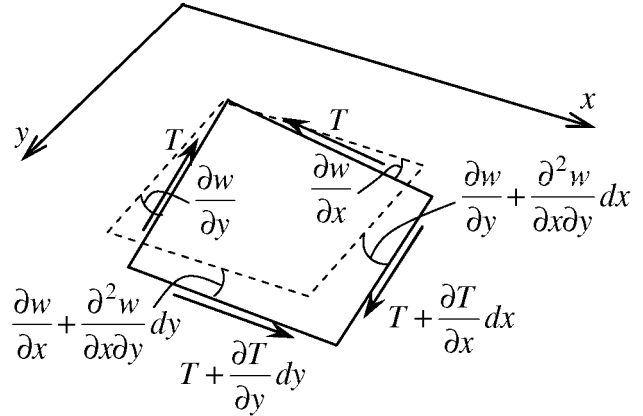
через прогиб здесь имеет тот же самый вид, что и в случае поперечного изгиба.

Таким образом, окончательно получим

$$D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)=p+N_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+N_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+2T\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}. \quad (7.18)$$

Данное уравнение называется дифференциальным уравнением продольно-поперечного изгиба пластины.

Функции  $N_x = N_x(x, y)$ ,  $N_y = N_y(x, y)$  и  $T = T(x, y)$  находятся из решения плоской задачи теории упругости и предполагаются в уравнении (7.18) известными.



**Рисунок 7.17**

## 8 УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАСТИН

### 8.1 Уравнение устойчивости

С явлением устойчивости мы сталкиваемся повседневно. Рассмотрим простейший пример: прямолинейный стержень, сжимаемый продольной силой (рисунок 8.1).

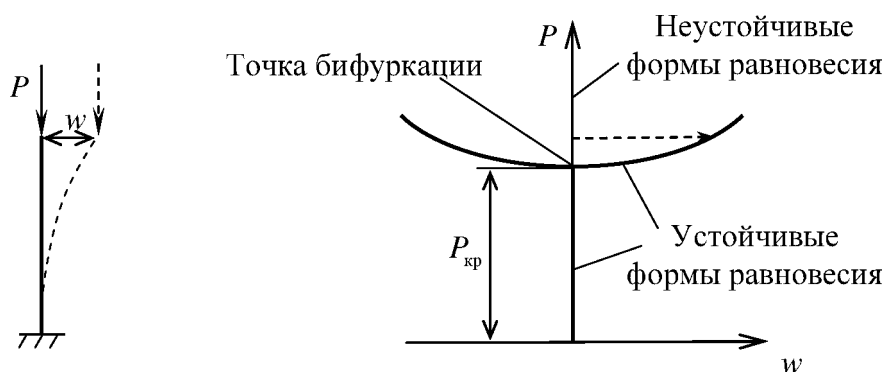


Рисунок 8.1

В начале процесса нагружения стержень будет оставаться прямым. При этом прямая форма равновесия будет являться единственно возможной и устойчивой, т.е. после отклонения стержня он вернется в исходное состояние (можно привести пример с шариком, лежащим на дне чаши).

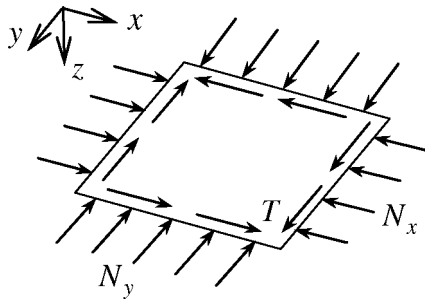
Однако при некотором значении сжимающей силы становится возможной кроме прямой еще и другая, искривленная, форма равновесия. Это значение называется критической силой  $P_{кр}$ . При  $P = P_{кр}$  имеет место безразличная (или нейтральная) форма равновесия, т.е. после отклонения стержня он не будет возвращаться в исходное состояние, но и не будет удаляться от него (можно привести пример с шариком, лежащим на плоскости). Точка разветвления форм равновесия называется точкой бифуркации.

Если  $P > P_{кр}$ , исходная прямолинейная форма равновесия перестает быть устойчивой, т.е. после отклонения стержень не будет возвращаться, а будет уходить от исходного состояния (можно привести пример с шариком, лежащим на вершине купола). Устойчивой же здесь будет искривленная форма равновесия, которая называется формой потери устойчивости.

Следует отметить, что неустойчивая форма равновесия возможна только теоретически, поскольку всегда имеются какие-либо начальные несовершенства (т.е. ось стержня имеет отклонения от прямой, сила прикладывается

с эксцентриситетом и т.п.). Поэтому при достижении силой критического значения стержень начнет искривляться, т.е. терять устойчивость первоначальной формы равновесия.

Аналогичные явления происходят и при сжатии пластины силами, лежащими в ее срединной плоскости (рисунок 8.2).



**Рисунок 8.2**

Потеря устойчивости первоначальной формы равновесия для большинства элементов конструкций является причиной истощения их работоспособности, что в конечном итоге может привести и к разрушению всей конструкции.

При решении задач устойчивости применяются различные методы. Остановимся на наиболее простом из них – методе статического равновесия Эйлера. Согласно этому методу определяют, при каких нагрузках наряду с начальной плоской формой равновесия пластины возникают другие искривленные формы равновесия. В данном случае необходимо использовать уравнения равновесия, составленные для деформированного положения пластины. В качестве такого уравнения будем использовать дифференциальное уравнение продольно-поперечного изгиба пластины при  $p = 0$ :

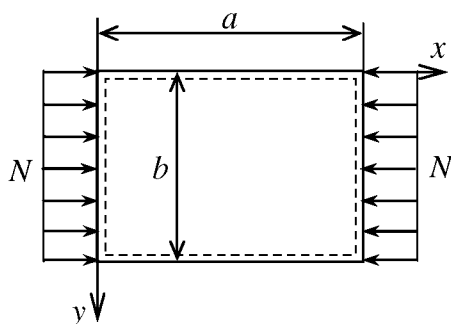
$$D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = -N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2T \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (8.1)$$

Так как потеря устойчивости происходит при сжатии, здесь и в дальнейшем за положительные будем принимать сжимающие силы. Это приводит к смене знака перед силами  $N_x$  и  $N_y$  в правой части уравнения (8.1).

## **8.2 Устойчивость прямоугольной пластины при сжатии в одном направлении**

Рассмотрим свободно опертую прямоугольную пластину, равномерно сжимаемую вдоль оси  $x$  погонными силами  $N$  (рисунок 8.3). В нашем случае  $N_x = N$ ;  $N_y = T = 0$  и уравнение устойчивости (8.1) примет вид

$$D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = -N \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (8.2)$$



**Рисунок 8.3**

Предположим, что при критическом значении сжимающей нагрузки  $N = N_{\text{кр}}$  кроме исходной плоской формы равновесия появляется новая форма равновесия, которую можно представить в виде выражения

$$w = A \sin \frac{\pi m}{a} x \sin \frac{\pi n}{b} y, \quad (8.3)$$

где  $m, n$  – целые положительные числа;  $A$  – некоторый постоянный коэффициент.

Отметим, что это решение удовлетворяет всем граничным условиям (т.е. условиям свободного опирания). Подставим выражение для  $w$  (8.3) в дифференциальное уравнение (8.2):

$$\begin{aligned} D A \left[ \left( \frac{\pi m}{a} \right)^4 + 2 \left( \frac{\pi m}{a} \right)^2 \left( \frac{\pi n}{b} \right)^2 + \left( \frac{\pi n}{b} \right)^4 \right] \sin \frac{\pi m}{a} x \sin \frac{\pi n}{b} y = \\ = N_{\text{кр}} A \left( \frac{\pi m}{a} \right)^2 \sin \frac{\pi m}{a} x \sin \frac{\pi n}{b} y. \end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты при тригонометрических функциях, получим

$$A \left\{ D \left[ \left( \frac{\pi m}{a} \right)^4 + 2 \left( \frac{\pi m}{a} \right)^2 \left( \frac{\pi n}{b} \right)^2 + \left( \frac{\pi n}{b} \right)^4 \right] - N_{\text{кр}} \left( \frac{\pi m}{a} \right)^2 \right\} = 0.$$

Случай  $A = 0$  нас не интересует, поскольку он соответствует исходной плоской форме равновесия. Следовательно, должно обращаться в нуль выражение, стоящее в фигурных скобках:

$$N_{\text{кр}} \left( \frac{\pi m}{a} \right)^2 = D \left( \frac{\pi m}{a} \right)^2 \frac{\pi}{b^2} \left[ m^2 \frac{b^2}{a^2} + 2n^2 + n^4 \frac{1}{m^2} \frac{a^2}{b^2} \right]$$

или

$$N_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 D}{b^2} \left[ \frac{m^2}{\gamma^2} + 2n^2 + \frac{n^4 \gamma^2}{m^2} \right], \quad (8.4)$$

где обозначено  $\gamma = \frac{a}{b}$ .

Таким образом, критическая нагрузка является функцией  $N_{кр} = N_{кр}(m, n)$ , причем  $m$  и  $n$  характеризуют число полуволн, возникающих при потере устойчивости в продольном и поперечном направлениях соответственно (рисунок 8.4).

Нас интересует наименьшая критическая нагрузка. Анализ выражения (8.4) показывает, что для получения минимального значения  $n$  должно быть равно единице. Итак, при выпучивании в поперечном направлении всегда образуется одна полуволна.

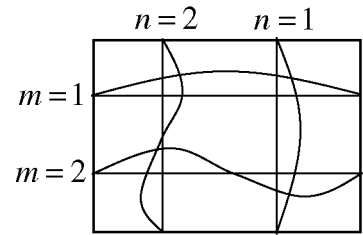


Рисунок 8.4

При  $n = 1$  выражение (8.4) примет вид

$$N_{кр} = \frac{\pi^2 D}{b^2} \left( \frac{m^2}{\gamma^2} + 2 + \frac{\gamma^2}{m^2} \right) = k \frac{\pi^2 D}{b^2}, \quad (8.5)$$

где  $k = \left( \frac{m}{\gamma} + \frac{\gamma}{m} \right)^2$  – так называемый коэффициент устойчивости.

Минимальное значение коэффициента  $k$  достигается при  $m = \gamma$ :

$$k_{\min} = 4.$$

Таким образом, критическая нагрузка будет минимальной, когда отношение сторон определяется целыми числами  $\gamma = m$ . Если это не выполняется, то нужно исследовать поведение  $k$ . Построим график зависимости  $k$  от  $\gamma$  для различных значений  $m$  (рисунок 8.5). При этом последовательно полагаем

$$m = 1, \text{ тогда } k = \left( \frac{1}{\gamma} + \gamma \right)^2;$$

$$m = 2, \text{ тогда } k = \left( \frac{2}{\gamma} + \frac{\gamma}{2} \right)^2$$

и т.д.

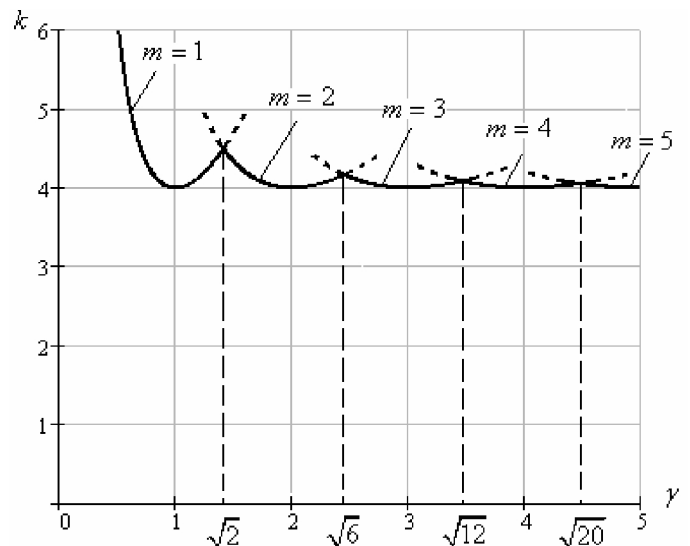


Рисунок 8.5

Огибающая этих кривых дает наименьшее значение  $k$  в зависимости от  $\gamma$ . Анализируя данные графики для расчета свободно опертой пластины приближенно можно принять

$$\begin{cases} k = \left( \frac{1}{\gamma} + \gamma \right)^2, & \text{если } \gamma \leq 1; \\ k = 4, & \text{если } \gamma > 1. \end{cases} \quad (8.6)$$

Как видно (см. рисунок 5), если  $\gamma < \sqrt{2}$ , то при потере устойчивости в продольном направлении образуется одна полуволна ( $m=1$ ), если  $\sqrt{2} < \gamma < \sqrt{6}$  – две полуволны ( $m=2$ ) и т.д.

Запишем выражение для критического напряжения:

$$\sigma_{кр} = \frac{N_{кр}}{h} = k \frac{\pi^2 E h^3}{12(1-\mu^2) h b^2} = \frac{\pi^2}{12(1-\mu^2)} \frac{kE}{\left(b/h\right)^2}.$$

Если принять  $\mu = 0,3$ , то  $\frac{\pi^2}{12(1-\mu^2)} \approx 0,9$ .

Тогда

$$\sigma_{кр} = \frac{0,9kE}{\left(b/h\right)^2}. \quad (8.7)$$

Для жестко заземленной пластины решение ищется в другом виде, а именно

$$w = A \left( 1 - \cos \frac{2\pi m}{a} x \right) \left( 1 - \cos \frac{2\pi n}{b} y \right).$$

В результате получаем аналогичный результат

$$\sigma_{кр} = \frac{0,9kE}{\left(b/h\right)^2},$$

где  $k=9,5$  при  $\gamma=1$ ;  $k \approx 7,5$  при  $\gamma > 3$ .

Для пластины при сдвиге (рисунок 8.6):

$$\tau_{кр} = \frac{0,9kE}{\left(b/h\right)^2}, \quad (8.8)$$

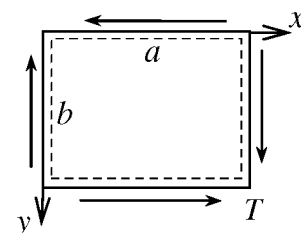


Рисунок 8.6

где

$$k = 5,6 + \frac{3,78}{\gamma^2} - \text{для свободно опертой пластины};$$

$$k = 8,98 + \frac{5,6}{\gamma^2} - \text{для жестко заземленной пластины}.$$

В формуле (8.8) предполагается, что  $a \geq b$  и  $\gamma \geq 1$ .

При сжатии пластины со свободным краем (рисунок 8.7) для коэффициента устойчивости получается следующая формула:

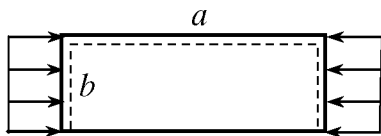


Рисунок 8.7

$$k = 0,425 + \frac{1}{\gamma^2}.$$

В таких условиях работает, например, полка стрингера.

### 8.3 Одновременное действие сдвига и сжатия

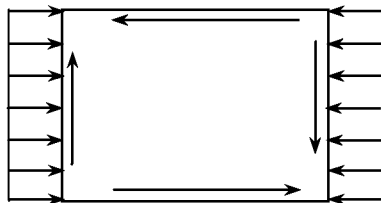


Рисунок 8.8

Для приближенного определения критических напряжений при совместном действии сдвига и сжатия (рисунок 8.8) обычно используется следующее уравнение:

$$\left( \frac{\tau_{кр}}{\tau_{кр}^0} \right)^n + \frac{\sigma_{кр}}{\sigma_{кр}^0} = 1, \quad (8.8)$$

где  $\tau_{кр}^0$  и  $\sigma_{кр}^0$  – критические напряжения при раздельном действии сдвига и сжатия соответственно;  $n = 1,5 \dots 2$  – показатель зависящий от геометрии пластины (обычно полагают  $n \approx 1,7$ ).

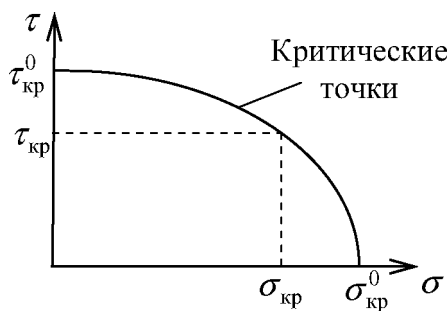


Рисунок 8.9

Кривая, описываемая уравнением (8.8), показана на рисунке 8.9. Отметим, что если задано отношение  $\sigma_{кр}/\tau_{кр}$  или известна одна из этих величин, то из данного уравнения легко найти критические напряжения.

## 8.4 Потеря устойчивости за пределом пропорциональности

Дифференциальное уравнение продольно-поперечного изгиба получено в предположении справедливости закона Гука. Очевидно, что в случае потери устойчивости за пределом пропорциональности данная теория не работает. Выясним, часто ли возникает такая ситуация. Для этого перепишем выражение (8.7) в виде

$$\sigma_{кр} = \frac{0,9kE}{\lambda^2}, \quad (8.9)$$

где  $\lambda = b/h$  – так называемая гибкость пластины.

Тогда

$$\lambda_{пц} = \sqrt{\frac{0,9kE}{\sigma_{пц}}},$$

где  $\sigma_{пц}$  – предел пропорциональности материала.

Таким образом, при  $\lambda < \lambda_{пц}$  потеря устойчивости происходит за пределом пропорциональности.

В качестве примера рассмотрим свободно опертую пластину из Д16АТ ( $E = 7,2 \cdot 10^4$  МПа;  $\sigma_{пц} = 190$  МПа;  $k = 4$ ):

$$\lambda_{пц} = \sqrt{\frac{0,9 \cdot 4 \cdot 7,2 \cdot 10^4}{190}} = 36,9.$$

Это вполне реальное значение гибкости, часто встречающееся в инженерной практике.

Используя уравнение (8.9), построим зависимость критического напряжения от гибкости пластины (рисунок 8.10). Данная кривая называется гиперболой Эйлера.

Видно, что при  $\lambda \rightarrow 0$  критическое напряжение  $\sigma_{кр} \rightarrow \infty$ , что противоречит действительности, поскольку  $\sigma_{кр}$  не может быть больше предела прочности  $\sigma_v$ .

В настоящее время существуют различные подходы к аппроксимации кривой на участке от 0 до  $\lambda_{пц}$ . Простейшей моделью здесь является так называемая прямая Тетмайера-Ясинского, соединяющая точки  $(\lambda_{пц}, \sigma_{пц})$  и  $(0, \sigma_v)$ . Соответствующее уравнение имеет вид



$$\sigma_{кр} = \sigma_{в} - (\sigma_{в} - \sigma_{пц}) \frac{\lambda}{\lambda_{пц}}. \quad (8.10)$$

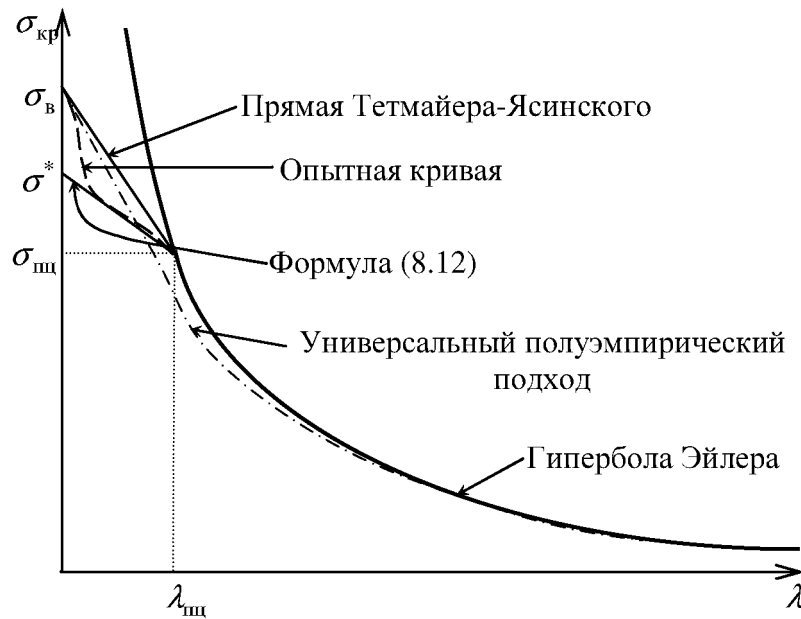


Рисунок 8.10

Часто также используется универсальный полуэмпирический подход, согласно которому

$$\sigma_{кр} = \sigma_{в} \frac{1 + \nu}{1 + \nu + \nu^2}, \quad (8.11)$$

где  $\nu = \frac{\sigma_{в}}{\sigma_0}$ ;  $\sigma_0 = \frac{0,9kE}{\lambda^2}$  – критическое напряжение, найденное по формуле (8.9). Универсальность данного подхода состоит в том, что им можно пользоваться при любых значениях гибкости пластины, поскольку при  $\lambda > \lambda_{пц}$  соответствующая ему кривая приближается к гиперболе Эйлера (см. рисунок 8.10).

Учитывая опытную кривую (см. рисунок 8.10), можно предложить следующую формулу:

$$\sigma_{кр} = \sigma^* - (\sigma^* - \sigma_{пц}) \frac{\lambda}{\lambda_{пц}} = \sigma^* - (\sigma^* - \sigma_{пц}) \sqrt{\frac{\sigma_{пц}}{\sigma_0}}, \quad (8.12)$$

где для прессованных профилей  $\sigma^* \approx 1,2\sigma_{0,2}$ , а для гнутых профилей и обшивок  $\sigma^* \approx (1 \dots 1,1)\sigma_{0,2}$ . Здесь  $\sigma_{0,2}$  – условный предел текучести.

## 8.5 Работа подкрепленной пластины (обшивки) после потери устойчивости от сжатия

Пластины, подкрепленные по продольным краям, способны и после потери устойчивости воспринимать возрастающую нагрузку. В этом случае интерес представляет не только само явление потери устойчивости пластин, но и их закритическое поведение.

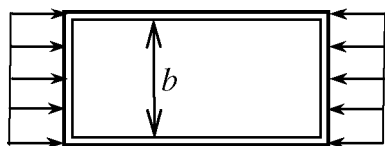


Рисунок 8.11

Рассмотрим прямоугольную пластину, окаймленную жесткими ребрами под действием сжимающей нагрузки (рисунок 8.11). В конструкции летательных аппаратов это панель обшивки со стрингерами. По мере роста сжимающей нагрузки растут и напряжения в панели. По-

ка сжимающие напряжения не превысили  $\sigma_{кр}$ , распределение напряжений по ширине панели будет равномерным. После того, как напряжения превзойдут  $\sigma_{кр}$ , пластина потеряет устойчивость, и по мере роста напряжений распределение по ширине пластины уже не будет равномерным (рисунок 8.12).

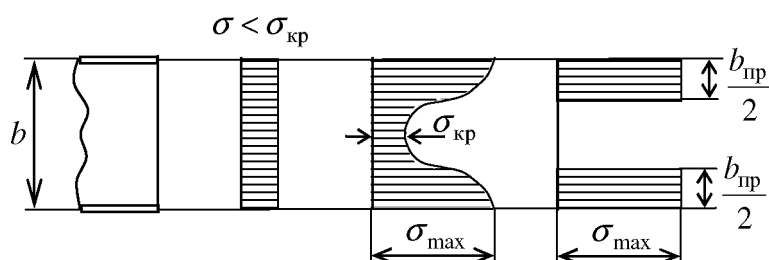


Рисунок 8.12

В средней части пластины напряжения останутся равными критическим, а в пластине под стрингером напряжения будут увеличиваться, оставаясь равными  $\sigma_{стр}$  до тех пор, пока не произойдет потеря устойчивости ребер (стрингеров).

Под несущей способностью будем понимать максимальную нагрузку, которую может выдержать конструкция. Для приближенного решения задачи о несущей способности панели будем считать, что центр пластины не работает. Рассмотрим фиктивную неподкрепленную пластину шириной  $b_{пр}$ , эквивалентную по несущей способности исходной подкрепленной пластине. Будем считать, что она закреплена так же, как и предыдущая. Ширину этой

пластины найдем из условия равенства ее критических напряжений максимальным напряжениям  $\sigma_{\max}$  в исходной пластине:

$$\sigma_{\max} = \frac{0,9kE}{\left(\frac{b_{\text{пр}}}{h}\right)^2},$$

где  $\sigma_{\max} = \sigma_{\text{кр}}^{\text{стр}}$  – критические напряжения потери устойчивости стрингера.

Отсюда находим так называемую приведенную ширину

$$b_{\text{пр}} = h \sqrt{k \frac{0,9E}{\sigma_{\max}}}.$$

Можно рассуждать по другому:

$$\sigma_{\max} = \underbrace{\frac{0,9kE}{(b/h)^2}}_{\sigma_{\text{кр}}} \left(\frac{b}{b_{\text{пр}}}\right)^2.$$

Тогда

$$b_{\text{пр}} = b \sqrt{\frac{\sigma_{\text{кр}}}{\sigma_{\max}}} = b \varphi. \quad (8.13)$$

где  $\varphi$  – редуционный коэффициент.

Последняя формула позволяет определять ту ширину пластины, которая продолжает воспринимать сжимающую нагрузку после потери устойчивости.

Таким образом, редуционный коэффициент  $\varphi$  показывает долю участия потерявшей устойчивость обшивки в работе всей панели:

$$\varphi = \sqrt{\frac{\sigma_{\text{кр}}}{\sigma_{\text{кр}}^{\text{стр}}}}. \quad (8.14)$$

## 8.6 Потеря устойчивости окаймленной пластины от сдвиговых усилий

Рассмотрим панель, состоящую из тонкой обшивки (стенки) и подкрепляющих по контуру ребер (поясов и стоек), как показано на рисунке 8.13. Панель закреплена и нагружена силой  $P$ .

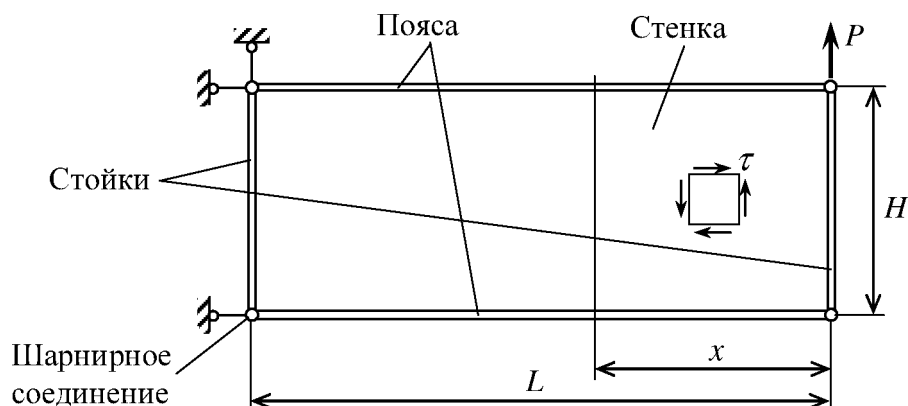


Рисунок 8.13

Поскольку стенка тонкая, изгибающий момент воспринимается только поясами. Будем считать также, что перерезывающая сила воспринимается только стенкой, и по высоте возникают постоянные касательные напряжения:

$$-N_{\text{верх}} = N_{\text{нижн}} = \frac{Px}{H}; \quad \tau = \frac{P}{Hh},$$

где  $N_{\text{верх}}$  и  $N_{\text{нижн}}$  – нормальные усилия, возникающие в сечениях верхнего и нижнего поясов соответственно;  $\tau$  – касательное напряжение в стенке.

Такая картина наблюдается до потери устойчивости стенки, т.е. при  $\tau < \tau_{\text{кр}}$ . При этом пояса и стойки работают на растяжение–сжатие, а стенка – на чистый сдвиг. Выясним, как передаются усилия, для чего мысленно отсоединим пояса и стойки от стенки (рисунок 8.14). Штрихом будем отмечать величины, относящиеся к стойкам.

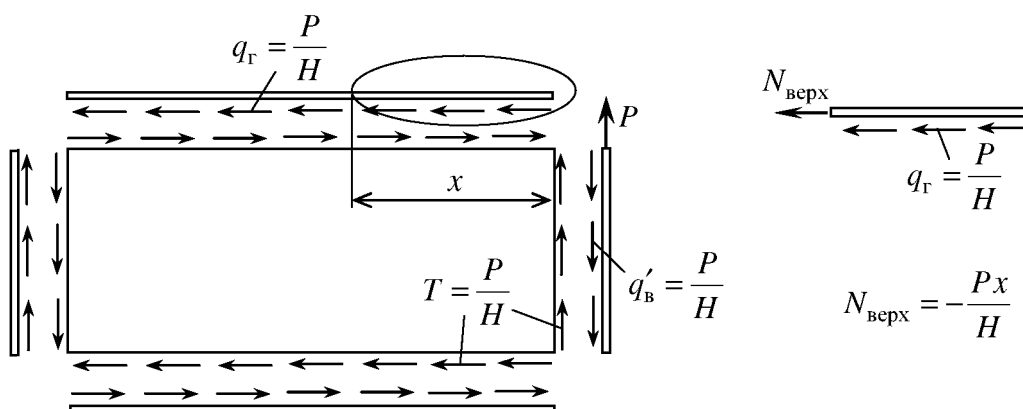


Рисунок 8.14

От силы  $P$  в стенке появляются касательные напряжения  $\tau$ . При этом на ее краях будут возникать погонные касательные усилия  $T = \tau h$ . На пояса в противоположную сторону будут действовать вертикальные усилия  $q_v = T$ , а на стойки – горизонтальные усилия  $q_r = T$ .

Возникает вопрос: можно ли увеличивать нагрузку  $P$  после того, как стенка потеряет устойчивость?

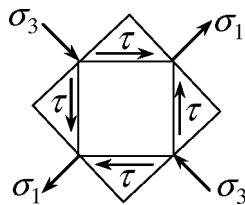


Рисунок 8.15

Выделим элемент стенки (рисунок 8.15). На ее сторонах будут возникать только касательные напряжения. При этом главные напряжения будут действовать на площадках, расположенных под углом  $45^\circ$  к сторонам рассматриваемого элемента:

$$\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau.$$

При увеличении нагрузки сжимающее напряжение  $\sigma_3$  вызывает потерю устойчивости стенки, после чего в ней появляются гофры (рисунок 8.16). При дальнейшем нагружении напряжение  $\sigma_3$  практически не увеличивается. Поскольку сжимающее напряжение  $\sigma_3 = \sigma_{кр}$  мало по сравнению с  $\sigma_1$ , им можно пренебречь. Таким образом, рост внешней нагрузки будет сопровождаться только ростом растягивающего горизонтального напряжения  $\sigma_1$ .

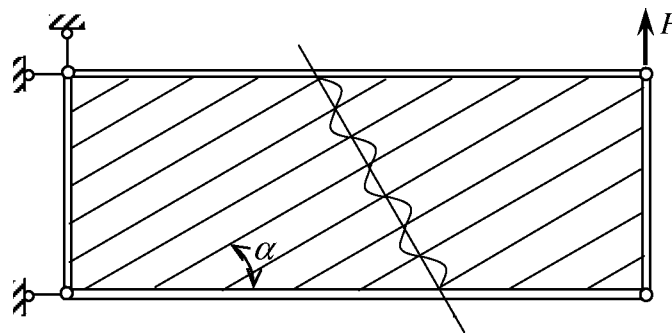


Рисунок 8.16

Если стойки жесткие, то угол наклона гофр  $\alpha = 45^\circ$ . Однако за счет некоторой упругости ребер  $\alpha = 40...42^\circ$ .

Рассмотрим, что происходит в стенке после потери устойчивости. Выделим малый элемент стенки и рассмотрим его равновесие (рисунок 8.17):

$$\sum x = 0 \rightarrow -\sigma \cos \alpha h \overline{ab} + \sigma_{xx} h \overline{bc} = 0;$$

$$\overline{ab} = \overline{bc} \cos \alpha; \quad \sigma_{xx} = \sigma \cos^2 \alpha;$$

$$\sum y = 0 \rightarrow \sigma \sin \alpha h \overline{ab} + \tau h \overline{bc} = 0;$$

$$\sigma = \frac{\tau}{\sin \alpha \cos \alpha}.$$

С другой стороны, так как поперечная сила и после потери устойчивости воспринимается только стенкой:

$$\tau = \frac{P}{Hh}.$$

Откуда

$$\sigma = \frac{P}{Hh \sin \alpha \cos \alpha}; \quad \sigma_{xx} = \frac{P}{Hh} \operatorname{ctg} \alpha.$$

Следует отметить, что при расчете стенки после потери устойчивости интерес представляют напряжения  $\sigma_{xx}$  и  $\sigma_{yy}$ , которые создают дополнительную нагрузку на пояса и стойки.

Для определения  $\sigma_{yy}$  рассмотрим равновесие другого элемента (рисунок 8.18):

$$\sum y = 0 \rightarrow \sigma_{yy} = \sigma \sin^2 \alpha;$$

$$\sigma_{yy} = \frac{P}{Hh} \operatorname{tg} \alpha.$$

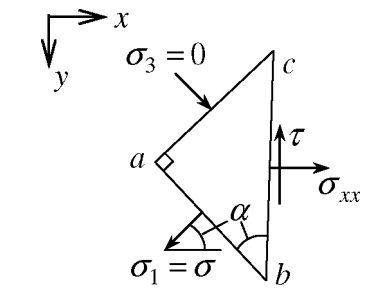


Рисунок 8.17

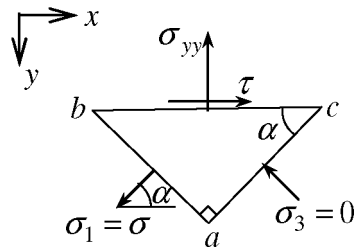


Рисунок 8.18

Таким образом, после потери устойчивости стенки от сдвиговых усилий в ней возникают нормальные растягивающие напряжения  $\sigma_{xx}$  и  $\sigma_{yy}$ . Покажем погонные силы, действующие по сторонам элемента стенки (рисунок 8.19).

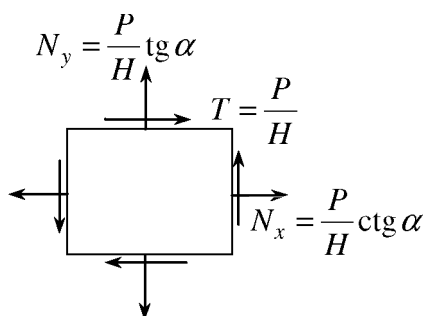


Рисунок 8.19

Схема нагружения конструктивных элементов панели после потери устойчивости представлена на рисунке 8.20. Видно, что пояса и стойки начинают уже работать в условиях продольно-поперечного изгиба, причем пояса (стойки) можно рассматривать как балки, опирающиеся на стойки (пояса). При этом, очевидно, появятся силы реакций, которые будут дополнительно сжимать подкрепляющие стержневые элементы.

дополнительно сжимать подкрепляющие стержневые элементы.

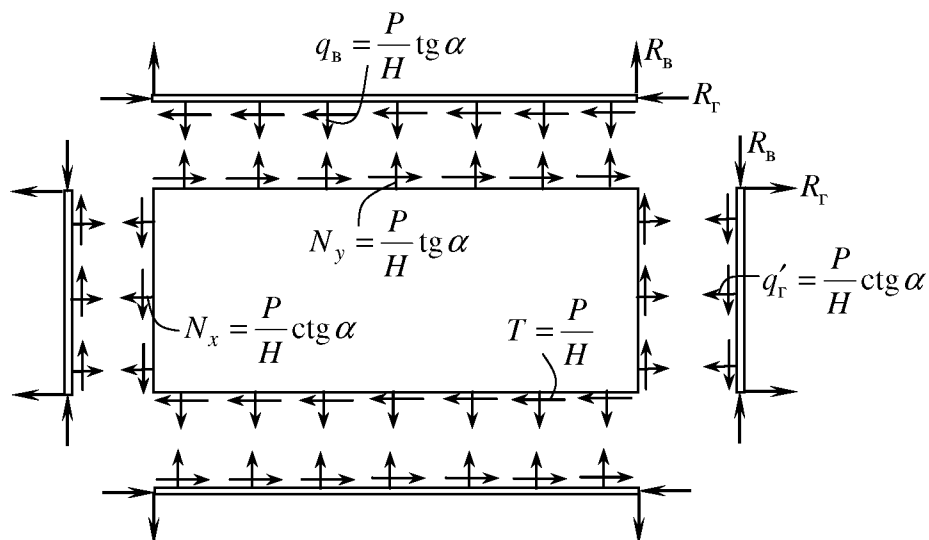


Рисунок 8.20

Вычислим вертикальную и горизонтальную составляющие реакций:

$$R_B = \frac{PL}{2H} \operatorname{tg} \alpha; \quad R_r = \frac{P}{2} \operatorname{ctg} \alpha.$$

При этом нормальные усилия в поясах будут равны

$$N_{\text{верх}} = -\frac{Px}{H} - \frac{P}{2} \operatorname{ctg} \alpha;$$

$$N_{\text{нижн}} = \frac{Px}{H} - \frac{P}{2} \operatorname{ctg} \alpha.$$

Очевидно, что исчерпание несущей способности рассматриваемой панели произойдет после потери устойчивости верхнего пояса, который из всех подкрепляющих элементов работает в самых сложных условиях.

## 9 ОБОЛОЧКИ ВРАЩЕНИЯ ПРИ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ НАГРУЗКАХ

Будем рассматривать оболочки, срединная поверхность которых представляет поверхность вращения. При построении теории оболочек используются те же гипотезы, что и при построении теории жестких пластин:

- 1) гипотеза прямых нормалей;
- 2) гипотеза о ненадавливании между слоями.

Существенной особенностью построения теории оболочек является то, что из-за большой кривизны нельзя пренебрегать силами, возникающими в срединной поверхности. Таким образом, при построении теории следует обязательно учитывать силы, возникающие в срединной поверхности. Часто именно эти силы определяют прочность, а изгибными напряжениями можно пренебречь, т.е. можно считать напряжения постоянными по величине.

### 9.1 Безмоментная теория оболочек вращения

Существует большой класс задач, в которых напряжения практически не изменяются по толщине. Напряжения в этом случае не создают моментов. Такое напряженное состояние называется безмоментным напряженным состоянием.

#### 9.1.1 Геометрия срединной поверхности оболочки вращения

Оболочкой называется тело, ограниченное двумя криволинейными поверхностями, расстояние между которыми мало по сравнению с прочими размерами. Геометрическое место точек, равноудаленных от обеих поверхностей, называется срединной поверхностью. Здесь мы будем рассматривать оболочки, срединная поверхность которых представляет поверхность вращения (рисунок 9.1).

Линии, образующиеся при пересечении поверхности с плоскостями, проходящими через ось вращения, называются меридианами. Линии, перпендикулярные меридианам, представляют собой окружности и называются параллелями.

Для определения положения точки  $M$  на поверхности вращения достаточно задать угол  $\varphi$ , отсчитываемый от некоторого нулевого меридиана, и расстояние  $s$ , измеряемое от края оболочки вдоль меридиана. Иногда вместо дуговой координаты  $s$  более удобно использовать угловую  $\theta$ , представляю-



щую собой угол между осью вращения и нормалью к поверхности. Углы  $\theta$  и  $\varphi$  называются широтой и долготой. В некоторых случаях применяют также цилиндрическую координату  $r$  (радиус параллели).

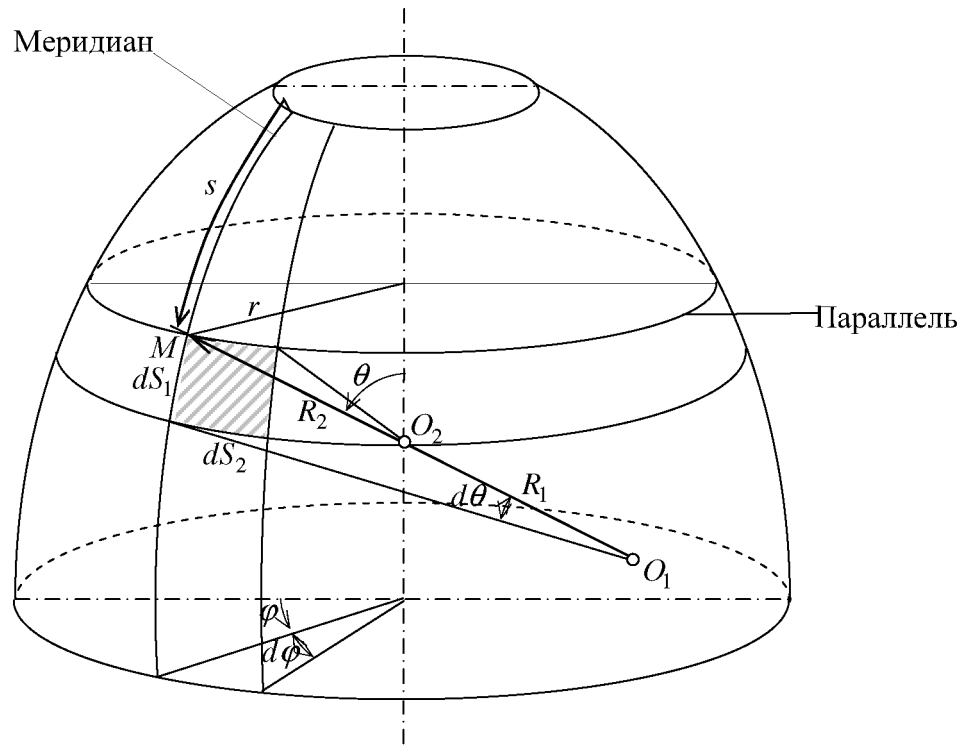


Рисунок 9.1

Радиус кривизны меридиана обозначим  $R_1$  (отрезок  $O_1M$ ). Радиус кривизны поверхности вращения в направлении, перпендикулярном меридиану, обозначим через  $R_2$ . Он равен отрезку нормали  $O_2M$ , заключенному между рассматриваемой точкой  $M$  и ось вращения. Действительно, если на параллели взять две рядом расположенные точки и восстановить нормали к поверхности в этих точках, то они пересекутся на оси вращения в точке  $O_2$ . Следовательно, последняя будет центром кривизны. Радиусы  $R_1$  и  $R_2$  называются главными радиусами кривизны поверхности вращения. Они обладают свойством экстремальности. Это значит, что радиус кривизны поверхности в любом другом направлении принимает значение, находящееся между  $R_1$  и  $R_2$ .

Выделим четырьмя сечениями бесконечно малый элемент поверхности вращения с размерами  $dS_1 \times dS_2$  (см. рисунок 9.1). Тогда

$$dS_1 = R_1 d\theta; \quad dS_2 = r d\varphi = R_2 \sin \theta d\varphi.$$

### 9.1.2 Условия существования безмоментного напряженного состояния

Для реализации безмоментного напряженного состояния в оболочке должны выполняться следующие условия:

1. Форма оболочки должна быть плавной, т.е. без скачкообразного изменения радиусов кривизны и толщины оболочки.
2. Нагрузки должны меняться плавно, без сосредоточенных сил и моментов.
3. Не должно быть жестких закреплений краев оболочки.

На рисунке 9.2 показаны четыре зоны, в которых нарушаются условия существования безмоментного напряженного состояния. На этих участках появляются изгибающие моменты, но моментное напряженное состояние быстро затухает, и поэтому оставшуюся часть оболочки можно

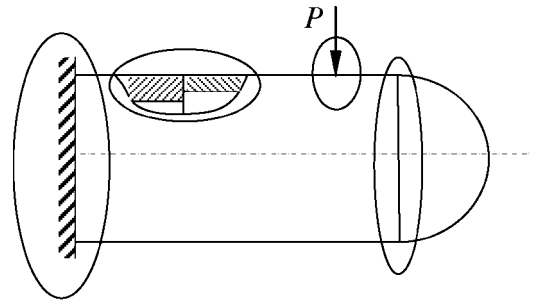


Рисунок 9.2

рассматривать как оболочку, работающую в безмоментном напряженном состоянии. Чем тоньше оболочка, тем быстрее затухает моментное напряженное состояние и тем ближе она к безмоментной.

При создании несущих тонкостенных конструкций всегда стремятся обеспечить их работу в основном как безмоментных оболочек, поскольку они получаются наиболее легкими. Этим и определяется большое практическое значение безмоментной теории.

### 9.1.3 Расчет безмоментных оболочек вращения при осесимметричном нагружении

Рассмотрим произвольную оболочку вращения, нагруженную симметрично относительно оси вращения. Распределенную поверхностную нагрузку представим в виде двух составляющих  $p_n$  и  $p_t$ , действующих вдоль нормали  $n$  к поверхности и по касательной  $t$  к меридиану (рисунок 9.3), причем в силу осевой симметрии нагрузка будет являться только функцией угла  $\theta$  и не будет зависеть от угла  $\varphi$ .

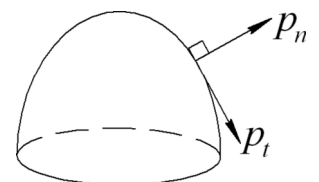


Рисунок 9.3

Выделим бесконечно малый элемент оболочки  $abcd$ , ограниченный двумя близкими меридиональными сечениями и двумя коническими сече-

ниями, нормальными к срединной поверхности (рисунок 9.4). В сечениях  $ab$  и  $bc$  возникают нормальные напряжения  $\sigma_{11}$  и  $\sigma_{22}$ . В силу симметрии касательные напряжения  $\sigma_{12}$  будут равны нулю. Поскольку нормальные напряжения постоянны по толщине, введем погонные силы:

$N_1 = \sigma_{11}h$  – меридиональные погонные силы;

$N_2 = \sigma_{22}h$  – окружные погонные силы.

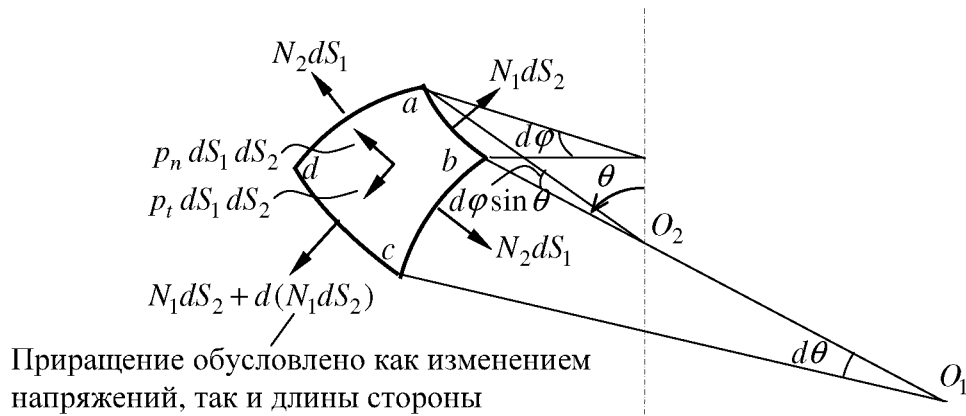


Рисунок 9.4

Покажем проекции бесконечно малого элемента оболочки на плоскости, перпендикулярные касательным к параллели (рисунок 9.5,а) и меридиану (рисунок 9.5,б).

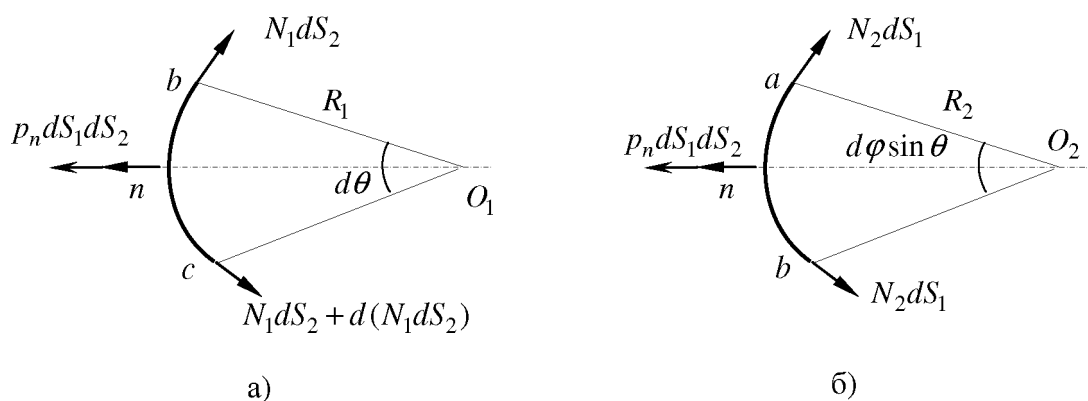


Рисунок 9.5

Составим уравнение равновесия в проекции на нормаль к срединной поверхности оболочки:

$$-N_1 dS_2 \frac{d\theta}{2} - \left[ N_1 dS_2 + \cancel{d(N_1 dS_2)}_{\text{б.м.}} \right] \frac{d\theta}{2} - 2N_2 dS_1 \frac{d\varphi}{2} \sin \theta + p_n dS_1 dS_2 = 0;$$

$$-N_1 dS_2 d\theta - N_2 dS_1 d\varphi \sin \theta + p_n dS_1 dS_2 = 0.$$

Учитывая, что

$$d\theta = \frac{dS_1}{R_1}; \quad \sin \theta d\varphi = \frac{dS_2}{R_2},$$

получим первое уравнение равновесия

$$\frac{N_1}{R_1} + \frac{N_2}{R_2} = p_n, \quad (9.1)$$

называемое уравнением Лапласа.

Второе уравнение равновесия можно получить, составив проекцию всех сил на касательную к меридиану  $t$ . Однако мы поступим иначе. Составим уравнение равновесия не для элементарного (бесконечно малого) участка, а для участка зоны от полюса до произвольного сечения, характеризуемого углом  $\theta$  (рисунок 9.6).

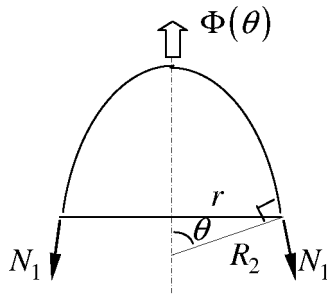


Рисунок 9.6

Обозначим через  $\Phi(\theta)$  равнодействующую всех внешних сил, действующих на отсеченную часть оболочки.

Уравнение равновесия отсеченной части оболочки имеет вид

$$\Phi(\theta) = 2\pi r N_1 \sin \theta$$

или

$$N_1 = \frac{\Phi(\theta)}{2\pi r \sin \theta}.$$

Так как  $r = R_2 \sin \theta$ , то

$$N_1 = \frac{\Phi(\theta)}{2\pi R_2 \sin^2 \theta}. \quad (9.2)$$

Данное равенство называется уравнением равновесия зоны.

Таким образом, мы имеем два уравнения для определения двух неизвестных функций  $N_1, N_2$ . Следовательно, задача является статически определенной.

### 9.1.4 Вычисление равнодействующей внешней нагрузки

Рассмотрим простейший пример, когда в полюсе оболочки через жесткую шайбу действует сосредоточенная сила  $P$  (рисунок 9.7). В этом случае для любого сечения получим

$$\Phi(\theta) = P = \text{const}.$$

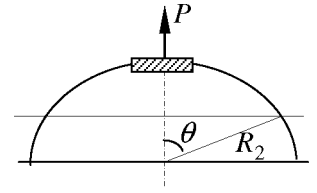


Рисунок 9.7

Пусть далее имеется сосуд, заполненный жидкостью (рисунок 9.8). Очевидно, что для сечения  $a-a$  равнодействующая будет равна силе тяжести всей жидкости:

$$\Phi(\theta) = mg = \rho V g,$$

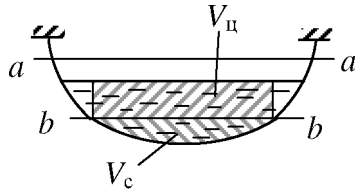


Рисунок 9.8

где  $m, \rho, V$  – масса, плотность и объем жидкости.

В сечении  $b-b$  на основании законов гидростатики равнодействующая внешней нагрузки будет равна силе тяжести жидкости в отсеченной части плюс сила тяжести столба жидкости, основание которого совпадает с сечением  $b-b$ , а высота равна глубине, т.е. расстоянию от данного сечения до уровня жидкости:

$$\Phi(\theta) = \rho(V_c + V_{\text{ц}})g,$$

где  $V_c$  – объем отсеченной части (сферического сегмента);  $V_{\text{ц}}$  – объем столба жидкости (цилиндра).

Получим общую формулу для подсчета равнодействующей внешних сил (рисунок 9.9):

$$\Phi(\theta) = \int_{\theta_0}^{\theta} (p_n \cos \vartheta - p_t \sin \vartheta) 2\pi \rho dS_1 + \Phi_0, \quad (9.3)$$

где  $\Phi_0$  – нагрузка на верхнем срезе.

Поскольку

$$\rho = R_2 \sin \vartheta; \quad dS_1 = R_1 d\vartheta,$$

получаем

$$\Phi(\theta) = 2\pi \int_0^{\theta} (p_n \cos \vartheta - p_t \sin \vartheta) R_1 R_2 \sin \vartheta d\vartheta + \Phi_0. \quad (9.4)$$

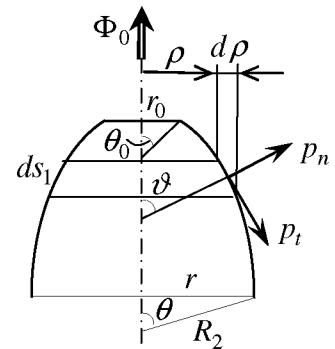


Рисунок 9.9

Подставляя в (9.3) выражение  $dS_1 = \frac{d\rho}{\cos \vartheta}$ , запишем другую формулу

$$\Phi(\theta) = 2\pi \int_{r_0}^r (p_n - p_t \operatorname{tg} \vartheta) \rho d\rho + \Phi_0. \quad (9.5)$$

Здесь можно выразить  $\rho = \rho(\vartheta)$  либо  $\vartheta = \vartheta(\rho)$ .

Рассмотрим частный случай – сосуд, находящийся под действием постоянного давления:  $p_n = p$ ;  $p_t = 0$ . Пусть, кроме того, оболочка замкнута в вершине и не нагружена сосредоточенной силой, т.е.  $\theta_0 = 0$ ;  $r_0 = 0$ ;  $\Phi_0 = 0$ . Тогда

$$\Phi(\theta) = 2\pi \int_0^\theta p_n \rho d\rho = \frac{2\pi p r^2}{2} = \pi p r^2 = \pi p R_2^2 \sin^2 \theta.$$

Из уравнения равновесия отсеченной зоны (9.2) находим

$$N_1 = \frac{\pi p R_2^2 \sin^2 \theta}{2\pi R \sin^2 \theta} = \frac{p R_2}{2}.$$

Используя уравнения Лапласа (9.1), запишем

$$\frac{N_2}{R_2} = p - \frac{N_1}{R_1} = p - \frac{p R_2}{2 R_1};$$

$$N_2 = p R_2 - \frac{p R_2^2}{2 R_1};$$

$$N_2 = p R_2 \left( 1 - \frac{R_2}{2 R_1} \right).$$

Так, для сферической оболочки  $R_1 = R_2 = R$ , тогда

$$N_1 = \frac{p R}{2}; \quad N_2 = p R \left( 1 - \frac{1}{2} \right) = \frac{p R}{2}.$$

Для цилиндрической оболочки  $R_1 = \infty$ ;  $R_2 = R$ :

$$N_1 = \frac{p R}{2}; \quad N_2 = p R.$$

Таким образом, окружные усилия для цилиндрических оболочек в два раза больше меридиональных (продольных). Следовательно, разрушение здесь в основном происходит по образующей.

Для конической оболочки  $R_1 = \infty$ ;  $R_2 = x \operatorname{tg} \alpha$  (рисунок 9.10):

$$N_1 = \frac{px \operatorname{tg} \alpha}{2}; \quad N_2 = px \operatorname{tg} \alpha.$$

Для конической оболочки также окружные усилия в два раза больше меридиональных.

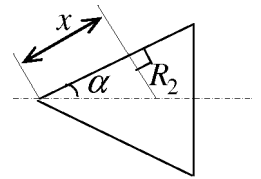


Рисунок 9.10

## 9.2 Моментная теория цилиндрической оболочки при осесимметричном нагружении

Рассмотрим круговую цилиндрическую оболочку (рисунок 9.11). Введем цилиндрическую систему координат  $x, \varphi, z$ . Через  $R$  обозначим радиус срединной поверхности. Нагрузка, действующая на оболочку, является осесимметричной, т.е.

$$\frac{\partial p_n}{\partial \varphi} = 0; \quad p_n = p(x); \quad p_t = 0.$$

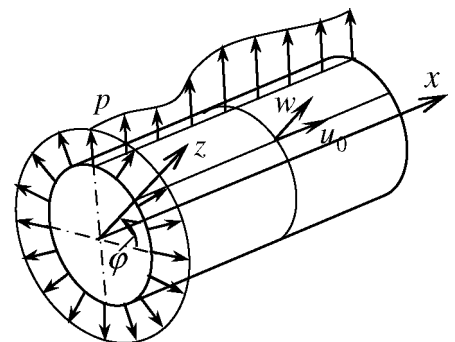


Рисунок 9.11

Напряженно-деформированное состояние здесь также не будет зависеть от окружной координаты  $\varphi$ .

Через  $w$  и  $u_0$  будем соответственно обозначать перемещения точек срединной поверхности оболочки в радиальном направлении (по оси  $z$ ) и в осевом направлении (по оси  $x$ ), причем

$$w = w(x); \quad u_0 = u_0(x).$$

Для построения моментной теории цилиндрической оболочки воспользуемся, как и в теории пластин, гипотезой прямых нормалей и гипотезой о ненадавливании слоев друг на друга.

Составим план решения задачи:

1. Выразить деформации через прогиб.
2. В соответствии с законом Гука найти напряжения.
3. По известным напряжениям найти погонные силы и моменты.

4. Составить уравнения равновесия. Подставляя в них выражения для сил и моментов через функцию прогиба, получить дифференциальное уравнение изгиба.

### 9.2.1 Геометрические соотношения

Выделим бесконечно малый элемент двумя осевыми сечениями с углом раствора  $d\varphi$ . Рассмотрим деформацию слоя  $mn$ , отстоящего от срединной поверхности на расстоянии  $z$  (рисунок 9.12).

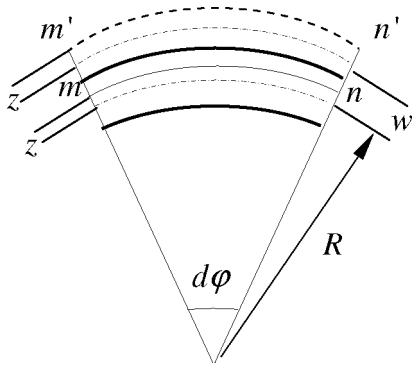


Рисунок 9.12

Пусть после деформации слой займет положение  $m'n'$ . При этом для окружной деформации можно записать

$$\varepsilon_{22} = \frac{m'n' - mn}{mn} = \frac{(R + w + z)d\varphi - (R + z)d\varphi}{(R + z)d\varphi} = \frac{w}{R + z}.$$

Будем в дальнейшем рассматривать тонкие оболочки, для которых  $\frac{h}{R} \ll 1$ , точнее  $\frac{h}{R} < \frac{1}{20}$ .

Тогда

$$\varepsilon_{22} = \frac{w}{R \left(1 + \frac{z}{R}\right)} \approx \frac{w}{R};$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{w}{R}. \quad (9.6)$$

Определим деформацию в меридиональном (осевом) направлении  $\varepsilon_{11}$ . Для этого разрежем оболочку плоскостью, проходящей через ее ось (рисунок 9.13). Выберем на срединной поверхности точку  $A$ . Восстановим перпендикуляр и на расстоянии  $z$  от срединной поверхности отметим точку  $B$ .

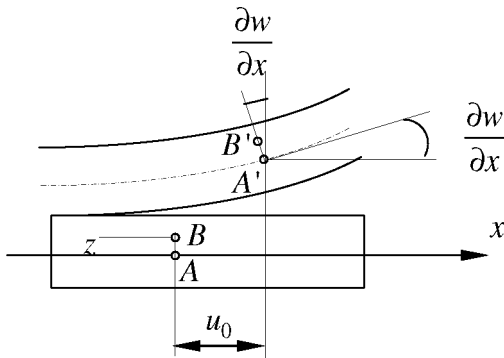


Рисунок 9.13

Под действием внешней нагрузки оболочка деформируется и занимает новое положение, причем  $A \rightarrow A'$ ,  $B \rightarrow B'$ . Согласно введенной гипотезе отрезок  $A'B'$  остается нормальным к деформируемой срединной поверхности и его длина не меняется.



Осевое перемещение точки  $B$  можно выразить как

$$u = u_0 - z \frac{dw}{dx}. \quad (9.7)$$

Используя соотношения Коши, запишем

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du_0}{dx} - z \frac{d^2 w}{dx^2}.$$

Введем обозначение  $\varepsilon_{11}^0 = \frac{du_0}{dx}$  – относительное удлинение срединной поверхности в осевом направлении. Тогда

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{11}^0 - z \frac{d^2 w}{dx^2}. \quad (9.8)$$

### 9.2.2 Физические зависимости

Согласно гипотезе о ненадавливании слоев  $\sigma_{zz} = 0$ . Тогда закон Гука примет вид

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_{11} + \mu \varepsilon_{22}); \\ \sigma_{22} &= \frac{E}{1-\mu^2} (\mu \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}). \end{aligned}$$

В силу осевой симметрии  $\sigma_{12} = \sigma_{21} = 0$ .

С учетом (9.6) и (9.8) запишем

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{E}{1-\mu^2} \left( \varepsilon_{11}^0 - z \frac{d^2 w}{dx^2} + \mu \frac{w}{R} \right); \\ \sigma_{22} &= \frac{E}{1-\mu^2} \left( \mu \varepsilon_{11}^0 - \mu z \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{w}{R} \right). \end{aligned} \quad (9.9)$$

### 9.2.3 Погонные силы и моменты

Вычислим погонные силы, возникающие в сечениях оболочки. Для этого выделим бесконечно малый элемент оболочки четырьмя сечениями (рисунок 9.14) и покажем действующие на него напряжения.

Равнодействующее элементарное усилие на площадке  $dS_z dz$  равно

$$\sigma_{11} dS_z dz.$$

Для тонких оболочек

$$dS_z = (R + z) d\varphi = R \left( 1 + \frac{z}{R} \right) d\varphi \approx R d\varphi = dS.$$

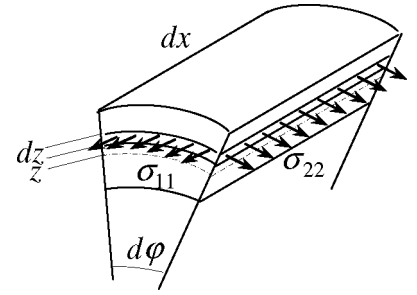


Рисунок 9.14

Суммируя эти силы по всей толщине, найдем

$$N_1 dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{11} dz dz.$$

Тогда для осевой погонной силы с учетом (9.9) получим

$$N_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{11} dz = \frac{E}{1-\mu^2} \left[ \left( \varepsilon_{11}^0 + \mu \frac{w}{R} \right) \underbrace{\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dz}_h - \frac{d^2 w}{dx^2} \underbrace{\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z dz}_0 \right];$$

$$N_1 = \frac{Eh}{1-\mu^2} \left( \varepsilon_{11}^0 + \mu \frac{w}{R} \right). \quad (9.10)$$

Аналогично находим окружную погонную силу

$$N_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{22} dz;$$

$$N_2 = \frac{Eh}{1-\mu^2} \left( \varepsilon_{11}^0 \mu + \frac{w}{R} \right). \quad (9.11)$$

Для получения связи между  $N_1$  и  $N_2$  вычислим

$$N_2 - \mu N_1 = \frac{Eh}{1-\mu^2} \left( \cancel{\mu \varepsilon_{11}^0} + \frac{w}{R} - \cancel{\mu \varepsilon_{11}^0} - \mu^2 \frac{w}{R} \right) = \frac{Eh}{1-\mu^2} \frac{w}{R} (1-\mu^2).$$

Тогда

$$N_2 = \mu N_1 + \frac{Eh}{R} w. \quad (9.12)$$

Найдем погонные изгибающие моменты:

$$M_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{11} z dz; \quad M_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{22} z dz.$$

Подставляя выражения для напряжений (9.9), запишем

$$M_1 = \frac{E}{1-\mu^2} \left( \varepsilon_{11}^0 + \mu \frac{w}{R} \right) \underbrace{\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z dz}_0 - \frac{E}{1-\mu^2} \frac{d^2 w}{dx^2} \underbrace{\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 dz}_{\frac{h^3}{12}}.$$

Таким образом, получим

$$M_1 = -D \frac{d^2 w}{dx^2}, \quad (9.13)$$

где  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$  – изгибная жесткость оболочки.

Аналогично находим

$$M_2 = -\mu D \frac{d^2 w}{dx^2}. \quad (9.14)$$

В поперечном сечении будет также появляться перерезывающая сила  $Q_1$  за счет касательных напряжений  $\sigma_{13}$ . Напряжения  $\sigma_{13}$  не могут быть найдены из закона Гука, так как согласно принятой гипотезе прямых нормалей  $\varepsilon_{13} = 0$ . Поэтому  $Q_1$  будем вычислять в обход закона Гука, из уравнения равновесия.

#### 9.2.4 Дифференциальное уравнение изгиба цилиндрической оболочки

Выделим бесконечно малый элемент срединной поверхности оболочки и покажем действующие на него силы (рисунок 9.15).

Из уравнения равновесия  $\sum x = 0$  следует, что  $dN_1 = 0$ , так как тангенциальная нагрузка  $p_t$  отсутствует. Таким образом, осевая погонная сила не меняется вдоль образующей.

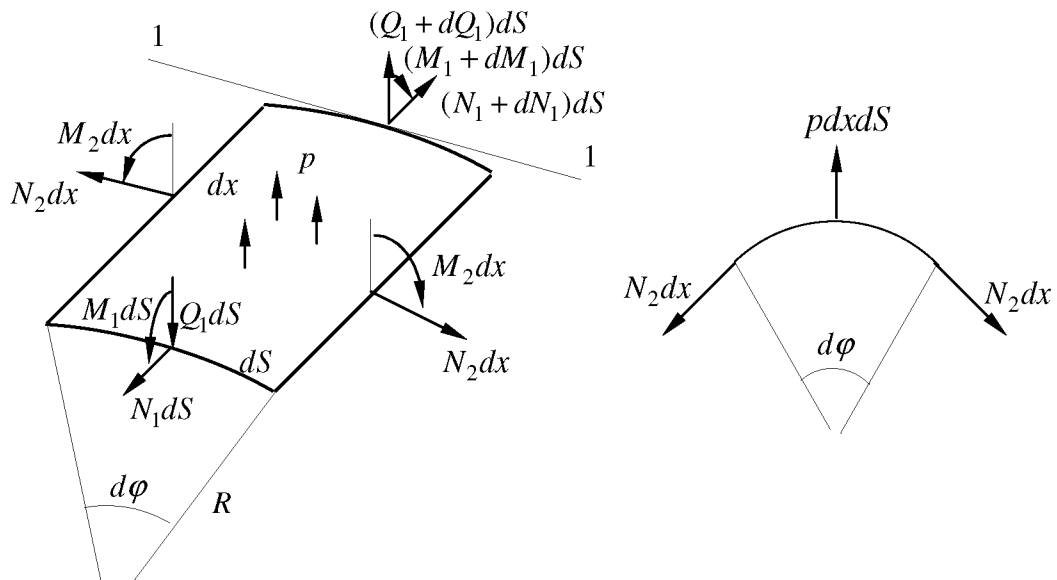


Рисунок 9.15

Примем

$$2 \sin \frac{d\varphi}{2} \approx 2 \frac{d\varphi}{2} = d\varphi.$$

Учитывая, что

$$dS = R d\varphi; \quad d\varphi = \frac{dS}{R},$$

найдем суммарную проекцию  $p$  и  $N_2$  на ось  $z$ :

$$p dx dS - 2 N_2 dx \frac{d\varphi}{2} = \left( p - \frac{N_2}{R} \right) dx dS = (p - p_1) dx dS,$$

где обозначено  $p_1 = \frac{N_2}{R}$ .

Теперь запишем уравнение равновесия в проекции на нормаль (т.е. на ось  $z$ ):

$$dQ_1 dS + (p - p_1) dx dS = 0;$$

$$\frac{dQ_1}{dx} + p - p_1 = 0. \quad (9.15)$$

Величина  $Q_1$  неизвестна. Для ее определения составим третье уравнение равновесия  $\sum M_{1-1} = 0$ :

$$(\cancel{M_1} + dM_1) dS - \cancel{M_1} dS - Q_1 dS dx = 0;$$

$$Q_1 = \frac{dM_1}{dx}.$$

Подставляя выражение (9.13) для  $M_1$ , получим

$$Q_1 = -D \frac{d^3 w}{dx^3}. \quad (9.16)$$

С учетом (9.16) уравнение (9.15) примет вид

$$-D \frac{d^4 w}{dx^4} + p - p_1 = 0.$$

Учтем, что

$$p_1 = \frac{N_2}{R} = \frac{Eh}{R^2} w + \frac{\mu}{R} N_1.$$

Тогда предыдущее уравнение можно переписать как

$$-D \frac{d^4 w}{dx^4} + p - \frac{Eh}{R^2} w - \frac{\mu}{R} N_1 = 0$$

или

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{Eh}{R^2} w = p - \frac{\mu}{R} N_1. \quad (9.17)$$

Равенство (9.17) называется дифференциальным уравнением изгиба осесимметричной цилиндрической оболочки.

### 9.2.5 Решение дифференциального уравнения изгиба

Рассмотрим случай, когда  $N_1 = 0$ . При этом уравнение (9.17) примет вид

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{Eh}{R^2} w = p \quad (9.18)$$

или

$$\begin{aligned} \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{Eh}{R^2 D} w &= \frac{p}{D}; \\ \frac{d^4 w}{dx^4} + 4\alpha^4 w &= \frac{p}{D}, \end{aligned} \quad (9.19)$$

где обозначено

$$4\alpha^4 = \frac{Eh}{R^2 D} = \frac{Eh}{R^2} \frac{12(1-\mu^2)}{Eh^3},$$

причем

$$\alpha = \sqrt[4]{3(1-\mu^2)} \frac{1}{\sqrt{Rh}}.$$

При  $\mu = 0,3$  имеем  $\alpha = \frac{1,29}{\sqrt{Rh}}$ . Если ввести так называемый параметр тонкостенности  $\lambda = \frac{R}{h}$ , то

$$\alpha = \frac{1,29}{R\sqrt{\frac{Rh}{R^2}}} = \frac{1,29\sqrt{\lambda}}{R}.$$

Итак, мы имеем неоднородное линейное дифференциальное уравнение четвертого порядка. Его решение имеет вид

$$w(x) = w_0(x) + w^*(x),$$

где  $w_0(x)$  – общее решение однородного дифференциального уравнения;  $w^*(x)$  – частное решение неоднородного дифференциального уравнения (зависит от нагрузки  $p$ ).

Решение однородного уравнения будем искать в виде  $Ae^{rx}$ . Получаем характеристическое уравнение

$$r^4 + 4\alpha^4 = 0.$$

Перепишем его следующим образом:

$$r^4 + 4\alpha^2 r^2 + 4\alpha^4 = 4\alpha^2 r^2;$$

$$(r^2 + 2\alpha^2)^2 = (2\alpha r)^2;$$

$$r^2 + 2\alpha^2 = \pm 2\alpha r;$$

$$r^2 \pm 2\alpha r + 2\alpha^2 = 0.$$

Теперь легко найти корни характеристического уравнения:

$$r = \mp \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 2\alpha^2} = \pm \alpha \pm i\alpha.$$

Таким образом, имеем четыре комплексных корня. При этом фундаментальную систему решений составят функции

$$e^{\pm \alpha x \pm i\alpha x} = e^{\pm \alpha x} e^{\pm i\alpha x}.$$

Общее решение однородного дифференциального уравнения является их линейной комбинацией:

$$w_0 = e^{-\alpha x} (A_1 e^{i\alpha x} + A_2 e^{-i\alpha x}) + e^{\alpha x} (A_3 e^{i\alpha x} + A_4 e^{-i\alpha x}).$$

Применяя формулы

$$e^{i\alpha x} = \cos \alpha x + i \sin \alpha x; \quad e^{-i\alpha x} = \cos \alpha x - i \sin \alpha x,$$

решение можно переписать как

$$w_0 = e^{-\alpha x} (B_1 \cos \alpha x + B_2 \sin \alpha x) + e^{\alpha x} (B_3 \cos \alpha x + B_4 \sin \alpha x). \quad (9.20)$$

Характерной особенностью этого решения является то, что оно состоит из двух частей. Первая часть решения является быстро затухающей функцией аргумента  $x$ , а вторая часть – быстро возрастающей функцией того же аргумента.

Если воспользоваться формулами

$$e^{\pm \alpha x} = \operatorname{ch} \alpha x \pm \operatorname{sh} \alpha x,$$

то получим решение в виде

$$w_0 = C_1 \operatorname{ch} \alpha x \cos \alpha x + C_2 \operatorname{sh} \alpha x \sin \alpha x + C_3 \operatorname{ch} \alpha x \cos \alpha x + C_4 \operatorname{sh} \alpha x \sin \alpha x. \quad (9.21)$$

Входящие сюда произвольные постоянные находятся из граничных условий:

- для жестко заземленного края  $w = 0$ ;  $\frac{dw}{dx} = 0$ ;
- для свободно опертого края  $w = 0$ ;  $M_1 = 0$ ;
- для свободного края  $M_1 = 0$ ;  $Q_1 = 0$ .

В качестве примера рассмотрим цилиндрическую оболочку с заземленными торцами, нагруженную постоянным давлением  $p$  (рисунок 9.16). Поместим начало системы координат в середину оболочки.

Поскольку  $p = \text{const}$ , можно принять, что

$$w^* = \text{const}.$$

Тогда

$$\frac{d^4 w^*}{dx^4} = 0,$$

и из (9.18) находим частное решение неоднородного уравнения

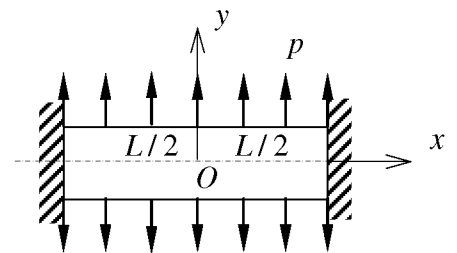


Рисунок 9.16

$$w^* = \frac{pR^2}{Eh}.$$

В силу симметрии конструкции общее решение  $w_0(x)$  должно содержать только четные функции. Тогда  $C_3 = C_4 = 0$ .

Таким образом, решение примет вид

$$w = \frac{pR^2}{Eh} + C_1 \operatorname{ch} \alpha x \cos \alpha x + C_2 \operatorname{sh} \alpha x \sin \alpha x.$$

Постоянные  $C_1, C_2$  находятся из следующих граничных условий:

$$\text{при } x = \pm \frac{L}{2} \quad w = 0; \quad \frac{dw}{dx} = 0.$$

Подставив  $x = \frac{l}{2}$  в выражение для  $w = 0$  и  $\frac{dw}{dx} = 0$ , получим  $C_1, C_2$ .

### 9.2.6 Расчет цилиндрического сосуда, заполненного жидкостью. Понятие краевого эффекта

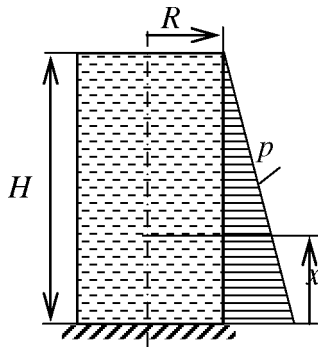


Рисунок 9.17

Рассмотрим цилиндрический сосуд, заполненный жидкостью (рисунок 9.17). Нижний торец заделан, верхний – свободен. Гидростатическое давление пропорционально глубине:

$$p = \rho g (H - x),$$

где  $\rho$  – плотность жидкости.

Собственным весом оболочки пренебрегаем, тогда  $N_1 = 0$ .

При этом дифференциальное уравнение изгиба цилиндрической оболочки (9.17) примет вид

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{Eh}{R^2} w = \rho g (H - x).$$

Как и ранее, решение будем искать в виде суммы

$$w(x) = w_0(x) + w^*(x).$$

Поскольку давление изменяется по линейному закону, предположим, что частное решение неоднородного уравнения удовлетворяет условию



$$\frac{d^4 w^*}{dx^4} = 0.$$

Тогда из дифференциального уравнения находим

$$\frac{Eh}{R^2} w^* = \rho g (H - x);$$

$$w^* = \frac{\rho g R^2}{Eh} (H - x).$$

Общее решение однородного уравнения здесь удобно взять с использованием быстро затухающей и быстро возрастающих функций, т.е. в виде (9.20). Тогда

$$w = \frac{\rho g R^2}{Eh} (H - x) + e^{-\alpha x} (B_1 \cos \alpha x + B_2 \sin \alpha x) + e^{\alpha x} (B_3 \cos \alpha x + B_4 \sin \alpha x).$$

Граничные условия для данной задачи имеют следующий вид:

$$\text{при } x = 0 \rightarrow w = 0; \quad \frac{dw}{dx} = 0 \quad (\text{защемленный край});$$

$$\text{при } x = H \rightarrow M_1 = 0; \quad Q_1 = 0 \quad (\text{свободный край}).$$

Учитывая, что  $M_1 = -D \frac{d^2 w}{dx^2}$  и  $Q_1 = -D \frac{d^3 w}{dx^3}$ , второе условие можно переписать как

$$\text{при } x = H \rightarrow \frac{d^2 w}{dx^2} = 0; \quad \frac{d^3 w}{dx^3} = 0.$$

Для тонких длинных оболочек задачу можно упростить. Пусть

$$\lambda = \frac{R}{h} = 100; \quad H = 4R.$$

Тогда на верхнем крае при  $x = H$ :

$$w(H) = e^{-\alpha H} (B_1 \cos \alpha H + B_2 \sin \alpha H) + e^{\alpha H} (B_3 \cos \alpha H + B_4 \sin \alpha H),$$

причем

$$\alpha = \frac{1,29\sqrt{\lambda}}{R} = \frac{12,9}{R}; \quad \alpha H = 4 \cdot 12,9 \approx 52.$$

Перемещения на свободном конце, очевидно, невелики. Однако при  $\alpha H \approx 52$  имеем  $e^{\alpha H} \gg e^{-\alpha H}$ . Поэтому для компенсации большого множителя

$e^{\alpha H}$  постоянные  $B_3$  и  $B_4$  должны иметь порядок, близкий  $e^{-\alpha H}$ , а  $B_1$  и  $B_2$  могут быть достаточно большими.

Рассмотрим решение вблизи заделки:

$$w(x=0) = \frac{\rho g R^2}{Eh} H + e^{-\alpha 0} (B_1 \cos \alpha 0 + B_2 \sin \alpha 0) + e^{\alpha 0} (B_3 \cos \alpha 0 + B_4 \sin \alpha 0),$$

причем  $e^0 = 1$ , а  $B_3 \approx e^{-\alpha H}$  и  $B_4 \approx e^{-\alpha H}$ .

Отсюда следует, что для анализа напряженного состояния вблизи заделки можно считать  $B_3 = B_4 = 0$ , т.е. отбросить возрастающую часть решения, содержащую  $e^{\alpha x}$ , и оставить только убывающую. Тогда решение можно записать в виде

$$w = \frac{\rho g R^2}{Eh} (H - x) + e^{-\alpha x} (B_1 \cos \alpha x + B_2 \sin \alpha x).$$

Для отыскания произвольных постоянных  $B_1$  и  $B_2$  имеем два граничных условия: при  $x=0 \rightarrow w=0$ ;  $\frac{dw}{dx}=0$ . При этом граничные условия на другом торце никак не будут сказываться на напряженно-деформированном состоянии вблизи заделки.

Вычислим производные:

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dx} &= -\frac{\rho g R^2}{Eh} + \alpha e^{-\alpha x} [-(B_1 \cos \alpha x + B_2 \sin \alpha x) - B_1 \sin \alpha x + B_2 \cos \alpha x] = \\ &= -\frac{\rho g R^2}{Eh} + \alpha e^{-\alpha x} [-B_1 (\cos \alpha x + \sin \alpha x) + B_2 (-\sin \alpha x + \cos \alpha x)]; \\ \frac{d^2 w}{dx^2} &= \alpha^2 e^{-\alpha x} [B_1 (\cos \alpha x + \sin \alpha x) - B_2 (\cos \alpha x - \sin \alpha x) - \\ &- B_1 (-\sin \alpha x + \cos \alpha x) + B_2 (-\cos \alpha x - \sin \alpha x)] = 2\alpha^2 e^{-\alpha x} (B_1 \sin \alpha x - B_2 \cos \alpha x). \end{aligned}$$

Из первого граничного условия ( $x=0 \rightarrow w=0$ ) находим

$$w(0) = \frac{\rho g R^2 H}{Eh} + B_1 = 0 \Rightarrow B_1 = -\frac{\rho g R^2 H}{Eh}.$$

Из второго условия  $\left( x=0 \rightarrow \frac{dw}{dx}=0 \right)$  имеем

$$\frac{dw}{dx}(0) = -\frac{\rho g R^2}{Eh} + \alpha(-B_1 + B_2) = 0 \Rightarrow B_2 = B_1 \left(1 - \frac{1}{\alpha H} \right) \approx B_1.$$

Подставляя найденные постоянные, окончательно получим

$$w = \frac{\rho g R^2}{Eh} \left[ H - x - H e^{-\alpha x} (\cos \alpha x + \sin \alpha x) \right].$$

Зная функцию прогиба, можно найти все остальные величины. Например, для погонной окружной силы имеем

$$N_2 = \mu N_1 + \frac{Eh}{R} w.$$

Учитывая, что  $N_1 = 0$ , получим

$$N_2 = \rho g R (H - x) - \rho g R H e^{-\alpha x} (\cos \alpha x + \sin \alpha x).$$

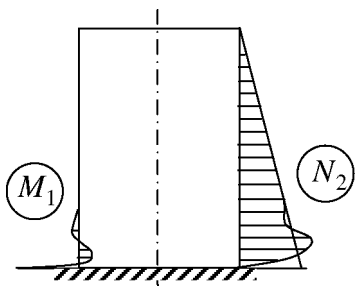
Первый член этого выражения (соответствующий частному решению неоднородного дифференциального уравнения) представляет собой решение по безмоментной теории оболочек. Действительно, согласно уравнению Лапласа

$$\frac{N_1}{R} + \frac{N_2}{R} = p_n; \quad N_2 = p_n R = \rho g R (H - x).$$

Вычислим погонный изгибающий момент:

$$M_1 = -D \frac{d^2 w}{dx^2} = -D 2 \alpha^2 \frac{\rho g R^2 H}{Eh} e^{-\alpha x} (\cos \alpha x - \sin \alpha x);$$

$$M_1 = -\frac{\rho g H}{2 \alpha^2} e^{-\alpha x} (\cos \alpha x - \sin \alpha x).$$



**Рисунок 9.18**

Эпюры найденных силовых факторов представлены на рисунке 9.18.

Изложенный прием отбрасывания возрастающей части функции  $w(x)$  и анализа оставшейся затухающей части решения в области рассматриваемого края позволяет во многих случаях исследовать особенности напряженного состояния на одном торце оболочки независимо

от другого. Быстро затухающее напряженное состояние вблизи края оболочки носит название краевого эффекта. Этот метод справедлив, если длина

оболочки  $H$  настолько велика, что величиной  $e^{-\alpha H}$  можно пренебречь по сравнению с  $e^{\alpha H}$ . Наличие такого быстро затухающего решения характерно для общей теории оболочек. Поэтому на практике часто приходится выделять краевые эффекты.

Исследуем скорость затухания изгибающего момента. Очевидно, что скорость затухания краевого эффекта определяется поведением функции  $e^{-\alpha x}$ . Введем безразмерную координату  $\bar{x} = x/H$ . В нашем случае  $\alpha H = 52$ , поэтому  $\alpha x = 52\bar{x}$ .

Имеем

$$\text{при } \bar{x} = 0: e^{-52\bar{x}} = 1;$$

$$\text{при } \bar{x} = 0,05: e^{-52\bar{x}} = 0,07;$$

$$\text{при } \bar{x} = 0,1: e^{-52\bar{x}} = 0,005.$$

Таким образом, на расстоянии 10% длины оболочки от заделки значение изгибающего момента составляет 0,5% от наибольшего.

Чем тоньше оболочка, тем быстрее затухает краевой эффект.

## 10 МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

МКЭ, получивший в последние годы широкое развитие, представляет собой приближенный метод решения разнообразных задач математической физики. В задачах теории упругости и строительной механики МКЭ позволяет распространить известные принципы расчета дискретных систем (таких как фермы, рамы) на случай непрерывных тел и сложных конструкций.

### 10.1 Вводные замечания

Рассмотрим непрерывное тело, нагруженное произвольным образом. Сеткой секущих поверхностей мысленно разобьем тело на отдельные подобласти (рисунок 10.1). Полученные подобласти имеют хотя и малые, но все же конечные размеры, откуда и происходит название «конечные элементы».

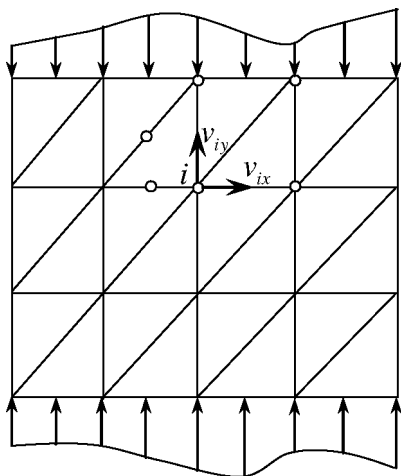


Рисунок 10.1

На границах между отдельными элементами выбираются некоторые точки – узлы. Перемещения узлов в направлении координатных осей (а иногда и угловые перемещения) принимаются в качестве основных неизвестных.

Здесь сразу можно усмотреть аналогию с матричным методом перемещений для дискретных конструкций, в котором за основные неизвестные также принимались узловые перемещения.

Прежде всего, встает вопрос о том, как найти перемещения (а, следовательно, деформации и напряжения) внутри каждого конечного элемента, зная перемещения принадлежащих ему узлов. Следует подчеркнуть, что в случае стержневых систем расчет базируется на использовании технической теории растяжения, изгиба и кручения бруса, которая и позволяет выразить перемещения и напряжения в любом сечении бруса через узловые перемещения. Для сплошного тела эта задача решается приближенно, если сделать те или иные предположения о характере поля перемещений в элементе. Выбор таких аппроксимирующих функций является одним из наиболее ответственных и важных этапов в МКЭ.

Если такой выбор сделан, то напряженно-деформированное состояние (НДС) будет однозначно определяться узловыми перемещениями. Поэтому под конечным элементом следует понимать не просто некоторую малую об-

ласть тела, а область тела в совокупности с заданными в ней аппроксимирующими функциями.

Вторая трудность возникает при объединении конечных элементов в единую систему. Следует напомнить, что в матричном методе перемещений стержневые элементы соединяются непосредственно в узлах, и там такой проблемы не возникает.

Если мы выделим конечный элемент, то на его границах будут возникать распределенные силы (рисунок 10.2). Эти силы в МКЭ заменяются эквивалентными им в энергетическом смысле узловыми силами. Затем записываются уравнения равновесия узлов обычным образом, как и в матричном методе перемещений.

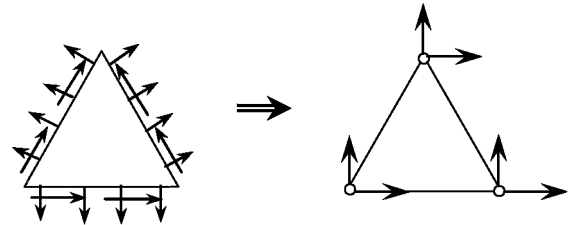


Рисунок 10.2

Внешние поверхностные и объемные нагрузки также заменяются эквивалентными им в энергетическом смысле сосредоточенными силами, действующими в узлах.

## 10.2 Перемещения, деформации и напряжения конечного элемента

Рассмотрим конечный элемент “ $e$ ” упругого тела, имеющий узлы  $i, j, \dots, m$  (рисунок 10.3). Для наглядности будем рассматривать плоский элемент. Обозначим через  $[v_i], [v_j], \dots, [v_m]$  матрицы перемещений соответствующих узлов. Количество компонент в этих матрицах зависит от характера задачи.

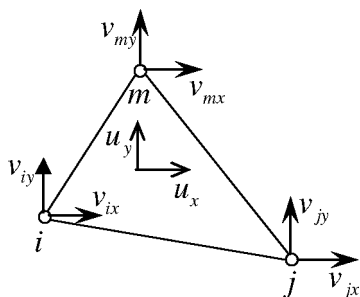


Рисунок 10.3

Так, в случае плоской задачи матрицы будут содержать по две компоненты:

$$[v_i] = \begin{bmatrix} v_{ix} \\ v_{iy} \end{bmatrix}.$$

Все узловые перемещения элемента “ $e$ ” образуют матрицу

$$[v^e] = \{ v_i \mid v_j \mid \dots \mid v_m \}.$$

Рассмотрим произвольную точку внутри элемента. Перемещения этой точки в направлении координатных осей образуют матрицу-столбец, которую обозначим через  $[u]$ :

$$[u] = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix}.$$

Поскольку перемещения изменяются при переходе от одной точки элемента к другой, компоненты матрицы  $[u]$  представляют собой функции координат.

Как отмечалось ранее, в МКЭ принимается допущение, согласно которому перемещения всех точек элемента однозначно определяются его узловыми перемещениями. В матричных обозначениях это означает существование равенства

$$[u] = [\alpha][v^e]. \quad (10.1)$$

Здесь  $[\alpha] = [\alpha(x, y)]$  – прямоугольная матрица, в которой количество строк равно числу компонент матрицы  $[u]$ , а количество столбцов – числу компонент матрицы  $[v^e]$ . Элементами  $[\alpha]$  являются некоторые функции координат (аппроксимирующие функции).

Предположим, что эти аппроксимирующие функции уже известны.

Для плоской задачи будем иметь

$$[u] = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \end{bmatrix} [v^e].$$

В этой записи  $[\alpha_x]$  и  $[\alpha_y]$  суть матрицы-строки, элементами которых являются аппроксимирующие функции. Данное равенство включает в себе следующие два соотношения:

$$u_x = [\alpha_x][v^e] \quad \text{и} \quad u_y = [\alpha_y][v^e].$$

Вычислим деформации элемента “e” по формулам Коши:

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}; \quad \epsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}; \quad \epsilon_{xy} = \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}.$$

Тогда

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial [\alpha_x]}{\partial x} [v^e]; \quad \epsilon_{yy} = \frac{\partial [\alpha_y]}{\partial y} [v^e]; \quad \epsilon_{xy} = \left( \frac{\partial [\alpha_y]}{\partial x} + \frac{\partial [\alpha_x]}{\partial y} \right) [v^e].$$

Объединяя это в матричное соотношение, получим

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \alpha_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \alpha_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \alpha_y}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_x}{\partial y} \end{bmatrix} [v^e]$$

или

$$[\varepsilon] = [\beta][v^e], \quad (10.2)$$

где

$$[\beta] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \alpha_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \alpha_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \alpha_y}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_x}{\partial y} \end{bmatrix}.$$

Аналогично можно вычислить матрицу  $[\beta]$  и в других случаях.

Воспользуемся теперь законом Гука в форме

$$[\sigma] = [\kappa][\varepsilon],$$

где  $[\sigma] = \{\sigma_{xx} \ \sigma_{yy} \ \sigma_{xy}\}$ .

Будем иметь

$$[\sigma] = [\kappa][\beta][v^e]. \quad (10.3)$$

Таким образом, при известной матрице аппроксимирующих функций  $[\alpha]$  напряженное и деформированное состояние конечного элемента однозначно определяется узловыми перемещениями  $[v^e]$ .

### 10.3 Матрица жесткости конечного элемента

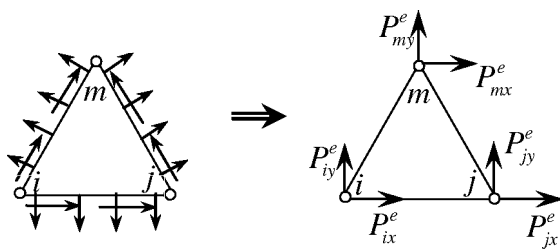


Рисунок 10.4

Предположим сначала, что деформированный конечный элемент “e” находится в равновесии под действием нагрузок, приложенных к его границе со стороны смежных элементов (рисунок 10.4). В соответствии со сказанным ранее заменим эти нагруз-



ки эквивалентными узловыми силами

$$[P^e] = \{P_i^e \mid P_j^e \mid \dots \mid P_m^e\}.$$

Пусть узловые перемещения  $[v^e]$  получили независимые бесконечно малые приращения, определяемые матрицей

$$[\delta v^e] = \{\delta v_i \mid \delta v_j \mid \dots \mid \delta v_m\}.$$

Силы  $[P^e]$  на перемещениях  $[\delta v^e]$  совершат работу

$$\delta A^e = [\delta v^e]^T [P^e]. \quad (10.4)$$

Поскольку перемещения точек элемента связаны с узловыми перемещениями равенством (10.1), они получают приращения

$$[\delta u] = [\alpha][\delta v^e].$$

В силу соотношения (10.2) деформации  $[\epsilon]$  изменятся на величину

$$[\delta \epsilon] = [\beta][\delta v^e]. \quad (10.5)$$

Согласно принципу возможных перемещений вариация потенциальной энергии деформации элемента должна равняться работе внешних для него сил  $[P^e]$ :

$$\delta U^e = \delta A^e. \quad (10.6)$$

Вариация потенциальной энергии деформации элемента имеет вид

$$\delta U^e = \int_{\tau^e} \delta W \, d\tau,$$

где  $\delta W = [\delta \epsilon]^T [\sigma]$ ;  $\tau^e$  – объем, занимаемый конечным элементом “e”.

Это соотношение можно преобразовать с учетом формул (10.5) и (10.3). В итоге равенство (10.6) примет вид

$$[\delta v^e]^T [P^e] = [\delta v^e]^T \left( \int_{\tau^e} [\beta]^T [\kappa] [\beta] \, d\tau \right) [v^e].$$

Выражение, заключенное в круглые скобки, представляет собой квадратную матрицу. Ее элементы получаются интегрированием элементов матрицы  $[\beta]^T [\kappa] [\beta]$ .

Введя обозначение

$$[K^e] = \int_{\tau^e} [\beta]^T [\kappa] [\beta] d\tau \quad (10.7)$$

и заметив, что вариации перемещений узлов являются независимыми, получим

$$[P^e] = [K^e][v^e].$$

Это равенство связывает узловые силы  $[P^e]$  с перемещениями  $[v^e]$  в стандартной форме, поэтому матрицу  $[K^e]$  можно назвать матрицей жесткости рассматриваемого конечного элемента. Из формулы (10.7) для ее вычисления видно, что при известной геометрии элемента и заданных упругих характеристиках материала матрица жесткости вполне определяется выбором аппроксимирующих функций.

В дальнейшем будем полагать, что местные координаты, в которых сделан вывод матрицы жесткости  $[K^e]$  элемента, совпадают с общими. При необходимости можно выполнить переход от местных координат к общим, как мы это делали раньше в матричном методе перемещений.

#### 10.4 Приведение распределенных внешних нагрузок к эквивалентным узловым силам

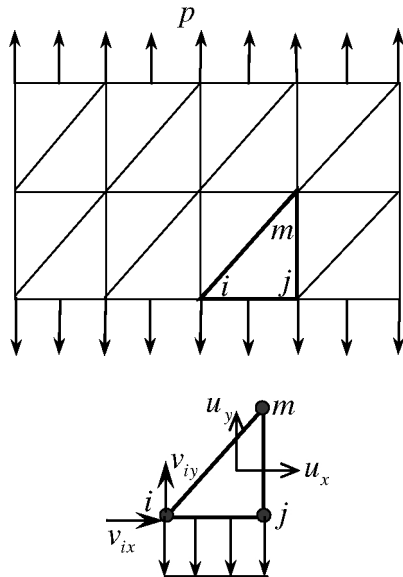


Рисунок 10.5

Рассмотрим такой конечный элемент “e”, часть поверхности которого совпадает с внешней поверхностью, ограничивающей тело (рисунок 10.5). Пусть  $[R]$  и  $[p]$  – соответственно матрицы объемных и поверхностных сил.

Придадим узловым перемещениям бесконечно малые приращения  $[\delta v^e]$ ; приращения перемещений при этом определяются следующим образом:

$$[\delta u] = [\alpha][\delta v^e].$$

Вычислим работу сил  $[R]$  и  $[p]$  на этих перемещениях:

$$\delta A^e = \int_{\tau^e} [\delta u]^T [R] d\tau + \int_{\omega^e} [\delta u]^T [p] d\omega.$$

Первый интеграл берется по объему конечного элемента, а второй – по его поверхности. Внося сюда выражение для  $[\delta u]$ , получим

$$\delta A^e = [\delta v^e]^T \left( \int_{\tau^e} [\alpha]^T [R] d\tau + \int_{\omega^e} [\alpha]^T [p] d\omega \right).$$

Предположим теперь, что вместо распределенных нагрузок  $[R]$  и  $[p]$  к узлам элемента приложены некоторые сосредоточенные силы, образующие матрицу

$$[\tilde{P}^e] = \{ \tilde{P}_i^e \mid \tilde{P}_j^e \mid \dots \mid \tilde{P}_m^e \}.$$

На перемещениях  $[\delta v^e]$  они совершают работу

$$\delta \tilde{A}^e = [\delta v^e]^T [\tilde{P}^e].$$

Будем считать, что узловые силы  $[\tilde{P}^e]$  эквивалентными заданной внешней нагрузке, если  $\delta A^e = \delta \tilde{A}^e$ . Приравнявая выражения и имея в виду, что элементы матрицы  $[\delta v^e]$  независимы, приходим к равенству

$$[\tilde{P}^e] = \int_{\tau^e} [\alpha]^T [R] d\tau + \int_{\omega^e} [\alpha]^T [p] d\omega. \quad (10.8)$$

Эта формула определяет вклад, который вносит элемент “ $e$ ” в эквивалентные узловые силы. Аналогично приводятся к узловым силам нагрузки, приложенные к другим элементам (для тех элементов, которые находятся целиком внутри тела, второй член будет отсутствовать). Учитывая вклады отдельных элементов, найдем для каждого узла матрицу

$$[\tilde{P}_r] = \sum_e [\tilde{P}_r^e].$$

Суммирование производится здесь по всем элементам, сходящимся в узле  $r$ .

### 10.5 Построение матрицы жесткости упругого тела по матрицам жесткости конечных элементов и определение узловых перемещений

Выполнив дискретизацию упругого тела, можно теперь составить уравнения равновесия узлов и прийти к системе уравнений относительно перемещений

$$[v] = \{ v_1 \mid v_2 \mid \dots \mid v_n \},$$

где  $n$  – общее число узлов при принятой схеме дискретизации.

Если в узлах тела приложены сосредоточенные силы, то из них можно образовать матрицу

$$[P] = \{P_1 \mid P_2 \mid \dots \mid P_n\}.$$

Типовой элемент  $[P_r]$  этой матрицы представляет собой подматрицу сил, действующих в узле  $r$  в направлении  $[v_r]$ .

Эквивалентные узловые силы также объединим в матрицу

$$[\tilde{P}] = \{\tilde{P}_1 \mid \tilde{P}_2 \mid \dots \mid \tilde{P}_n\}.$$

Уравнения равновесия для каждого узла составляются точно так же, как и в случае стержневых систем. Объединяя все эти уравнения, получим зависимость между внешними узловыми силами и узловыми перемещениями в виде

$$[K][v] = [P] + [\tilde{P}], \quad (10.9)$$

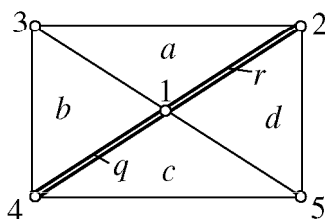
где  $[K]$  – матрица жесткости всего тела, которая может быть представлена в блочном виде

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix}.$$

Элементы блочной матрицы строятся так же, как и для стержневых систем:

- 1)  $[K_{ij}] = 0$ , если узлы  $i$  и  $j$  не относятся к одному конечному элементу;
- 2)  $[K_{ij}] = \sum_e [K_{ij}^e]$ , где суммирование производится по тем конечным элементам, которые одновременно содержат узлы  $i$  и  $j$ ;
- 3)  $[K_{ii}] = \sum_e [K_{ii}^e]$ , где суммирование производится по всем конечным элементам, сходящимся в узле  $i$ .

Пример:



Даны матрицы жесткости отдельных элементов в блочном виде:

$$[K^b] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ \frac{K_{11}^b}{K_{31}^b} & \frac{K_{13}^b}{K_{33}^b} & \frac{K_{14}^b}{K_{34}^b} \\ \frac{K_{41}^b}{K_{43}^b} & \frac{K_{43}^b}{K_{43}^b} & \frac{K_{44}^b}{K_{44}^b} \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}; \quad [K^q] = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ \frac{K_{11}^q}{K_{41}^q} & \frac{K_{14}^q}{K_{44}^q} \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 4 \end{matrix}$$

и т.д. Требуется построить матрицу жесткости для всей системы.

$$[K] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \begin{matrix} K_{11}^a + K_{11}^b + K_{11}^c + \\ + K_{11}^d + K_{11}^q + K_{11}^r \end{matrix} & K_{12}^a + K_{12}^d + K_{12}^r & K_{13}^a + K_{13}^b & K_{14}^b + K_{14}^c + K_{14}^q & K_{15}^c + K_{15}^d \\ \begin{matrix} K_{21}^a + K_{21}^d + K_{21}^r \\ K_{31}^a + K_{31}^b \end{matrix} & \begin{matrix} K_{22}^a + K_{22}^d + K_{22}^r \\ K_{32}^a \end{matrix} & K_{23}^a & 0 & K_{25}^d \\ \begin{matrix} K_{41}^b + K_{41}^c + K_{41}^q \\ K_{51}^c + K_{51}^d \end{matrix} & 0 & K_{43}^b & K_{44}^b + K_{44}^c + K_{44}^q & K_{45}^c \\ K_{52}^d & 0 & K_{54}^c & K_{55}^c + K_{55}^d \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix}$$

В системе уравнений (9) вычеркивая строки и столбцы, соответствующие известным перемещениям, придем к матричному уравнению

$$[K_{\alpha\alpha}][v_{\alpha}] = [P_{\alpha}] + [\tilde{P}_{\alpha}], \quad (10.10)$$

решение которого дает матрицу неизвестных узловых перемещений

$$[v_{\alpha}] = [K_{\alpha\alpha}]^{-1} ([P_{\alpha}] + [\tilde{P}_{\alpha}]).$$

После определения узловых перемещений можно вычислить напряжения в каждом конечном элементе.

## 10.6 Построение матрицы жесткости для плоского треугольного конечного элемента

В качестве первого примера рассмотрим простейший конечный элемент, применяемый для решения плоской задачи теории упругости. Это треугольный элемент с узлами, расположенными в вершинах треугольника (рисунок 10.6). Узловые силы и перемещения для такого элемента показаны на рисунке. Узлы имеют координаты  $x_i, y_i; x_j, y_j; x_m, y_m$ .

Матрицы сил и перемещений для каждого узла состоят из двух компонент. Так, для узла  $i$  имеем

$$[v_i] = \begin{bmatrix} v_{ix} \\ v_{iy} \end{bmatrix}; \quad [P_i^e] = \begin{bmatrix} P_{ix}^e \\ P_{iy}^e \end{bmatrix}.$$

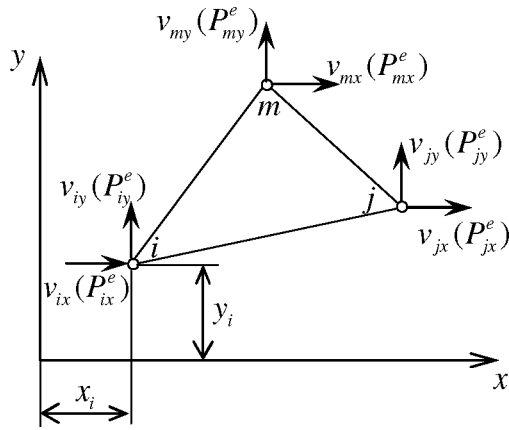


Рисунок 10.6

При составлении матриц  $[v^e]$  и  $[P^e]$  для всего элемента условимся обходить узлы против часовой стрелки. Тогда

$$[v^e] = \{v_i \mid v_j \mid v_m\};$$

$$[P^e] = \{P_i^e \mid P_j^e \mid P_m^e\}.$$

Точки элемента получают перемещения  $u_x$  и  $u_y$  в направлении осей  $x$ ,  $y$ . Поэтому матрица  $[u]$  имеет вид

$$[u] = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix}.$$

Эти перемещения можно выразить в стандартной форме

$$[u] = [\alpha][v^e]$$

или

$$\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \end{bmatrix} [v^e].$$

Это можно представить в следующем виде:

$$u_x = [\alpha_x][v^e]; \quad u_y = [\alpha_y][v^e]$$

или, учитывая блочную структуру матрицы  $[v^e]$ ,

$$u_x = [\alpha_{xi} \mid \alpha_{xj} \mid \alpha_{xm}] \begin{bmatrix} v_i \\ v_j \\ v_m \end{bmatrix}; \quad u_y = [\alpha_{yi} \mid \alpha_{yj} \mid \alpha_{ym}] \begin{bmatrix} v_i \\ v_j \\ v_m \end{bmatrix}.$$

Для получения матрицы  $[\alpha]$  предположим, что перемещения  $u_x$  и  $u_y$  в пределах элемента меняются по следующему простейшему закону:

$$u_x = f_1 + f_2 x + f_3 y; \quad u_y = f_4 + f_5 x + f_6 y,$$

где  $f_i$  – некоторые постоянные.

В вершинах треугольника  $u_x$  и  $u_y$  должны совпадать с узловыми перемещениями. Таким образом, имеем шесть уравнений для отыскания  $f_i$ :

$$\begin{aligned}
x = x_i; \quad y = y_i &\rightarrow u_x = v_{ix}; \quad u_y = v_{iy}; \\
\text{при } x = x_j; \quad y = y_j &\rightarrow u_x = v_{jx}; \quad u_y = v_{jy}; \\
x = x_m; \quad y = y_m &\rightarrow u_x = v_{mx}; \quad u_y = v_{my}.
\end{aligned}$$

Полученная система будет содержать две независимые группы уравнений. В первую группу войдут постоянные  $f_1, f_2, f_3$ , а правые части будут содержать перемещения  $v_{ix}, v_{jx}, v_{mx}$ :

$$\begin{aligned}
f_1 + f_2 x_i + f_3 y_i &= v_{ix}; \\
f_1 + f_2 x_j + f_3 y_j &= v_{jx}; \\
f_1 + f_2 x_m + f_3 y_m &= v_{mx}.
\end{aligned}$$

Вторая группа будет содержать постоянные  $f_4, f_5, f_6$  и перемещения  $v_{iy}, v_{jy}, v_{my}$ .

Решая первую систему линейных алгебраических уравнений, найдем  $f_1, f_2$  и  $f_3$ , выраженные через  $v_{ix}, v_{jx}$  и  $v_{mx}$ :

$$\begin{aligned}
f_1 &= \frac{1}{2F^e} (a_i v_{ix} + a_j v_{jx} + a_m v_{mx}); \\
f_2 &= \frac{1}{2F^e} (b_i v_{ix} + b_j v_{jx} + b_m v_{mx}); \\
f_3 &= \frac{1}{2F^e} (c_i v_{ix} + c_j v_{jx} + c_m v_{mx}),
\end{aligned}$$

где

$$a_i = x_j y_m - x_m y_j; \quad b_i = y_j - y_m; \quad c_i = x_m - x_j;$$

остальные коэффициенты здесь получаются при помощи круговой подстановки.

Величина  $F^e$ , фигурирующая в этой формуле, представляет собой площадь треугольника  $ijm$  и может быть вычислена через координаты узлов с помощью определителя

$$2F^e = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix}.$$

Подставляя найденные значения постоянных в выражение для перемещения  $u_x$ , можно записать

$$u_x = \frac{1}{2F^e} \left[ (a_i + b_i x + c_i y) v_{ix} + (a_j + b_j x + c_j y) v_{jx} + (a_m + b_m x + c_m y) v_{mx} \right].$$

Перемещение  $u_y$  может быть выражено аналогичным соотношением, в котором нужно заменить  $v_{ix}, v_{jx}$  и  $v_{mx}$  на  $v_{iy}, v_{jy}$  и  $v_{my}$ .

Если ввести обозначение

$$\psi_r = a_r + b_r x + c_r y \quad (r = i, j, m),$$

то наше соотношение может быть переписано в виде

$$u_x = \frac{1}{2F^e} [\psi_i \quad 0 \mid \psi_j \quad 0 \mid \psi_m \quad 0] \begin{bmatrix} v_{ix} \\ v_{iy} \\ v_{jx} \\ v_{jy} \\ v_{mx} \\ v_{my} \end{bmatrix}.$$

Таким образом, имеем

$$[\alpha_{xr}] = \frac{1}{2F^e} [\psi_r \quad 0].$$

Аналогично

$$[\alpha_{yr}] = \frac{1}{2F^e} [0 \quad \psi_r].$$

При этом

$$[\alpha_x] = [\alpha_{xi} \mid \alpha_{xj} \mid \alpha_{xm}]; \quad [\alpha_y] = [\alpha_{yi} \mid \alpha_{yj} \mid \alpha_{ym}].$$

Располагая матрицей  $[\alpha]$ , можно вычислить матрицу  $[\beta]$ :

$$[\beta] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \alpha_x / \partial x}{\frac{\partial \alpha_y / \partial y}{\frac{\partial \alpha_y}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_x}{\partial y}}} \end{bmatrix}.$$

Так как матрицы  $[\alpha_x]$  и  $[\alpha_y]$  состоят из трех подматриц, то и матрицу  $[\beta]$  можно представить в таком же виде:

$$[\beta] = [\beta_i \mid \beta_j \mid \beta_m],$$

где типовая подматрица  $[\beta_r]$  вычисляется следующим образом:



$$[\beta_r] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \alpha_{xr}}{\partial x} \\ \frac{\partial \alpha_{yr}}{\partial y} \\ \frac{\partial \alpha_{yr}}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_{xr}}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{2F^e} \begin{bmatrix} b_r & 0 \\ 0 & c_r \\ c_r & b_r \end{bmatrix}.$$

Таким образом, элементы матрицы  $[\beta_r]$  не зависят от координат  $x$  и  $y$ . Это означает, что деформации (а, следовательно, и напряжения) в пределах рассматриваемого конечного элемента постоянны. При переходе от одного элемента к другому они изменяются скачком.

Для деформаций элемента получим

$$[\varepsilon] = [\beta_i \mid \beta_j \mid \beta_m] \begin{bmatrix} v_i \\ v_j \\ v_m \end{bmatrix},$$

а для матрицы напряжений

$$[\sigma] = [\kappa][\varepsilon], \quad \text{где} \quad [\kappa] = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\mu^2} & \frac{\mu E}{1-\mu^2} & 0 \\ \frac{\mu E}{1-\mu^2} & \frac{E}{1-\mu^2} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix}.$$

Найдем теперь матрицу жесткости треугольного конечного элемента

$$[K^e] = \int_{\tau^e} [\beta]^T [\kappa] [\beta] d\tau.$$

Подынтегральное выражение не зависит здесь от координат и может быть вынесено за знак интеграла. В случае обобщенного плоского напряженного состояния рассматриваемый конечный элемент представляет собой пластину. Если его толщина постоянна и равна  $h^e$ , то объем элемента будет равен  $F^e h^e$ . Таким образом,

$$[K^e] = [\beta]^T [\kappa] [\beta] \int_{\tau^e} d\tau = F^e h^e [\beta]^T [\kappa] [\beta]$$

или

$$[K^e] = F^e h^e \begin{bmatrix} \beta_i^T \\ \beta_j^T \\ \beta_m^T \end{bmatrix} [\kappa] [\beta_i \mid \beta_j \mid \beta_m]; \quad [K^e] = \begin{bmatrix} K_{ii}^e & K_{ij}^e & K_{im}^e \\ K_{ji}^e & K_{jj}^e & K_{jm}^e \\ K_{mi}^e & K_{mj}^e & K_{mm}^e \end{bmatrix},$$

где

$$[K_{rs}^e] = F^e h^e [\beta_r]^T [\kappa] [\beta_s] \quad (r, s = i, j, m).$$

Для удобства записи представим матрицу  $[\kappa]$  в следующем виде:

$$[\kappa] = [\kappa^E] + [\kappa^G],$$

где

$$[\kappa^E] = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad [\kappa^G] = G \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Тогда матрица жесткости также будет состоять из суммы двух матриц

$$[K_{rs}^e] = [K_{rs}^E] + [K_{rs}^G],$$

где

$$[K_{rs}^E] = F^e h^e [\beta_r]^T [\kappa^E] [\beta_s];$$

$$[K_{rs}^G] = F^e h^e [\beta_r]^T [\kappa^G] [\beta_s].$$

Подставим в эти формулы полученные выражения для матриц:

$$[K_{rs}^G] = F^e h^e \frac{1}{2F^e} \begin{bmatrix} b_r & 0 & c_r \\ 0 & c_r & b_r \end{bmatrix} G \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{2F^e} \begin{bmatrix} b_s & 0 \\ 0 & c_s \\ c_s & b_s \end{bmatrix};$$

$$[K_{rs}^G] = \frac{Gh^e}{4F^e} \begin{bmatrix} c_r c_s & c_r b_s \\ b_r c_s & b_r b_s \end{bmatrix};$$

$$[K_{rs}^E] = F^e h^e \frac{1}{2F^e} \begin{bmatrix} b_r & 0 & c_r \\ 0 & c_r & b_r \end{bmatrix} \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{2F^e} \begin{bmatrix} b_s & 0 \\ 0 & c_s \\ c_s & b_s \end{bmatrix};$$

$$[K_{rs}^E] = \frac{Eh^e}{4F^e(1-\mu^2)} \begin{bmatrix} b_r b_s & \mu b_r c_s \\ \mu c_r b_s & c_r c_s \end{bmatrix}.$$

Для того, чтобы получить матрицу жесткости для случая плоской деформации, следует принять  $h^e = 1$  и заменить модуль упругости  $E$  на  $\frac{E}{1-\mu^2}$ ,

а коэффициент Пуассона  $\mu$  на  $\frac{\mu}{1-\mu}$ .

Недостатком рассмотренного элемента является то, что напряжения в пределах треугольника постоянны, и поэтому для получения достаточной

точности решения часто приходится использовать весьма густую сетку (особенно в областях с быстроменяющимся напряженным состоянием).

### 10.7 Матрица жесткости плоского прямоугольного элемента

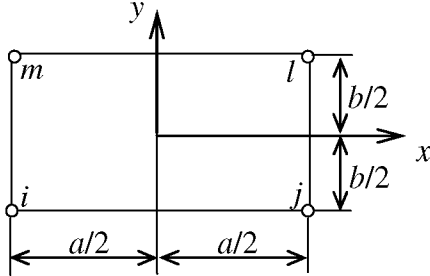


Рисунок 10.7

Другой конечный элемент, используемый в плоской задаче – это прямоугольник с узлами в вершинах (рисунок 10.7). Начало системы координат перенесем в центр тяжести прямоугольника. От этого результирующие формулы не изменятся, а их вывод упростится. Матрица узловых перемещений такого элемента

имеет 8 компонент. Обходя узлы против часовой стрелки, запишем

$$[v^e] = \{v_i \mid v_j \mid v_l \mid v_m\}.$$

Для приближенного представления поля перемещений конечного элемента можно взять функции

$$u_x = f_1 + f_2x + f_3y + f_4xy; \quad u_y = f_5 + f_6x + f_7y + f_8xy,$$

в которых содержится восемь неопределенных постоянных. Эти постоянные можно определить из условия:

$$\text{при } x = x_r; \quad y = y_r \quad \rightarrow \quad u_x = v_{rx}; \quad u_y = v_{ry} \quad (r = i, j, l, m).$$

Введем безразмерные координаты, принимающие на сторонах элемента значения  $\pm 1$ :

$$\xi = \frac{x}{a/2}; \quad \eta = \frac{y}{b/2}.$$

Тогда

$$u_x = \bar{f}_1 + \bar{f}_2\xi + \bar{f}_3\eta + \bar{f}_4\xi\eta; \quad u_y = \bar{f}_5 + \bar{f}_6\xi + \bar{f}_7\eta + \bar{f}_8\xi\eta.$$

Граничные условия имеют вид:

$$\text{при } \xi = \xi_r; \quad \eta = \eta_r \quad \rightarrow \quad u_x = v_{rx}; \quad u_y = v_{ry} \quad (r = i, j, l, m),$$

где  $\xi_r, \eta_r$  – безразмерные координаты узла  $r$ .

Отсюда получаем систему из восьми уравнений, решив которую, можно выразить  $\bar{f}_i$  через узловые перемещения. Тогда будем иметь

$$u_x = \underbrace{[\alpha_{xi} \mid \alpha_{xj} \mid \alpha_{xl} \mid \alpha_{xm}]}_{[\alpha_x]} \begin{bmatrix} \frac{v_i}{v_j} \\ \frac{v_j}{v_l} \\ \frac{v_l}{v_m} \end{bmatrix}; \quad u_y = \underbrace{[\alpha_{yi} \mid \alpha_{yj} \mid \alpha_{yl} \mid \alpha_{ym}]}_{[\alpha_y]} \begin{bmatrix} \frac{v_i}{v_j} \\ \frac{v_j}{v_l} \\ \frac{v_l}{v_m} \end{bmatrix}.$$

Здесь

$$[\alpha_{xr}] = [\psi_r \ 0]; \quad [\alpha_{yr}] = [0 \ \psi_r]; \quad \psi_r(\xi, \eta) = (1 + \xi_r \xi)(1 + \eta_r \eta)/4.$$

Матрицу  $[\beta]$  также можно записать в блочном виде

$$[\beta] = [\beta_i \mid \beta_j \mid \beta_l \mid \beta_m],$$

где

$$[\beta_r] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \alpha_{xr}}{\partial x} \\ \frac{\partial \alpha_{yr}}{\partial y} \\ \frac{\partial \alpha_{yr}}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_{xr}}{\partial y} \end{bmatrix}.$$

Учитывая, что

$$\frac{\partial \psi_r}{\partial x} = \frac{\partial \psi_r}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{2}{a} \frac{\partial \psi_r}{\partial \xi}; \quad \frac{\partial \psi_r}{\partial y} = \frac{\partial \psi_r}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{2}{b} \frac{\partial \psi_r}{\partial \eta},$$

получим

$$[\beta_r] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{a}(\xi_r + \eta_r \eta) & 0 \\ 0 & \frac{1}{b}(\eta_r + \xi_r \xi) \\ \frac{1}{b}(\eta_r + \xi_r \xi) & \frac{1}{a}(\xi_r + \eta_r \eta) \end{bmatrix}.$$

В отличие от предыдущего случая элементы матрицы  $[\beta]$  являются функциями координат. Матрица жесткости конечного элемента может быть записана как

$$[K^e] = \int_{\tau^e} [\beta]^T [\kappa] [\beta] d\tau,$$

причем  $d\tau = h^e dxdy = \frac{ab}{4} h^e d\xi d\eta$ . Таким образом,

$$[K^e] = \frac{abh^e}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\beta]^T [\kappa] [\beta] d\xi d\eta.$$

Эту матрицу можно записать в блочном виде

$$[K^e] = \begin{bmatrix} K_{ii}^e & K_{ij}^e & K_{il}^e & K_{im}^e \\ K_{ji}^e & K_{jj}^e & K_{jl}^e & K_{jm}^e \\ K_{li}^e & K_{lj}^e & K_{ll}^e & K_{lm}^e \\ K_{mi}^e & K_{mj}^e & K_{ml}^e & K_{mm}^e \end{bmatrix},$$

где подматрицы  $[K_{rs}^e]$  находятся по формуле

$$[K_{rs}^e] = \frac{abh^e}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\beta_r]^T [\kappa] [\beta_s] d\xi d\eta.$$

Следует отметить, что прямоугольный элемент по сравнению с треугольным дает более точное решение. Однако с помощью одних только прямоугольников можно моделировать только прямоугольные области или области составленные из них. Для более сложных областей можно использовать прямоугольные элементы в сочетании с треугольными.

Следует отметить, что аппроксимирующие функции для перемещений, которые мы использовали при построении матрицы жесткости прямоугольного конечного элемента не удовлетворяют уравнениям равновесия плоской задачи теории упругости, которые в отсутствие объемных сил имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0.$$

В этом можно убедиться, если выразить напряжения по закону Гука через деформации, а последние – через перемещения по формулам Коши.

Поставим себе задачей найти такие аппроксимирующие функции для  $u_x$  и  $u_y$ , которые удовлетворяли бы уравнениям равновесия. Известно, что дифференциальные уравнения равновесия будут удовлетворяться тождественно, если напряжения связаны с некоторой функцией напряжений соотношениями

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}.$$

При этом условие совместности деформаций будет также удовлетворяться, если функция  $\varphi$  является решением бигармонического уравнения

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi = 0.$$

Примем, что в пределах рассматриваемого конечного элемента функция  $\varphi$  изменяется по закону

$$\varphi = C_1 x^2 + C_2 xy + C_3 y^2 + C_4 x^3 + C_5 y^3,$$

при котором удовлетворяется бигармоническое уравнение. Используемый здесь набор функций дает все простейшие напряженные состояния (одноосное, чистый сдвиг и чистый изгиб).

Далее можно найти деформации:

$$\varphi \rightarrow \sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy} \rightarrow \varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{xy}.$$

Для определения перемещений  $u_x$  и  $u_y$  проинтегрируем уравнения Коши:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = \varepsilon_{xx}; \quad \frac{\partial u_y}{\partial y} = \varepsilon_{yy}; \quad \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} = \varepsilon_{xy}.$$

При интегрировании появятся еще три константы. В результате получим аппроксимирующие функции в виде

$$u_x = f_1 + f_2 x + f_3 y + f_4 xy - \frac{1}{2} f_8 (\mu x^2 + y^2);$$

$$u_y = f_5 + f_6 x + f_7 y + f_8 xy - \frac{1}{2} f_4 (\mu y^2 + x^2).$$

Восемь постоянных  $f_i$  можно снова выразить через узловые перемещения и найти, таким образом, матрицы  $[\alpha]$ ,  $[\beta]$ , а затем и  $[K^e]$ .

## 10.8 Совместность конечных элементов

Вернемся к треугольному элементу. Перемещения внутри конечного элемента здесь определяются выражениями

$$u_x = f_1 + f_2 x + f_3 y; \quad u_y = f_4 + f_5 x + f_6 y$$

и изменяются по линейному закону вдоль любой прямой, в том числе и по сторонам треугольника. Для прямоугольного элемента перемещения

$$u_x = f_1 + f_2 x + f_3 y + f_4 xy; \quad u_y = f_5 + f_6 x + f_7 y + f_8 xy$$

изменяются по линейному закону вдоль прямых  $x = \text{const}$  и  $y = \text{const}$ , а, следовательно, и по сторонам прямоугольника.

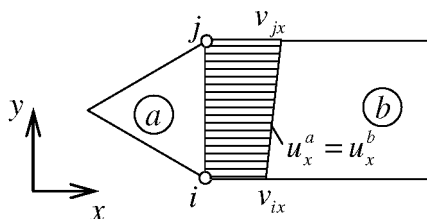


Рисунок 10.8

Узловые перемещения являются общими для соседних элементов, поэтому при переходе от одного элемента к другому перемещения не претерпевают разрыва. Конечные элементы такого типа дают непрерывное поле перемещений по всей исследуемой области и называются совместными.

Примером несовместного элемента является прямоугольный элемент с аппроксимирующими функциями

$$u_x = f_1 + f_2x + f_3y + f_4xy - \frac{1}{2}f_8(\mu x^2 + y^2);$$

$$u_y = f_5 + f_6x + f_7y + f_8xy - \frac{1}{2}f_4(\mu y^2 + x^2).$$

Здесь при  $x = \text{const}$  или  $y = \text{const}$  перемещения изменяются по квадратичному закону.

Квадратная парабола задается тремя параметрами, и узловые перемещения двух соседних вершин прямоугольника не могут однозначно определить значения перемещений  $u_x$  и  $u_y$  на

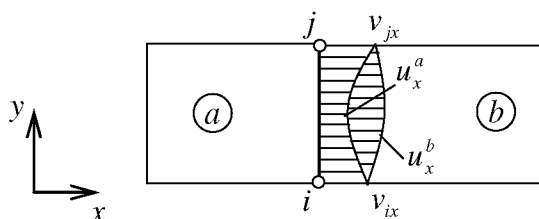
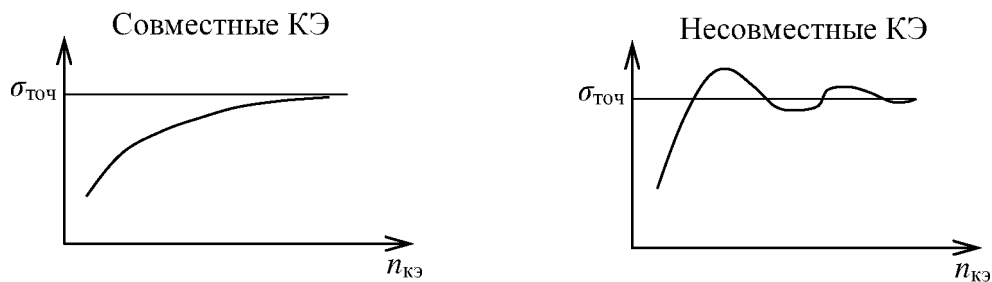


Рисунок 10.9

прилегающих к ним сторонах (рисунок 10.9). Следовательно, равенство перемещений смежных элементов может быть обеспечено только в узловых точках, а на линии раздела элементов перемещения будут претерпевать разрыв.

При практическом использовании МКЭ часто встает вопрос о том, сколько для получения приемлемой точности следует взять конечных элементов. При отсутствии практического опыта здесь приходится экспериментировать, т.е. начиная с грубой сетки и далее сгущая ее, исследовать сходимость решения.

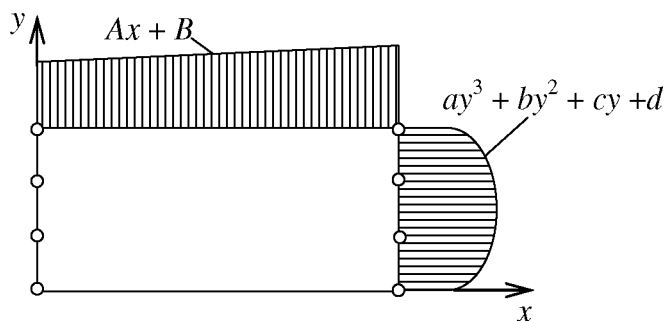
В расчетах широко используются как совместные, так и несовместные элементы. Они показывают разную сходимость решения к точному по мере увеличения количества конечных элементов (рисунок 10.10).



**Рисунок 10.10**

Несовместные конечные элементы иногда дают на грубых сетках более точные результаты, но применять их надо с большой осторожностью.

Более точные прямоугольные элементы для плоской задачи можно получить, помещая на сторонах дополнительные узлы. При одинаковой сетке конечных элементов точность расчетов будет повышаться с увеличением числа дополнительных узлов.



**Рисунок 10.11**

Для элемента, изображенного на рисунке 10.11, для обеспечения совместности вдоль стороны  $x = \text{const}$  перемещения должны меняться по закону кубической параболы, а  $y = \text{const}$  – по линейному закону. Этим требованиям удовлетворяют следующие аппроксимирующие функции:

$$u_x = (f_1 + f_2 y + f_3 y^2 + f_4 y^3) + x(f_5 + f_6 y + f_7 y^2 + f_8 y^3);$$

$$u_x = (f_9 + f_{10} y + f_{11} y^2 + f_{12} y^3) + x(f_{13} + f_{14} y + f_{15} y^2 + f_{16} y^3).$$

Дальнейшая процедура вычислений аналогична рассмотренной выше.



## 10.9 Плоский четырехузловой изопараметрический элемент

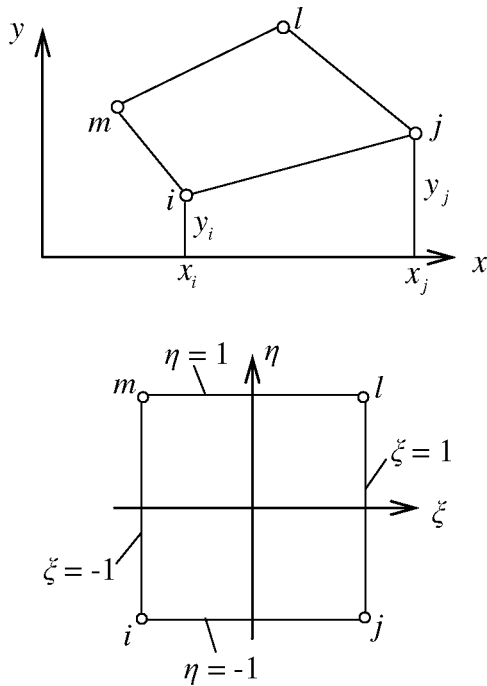


Рисунок 10.12

Рассмотрим 4-угольный элемент произвольной формы с узлами в вершинах (рисунок 10.12). Поставим целью построить систему аппроксимирующих функций, обеспечивающую совместность элементов. Для этого необходимо, чтобы вдоль каждой стороны элемента перемещения  $u_x$  и  $u_y$  изменялись по линейному закону.

Введем, прежде всего, вспомогательный квадрат со стороной, равной 2, и отнесем его к системе безразмерных координат  $\xi, \eta$ , начало которой поместим в середину квадрата. На сторонах квадрата переменные  $\xi$  и  $\eta$  принимают значения  $\pm 1$ .

Пусть теперь требуется аппроксимировать в пределах квадрата какую-либо функции  $\Phi(\xi, \eta)$ , для которой известны ее значения  $\Phi_i, \Phi_j, \Phi_l, \Phi_m$  в угловых точках.

С этой целью введем четыре функции (рисунок 10.13), обладающие следующими свойствами: 1) вдоль сторон квадрата они меняются по линейному закону; 2) принимают значение в одном узле, равное единице, а в остальных – нуль.

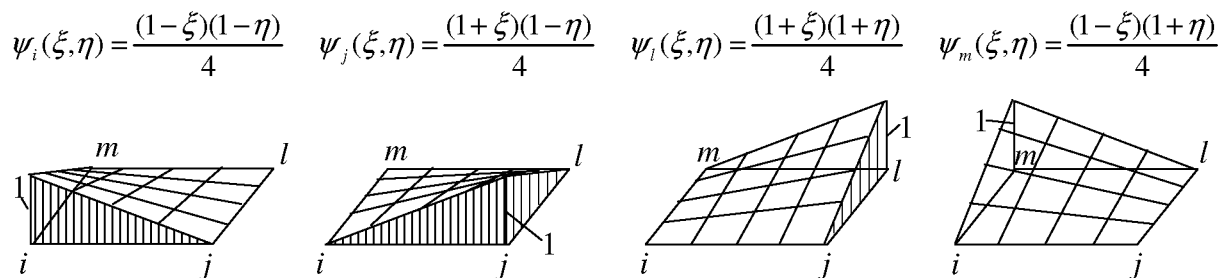


Рисунок 10.13

Эти четыре функции можно объединить в одну:

$$\psi_r(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi_r \xi)(1 + \eta_r \eta) \quad (r = i, j, l, m),$$

где через  $\xi_r$  и  $\eta_r$  обозначены координаты узла  $r$ . Функция  $\psi_r(\xi, \eta)$  называется функцией формы.

Выражение

$$\Phi(\xi, \eta) = \Phi_i \psi_i(\xi, \eta) + \Phi_j \psi_j(\xi, \eta) + \Phi_l \psi_l(\xi, \eta) + \Phi_m \psi_m(\xi, \eta)$$

дает аппроксимацию функции  $\Phi$ , которая удовлетворяет условиям в узловых точках. При этом  $\Phi(\xi, \eta)$  изменяется по линейному закону вдоль прямых  $\xi = \text{const}$  и  $\eta = \text{const}$ , в том числе и вдоль сторон квадрата.

Поставим теперь в соответствие каждой точке квадрата некоторую точку исходного четырехугольника, полагая

$$x = x(\xi, \eta), \quad y = y(\xi, \eta).$$

В вершинах 4-угольника функции  $x(\xi, \eta)$ ,  $y(\xi, \eta)$  должны совпадать с их узловыми значениями (т.е. с координатами узлов). Используя свойство записанной выше аппроксимации можно сразу получить искомые зависимости:

$$x = \sum_r \psi_r(\xi, \eta) x_r; \quad y = \sum_r \psi_r(\xi, \eta) y_r. \quad (10.11)$$

Примем, например,  $\xi = 1$ . Тогда будем иметь

$$x = \frac{1}{2}(1 - \eta)x_j + \frac{1}{2}(1 + \eta)x_l; \quad y = \frac{1}{2}(1 - \eta)y_j + \frac{1}{2}(1 + \eta)y_l.$$

Эти соотношения определяют прямую в плоскости  $xu$ . При  $\eta = -1$  имеем  $x = x_j$ ,  $y = y_j$ , а при  $\eta = 1 \rightarrow x = x_l$ ,  $y = y_l$ . Следовательно, изменяя  $\eta$  от -1 до 1, мы получаем одну из сторон четырехугольника. Рассуждая подобным образом, нетрудно убедиться в том, что формулы (10.11) действительно дают отображение квадрата на рассматриваемый четырехугольник.

Переходя далее к аппроксимации перемещений  $u_x$  и  $u_y$ , будем также выражать их через переменные  $\xi, \eta$ . Это позволит получить функции с требуемыми свойствами:

$$u_x(\xi, \eta) = \sum_r \psi_r(\xi, \eta) v_{rx}; \quad u_y(\xi, \eta) = \sum_r \psi_r(\xi, \eta) v_{ry}. \quad (10.12)$$

Рассмотрим, например, характер изменения перемещения  $u_x$  вдоль стороны  $jl$ , полагая снова  $\xi = 1$ . Из (10.12) имеем

$$u_x = \frac{1}{2}(1-\eta)v_{jx} + \frac{1}{2}(1+\eta)v_{lx}.$$

Отсюда видно, что, во-первых, при  $\eta = -1$  и  $\eta = 1$  (т.е. в узлах  $j$  и  $l$ ) перемещение  $u_x$  совпадает с  $v_{jx}$  и  $v_{lx}$ . Во-вторых, формулы (10.11) и (10.12) определяют в пространстве  $x, y, u_x$  прямую, заданную в параметрическом виде:

$$x = a_1 + a_2\eta; \quad y = b_1 + b_2\eta; \quad u_x = c_1 + c_2\eta.$$

Это означает, что вдоль стороны  $jl$  перемещение  $u_x$  изменяется по линейному закону. Аналогичные рассуждения показывают, что формулы (10.12) обеспечивают аппроксимацию перемещений внутри конечного элемента с линейным законом вдоль всех его сторон.

Полагая

$$[u] = \{u_x \ u_y\}; \quad [v^e] = \{v_i \mid v_j \mid v_l \mid v_m\}; \quad [v_r] = \{v_{rx} \ v_{ry}\},$$

представим формулы (10.12) в стандартной форме

$$[u] = [\alpha][v^e].$$

Здесь  $[\alpha] = [\alpha_i \mid \alpha_j \mid \alpha_l \mid \alpha_m]$ , где типовая подматрица  $[\alpha_r]$  включает в себя функции  $\psi_r(\xi, \eta)$ :

$$[\alpha_r] = \begin{bmatrix} \alpha_{xr} \\ \alpha_{yr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_r(\xi, \eta) & 0 \\ 0 & \psi_r(\xi, \eta) \end{bmatrix}. \quad (10.13)$$

Перейдем далее к вычислению матрицы  $[\beta] = [\beta_i \mid \beta_j \mid \beta_l \mid \beta_m]$ . Типовая подматрица  $[\beta_r]$  образуется из строк матрицы  $[\alpha_r]$  по формуле

$$[\beta_r] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \alpha_{xr}}{\partial x} & \frac{\partial \alpha_{xr}}{\partial y} \\ \frac{\partial \alpha_{yr}}{\partial x} & \frac{\partial \alpha_{yr}}{\partial y} \end{bmatrix}.$$

Отсюда следует

$$[\beta_r] = \begin{bmatrix} \partial \psi_r / \partial x & 0 \\ 0 & \partial \psi_r / \partial y \\ \partial \psi_r / \partial y & \partial \psi_r / \partial x \end{bmatrix}. \quad (10.14)$$

Входящие сюда производные  $\partial \psi_r / \partial x$ ,  $\partial \psi_r / \partial y$  нельзя найти непосредственным дифференцированием, так как  $\psi_r$  не зависит в явном виде от пере-

менных  $x$  и  $y$ . На первый взгляд естественным кажется воспользоваться правилом дифференцирования сложных функций:

$$\frac{\partial \psi_r}{\partial x} = \frac{\partial \psi_r}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \psi_r}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}; \quad \frac{\partial \psi_r}{\partial y} = \frac{\partial \psi_r}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \psi_r}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y}.$$

Но это требует знания явных зависимостей  $\xi, \eta$  от  $x, y$ , в то время как мы располагаем лишь обратными зависимостями, выраженными равенствами (10.11). Поэтому для вычисления требуемых производных воспользуемся формулами

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_r}{\partial \xi} &= \frac{\partial \psi_r}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial \psi_r}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi}; \\ \frac{\partial \psi_r}{\partial \eta} &= \frac{\partial \psi_r}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial \psi_r}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta}, \end{aligned}$$

которые в матричной форме имеют вид

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_r}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \psi_r}{\partial \eta} \end{bmatrix} = [J(\xi, \eta)] \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_r}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_r}{\partial y} \end{bmatrix}. \quad (10.15)$$

Здесь через  $[J(\xi, \eta)]$  обозначена так называемая матрица Якоби

$$[J(\xi, \eta)] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix},$$

элементы которой легко находятся в соответствии с (10.11). Поскольку функции в левой части (10.15) также нетрудно найти, то равенство (10.15) можно использовать для определения производных

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_r}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_r}{\partial y} \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_r}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \psi_r}{\partial \eta} \end{bmatrix}. \quad (10.16)$$

Производные  $\frac{\partial \psi_r}{\partial \xi}$  и  $\frac{\partial \psi_r}{\partial \eta}$  равны

$$\frac{\partial \psi_r}{\partial \xi} = \frac{1}{4} \xi_r (1 + \eta_r \eta); \quad \frac{\partial \psi_r}{\partial \eta} = \frac{1}{4} \eta_r (1 + \xi_r \xi).$$

Заметим, что фактическое вычисление матрицы жесткости рассматриваемого элемента приходится выполнять на ЭВМ с помощью численного интегрирования. При этом матрицу  $[\beta]$  требуется находить в отдельных точках области, положение которых определяется правилом интегрирования. В этих точках определяют матрицу  $[J]$ , а затем вычисляют обратную к ней матрицу  $[J]^{-1}$ . В тех же точках по формулам (10.16) вычисляют матрицу производных  $\partial \psi_r / \partial x$  и  $\partial \psi_r / \partial y$ , из которых может быть сформирована матрица  $[\beta_r]$  (10.14).

Типовой блок  $[K_{rs}^e]$  матрицы жесткости элемента  $[K^e]$  находится по формуле

$$[K_{rs}^e] = \int_{\tau^e} [\beta_r]^T [\kappa] [\beta_s] d\tau,$$

где интегрирование ведется по объему  $\tau^e$  конечного элемента. Удобно при этом перейти к интегрированию по  $\xi$  и  $\eta$ , поскольку здесь получаются простые пределы. Можно показать, что для этих переменных объем выражается как

$$d\tau = \det([J(\xi, \eta)]) h d\xi d\eta,$$

где  $h$  – толщина пластины, а  $\det([J(\xi, \eta)])$  – определитель матрицы Якоби, называемый якобианом. Таким образом, в случае обобщенного плоского напряженного состояния  $[K_{rs}^e]$  находится по формуле

$$[K_{rs}^e] = h \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\beta_r]^T [\kappa] [\beta_s] \det([J(\xi, \eta)]) d\xi d\eta, \quad (10.17)$$

Интегрирование здесь, как уже было сказано, проводится численно на ЭВМ.

Приведение распределенных нагрузок к узловым силам выполняется обычным образом. Так, если в плоскости элемента действуют объемные силы  $[R]$ , то их замена узловыми силами осуществляется по формуле

$$[\tilde{P}^e] = \int_{\tau^e} [\alpha]^T [R] d\tau.$$

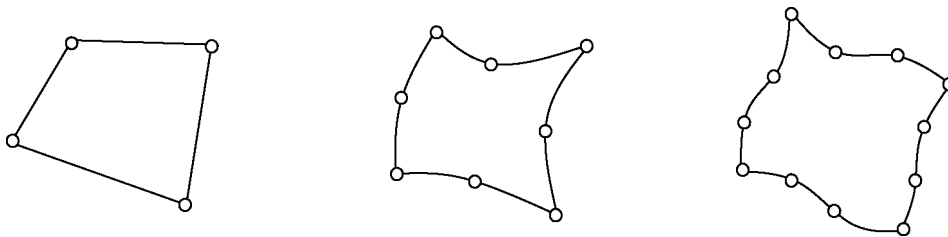
Полагая  $[\tilde{P}^e] = \{\tilde{P}_i^e \mid \tilde{P}_j^e \mid \tilde{P}_l^e \mid \tilde{P}_m^e\}$  и переходя к интегрированию по  $\xi$ ,  $\eta$  в плоскости элемента, придем к следующему выражению для типовой подматрицы эквивалентных узловых сил:

$$[\tilde{P}_r^e] = h \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\alpha_r]^T [R] \det([J(\xi, \eta)]) d\xi d\eta \quad (r = i, j, l, m). \quad (10.18)$$

Здесь интегрирование также выполняется численно.

Полученные таким образом конечные элементы являются совместными. Характерной особенностью здесь является то, что для задания перемещений  $u_x, u_y$  и координат  $x, y$  через безразмерные координаты  $\xi, \eta$  используются одинаковые выражения (функции формы). Это предполагает, в частности, что для определения геометрии конечного элемента требуется столько же параметров (координат узлов  $x_r, y_r$ ), сколько параметров (узловых перемещений  $v_{rx}, v_{ry}$ ) необходимо для задания поля перемещений. Такие конечные элементы называются изопараметрическими.

Изопараметрические конечные элементы в последние годы получили большое распространение. Они имеют произвольную форму и поэтому позволяют моделировать любые конструкции. Изопараметрические элементы бывают первого, второго, третьего и т.д. порядков (рисунок 10.14).



**Рисунок 10.14**

Итак, мы рассмотрели только плоские конечные элементы, используемые для решения плоской задачи теории упругости. При изучении матричного метода перемещений мы построили ферменные и балочные элементы. Они также активно используются в МКЭ для моделирования стержневых конструкций и подкрепляющих ребер жесткости. Кроме того, имеются конечные элементы пластины, оболочки и трехмерного тела. Полный набор всех этих элементов позволяет моделировать самые разнообразные конструкции.

## 10.10 Схема численного интегрирования по Гауссу

Вычисление матрицы жесткости (10.17) и эквивалентных узловых сил (10.18) удобнее всего производить на ЭВМ с помощью тех или иных формул численного интегрирования (по формулам трапеции, по Симпсону и т.д.). Наиболее употребительными в МКЭ являются формулы численного интегрирования Гаусса, обеспечивающие высокую точность при относительно небольшом объеме вычислительной работы. Интегрирование по Гауссу требует при одинаковой точности почти вдвое меньшего числа точек, чем в случае использования формул трапеции и Симпсона.

Согласно формулам численного интегрирования Гаусса

$$J = \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^n H_i f(\xi_i),$$

где  $n$  – количество точек интегрирования. Здесь  $H_i$  – весовые коэффициенты;  $\xi_i$  – координаты точек интегрирования.

В методе Гаусса значения функции вычисляются не в произвольно выбранных точках, а так, чтобы достигалась наилучшая для данного количества точек точность. Это позволяет точно интегрировать полином степени  $2n - 1$ , а, к примеру, формулы трапеции и Симпсона дают точный результат только для полинома не выше степени  $n - 1$ .

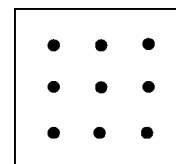
Весовые коэффициенты и координаты точек интегрирования можно найти в справочной литературе по численным методам и МКЭ. В МКЭ обычно используется небольшое число точек интегрирования (2...4). В качестве примера приведем некоторые значения  $H_i$  и  $\xi_i$ :

| $n$ | $i$ | $\xi_i$       | $H_i$ |
|-----|-----|---------------|-------|
| 1   | 1   | 0             | 2     |
| 2   | 1   | $-1/\sqrt{3}$ | 1     |
|     | 2   | $1/\sqrt{3}$  | 1     |
| 3   | 1   | $-\sqrt{3/5}$ | 5/9   |
|     | 2   | 0             | 8/9   |
|     | 3   | $\sqrt{3/5}$  | 5/9   |

При вычислении двойного интеграла

$$J = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n H_i H_j f(\xi_i, \eta_j).$$

Если мы будем брать, к примеру, 3-точечную схему интегрирования, то ряд будет содержать девять слагаемых.



## ЛИТЕРАТУРА

1. Ахмедьянов, И.С. Тонкостенные оболочки: методические указания к лабораторным работам [текст] / Сост. И.С. Ахмедьянов, В.А. Мехеда – Куйбышев: КуАИ, 1985.- 18 с.
2. Дуплякин, В.М. Плоские фермы. Тонкостенные конструкции: Методические указания [текст] / Сост. В.М. Дуплякин, В.И. Леонов. – Самара: СГАУ, 1993. – 40 с.
3. Зацепина, М.В. Балочная теория расчета тонкостенных конструкций [текст] / М.В. Зацепина. – Самара: СГАУ, 1993. – 48 с.
4. Зацепина, М.В. Расчет пластин и безмоментных оболочек: Методические указания [текст] / Сост. М.В. Зацепина, Л.М. Савельев. – Самара: СГАУ, 1994. – 30 с.
5. Кац, А. М. Теория упругости [текст] : учебник для студентов вузов / А. М. Кац. - СПб. : Лань, 2002. - 208 с.
6. Леонов, В.И. Расчет ферм матричным методом перемещений на ЭВМ: Методические указания [текст] / Сост. В.И. Леонов и Ю.В. Скворцов: – Самара: СГАУ, 2007 – 24.
7. Леонов, В.И. Строительная механика элементов конструкций летательных аппаратов в виде оболочек вращения [текст] / В.И. Леонов – Куйбышев: КуАИ, 1987–87 с.
8. Липовцев, Ю. В. Прикладная теория упругости [текст] : учеб. пособие / Ю. В. Липовцев, М. Ю. Русин. - М. : Дрофа, 2008. - 319 с.
9. Мехеда, В.А. Стержневые системы: методические указания к лабораторным работам [текст] / Сост. В.А. Мехеда – Куйбышев: КуАИ, 1982.-28 с.
10. Мехеда, В.А. Тонкостенные конструкции: методические указания к лабораторным работам [текст] / Сост. В.А. Мехеда – Куйбышев: КуАИ, 1983.-36 с.



11.Образцов, И. Ф. Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов [текст] : учеб. пособие / И. Ф. Образцов, Л. М. Савельев, Х. С. Хазанов. - М. : Высшая школа, 1985. - 392 с.

12.Образцов, И.Ф. Строительная механика летательных аппаратов: Учебник для авиационных специальностей вузов [текст] /И. Ф. Образцов, Л. А. Булычев, В. В. Васильев и др.; Под ред. И. Ф. Образцова. - М.: Машиностроение, 1986. — 536 с.

13.Погорелов, В. И. Строительная механика тонкостенных конструкций [текст] : учеб. пособие / В. И. Погорелов. - СПб.: БХВ- Петербург, 2007. - 528 с.

14.Саргсян, А. Е. Строительная механика. Механика инженерных конструкций [текст] : учебник для вузов / А. Е. Саргсян. - М.: Высшая школа, 2004. - 462 с.

15.Скворцов, Ю.В. Конечноэлементное решение плоской задачи теории упругости: Методические указания к лабораторным работам [текст] / Сост. Ю.В. Скворцов, А.В. Хивинцев – Самара: СГАУ, 1999. -16 с.

16.Тарасов, Ю.Л. Статически определимые фермы [текст] / Ю.Л. Тарасов – Куйбышев: КуАИ, 1975. –32 с.

*Учебное издание*

***Савельев Леонид Макарович,  
Скворцов Юрий Васильевич,  
Глушков Сергей Валериевич***

## **СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ**

*Учебное пособие*

В авторской редакции

Подписано в печать 16.05.2012. Формат 60х84 1/16.

Бумага офсетная. Печать офсетная. Печ. л. 3,0.

Тираж 50 экз. Заказ .

Самарский государственный аэрокосмический университет.

443086 Самара, Московское шоссе, 34.

Изд-во Самарского государственного  
аэрокосмического университета.

443086 Самара, Московское шоссе, 34.