

СГАУ '15

с164

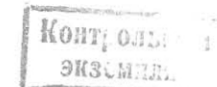
*В.В. САЛМИН, Ю.Н. ЛАЗАРЕВ,
О.Л. СТАРИНОВА*

**МЕТОДЫ
ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ
И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ
В ЗАДАЧАХ СИНТЕЗА
ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

2007



САМАРА



СГАУ: 5
С 164

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА»

В. В. САЛМИН, Ю.Н. ЛАЗАРЕВ, О.Л. СТАРИНОВА

МЕТОДЫ ОПТИМАЛЬНОГО
УПРАВЛЕНИЯ И ЧИСЛЕННЫЕ
МЕТОДЫ В ЗАДАЧАХ СИНТЕЗА
ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

*Утверждено Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия*

726522
ВОЗВРАТИТЕ КНИГУ НЕ ПОЗЖЕ
обозначенного здесь срока



САМАРА
Издательство СГАУ
2007

УДК 517.977.5 (0.75)

ББК 22.1я7

С 164



Инновационная образовательная программа
"Развитие центра компетенции и подготовка
специалистов мирового уровня в области аэро-
космических и геоинформационных технологий"

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук, проф. В. А. Соболев
канд. техн. наук, проф. В. М. Белоконов

Салмин В.В.

С 164

Методы оптимального управления и численные методы в
задачах синтеза технических систем: учеб. пособие /
В. В. Салмин, Ю. Н. Лазарев, О. Л. Старинова. – Самара: Изд-во
Самар. гос. аэрокосм. ун-та, 2007. – 160 с. : ил.

ISBN 978-5-7883-0651-3

В учебном пособии излагаются методы оптимизации, применяемые в различных задачах управления динамическими системами, в том числе в задачах механики полета летательных аппаратов. Даются классификация и основные постановки задач оптимизации. Рассмотрены методы и задачи классического вариационного исчисления. Изложены современные методы решения задач оптимального управления: принцип максимума Понтрягина, динамическое программирование, принцип расширения и достаточные условия оптимальности. Описываются численные методы задач оптимизации.

Учебное пособие предназначено для студентов и аспирантов, изучающих методы оптимизации динамических систем и специализирующихся в области механики и процессов управления, моделирования и исследования операций. Подготовлено на кафедрах летательных аппаратов, динамики полета и систем управления СГАУ.

УДК 517.977.5 (0.75)

ББК 22.1я7

ISBN 978-5-7883-0651-3

© Салмин В.В., Лазарев Ю.Н.,
Старинова О.Л., 2007

© Самарский государственный
аэрокосмический университет, 2007

Оглавление

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРОВ	6
ВВЕДЕНИЕ	8
1. КЛАССИФИКАЦИЯ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ	11
1.1. Задачи математического программирования	11
1.2. Динамические задачи оптимизации	13
2. МЕТОДЫ И ЗАДАЧИ КЛАССИЧЕСКОГО ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ	15
2.1. Функционалы и функциональные пространства	15
2.2. Вариация функционала. Необходимое условие экстремума функционала	20
2.3. Простейшая задача вариационного исчисления (задача с закрепленными концами). Основная лемма вариационного исчисления. Уравнение Эйлера	21
2.4. Поле экстремалей	24
2.5. Основная формула для вариации функционала	25
2.6. Задача с подвижными границами	28
2.7. Изопериметрическая задача	30
2.8. Задача на условный экстремум	32
2.9. Негладкие экстремали и условия Вейерштрасса–Эрдмана	33
2.10. Каноническая форма уравнений Эйлера	34
2.11. Уравнение Гамильтона–Якоби	36
2.12. Вторая вариация функционала. Необходимое условие слабого минимума функционала	37
2.13. Сводка необходимых и достаточных условий слабого минимума функционала	39
2.14. Функция Вейерштрасса. Достаточное условие сильного минимума	40
3. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ. ПРИНЦИП МАКСИМУМА ПОНТЯГИНА	42
3.1. Постановка задачи оптимального управления непрерывной динамической системой	42
3.2. Игольчатая вариация управления	43
3.3. Доказательство основной теоремы принципа максимума	44
3.4. Свойства гамильтониана	49
3.5. Различные типы граничных условий	51

3.6. Общий алгоритм решения задач оптимального управления на основе принципа максимума Понтрягина. Приведение задачи оптимального управления к краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений	52
3.7. Задача об оптимальном быстродействии для линейных систем с постоянными коэффициентами	59
3.8. Оптимальное управление линейной системой с квадратичным функционалом	61
3.9. Вырожденные задачи оптимального управления. Необходимые условия оптимальности особого управления	63
3.10. Задачи оптимального управления с ограничениями на вектор состояния	69
3.11. Связь принципа максимума с классическим вариационным исчислением	75
4. ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ	77
4.1. Принцип оптимальности Беллмана. Уравнение Беллмана	77
4.2. Связь метода динамического программирования с принципом максимума	80
4.3. Связь уравнения Беллмана с уравнением Гамильтона-Якоби классического вариационного исчисления	82
4.4. Геометрическая интерпретация решения уравнения Беллмана	83
4.5. Синтез оптимального управления линейной непрерывной системой с квадратичным функционалом	84
4.6. Метод динамического программирования в задачах управления дискретными системами	86
4.7. Задача синтеза управления для линейной дискретной системы, оптимизируемой по квадратичному функционалу	88
4.8. Вычислительные аспекты метода динамического программирования	91
4.9. Концепция возмущенно-невозмущенного движения	94
5. ПРИНЦИП РАСШИРЕНИЯ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ	96
5.1. Необходимые и достаточные условия оптимальности	96
5.2. Способы задания синтезирующей функции	101
5.3. Оценки приближенно-оптимальных решений	103
6. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ	105

6.1. Общие понятия о применении численных методов	105
6.2. Методы одномерного поиска минимума	106
6.3. Поиск экстремума функции многих переменных	108
6.4. Итерационная схема поиска экстремума функции многих переменных	111
6.5. Метод Ньютона и его модификации	112
6.6. Градиентные методы минимизации функции многих переменных без учета ограничений	115
6.7. Метод сопряженных градиентов	118
6.8. Минимизация функции многих переменных методом Ньютона	119
6.9. Метод покоординатного спуска	121
6.10. Методы минимизации функции многих переменных с ограничениями	121
6.11. Решение двухточечной краевой задачи модифицированным методом Ньютона	124
7. НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ К ЗАДАЧАМ МЕХАНИКИ И ДИНАМИКИ ПОЛЕТА	126
7.1. Уравнения движения системы материальных точек	126
7.2. Закон сохранения энергии в консервативной системе	127
7.3. Задача об оптимальном выведении спутника на орбиту	128
7.4. Задача об оптимальном перелете КА с идеально регулируемым двигателем малой тяги	133
7.5. Задача о минимуме времени разгона космического аппарата с малой тягой до параболической скорости	135
7.6. Задача синтеза оптимального управления при переориентации космического аппарата	142
7.7. Выбор оптимальной траектории набора высоты скоростного самолета-перехватчика	146
7.8. Задача аналитического конструирования автопилота, управляющего продольным движением крылатой ракеты	152
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	157
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	159

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРОВ

В середине пятидесятих годов усилиями ученых, работавших в разных странах над теоретическими и прикладными проблемами оптимизации, был создан фундамент общей теории оптимальных систем. Так возникли теория оптимальных процессов, базирующаяся на результатах академика Л.С.Понтрягина и его учеников, и динамическое программирование, основы которого заложил Р.Беллман. Дальнейшее развитие теория оптимального управления получила в трудах Ф.В. Кротова.

Быстрое развитие теории и методов оптимизации стимулировалось большой востребованностью оптимальных решений в целом ряде прикладных областей, в первую очередь, в самолетостроении, ракетной технике, космонавтике и аэронавтике. Популярность математических методов оптимизации в шестидесятых-семидесятых годах была настолько велика, что считалось возможным оптимизировать любой процесс в любой области знаний – от технологий до социальных систем, лишь бы в руках исследователей была достаточно точная модель. Разумеется, жизненная реальность быстро поставила на место зарвавшихся ученых, и на смену безудержному оптимизму, как водится, пришел пессимизм и неверие в мощь аналитических методов вообще. Стало модным уповать на компьютерные технологии и пакеты программ; при этом совершенно упускалось из виду, то, что эти пакеты никак не могли быть созданы без глубокого погружения в мир аналитических методов.

Постепенно пришло разумное осознание роли и места теоретических результатов в области оптимальных систем. Мы считали своей задачей показать молодым исследователям и студентам всю красоту и изящество теории, подкрепленной интересными примерами.

Авторы глубоко признательны людям, пробудившим у них много лет назад интерес к задачам оптимизации. В первую очередь это относится к С.А.Пиявскому, В.С.Брусову, В.Ф.Кротову, В.И.Гурману, Д.Е.Охоцимскому, В.В.Мальшеву. Жаль, что здесь невозможно перечислить всех хорошо нам знакомых ученых, внесших вклад в развитие теории и методов оптимизации, а также в решение важных прикладных задач.

Особую признательность хотелось бы выразить нашему учителю профессору В.М.Белоконову, который более сорока лет назад организовал студенческий научный семинар по динамике полета и методам оптимизации и определил тем самым нашу судьбу.

*В.В.Салмин
Ю.Н.Лазарев
О.Л.Старинова
сентябрь 2007 г.*

ВВЕДЕНИЕ

Оптимизация — это процесс нахождения экстремума показателя качества исследуемого процесса или проектируемого объекта («optimus» — «наилучший» по латыни). Современная теория оптимизации включает в себя методы решения различных оптимизационных задач. Аналитические методы отыскания экстремума функции многих переменных используют аппарат дифференциального исчисления и метод множителей Лагранжа. Экстремум функционалов интегрального вида ищется методами вариационного исчисления. Задачи отыскания оптимальных режимов управления динамическими системами решаются на основе математической теории оптимальных процессов, ключевой результат которой получил название «принцип максимума Понтрягина».

Наконец, задачи математического программирования решаются численными методами, использующими итерационные процедуры поиска экстремума.

Перечисленные классы задач не исчерпывают всего многообразия постановок. В предлагаемом вниманию читателя учебном пособии авторы не ставили целью охватить все множество методов и задач оптимизации.

Настоящее учебное пособие подготовлено на основе курсов лекций, читаемых авторами на протяжении многих лет для студентов специальностей «Космические аппараты и разгонные блоки», «Механика», «Моделирование и исследование операций в организационно-технических системах». Курс «Методы оптимизации» принадлежит к перечню дисциплин, составляющих фундаментальную основу подготовки современного специалиста в области механики и процессов управления, моделирования и исследования операций.

Основной целью данного пособия является ознакомление студентов с основными понятиями и принципами теории оптимальных систем, обучение методам вариационного исчисления и оптимального управления, практическое освоение алгоритмов решения прикладных задач оптимизации.

Пособие состоит из 7 разделов.

В первом разделе дается классификация методов оптимизации,

приводятся постановки основных задач.

Второй раздел «Методы и задачи классического вариационного исчисления» посвящен методам исследования функционалов, основным задачам вариационного исчисления (задача с закрепленными концами, задача с подвижными границами, изопериметрическая задача, задача на условный экстремум). Дается понятие о поле экстремалей, приводится каноническая форма уравнений Эйлера, уравнение Гамильтона - Якоби. Даются необходимые и достаточные условия слабого и сильного экстремумов (условие Лежандра, условие Вейерштрасса).

Третий раздел «Теория оптимальных процессов» посвящен методам решения задач оптимального управления непрерывными динамическими системами на основе принципа максимума Понтрягина. Приводится современная постановка задачи оптимального управления с учетом ограничений на векторы управления и состояния. Описывается инструмент игольчатых вариаций, доказывается основная теорема об оптимальном управлении. Рассматриваются различные типы граничных условий. Исследуется задача об оптимальном быстродействии для линейных динамических систем, задача программирования оптимального управления линейной системой с квадратичным функционалом, вырожденная задача оптимального управления, задача с ограничениями на вектор состояния.

Четвертый раздел «Динамическое программирование» посвящен изучению методов, основанных на принципе оптимальности Р.Беллмана. Сформулирована задача синтеза оптимального управления и даны приближенные методы ее решения. Описываются алгоритмы решения задачи синтеза оптимального управления для линейных систем с квадратичным функционалом, даются методы оптимизации дискретных систем, основанные на принципе оптимальности.

Пятый раздел «Принцип расширения и достаточные условия оптимальности» излагает методы отыскания абсолютного (глобального) минимума функционалов. Даются достаточные условия оптимальности, сформулированные В.Ф.Кротовым и их формализация в виде принципа максимума и в виде уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана.

Шестой раздел «Численные методы решения задач оптимизации» посвящен описанию методов параметрической оптимизации целевой функции без учета и с учетом ограничений. Изложены основы градиентных методов, методов, использующих штрафные функции. Дается алгоритм решения двухточечной краевой задачи оптимального управления модифицированным методом Ньютона.

В седьмом разделе рассматриваются прикладные задачи механики, ракетодинамики и систем управления с точки зрения теории вариационного исчисления и теории оптимального управления:

- вывод уравнений движения системы материальных точек и закона сохранения энергии в консервативной системе;
- задача оптимального выведения на орбиту спутника Земли;
- задача об оптимальном перелете между некомпланарными круговыми орбитами с малой постоянной тягой и о минимуме времени разгона космического аппарата до параболической скорости;
- задача синтеза оптимального по быстродействию управления при переориентации космического аппарата;
- выбор оптимальной траектории набора высоты скоростного самолета-перехватчика;
- задача аналитического конструирования автопилота, управляющего продольным движением крылатой ракеты.

В настоящем учебном пособии принята единая система обозначений. Символом x , $x(t)$ обозначается вектор состояния, функция; символом t — аргумент функции, в частности, время, символом z — вектор оптимизируемых параметров. Такая унификация обозначений позволяет объединить в рамках одного курса такие дисциплины, как вариационное исчисление, теорию оптимального управления и нелинейное программирование, не внося путаницы при переходе от раздела к разделу.

Настоящий курс лекций предназначен для инженеров и ориентирован на получение навыков решения широкого круга прикладных задач. Авторы считали своей задачей в строгой, но доступной форме сообщить инженеру знания, позволяющие строить оптимальные системы, включая постановки задач оптимизации, математические методы их решения и особенности численного отыскания оптимальных решений. Поэтому здесь изложение материала ведется на так называемом «инженерном уровне строгости», не допускающем, однако, чрезмерной вульгаризации. Те из читателей, кто хочет более глубоко ознакомиться с математическими основаниями теории оптимального управления, могут воспользоваться литературными источниками [1 - 12], содержащими строгое изложение соответствующих разделов теории.

1. КЛАССИФИКАЦИЯ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ

1.1. Задачи математического программирования

Задачи математического программирования называются также статическими задачами оптимизации.

Формулировка задачи математического программирования. Найти вектор $\mathbf{z}$ с компонентами $(z_1, z_2, z_3, \dots, z_n)^T$ из некоторого допустимого множества $\mathbf{Z}$, задаваемого в виде ограничений

$$g_j(z_1, z_2, \dots, z_n) \leq b_j \quad (j = 1, 2, \dots, m), \quad (1.1)$$

который минимизирует (или максимизирует) целевую функцию

$$F = F(\mathbf{z}) = F(z_1, z_2, \dots, z_n),$$

$$\text{т.е. } \mathbf{z} = \arg \min_{\mathbf{z} \in \mathbf{Z}} F(\mathbf{z}) \text{ или } \mathbf{z} = \arg \max_{\mathbf{z} \in \mathbf{Z}} F(\mathbf{z}). \quad (1.2)$$

В зависимости от вида функций $F(\mathbf{z})$ и $g_j(\mathbf{z})$ выделены отдельные типы задач, для которых разработаны специальные методы.

Классические задачи оптимизации. Отличаются тем, что среди ограничений, задающих допустимое множество $\mathbf{Z}$, отсутствуют неравенства, нет условий неотрицательности или дискретности переменных, а функции $F(\mathbf{z})$ и $g_j(\mathbf{z})$ непрерывны и имеют частные производные, по крайней мере, второго порядка. Типичными задачами являются задачи на отыскание минимума (или максимума) функции $F = F(\mathbf{z})$ либо в предположении, что на вектор $\mathbf{z}$ никаких ограничений не накладывается (задачи на безусловный экстремум), либо в предположении, что вектор $\mathbf{z}$ связан только равенствами (задачи на условный экстремум).

Эти задачи, как правило, могут быть решены классическими методами, основанными на использовании дифференциального исчисления. Трудности возникают при получении численных результатов, поэтому

классические методы являются в большей степени теоретическими.

Задачи линейного программирования. Характеризуются тем, что функции $F(\mathbf{z})$ и $g_j(\mathbf{z})$ являются линейными по $\mathbf{z}$.

Требуется найти вектор $\mathbf{z}$ с компонентами $(z_1, z_2, z_3, \dots, z_n)^T$, обеспечивающий минимум (или максимум) функции

$$F(\mathbf{z}) = \sum_{i=1}^n c_i z_i \quad (1.3)$$

при условиях $\sum_{i=1}^n a_{ji} z_i \leq b_j \quad (j=1, 2, \dots, m), \quad z_i \geq 0 \quad (i=1, 2, \dots, n)$.

В основе большинства методов решения задач линейного программирования лежит симплекс-метод [9, 11].

Задачи нелинейного программирования. К ним относятся все задачи с нелинейной целевой функцией или нелинейными ограничениями. Частным случаем являются задачи квадратичного программирования.

Задачи квадратичного программирования. Характеризуются квадратичной зависимостью целевой функции $F(\mathbf{z})$ и линейной зависимостью функций $g_j(\mathbf{z})$. Методы решения задач этого типа в основном базируются на теореме Куна-Таккера [4].

Детерминированные задачи. В этих задачах целевая функция является детерминированной (неслучайной) функцией параметров.

Стохастические задачи. Характеризуются тем, что параметры задачи являются случайными величинами, и поэтому целевая функция представляет собой какую-либо статистическую характеристику случайной функции параметров.

Для решения задач нелинейного программирования (как детерминированных, так и стохастических) применяются методы поиска, которые, в свою очередь, могут быть детерминированными и стохастическими.

Детерминированные методы поиска. Имеют жесткий алгоритм поиска (без случайных элементов). К этим методам относятся градиентные методы, метод покоординатного спуска, метод штрафных функций, овражные методы, одномерные методы поиска и другие.

Методы случайного поиска. Характеризуются наличием элемента случайности в алгоритме поиска (например, случайными могут быть величины пробного шага, рабочего шага и другие). К этим методам относятся методы ненаправленного случайного поиска, комбинированные методы поиска, методы случайного поиска с самообучением.

1.2. Динамические задачи оптимизации

Динамическими системами принято называть совокупность объектов любой природы, связанных соотношениями типа «вход» - «выход». Соответственно, поиск оптимального по какому-либо критерию входного воздействия (управления) приводит к постановкам динамических задач оптимизации. Динамические задачи делятся на непрерывные и дискретные.

Непрерывные задачи. В этих задачах поведение динамической системы описывается дифференциальными уравнениями, т.е. рассматривается на непрерывном множестве $t \in [t_0, t_K]$.

Дискретные задачи. В этих задачах поведение динамической системы описывается уравнениями в конечных разностях и, следовательно, рассматривается в отдельные (дискретные) моменты времени. Постановки дискретных задач аналогичны постановкам непрерывных.

Динамические задачи оптимизации для непрерывных систем называются также вариационными. В отличие от задач математического программирования они характеризуются наличием дифференциальных связей, накладываемых на переменные, а также тем, что в роли критерия оптимальности, подлежащего минимизации (или максимизации), выступает функционал.

Формулировка вариационной задачи. Дана модель динамической системы

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad (1.4)$$

где $\mathbf{x}$ - вектор состояния, $\mathbf{u}$ - вектор управления, на которые накладываются ограничения $\mathbf{x} \in \mathbf{X}, \mathbf{u} \in \mathbf{U}$ ($\mathbf{X}$ и $\mathbf{U}$ - соответственно допустимые множества векторов состояния $\mathbf{x}$ и управления $\mathbf{u}$). Поведение системы рассматривается на некотором конечном отрезке времени $t \in [t_0, t_K]$. Требуется найти такое управление системой, т.е. вектор $\mathbf{u}$,

которое обращает в минимум или максимум функционал

$$I = \int_{t_0}^{t_K} f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) dt + F[\mathbf{x}(t)] \quad (1.5)$$

В зависимости от вида искомого управления различают задачи программирования управления и задачи синтеза закона управления.

Задачи программирования оптимального управления. В этих задачах оптимальное управление отыскивается в виде программы, т.е. функции времени $\mathbf{u}(t)$, называемой оптимальным программным управлением.

Задачи синтеза оптимального управления. В этих задачах отыскивается оптимальный закон управления, т.е. зависимость управления от текущего состояния и времени $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, называемая также оптимальным координатным управлением.

С помощью классического вариационного исчисления можно решать эти задачи лишь при отсутствии ограничений, накладываемых на векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{u}$. Для решения вариационных задач с ограничениями разработаны новые методы, такие как принцип максимума Л.С. Понтрягина, метод динамического программирования Р. Беллмана и другие [2, 3, 5].

Динамические задачи оптимизации, как и статические, разделяются на детерминированные (при отсутствии случайных факторов) и стохастические (при наличии случайных факторов).

Задачи синтеза оптимального управления разделяются на задачи управления по полным и неполным данным.

Задачи управления по полным данным. В этом случае предполагается, что измерению доступен полный вектор текущего состояния $\mathbf{x}$, и, следовательно, управление может быть сформировано в виде функции $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$.

Задачи управления по неполным данным. В этом случае предполагается, что измерению доступен другой вектор $\mathbf{y}$, связанный с $\mathbf{x}$ некоторым соотношением

$$\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, t, \mathbf{v}),$$

где $\mathbf{v}$ - характеризует случайные ошибки измерений.

2. МЕТОДЫ И ЗАДАЧИ КЛАССИЧЕСКОГО ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

2.1. Функционалы и функциональные пространства

Вариационное исчисление изучает методы, позволяющие находить максимальные и минимальные значения функционалов. Задачи, в которых требуется исследовать функционал на максимум или минимум, называются вариационными [1].

Определение. Переменная величина I называется *функционалом* от функции $x(t)$, если каждой функции $x(t)$ из некоторого множества функций $\mathbf{X}$ соответствует определенное значение I .

Считается, что функционал задан, если каждой функции поставлено в соответствие некоторое число: $I = I[x(t)]$.

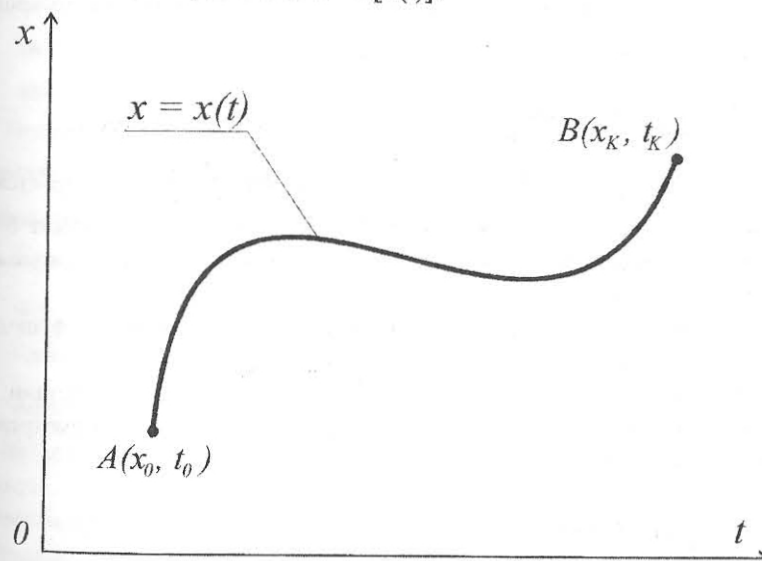


Рис.2.1. Длина дуги кривой – функционал от функции $x = x(t)$

Например, функционалом является длина S дуги плоской кривой, соединяющей две точки $A(t_0, x_0)$ и $B(t_K, x_K)$ (рис. 2.1).

Величина S может быть вычислена, если задано уравнение кривой $x = x(t)$:

$$I = s[x(t)] = \int_{t_0}^{t_K} \sqrt{1 + (\dot{x})^2} dt.$$

Запишем общее выражение для функционала в следующем виде:

$$I = \int_{t_0}^{t_K} F(t, x, \dot{x}) dt, \quad (2.1)$$

где $x(t)$ - одна из возможных непрерывно дифференцируемых функций на отрезке $[t_0, t_K]$.

Существует связь задачи вариационного исчисления с задачей отыскания экстремума функции многих переменных: если разбить отрезок $[t_0, t_K]$ на $(n+1)$ частей и рассмотреть ломаную линию вместо кривой $x(t)$, а функционал I заменить суммой

$$I_n = \sum_{i=1}^{n+1} F[t_i, x_i, \frac{x_i - x_{i-1}}{h}] h,$$

где $h = t_i - t_{i-1} = \text{const}$, то вариационная задача трансформируется в задачу о нахождении экстремума функции n переменных и может быть решена классическими методами. Такой подход впервые был предложен Л. Эйлером.

Определение. Пространство, элементами которого являются функции, называется *функциональным*.

Функциональные пространства выбираются в соответствии с характером вариационной задачи. Например, при рассмотрении функционалов вида

$$I = \int_{t_0}^{t_K} F(t, x, \dot{x}) dt$$

функция $x(t)$ должна иметь непрерывную первую производную; при

рассмотрении функционалов вида

$$I = \int_{t_0}^{t_K} F(t, x, \dot{x}, \ddot{x}) dt$$

функция $x(t)$ должна иметь непрерывные первую и вторую производные и т.д.

Назовем *линейным пространством* $\mathbf{R}$ совокупность элементов (x, y, z) , для которых определены операции сложения и умножения на число и выполняются следующие аксиомы:

1. коммутативности сложения $x + y = y + x$,
2. ассоциативности сложения $(x + y) + z = x + (y + z)$,
3. существования нулевого элемента $x + 0 = x$,
4. существования противоположного элемента $(-x)$: $x + (-x) = 0$,
5. существования единичного элемента $1 \times x = x$,
6. ассоциативности умножения $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$, где α и β - числа,
7. дистрибутивности по сложению $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$,
8. дистрибутивности по умножению $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.

Линейное пространство называется *нормированным*, если каждому элементу $x \in \mathbf{R}$ поставлено в соответствие неотрицательное число $\|x\|$ (*норма* этого элемента) такое, что выполняются свойства:

1. положительной определенности $\|x\| \geq 0$, причем $\|x\| = 0$ только при $x = 0$,
2. однородности $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$,
3. неравенства треугольника $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Введем понятие *близости элементов*, используя понятие нормы их разности, которое аналогично понятию расстояния между точками в евклидовом пространстве.

Рассмотрим пространство $\mathbf{C}$, состоящее из непрерывных функций, определенных на отрезке $[t_0, t_K]$. Норму функции определим как

$\|x\| = \max_t |x(t)|$. Расстояние между точками $x, \bar{x}$ пространства C будет $\|x - \bar{x}\| = \max_t |x - \bar{x}|$. Функции $x(t)$ и $\bar{x}(t)$ близки в смысле близости нулевого порядка, если модуль разности $|x - \bar{x}|$ не превышает некоторой наперед заданной малой положительной величины $\delta: \|x - \bar{x}\| < \delta$. Такая окрестность называется сильной (рис. 2.2).

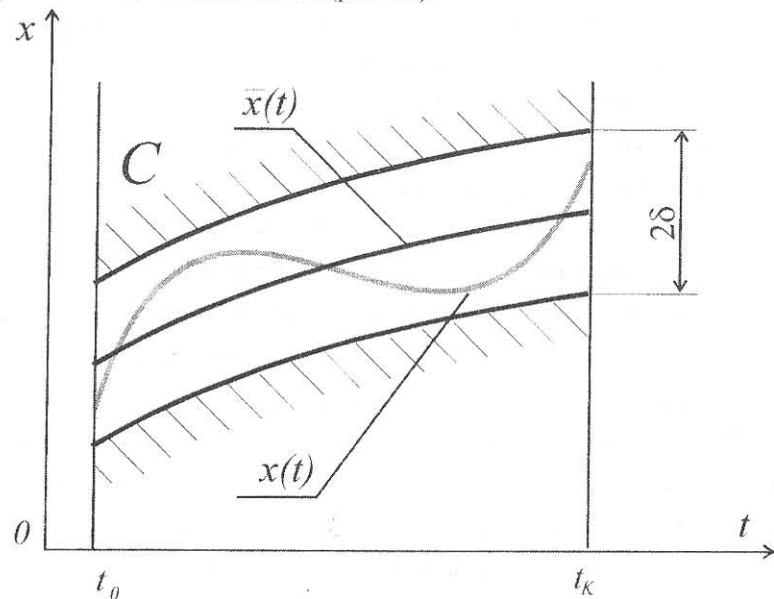


Рис. 2.2. Сильная окрестность кривой $\bar{x}(t)$

Рассмотрим пространство D_1 , состоящее из непрерывных функций, определенных на отрезке $[t_0, t_K]$ и имеющих непрерывные первые производные. Очевидно, $D_1 \subset C$. Функции $x(t)$ и $\bar{x}(t)$ близки в смысле близости первого порядка, если модули разностей $|x - \bar{x}|$ и $|\dot{x} - \dot{\bar{x}}|$, а также

$\|x - \bar{x}\|$ не превышают некоторой наперед заданной малой положительной величины $\delta: \max_t |x - \bar{x}| \leq \delta, \max_t |\dot{x} - \dot{\bar{x}}| \leq \delta$, так что $\|x - \bar{x}\| = \max_t |x - \bar{x}| + \max_t |\dot{x} - \dot{\bar{x}}| \leq \delta$. Такая окрестность называется слабой (рис. 2.3).

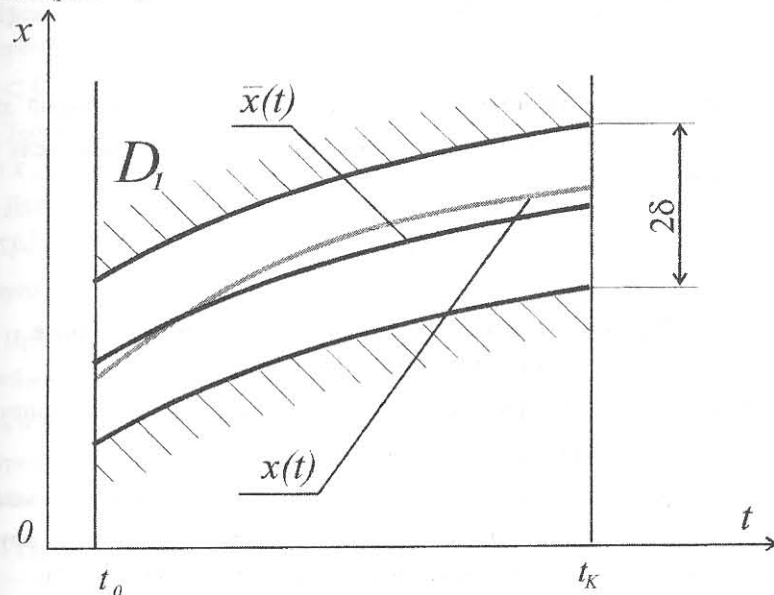


Рис. 2.3. Слабая окрестность кривой $\bar{x}(t)$

Соответственно вводится понятие близости k -го порядка, соответствующее функциональному пространству D_k .

Определение. Функционал I называется непрерывным при $x = \bar{x}(t)$, если для любого положительного ε можно подобрать $\delta > 0$, такую что $|I[x(t)] - I[\bar{x}(t)]| < \varepsilon$ при $\|x - \bar{x}\|_k < \delta$, где $\|x - \bar{x}\|_k$ — норма, определенная в смысле близости функций x и $\bar{x}$ k -го порядка.

Определение. Линейным называется функционал L , удовлетворяющий

следующим условиям.

1. Функционал L является непрерывным,
2. $L[cx(t)] = cL[x(t)]$,
3. $L[x_1(t) + x_2(t)] = L[x_1(t)] + L[x_2(t)]$.

Общий вид линейного функционала

$$L = \int_{t_0}^{t_K} [P(t)x(t) + Q(t)\dot{x}(t)] dt. \quad (2.2)$$

Определение. Функционал L^2 , определенный для всех функций $x(t)$ на множестве D_1 , называется квадратичным функционалом, если он приводится к виду

$$L^2 = \int_{t_0}^{t_K} [A(t)x^2(t) + B(t)x(t)\dot{x}(t) + C(t)\dot{x}^2(t)] dt. \quad (2.3)$$

2.2. Вариация функционала. Необходимое условие экстремума функционала

Рассмотрим некоторый функционал $I[\bar{x}(t)]$ и его приращение $\Delta I = I[\bar{x} + \delta x] - I[\bar{x}]$, где δx - вариация x .

Определение. Вариацией функции $x(t)$, принадлежащей определенному классу функций, называется разность между двумя функциями при одинаковом значении аргумента t : $\delta x = \bar{x}(t) - x(t)$.

Определение. Если ΔI можно представить в виде

$$\Delta I = L[\bar{x}(t), \delta x] + \beta[\bar{x}(t), \delta x] \|\delta x\|, \quad (2.4)$$

где $L[x(t), \delta x] \rightarrow 0$ при $\|\delta x\| \rightarrow 0$, то линейная по отношению к δx часть приращения функционала, т.е. $L[x(t), \delta x]$, называется первой вариацией функционала и обозначается δI .

Функционал достигает экстремума при $x = \bar{x}$, если величина приращения функционала ΔI сохраняет свой знак в некоторой окрестности $\bar{x}(t)$. Различают *сильный* и *слабый экстремумы*.

Если существует величина $\delta > 0$, такая что $I[x(t)] - I[\bar{x}]$ сохраняет

знак для всех x , входящих в пространство D_1 , у которых норма $\|x - \bar{x}\|_{D_1} < \delta$, то говорят, что при $x = \bar{x}$ достигается слабый экстремум функционала.

Аналогично, экстремум называется сильным, если ΔI сохраняет знак для всех $x \in C$ и удовлетворяет условию $\|x - \bar{x}\|_C < \delta$. Всякий сильный экстремум будет одновременно и слабым, но не наоборот, так как слабый экстремум достигается на более узком множестве функций, поскольку $D_1 \subset C$.

Теорема 2.1. Для того чтобы функционал I достигал экстремума при $x = \bar{x}$, необходимо, чтобы при $x = \bar{x}$ $\delta I = 0$.

Доказательство. Пусть функционал имеет минимум при $x = \bar{x}$, тогда

$$\Delta I = I[x + \delta x] - I[\bar{x}] \geq 0,$$

с другой стороны $\Delta I = \delta I[\delta x] + \beta \|\delta x\|$.

При достаточно малом δx знак ΔI определяется знаком δI , а в силу линейности δI имеем: $\delta I[-\delta x] = -\delta I[\delta x]$. Следовательно, ΔI может быть и меньше, и больше 0 при сколь угодно малом δx разного знака, т.е. экстремум невозможен. Противоречие устраняется, если $\delta I = 0$. Аналогично доказывается необходимое условие максимума функционала.

2.3. Простейшая задача вариационного исчисления (задача с закрепленными концами). Основная лемма вариационного исчисления. Уравнение Эйлера

Простейшей задачей вариационного исчисления называется задача об экстремуме функционала вида (2.1) с граничными условиями: $x(t_0) = x_0$, $x(t_K) = x_K$.

Лемма. Если для каждой непрерывной функции $\eta(t)$ выполняется условие обращения в нуль интеграла

$$\int_{t_0}^{t_K} \Phi(t) \eta(t) dt = 0,$$

где функция $\Phi(t)$ непрерывна на отрезке $[t_0, t_K]$, то $\Phi(t) \equiv 0$ на том же отрезке.

Доказательство. Предположив, что в точке $t = t'$, лежащей на отрезке $[t_0, t_1]$, $\Phi(t) \neq 0$, приходим к противоречию. Действительно, из непрерывности функции $\Phi(t)$ следует, что если $\Phi(t') \neq 0$, то $\Phi(t)$ сохраняет знак в некоторой окрестности $(\tau_0 \leq t \leq \tau_1)$ точки t' ; выбрав функцию $\eta(t)$, также сохраняющую знак в этой окрестности и равную нулю вне этой окрестности, получим

$$\int_{t_0}^{t_K} \Phi(t) \eta(t) dt \neq 0,$$

так как произведение $\Phi(t) \eta(t)$ сохраняет знак на интервале $(\tau_0 \leq t \leq \tau_1)$ и обращается в нуль вне этого отрезка. Итак, мы пришли к противоречию, следовательно, $\Phi(t) \equiv 0$.

Теорема 2.2. Для того чтобы функционал

$$I[x(t)] = \int_{t_0}^{t_K} F(t, x(t), \dot{x}(t)) dt,$$

определенный на множестве непрерывных функций $x(t)$, имеющих непрерывную первую производную и удовлетворяющих граничным условиям $x(t_0) = x_0$, $x(t_K) = x_K$, достигал на $\bar{x}(t)$ экстремума, необходимо, чтобы функция $\bar{x}(t)$ удовлетворяла уравнению Эйлера

$$F_x - \frac{d}{dt} F_{\dot{x}} = 0, \quad (2.5)$$

или в развернутом виде

$$F_x - F_{\dot{x}\dot{x}} - F_{\dot{x}x} \dot{x} - F_{xx} \ddot{x} = 0. \quad (2.6)$$

Доказательство. Получим формулу для первой вариации функционала. Применяя операцию варьирования подынтегрального выражения при условии, что $\|x(t) - \bar{x}(t)\|_{D_1} < \delta$, получим

$$\delta I = \int_{t_0}^{t_K} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \delta x + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x} \right) dt = \int_{t_0}^{t_K} \frac{\partial F}{\partial x} \delta x dt + \int_{t_0}^{t_K} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x} dt. \quad (2.7)$$

Проинтегрируем второе слагаемое по частям и, принимая во внимание,

что $\delta \dot{x} = \frac{d}{dt}(\delta x)$, получим

$$\delta I = \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x} \Big|_{t_0}^{t_K} + \int_{t_0}^{t_K} \left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) \delta x dt. \quad (2.8)$$

Но поскольку концы экстремали закреплены, то $\delta x|_{t=t_0} = x(t_0) - \bar{x}(t_0) = 0$, $\delta x|_{t=t_K} = x(t_K) - \bar{x}(t_K) = 0$, и получаем необходимое условие экстремума в виде

$$\delta I = \int_{t_0}^{t_K} \left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) \delta x dt. \quad (2.9)$$

В силу основной леммы вариационного исчисления, поскольку $\delta x(t) \neq 0$, для любого t , получаем результат (2.5).

Интегральные кривые уравнения Эйлера $\bar{x} = \bar{x}(t, c_1, c_2)$ называются *экстремалими*. Только на них достигается экстремум рассматриваемого функционала. Чтобы установить, реализуется ли на них в действительности экстремум, и притом максимум или минимум, надо воспользоваться достаточными условиями экстремума.

Краевая задача для уравнения (2.6) с граничными условиями $x(t_0) = x_0$, $x(t_K) = x_K$ не всегда имеет решение, а если решение существует, то оно может быть не единственным.

Получим необходимые условия экстремума функционала I , зависящего от n независимых функций $x_i(t)$:

$$I = \int_{t_0}^{t_K} F(t, x_1, x_2, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n) dt$$

при заданных граничных условиях всех функций

$$x_1(t_0) = x_{10}, x_2(t_0) = x_{20}, \dots, x_n(t_0) = x_{n0},$$

$$x_1(t_K) = x_{1K}, x_2(t_K) = x_{2K}, \dots, x_n(t_K) = x_{nK}.$$

Если варьировать одну из функций x_i ($i=1,2,\dots,n$), оставляя остальные неизменными, то рассматриваемый функционал превращается в функционал, зависящий лишь от одной функции, которая, следовательно, должна удовлетворять уравнению Эйлера

$$F_{x_i} - \frac{d}{dt} F_{\dot{x}_i} = 0.$$

Так как это рассуждение применимо к любой функции $x_i(t)$ ($i=1,2,\dots,n$), то мы получим систему дифференциальных уравнений второго порядка

$$F_{x_i} - \frac{d}{dt} F_{\dot{x}_i} = 0 \quad (i=1,2,\dots,n), \quad (2.10)$$

определяющих $2n$ -параметрическое семейство интегральных кривых (экстремалей).

2.4. Поле экстремалей

Если на плоскости (t, x) через каждую точку некоторой области **D** проходит одна и только одна кривая семейства $x = f(t, c)$, говорят, что это семейство кривых в области **D** образует *собственное поле*. Угловой коэффициент касательной $p(t, x)$ к кривой семейства $x(t, c)$, проходящей через точку $M(t, x)$, называется *наклоном поля* в точке $M(t, x)$: $p_M = \dot{x}|_M$.

Поле называется *центральным*, если кривые покрывают всю область **D** и нигде не пересекаются, кроме одной точки (центра пучка кривых), принадлежащей области **D**.

Если собственное или центральное поле образовано семейством экстремалей некоторой вариационной задачи, то оно называется *полем*

экстремалей.

Говорят, что экстремаль $\bar{x} = \bar{x}(t)$ включена в поле экстремалей, если найдено семейство экстремалей $\bar{x} = \bar{x}(t, c)$, образующее поле, содержащее при некотором значении $c = c'$ экстремаль $\bar{x}(t)$, причем последняя не лежит на границе области **D**.

Известно, что две бесконечно близкие кривые семейства $\Phi(t, x, c) = 0$ пересекаются в точках c -дискриминантной кривой, определяемой уравнениями

$$\Phi(t, x, c) = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial c} = 0.$$

Если дуга AB экстремали $\bar{x}(t)$ не имеет отличных от точки A общих точек с c -дискриминантной кривой пучка экстремалей, включающего данную экстремаль, то достаточно близкие к дуге AB экстремали пучка не пересекаются, т.е. образуют в окрестности дуги AB центральное поле, включающее эту дугу.

Если дуга AB экстремали $\bar{x}(t)$ имеет отличную от точки A общую точку A^* с c -дискриминантной кривой пучка экстремалей, то близкие кривые пучка могут пересекаться между собой вблизи точки A^* и, вообще говоря, поля не образуют. Точка A^* называется точкой, *сопряженной с точкой A* и является точкой пересечения двух бесконечно близких кривых семейства $\bar{x}(t, c)$.

Условие Якоби. Для построения центрального поля экстремалей с центром в точке A , содержащего дугу AB экстремали, достаточно, чтобы точка A^* , сопряженная с точкой A , не лежала на дуге AB .

2.5. Основная формула для вариации функционала

Рассмотрим задачу со свободными концами. Будем считать, что экстремали – это кривые, концы которых могут произвольно перемещаться (рис. 2.4). Экстремаль $\bar{x}(t)$ изображена дугой AB , в результате ее варьирования получается дуга $A'B'$.

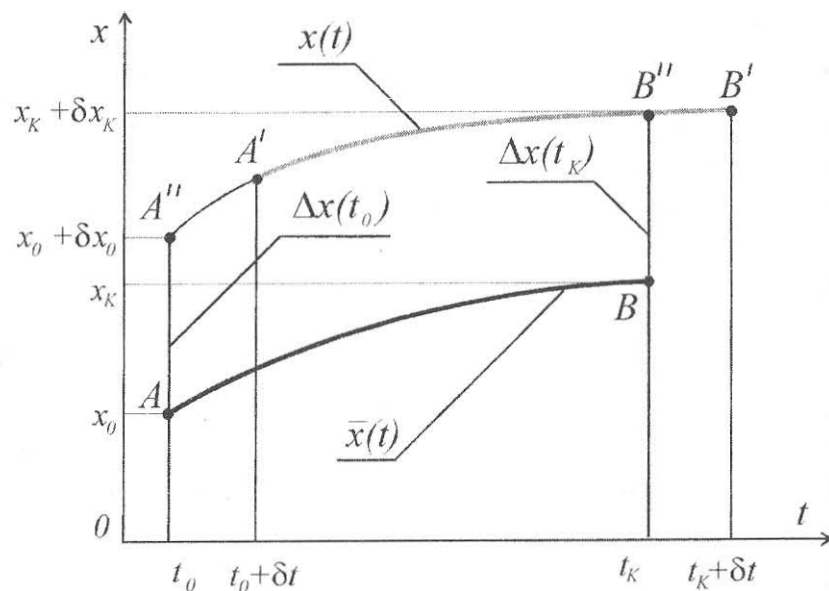


Рис. 2.4. Задача со свободными концами

Для этого общего случая определим вариацию функционала δI , как линейную по отношению к $\delta \dot{x}$ часть приращения функционала ΔI .

Запишем выражение для приращения функционала

$$\begin{aligned} \Delta I = I[\bar{x} + \Delta x] - I[\bar{x}] &= \int_{t_0 + \delta t_0}^{t_K + \delta t_K} F(t, \bar{x} + \Delta x, \dot{\bar{x}} + \Delta \dot{x}) dt - \\ &- \int_{t_0}^{t_K} F(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}) dt = \int_{t_0}^{t_K} [F(t, \bar{x} + \Delta x, \dot{\bar{x}} + \Delta \dot{x}) - F(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}})] dt + \\ &+ \int_{t_1}^{t_K + \delta t_K} F(t, \bar{x} + \Delta x, \dot{\bar{x}} + \Delta \dot{x}) dx - \int_{t_0}^{t_0 + \delta t_0} F(t, \bar{x} + \Delta x, \dot{\bar{x}} + \Delta \dot{x}) dt. \end{aligned}$$

Здесь $\Delta x(t)$ есть приращение исходной функции $\bar{x}(t)$, учитывающее смещение начальной и конечной точек. Перепишем это выражение, используя формулу Тейлора и отбросив члены выше первого порядка малости:

$$\begin{aligned} \Delta I \approx \int_{t_0}^{t_K} [F_x(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}) \Delta x + F_{\dot{x}}(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}) \Delta \dot{x}] dt + \\ + F(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}})|_{t=t_K} \delta t_K - F(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}})|_{t=t_0} \delta t_0. \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(F_{\dot{x}} \Delta x) &= \frac{dF_{\dot{x}}}{dt} \Delta x + F_{\dot{x}} \frac{d}{dt} \Delta x, \\ \int_{t_0}^{t_1} F_{\dot{x}} \frac{d}{dt} \Delta x dt &= F_{\dot{x}} \Delta x|_{t_0}^{t_K} - \int_{t_0}^{t_K} \frac{dF_{\dot{x}}}{dt} \Delta x dt, \end{aligned}$$

получим

$$\Delta I \approx \int_{t_0}^{t_K} \left(F_x - \frac{dF_{\dot{x}}}{dt} \right) \Delta x dt + F_{\dot{x}} \Delta x|_{t_0}^{t_K} + F|_{t_K} \delta t_K - F|_{t_0} \delta t_0.$$

Проведем некоторые построения с целью приведения ординат кривых AB и $A'B'$ к одинаковым значениям аргумента t : t_0 и t_K . Для этого воспользуемся линейной экстраполяцией концов кривых: из точки A' проведем касательную до точки A'' , соответствующей значению t_1 ; точку B'' получим, проведя вертикальный отрезок из точки B .

Учитывая, что (см. рис. 2.4) $\Delta x(t_0) \approx \delta x_0 - \dot{\bar{x}} \delta t_0$ и $\Delta x(t_K) \approx \delta x_K - \dot{\bar{x}} \delta t_K$, получим основную формулу для вариации функционала

$$\delta I = \int_{t_0}^{t_K} \left(F_x - \frac{dF_{\dot{x}}}{dt} \right) \Delta x dt + F_{\dot{x}}|_{t=t_K} \delta x_K - F_{\dot{x}}|_{t=t_0} \delta x_0 +$$

$$+ (F - F_{\dot{x}} \dot{x}) \Big|_{t=t_K} \delta t_K - (F - F_{\dot{x}} \dot{x}) \Big|_{t=t_0} \delta t_0. \quad (2.11)$$

Это выражение учитывает изменение функционала от варьирования самой кривой (интегральный член), от варьирования ее концов (второй и третий члены) и от варьирования концов отрезка $[t_0, t_K]$ (четвертый и пятый члены).

Поскольку $\delta x(t)$, δx_0 , δx_K , δt_0 , δt_K независимы друг от друга, необходимое условие экстремума $\delta I = 0$ приводит помимо уже полученного уравнения Эйлера к требованию обращения в нуль всех внеинтегральных членов выражения (2.11):

$$\begin{aligned} F_{\dot{x}} \Big|_{t=t_K} \delta x_K &= 0, & F_{\dot{x}} \Big|_{t=t_0} \delta x_0 &= 0, \\ (F - F_{\dot{x}} \dot{x}) \Big|_{t=t_K} \delta t_K &= 0, & (F - F_{\dot{x}} \dot{x}) \Big|_{t=t_0} \delta t_0 &= 0. \end{aligned}$$

Для случая, когда функционал зависит от n неизвестных, основная формула для вариации принимает вид:

$$\begin{aligned} \delta I &= \int_{t_0}^{t_K} \sum_{i=1}^n \left(F_{x_i} - \frac{dF_{\dot{x}_i}}{dt} \right) \delta x_i dt + \sum_{i=1}^n F_{\dot{x}_i} \Big|_{t=t_0}^{t=t_K} \delta x_{iK} + \\ &+ \left(F - \sum_{i=1}^n F_{\dot{x}_i} \dot{x}_i \right) \delta t \Big|_{t=t_0}^{t=t_K}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

2.6. Задача с подвижными границами

При исследовании функционала (2.1) на экстремум предположим, что одна или обе граничные точки могут перемещаться по заданным кривым $\varphi(t)$ и $\psi(t)$. Эта задача называется задачей с подвижными границами. В этом случае класс допустимых кривых расширяется. Поэтому если на кривой $\bar{x}(t)$ достигается экстремум в задаче с подвижными границами, то экстремум тем более достигается по отношению к более узкому классу кривых, имеющих общие граничные точки с кривой $\bar{x}(t)$. Следовательно, функция $\bar{x}(t)$ должна быть решением уравнения Эйлера, и все кривые $\bar{x}(t, c_1, c_2)$, на которых реализуется экстремум в задаче с

подвижными концами, должны быть экстремалими.

Общее решение уравнения Эйлера содержит две произвольные постоянные, для определения которых необходимо иметь два условия. В задаче с закрепленными концами такими условиями были $x(t_0) = x_0$ и $x(t_K) = x_K$. В задаче с подвижными границами одно или оба эти условия отсутствуют. Недостающие условия для определения произвольных постоянных должны быть получены из основного необходимого условия экстремума – равенства нулю вариации δI .

Рассмотрим следующую задачу с подвижными границами. Найти экстремум функционала

$$I = \int_{t_0}^{t_K} F(t, x, \dot{x}) dt,$$

определенного на кривых, концы которых могут перемещаться по линиям $x = \varphi(t)$ и $x = \psi(t)$ (рис. 2.5).

Искомые кривые (экстремали) должны удовлетворять уравнению Эйлера, поэтому в выражении для вариации функционала остается только внеинтегральный член. Учитывая, что

$$\delta x_0 = \dot{\varphi} \delta t_0 + \alpha_0, \quad \delta x_K = \dot{\psi} \delta t_K + \alpha_1,$$

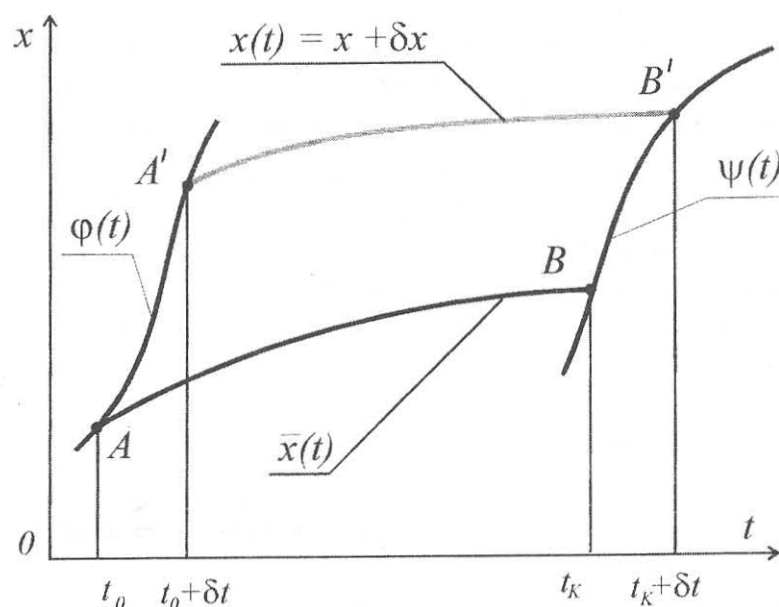
где α_0 и α_1 – бесконечно малые величины, имеем

$$\delta I = (F_{\dot{x}} \dot{\psi} + F - F_{\dot{x}} \dot{x}) \Big|_{t=t_K} \delta t_K - (F_{\dot{x}} \dot{\varphi} + F - F_{\dot{x}} \dot{x}) \Big|_{t=t_0} \delta t_0.$$

Вариации независимой переменной δt_0 и δt_K не равны нулю, поэтому выражения $(F_{\dot{x}} \dot{\psi} + F - F_{\dot{x}} \dot{x}) \Big|_{t=t_K}$, $(F_{\dot{x}} \dot{\varphi} + F - F_{\dot{x}} \dot{x}) \Big|_{t=t_0}$ должны обращаться в нуль:

$$[F + F_{\dot{x}}(\dot{\varphi} - \dot{x})] \Big|_{t=t_K} = 0, \quad (2.13)$$

$$[F + F_{\dot{x}}(\dot{\varphi} - \dot{x})] \Big|_{t=t_0} = 0. \quad (2.14)$$



Эти граничные условия называются условиями трансверсальности. Про искомую экстремаль $\bar{x}(t)$ говорят, что она трансверсальна кривым $\varphi(t)$ и $\psi(t)$. Условия трансверсальности позволяют определить две постоянные интегрирования после решения уравнения Эйлера.

2.7. Изопериметрическая задача

Изопериметрическими задачами, в узком смысле этого слова, называются задачи об отыскании геометрической фигуры максимальной площади при заданном периметре.

В настоящее время изопериметрическими задачами называется значительно более широкий класс задач, а именно, все вариационные задачи, в которых требуется определить экстремум функционала

$$I = \int_{t_0}^{t_K} F(t, x_1, x_2, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n) dt,$$

при наличии так называемых изопериметрических условий

$$L_j = \int_{t_0}^{t_K} F_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n) dt = I_j,$$

где l_j - постоянные ($j=1,2,\dots,m$), а m может быть меньше или равно n .

Рассмотрим следующую изопериметрическую задачу.

Среди всех кривых $x(t)$, удовлетворяющих условиям $x(t_0) = x_0$, $x(t_k) = x_k$, на которых функционал

$$L[x] = \int_{t_0}^{t_K} G(t, x, \dot{x}) dt = l,$$

найти такую, которая дает экстремум функционалу

$$I = \int_{t_0}^{t_K} F(t, x, \dot{x}) dt.$$

Пусть F и G имеют непрерывные производные на отрезке $[t_0, t_K]$.

Если искомая кривая не является экстремалью функционала L , тогда имеет место теорема [1].

Теорема 2.3. Если кривая $x(t)$ обеспечивает экстремум функционала I и удовлетворяет условиям $L[x] = l$, $x(t_0) = x_0$, $x(t_K) = x_K$, но не является экстремалью функционала L , то существует такое число $\lambda = const$, что $x(t)$ является экстремалью функционала

$$R = \int_{t_0}^{t_K} [F + \lambda G] dt, \quad (2.15)$$

Этот результат используется следующим образом. Составляется уравнение Эйлера для функционала R . Получается дифференциальное уравнение второго порядка и находится его общее решение $\bar{x}(t, C_1, C_2, \lambda)$, которое содержит параметр λ и две произвольные постоянные. Эти три величины определяются из граничных условий и

условия $L[\bar{x}] = l$.

2.8. Задача на условный экстремум

Исследуем на экстремум функционал, зависящий от n функций,

$$I = \int_{t_0}^{t_K} F(t, x_i, \dot{x}_i) dt \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

при граничных условиях

$$x_i(t_0) = x_{i0}, \quad x_i(t_K) = x_{iK},$$

и связях

$$g_j(t, x_i, \dot{x}_i) = 0 \quad (j=1, 2, \dots, k), \text{ где } k < n.$$

Такая задача называется задачей на условный экстремум. Справедлива следующая теорема [1].

Теорема 2.4. Если функции $\bar{x}_i(t)$ обеспечивают условный экстремум функционалу I , то существуют функции $\lambda_j(t)$, такие, что $\bar{x}_i(t)$ являются экстремалами функционала

$$R_i = \int_{t_0}^{t_K} (F + \sum_{j=1}^k \lambda_j g_j) dt = \int_{t_0}^{t_K} W(t, x_i, \dot{x}_i, \lambda_j) dt, \quad (2.16)$$

т.е. должны удовлетворять системе уравнений Эйлера

$$\begin{aligned} W_{x_i} - \frac{d}{dt} W_{\dot{x}_i} &= \\ &= F_{x_i} - \frac{dF_{\dot{x}_i}}{dt} + \sum_{j=1}^k \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1}^k \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial \dot{x}_i} \right) = 0, \end{aligned} \quad (2.17)$$

где $i=1, 2, \dots, n$, $j=1, 2, \dots, k$, $\lambda_j = \lambda_j(t)$, и k условиям связи:

$$g_j(t, x_i, \dot{x}_i) = 0.$$

Таким образом, при решении задачи составляются n дифференциальных уравнений второго порядка и k уравнений первого порядка. Постоянные интегрирования определяются из граничных условий и условий связи.

2.9. Негладкие экстремали и условия Вейерштрасса-Эрдмана

В некоторых классах вариационных задач решение достигается на негладких экстремалах (т.е. имеющих угловые точки). Предположим, что решается задача с закрепленными концами и что на искомой экстремали имеется точка излома C , в которой терпит разрыв первая производная (рис. 2.6).

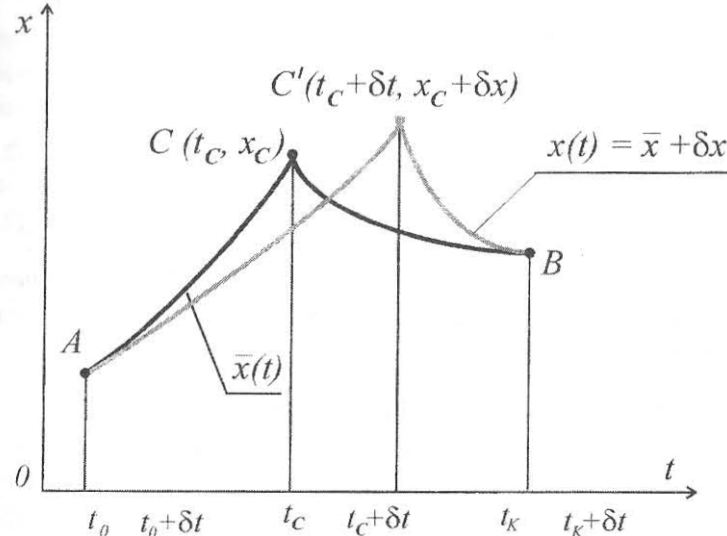


Рис. 2.6. Задача с закрепленными концами и точкой излома экстремали

Найдем условия, которым должны удовлетворять решения с угловой точкой задачи об экстремуме функционала

$$I = \int_{t_0}^{t_K} F(t, x, \dot{x}) dt = \int_{t_0}^{t_C} F(t, x, \dot{x}) dt + \int_{t_C}^{t_K} F(t, x, \dot{x}) dt.$$

Считая, что отдельные гладкие дуги ломаной экстремали являются интегральными кривыми уравнения Эйлера, что точка C может произвольно перемещаться, используя основную формулу для вариации функционала (2.11), получим

$$\delta I = (F - F_{\dot{x}} \dot{x})|_{t=t_C - \varepsilon} \delta t_C + F_{\dot{x}}|_{t=t_C - \varepsilon} \delta x_C - \\ - (F - F_{\dot{x}} \dot{x})|_{t=t_C + \varepsilon} \delta t_C - F_{\dot{x}}|_{t=t_C + \varepsilon} \delta x_C = 0, \quad (2.18)$$

откуда

$$(F - F_{\dot{x}} \dot{x})|_{t=t_C - \varepsilon} \delta t_C + F_{\dot{x}}|_{t=t_C - \varepsilon} \delta x_C = \\ = (F - F_{\dot{x}} \dot{x})|_{t=t_C + \varepsilon} \delta t_C + F_{\dot{x}}|_{t=t_C + \varepsilon} \delta x_C.$$

Так как δt_C и δx_C независимы, имеем

$$(F - F_{\dot{x}} \dot{x})|_{t=t_C - \varepsilon} = (F - F_{\dot{x}} \dot{x})|_{t=t_C + \varepsilon}, \quad (2.19)$$

$$F_{\dot{x}}|_{t=t_C - \varepsilon} = F_{\dot{x}}|_{t=t_C + \varepsilon}. \quad (2.20)$$

Эти условия называются условиями Вейерштрасса-Эрдмана и вместе с условиями непрерывности искомой экстремали позволяют определить координаты угловой точки С.

2.10. Каноническая форма уравнений Эйлера

Введем новые переменные и преобразуем основную формулу для вариации функционала (2.11):

$$\psi_i = F_{\dot{x}_i}, \quad (2.21)$$

$$H = -F + \sum_{i=1}^n \dot{x}_i F_{\dot{x}_i}. \quad (2.22)$$

Тогда

$$\delta I = \int_{t_0}^{t_K} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} - \dot{\psi}_i \right) \delta x_i dt + \sum_{i=1}^n \psi_i \delta x_i \Big|_{t_0}^{t_K} + \left(F - \sum_{i=1}^n \psi_i \dot{x}_i \right) \Big|_{t_0}^{t_K} = \\ = \int_{t_0}^{t_K} \sum_{i=1}^n \left(-\frac{\partial H}{\partial x_i} - \dot{\psi}_i \right) \delta x_i dt + \sum_{i=1}^n \psi_i \delta x_i \Big|_{t_0}^{t_K} - H \delta t \Big|_{t_0}^{t_K}. \quad (2.23)$$

Система уравнений Эйлера

$$F_{x_i} - \frac{d}{dt} F_{\dot{x}_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.24)$$

заменяется системой $2n$ уравнений первого порядка канонического вида:

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \psi_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (2.25)$$

Функция H называется функцией Гамильтона, а переменные ψ_i - сопряженными переменными. Дифференциальные уравнения для сопряженных переменных (2.25) называются сопряженной системой уравнений.

Если функция F не зависит явно от t , то функция H является первым интегралом уравнений Эйлера. Действительно,

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial \psi_i} \frac{d\psi_i}{dt}. \quad (2.26)$$

Используя каноническую форму уравнений Эйлера, получим при $H = H(x, \psi)$

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{\partial H}{\partial \psi_i} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial \psi_i} \frac{\partial H}{\partial x_i} = 0, \quad (2.27)$$

откуда следует, что $H = const$.

Рассмотрим некоторую функцию $\Phi(t, x_i, \psi_i)$.

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_i} \frac{d\psi_i}{dt} \right) = \\ = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \frac{\partial H}{\partial \psi_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_i} \frac{\partial H}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + [\Phi, H]. \quad (2.28)$$

Выражение $[\Phi, H] = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \frac{\partial H}{\partial \psi_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_i} \frac{\partial H}{\partial x_i} \right)$ называется скобкой

Пуассона. Таким образом, чтобы функция Φ , не зависящая явно от t , была первым интегралом уравнений Эйлера ($\Phi = \Phi(x, \psi) = const$), необходимо и достаточно, чтобы $[\Phi, H] \equiv 0$.

2.11. Уравнение Гамильтона–Якоби

Рассмотрим центральное поле экстремалей с центром в точке $A(t_0, x_0)$ для функционала

$$I[x(t)] = \int_{t_0}^{t_K} F[t, x_i(t), \dot{x}_i(t)] dt, \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

На экстремалих поля функционал $I[x(t)]$ превращается в функцию $S(t, x)$ координат второй граничной точки $B(t_B, x_B)$. Воспользуемся выражением для вариации функционала (2.11)

$$\begin{aligned} \delta I &= \sum_{i=1}^n F_{\dot{x}_i} \delta x_i \Big|_B + \left(F - \sum_{i=1}^n F_{\dot{x}_i} \dot{x}_i \right) \delta t \Big|_B = \\ &= (\Psi^T \delta x - H \delta t) \Big|_B = dS. \end{aligned} \quad (2.29)$$

$$\text{С другой стороны } dS = \frac{\partial S}{\partial t} dt + \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^T dx.$$

Для точки B : $\delta x = dx$, $\delta t = dt$, тогда

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H, \quad \frac{\partial S}{\partial x_i} = \psi_i. \quad (2.30)$$

Следовательно,

$$\frac{\partial S(t, \bar{x})}{\partial t} + H(t, \bar{x}, \frac{\partial S}{\partial x}) = 0. \quad (2.31)$$

Это уравнение (2.32) называется *уравнением Гамильтона–Якоби*.

В этом случае решение канонической системы равносильно решению дифференциального уравнения в частных производных относительно неизвестной функции $S(t, x)$:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(t, \bar{x}_i, \frac{\partial S}{\partial x_i}) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.32)$$

с граничным условием $S(t_K, x_K) = 0$.

2.12. Вторая вариация функционала. Необходимое условие слабого минимума функционала

Для нахождения необходимого условия слабого минимума функционала введем понятие второй вариации функционала. Функционал I имеет вторую вариацию, если его приращение можно представить в виде

$$\Delta I = I[x(t) + \delta x] - I[x(t)] = \delta I[\delta x] + \delta^2 I[\delta x] + \beta \|\delta x\|^2, \quad (2.33)$$

где $\delta I[\delta x]$ - линейный относительно вариации функции $\bar{x}(t)$ функционал (первая вариация функционала); $\delta^2 I[\delta x]$ - квадратичный относительно δx функционал - вторая вариация функционала; $\beta \|\delta x\|^2$ - содержит члены высших порядков малости ($\beta \rightarrow 0$ при $\|\delta x\| \rightarrow 0$). Пусть $\bar{x}(t) \in D_1$.

Теорема 2.5. Для того чтобы функционал достигал своего минимума на кривой $x(t)$, необходимо чтобы выполнялись условия

$$\delta I = 0, \quad \delta^2 I \geq 0. \quad (2.34)$$

Доказательство. Пусть имеется кривая $x(t)$, которая неограниченно приближается к экстремали $\bar{x}(t)$. Это означает, что $\|\delta x\|_{D_1} \rightarrow 0$, т.е. кривые сближаются. Тогда $\delta I[\delta x] = 0$, $\beta \|\delta x\|^2 \rightarrow 0$, следовательно, знак

ΔI определяется знаком $\delta^2 I$. Это означает, что неотрицательность второй вариации обеспечивает слабый минимум функционала.

Получим формулу для второй вариации функционала в задаче с закрепленными концами. Зададим функционал

$$I = \int_{t_0}^{t_K} F(t, x, \dot{x}) dt$$

с граничными условиями $\delta x(t_0) = \delta x(t_K) = 0$. В этом случае первая и вторая вариации функционала определяются формулами

$$\delta I = \int_{t_0}^{t_K} (F_x \delta x + F_{\dot{x}} \delta \dot{x}) dt,$$

$$\delta^2 I = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_K} [F_{xx} (\delta x)^2 + 2F_{x\dot{x}} \delta x \delta \dot{x} + F_{\dot{x}\dot{x}} (\delta \dot{x})^2] dt. \quad (2.35)$$

Интегрируя по частям среднее слагаемое в подынтегральном выражении формулы (2.35), получим

$$\int_{t_0}^{t_K} 2F_{x\dot{x}} \delta x \delta \dot{x} dt = F_{x\dot{x}} (\delta x)^2 \Big|_{t_0}^{t_K} - \int_{t_0}^{t_K} \frac{d}{dt} (F_{x\dot{x}}) (\delta x)^2 dt.$$

Тогда, с учетом $\delta x(t_0) = 0$, $\delta x(t_K) = 0$, получим

$$\delta^2 I = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_K} [F_{xx} (\delta \dot{x})^2 + (F_{xx} - \frac{dF_{x\dot{x}}}{dt}) (\delta x)^2] dt. \quad (2.36)$$

Получим условие, при котором $\delta^2 I \geq 0$. Введем произвольную непрерывную и дифференцируемую функцию $\omega(t)$ такую, что, будучи введенной в интегральное выражение (2.36), она с точностью до множителя преобразует его в точный квадрат. Показано [2], что если дифференциальное уравнение

$$F_{\dot{x}\dot{x}} (\dot{\omega} + F_{xx}) - (F_{x\dot{x}} + \omega)^2 = 0 \quad (2.37)$$

имеет на отрезке $[t_0, t_K]$ дифференцируемое решение $\omega(t)$, то выражение для выражение для второй вариации принимает вид

$$\delta^2 I = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_K} F_{\dot{x}\dot{x}} \left(\delta \dot{x} + \frac{F_{x\dot{x}} + \omega(t)}{F_{\dot{x}\dot{x}}} \delta x \right)^2 dt. \quad (2.38)$$

Из выражения (2.38) следует, что знак второй вариации определяется знаком производной $F_{\dot{x}\dot{x}}$. Следовательно, необходимым условием слабого минимума функционала I является условие

$$F_{\dot{x}\dot{x}} \geq 0. \quad (2.39)$$

Это условие называется условием Лежандра.

Замечание. Для случая функционалов, зависящих от n функций $\bar{x}(t)$, условие Лежандра сводится к требованию положительной определенности матрицы $[F_{\dot{x}\dot{x}}]$.

Условие Лежандра, как и уравнение Эйлера, носит локальный характер, т.е. относится не к кривой в целом, а к ее отдельным точкам, поэтому не является достаточным для экстремума (минимума или максимума).

2.13. Сводка необходимых и достаточных условий слабого минимума функционала

Неотрицательность второй вариации необходима, но не достаточна для того, чтобы функционал I достигал на кривой $\bar{x}(t)$ своего минимума. Дополнительное требование заключается в том, чтобы экстремаль $\bar{x}(t)$ была включена в поле экстремалей, т.е. принадлежала бы семейству экстремалей, не имеющих сопряженных точек на отрезке $[t_0, t_K]$.

Сформулируем систему условий, необходимых и достаточных для того, чтобы допустимая кривая $\bar{x}(t)$ реализовала слабый минимум функционала I . Эта совокупность условий состоит в следующем.

1. $\bar{x}(t)$ является экстремалью, т.е. удовлетворяет уравнению Эйлера:

$$F_x - \frac{d}{dt} F_{\dot{x}} = 0.$$

2. Вдоль кривой $\bar{x}(t)$ выполняется усиленное условие Лежандра

$$F_{\dot{x}\dot{x}} > 0.$$

3. Отрезок $[t_0, t_K]$ не содержит точек, сопряженных с начальной точкой $A(t_0, x_0)$ (условие Якоби).

2.14. Функция Вейерштрасса. Достаточное условие сильного минимума

Рассмотрим функционал $I = \int_{t_0}^{t_K} F(t, x, \dot{x}) dt$, и получим для него

условия сильного минимума.

Определение. Функцией Вейерштрасса E функционала I называется выражение

$$E(t, x, \dot{x}, p) = F(t, x, \dot{x}) - F(t, x, p) - (\dot{x} - p)F_p(t, x, p), \quad (2.40)$$

где p - наклон поля экстремалей.

Функция E представляет собой разность между значением F и первыми двумя членами в ее разложении в ряд Тейлора.

Предположим, что в простейшей задаче об экстремуме функционала условие Якоби выполнено и, следовательно, экстремаль $\bar{x}(t)$, проходящая через граничные точки, может быть включена в центральное поле, наклон которого равен $p(t, x)$. Можно показать [1], что в этом случае приращение функционала приводится к выражению

$$\Delta I = I[\bar{x} + \delta x] - I[\bar{x}] = \int_{t_0}^{t_K} E(t, x, p, \dot{x}) dt. \quad (2.41)$$

Очевидно, что достаточным условием достижения функционалом I на кривой $\bar{x}(t)$ минимума будет неотрицательность функции E , а достаточным условием максимума - неположительность функции E . Это условие называется условием Вейерштрасса. При этом для слабого

минимума достаточно, чтобы неравенство $E \geq 0$ выполнялось при значениях t и x , близких к значениям $t, \bar{x}$ на исследуемой экстремали, и при значениях $\dot{x}$, близких к p , а для сильного минимума - при произвольных $\dot{x}$.

Следовательно, необходимыми и достаточными условиями сильного экстремума в этом случае будут следующие условия.

1. Кривая $\bar{x}(t)$ является экстремалью, удовлетворяющей граничным условиям и уравнению Эйлера.

2. Экстремаль $\bar{x}(t)$ может быть включена в поле экстремалей; сопряженные точки на отрезке $[t_0, t_K]$ отсутствуют.

3. Функция $E(t, x, \dot{x}, p)$ не меняет знака во всех точках t, x , близких к $\bar{x}(t)$ и для производных $\dot{x}$ (в случае минимума $E \geq 0$, максимума $E \leq 0$).

Связь условия Вейерштрасса с условием Лежандра

Пусть класс функций $x(t)$ включает функции, для которых при одинаковых значениях аргумента t координаты $x, \dot{x}$ близки к значениям $\bar{x}, p$ на экстремали $\bar{x}(t)$. Пусть функция $F(t, x, \dot{x})$ трижды дифференцируема по аргументу $\dot{x}$. По формуле Тейлора получим

$$F(t, x, \dot{x}) = F(t, x, p) + (\dot{x} - p)F_p(t, x, p) + \frac{(\dot{x} - p)^2}{2!} F_{\dot{x}\dot{x}}(t, x, q),$$

где q заключено между p и $\dot{x}$. С учетом (2.40), (2.41) имеем

$$E(t, x, \dot{x}, p) = \frac{(\dot{x} - p)^2}{2!} F_{\dot{x}\dot{x}}(t, x, q). \quad (2.42)$$

Отсюда видно, что функция E сохраняет знак, если сохраняет знак $F_{\dot{x}\dot{x}}(t, x, q)$, т.е. в данном случае слабого экстремума условие Вейерштрасса совпадает с условием Лежандра.

3. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ. ПРИНЦИП МАКСИМУМА ПОНТЯГИНА

3.1. Постановка задачи оптимального управления непрерывной динамической системой

Рассмотрим непрерывную динамическую систему, описываемую системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad (3.1)$$

где $\mathbf{x}$ - вектор состояния системы размерности n (фазовый вектор, вектор фазовых координат), $\mathbf{u}$ - вектор управления размерности r , t - время, определенное на отрезке $[t_0, t_K]$ (t_K может быть фиксированным и свободным), $\mathbf{f}$ - вектор-функция правых частей размерности n .

В общем случае на векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{u}$ накладываются условия принадлежности

$$\mathbf{x} \in \mathbf{X}, \quad \mathbf{u} \in \mathbf{U}, \quad (3.2)$$

где $\mathbf{X}$ и $\mathbf{U}$ - допустимые множества векторов состояния и управления.

Требуется определить управление $\bar{\mathbf{u}}(t)$, которое переводит систему (3.1) с учетом ограничений (3.2) из начального состояния $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ в конечное $\mathbf{x}(t_K)$ при минимальном значении критерия оптимальности (функционала)

$$I = \int_{t_0}^{t_K} f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) dt + F[\mathbf{x}(t_K)]. \quad (3.3)$$

Функционалы вида (3.3) называются интегротерминальными критериями. При $f_0 \neq 0$ и $F \neq 0$ задача называется задачей Больца, при $f_0 = 0$ - задачей Майера, при $F = 0$ - задачей Лагранжа.

В дальнейшем будем полагать, что начальное состояние $\mathbf{x}_0$ фиксировано, а конечное $\mathbf{x}(t_K)$ может быть заданным, свободным или

принадлежать некоторому множеству $\mathbf{X}_K$.

3.2. Игольчатая вариация управления

Введение игольчатой вариации управления [1] позволило получить необходимое условие минимума функционала при ограничениях на управление.

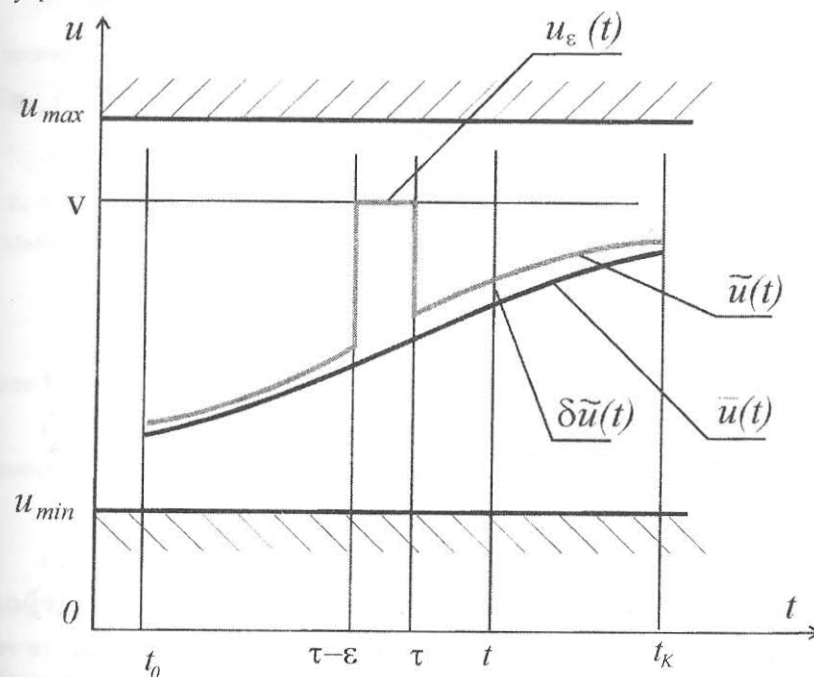


Рис. 3.1. Вариации управления

Обычно вариация управления рассматривается как гладкая функция $\delta \bar{\mathbf{u}}(t) = \tilde{\mathbf{u}}(t) - \bar{\mathbf{u}}(t)$. Игольчатой вариацией называется разность $\delta \bar{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{u}_\varepsilon(t) - \bar{\mathbf{u}}(t)$ (рис. 3.1), где $\mathbf{u}_\varepsilon = \mathbf{v}$ при $t \in [\tau - \varepsilon, \tau]$, $\mathbf{u}_\varepsilon = \bar{\mathbf{u}}$ при $t \notin [\tau - \varepsilon, \tau]$, $\mathbf{v}$ - некоторое значение управления, достаточно сильно отличающееся от $\bar{\mathbf{u}}(\tau)$, при этом $\mathbf{v} \in \mathbf{U}$, ε - бесконечно малая

положительная величина.

Влияние игольчатого варьирования управления на поведение системы аналогично влиянию короткого импульса (рис. 3.2).

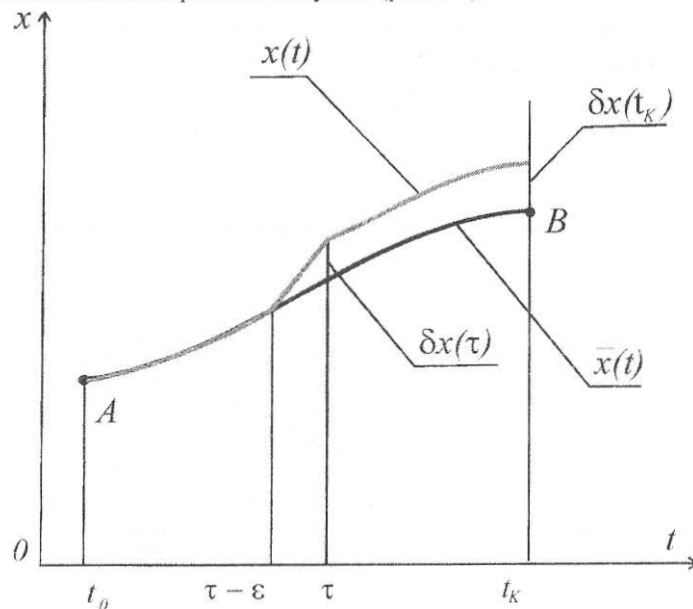


Рис. 3.2. Влияние игольчатого варьирования управления на поведение системы

Степень влияния импульса определяется площадью $(v - u(\tau))\varepsilon$. Поскольку эта величина при $\varepsilon \rightarrow 0$ становится бесконечно малой, то ее влияние на дальнейшее движение системы бесконечно мало. Малость возмущения управления позволяет использовать линеаризованную модель возмущенного движения, что упрощает решение задачи, а также рассматривать вариации управления в разные моменты времени независимо друг от друга.

3.3. Доказательство основной теоремы принципа максимума

Рассмотрим задачу Лагранжа, полагая, что система автономна и функционал I не зависит явно от времени, а на вектор x ограничения не

накладываются:

$$\dot{x} = f(x, u), \quad u \in U, \quad t \in [t_0, t_K], \quad x(0) = x_0, \quad x(t_K) = x_K, \quad (3.4)$$

$$I = \int_{t_0}^{t_K} f_0(x, u) dt \rightarrow \min. \quad (3.5)$$

Введем в рассмотрение расширенный вектор $x_*^T = (x_0 : x^T)$, где компонента x_0 является решением уравнения

$$\dot{x}_0 = f_0(x, u), \quad x_0(t_0) = 0.$$

Таким образом, размерность вектора x_* равна $n+1$:

$x_* = (x_0, x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)^T$. Тогда задача принимает частный вид задачи Майера:

$$\dot{x}_* = f_*(x_*, u), \quad u \in U, \quad t \in [t_0, t_K], \quad x_*(t_0) = x_{*0}, \quad (3.6)$$

$$I = x_0(t_K) \rightarrow \min, \quad (3.7)$$

где $f_*^T = (f_0 : f^T)$, $(x_*(t_0))^T = (0 : (x_0)^T)$.

Пусть $\bar{u}(t)$ — искомое оптимальное управление, а $\bar{x}_*(t)$ — соответствующая ему траектория (рис. 3.3):

$$\dot{\bar{x}}_* = f_*(\bar{x}_*, \bar{u}), \quad \bar{u} \in U, \quad t \in [t_0, t_K], \quad \bar{x}_*(t_0) = x_{*0}.$$

В дальнейшем будем полагать, что $u(t)$ относится к классу кусочно-непрерывных функций, т.е. может иметь на отрезке $[t_0, t_K]$ конечное число точек разрыва первого рода. Дадим игольчатую вариацию управлению на бесконечно малом интервале $\tau - \varepsilon < t < \tau$. В результате варьирования дальнейшее движение $x_*(t)$ при $t > \tau$ будет отличаться от оптимального $\bar{x}_*(t)$ (см. рис. 3.3). Обозначим через $\delta x_*(t)$ вариацию траектории $\delta x_*(t) = x_*(t) - \bar{x}_*(t)$.

С точностью до малых высшего порядка для момента $t = \tau$ будем иметь

$$\begin{aligned} \delta x_*(\tau) &= x_*(\tau) - \bar{x}_*(\tau) = \\ &= \varepsilon [f_*(x_*(\tau), u_\varepsilon(\tau)) - f_*(x_*(\tau), \bar{u}(\tau))]. \end{aligned} \quad (3.8)$$

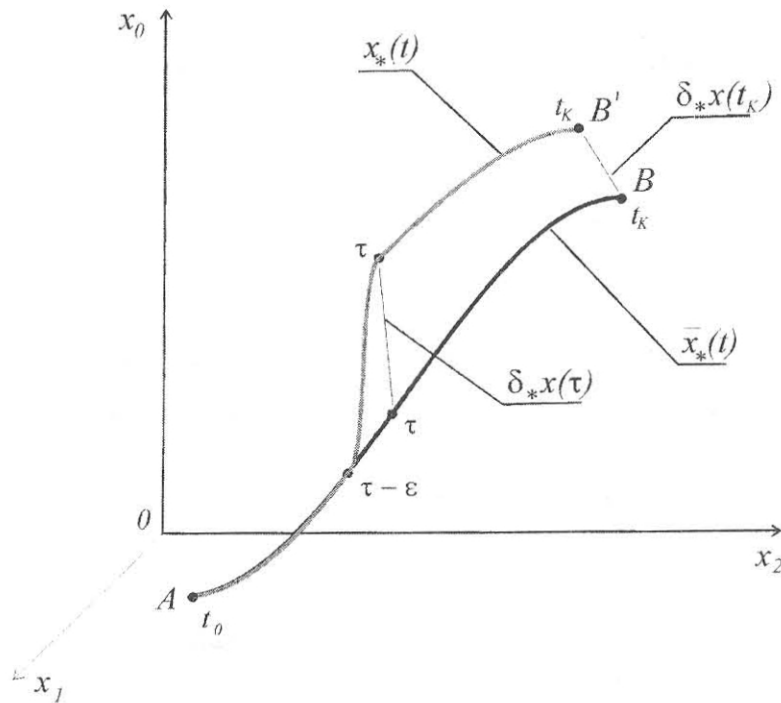


Рис. 3.3. Траектории движения системы

Так как $\delta \mathbf{x}_*(\tau)$ - бесконечно малая величина, то возмущенная траектория будет мало отличаться от оптимальной. Поэтому для определения вариации $\delta \mathbf{x}_*(t)$ при $t > \tau$ можно воспользоваться уравнением в вариациях

$$\delta \dot{\mathbf{x}}_* = \left(\frac{\partial \mathbf{f}_*}{\partial \mathbf{x}_*} \right) \delta \mathbf{x}_*, \quad \tau \leq t \leq t_K. \quad (3.9)$$

Интегрируя (3.9), можно получить вариацию траектории $\delta \mathbf{x}_*(t)$ для любого $t > \tau$, в том числе и для $t = t_K$, т.е. $\delta \mathbf{x}_*(t_K)$. Но вариация $\delta x_0(t_K)$ есть вариация функционала I за счет игольчатой вариации

управления. Так как $\bar{\mathbf{u}}(t)$ обеспечивает минимум I , то $\delta I = \delta x_0(t_K) \geq 0$ или

$$-\delta I = -\delta x_0(t_K) = [\Psi_*(t_K)]^T \delta \mathbf{x}_*(t_K) \leq 0. \quad (3.10)$$

Здесь $\Psi_*(t_K)$ - вектор размерности $(n+1)$, подобранный так, чтобы скалярное произведение векторов $\Psi_*(t_K)$ и $\delta \mathbf{x}_*(t_K)$ равнялось $-\delta x_0(t_K)$. Для этого достаточно положить

$$\Psi_0(t_K) = -1, \quad \Psi^T(t_K) \delta \mathbf{x}(t_K) = 0. \quad (3.11)$$

Поставим теперь задачу найти вектор $\Psi_*(t)$, который удовлетворял бы для любого $\tau \leq t \leq t_K$ условию:

$$\Psi_*^T(t) \delta \mathbf{x}_*(t) = \Psi_*^T(t_K) \delta \mathbf{x}_*(t_K) = -\delta x_0(t_K). \quad (3.12)$$

Продифференцируем по времени и получим

$$\dot{\Psi}_*^T \delta \mathbf{x}_* + \Psi_*^T \delta \dot{\mathbf{x}}_* = 0.$$

Учитывая уравнение в вариациях (3.9), получим

$$\left(\dot{\Psi}_*^T + \Psi_*^T \left(\frac{\partial \mathbf{f}_*}{\partial \mathbf{x}_*} \right) \right) \delta \mathbf{x}_* = 0.$$

Так как это равенство должно выполняться для любого $\delta \mathbf{x}_*$, то получим следующее дифференциальное уравнение для вектора - функции $\Psi_*(t)$:

$$\dot{\Psi}_* = - \left(\frac{\partial \mathbf{f}_*}{\partial \mathbf{x}_*} \right)^T \Psi_*. \quad (3.13)$$

Это уравнение может быть решено лишь совместно с исходной системой, т.к. в него входят $\mathbf{x}_*$ и $\mathbf{u}$.

Перепишем соотношение (3.12) для $t = \tau$ с учетом (3.11):

$$\Psi_*^T(\tau) \delta \bar{\mathbf{x}}_*(\tau) = -\delta x_0(t_K) \leq 0.$$

Раскрывая его с помощью (3.8), получим

$$\psi_*^T(\tau) f_*(\mathbf{x}_*(\tau), \mathbf{u}_\varepsilon(\tau)) - \psi_*^T(\tau) f_*(\mathbf{x}_*(\tau), \bar{\mathbf{u}}(\tau)) \leq 0. \quad (3.14)$$

Введем в рассмотрение функцию H - гамильтониан:

$$H(\psi, \mathbf{x}, \mathbf{u}) = \psi_*^T(t) \cdot f_*[\mathbf{x}_*(t), \mathbf{u}(t)]. \quad (3.15)$$

Тогда (3.14) можно представить в виде

$$H[\bar{\psi}_*(\tau), \bar{\mathbf{x}}_*(\tau), \bar{\mathbf{u}}(\tau)] = \max_{\mathbf{u}_\varepsilon \in U} H[\bar{\psi}_*(\tau), \bar{\mathbf{x}}_*(\tau), \mathbf{u}_\varepsilon(\tau)].$$

Так как τ может быть любым из $[t_0, t_K]$, то окончательно

$$\bar{H} = \bar{H}(\bar{\psi}_*, \bar{\mathbf{x}}_*, \bar{\mathbf{u}}) = \max_{\mathbf{u} \in U} H(\bar{\psi}_*, \bar{\mathbf{x}}_*, \mathbf{u}) \quad (3.16)$$

для любого $t \in [t_0, t_K]$.

Если учесть, что согласно (3.15)

$$\frac{\partial H}{\partial \psi_i} = f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad \frac{\partial H}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right) \psi_j,$$

то уравнения, определяющие $\bar{\mathbf{x}}_*(t)$ и $\bar{\psi}_*(t)$ на оптимальной траектории при $\bar{\mathbf{u}}(t)$ могут быть представлены в виде

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}_* = \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{\psi}_*}, \quad \dot{\bar{\psi}}_*^T = - \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{\mathbf{x}}_*}. \quad (3.17)$$

Эта система называется канонической. Заметим, что она с точностью до обозначений совпадает с канонической формой уравнения Эйлера (см. раздел 2) Граничными условиями для нее являются следующие:

$$\bar{\mathbf{x}}_*(t_0) = \bar{\mathbf{x}}_{*0}, \quad \bar{\psi}_0^T(t_K) = -1, \quad \bar{\psi}_*^T(t_K) \delta \mathbf{x}(t_K) = 0. \quad (3.18)$$

Условие (3.18) называется еще условиями трансверсальности. Соотношения (3.13) - (3.18) задают необходимые условия оптимальности, получившие название «Принцип максимума Понтрягина». Сформулируем их в виде **основной теоремы** [1].

Если $\bar{\mathbf{x}}(t)$ и $\bar{\mathbf{u}}(t)$ суть оптимальная траектория и оптимальное управление, обеспечивающие минимум функционалу I , с заданными граничными условиями и ограничениями на управление, то существует ненулевая и непрерывная вектор-функция $\psi(t)$, удовлетворяющая канонической системе дифференциальных уравнений и условиям

трансверсальности, такая, что функция Гамильтона $H(\mathbf{x}, \psi, \mathbf{u})$ для любого момента времени достигает своего максимума на множестве U при управлении $\bar{\mathbf{u}}(t)$.

3.4. Свойства гамильтониана

На оптимальной траектории гамильтониан обладает следующими свойствами.

1. Гамильтониан $\bar{H}(t)$ - непрерывная функция времени для всех $t \in [t_0, t_K]$.

Это свойство очевидно для любого t , не совпадающего с точками разрыва управления $\bar{\mathbf{u}}(t)$. Пусть τ - одна из точек разрыва. Рассмотрим значения H слева и справа от точки τ . В силу непрерывности по времени $\bar{\mathbf{x}}_*(t)$ и $\bar{\psi}_*(t)$ можно записать

$$\begin{aligned} \bar{H}(\tau - 0) &= H[\bar{\psi}_*(\tau - 0), \bar{\mathbf{x}}_*(\tau - 0), \bar{\mathbf{u}}(\tau - 0)] = \\ &= H[\bar{\psi}_*(\tau + 0), \bar{\mathbf{x}}_*(\tau + 0), \bar{\mathbf{u}}(\tau - 0)], \\ \bar{H}(\tau + 0) &= H[\bar{\psi}_*(\tau + 0), \bar{\mathbf{x}}_*(\tau + 0), \bar{\mathbf{u}}(\tau + 0)] = \\ &= H[\bar{\psi}_*(\tau - 0), \bar{\mathbf{x}}_*(\tau - 0), \bar{\mathbf{u}}(\tau + 0)]. \end{aligned}$$

Предположим, что $\bar{H}(\tau - 0) \neq \bar{H}(\tau + 0)$. Возможны два случая: $\bar{H}(\tau - 0) > \bar{H}(\tau + 0)$ и $\bar{H}(\tau - 0) < \bar{H}(\tau + 0)$.

Однако и то, и другое противоречат основной теореме принципа максимума, согласно которой гамильтониан всегда принимает максимальное значение. Следовательно, $\bar{H}(\tau - 0) = \bar{H}(\tau + 0)$, то есть функция H непрерывна.

2. Гамильтониан постоянен на оптимальной траектории, т.е. $\bar{H}(t) = \text{const}$ для всех $t \in [t_0, t_K]$.

Рассмотрим некоторый отрезок $[t_1, t_2] \in [t_0, t_K]$, на котором функция $\bar{\mathbf{u}}(t)$ непрерывна. Для любых близких $t, t' \in [t_1, t_2]$ в силу основной теоремы принципа максимума

$$\bar{H}(t') = H[\bar{\psi}_*(t'), \bar{x}_*(t'), \bar{u}(t')] \geq H[\bar{\psi}_*(t'), \bar{x}_*(t'), \bar{u}(t)] \quad (3.19)$$

и поэтому

$$\bar{H}(t') - \bar{H}(t) \geq H[\bar{\psi}_*(t'), \bar{x}_*(t'), \bar{u}(t')] - H[\bar{\psi}_*(t'), \bar{x}_*(t'), \bar{u}(t)].$$

Если $t' > t$, то

$$\frac{\bar{H}(t') - \bar{H}(t)}{t' - t} \geq \frac{H[\bar{\psi}_*(t'), \bar{x}_*(t'), \bar{u}(t')] - H[\bar{\psi}_*(t'), \bar{x}_*(t'), \bar{u}(t)]}{t' - t}.$$

При $t' \rightarrow t$ получаем неравенство

$$\left. \frac{d\bar{H}}{dt} \right|_{t=0} \geq \left[\left(\frac{\partial \bar{H}}{\partial \psi_*} \right)^* \right]^T \dot{\bar{\psi}}_* + \left(\frac{\partial \bar{H}}{\partial x_*} \right)^T \dot{\bar{x}}_*. \quad (3.20)$$

Но правая часть равна нулю, что следует из канонической системы уравнений. Следовательно,

$$\left. \frac{d\bar{H}}{dt} \right|_{t=0} \geq 0. \quad (3.21)$$

Если $t' < t$, то аналогично получаем, что

$$\left. \frac{d\bar{H}}{dt} \right|_{t=0} \leq 0. \quad (3.22)$$

Из (3.21) и (3.22) следует, что $\frac{d\bar{H}}{dt} = 0$, т.е. $\bar{H}(t) = \text{const}$ для всех $t \in [t_1, t_2]$. В силу непрерывности $\bar{H}(t)$ по времени $\bar{H}(t) = \text{const}$ для всех $t \in [t_0, t_K]$.

3. Если t_K свободно, то $\bar{H} \equiv 0$ для всех $t \in [t_0, t_K]$.

Проварьируем управление в конечный момент времени $t = t_K$, изменив величину t_K на бесконечно малую величину ε_1 и сохранив при этом значении величину $\bar{u}(t_K)$. В отличие от игольчатой такая вариация называется временной вариацией управления. Вариация траектории

$\delta x_*(t_K)$ с точностью до малых высшего порядка будет равна

$$\delta x_*(t_K) = \dot{\bar{x}}_*(t_K) \varepsilon_1 = f_*[\bar{x}_*(t_K), \bar{u}(t_K)] \varepsilon_1. \quad (3.23)$$

Умножив на $\bar{\psi}_*$ с учетом (3.9), получим

$$\bar{\psi}_*^T(t_K) \delta x_*(t_K) = \bar{\psi}_*^T(t_K) \cdot f_*[\bar{x}_*(t_K), \bar{u}(t_K)] \varepsilon_1 \leq 0.$$

Так как ε_1 может быть положительным и отрицательным, то

$$\bar{H}(t_K) = \bar{\psi}_*^T(t_K) f_*[\bar{x}_*(t_K), \bar{u}(t_K)] = 0.$$

Поскольку Гамильтониан на всей оптимальной траектории постоянен, поэтому

$$\bar{H}(t) = \bar{\psi}_*^T(t) f_*[\bar{x}_*(t), \bar{u}(t)] \equiv 0 \text{ для всех } t \in [t_0, t_K].$$

3.5. Различные типы граничных условий

Для отыскания оптимального управления $\bar{u}(t)$ с помощью полученных необходимых условий требуется решить каноническую систему из $2n$ уравнений (3.17). Поэтому должно быть задано $2n$ граничных условий. Если начальный вектор $x(t_0)$ задан, то в начальный момент времени имеется n условий. Недостающие n условий определяются типом граничных условий исходной задачи в соответствии с условиями трансверсальности.

1. Задача с фиксированным концом траектории

Если $\bar{x}(t_K)$ задан, то совместно с $\bar{x}(t_0)$ имеем $2n$ условий, которые замыкают каноническую систему уравнений, образуя краевую задачу. Граничное условие

$$\bar{\psi}_*^T(t_K) \delta \bar{x}(t_K) = 0 \quad (3.24)$$

выполняется автоматически, так как $\delta x(t_K) = 0$.

2. Задача со свободным концом траектории

Если $\bar{x}(t_K)$ свободен, то для выполнения (3.24) необходимо $\bar{\psi}_*(t_K) = 0$. Снова получаем краевую задачу, отличающуюся от

предыдущей тем, что в момент $t = t_K$ вместо вектора $\bar{\mathbf{x}}(t_K)$ задан $\bar{\Psi}(t_K)$:
 $(\bar{\Psi}_i(t_K) = 0, i = 1, 2, \dots, n)$.

3. Задача попадания на заданную терминальную поверхность

Предполагается, что вектор $\bar{\mathbf{x}}(t_K)$ должен принадлежать некоторой поверхности $\mathbf{g}[\bar{\mathbf{x}}(t_K)] = 0$, где $\mathbf{g}$ - вектор размерности $k < n$. Это означает, что вариация $\delta \bar{\mathbf{x}}(t_K)$ должна удовлетворять соотношению

$$\left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \bar{\mathbf{x}}} \right)^T \delta \bar{\mathbf{x}}(t_K) = 0. \quad (3.25)$$

Сравнивая это выражение с (3.24), заключаем, что для их одновременного выполнения необходимо существование такого постоянного вектора $\mathbf{v} \neq 0$ размерности k , чтобы

$$\bar{\Psi}(t_K) = \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \bar{\mathbf{x}}} \right) \cdot \mathbf{v}. \quad (3.26)$$

Приходим к краевой задаче, в которой заданными являются векторы $\bar{\mathbf{x}}(t_0)$ и $\bar{\Psi}(t_K)$ с точностью до вектора $\mathbf{v}$. Для определения $\mathbf{v}$ необходимо к канонической системе уравнений добавить уравнение поверхности $\mathbf{g}[\bar{\mathbf{x}}(t_K)] = 0$, которое дает дополнительно k условий.

4. Задача выбора начальной точки движения

Можно показать, что если $\bar{\mathbf{x}}(t_0)$ неизвестно, то к граничному условию (3.24) необходимо добавить аналогичное условие для момента $t = t_0$:
 $\bar{\Psi}^T(t_0) \delta \bar{\mathbf{x}}(t_0) = 0$.

3.6. Общий алгоритм решения задач оптимального управления на основе принципа максимума Понтрягина. Приведение задачи оптимального управления к краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

Алгоритмом решения задачи оптимального управления будем называть последовательность действий, позволяющих привести задачу к стандартной процедуре отыскания аналитического или численного решения. На основе результатов пп. 3.3 – 3.5 этот алгоритм можно

представить в следующем виде.

1. Дается математическая формулировка задачи в форме Майера, Лагранжа или Больца: записываются уравнения динамической системы, функционал, граничные условия и ограничения на управление.

2. Вводится сопряженная вектор-функция

$$\Psi(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_i(t), \dots, \psi_n(t))^T,$$

размерность которой совпадает с размерностью вектора состояния $\mathbf{x}(t)$ и с ее помощью составляется функция Гамильтона:

$$H = \sum_{i=1}^n \psi_i(t) \cdot f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}) - f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}). \quad (3.27)$$

Здесь $\mathbf{f} = (f_i)^T$ вектор-функция правых частей динамической системы, компонента ψ_0 в соответствии с (3.24) принята равной -1.

3. Функция Гамильтона $H(\Psi, \mathbf{x}, \mathbf{u})$ исследуется на максимум по каждой компоненте управления для любых t , при этом учитываются ограничения на управление: $\mathbf{u} \in U$, значения ψ_i , x_i являются параметрами:

$$\bar{H} = \max_{\mathbf{u} \in U} H(\Psi, \mathbf{x}, \mathbf{u}) = \bar{H}(\Psi, \mathbf{x}). \quad (3.28)$$

При этом возможны следующие варианты:

а) найденное оптимальное управление $\bar{\mathbf{u}}(\Psi, \mathbf{x})$ лежит внутри множества U , б) оптимальное управление лежит на границе Γ_U множества U :

$$\bar{\mathbf{u}}(\Psi, \mathbf{x}) = \arg \max_{\mathbf{u} \in U} H(\Psi, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \Rightarrow \begin{cases} \bar{\mathbf{u}} \notin \Gamma_U \\ \bar{\mathbf{u}} \in \Gamma_U \end{cases}. \quad (3.29)$$

Отыскание максимума функции H формально ничем не отличается от любой задачи максимизации функции многих переменных, содержащей параметры Ψ , $\mathbf{x}$. Здесь следует отметить некоторые характерные виды зависимостей $H(\mathbf{u})$:

а) линейную, когда максимум достигается только на границе;
 б) выпуклую (в частном случае – квадратичную), когда максимум

может соответствовать как внутренней точке множества U , так и лежать на границе Γ_U , в зависимости от значений параметров ψ, x ;

в) многоэкстремальную, когда имеется несколько точек внутреннего максимума, каждая из которых должна исследоваться с целью определения глобального оптимума;

г) «ломаную», то есть содержащую угловую точку (точку излома), в которой неприменимы классические условия: $\frac{\partial H}{\partial u_j} = 0, \frac{\partial^2 H}{\partial u_j^2} \leq 0$;

д) «инвариантную» для которой характерно наличие участка $H(u) = \text{const}$ при $t \in [t_1, t_2]$, где любое управление удовлетворяет необходимым условиям оптимума, а истинно оптимальное (так называемое «особое») ищется с привлечением дополнительных процедур (такая задача относится к классу вырожденных задач оптимального управления).

4. Записываются уравнения канонической системы, замкнутые оптимальным управлением в неявном виде:

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= f_i(x, \bar{u}(\psi, x)), \\ \frac{d\psi_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x_i} = \varphi_i(\psi, x, \bar{u}(\psi, x)), \end{aligned} \quad (3.30)$$

где $\bar{u}(\psi, x) = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_j, \dots, \bar{u}_m)^T = \arg \max_{u \in U} H(\psi, x, u)$.

В итоге каноническая система принимает вид

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x, \psi), \quad \frac{d\psi_i}{dt} = \varphi_i(x, \psi), \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.31)$$

5. Исследуются граничные условия и соответствующие им условия трансверсальности (п. 3.5). Окончательно формируется сводка необходимых условий оптимальности:

а) Задача Майера:

$$\dot{x} = f(x, u), \quad u \in U, \quad t \in [t_0, t_K], \quad x(t_0) = x_0, \quad I = x_0(t_K) \rightarrow \min.$$

Необходимые условия оптимальности управления имеют вид:

$$\dot{\bar{x}} = \frac{\partial H}{\partial \bar{\psi}}, \quad \bar{x}(t_0) = x_0,$$

$$\dot{\bar{\psi}} = -\frac{\partial H}{\partial \bar{x}}, \quad \bar{\psi}_0(t_K) = -1, \quad \bar{\psi}^T(t_K) \delta x(t_K) = 0,$$

$$\text{где } H = \bar{\psi}^T(t) f[\bar{x}(t), \bar{u}(t)] = H(\bar{\psi}(t), \bar{x}(t), u(t)).$$

$$\bar{H} = H(\bar{\psi}(t), \bar{x}(t), \bar{u}(t)) = \max_{u \in U} H(\bar{\psi}(t), \bar{x}(t), u(t)) \quad \text{для всех}$$

$$t \in [t_0, t_K].$$

$$\bar{H} = H(\bar{\psi}(t), \bar{x}(t), \bar{u}(t)) = \text{const}, \text{ если } t_K \text{ фиксировано,}$$

$$\bar{H} = H(\bar{\psi}(t), \bar{x}(t), \bar{u}(t)) = 0 \text{ для всех } t \in [t_0, t_K], \text{ если } t_K \text{ свободно.}$$

б) Задача Лагранжа:

$$\dot{x} = f(x, u), \quad u \in U, \quad t \in [t_0, t_K], \quad x(t_0) = x_0,$$

$$I = \int_{t_0}^{t_K} f_0(x, u) dt \rightarrow \min.$$

Компоненты x_0 и ψ_0 исключены, поскольку в этом случае функции

f_0 и H от них не зависят.

Необходимые условия оптимальности управления имеют вид:

$$\dot{\bar{x}} = \frac{\partial H}{\partial \bar{\psi}}, \quad \bar{x}(t_0) = x_0,$$

$$\dot{\bar{\psi}} = -\frac{\partial H}{\partial \bar{x}}, \quad \bar{\psi}^T(t_K) \delta x(t_K) = 0,$$

$$\text{где } H = H(\bar{\psi}(t), \bar{x}(t), u(t)) = -f_0(x, u) + \bar{\psi}^T \cdot f(x, u).$$

$$\bar{H} = H(\bar{\psi}(t), \bar{x}(t), \bar{u}(t)) = \max_{u \in U} H(\bar{\psi}(t), \bar{x}(t), u(t)) \quad \text{для всех}$$

$$t \in [t_0, t_K].$$

$$\bar{H} = H(\bar{\psi}(t), \bar{x}(t), \bar{u}(t)) = \text{const}, \text{ если } t_K \text{ фиксировано,}$$

$\bar{H} = H(\bar{\psi}(t), \bar{x}(t), \bar{u}(t)) = 0$ для всех $t \in [t_0, t_K]$, если t_K свободно.

в) Задача управления конечным состоянием (задача Больца):

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \mathbf{u} \in \mathbf{U}, t \in [t_0, t_K], \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (3.32)$$

$$I = \int_{t_0}^{t_K} f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}) dt + F(\mathbf{x}(t_K)) \rightarrow \min.$$

Функция $F(\mathbf{x}(t_K))$ характеризует конечное состояние системы в момент $t = t_K$. Естественно, что $\mathbf{x}(t_K)$ считается нефиксированным. Рассматриваемая задача может быть сведена к задаче Лагранжа. Действительно, функционал можно представить в виде

$$\begin{aligned} I &= \int_{t_0}^{t_K} \left(f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \frac{dF(\mathbf{x})}{dt} \right) dt + F(\mathbf{x}(t_0)) = \\ &= F(\mathbf{x}(t_0)) + \int_{t_0}^{t_K} \left(f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \left(\frac{\partial F(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \right) dt. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Здесь $F(\mathbf{x}(t_0))$ при фиксированных начальных условиях есть некоторая константа, которую можно не учитывать. Необходимые условия оптимальности имеют вид:

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}} = \frac{\partial H}{\partial \bar{\psi}}, \bar{\mathbf{x}}(t_0) = \mathbf{x}_0, \dot{\bar{\psi}} = -\frac{\partial H_1}{\partial \bar{\mathbf{x}}}, \bar{\psi}(t_K) = 0, \quad (3.34)$$

где

$$H_1 = H_1(\bar{\psi}(t), \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) = -f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \bar{\psi}^T \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) - \left(\frac{\partial F(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}).$$

$$\bar{H}_1 = \max_{\mathbf{u} \in \mathbf{U}} H_1(\bar{\psi}(t), \bar{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}(t)) \text{ для всех } t \in [t_0, t_K].$$

Здесь $\bar{\psi}(t)$ - сопряженная вектор-функция в задаче Больца.

$\bar{H}_1 = \text{const}$, если t_K фиксировано, $\bar{H}_1 = 0$ для всех $t \in [t_0, t_K]$, если t_K свободно.

Вводя вектор функции

$$\bar{\psi}(t) = \bar{\psi}(t) - \frac{\partial F(\bar{\mathbf{x}})}{\partial \bar{\mathbf{x}}} \quad (3.35)$$

и гамильтониан

$$H(\bar{\psi}(t), \bar{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}(t)) = -f_0(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) + \bar{\psi}^T \cdot \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{u}), \quad (3.36)$$

приходим к соотношениям

$$\begin{aligned} H(\bar{\psi}(t), \bar{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}(t)) &\equiv H_1(\bar{\psi}(t), \bar{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}(t)), \\ \frac{\partial H_1}{\partial \bar{\psi}} &= \frac{\partial H}{\partial \bar{\psi}}, \dot{\bar{\psi}} = -\frac{\partial H}{\partial \bar{\mathbf{x}}}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

С учетом этого заключаем, что необходимые условия оптимальности в задаче Больца отличаются от соответствующих условий в задаче Лагранжа лишь граничным условием

$$\bar{\psi}(t_K) = -\frac{\partial F(\bar{\mathbf{x}}(t_K))}{\partial \bar{\mathbf{x}}}. \quad (3.38)$$

Замечание. Случай неавтономной системы. Если исходная динамическая система оказывается неавтономной, то путем введения дополнительной переменной $x_{n+1} \equiv t$ ее можно формально свести к автономной и тем самым использовать уже полученные необходимые условия. Отличием от прежних условий является то, что гамильтониан теперь явно зависит от времени и не может считаться постоянным при $t \in [t_0, t_K]$. С учетом $\dot{x}_{n+1} = 1$ запишем

$$\begin{aligned} H_1 &= H_1(\psi(t), \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \psi_{n+1}, x_{n+1}) = \\ &= -f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}, x_{n+1}) + \psi^T \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, x_{n+1}) + \psi_{n+1} \cdot 1 = \\ &= H(\psi, \mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \psi_{n+1}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Здесь аддитивная переменная ψ_{n+1} не влияет на результат

оптимизации гамильтониана, т.к.

$$\dot{\psi}_{n+1} = -\frac{\partial H_1}{\partial x_{n+1}} = -\frac{\partial H}{\partial t} \neq 0. \quad (3.40)$$

6. Окончательно задача оптимального управления приводится к краевой задаче для системы $2n$ обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= f_i(t, x, \bar{u}(t, \psi, x)), \\ \frac{d\psi_i}{dt} &= \varphi_i(t, \psi, x, \bar{u}(t, \psi, x)), \end{aligned} \quad (3.41)$$

с начальными условиями

$$\bar{x}_i(t_0) = x_{i0}, \quad \bar{\psi}_i(t_0) = z_i. \quad (3.42)$$

Здесь z_i - неизвестные начальные условия для компонентов вектор-функции $\bar{\psi}(t)$, подлежащие определению в ходе решения краевой задачи, которая заключается в подборе n параметров z_i , так, чтобы при $t = t_K$ выполнялось n условий (граничных - для вектора $\bar{x}(t_K)$ или условий трансверсальности для $\bar{\psi}(t_K)$). Зададим эти условия в общем виде

$$q_i(t_K, \bar{x}(t_K), \bar{\psi}(t_K)) = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.43)$$

Схема решения краевой задачи такова. Зададим начальное приближение $\bar{\psi}_i^0(t_0) = z_i^0$ и проинтегрируем каноническую систему до момента $t = t_K$:

$$\begin{aligned} x_i(t_K) &= x_{i0} + \int_{t_0}^{t_K} f_i(t, x, \psi) dt, \\ \psi_i(t_K) &= z_i^0 + \int_{t_0}^{t_K} \varphi_i(t, x, \psi) dt, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (3.44)$$

Затем, вычисляя функции $q_i(t_K, \bar{x}(t_K), \bar{\psi}(t_K))$, строим итерационную

схему (см. гл. 7) $z_i^0 \rightarrow z_i^1 \rightarrow z_i^2 \dots z_i^{s-1} \rightarrow z_i^s$, на каждом шаге которой принимается решение либо о продолжении вычислений, либо об их прекращении в случае, когда

$$\|q_i(t_K, \bar{x}(t_K), \bar{\psi}(t_K))\| = \|q_i(z_i^s)\| \leq \varepsilon, \quad (3.45)$$

где ε - заданный уровень погрешности.

3.7. Задачи об оптимальном быстродействии для линейных систем с постоянными коэффициентами

Задачи оптимизации, в которых производится минимизация времени перехода из начального состояния в конечное, называются задачами об оптимальном (максимальном) быстродействии. Рассмотрим случай линейной системы с постоянными коэффициентами:

$$\dot{x} = Ax + Bu. \quad (3.46)$$

Здесь x - вектор состояния $(n \times 1)$, u - вектор управления $(m \times 1)$, A и B - постоянные матрицы порядков $(n \times n)$ и $(n \times m)$. Будем полагать, что компоненты вектора управления ограничены по величине:

$$u \in U: |u_j| < V_j, \quad (j = 1, \dots, m).$$

Множество U представляет собой гиперпараллелепипед в m -мерном пространстве с гранями, равными $2V_j$.

В задачах об оптимальном быстродействии критерий оптимальности имеет вид

$$I = (t_K - t_0) = T = \int_{t_0}^{t_K} 1 dt.$$

Для выявления структуры оптимального управления воспользуемся необходимыми условиями в задаче Лагранжа. Составим Гамильтониан

$$H(\psi, x, u) = -1 + \psi^T (Ax + Bu) = -1 + \psi^T Ax + Q^T u, \quad (3.47)$$

где $Q = B^T \psi$, $Q^T = \psi^T B$.

Каноническая система уравнений принимает вид

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\mathbf{x}}} &= \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\bar{\mathbf{u}}, & \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0, \\ \dot{\bar{\boldsymbol{\psi}}} &= -\mathbf{A}^T \bar{\boldsymbol{\psi}}, & \bar{\boldsymbol{\psi}}^T(t_K) \delta \mathbf{x}(t_K) &= 0.\end{aligned}\quad (3.48)$$

Оптимальное управление $\bar{\mathbf{u}}$ определяется из условия максимизации гамильтониана:

$$\bar{u}_j(t) = V_j, \text{ если } Q_j > 0,$$

$$\bar{u}_j(t) = -V_j, \text{ если } Q_j < 0, \quad j = 1, \dots, m,$$

или в векторной форме:

$$\bar{\mathbf{u}}(t) = \text{sign}[\mathbf{Q}(t)] = \text{sign}(\mathbf{B}^T \bar{\boldsymbol{\psi}}(t)). \quad (3.49)$$

Если $Q_j = 0$ на некотором отрезке времени $[t_1, t_2] \in [t_0, t_K]$, то задача называется вырожденной, а управление может быть любым, поскольку гамильтониан от него не зависит. Однако в данной постановке случай вырожденности не имеет места.

Так как t_K свободно, $\bar{H} = -1 + \bar{\boldsymbol{\psi}}^T \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{Q}^T \bar{\mathbf{u}} = 0$ или $\bar{\boldsymbol{\psi}}^T \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{Q}^T \bar{\mathbf{u}} = 1$ для любого $t \in [t_0, t_K]$. Отсюда следует, что $\bar{\boldsymbol{\psi}}(t)$ - ненулевой вектор для всех $t \in [t_0, t_K]$, задача невырождена.

Полученный результат приводит к следующей теореме (А.А.Фельдбаум). Если задача невырождена, а все корни характеристической системы, соответствующей рассматриваемой математической модели (3.46), являются действительными числами, то оптимальное управление имеет не более $(n-1)$ переключений. В случае комплексных корней число переключений также конечно, но зависит от начального и конечного состояний системы $\mathbf{x}(t_0)$ и $\mathbf{x}(t_K)$.

Отметим, что уравнение $\dot{\bar{\boldsymbol{\psi}}} = -\mathbf{A}^T \bar{\boldsymbol{\psi}}$ может быть решено независимо от уравнения, описывающего динамику системы, в виде $\bar{\boldsymbol{\psi}} = \bar{\boldsymbol{\psi}}(t, \mathbf{z})$, где $\mathbf{z} = \bar{\boldsymbol{\psi}}(t_0)$. Предположим, что алгоритм решения канонической системы (3.48) существует. Тогда для каждого момента времени t могут быть

найлены векторы $\bar{\mathbf{x}}$, $\bar{\boldsymbol{\psi}}$ и установлена (в общем случае численно) зависимость $\bar{\boldsymbol{\psi}}(\bar{\mathbf{x}})$. Фактически получается решение задачи синтеза оптимального управления:

$$\bar{\mathbf{u}}(t) = \text{sign}(\mathbf{B}^T \bar{\boldsymbol{\psi}}(\bar{\mathbf{x}}(t))) = \text{sign} \mathbf{P}(t, \bar{\mathbf{x}}(t)), \quad (3.50)$$

где функция P называется функцией переключения.

3.8. Оптимальное управление линейной системой с квадратичным функционалом

1. Задача программирования оптимального управления

Рассмотрим линейную динамическую систему

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}, \quad t \in [t_0, t_K], \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x}(t_K) = 0, \quad (3.51)$$

где $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ - матрицы порядков $(n \times n)$ и $(n \times m)$, зависящие от времени, t_K - фиксировано, $\mathbf{u}(t)$ - управление.

Критерий оптимальности зададим в виде

$$I = \int_{t_0}^{t_K} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{W} \mathbf{u}) dt, \quad (3.52)$$

где $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{W}$ - положительно определенные матрицы порядков $(n \times n)$ и $(m \times m)$, зависящие от времени.

Для определения оптимального управления $\bar{\mathbf{u}}(t)$, минимизирующего функционал I , используем принцип максимума. Составим гамильтониан

$$H = -\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} - \mathbf{u}^T \mathbf{W} \mathbf{u} + \boldsymbol{\psi}^T (\mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u}). \quad (3.53)$$

Оптимальное управление для простоты полагаем неограниченным и определяем из условий максимума H :

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = -2\mathbf{W} \mathbf{u} + \mathbf{B}^T \boldsymbol{\psi} = 0.$$

Так как $\frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{u}^2} = -2\mathbf{W}$, то условие положительной определенности

матрицы $\mathbf{W}$ обеспечивает максимум H . Следовательно, в соответствии с

первым условием оптимальный закон управления имеет вид программного управления

$$\bar{u} = \frac{1}{2} W^{-1} B^T \bar{\psi}. \quad (3.54)$$

Каноническая система уравнений принимает вид

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + \frac{1}{2} BW^{-1} B^T \bar{\psi}, \quad \dot{\bar{\psi}} = 2Q\bar{x} - A^T \bar{\psi}, \quad (3.55)$$

$$\bar{x}(t_0) = x_0, \quad x(t_K) = 0.$$

Задача оптимального управления сведена к краевой задаче для системы линейных дифференциальных уравнений. Эту задачу можно решать, например, используя фундаментальную матрицу системы линейных однородных уравнений [1].

2. Задача синтеза оптимального управления

Рассмотрим задачу синтеза оптимального управления системой

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad t \in [t_0, t_K], \quad x(t_0) = x_0,$$

из условия обращения в минимум критерия оптимальности

$$I = \int_{t_0}^{t_K} (x^T Q x + u^T W u) dt + x^T(t_K) \Lambda x(t_K). \quad (3.56)$$

Полагаем, что A, B, Q, W - матрицы, зависящие от времени, причем Q, W, Λ - положительно - определенные, Λ - постоянная матрица коэффициентов, t_K - фиксировано.

Как и в предыдущей задаче, в соответствии с принципом максимума оптимальное управление определяется зависимостью (3.54)

$$\bar{u} = \frac{1}{2} W^{-1} B^T \bar{\psi}.$$

Каноническая система уравнений имеет также прежнюю структуру, но другие граничные условия:

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + \frac{1}{2} BW^{-1} B^T \bar{\psi}, \quad x(t_0) = x_0, \quad (3.57)$$

$$\dot{\bar{\psi}} = 2Q\bar{x} - A^T \bar{\psi}, \quad (3.58)$$

$$\bar{\psi}(t_K) = -\frac{\partial (x^T(t_0) \Lambda x(t_K))}{\partial x(t_K)} = -2\Lambda x(t_K).$$

Будем искать решение второго уравнения в виде $\bar{\psi}(t) = -2K(t)x(t)$, где $K(t)$ - неизвестная матрица переменных коэффициентов. Для нее можно получить уравнение, которое позволит найти ее непосредственно. Подставив $\bar{\psi}(t) = -2K(t)x(t)$ в (3.58), после преобразований получим

$$-\dot{K} = KA + A^T K + Q - KBW^{-1}B^T K, \quad K(t_K) = \Lambda. \quad (3.59)$$

Это уравнение представляет собой нелинейное матричное дифференциальное уравнение Риккати. Решая уравнение (3.59) «справа налево», определяем K и закон оптимального управления:

$$\bar{u}(t, x) = -W^{-1}(t)B^T(t)K(t)x(t) = -L(t) \cdot x(t). \quad (3.60)$$

Данный закон называется оптимальным линейным регулятором.

Замечание. Если A, B, Q, W не зависят от времени, то при достаточно большом $T = t_K - t_0$ можно говорить об «установившемся»

режиме. В этом случае можно положить $\dot{K} \cong 0$. Тогда матрица K является постоянной и определяется из линейного матричного алгебраического уравнения:

$$KA + A^T K + Q = KBW^{-1}B^T K. \quad (3.61)$$

Решение этого уравнения можно рассматривать как предел (если он существует) решения дифференциального уравнения Риккати при $T \rightarrow \infty$.

3.9. Вырожденные задачи оптимального управления. Необходимые условия оптимального особого управления

В общем случае под вырожденной задачей понимают такую, в которой максимизация гамильтониана по управлению не позволяет получить в явном виде выражения для оптимального управления. Тем не менее оптимальное управление, называемое **особым**, может существовать.

Рассмотрим случай, когда гамильтониан линейно зависит от управления. Пусть динамическая система описывается дифференциальным уравнением

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{x})u, \quad |u| \leq V, \quad t \in [t_0, t_K],$$

где $\mathbf{x}(t) = (x_0, x_1, \dots, x_n)^T$ - вектор размерности $(n+1)$, $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathbf{b}(\mathbf{x})$ - вектор-функции размерности $(n+1)$, u - скалярная переменная, t_K - свободно.

Критерий оптимальности зададим в виде $I = \mathbf{x}_0(t_K) \rightarrow \min$.

Составим гамильтониан

$$H(\mathbf{x}, \psi, u) = \psi^T \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \psi^T \mathbf{b}(\mathbf{x})u = P(\mathbf{x}, \psi) + Q(\mathbf{x}, \psi)u, \quad (3.62)$$

$$\text{где } P(\mathbf{x}, \psi) = \psi^T \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad Q(\mathbf{x}, \psi) = \psi^T \mathbf{b}(\mathbf{x}). \quad (3.63)$$

Если $Q(\mathbf{x}, \psi) = 0$ на некотором отрезке $[t_1, t_2]$, то гамильтониан не зависит от u , оптимальное управление не может быть найдено из условия максимизации H . Получим дополнительные необходимые условия, которым оно должно удовлетворять. Согласно необходимым условиям оптимальности для задачи Майера, если t_K свободно, то $H(t) = 0$, и, следовательно, $P(\mathbf{x}, \psi) = 0$. Тогда

$$\frac{d^v P}{dt^v} = 0, \quad (3.64)$$

$$\frac{d^v Q}{dt^v} = 0 \quad (3.65)$$

для всех значений $v = 1, 2, \dots$ и любого $t \in [t_0, t_K]$.

Раскроем эти выражения для различных v . Пусть $v = 1$:

$$\frac{dQ}{dt} = \dot{\psi}^T \mathbf{b} + \psi^T \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} = -\left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}\right)^T \mathbf{b} + \psi^T \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial H}{\partial \psi} =$$

$$\begin{aligned} &= \psi^T \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{b} - \psi^T \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{b}u + \psi^T \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{f} + \mathbf{b}u) = \\ &= \psi^T \left(\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f} - \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{b} \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.66)$$

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= \dot{\psi}^T \mathbf{f} + \psi^T \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} = -\left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}\right)^T \mathbf{f} + \psi^T \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial H}{\partial \psi} = \\ &= -\psi^T \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f} - \psi^T \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}u + \psi^T \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{f} + \mathbf{b}u) = \\ &= \psi^T \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{b} - \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f} \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Следовательно, условия равенства нулю первых производных выполняются при любом u , если имеет место равенство

$$\psi^T \Phi_1 = 0, \quad (3.68)$$

$$\text{где } \Phi_1 = \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f} - \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{b}. \quad (3.69)$$

Получим выражения для случая $v = 2$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 Q}{dt^2} &= \frac{d}{dt} (\psi^T \Phi_1) = \dot{\psi}^T \Phi_1 + \psi^T \frac{\partial \Phi_1}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} = \\ &= -\left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}\right)^T \Phi_1 + \psi^T \frac{\partial \Phi_1}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial H}{\partial \psi} = \\ &= -(\psi^T \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} + \psi^T \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \mathbf{x}} u) \Phi_1 + \psi^T \frac{\partial \Phi_1}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{f} + \mathbf{b}u) = \\ &= \psi^T \Gamma_2 u + \psi^T \Phi_2 = 0, \end{aligned} \quad (3.70)$$

$$\text{где } \Gamma_2 = \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \mathbf{x}} \Phi_1 - \frac{\partial \Phi_1}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{b}, \quad (3.71)$$

$$\Phi_2 = \frac{\partial \Phi_1}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f} - \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \Phi_1. \quad (3.72)$$

Если $\Psi^T \Gamma_2$ не обращается в нуль, то особое управление $\tilde{u}$ имеет вид:

$$\tilde{u} = -\frac{\Psi^T \Phi_2}{\Psi^T \Gamma_2}. \quad (3.73)$$

Это управление является искомым особым управлением, если выполняется ограничение $|u| \leq V$.

Однако, если $\Psi^T \Gamma_2 = 0$, то особое управление по-прежнему не находится в явном виде из (3.73). Выражение (3.70) примет вид:

$$\Psi^T \Phi_2 = 0. \quad (3.74)$$

Можно показать, что последовательное дифференцирование однотипных выражений (3.68), (3.74)... в конечном итоге приведет нас при $\nu = 2k$ ($k=1,2,3,\dots$), то есть при четных значениях производных к уравнению, в котором коэффициент при u не равен нулю.

$$\frac{\partial^\nu Q}{\partial t^\nu} = \Psi^T \Gamma_\nu u + \Psi^T \Phi_\nu = 0, \quad (3.75)$$

откуда получаем управление

$$\tilde{u} = -\frac{\Psi^T \Phi_\nu}{\Psi^T \Gamma_\nu}; \quad (3.76)$$

которое может являться искомым особым управлением, если выполняется ограничение

$$\left| \frac{\Psi^T \Phi_\nu}{\Psi^T \Gamma_\nu} \right| \leq V. \quad (3.77)$$

Технология отыскания особых управлений не изменяется для вектора управлений любой размерности, а также для случая, когда t_K фиксировано: коэффициенты при каждой компоненте вектора подвергаются дифференцированию до тех пор, пока особое управление не будет определено в явном виде.

Сформулируем теперь необходимые условия оптимальности особого

управления. Исследование этой проблемы ведется с использованием математического аппарата двусторонних вариаций управления, которые называются вариациями Келли (рис. 3.4).

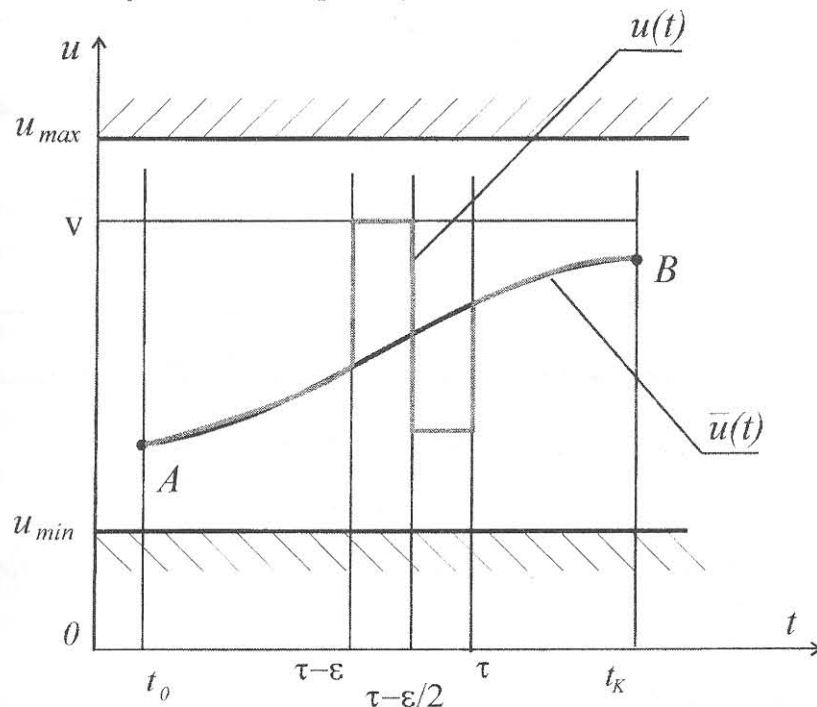


Рис. 3.4. Вариация Келли

Вариация управления, предложенная Келли, представляет собой двусторонний равный по интенсивности скачок управления, причем на

отрезке $\left[\tau - \epsilon, \tau - \frac{\epsilon}{2} \right]$ и $\left[\tau - \frac{\epsilon}{2}, \tau \right]$ вариации δu имеют

противоположные знаки. Доказано, что реакция динамической системы на вариацию Келли есть величина более высокого порядка малости, чем

реакция на обычную игольчатую вариацию, таким образом $\left\| \frac{\delta x}{f} \right\| \leq \epsilon^2$

(рис. 3.5), где $\mathbf{f}$ - вектор-функция правых частей в математической модели непрерывной динамической системы.

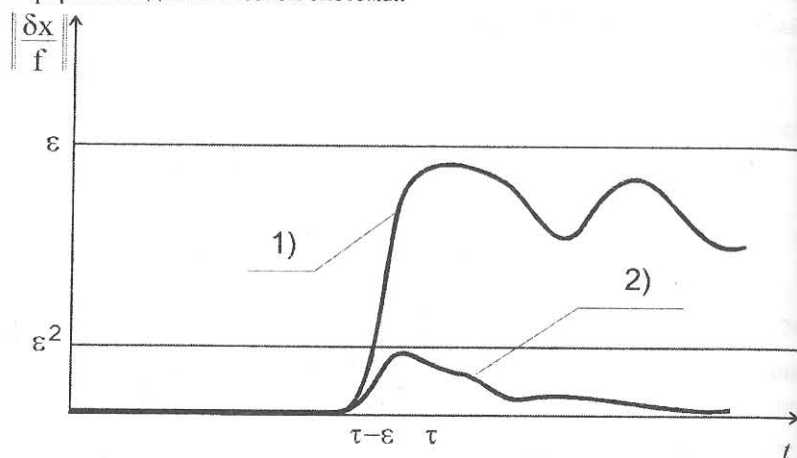


Рис. 3.5. Реакция динамической системы на
1) одностороннюю игольчатую вариацию,
2) на вариацию Келли

Запишем необходимые условия минимума функционала при особом управлении

$$\delta J = 0, \delta^2 J \geq 0.$$

Используя аппарат вариаций Келли, можно получить выражение для второй вариации $\delta^2 J$ в следующем виде [2]:

$$\delta^2 J = \frac{2}{3} L V^2 \varepsilon^2, \quad (3.78)$$

где L представляет собой выражение

$$L = \frac{\partial}{\partial u} \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial H}{\partial u} \right). \quad (3.79)$$

Видно, что L представляет собой коэффициент при управлении в выражении (3.70), полученном при двукратном дифференцировании

функции $Q(\mathbf{x}, \psi) = \frac{\partial H}{\partial u}$. Таким образом, условие

$$\frac{\partial}{\partial u} \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial H}{\partial u} \right) = \frac{\partial}{\partial u} \frac{d^2}{dt^2} Q(\mathbf{x}, \psi) = \psi^T \Gamma_2 \geq 0 \quad (3.80)$$

является необходимым условием оптимальности управления. Это условие называется условием Келли-Брайсона.

Структура оптимального решения в вырожденных задачах оптимального управления состоит из чередующихся участков регулярного управления (которое определяется из условия: $\bar{u} = \arg \max_{u \in U} H$) и особого

управления $\tilde{u}(t) = \arg(\psi^T \Gamma_v u + \psi^T \Phi_v = 0)$, а в точках сопряжения регулярного и особого участков может иметь место разрыв 1-го рода функции $u(t)$.

3.10. Задачи оптимального управления с ограничениями на вектор состояния

Доказательство принципа максимума было проведено без учета ограничений на вектор состояния. Рассмотрим теперь следующую постановку задачи. Дана автономная динамическая система

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \mathbf{u} \in U, \mathbf{x}(t) \in X, t \in [t_0, t_K],$$

где $\mathbf{x}$ - вектор $(n \times 1)$, $\mathbf{u}$ - вектор $(m \times 1)$, $\mathbf{f}$ - вектор-функция $(n \times 1)$, а множество X задано в виде $\mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq 0$, где $\mathbf{g}$ - вектор-функция $(k \times 1)$, причем $k \leq m$.

Рассмотрим задачу Лагранжа при свободном t_K :

$$I = \int_{t_0}^{t_K} f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}) dt \rightarrow \min.$$

Исследуем оптимальные траектории, которые можно разбить на конечное число участков, каждый из которых лежит либо на границе множества X , либо внутри него (рис. 3.6).

Пусть дуга C_1C_2 траектории полностью лежит на границе X , а управляемая система автономна. Чтобы $\mathbf{x}(t)$ принадлежала границе, необходимо и достаточно, чтобы

$$\delta \mathbf{g} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{P}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = 0, \quad (3.81)$$

т.е. вектор фазовой скорости $\dot{\mathbf{x}}$ должен быть ортогонален нормали к поверхности $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0$. Здесь $\mathbf{P}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ - вектор размерности $(k \times 1)$, $k \leq m$.

Введем в рассмотрение расширенный вектор $\mathbf{x}_* = (\mathbf{x}_0, \mathbf{x})^T$, где $\mathbf{x}_0(t_K) = I$, $\dot{\mathbf{x}}_0(t_K) = \mathbf{f}_0(\mathbf{x}, \mathbf{u})$. Тогда задача Лагранжа принимает частный вид задачи Майера:

$$\dot{\mathbf{x}}_* = \mathbf{f}_*(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad \mathbf{u} \in U, \quad t \in [t_0, t_K], \quad \mathbf{P}(\mathbf{x}_*, \mathbf{u}) = 0,$$

$$I = \mathbf{x}_0(t_K) \rightarrow \min. \quad (3.82)$$

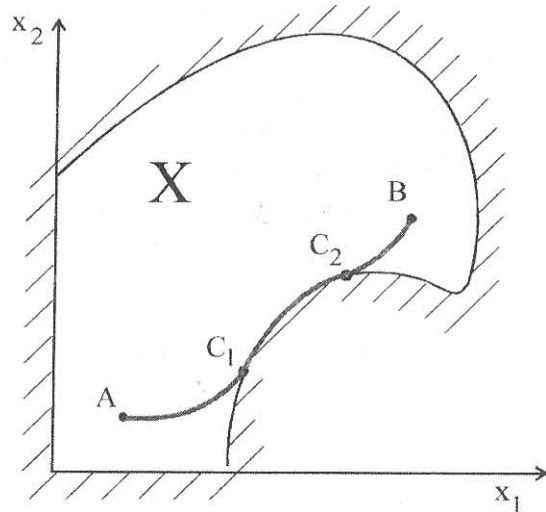


Рис. 3.6. Оптимальная траектория с учетом ограничений на фазовые координаты

Получим необходимые условия оптимальности. Пусть известно оптимальное управление $\bar{\mathbf{u}}(t)$. Дадим оптимальному управлению $\bar{\mathbf{u}}(t)$ игольчатую вариацию при $\tau - \varepsilon < t < \tau$. Вариация траектории при $t > \tau$ определяется из уравнения

$$\delta \dot{\mathbf{x}}_* = \left(\frac{\partial \mathbf{f}_*}{\partial \mathbf{x}_*} \right) \delta \mathbf{x}_* + \left(\frac{\partial \mathbf{f}_*}{\partial \mathbf{u}} \right) \delta \mathbf{u} \quad (3.83)$$

с начальным условием $\delta \mathbf{x}_*(\tau) = \varepsilon [\mathbf{f}_*(\bar{\mathbf{x}}(\tau), \mathbf{u}(\tau)) - \mathbf{f}_*(\bar{\mathbf{x}}(\tau), \bar{\mathbf{u}}(\tau))]$.

Связь вариаций $\delta \mathbf{x}_*$ и $\delta \mathbf{u}$ определим, продифференцировав уравнение $\mathbf{P}(\mathbf{x}_*, \mathbf{u}) = 0$:

$$\left(\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{x}_*} \right) \delta \mathbf{x}_* + \left(\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{u}} \right) \delta \mathbf{u} = 0. \quad (3.84)$$

Исключим $\delta \mathbf{u}$ из уравнения для вариации траектории. Умножим последнее уравнение слева на некоторую матрицу $\Lambda(t)$ ($n \times k$) и прибавим к уравнению для вариации траектории:

$$\delta \dot{\mathbf{x}}_* = \left[\left(\frac{\partial \mathbf{f}_*}{\partial \mathbf{x}_*} \right) + \Lambda \left(\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{x}_*} \right) \right] \delta \mathbf{x}_* + \left[\left(\frac{\partial \mathbf{f}_*}{\partial \mathbf{u}} \right) + \Lambda \left(\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{u}} \right) \right] \delta \mathbf{u}. \quad (3.85)$$

Потребуем, чтобы матрица $\Lambda(t)$ обеспечивала равенство

$$\left[\left(\frac{\partial \mathbf{f}_*}{\partial \mathbf{u}} \right) + \Lambda \left(\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{u}} \right) \right] \delta \mathbf{u} = 0 \quad \text{для всех } \tau \leq t \leq t_K.$$

Тогда

$$\delta \dot{\mathbf{x}}_* = \left[\left(\frac{\partial \mathbf{f}_*}{\partial \mathbf{x}_*} \right) + \Lambda \left(\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{x}_*} \right) \right] \delta \mathbf{x}_*. \quad (3.86)$$

Введем вектор $\Psi_*(t)$, такой, чтобы

$$[\psi_*(t)]^T \delta x_*(t) = -\delta x_0(t_K) = -\delta I \leq 0 \quad (3.87)$$

для всех $t \leq t_K$. Отсюда следует, что при $t = t_K$

$$\psi_0(t_K) = -1, \quad \psi^T(t_K) \cdot \delta x(t_K) = 0. \quad (3.88)$$

Дифференцируя (3.87) по времени и учитывая выражение для производной $\delta \dot{x}_*$ (3.86), получим следующее уравнение для сопряженных множителей

$$\dot{\psi}_* = -\left(\frac{\partial f_*}{\partial x_*}\right)^T \psi_* - \left(\frac{\partial P}{\partial x_*}\right)^T \Lambda^T \psi_*. \quad (3.89)$$

Определив вектор $\psi(t)$ согласно последним выражениям и введя функцию Гамильтона $H = \psi_*^T f(x_*, u)$, получим для момента $t = \tau$

$$H[\bar{\psi}_*(\tau), \bar{x}_*(\tau), u(\tau)] - H[\bar{\psi}_*(\tau), \bar{x}_*(\tau), \bar{u}(\tau)] \leq 0, \\ \text{или } H[\bar{\psi}_*(\tau), \bar{x}_*(\tau), \bar{u}(\tau)] = \max_{u(\tau) \in U} H[\psi_*(\tau), x_*(\tau), u(\tau)], \quad (3.90)$$

где $\bar{x}_*(\tau)$, $\bar{\psi}_*(\tau)$ соответствует оптимальному режиму.

Так как τ может быть любым из $t \in [t_0, t_K]$, то окончательно

$$\bar{H} = H(\bar{\psi}_*, \bar{x}_*, \bar{u}) = \max_{u \in U} H[\bar{\psi}_*, \bar{x}_*, u] \text{ для всех } t \in [t_0, t_K].$$

Каноническая система уравнений имеет вид

$$\dot{\bar{x}}_* = \left(\frac{\partial H}{\partial \psi_*}\right), \quad \bar{x}(t_0) = x_0, \\ \dot{\bar{\psi}}_* = -\left(\frac{\partial H}{\partial x_*}\right) - \left(\frac{\partial P}{\partial x_*}\right)^T \Lambda^T \bar{\psi}_*, \quad (3.91)$$

$$\bar{\psi}_0^*(t_K) = -1, \quad \bar{\psi}^T(t_K) \cdot \delta \bar{x}(t_K) = 0.$$

Кроме того, должно выполняться условие $P(\bar{x}_*, \bar{u}) = 0$.

Определим матрицу $\Lambda(t)$. По условию

$$\left[\left(\frac{\partial f_*}{\partial u}\right) + \Lambda \left(\frac{\partial P}{\partial u}\right)\right] \delta u = 0.$$

Пусть u^1 и u^2 - составляющие вектора u , такие, что u^1 имеет размеры $(k \times 1)$, а u^2 - $[(m-k) \times 1]$, а матрица $\left(\frac{\partial P}{\partial u^1}\right)$ - неособенная с размерами $(k \times k)$. Вариации δu и δx_* связаны k соотношениями $(k < m)$:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x_*}\right) \delta x_* + \left(\frac{\partial P}{\partial u}\right) \delta u = 0.$$

Поэтому $(m-k)$ компонентов δu , например, δu^2 , можно считать свободными. Зададим $\delta u^2 = 0$, тогда

$$\left[\left(\frac{\partial f_*}{\partial u^1}\right) + \Lambda \left(\frac{\partial P}{\partial u^1}\right)\right] \delta u^1 + \left[\left(\frac{\partial f_*}{\partial u^2}\right) + \Lambda \left(\frac{\partial P}{\partial u^2}\right)\right] \delta u^2 = \\ = \left[\left(\frac{\partial f_*}{\partial u^1}\right) + \Lambda \left(\frac{\partial P}{\partial u^1}\right)\right] \delta u^1 = 0. \quad (3.92)$$

Следовательно, достаточно задать $\Lambda(t)$ следующим образом:

$$\Lambda = -\frac{\partial f_*}{\partial u^1} \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial u^1}\right)^{-1}. \quad (3.93)$$

Таким образом, для рассматриваемой задачи необходимые условия оптимальности $\bar{u}(t)$ и $\bar{x}(t)$ имеют вид:

$$1. \quad \dot{\bar{x}}_* = \left(\frac{\partial \bar{H}}{\partial \psi_*}\right), \quad \bar{x}(t_0) = x_0, \\ \dot{\bar{\psi}}_* = -\left(\frac{\partial \bar{H}}{\partial x_*}\right) + \left(\frac{\partial P}{\partial x_*}\right)^T \left[\left(\frac{\partial P}{\partial u^1}\right)^T\right]^{-1} \frac{\partial \bar{H}}{\partial u^1}, \quad (3.94) \\ \bar{\psi}_0(t_K) = -1, \quad \bar{\psi}^T(t_K) \delta \bar{x}(t_K) = 0,$$

где $\bar{H}(\bar{\psi}_*, \bar{x}_*, \bar{u}) = \bar{\psi}_*^T f_*(\bar{x}_*, \bar{u})$, u^1 - вектор, составленный из любых k компонентов вектора u , таких, что матрица $\left(\frac{\partial P}{\partial u^1}\right)$ неособенная, k - размерность вектора P .

$$2. \quad \bar{H} = \bar{H}(\bar{\psi}_*, \bar{x}_*, \bar{u}) = \max_{u \in U} H(\bar{\psi}_*, \bar{x}_*, u) \text{ для всех } t \in [t_0, t_K],$$

при условии $P(\bar{x}, \bar{u}) = 0$.

$$3. \quad \bar{H} = \text{const}, \text{ если } t_K \text{ фиксировано,}$$

$$\bar{H} = 0, \text{ если } t_K \text{ свободно для всех } t \in [t_0, t_K].$$

Можно получить обобщения на другие случаи, в частности, для неавтономной системы.

Перейдем теперь к общему случаю. Оптимальная траектория обладает тем свойством, что каждый участок является оптимальным в смысле исходного критерия, а значит, на нем выполняются необходимые условия оптимальности. Это значит, что для участков, лежащих внутри области X , имеет место принцип максимума в форме соотношений (3.16 – 3.18).

Получим теперь условия стыковки участков оптимальной траектории. Предположим, что оптимальная траектория состоит из конечного числа участков, каждый из которых лежит либо внутри области X , либо на ее границе $g(x) = 0$.

На любом участке оптимальной траектории выполняются необходимые условия оптимальности. Определим условия, которым должна удовлетворять оптимальная траектория в точках стыка участков, т.е. при переходе от одного участка к другому. Рассмотрим переход от i -го участка, лежащего внутри допустимой области, на $(i+1)$ -й участок, лежащий на ее границе, т.е. отрезок времени $[t_i - \sigma, t_i + \sigma]$, где $\sigma > 0$ - сколь угодно малая величина, а t_i - момент входа оптимальной траектории на участок границы X , описываемый уравнением $g(x) = 0$.

Для рассматриваемого бесконечно малого участка оптимальной

траектории ($\sigma \rightarrow 0$) справедливы соотношения, связывающие величины до момента t_i и после него [2]:

$$\bar{\psi}(t_i + \sigma) = \bar{\psi}(t_i - \sigma) + \frac{\partial g^T[x(t_i)]}{\partial x} v, \quad (3.95)$$

$$\bar{H}(t_i + \sigma) = \bar{H}(t_i - \sigma) - \left(\frac{\partial g}{\partial t} \right)^T v, \quad (3.96)$$

где v - вектор размерности k . Эти соотношения называются условиями скачка.

Таким образом, если оптимальная траектория существует и содержит конечное число точек стыка, то каждый участок, лежащий внутри допустимой области X , удовлетворяет принципу максимума без ограничений на фазовый вектор, каждый участок, лежащий на границе, удовлетворяет принципу максимума с ограничениями на фазовый вектор, а в каждой точке стыка выполняются условия скачка гамильтониана и сопряженных переменных.

3.11. Связь принципа максимума с классическим вариационным исчислением

С помощью принципа максимума можно вывести необходимые условия существования экстремума в задачах вариационного исчисления. Рассмотрим, например, классическую постановку вариационной задачи с функционалом

$$I = \int_{t_0}^{t_K} F(x, \dot{x}, t) dt \rightarrow \min.$$

Обозначим $\dot{x} = u$ и будем рассматривать скорости изменения фазовых координат в качестве управления. Применим принцип максимума. Составим гамильтониан:

$$H(x, u, \psi, t) = -F(x, \dot{x}, t) + \psi^T \dot{x} = -F(x, u, t) + \psi^T u. \quad (3.97)$$

Используем необходимое условие максимума гамильтониана:

$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = -\frac{\partial F}{\partial \mathbf{u}} + \Psi = 0$. Отсюда $\Psi = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial F}{\partial \dot{\mathbf{x}}}$. Продифференцируем

выражение для $\bar{\Psi}$ по времени: $\dot{\Psi} = \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{\mathbf{x}}}$. Согласно каноническому

уравнению для сопряженных переменных $\dot{\Psi} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}$. Сопоставляя

два последних выражения, получим уравнение Эйлера

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{\mathbf{x}}} = 0.$$

Условие второго порядка для существования максимума функции Гамильтона определяется как условие отрицательной определенности матрицы вторых частных производных гамильтониана, т.е. матрицы

$\frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{u}^2}$. Из этого условия следует условие положительной определенности

матрицы $\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{\mathbf{x}}^2}$, т.е. условие Лежандра.

Согласно принципу максимума, если $\bar{\mathbf{u}} = \dot{\bar{\mathbf{x}}}$ является оптимальным управлением, то при любом другом управлении $\mathbf{u} = \dot{\mathbf{x}}'$ и при одних и тех же значениях $\mathbf{x}, \Psi, t$.

$$H(\bar{\mathbf{x}}, \dot{\bar{\mathbf{x}}}, \bar{\Psi}, t) \geq H(\bar{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}}', \bar{\Psi}, t).$$

Учитывая выражение для гамильтониана, получаем:

$$-F(\bar{\mathbf{x}}, \dot{\bar{\mathbf{x}}}, t) + \bar{\Psi}^T \dot{\bar{\mathbf{x}}} \geq -F(\bar{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}}', t) + \bar{\Psi}^T \dot{\mathbf{x}}', \text{ или}$$

$$E = F(\bar{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}}', t) - F(\bar{\mathbf{x}}, \dot{\bar{\mathbf{x}}}, t) - \left[\frac{\partial F}{\partial \dot{\mathbf{x}}}(\bar{\mathbf{x}}, \dot{\bar{\mathbf{x}}}, t) \right]^T (\dot{\mathbf{x}}' - \dot{\bar{\mathbf{x}}}) \geq 0,$$

которое является условием Вейерштрасса.

Таким образом, принцип максимума Понтрягина при отсутствии ограничений на управление приводит к необходимым условиям экстремума в задачах классического вариационного исчисления.

4. ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

4.1. Принцип оптимальности Беллмана. Уравнение Беллмана

В основе метода динамического программирования лежит принцип оптимальности, сформулированный Р.Беллманом. Одна из формулировок этого принципа звучит так: оптимальный процесс обладает тем свойством, что каким бы ни было начальное управление, последующее управление должно быть оптимальным по отношению к состоянию, происходящему от начального управления.

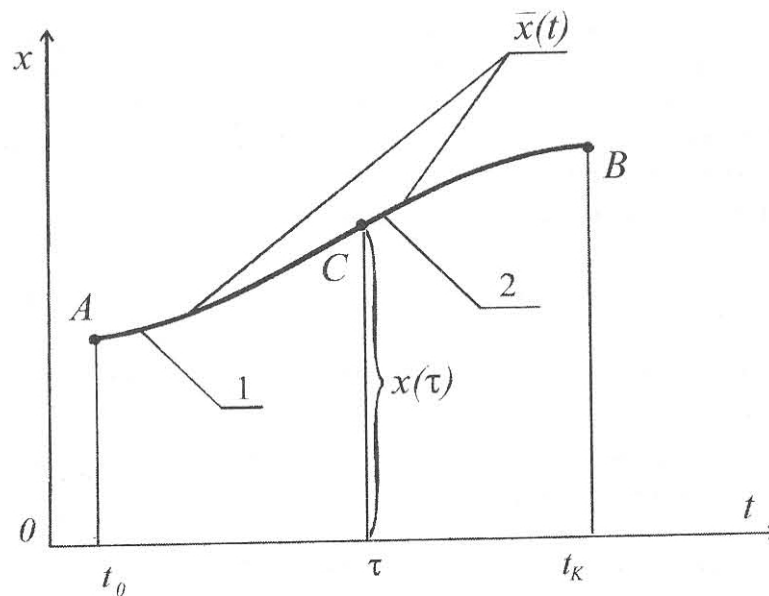


Рис. 4.1. Оптимальная траектория

Предположим, что $\bar{x}(t)$ - оптимальная траектория, приводящая систему из начального состояния A в конечное B , промежуточное состояние C соответствует моменту времени $\tau \in [t_0, t_K]$ (рис. 4.1).

Согласно принципу оптимальности Беллмана, участок траектории CB представляет собой оптимальную траекторию по отношению к его начальному состоянию $x(\tau)$, т.е. оптимальное управление на участке CB не зависит от того, каким образом система приведена в состояние C .

Другими словами, каждый участок оптимальной траектории является оптимальной траекторией относительно своей начальной точки, оптимальное управление не зависит от предыстории движения системы и для будущих моментов времени определяется только состоянием в данный момент. Таким образом, всю траекторию движения системы можно разбить на части, двигаясь от ее конца к началу, и оптимизировать движение по частям.

Принцип оптимальности Беллмана дает достаточное условие минимума функционала. Разумеется, он справедлив не для всех классов управляемых процессов, а только для марковских, то есть процессов без предыстории.

Рассмотрим задачу оптимального управления непрерывной динамической системой:

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad x \in X, \quad u \in U, \quad t \in [t_0, t_K], \quad x(t_0) = x_0,$$

$$I = \int_{t_0}^{t_K} f_0(x, u) dt + F(x(t_K)) \rightarrow \min. \quad (4.1)$$

Требуется синтезировать закон оптимального управления в форме $\bar{u} = \bar{u}(x, t)$.

Пусть поставленная задача решена. Введем обозначение: $S = \min_{u \in U} I[x(t), \tau] = S[x(\tau), \tau]$ - минимальное значение функционала

для участка траектории CB , тогда $S(x + \Delta x, \tau + \Delta t)$ - есть минимальное значение функционала I для измененного относительно C состояния и времени. Очевидно, что $S(x + \Delta x, \tau + \Delta t) - S(x, \tau) \cong f_0(x, u, \tau) \Delta t$.

Тогда в общем случае независимых изменений состояния и времени получим в соответствии с принципом оптимальности Беллмана

$$S(x, \tau) = \min_{u \in U} [f_0(x, u, \tau) \Delta t + S(x + \Delta x, \tau + \Delta t)]. \quad (4.2)$$

Введем допущения о том, что функция S непрерывна и непрерывно дифференцируема (во многих задачах эти условия не выполняются). Разложим $S(x + \Delta x, \tau + \Delta t)$ в ряд Тейлора, отбросив малые величины, получим

$$S(x + \Delta x, \tau + \Delta t) = S(x, \tau) + \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^T \Delta x + \frac{\partial S}{\partial t} \Delta t. \quad (4.3)$$

Подставив в предыдущее выражение, получим

$$0 = \min_{u \in U} \left[f_0(x, u, \tau) \Delta t + \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^T \Delta x + \frac{\partial S}{\partial t} \Delta t \right].$$

Разделив на Δt , при $\Delta t \rightarrow 0$ получим, с учетом того, что τ может быть произвольным моментом времени t

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \min_{u \in U} \left[f_0(x, u, t) + \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^T f(x, u, t) \right] = 0. \quad (4.4)$$

Полученное нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных относительно функции $S(x, t)$ называется уравнением Беллмана.

Функция $S(x, t)$ есть функция текущего состояния системы, ее принято называть функцией будущих потерь или функцией Беллмана. Она является мерой стоимости перехода из точки с координатами (x, t) в точку с координатами $(x(t_K), t_K)$. В задаче Больца функция будущих потерь в конечный момент времени равна терминальному члену, т.е. $S(x(t_K), t_K) = F(x(t_K))$, в задаче Лагранжа $F \equiv 0$, следовательно, $S(x(t_K), t_K) = 0$. Эти выражения задают граничные условия для уравнения Беллмана.

4.2. Связь метода динамического программирования с принципом максимума

Существует связь между функцией будущих потерь $S(\mathbf{x}, t)$ и сопряженными переменными Ψ . Рассмотрим задачу Лагранжа:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \mathbf{u} \in U, t \in [t_0, t_K], \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0,$$

$$I = \int_{t_0}^{t_K} f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) dt \rightarrow \min.$$

Перепишем уравнение Беллмана в следующем виде:

$$\min_{\mathbf{u} \in U} \left[f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \frac{\partial S}{\partial t} + \left(\frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \right] = 0.$$

Введем в рассмотрение расширенный вектор $\mathbf{x}_* = (x_0 : \mathbf{x} : x_{n+1})^T$, где x_0 и x_{n+1} определяются уравнениями

$$\dot{x}_0 = f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad \dot{x}_{n+1} = 1.$$

Расширенная вектор-функция правых частей имеет вид:

$$\mathbf{f}_* = (f_0 : \mathbf{f} : f_{n+1})^T, \text{ где } f_{n+1} = 1.$$

Введем вектор $\Psi = -\frac{\partial \bar{S}}{\partial \mathbf{x}_*}$, где $\bar{S} = x_0 + S(\mathbf{x}, t)$, т.е.

$$\psi_0 = -1, \quad \Psi = -\frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}}, \quad \psi_{n+1} = -\frac{\partial S}{\partial t}. \quad (4.5)$$

Тогда уравнение Беллмана можно переписать в виде

$$\max_{\mathbf{u} \in U} \bar{H} = 0, \quad (4.6)$$

$$\text{где } \bar{H} = \Psi_*^T \mathbf{f}_* = -f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \sum_{i=1}^n \psi_i f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \psi_{n+1}. \quad (4.7)$$

Таким образом, мы пришли к принципу максимума: оптимальное управление обеспечивает максимум гамильтониану, значение которого на

оптимальной траектории равно нулю.

Получим каноническую систему уравнений. Уравнение для вектора $\mathbf{x}_*$

$$\text{может быть записано сразу: } \dot{\mathbf{x}}_* = \frac{\partial \bar{H}}{\partial \Psi_*}.$$

Уравнения для Ψ_* получим, предположив, что функция $S(\mathbf{x}, t)$ дважды дифференцируема, тогда

$$\dot{\Psi}_* = \left[- \left(\frac{\partial^2 S}{\partial x_* \partial x_*} \dot{x}_* \right) \right] = - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial \mathbf{x}_*^2} \right)^T \mathbf{f}_*. \quad (4.8)$$

Здесь $\left(\frac{\partial^2 S}{\partial \mathbf{x}_*^2} \right)$ - матрица вторых производных.

Для любого фиксированного момента времени могут быть найдены оптимальные значения $\bar{\mathbf{u}}$, $\mathbf{x}_*$, для которых гамильтониан обращается в нуль. Отсюда следует, что при фиксированных t и оптимальном управлении $\bar{\mathbf{u}}$ величина гамильтониана достигает максимума по $\mathbf{x}_*$ в

точке оптимальной траектории. Поэтому $\frac{\partial \bar{H}}{\partial \mathbf{x}_*} = 0$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{H}}{\partial \mathbf{x}_*} &= \sum_{j=0}^{n+1} \left(- \frac{\partial^2 S}{\partial x_{*i} \partial x_{*j}} f_{*j} - \frac{\partial S}{\partial x_{*i}} \frac{\partial f_{*j}}{\partial x_{*j}} \right) = \\ &= - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial \mathbf{x}_*^2} \right)^T \mathbf{f}_* - \left(\frac{\partial \mathbf{f}_*}{\partial \mathbf{x}_*} \right)^T \frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}_*} = \\ &= -\dot{\Psi}_* - \left(\frac{\partial \mathbf{f}_*}{\partial \mathbf{x}_*} \right)^T \Psi_* = 0. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Откуда получаем, что $\dot{\Psi}_* = - \left(\frac{\partial \mathbf{f}_*}{\partial \mathbf{x}_*} \right)^T \Psi_*$, и учитывая, что

$\bar{H} = \Psi_*^T \mathbf{f}_*$, имеем:

$$\dot{\Psi}_* = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial \mathbf{x}_*}. \quad (4.10)$$

Таким образом, вектор Ψ_* , участвующий в принципе максимума, является антиградиентом функции S , связанной с функцией будущих потерь. Уравнение Беллмана эквивалентно необходимым условиям в форме принципа максимума. Результатом решения уравнения Беллмана является оптимальное управление в форме синтеза, в то время как при использовании принципа максимума определяется лишь программное оптимальное управление. Однако численно решить краевую задачу и тем самым определить программу управления проще, чем решить уравнение в частных производных, т.е. построить синтез. Аналитическое решение уравнения Беллмана можно получить лишь в некоторых частных случаях.

4.3. Связь уравнения Беллмана с уравнением Гамильтона-Якоби классического вариационного исчисления

Запишем уравнение Беллмана (4.4)

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \min_{\mathbf{u} \in U} \left[f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \left(\frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \right] = 0.$$

Перепишем это уравнение следующим образом:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \max_{\mathbf{u} \in U} \left[-f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) - \left(\frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \right] = 0. \quad (4.11)$$

Обозначим $\Psi = -\frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}}$.

Тогда (4.11) приводится к виду

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \max_{\mathbf{u} \in U} H(\Psi, \mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = 0, \quad (4.12)$$

$$\text{где } H = -f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \Psi^T \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t). \quad (4.13)$$

В классическом вариационном исчислении функция Гамильтона имеет вид $H = -F + \dot{\mathbf{x}} F_{\dot{\mathbf{x}}}$, то есть совпадает с (4.13) с точностью до обозначений. Сравним уравнения:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \max_{\mathbf{u} \in U} H = 0 \text{ - уравнение Беллмана,}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \bar{H} = 0 \text{ - уравнение Гамильтона-Якоби.}$$

Гамильтониан $\bar{H}$ содержит управление $\mathbf{u}$, которое получалось бы из необходимого условия экстремума $\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = 0$. Уравнение Беллмана является развитием результатов классического вариационного исчисления, распространяющим их на системы с ограничением на управление ($\mathbf{u} \in U$).

4.4. Геометрическая интерпретация решения уравнения Беллмана

Рассмотрим решение задачи минимизации, когда функционал содержит только терминальный член: $I = F(\mathbf{x}(t_K)) \rightarrow \min$, $f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = 0$.

Пусть доказано существование функции Беллмана, удовлетворяющей уравнению (4.4):

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial t} + \min_{\mathbf{u} \in U} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \right] = \\ = \frac{\partial S}{\partial t} + \min_{\mathbf{u} \in U} [\text{grad}_{\mathbf{x}} S(\mathbf{x}, t) \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)] = 0. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Минимум скалярного произведения двух векторов достигается, если они направлены в противоположные стороны. Поскольку $\mathbf{f} = \dot{\mathbf{x}}$ (фазовая скорость), то можно сделать вывод, что оптимальный вектор фазовой скорости направлен против градиента функции S .

На рис. 4.2 для двумерной задачи показано семейство линий уровней функции S и положение ее минимального значения, а также одна из траекторий движения, приводящая к минимуму.

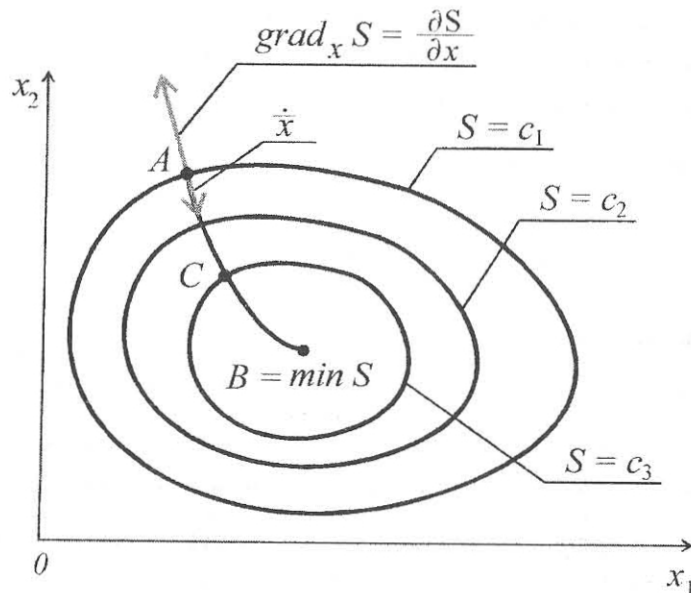


Рис. 4.2. Семейство линий уровней функции S

В случае ограничений на управление $\mathbf{u} \in U$, а значит, и на вектор фазовой скорости, $\dot{\mathbf{x}} \in V$, движение по антиградиенту может быть невозможно, тогда оптимальный вектор фазовой скорости выбирается из условия

$$\dot{\mathbf{x}} = \arg \min_{\mathbf{u} \in U} [\text{grad}_{\mathbf{x}} S(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)]. \quad (4.15)$$

4.5. Синтез оптимального управления линейной непрерывной системой с квадратичным функционалом

Рассмотрим следующую задачу синтеза оптимального управления линейной динамической системой

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad t \in [t_0, t_K], \quad \mathbf{u} \in U, \quad (4.16)$$

$$I = \int_{t_0}^{t_K} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{W} \mathbf{u}) dt + \mathbf{x}^T(t_K) \mathbf{A} \mathbf{x}(t_K) \rightarrow \min,$$

где матрицы $\mathbf{A}$ ($n \times n$), $\mathbf{B}$, ($n \times m$), $\mathbf{Q}$ ($n \times n$) и $\mathbf{W}$ ($n \times m$) в общем случае зависят от времени, причем $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{W}$ - положительно - определенные, матрица $\mathbf{A}$ ($n \times n$) - постоянная.

Запишем уравнение Беллмана для системы (4.16)

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \min_{\mathbf{u} \in U} \left[\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{W} \mathbf{u} + \left(\frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}} \right)^T (\mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u}) \right] = 0 \quad (4.17)$$

с граничным условием

$$S(\mathbf{x}(t_K), t_K) = \mathbf{x}^T(t_K) \mathbf{A} \mathbf{x}(t_K). \quad (4.18)$$

Сначала будем решать задачу, сняв ограничения на управление. Тогда, осуществляя операцию минимизации в (4.17), получим

$$2\mathbf{W} \mathbf{u} + \mathbf{B}^T \frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}} = 0, \quad \bar{\mathbf{u}} = -\frac{1}{2} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{B}^T \frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}}. \quad (4.19)$$

Тогда уравнение (4.17) принимает вид

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \mathbf{B} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{B}^T \frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}} + \left(\frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \mathbf{A} \mathbf{x} = 0. \quad (4.20)$$

Решение этого уравнения будем искать в виде

$$S(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x}^T \mathbf{K}(t) \mathbf{x}, \quad (4.21)$$

где $\mathbf{K}(t)$ - симметрическая матрица порядка ($n \times n$) ($\mathbf{K}^T = \mathbf{K}$). Сравнивая (4.21) с (4.18), видим, что

$$\mathbf{K}(t_K) = \mathbf{A}. \quad (4.22)$$

Подставляя (4.21) в (4.20), получим

$$\mathbf{x}^T \dot{\mathbf{K}} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} - \mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{B} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{K} \mathbf{x} + 2\mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{A} \mathbf{x} = 0. \quad (4.23)$$

Отсюда следует, что матрица $\mathbf{K}(t)$ должна удовлетворять уравнению

$$\dot{\mathbf{K}} + \mathbf{Q} - \mathbf{K} \mathbf{B} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{K} + \mathbf{K} \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{K} = 0, \quad (4.24)$$

которое может быть решено путем интегрирования от $t = t_K$ до $t = t_0$ с граничным условием (4.22). Это уравнение есть уже известное по

предыдущей главе уравнение Риккати. Заметим, что проблемой при его решении может быть наличие «особых точек», то есть точек разрыва второго рода.

С учетом выражения (4.21) для функции будущих потерь получаем оптимальное управление в форме оптимального линейного регулятора

$$\bar{\mathbf{u}} = -\mathbf{W}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{K}(t) \mathbf{x} = -\mathbf{L}(t) \mathbf{x}, \quad (4.25)$$

$$\text{где } \mathbf{L}(t) = \mathbf{W}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{K}(t). \quad (4.26)$$

Вернемся к первоначальной постановке задачи, учитывая ограничение на управление. Если $\bar{\mathbf{u}} \in \mathbf{U}$, то проблемы не существует. В общем случае оптимальное управление состоит из двух режимов: (4.25) и граничного $\bar{\mathbf{u}} \in \Gamma_{\mathbf{U}}$ ($\Gamma_{\mathbf{U}}$ - граница множества $\mathbf{U}$). Сложность заключается в том, что теперь для функции $S(\mathbf{x}, t)$ не существует единого выражения для всего пространства $\mathbf{X}$. При граничном управлении функция S отличается от квадратичной формы и может быть найдена путем решения уравнения Беллмана с граничным управлением, например, методом характеристик, с последующей гладкой склейкой полученного решения и решения (4.21).

Рассмотренная выше задача называется задачей аналитического конструирования оптимальных регуляторов (задача АКОР).

4.6. Метод динамического программирования в задачах управления дискретными системами

Рассмотрим задачу оптимального управления дискретной динамической системой

$$\mathbf{x}_{K+1} = \varphi(\mathbf{x}_K, \mathbf{u}_K), \quad \mathbf{u}_K \in \mathbf{U}, \quad K = 0, 1, 2, \dots, N. \quad (4.28)$$

Здесь $\mathbf{x}$ - n -мерный вектор состояния, $\mathbf{u}$ - m -мерный вектор управлений, K - номер шага. Функционал в данной постановке имеет вид

$$I = \sum_{i=0}^N \Phi_{0i}(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i) + F(\mathbf{x}_{N+1}) \rightarrow \min. \quad (4.29)$$

Полученную задачу отыскания оптимального управления на каждом из

N шагов можно решать методами нелинейного программирования, однако ее размерность может оказаться настолько большой, что практически ее решение не может быть получено. Воспользуемся принципом оптимальности Беллмана. Рассмотрим последний шаг управления при $K = N$. В соответствии с принципом оптимальности $\mathbf{u}_N$ не зависит от предыстории системы и определяется только состоянием $\mathbf{x}_N$.

Затраты на перевод системы из состояния $\mathbf{x}_N$ в $\mathbf{x}_{N+1}$ равны

$$I_N(\mathbf{x}_N, \mathbf{u}_N) = \Phi_0(\mathbf{x}_N, \mathbf{u}_N) + F(\varphi(\mathbf{x}_N, \mathbf{u}_N)) \rightarrow \min. \quad (4.30)$$

Минимизируя эти затраты по $\mathbf{u}_N$, находим искомый закон управления.

Обозначим функцию будущих потерь на последнем шаге S_N :

$$\begin{aligned} S_N(\mathbf{x}_N) &= \min_{\mathbf{u}_N \in \mathbf{U}} I_N(\mathbf{x}_N, \mathbf{u}_N) = \\ &= \min_{\mathbf{u}_N \in \mathbf{U}} [\Phi_0(\mathbf{x}_N, \mathbf{u}_N) + F(\varphi(\mathbf{x}_N, \mathbf{u}_N))]. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Полагая, что S_N найдена, перейдем к предпоследнему шагу $K = N - 1$. Теперь будущее поведение системы полностью определяется состоянием $\mathbf{x}_{N-1}$ и управлением $\mathbf{u}_{N-1}$ и $\mathbf{u}_N$, которые должны быть выбраны из условия минимизации функционала

$$\begin{aligned} I_{N-1}(\mathbf{x}_{N-1}, \mathbf{u}_{N-1}, \mathbf{u}_N) &= \\ &= \Phi_0(\mathbf{x}_{N-1}, \mathbf{u}_{N-1}) + \Phi_0(\mathbf{x}_N, \mathbf{u}_N) + F(\varphi(\mathbf{x}_N, \mathbf{u}_N)). \end{aligned} \quad (4.32)$$

Первое слагаемое не зависит от $\mathbf{u}_N$, поэтому введя обозначение S_{N-1} , получим

$$\begin{aligned} S_{N-1} &= \min_{\substack{\mathbf{u}_{N-1} \in \mathbf{U} \\ \mathbf{u}_N \in \mathbf{U}}} I_{N-1} = \min_{\mathbf{u}_{N-1} \in \mathbf{U}} \left(\min_{\mathbf{u}_N \in \mathbf{U}} I_{N-1} \right) = \\ &= \min_{\mathbf{u}_{N-1} \in \mathbf{U}} \{ \Phi_0(\mathbf{x}_{N-1}, \mathbf{u}_{N-1}) + \min_{\mathbf{u}_N \in \mathbf{U}} [\Phi_0(\mathbf{x}_N, \mathbf{u}_N) + F(\varphi(\mathbf{x}_N, \mathbf{u}_N))] \} = \\ &= \min_{\mathbf{u}_{N-1} \in \mathbf{U}} \{ \Phi_0(\mathbf{x}_{N-1}, \mathbf{u}_{N-1}) + S_N(\mathbf{x}_N) \}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Аналогично, для произвольного шага K можно получить **основное рекуррентное соотношение** метода динамического программирования

$$S_K(\mathbf{x}_K) = \min_{\mathbf{u}_K \in U} [\Phi_0(\mathbf{x}_K, \mathbf{u}_K) + S_{K+1}(\mathbf{x}_{K+1})]. \quad (4.34)$$

$S_K(\mathbf{x}_K)$ равно минимальному значению критерия оптимальности, которое может быть получено при движении из состояния $\mathbf{x}_K$ в конечное состояние и может быть выражено формулой

$$S_K(\mathbf{x}_K) = \min_{\mathbf{u}_j \in U} \left[\sum_{j=K}^N \Phi_0(\mathbf{x}_j, \mathbf{u}_j) + F(\mathbf{x}_{N+1}) \right]. \quad (4.35)$$

Соотношение $S_{N+1}(\mathbf{x}_{N+1}) = F(\mathbf{x}_{N+1})$ можно рассматривать как граничное условие для основного рекуррентного соотношения. Применяя основное рекуррентное соотношение последовательно, начиная с $K = N$, можно найти оптимальный закон управления $\mathbf{u}_K(\mathbf{x}_K)$ для всех шагов последовательно и вместе с тем зависимость функции будущих потерь от $\mathbf{x}_K$. При этом на каждом шаге минимизация осуществляется лишь по текущему вектору управления $\mathbf{u}_K$. Таким образом, метод динамического программирования приводит к алгоритму численного решения задачи синтеза оптимального управления путем последовательной минимизации функции многих переменных.

Основная трудность при решении задач с большой размерностью заключается в требовании большой памяти ЭВМ для запоминания на каждом шаге значений функции будущих потерь, зависящей от текущего состояния системы. Эту проблему принято называть «проклятием размерности».

4.7. Задача синтеза управления для линейной дискретной системы, оптимизируемой по квадратичному функционалу

Рассмотрим линейную дискретную систему

$$\mathbf{x}_{K+1} = \mathbf{A}_K \mathbf{x}_K + \mathbf{B}_K \mathbf{u}_K, \quad K = 0, 1, \dots, N, \quad (4.36)$$

где $\mathbf{x}_K$ - n -мерный вектор состояния, $\mathbf{u}_K$ - m -мерный вектор управлений ($\mathbf{u}$ - не ограничено), K - номер шага. Функционал в данной постановке имеет вид

$$I = \sum_{K=0}^N (\mathbf{x}_K^T \mathbf{Q}_K \mathbf{x}_K + \mathbf{u}_K^T \mathbf{W}_K \mathbf{u}_K) + \mathbf{x}_{N+1}^T \mathbf{A} \mathbf{x}_{N+1} \rightarrow \min. \quad (4.37)$$

Здесь $\mathbf{A}_K$, $\mathbf{B}_K$ матрицы с размерами $(n \times n)$ и $(n \times m)$ соответственно, зависящие от номера шага K ; $\mathbf{Q}_K$ $(n \times n)$, $\mathbf{W}_K$ $(m \times m)$ и $\mathbf{A}$ $(n \times n)$ - положительно-определенные матрицы.

Основное рекуррентное соотношение (4.34) принимает вид

$$S_K(\mathbf{x}_K) = \min_{\mathbf{u}_K \in U} (\mathbf{x}_K^T \mathbf{Q}_K \mathbf{x}_K + \mathbf{u}_K^T \mathbf{W}_K \mathbf{u}_K + S_{K+1}(\mathbf{A}_K \mathbf{x}_K + \mathbf{B}_K \mathbf{u}_K)), \quad (4.38)$$

где $K = N, N-1, \dots, 1, 0$, причем $S_{N+1}(\mathbf{x}_{N+1}) = \mathbf{x}_{N+1}^T \mathbf{A} \mathbf{x}_{N+1}$.

Полагая $K = N$ и учитывая граничное условие, получаем

$$S_K(\mathbf{x}_K) = \min_{\mathbf{u}_K \in U} (\mathbf{x}_K^T \mathbf{Q}_K \mathbf{x}_K + \mathbf{u}_K^T \mathbf{W}_K \mathbf{u}_K + (\mathbf{A}_N \mathbf{x}_N + \mathbf{B}_N \mathbf{u}_N)^T \mathbf{A} (\mathbf{A}_N \mathbf{x}_N + \mathbf{B}_N \mathbf{u}_N)). \quad (4.39)$$

Оптимальное управление $\bar{\mathbf{u}}_N$ должно удовлетворять необходимому

условию $\frac{\partial S}{\partial \mathbf{u}_N} = 0$, откуда

$$2\mathbf{W}_N \mathbf{u}_N + 2\mathbf{B}_N^T \mathbf{A} \mathbf{A}_N \mathbf{x}_N + 2\mathbf{B}_N^T \mathbf{A} \mathbf{B}_N \mathbf{u}_N = 0.$$

Получаем

$$\bar{\mathbf{u}}_N = -\mathbf{G}_N^{-1} \mathbf{B}_N^T \mathbf{A} \mathbf{A}_N \mathbf{x}_N = -\mathbf{L}_N \mathbf{x}_N, \quad (4.40)$$

где

$$\mathbf{G}_N = \mathbf{W}_N + \mathbf{B}_N^T \mathbf{A} \mathbf{B}_N, \quad \mathbf{L}_N = \mathbf{G}_N^{-1} \mathbf{B}_N^T \mathbf{A} \mathbf{A}_N. \quad (4.41)$$

Следовательно, оптимальное управление на последнем шаге линейно зависит от фазового вектора.

Предположим, что обратная матрица $\mathbf{G}_N^{-1}$ существует. Если матрицы $\mathbf{W}_N$ и $\mathbf{A}$ положительно-определенные, то управление $\bar{\mathbf{u}}_N$ удовлетворяет и достаточному условию минимума.

Подставим найденное управление в выражение для S_N :

$$S_N(\mathbf{x}_N) = \mathbf{x}_N^T \mathbf{Q}_N \mathbf{x}_N + \mathbf{x}_N^T \mathbf{L}_N^T \mathbf{W}_N \mathbf{L}_N \mathbf{x}_N + \mathbf{x}_N^T (\mathbf{A}_N - \mathbf{B}_N \mathbf{L}_N)^T \mathbf{A} (\mathbf{A}_N - \mathbf{B}_N \mathbf{L}_N) \mathbf{x}_N \quad (4.42)$$

или $S_N(\mathbf{x}_N) = \mathbf{x}_N^T \mathbf{K}_N \mathbf{x}_N$, где $\mathbf{K}_N$ обозначена матрица

$$\mathbf{K}_N = \mathbf{Q}_N + \mathbf{A}_N^T \mathbf{A} \mathbf{A}_N - \mathbf{A}_N^T \mathbf{A} \mathbf{B}_N \mathbf{L}_N - \mathbf{L}_N^T \mathbf{B}_N^T \mathbf{A} \mathbf{A}_N + \mathbf{L}_N^T \mathbf{G}_N \mathbf{L}_N \quad (4.43)$$

Перейдем к следующему шагу, полагая $K = N - 1$. Так как вид функций $S_N(\mathbf{x}_N)$ и $S_{N-1}(\mathbf{x}_{N-1})$ одинаков, то после использования основного рекуррентного соотношения получим функцию S_{N-1} в таком же виде. То есть, для любого K функция $S_K(\mathbf{x}_K)$ может быть представлена в виде квадратичной формы $S_K(\mathbf{x}_K) = \mathbf{x}_K^T \mathbf{K}_K \mathbf{x}_K$. Таким образом, в рассматриваемом случае закон оптимального управления на каждом шаге является линейным. Матрицу $\mathbf{L}$ называют матрицей коэффициентов обратной связи, так как она характеризует связь вектора управления $\mathbf{u}$ с вектором фазовых координат $\mathbf{x}$.

Таким образом, получаем закон управления

$$\bar{\mathbf{u}}_K = -\mathbf{L}_K \mathbf{x}_K, \quad (4.44)$$

где

$$\mathbf{L}_K = \mathbf{G}_K^{-1} \mathbf{B}_K^T \mathbf{K}_{K+1} \mathbf{A}_K, \quad \mathbf{G}_K = \mathbf{W}_K + \mathbf{B}_K^T \mathbf{K}_{K+1} \mathbf{B}_K, \quad (4.45)$$

$$\mathbf{K}_K = \mathbf{Q}_K + \mathbf{A}_K^T \mathbf{K}_{K+1} \mathbf{A}_K - \mathbf{L}_K^T \mathbf{G}_K \mathbf{L}_K, \quad (4.46)$$

причем

$$\mathbf{K}_{N+1} = \mathbf{A}. \quad (4.47)$$

Соотношения (4.44) – (4.47) зададут синтез управления в форме оптимального линейного дискретного регулятора.

4.8. Вычислительные аспекты метода динамического программирования

Условия оптимальности, которые дают метод динамического программирования, могут быть положены в основу создания приближенных методов решения задач синтеза оптимального управления.

Метод последовательных приближений.

Пусть требуется найти оптимальную программу управления непрерывной системой

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad \mathbf{u} \in \mathbf{U}, \quad t \in [t_0, t_K], \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0,$$

$$I = \int_{t_0}^{t_K} f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}) dt + F(\mathbf{x}(t_K)) \rightarrow \min.$$

В соответствии с методом динамического программирования оптимальное управление должно удовлетворять уравнению Беллмана

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \min_{\mathbf{u} \in \mathbf{U}} \left[f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \left(\frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \right] = 0$$

при условии $S(\mathbf{x}, t_K) = F(\mathbf{x}(t_K))$. Уравнение Беллмана можно представить в следующей форме:

$$\min_{\mathbf{u} \in \mathbf{U}} \tilde{H}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = 0, \quad (4.48)$$

$$\begin{aligned}\tilde{H}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) &= f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \frac{\partial S}{\partial t} + \left(\frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \\ &= f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \frac{dS}{dt}(\mathbf{x}, t).\end{aligned}\quad (4.49)$$

Так как при оптимальном управлении функция $\tilde{H}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ обращается в нуль, то полная производная функции будущих потерь, вычисленная вдоль оптимальной траектории, равна

$$\frac{dS}{dt}(\mathbf{x}, t) = -f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad S(\mathbf{x}, t_K) = F[x(t_K)]. \quad (4.50)$$

Допустим, что на итерации i имеем $\mathbf{u}^i(t)$ - некоторое допустимое управление и $\mathbf{x}^i(t)$ - соответствующую ему траекторию. Тогда можно вычислить функцию $S^i(\mathbf{x}, t)$:

$$S^i(\mathbf{x}, t) = \int_t^{t_K} f_0(\mathbf{x}^i, \mathbf{u}^i, \tau) d\tau + F[\mathbf{x}^i(t_K)]. \quad (4.51)$$

Теперь построим функцию

$$\tilde{H}^i(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \frac{\partial S^i}{\partial t} + \left(\frac{\partial S^i}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t). \quad (4.52)$$

Минимизируя эту функцию, найдем новое $(i+1)$ приближение для управления $\mathbf{u}^{i+1}$. Можно показать, что если указанное построение оказывается возможным, то последовательность управлений $\{\mathbf{u}^i\}$ является минимизирующей, т.е. $I^{i+1} \leq I^i$.

Аппроксимация функции будущих потерь. Метод параметров.

Основное рекуррентное соотношение (4.34) дает формальный алгоритм численного решения. Однако аналитическое выражение для функции

будущих потерь получить в общем виде не удастся. Задачу можно решить приближенно, если функцию будущих потерь на каждом шаге аппроксимировать некоторой зависимостью вида

$$S_k(\mathbf{x}_k) = \sum_m \lambda_k^m V^m(\mathbf{x}_k), \quad (4.53)$$

где $V^m(\mathbf{x}_k)$ - некоторые заданные функции, λ_k^m - параметры, которые определяются типом аппроксимации. Например, λ_k^m можно определить из условия обращения в минимум следующей квадратичной невязки:

$$\begin{aligned}\Delta_k &= \sum_r \left(\lambda_k^r V^r(\mathbf{x}_k^r) - S_k(\mathbf{x}_k^r) \right)^2 = \\ &= \sum_r \sum_m \left(\lambda_k^m V^m(\mathbf{x}_k^r) - S_k(\mathbf{x}_k^r) \right)^2.\end{aligned}\quad (4.54)$$

Здесь под $\mathbf{x}_k^r$ понимаются некоторые характерные точки (узлы аппроксимации) из допустимого множества векторов $\mathbf{x}_k$, через $S_k(\mathbf{x}_k^r)$ обозначены значения функции будущих потерь, вычисленные для точек $\mathbf{x}_k^r$ согласно основному рекуррентному соотношению. Дифференцируя последнее выражение по λ_k^m и приравнявая производные к нулю, получаем:

$$\sum_r \left(V^T V \lambda_k - S_k V_k \right) = 0 \quad \text{или} \quad P_k \lambda_k = \alpha_k, \quad (4.55)$$

где $P_k = \sum_r V(\mathbf{x}_k^r) V^T(\mathbf{x}_k^r)$, $\alpha_k = \sum_r S_k(\mathbf{x}_k^r) V(\mathbf{x}_k^r)$.

Искомый вектор параметров, обеспечивающий наилучшее приближение функции будущих потерь в смысле квадратичной ошибки Δ_k , определяется следующим образом:

$$\lambda_k = P_k^{-1} \alpha_k. \quad (4.56)$$

При выборе структуры функций $V^m(\mathbf{x}_k)$ необходимо учитывать условие

$$S_{N+1}(\mathbf{x}_{N+1}) = \lambda_{N+1}^T V(\mathbf{x}_{N+1}) = F(\mathbf{x}_{N+1}). \quad (4.57)$$

4.9. Концепция возмущенно-невозмущенного движения

При решении задачи синтеза оптимального управления нелинейной динамической системой

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad \mathbf{u} \in \mathbf{U}, \quad t \in [t_0, t_K],$$

обеспечивающего минимум функционалу

$$I = \int_{t_0}^{t_K} f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}) dt + F(\mathbf{x}(t_K)) \rightarrow \min,$$

часто оказывается возможным указать примерные (достаточно небольшие) области начальных и конечных условий $\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_K$. В этом случае можно предложить следующий метод приближенного решения задачи. Выберем некоторые наиболее ожидаемые или желаемые точки $\bar{\mathbf{x}}(t_0) \in \mathbf{X}_0$ и $\bar{\mathbf{x}}(t_K) \in \mathbf{X}_K$. Обозначим через $\bar{\mathbf{u}}(t)$ оптимальную программу управления, обеспечивающую перевод из $\bar{\mathbf{x}}(t_0)$ в $\bar{\mathbf{x}}(t_K)$. Траекторию $\bar{\mathbf{x}}(t)$, соответствующую этой программе, назовем невозмущенным, программным движением. Она рассчитывается согласно алгоритму принципа максимума. Отклонения начального вектора $\mathbf{x}_0$ от $\bar{\mathbf{x}}(t_0)$, а также неучтенные факторы приведут к отклонению траектории движения. Для математического описания возмущенного движения воспользуемся методом линеаризации. Представим $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \Delta \mathbf{u}$, $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} + \Delta \mathbf{x}$. Тогда получим линеаризованные уравнения движения в отклонениях

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \Delta \mathbf{x} + \mathbf{B} \Delta \mathbf{u}, \quad \bar{\mathbf{u}} + \Delta \mathbf{u} \in \mathbf{U}, \quad (4.58)$$

где $\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}, t)$, $\mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}, t)$, т.е. матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ зависят от программного управления $\bar{\mathbf{u}}(t)$ и программной траектории $\bar{\mathbf{x}}(t)$.

Желая приблизить действительное (возмущенное) движение к программному (невозмущенному), поставим задачу выбора такого закона управления $\Delta \mathbf{u}(\Delta \mathbf{x}, t)$, который позволял бы минимизировать некоторую меру возмущенного движения. В качестве такой меры можно принять, например, квадратичный критерий оптимальности

$$\Delta I = \int_{t_0}^{t_K} \Delta \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \Delta \mathbf{x} dt + \Delta \mathbf{x}^T(t_K) \mathbf{A} \Delta \mathbf{x}(t_K), \quad (4.59)$$

где матрицы $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{A}$ выбираются, исходя из анализа конкретной задачи.

При наличии ограничений, накладываемых на вектор управления, задача может оказаться сложной. Можно ее упростить, заменив критерий оптимальности

$$\Delta I = \int_{t_0}^{t_K} (\Delta \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \Delta \mathbf{x} + \Delta \mathbf{u}^T \mathbf{W} \Delta \mathbf{u}) dt + \Delta \mathbf{x}^T(t_K) \mathbf{A} \Delta \mathbf{x}(t_K), \quad (4.60)$$

в котором $\mathbf{W}$ подбирается так, чтобы удовлетворялось ограничение $\bar{\mathbf{u}} + \Delta \mathbf{u} \in \mathbf{U}$. Решение задачи для линейной системы с таким функционалом было получено ранее и имеет вид $\Delta \mathbf{u} = -\mathbf{L} \Delta \mathbf{x}$, причем, матрица $\mathbf{L}$ зависит от $\bar{\mathbf{u}}(t)$, $\bar{\mathbf{x}}(t)$. Таким образом, приближенное решение задачи синтеза для исходной системы может быть представлено в виде

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{u}}(t) - \mathbf{L}(t)(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}(t)). \quad (4.61)$$

Оптимальная программа управления $\bar{\mathbf{u}}(t)$ и соответствующая траектория $\bar{\mathbf{x}}(t)$ могут быть получены методами, описанными выше.

5. ПРИНЦИП РАСШИРЕНИЯ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ

5.1. Необходимые и достаточные условия оптимальности

Основы современной теории оптимального управления были заложены в 50-х годах прошлого столетия. Важнейшими результатами теоретических поисков явилась формулировка принципа максимума Л.С. Понтрягина [6] и принципа оптимальности Р. Беллмана [7]. Однако в настоящее время более или менее регулярные алгоритмы отыскания оптимального управления существуют лишь для линейных систем с критерием оптимальности (функционалом) специального вида (например, так называемым, квадратичным). Ряд скрытых особенностей практических задач (в большинстве своем нелинейных), в том числе наличие нескольких решений, удовлетворяющих необходимым условиям оптимальности, вызывают значительные трудности и требуют разработки специальных подходов к решению.

С этой точки зрения определенные перспективы открывает теория, основанная на принципе расширения – сужения класса допустимых состояний и управлений. Достаточные условия оптимальности, сформулированные В.Ф. Кротовым [4], позволяют построить алгоритмы поиска, улучшения и оценки приближенно-оптимальных управлений. Изложим основные положения этой теории.

Задача оптимизации в самых общих терминах формулируется следующим образом. На некотором множестве D с элементами $y = (x, u)$, называемом множеством (классом) допустимых состояний и управлений, задан функционал I . Требуется найти элемент $\bar{y} \in D$, на котором достигается наименьшее значение I :

$$I(\bar{y}) = d = \min_D I.$$

Как правило, во многих задачах оптимизации множество допустимых D задается посредством некоторых условий, выделяющих его из более широкого множества E . Задачу оптимизации в этом случае можно рассматривать на указанном более широком множестве при некоторых дополнительных условиях.

Один из путей получения необходимых и достаточных условий оптимума состоит в применении принципа расширения – сужения класса допустимых D . Путем сужения класса D получены известные необходимые условия минимума функций и функционалов и принцип максимума Понтрягина. Принцип расширения состоит в том, что функционал доопределяется на более широком множестве E , но так, что наименьшее значение он принимает в D .

Принцип расширения – сужения был применен В.Ф. Кротовым для получения общих достаточных условий оптимальности: задания такого множества E , включающего y , чтобы задача о минимуме на нем имела простое, но не тривиальное решение, и доопределения функционала I на множестве E .

В задачах оптимального управления элементами класса допустимых D являются управляемые процессы, точнее их математические модели. Рассмотрим систему, которая в каждый момент времени характеризуется вектором состояния $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, являющимся элементом некоторого множества X , называемого фазовым или пространством состояний. Изменение состояния x во времени называется процессом $x(t)$. Управляемые процессы принято описывать путем указания закономерности перехода от предыдущего состояния к последующему в зависимости от управляющего воздействия, которое характеризуется вектором управлений $u = (u_1, u_2, \dots, u_r)^T$, являющимся элементом некоторого множества U (множества управлений).

Математическая модель управляемого процесса представляет собой, как правило, уравнение, связывающее последующее состояние с

предыдущим состоянием и управлением.

Следует подчеркнуть, однако, формальный смысл понятий состояния и управления, связанный с принятой формой математической модели, которая для реального управляемого объекта может быть неединственной. Например, в задачах оптимизации космических траекторий в качестве состояния принято рассматривать положение и скорость центра масс космического аппарата, а в качестве управления – направление вектора тяги. Как уже отмечалось, изменение направления тяги космического аппарата часто достигается путем его поворота с помощью устройств, создающих моменты относительно центра масс, что заставляет учитывать и динамику вращательного движения. Это несоответствие отражает тот факт, что математическая модель зависит от тех задач, которые должны решаться с ее помощью.

Пусть на некотором множестве $\mathbf{D}$ задан функционал $I(\mathbf{y})$. Введем в рассмотрение множество $\mathbf{E}$, включающее $\mathbf{D}$, определим на нем функционал L , так, чтобы $L(\mathbf{y}) \equiv I(\mathbf{y})$ при $\mathbf{y} \in \mathbf{D}$.

Лемма. Если элемент $\bar{\mathbf{y}} \in \mathbf{D}$ удовлетворяет условию

$$L(\bar{\mathbf{y}}) = \min_{\mathbf{y} \in \mathbf{E}} L(\mathbf{y}), \quad (5.1)$$

то имеет место соотношение

$$I(\bar{\mathbf{y}}) = \min_{\mathbf{y} \in \mathbf{D}} I(\mathbf{y}). \quad (5.2)$$

Доказательство леммы проводится методом от противного. Предположим, что имеется некоторый элемент $\mathbf{y}' \in \mathbf{D}$, что $I(\mathbf{y}') < I(\bar{\mathbf{y}})$. Но тогда $L(\mathbf{y}') < L(\bar{\mathbf{y}})$, так как $L(\mathbf{y}) \equiv I(\mathbf{y})$ при $\mathbf{y} \in \mathbf{D}$, что противоречит условию.

Рассмотрим постановку задачи оптимального управления для случая непрерывного процесса с полной информацией.

На отрезке $[t_0, t_k]$ задается множество $\mathbf{D}$ как множество пар функций $(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$, удовлетворяющих условиям

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}),$$

$$t \in [t_0, t_k], \mathbf{x} \in \mathbf{X}, \mathbf{u} \in \mathbf{U}, (\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \in \mathbf{V}(t), \quad (5.3)$$

$$\mathbf{x}(t_0) \in \mathbf{X}_0, \mathbf{x}(t_k) \in \mathbf{X}_k.$$

Минимизируемый функционал зададим в виде

$$I = \int_{t_0}^{t_k} f_0(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) dt + F(\mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t_k)), \quad (5.4)$$

причем функции $\mathbf{u}(t)$ считаются кусочно-непрерывными, $\mathbf{x}(t)$ – кусочно-дифференцируемыми.

Построим функции

$$G(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_k) = F(\cdot) + \varphi(t_k, \mathbf{x}_k) - \varphi(t_0, \mathbf{x}_0); \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} R &= \varphi_{\mathbf{x}}^T f(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) + \varphi_t - f_0(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \cdot f_i(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) + \frac{\partial \varphi}{\partial t} - f_0(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}), \end{aligned}$$

где $\varphi(t, \mathbf{x})$ – непрерывная и дифференцируемая функция; а ее частные производные непрерывны для всех $(t, \mathbf{x})$, кроме конечного числа точек.

Основная теорема (В.Ф. Кротов). Для того чтобы функционал (5.4) достигал абсолютного минимума на $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}) \in \mathbf{D}$, достаточно существования такой функции $\varphi(t, \mathbf{x})$, чтобы

$$1) R(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}, t) = \max_{(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \in \mathbf{V}(t)} R(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mu(t), \quad (5.6)$$

$$2) G(\bar{\mathbf{x}}(t_0), \bar{\mathbf{x}}(t_k)) = \min_{\substack{\mathbf{x}(t_0) \in \mathbf{V}_x(t_0) \\ \mathbf{x}(t_k) \in \mathbf{V}_x(t_k)}} G(\mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t_k)). \quad (5.7)$$

Здесь $\mathbf{V}_x$ – проекция множества $\mathbf{V}(t)$ на пространство $\mathbf{X}$; $\mathbf{V}_u(t, \mathbf{x})$ – сечение $\mathbf{V}(t)$ при каждом фиксированном $\mathbf{x}$. Предполагается, что $\mu(t)$ – кусочно-непрерывная функция времени.

Для доказательства теоремы положим, что расширенное множество $\mathbf{E}$ включает пары $(\mathbf{x}, \mathbf{u})$, не связанные дифференциальным уравнением (5.3) и

допускающие разрывы функции $\mathbf{x}(t)$ в конечном числе точек. Определим на $\mathbf{E}$ функционал

$$L = G(\mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t_K)) - \int_{t_0}^{t_K} R(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) dt. \quad (5.8)$$

Нетрудно показать, что на исходном множестве $\mathbf{D}$ функционалы L и I совпадают. Действительно, при $(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \in \mathbf{D}$

$$R(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) = -f_0(\cdot) + \varphi_t. \quad (5.9)$$

Подставляя это выражение в L и учитывая непрерывность $\mathbf{x} \in \mathbf{D}$, получим $L \equiv I$.

Так как на множестве $\mathbf{E}$ допускаются разрывы функции $\mathbf{x}(t)$, то слагаемые в L можно рассматривать независимо друг от друга. Поэтому

$$\min_{(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \in \mathbf{E}} L = \min_{\substack{\mathbf{x}(t_0) \in V_{\mathbf{x}}(t_0) \\ \mathbf{x}(t_K) \in V_{\mathbf{x}}(t_K)}} G(\mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t_K)) - \max_{(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \in V(t)} \int_{t_0}^{t_K} R(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) dt. \quad (5.10)$$

Если теперь предположить, что $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}) \in \mathbf{D}$ и выполняются условия (5.6, 5.7), то согласно (5.10) L достигает абсолютного минимума на $\mathbf{E}$ и одновременно при этом достигается $\min_{\mathbf{D}} I$.

Теорема сводит задачу о минимуме функционала к более простой задаче об экстремуме функций многих переменных. Проблема сводится теперь к следующему: так задать неопределенный элемент — функцию $\varphi(t, \mathbf{x})$ (синтезирующую функцию или функцию Кротова), которая доопределяет функционал I на $\mathbf{E}$ так, чтобы минимум I принадлежал $\mathbf{D}$. Оказывается, задать функцию φ можно различными способами, и это дает возможность приспосабливаться к специфике задачи. Один из способов (формализмов) приводит к процедуре принципа Понтрягина, другой — к процедуре динамического программирования, а третий (метод кратных максимумов) пригоден для решения так называемых вырожденных задач [4].

5.2. Способы задания синтезирующей функции

Пусть проекция множества $V(t)$ на пространство $\mathbf{X}$ — множество $V_{\mathbf{x}}(t)$ есть открытая область при всех $t \in (t_0, t_K)$, а при $t=t_0$ и $t=t_K$ — фиксированные точки: $\mathbf{x}(t_0)$, $\mathbf{x}(t_K)$, а терминальный член в функционале (5.4) отсутствует. Далее, пусть множество $V_{\mathbf{u}}$ не зависит от $\mathbf{x}$. Потребуем, чтобы $\varphi(t, \mathbf{x})$ была дважды дифференцируема вдоль оптимальной траектории. Тогда необходимое условие (или условие 1-го порядка) максимума функции $R(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$ по $\mathbf{x}$ будет иметь вид

$$\left. \frac{\partial R}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\bar{\mathbf{x}}} = \left(-\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mathbf{x}^2} \mathbf{f} + \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial \mathbf{x}} \right)_{\bar{\mathbf{x}}} = 0. \quad (5.11)$$

Введем функцию $\psi(t) = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\bar{\mathbf{x}}}$, тогда вдоль минимали $\bar{\mathbf{x}}(t)$

$$\dot{\psi}(t) = \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mathbf{x} \partial t} \right)_{\bar{\mathbf{x}}} + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mathbf{x}^2} \mathbf{f} \right)_{\bar{\mathbf{x}}}.$$

Тогда из (5.7) легко получить

$$\dot{\psi}(t) = \left(\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{x}} \right)_{\bar{\mathbf{x}}} - \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right)_{\bar{\mathbf{x}}}^T \psi = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial \mathbf{x}}, \quad (5.12)$$

где $\bar{H}$ — функция Гамильтона:

$$\begin{aligned} \bar{H}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t, \psi) &= H\left(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t, \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\bar{\mathbf{x}}}\right) = \\ &= -f_0(t, \bar{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) + \psi^T \mathbf{f}(t, \bar{\mathbf{x}}, \mathbf{u}). \end{aligned} \quad (5.13)$$

Условие максимума $R(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$ по управлению может быть теперь представлено в виде

$$\bar{H}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}, t, \psi) = \max_{\mathbf{u} \in V_{\mathbf{u}}} H(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{u}, t, \psi). \quad (5.14)$$

Система уравнений (5.12) носит название сопряженной системы уравнений и может быть решена совместно с исходной системой (5.3).

Обычно эти уравнения представляют в канонической форме

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{\mathbf{p}}}; \quad \dot{\bar{\mathbf{p}}} = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{\mathbf{x}}}. \quad (5.15)$$

Таким образом, *необходимые* условия максимума функции H совпадают с известными *условиями оптимальности принципа максимума Понтрягина* [6] (формализм Лагранжа-Понтрягина). Если существует такая функция $\varphi(t, \mathbf{x})$, что на решении $\bar{\mathbf{x}}(t), \bar{\mathbf{u}}(t)$ удовлетворяются не только необходимые, но и достаточные условия максимума $R(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$ при каждом $t \in (t_0, t_K)$, то в силу теоремы Кротова решение $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}})$ задает искомую минималь, т.е. обеспечивает абсолютный минимум функционала I на множестве $\mathbf{D}$. В частности, (5.11), (5.14) являются необходимыми и достаточными условиями оптимальности линейных систем с линейным и квадратичным (выпуклым) функционалом.

Опишем теперь способ задания функции Кротова, приводящий к *процедуре динамического программирования*. Этот способ принято называть формализмом Гамильтона – Якоби – Беллмана.

Рассмотрим непрерывный процесс (5.3) с функционалом (5.4). Пусть $\mathbf{X}$ – открытое множество при всех $t \in (t_0, t_K)$, а при $t = t_0$ совпадает с точкой $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, а функция F в функционале I не зависит от $\mathbf{x}(t_0)$. Выберем $\varphi(t, \mathbf{x})$ так, чтобы $\max_{\mathbf{u} \in V_{\mathbf{u}}(t, \mathbf{x})} R(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$ не зависел от $\mathbf{x}$, т.е. имело место соотношение

$$\max_{\mathbf{u} \in V_{\mathbf{u}}(t, \mathbf{x})} \left[-f_0(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right] = C(t). \quad (5.16)$$

Тогда будет автоматически выполнено условие (5.6). Для выполнения условия (5.7) потребуем, чтобы G не зависела от $\mathbf{x}(t_K)$:

$$F(\mathbf{x}(t_K)) + \varphi(t_K, \mathbf{x}(t_K)) = C_1 = \text{const}. \quad (5.17)$$

Указанный способ задания функции $\varphi(t, \mathbf{x})$ приводит к необходимости решения уравнения (5.16) с граничным условием (5.17).

Если положить $C(t) \equiv 0$, $C_1 = 0$ и ввести обозначение $S(t, \mathbf{x}) = -\varphi(t, \mathbf{x})$, то уравнение (5.16) принимает классический вид уравнения Беллмана для непрерывных систем

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = \min_{\mathbf{u} \in V_{\mathbf{u}}(t, \mathbf{x})} \left[f_0(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) + \left(\frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \right] \quad (5.18)$$

с граничным условием

$$S(t_K, \mathbf{x}) = F(\mathbf{x}(t_K)). \quad (5.19)$$

Как следует из (5.18), (5.19), решение уравнения (5.16) $\bar{\varphi}(t, \mathbf{x})$ можно интерпретировать как функцию «будущих потерь»

$$S(t, \mathbf{x}) = \min_{\mathbf{D}} I[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)],$$

взятую с обратным знаком.

5.3. Оценки приближенно-оптимальных решений

Рассмотрим величины m , r и l , которые для непрерывных систем определяются соотношениями

$$\begin{aligned} m &= \min_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_K)} [F(\cdot) + \varphi(t_K, \mathbf{x}(t_K)) - \varphi(t_0, \mathbf{x}(t_0))], \\ r &= \int_{t_0}^{t_K} \mu(t) dt, \\ l &= \min_E L = m - r. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Очевидно, l зависит от $\varphi(t, \mathbf{x})$. Так как $l(\varphi)$ – нижняя граница l , то $d = \min_{\mathbf{D}} I \geq l(\varphi)$. При удачном выборе $\varphi(t, \mathbf{x})$ $l(\varphi) = d$. Таким образом, в задачах, где функция φ , удовлетворяющая условиям основной теоремы (5.6, 5.7), существует, она соответствует наименьшему значению функционала $l(\varphi)$. Очевидно разность

$$\Delta(y, \varphi) = I(\tilde{x}, \tilde{u}) - I(\varphi) \geq I(y) - \min_p I \quad (5.21)$$

есть верхняя оценка приближенно-оптимального решения

$\tilde{y} = (\tilde{x}, \tilde{u}) \in D$. Теперь можно искать последовательность приближенных

решений (пар) $\{\varphi_s, \tilde{y}_s\}$ такую, что $\tilde{y}_s \in D$, а разность

$$\Delta_s(\tilde{y}_s, \varphi_s) = I(\tilde{y}_s) - I(\varphi_s) = L(\tilde{y}_s) - I(\varphi_s) \rightarrow 0. \quad (5.22)$$

По достижении достаточно малого значения Δ_s процесс поиска можно прекратить, поскольку поиск идеально точного (абсолютно оптимального) решения зачастую не оправдан практической постановкой задачи, связанной с неизбежным упрощением модели.

При практическом решении задач оптимального управления на основе принципа расширения и достаточных условий оптимальности, помимо выбора функции φ основная проблема заключается в отыскании $\mu(t) = \max_{(x,u) \in V(t)} R(t, x, u)$ и $m = \min_{x(t_0), x(t_K)} G(x(t_0), x(t_K))$, т.е. в отыскании экстремума функции многих переменных. Если управления в данной задаче удовлетворяют априорно заданным условиям принадлежности множеству допустимых U , то для вектора состояния целесообразно построить так называемую область достижимости, т.е. область, содержащую только те функции $x(t)$, которые удовлетворяют условиям $\dot{x} = f(t, x, u)$, $(x, u) \in D$. Получающееся при этом множество фактически достижимых состояний $V_x^D(t)$ уже, или по крайней мере не шире, чем априорно заданное множество $V_x(t)$.

6. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ

6.1. Общие понятия о применении численных методов

В этом разделе рассматриваются некоторые методы параметрической оптимизации – методы математического программирования (см. раздел I). Большинство задач параметрической оптимизации решаются численными методами.

Задача математического программирования формулируется следующим образом. Имеется функция $F(z)$, определенная на множестве Z . Требуется минимизировать $F(z)$ при условиях

$$g(z) \leq b, \quad z = (z_1, z_2, \dots, z_n)^T, \quad g = (g_1, g_2, \dots, g_m).$$

Обычно $n > m$. Метод решения этой задачи зависит от конкретного вида функции $F(z)$ и ограничений $g(z)$. В отдельный класс выделяются задачи линейного программирования: $F(z) = Az + B$, $g(z) = Cz + D$, где A , C , D – матрицы. Методы решения задач линейного программирования хорошо разработаны и основаны на симплекс-методе [10].

Задачи нелинейного программирования возникают, если функция $F(z)$ и ограничения $g(z)$ связаны с вектором z нелинейными зависимостями, причем отдельные связи могут быть линейными.

Задачи нелинейного программирования классифицируются по характеру целевой функции и ограничений, по видам ограничений (без ограничений, с ограничениями в виде равенств, с ограничениями в виде неравенств, со смешанными ограничениями), а также по характеру математической модели, которая может быть непрерывной или дискретной.

Методы решения задач нелинейного программирования разделяются на методы, не использующие производных целевой функции (методы нулевого порядка) и методы, использующие значения производных

целевой функции и ограничений, вычисленные аналитически или численно, методы первого, второго и выше порядков.

В задачах оптимизации управляемых систем приходится рассматривать следующие вопросы.

1. Выбор методов минимизации функций многих переменных, к которым сводятся, например, параметрические или проектно-баллистические расчеты.

2. Выбор метода решения краевой задачи, получающейся в результате использования методов поиска оптимального управления.

3. Выбор прямых методов решения задач оптимального управления, когда выбирается начальное приближение опорного управления определенной структуры. Численный алгоритм процесса поиска должен обеспечить выполнение граничных условий и ограничений, а также улучшение управления в смысле улучшения показателя качества (функционала задачи).

С инженерной точки зрения, задача считается решенной в общем виде, если указан эффективный численный метод (алгоритм), позволяющий вычислить необходимые параметры с необходимой точностью. В то же время сохраняют свое значение и аналитические методы, позволяющие проводить качественный анализ решения задачи, подтверждающий правильность полученного численного решения.

Выбор конкретного численного метода определяется следующими соображениями.

1. Требуемой точностью результата.
2. Устойчивостью работы метода (сходимостью).
3. Общим объемом вычислений, зависящим от сложности вычислительной процедуры.
4. Сложностью программирования алгоритма и характеристиками конкретной вычислительной техники.

6.2. Методы одномерного поиска минимума

Пусть требуется найти минимум функции $F(z)$ на отрезке $z \in [z_0, z_N]$. Будем считать, что $f(z)$ - унимодальная функция, т.е. имеет на рассматриваемом отрезке только один экстремум. Строго

установить унимодальность можно только для аналитической функции.

Метод дихотомии (деления отрезка пополам)

Заключается в делении отрезка $[z_0, z_N]$ пополам, вычислении значений функции $F(z)$ справа и слева от середины отрезка в ее непосредственной близости и отбрасывании половины, не содержащей минимума. Затем эта схема вычислений повторяется для оставшейся половины отрезка. Этот метод не самый экономичный с точки зрения количества вычислений целевой функции, поскольку две соседние пары экспериментов независимы. Для отбрасывания половины отрезка требуется два вычисления $F(z)$.

Метод «золотого сечения»

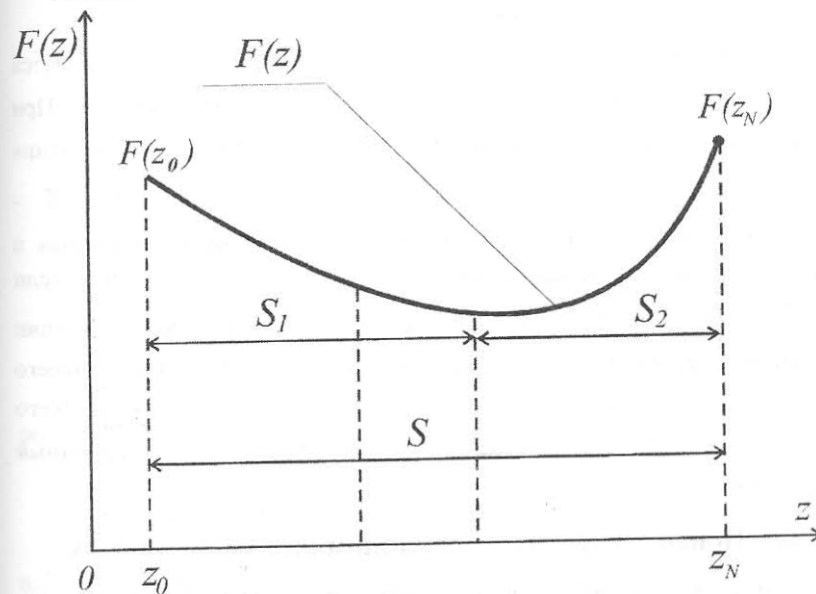


Рис. 6.1. Метод «золотого сечения»

В соответствии с этим методом отрезок $[z_0, z_N]$ разбивается на две неравные части (рис. 6.1) таким образом, чтобы выполнялось соотношение $s/s_1 = s_1/(s - s_1)$. Из этого соотношения следует уравнение

$s^2 - s_1 s - s_1^2 = 0$, в результате решения которого получается, что $s \cong 1,618s_1$, или $s_1 \cong 0,62s$, $s_2 = s - s_1 \cong 0,38s$.

Сначала разбивается отрезок s , а затем аналогично полученный отрезок s_1 , после этого вычисляются значения целевой функции на концах отрезка и в точках разбиения. В результате сравнения этих значений отбрасывается участок, не содержащий точки минимума. На следующем шаге функция $F(z)$ вычисляется только один раз - в точке разбиения большего из оставшихся отрезков, и снова отбрасывается «лишний» участок. Этот метод характеризуется минимальным числом вычислений целевой функции для достижения заданной точности.

Метод локализации экстремума

Суть метода состоит в том, что отрезок $[z_0, z_N]$ постепенно сужается путем отбрасывания тех его частей, которые не содержат минимум. При этом последовательно, начиная с точки z_0 , вычисляются значения функции F с шагом по z , равным $\Delta z = (z_0 - z_N)/N$, где N - заданное целое число. Вычисленные значения функции сравниваются в соседних точках, переход к следующей точке осуществляется, если $F(z^K) > F(z^{K+1})$. Для получения заданной точности после локализации экстремума эта схема вычислений может быть повторена для меньшего интервала. При достаточно большом N и обязательном просмотре всего отрезка $[z_0, z_N]$ этот метод позволяет локализовать абсолютный экстремум.

6.3. Поиск экстремума функции многих переменных

Определение. Функция $F(\mathbf{z})$ достигает в точке $\bar{\mathbf{z}}$ абсолютного минимума, если $F(\bar{\mathbf{z}}) \leq F(\mathbf{z})$ для всех $\mathbf{z} \in \mathbf{Z}$ (рис. 6.2).

Функция $F(\mathbf{z})$ достигает в некоторой δ -окрестности точки $\bar{\mathbf{z}}$ относительного (локального) минимума, если для $\|\mathbf{z} - \bar{\mathbf{z}}\| < \delta$ выполняется

условие $F(\bar{\mathbf{z}}) \leq F(\mathbf{z})$ (см. рис.6.2).

Локальный минимум называется сильным, если $F(\bar{\mathbf{z}}) < F(\mathbf{z})$.

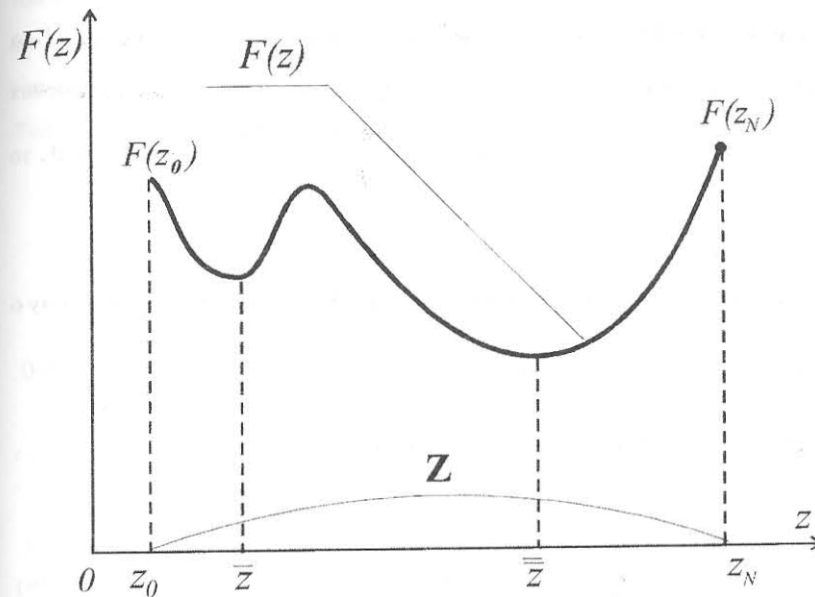


Рис. 6.2. Абсолютный минимум функции

Необходимое условие относительного экстремума

Если $\bar{\mathbf{z}}$ есть точка относительного минимума функции $F(\mathbf{z})$ векторного аргумента $\mathbf{z}$, то в этой точке выполняются условия

$$\left. \frac{\partial F}{\partial z_i} \right|_{\mathbf{z}=\bar{\mathbf{z}}} = 0 \quad \text{для } i = 1, 2, \dots, n$$

$$\text{или } \text{grad}_{\mathbf{z}} F(\bar{\mathbf{z}}) = 0, \quad \nabla F(\bar{\mathbf{z}}). \quad (6.1)$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{z}$ - вектор, т.е. $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n)^T$. Будем считать, что $F(\mathbf{z})$ имеет непрерывные частные производные первого порядка по всем координатам z_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Пусть $F(\mathbf{z})$ в точке $\bar{\mathbf{z}}$

имеет относительный минимум, тогда существует $\delta > 0$, такое, что для $\|\mathbf{z} - \bar{\mathbf{z}}\| \leq \delta$ выполняется условие $F(\mathbf{z}) \geq F(\bar{\mathbf{z}})$. Возьмем близкую к $\bar{\mathbf{z}}$ точку $\mathbf{z} = \bar{\mathbf{z}} + h\mathbf{e}_i$, где $\mathbf{e}_i$ - единичный вектор, направленный по i -ой компоненте вектора $\mathbf{z}$, h - параметр, регулирующий величину смещения ($|h| < \delta$). Тогда, если $h > 0$, то $\frac{F(\bar{\mathbf{z}} + h\mathbf{e}_i) - F(\bar{\mathbf{z}})}{h} \geq 0$, если $h < 0$, то $\frac{F(\bar{\mathbf{z}} + h\mathbf{e}_i) - F(\bar{\mathbf{z}})}{h} \leq 0$.

Переходя к пределу этих отношений при $h \rightarrow 0$ и используя теорему о сохранении неравенств в пределах, получим $\left. \frac{\partial F}{\partial z_i} \right|_{\mathbf{z}=\bar{\mathbf{z}}} \geq 0$ и $\left. \frac{\partial F}{\partial z_i} \right|_{\mathbf{z}=\bar{\mathbf{z}}} \leq 0$.

Устраняя двойственность соотношений, получим

$$\left. \frac{\partial F}{\partial z_i} \right|_{\mathbf{z}=\bar{\mathbf{z}}} = 0, \text{ для } i = 1, 2, \dots, n.$$

Решение системы уравнений, соответствующей необходимому условию относительного минимума, называется стационарной точкой функции $F(\mathbf{z})$, в этой точке необязательно достигается минимум или максимум функции $F(\mathbf{z})$. Задача отыскания стационарных точек сводится к решению системы n нелинейных уравнений.

Достаточное условие относительного экстремума

Если $\left. \frac{\partial F}{\partial z_i} \right|_{\mathbf{z}=\bar{\mathbf{z}}} = 0$ и матрица вторых производных

$$\left[\frac{\partial^2 F}{\partial z_i \partial z_j} \right]_{\mathbf{z}=\bar{\mathbf{z}}}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

положительно определена, то функция $F(\mathbf{z})$ в точке $\bar{\mathbf{z}}$ достигает относительного минимума.

Соответственно, достаточное условие относительного максимума функции заключается в отрицательной определенности матрицы вторых производных.

Доказательство. Пусть $\bar{\mathbf{z}}$ - стационарная точка функции $F(\mathbf{z})$, тогда в некоторой ее окрестности $\|\mathbf{z} - \bar{\mathbf{z}}\| \leq \delta$ можно разложить $F(\mathbf{z})$ в ряд Тейлора. Ограничиваясь первыми тремя членами, получим

$$\begin{aligned} F(\mathbf{z}) &= F(\bar{\mathbf{z}}) + \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial F}{\partial z_i} \right|_{\mathbf{z}=\bar{\mathbf{z}}} (z_i - \bar{z}_i) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial^2 F}{\partial z_i \partial z_j} \right|_{\mathbf{z}=\bar{\mathbf{z}}} (z_i - \bar{z}_i)(z_j - \bar{z}_j) + \dots \cong \\ &\cong F(\bar{\mathbf{z}}) + \Delta \mathbf{z}^T \nabla F(\bar{\mathbf{z}}) + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{z}^T \nabla^2 F(\bar{\mathbf{z}}) \Delta \mathbf{z}, \end{aligned} \quad (6.2)$$

где $\Delta \mathbf{z} = (\mathbf{z} - \bar{\mathbf{z}})$, $\nabla^2 F(\bar{\mathbf{z}})$ - матрица вторых производных, называемая также гессианом.

Предположим, что в точке стационарности достигается минимум, тогда $F(\bar{\mathbf{z}}) \leq F(\mathbf{z})$, и поскольку второй член в разложении (6.2) обращается в нуль, то матрица вторых производных $\nabla^2 F(\bar{\mathbf{z}})$ должна быть положительно определена.

6.4. Итерационная схема поиска экстремума функции многих переменных

Итерационные или многошаговые схемы поиска экстремума заключаются в построении последовательности решений $\{\mathbf{z}^0, \mathbf{z}^1, \dots, \mathbf{z}^K, \mathbf{z}^{K+1}, \dots\}$, где K - номер шага (итерации), общее число которых заранее не определено, $\mathbf{z}^0$ - начальное приближение. Эта последовательность называется минимизирующей, если $F(\mathbf{z}^{K+1}) \leq F(\mathbf{z}^K)$ для любого $K = 0, 1, \dots, N$. Переход от вектора $\mathbf{z}^K$ к $\mathbf{z}^{K+1}$ осуществляется по схеме

$$\mathbf{z}^{K+1} = \mathbf{z}^K + h^K \mathbf{e}^K, \quad (6.3)$$

где $\mathbf{e}^K$ - единичный вектор выбранного направления, h^K - величина шага вдоль выбранного направления на каждой итерации.

Процесс заканчивается, если выполняются условия

$$\|z^{K+1} - z^K\| < \delta \text{ и } F(z^{K+1}) - F(z^K) < \varepsilon,$$

где ε и δ - малые положительные величины, то есть когда соседние решения перестают отличаться сколько-нибудь значительно, а целевая функция перестает уменьшаться.

6.5. Метод Ньютона и его модификации

Пусть следствием условия $\text{grad}_z F(\bar{z}) = 0$ являются уравнения $q(z) = 0$, $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)^T$, $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)^T$. Пусть известно некоторое приближение к решению этой системы z^K . Вычислим следующее приближение z^{K+1} , считая эти точки близкими. Разложим функции $q_i(z)$ в ряд Тейлора в окрестности точки z^K и ограничимся только линейными членами

$$q_i(z^{K+1}) = q_i(z^K) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial q_i}{\partial z_j} \bigg|_{z=z^K} (z_j^{K+1} - z_j^K) = 0 \quad (6.4)$$

или в матричном виде

$$q(z^{K+1}) = q(z^K) + D[q(z^K)](z^{K+1} - z^K) = 0. \quad (6.5)$$

Если матрица частных производных $D[q(z^K)]$ неособенная (для нее существует обратная матрица), получим искомое рекуррентное соотношение для очередного приближения к решению z^{K+1} :

$$z^{K+1} = z^K + \Delta z^K = z^K - (D[q(z^K)])^{-1} \cdot q(z^K). \quad (6.6)$$

Метод сходится, если норма функции $q(z)$ уменьшается

$$\|q(z^{K+1})\| < \|q(z^K)\|.$$

На рис. 6.3 изображен процесс сходимости метода Ньютона в одномерном случае. Для одномерных задач метод Ньютона называется методом касательных. В этом случае следующее приближение z^{K+1} получают на пересечении касательной к кривой $q(z)$, построенной в точке z^K (см. рис. 6.3).

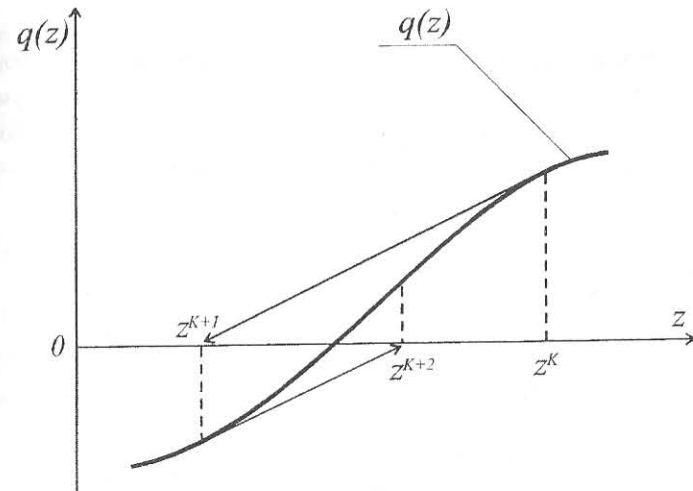


Рис. 6.3. Процесс сходимости метода Ньютона в одномерном случае

При определенных условиях (вид функции $F(z)$, выбор начального приближения) метод может расходиться (рис. 6.4).

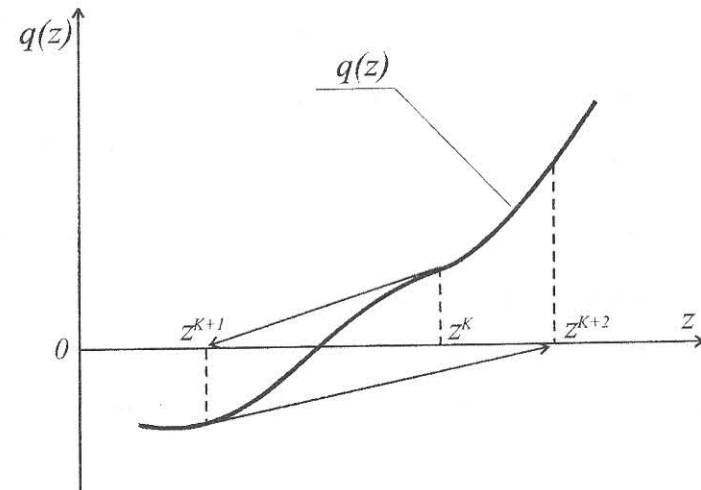


Рис. 6.4. Процесс расходения метода Ньютона

Модификация метода Ньютона (рис. 6.5) заключается в выборе на каждой итерации наилучшего в некотором смысле приращения аргумента. В некоторых модификациях шаг уменьшается так, чтобы итерационный процесс сходиллся, в других - выбирается оптимальным.

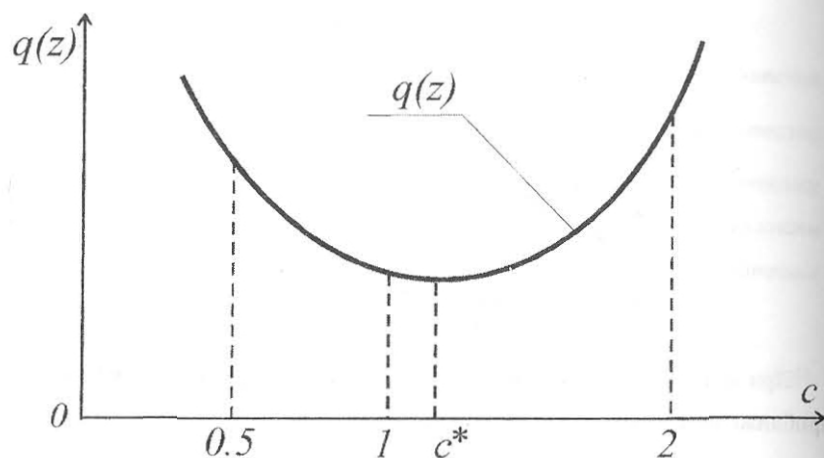


Рис. 6.5. Аппроксимация функции $q(c)$ и выбор оптимального шага

Для этого, например, на каждой итерации вычисляются три значения функции $q(z)$ для трех точек z^{K+1} : $z^{K+1} = z^K + \frac{1}{c_l} \Delta z^K$ ($l = 1, 2, 3$) с различными значениями $c_1 = 1$, $c_2 = 2$, $c_3 = 0,5$. Зависимость $\|q(c)\|$ аппроксимируется параболой, находится значение c^* , обеспечивающее наименьшее значение $\|q\|$, которое используется при вычислении окончательного значения z^{K+1} .

6.6. Градиентные методы минимизации функции многих переменных без учета ограничений

Градиент функции многих переменных $F(z)$ - вектор, компонентами которого являются частные производные этой функции по координатам

$$\text{grad}_z[F(z)] = \left(\frac{\partial F}{\partial z_1}, \frac{\partial F}{\partial z_2}, \dots, \frac{\partial F}{\partial z_n} \right)^T.$$

В градиентных методах предполагается пошаговое движение в направлении антиградиента функции $F(z)$. Координаты z на $k+1$ -ом шаге вычисляются по формуле

$$z^{K+1} = z^K - h^K \text{grad}_z[F(z)], \quad (6.7)$$

где h^K - величина шага.

Эффективность поиска минимума в соответствии с этой стратегией зависит от выбора начального приближения z и правильного выбора величины шага h .

Для поиска минимума с заданной точностью применяются различные схемы выбора величины текущего шага h . Рассмотрим основные разновидности градиентных методов.

1. Градиентный спуск

Из соотношения

$$z^{K+1} = z^K - h^K \text{grad}_z[F(z)]$$

следует, что

$$\left(\frac{z^{K+1} - z^K}{h^K} \right) = \text{grad}_z[F(z)]. \text{ При } h \rightarrow 0 \text{ получается} \\ dz/dh = \text{grad}(F(z)). \quad (6.8)$$

Последнее уравнение описывает градиентный метод в чистом виде, считается, что текущий шаг бесконечно мал и в каждой точке направление движения совпадает с направлением антиградиента (рис. 6.6). Практическая реализация метода градиентного спуска требует очень большого числа шагов.

2. Простой градиентный метод с постоянным шагом

Для этого метода характерно, что

$$h^{K+1} = h^K = \text{const.}$$

Для достижения заданной точности в конце поиска шаг должен быть с самого начала небольшим, что ведет к большим вычислительным затратам, кроме того, этот метод неэффективен для функций, имеющих «овражную» структуру.

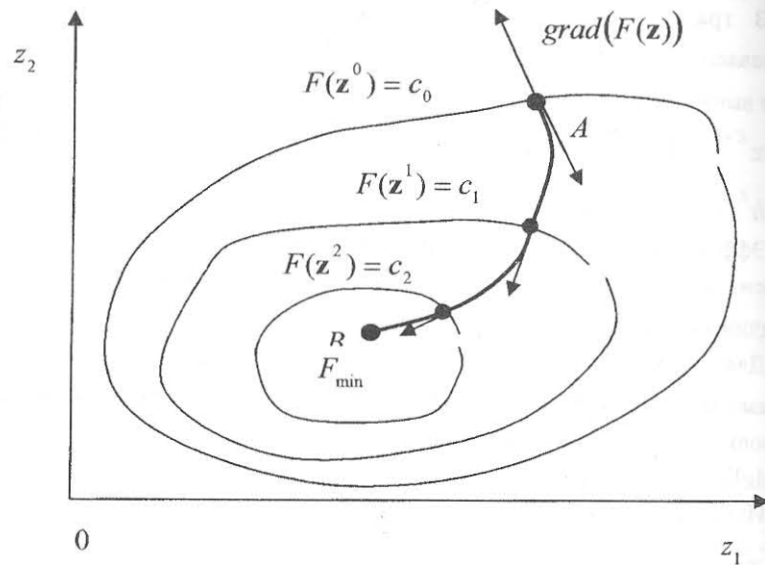


Рис. 6.6. Градиентный спуск

3. Градиентный метод с переменным шагом

На $K+1$ -ом шаге вычисляется $F(\mathbf{z}^{K+1})$ с шагом h^K . Если $F(\mathbf{z}^{K+1}) \leq F(\mathbf{z}^K)$, то шаг увеличивается, например, $h^{K+1} = 2 \cdot h^K$, вычисляется целевая функция и шаг принимается равным h^K или $2 \cdot h^K$ в зависимости от того, какое значение шага обеспечивает наименьшее

значение $F(\mathbf{z}^{K+1})$. Если $F(\mathbf{z}^{K+1}) > F(\mathbf{z}^K)$, то шаг уменьшается, например, $h^{K+1} = h^K/2$. Если это не приводит к уменьшению целевой функции, шаг уменьшается до тех пор, пока не будет найдено меньшее значение $F(\mathbf{z}^{K+1})$, чем на предыдущем шаге. По мере приближения к минимуму шаг будет уменьшаться, а точность увеличиваться. Недостатком такой схемы расчета является замедление процесса сходимости в окрестности минимума.

4. Метод наискорейшего спуска

В этом методе величина текущего шага оптимизируется из условия минимума целевой функции (рис. 6.7.) в направлении антиградиента, определенном для данной точки:

$$\begin{aligned} h^{*K} &= \arg \min_h F(\mathbf{z}^{K+1}) = \\ &= \arg \min_h F(\mathbf{z}^K - h^K \text{grad}(\mathbf{F}(\mathbf{z}^K))). \end{aligned} \quad (6.9)$$

Используя необходимое условие минимума, получим

$$\begin{aligned} \left. \frac{dF}{dh} \right|_{\mathbf{z}=\mathbf{z}^{K+1}} &= \left. \frac{\partial F}{\partial \mathbf{z}} \right|_{\mathbf{z}=\mathbf{z}^{K+1}} \left. \frac{d\mathbf{z}}{dh} \right|_{\mathbf{z}=\mathbf{z}^{K+1}} = \\ &= -\text{grad}_{\mathbf{z}} F(\mathbf{z}^{K+1}) \text{grad}_{\mathbf{z}} F(\mathbf{z}^K) = 0 \end{aligned} \quad (6.10)$$

Получено основное уравнение метода, из которого видно, что траектория поиска является ломаной линией, участки которой ортогональны друг другу. При реализации этого метода на каждом шаге находится его длина одним из методов одномерного поиска экстремума функции одной переменной. Например, эта вспомогательная задача может быть решена после аппроксимации зависимости $F(h)$ параболой, построенной по значениям целевой функции, вычисленной для трех значений шага.

Основной недостаток всех градиентных методов состоит в слабой скорости сходимости в окрестности точки искомого минимума. Особенно проявляется этот недостаток при минимизации функций, имеющих

«овражную» структуру. Эффект «овражности» заключается в том, что линии уровня минимизируемой функции $F(\mathbf{z})$ оказываются сильно вытянутыми в некоторых направлениях.

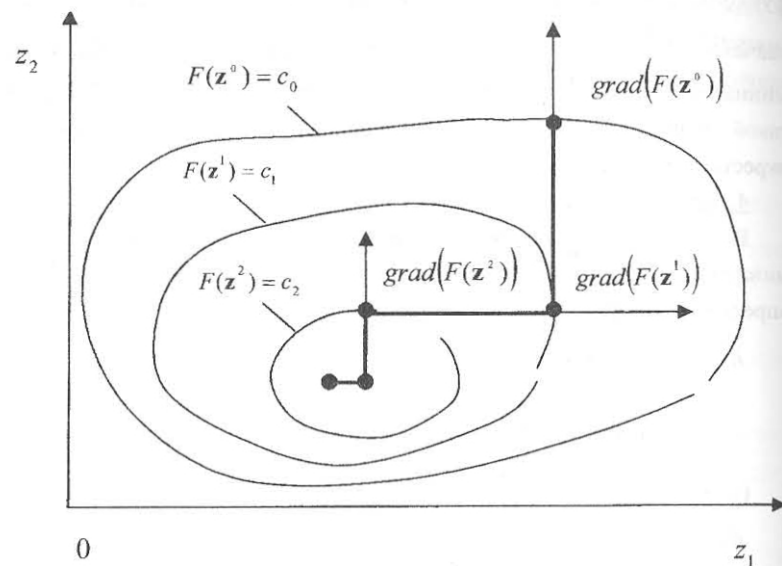


Рис. 6.7. Метод покоординатного спуска

Траектория поиска в таких случаях характеризуется достаточно быстрым спуском на «дно» оврага, а затем медленным зигзагообразным движением вдоль «дна» в направлении минимума. Это связано с тем, что основой градиентных методов является линейная аппроксимация минимизируемой функции.

6.7. Метод сопряженных градиентов

В градиентных методах на каждой итерации не используется информация, полученная на предыдущих итерациях. В то же время, ее использование позволит понять топологию целевой функции и ускорить сходимость процесса поиска минимума. Так, идея метода сопряженных

градиентов заключается в построении очередного приближения $\mathbf{z}^{K+1}$ по схеме

$$\mathbf{z}^{K+1} = \mathbf{z}^K - h^K \text{grad}_{\mathbf{z}}[F(\mathbf{z})] + \beta^K [\mathbf{z}^K - \mathbf{z}^{K-1}], \quad (6.11)$$

где параметры h^K , β^K подбираются на каждой итерации оптимальным образом:

$$(h^{*K}, \beta^{*K}) = \arg \min_{h, \beta} F(\mathbf{z}^{K+1}). \quad (6.12)$$

В общем случае не удастся найти решение задачи (6.12) в явном виде. Однако для целевой функции $F(\mathbf{z})$, имеющей вид квадратичной формы

$F(\mathbf{z}) = \mathbf{z}^T \mathbf{Q} \mathbf{z}$, метод приводится к следующему алгоритму:

$$\begin{aligned} \mathbf{z}^{K+1} &= \mathbf{z}^K + h^K \mathbf{e}^K, \\ \mathbf{e}^K &= -\text{grad}_{\mathbf{z}} F(\mathbf{z}^K) + \beta^K \mathbf{e}^{K-1}, \end{aligned} \quad (6.13)$$

$$\beta^K = \frac{|\text{grad}_{\mathbf{z}} F(\mathbf{z}^K)|^2}{|\text{grad}_{\mathbf{z}} F(\mathbf{z}^{K-1})|^2},$$

$$\beta^0 = 0, \quad h^K = \arg \min_h F(\mathbf{z}^K + h^K \mathbf{e}^K).$$

Метод сопряженных градиентов, являясь по форме методом первого порядка и поэтому достаточно простым в реализации, отличается от обычных градиентных методов квадратичной, а не линейной сходимостью.

6.8. Минимизация функции многих переменных методом Ньютона

Этот метод является методом второго порядка и основан на квадратичной аппроксимации функции $F(\mathbf{z})$ по значениям ее градиентов в ряде точек.

Пусть имеется k -ое приближение $\mathbf{z}$ и соответствующее ему значение функции $F(\mathbf{z}^k)$. Разложим функцию $F(\mathbf{z}^{k+1})$ в окрестности $\mathbf{z}^k$ в ряд Тейлора:

$$F(\mathbf{z}^{k+1}) = F(\mathbf{z}^k) + (\nabla F(\mathbf{z}^k))^T \Delta \mathbf{z}^k + \frac{1}{2} (\Delta \mathbf{z}^k)^T \nabla^2 F(\mathbf{z}^k) \Delta \mathbf{z}^k + \dots, \quad (6.14)$$

где $\nabla F(\mathbf{z}) = \text{grad}_{\mathbf{z}}(F(\mathbf{z})) = \left[\frac{\partial F}{\partial z_i} \right]$ - матрица первых частных

производных, $\nabla^2 F(\mathbf{z}) = \left[\frac{\partial^2 F}{\partial z_i \partial z_j} \right] = H$ - матрица вторых частных

производных или гессиан. На текущем шаге поиска ставится задача выбрать $\Delta \mathbf{z}^k$ таким образом, чтобы минимизировать $F(\mathbf{z}^{k+1})$.

Используем необходимое условие минимума $\frac{\partial F(\mathbf{z}^{k+1})}{\partial (\Delta z_i^k)} = 0$ и

ограничимся членами второго порядка малости.

$$\text{Тогда } \nabla F(\mathbf{z}^k) + \nabla^2 F(\mathbf{z}^k) \Delta \mathbf{z}^k = 0, \quad (6.15)$$

откуда следует

$$\Delta \mathbf{z}^k = (\nabla^2 F(\mathbf{z}^k))^{-1} \nabla F(\mathbf{z}^k). \quad (6.16)$$

Следующее приближение определяется как $\mathbf{z}^{k+1} = \mathbf{z}^k + \Delta \mathbf{z}^k$.

Для работы вычислительного алгоритма необходимо вычисление матриц первых и вторых частных производных, невырожденность и положительная определенность гессиана. Метод находит минимум за один шаг, если целевая функция квадратична. Для целевой функции произвольного вида используется модификация с регулированием шага

$$\mathbf{z}^{k+1} = \mathbf{z}^k - h^k (\nabla^2 F(\mathbf{z}^k))^{-1} \nabla F(\mathbf{z}^k), \quad h^k < 1. \quad (6.17)$$

Однако метод требует больших вычислительных затрат на вычисление матриц частных производных, к тому же точность их численного определения может оказаться низкой.

6.9. Метод покоординатного спуска

Идея метода заключается в том, что на каждом шаге поиска выбирается одно координатное направление, вдоль которого целевая функция уменьшается наиболее сильно. Этот метод широко применяется в виде различных модификаций, которые носят названия метода конфигураций, метода Гаусса-Зейделя и других.

При реализации этих методов траектория поиска представляет собой ломаную линию, состоящую из ортогональных отрезков. В методе Гаусса-Зейделя вычисляется оптимальная длина шага. Для функции двух переменных используется модификация, называемая сканированием по сетке, когда область существования аргументов разбивается по каждой из координат на небольшие отрезки, а затем вычисляются значения целевой функции в узлах сетки.

Эффективность разработанного алгоритма, реализующего тот или иной метод, проверяется на так называемых тестовых целевых функциях. К ним, например, относятся:

- функция Розенброка

$$F(\mathbf{z}) = 100(z_2 - z_1^2)^2 + (1 - z_1)^2, \quad (6.18)$$

- функция Пауэлла

$$F(\mathbf{z}) = (z_1 + 10z_2)^2 + 5(z_3 - z_4)^2 + (z_2 - 2z_3)^4 + 10(z_1 - z_4)^4 \quad (6.19)$$

и другие [10].

6.10. Методы минимизации функции многих переменных с ограничениями

Пусть имеется функция $F(\mathbf{z})$, определенная на множестве $\mathbf{Z}$. Требуется найти

$F(\mathbf{z}) \rightarrow \min$ при условиях $\mathbf{g}(\mathbf{z}) \leq \mathbf{b}$,
где $\mathbf{z} = \{z_i\}$ ($i = 1, 2, \dots, n$), $\mathbf{g} = \{g_j\}$ ($j = 1, 2, \dots, m$).

Методы решения этой задачи разделяются на методы, базирующиеся на методе градиента, и методы, использующие штрафные функции.

Метод возможных направлений

Этот метод работает с ограничениями типа строгих неравенств. Он основан на анализе возможных направлений в окрестности границы ограничений. Для этого строится градиент к ограничивающей поверхности и соприкасающаяся плоскость, ортогональная градиенту. В качестве возможного направления поиска рассматривается направление, противоположное градиенту. Функции, задающие ограничения, линеаризуются в окрестности допустимой точки.

Если через $\mathbf{e}^K$ обозначить возможное (допустимое) направление поиска из точки $\mathbf{z}^K$, то новая точка определяется соотношением

$$\mathbf{z}^{K+1} = \mathbf{z}^K + h^K \mathbf{e}^K.$$

Подставляя в линеаризованные выражения для $F(\mathbf{z})$ и $\mathbf{g}(\mathbf{z})$ вместо $\mathbf{z}$ значение $\mathbf{z}^{K+1}$, приходим к задаче

$$\begin{aligned} F(\mathbf{z}^K) + h^K (\nabla F(\mathbf{z}^K))^T \mathbf{e}^K &\rightarrow \min, \\ g(\mathbf{z}^K) + h^K \left(\frac{\partial g(\mathbf{z}^K)}{\partial \mathbf{z}} \right)^T \mathbf{e}^K &\leq 0. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Очевидно, точка $\mathbf{z}^{K+1}$ будет допустимой, если выполняется условие

$$\left(\frac{\partial g(\mathbf{z}^K)}{\partial \mathbf{z}} \right)^T \mathbf{e}^K \leq 0, \quad (6.19)$$

откуда и определяется вектор возможных направлений $\bar{\mathbf{e}}^K$, вдоль которых целевая функция имеет наибольшую скорость убывания. Величину шага

h^K , как и ранее, можно выбирать путем одномерной минимизации $F(\mathbf{z}^{K+1})$ по h^K .

Метод работает с ограничениями типа нестрогих неравенств, если в число возможных направлений включаются направления вдоль границы.

Проективный градиентный метод

Метод отличается от метода возможных направлений тем, что при попадании точки $\mathbf{z}^K$ в район границы допустимое направление поиска $\bar{\mathbf{e}}^K$ определяется путем проектирования антиградиента $-\nabla F(\mathbf{z}^K)$ на многогранник, являющийся линейной аппроксимацией допустимого множества вблизи точки $\mathbf{z}^K$. Метод позволяет учесть ограничения как типа неравенств, так и типа строгих равенств.

Метод штрафных функций

В этом методе поиск минимального значения целевой функции $F(\mathbf{z})$ с учетом ограничений заменяется на поиск минимального значения функции

$\tilde{F}(\mathbf{z})$ - суммы целевой функции $F(\mathbf{z})$ и штрафной функции δ :

$$\min_{\mathbf{z} \in \mathbf{Z}} \tilde{F}(\mathbf{z}) = \min_{\mathbf{z}} [F(\mathbf{z}) + \delta(\mathbf{z}, \alpha)] = \min_{\mathbf{z}} \tilde{F}(\mathbf{z}, \alpha), \quad (6.20)$$

где $\delta(\mathbf{z}, \alpha) = 0$, если $\mathbf{z} \in \mathbf{Z}$, $\delta(\mathbf{z}, \alpha) \Rightarrow \infty$, если $\mathbf{z} \notin \mathbf{Z}$.

При численном решении приходится сталкиваться с овражным характером новой целевой функции. Метод штрафной функции имеет разновидности, связанные с начальным приближением. Если метод может работать только из множества внутренних точек, т.е. когда сразу выполняются ограничения, то он относится к методам внутренней точки. Его задача - препятствовать выходу за ограничения. Методы внешней точки могут начинать работу из любого начального приближения. Если начальное приближение не удовлетворяет ограничениям, то сначала метод «сбрасывает» текущую точку внутрь допустимой области.

6.11. Решение двухточечной краевой задачи модифицированным методом Ньютона

Пусть задана динамическая система

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t), \quad t \in [t_0, t_K], \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0,$$

где $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ - переменные состояния, $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_m)$ - параметры.

Кроме того, на правом конце траектории заданы все или часть переменных состояния:

$$x_j(t_K) = x_{jK}, \quad j = m, \quad m \leq n.$$

Таким образом, выбор параметров $\mathbf{p}$ должен подчиняться условию:

$$x_j(t_K) - x_{jK} = \varphi_j(t_K, \mathbf{p}) = 0, \quad j = 1, \dots, m.$$

Функции φ_j называются невязками. Говорят, что поставлена краевая задача порядка m .

Параметры $\mathbf{p}$ могут представлять собой параметры объекта управления или параметры управляющих зависимостей, имеющие физический смысл (например, угол тангажа, угол крена, момент переключения управления и т.д.). При использовании алгоритма принципа максимума (см. раздел 3) параметры $\mathbf{p}$ могут быть начальными значениями сопряженных переменных и в этом случае они физического смысла не имеют.

С математической точки зрения решение краевой задачи сводится к решению системы нелинейных уравнений, заданной в неявном виде, так как конечные значения переменных состояния могут быть получены только через оператор интегрирования L :

$$\mathbf{x}(t_K) = \mathbf{x}_0 + L[\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)]. \quad (6.21)$$

Неявная форма записи нелинейной системы уравнений имеет вид:

$$\varphi_j(t_K, \mathbf{p}) = x_{j0} + L[f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)] - x_{jK} = 0. \quad (6.22)$$

Для начала работы вычислительного алгоритма необходимо задать начальное приближение $\mathbf{p}^0$. Переход от k -го приближения к $k+1$ -му основан на линейной аппроксимации невязок φ_j в окрестности текущей точки $\mathbf{p}^k$:

$$\varphi_j(\mathbf{p}^{K+1}) = \varphi_j(\mathbf{p}^K) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi_j}{\partial p_i} \bigg|_{\mathbf{p}=\mathbf{p}^K} (p_i^{K+1} - p_i^K) = 0. \quad (6.23)$$

Поскольку обычно невязки зависят от искомых параметров нелинейно, то делается не полный шаг, получающийся из предположения о линейности этих зависимостей, а только его часть, приближающая к решению системы нелинейных уравнений, которая регулируется шагом h^K .

$$\mathbf{p}^{K+1} = \mathbf{p}^K - h^K \left[\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{p}} \bigg|_{\mathbf{p}=\mathbf{p}^K} \right]^{-1} \varphi(\mathbf{p}^K), \quad h^K < 1. \quad (6.24)$$

Матрица частных производных невязок по параметрам имеет размерность $m \times m$ и определяется численно, для чего требуется $(m+1)$ интегрирование уравнений движения. Основным требованием сходимости метода является невырожденность этой матрицы.

Величина h^K может подбираться на каждом шаге поиска. Модификация метода заключается в выборе h^K из условия минимизации обобщенной невязки $\Phi = \sum_j \alpha_j \varphi_j$, где α_j - весовые коэффициенты:

$$h^K = \arg \min_h \Phi^{K+1}. \quad (6.25)$$

Эта операция требует как минимум трех дополнительных вычислений невязок, если зависимость $\Phi(h)$ аппроксимировать параболой, подобно тому, как это было описано в п. 6.5.

7. НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ К ЗАДАЧАМ МЕХАНИКИ И ДИНАМИКИ ПОЛЕТА

7.1. Уравнения движения системы материальных точек

Основным вариационным принципом в механике является принцип стационарного действия Остроградского-Гамильтона (принцип наименьшего действия): среди возможных, т.е. совместимых со связями, движений системы материальных точек в действительности осуществляется движение, дающее стационарное значение (минимум) интегралу, называемому действием по Лагранжу

$$I = \int_{t_0}^{t_K} (T - U) dt = \int_{t_0}^{t_K} L dt, \quad (7.1)$$

где T - кинетическая, а U - потенциальная энергия системы, L - функция Лагранжа.

Рассмотрим систему n свободных материальных точек с массами $m_1, m_2, \dots, m_n$ с координатами (x_i, y_i, z_i) , $i = 1, 2, \dots, n$. Кинетическая энергия системы равна

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2). \quad (7.2)$$

Предположим, что система обладает потенциальной энергией, т.е. существует функция $U(t, x_i, y_i, z_i)$, определяющая компоненты сил следующим образом:

$$X_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad Y_i = -\frac{\partial U}{\partial y_i}, \quad Z_i = -\frac{\partial U}{\partial z_i}.$$

Если функционал (7.1) достигает экстремума (минимума), то справедливы уравнения Эйлера:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} \right) = 0, \quad (7.3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial z_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i} \right) = 0.$$

Учитывая, что $L = T - U$, получим

$$-\frac{\partial U}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} (m_i \dot{x}_i) = 0,$$

$$-\frac{\partial U}{\partial y_i} - \frac{d}{dt} (m_i \dot{y}_i) = 0,$$

$$-\frac{\partial U}{\partial z_i} - \frac{d}{dt} (m_i \dot{z}_i) = 0.$$

Из этих уравнений следуют уравнения движения системы n материальных точек

$$m_i \ddot{x}_i = X_i, \quad m_i \ddot{y}_i = Y_i, \quad m_i \ddot{z}_i = Z_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (7.4)$$

7.2. Закон сохранения энергии в консервативной системе

Для функционала

$$I = \int_{t_0}^{t_K} L dt = \int_{t_0}^{t_K} (T - U) dt$$

сопряженные переменные (импульсы) и функция Гамильтона записываются следующим образом:

$$\psi_{xi} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m_i \dot{x}_i,$$

$$\psi_{yi} = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} = m_i \dot{y}_i, \quad (7.5)$$

$$\psi_{zi} = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i} = m_i \dot{z}_i,$$

$$H = \sum_{i=1}^n (\dot{x}_i \psi_{xi} + \dot{y}_i \psi_{yi} + \dot{z}_i \psi_{zi}) - L =$$

$$= \sum_{i=1}^n m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) - L = 2T - T + U = T + U. \quad (7.6)$$

$H = T + U$ - полная энергия системы. Если рассматриваемая система консервативна (т.е. U явно не зависит от времени), то $H = \text{const}$ вдоль каждой экстремали. Это означает, что полная энергия консервативной системы постоянна (закон сохранения энергии).

7.3. Задача об оптимальном выведении спутника на орбиту

Рассмотрим задачу выведения спутника на околоземную орбиту с минимальными затратами топлива, т.е. задачу с функционалом

$$I = \int_{t_0}^{t_K} \beta dt \rightarrow \min, \quad (7.7)$$

где $\beta = P/c$ - секундный расход топлива, P - тяга двигателей, c - скорость истечения газов из сопла.

Введем допущения. Будем считать, что двигатели работают без выключений, а их тяга постоянна. В этом случае конечная масса ракеты равна

$$m_K = m_0 - \beta(t_K - t_0) = m_0 - (P/c)T, \quad T = t_K - t_0.$$

Параметры P и c имеют постоянные значения, следовательно, задача о минимальном расходе топлива эквивалентна задаче о минимальном времени выведения, и поэтому функционал (7.7) приводится к виду

$$I \equiv T = \int_{t_0}^{t_K} 1 dt \rightarrow \min. \quad (7.8)$$

Также будем считать, что движение происходит в плоскопараллельном гравитационном поле (сила тяжести постоянна по величине и направлению) при отсутствии сопротивления атмосферы (рис. 7.1). Эти допущения приблизительно соответствуют физической картине движения верхних ступеней ракет-носителей на высотах, превышающих 60...70 км.

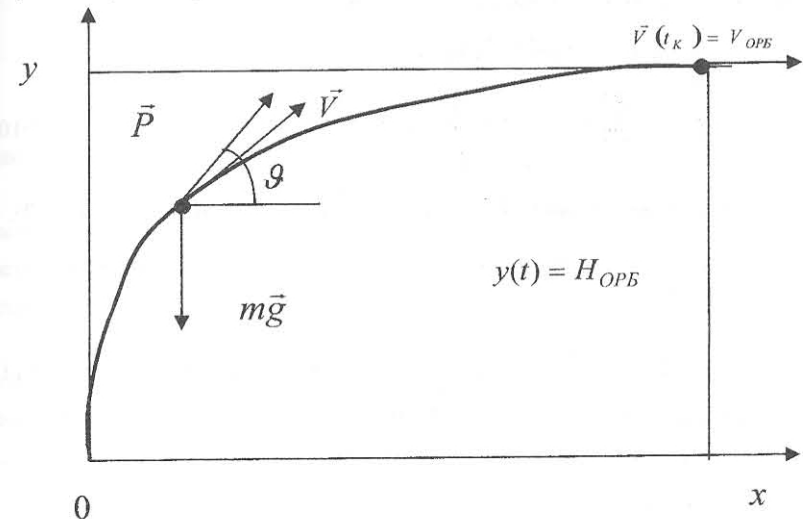


Рис. 7.1. Траектория выведения спутника на орбиту

При этих допущениях уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= V_x, \\ \dot{V}_x &= P \cos \theta / (m_0 - \beta t), \\ \dot{y} &= V_y, \\ \dot{V}_y &= P \sin \theta / (m_0 - \beta t) - g, \end{aligned} \quad (7.9)$$

Здесь ϑ - угол тангажа (угол между продольной осью ракеты и плоскостью местного горизонта). Начальные условия интегрирования:

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0,$$

$$V_x(t_0) = V_x(t_0) = 0.$$

Имеем задачу на условный экстремум, поскольку кроме функционала есть четыре дифференциальные связи в форме уравнений движения при пяти переменных, описывающих состояние $(x, y, V_x, V_y, \vartheta)$.

Составим расширенный функционал

$$R = \int_{t_0}^{t_K} \left[F + \sum_{j=1}^k \lambda_j g_j \right] dt = \int_{t_0}^{t_K} W(t, x, V_x, y, V_y, \vartheta) dt, \quad (7.10)$$

где λ_j - постоянные множители, а g_j - функции, задающие связи (7.9), и исследуем его на экстремум. Вспомогательная функция W имеет вид

$$W = 1 + \lambda_1 (\dot{x} - V_x) + \lambda_2 (\dot{V}_x - P \cos \vartheta / (m_0 - \beta t)) + \\ + \lambda_3 (\dot{y} - V_y) + \lambda_4 (\dot{V}_y - P \sin \vartheta / (m_0 - \beta t) + g). \quad (7.11)$$

Запишем систему уравнений Эйлера

$$\frac{\partial W}{\partial z_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial W}{\partial \dot{z}_i} = 0, \quad (i = 1, \dots, 5),$$

где

$$z_1 = x, \quad z_2 = V_x,$$

$$z_3 = y, \quad z_4 = V_y, \quad z_5 = \vartheta.$$

В скалярном виде:

$$\dot{\lambda}_1 = 0, \quad \dot{\lambda}_3 = 0,$$

$$-\lambda_1 - \dot{\lambda}_2 = 0,$$

$$-\lambda_3 - \dot{\lambda}_4 = 0,$$

(7.12)

$$\lambda_2 P \sin \vartheta / (m_0 - \beta t) - \lambda_4 P \cos \vartheta / (m_0 - \beta t) = 0.$$

Отсюда

$$\lambda_1 = c_1,$$

$$\lambda_2 = -c_1 t + c_2,$$

$$\lambda_3 = c_3,$$

$$\lambda_4 = -c_3 t + c_4,$$

$$\operatorname{tg} \bar{\vartheta}(t) = \frac{\lambda_4}{\lambda_2} = \frac{-c_3 t + c_4}{-c_1 t + c_2}, \quad (7.12)$$

где $\bar{\vartheta}$ - закон управления углом тангажа, обеспечивающий экстремум I .

Следовательно, угол тангажа должен изменяться по закону дробно-линейного тангенса. Оптимальная траектория выведения получается в результате интегрирования уравнений движения с полученным законом изменения тангажа.

Закон изменения угла тангажа содержит четыре константы, однако только три из них являются независимыми, т.к. выражения в числителе и знаменателе допускают деление на любую из постоянных, например, на $-c_1$, тогда

$$\operatorname{tg} \bar{\vartheta} = \frac{\lambda_4}{\lambda_2} = \frac{-c'_3 + c'_4}{t + c'_2}. \quad (7.13)$$

С другой стороны, на правом конце траектории имеется четыре граничных условия:

$$x(t_K) = x_K, \quad y(t_K) = y_K,$$

$$V_x(t_K) = V_{xK}, \quad V_y(t_K) = V_{yK}.$$

Поэтому, строго говоря, управляя только углом тангажа, то есть ориентацией ракеты в пространстве, нельзя добиться необходимого значения конечной скорости. Поэтому в число подбираемых параметров

приходится включать тягу P , точнее, тяговооруженность верхней ступени ракеты $P/m_0 g$.

Рассмотрим два частных случая. Получим закон изменения угла тангажа при выведении спутника ракетой-носителем. В этой задаче в конце траектории не фиксируется координата $x(t_K)$. Из общей формулы для вариации функционала в задаче со свободными концами для нашего случая имеем:

$$W_x \delta x_1 \Big|_{y=y_1} = 0.$$

Учитывая ранее полученные результаты, имеем

$$W_x \lambda_1 = 0.$$

Тогда $\lambda_1 = c_1 = 0$ и, следовательно,

$$tg \bar{g} = \frac{\lambda_4}{\lambda_2} = \frac{-c_3 t + c_4}{c_2} = -\frac{c_3}{c_2} t + \frac{c_4}{c_2}. \quad (7.14)$$

Это закон линейного тангенса, который используется в реальных системах управления ракет-носителей. Минимизация расхода топлива на выведение при заданной стартовой массе соответствует максимизации полезной нагрузки, выводимой на орбиту.

Получим закон управления движением баллистической ракеты. В этой задаче в целях упрощения закона управления считают незадаанными $x(t_K)$ и $y(t_K)$.

Тогда

$$\lambda_1 = c_1 = 0, \lambda_3 = c_3 = 0,$$

$$tg \bar{g} = \frac{c_4}{c_2} = const. \quad (7.15)$$

Это закон постоянного угла тангажа, используемый в системах управления баллистических ракет. Он обеспечивает достижение заданной конечной скорости при минимальном расходе топлива.

Значения скоростей и координат на оптимальной траектории определяется путем интегрирования уравнений движения (7.9), замкнутых оптимальными законами $\bar{g}(t)$.

7.4. Задача об оптимальном перелете КА с идеально регулируемым двигателем малой тяги

Рассмотрим движение космического аппарата (КА) на достаточном удалении от центров притяжения, таком, что влиянием гравитационных сил можно пренебречь. Такая модель иногда называется моделью «бессилового поля». КА оснащен так называемым идеально регулируемым двигателем малой тяги – электрореактивным двигателем (реактивная струя состоит из заряженных частиц – ионов и электронов, разгоняемых до больших скоростей электромагнитным полем) с глубоким регулированием величины тяги (реактивного ускорения). Критерием оптимальности для КА с подобными двигательными установками служит интеграл от квадрата реактивного ускорения [8]:

$$I = \int_{t_0}^{t_K} a^2 dt \rightarrow \min. \quad (7.16)$$

Будем считать, что полет КА при отсутствии сил тяготения осуществляется по прямолинейной траектории, соединяющей точки A (начальную) и B (конечную), как показано на рис. 7.2.

Кинематические параметры движения в момент t (точка М): вектор положения $\mathbf{r}$ и вектор скорости $\mathbf{V}$. Векторные уравнения движения (дифференциальные связи) имеют вид:

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{V}, \quad \dot{\mathbf{V}} = \mathbf{a}. \quad (7.17)$$

или

$$\mathbf{g}_1 = \dot{\mathbf{r}} - \mathbf{V} = 0,$$

$$\mathbf{g}_2 = \dot{\mathbf{V}} - \mathbf{a} = 0. \quad (7.18)$$

Граничные условия задачи

$$\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_A, \quad \mathbf{V}(t_0) = \mathbf{V}_A,$$

$$\mathbf{r}(t_K) = \mathbf{r}_B, \quad \mathbf{V}(t_K) = \mathbf{V}_B.$$

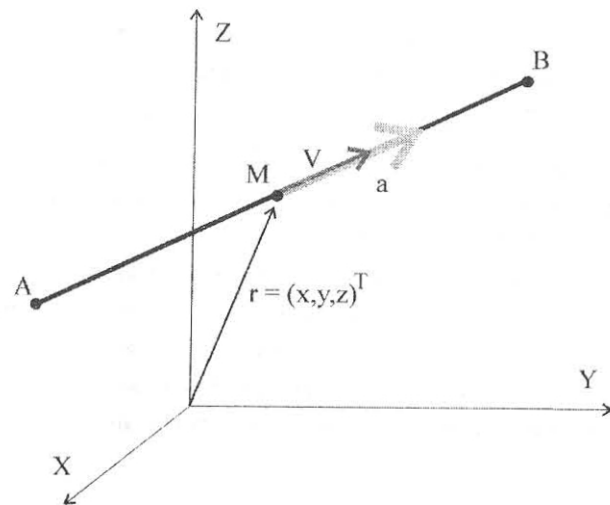


Рис. 7.2. Траектория движения КА в бессиловом поле

Здесь t_0, t_K - заданные величины. Получаем задачу на условный экстремум. Переменные, подлежащие определению: $\mathbf{a}(t), \mathbf{r}(t), \mathbf{V}(t)$.

Запишем расширенный функционал

$$R = \int_{t_0}^{t_K} [\mathbf{a}^2 + \lambda_1(\dot{\mathbf{r}} - \mathbf{V}) + \lambda_2(\dot{\mathbf{V}} - \mathbf{a})] dt, \quad (7.19)$$

где $\lambda_1(t), \lambda_2(t)$ - неизвестные функции. Составим систему уравнений Эйлера для переменных $\mathbf{a}(t), \mathbf{r}(t), \mathbf{V}(t)$:

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dt}\lambda_1 &= 0, \\ -\lambda_1 - \frac{d\lambda_2}{dt} &= 0, \end{aligned} \quad (7.20)$$

$$2\mathbf{a} - \lambda_2 = 0.$$

Из этих уравнений находим

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= C_1 = \text{const}, \\ \lambda_2 &= -C_1 t + C_2, \end{aligned} \quad (7.21)$$

$$\bar{\mathbf{a}}(t) = \frac{\lambda_2}{2} = \frac{1}{2}(-C_1 t + C_2).$$

Оптимальный закон изменения реактивного ускорения имеет вид линейной зависимости от времени. Соответственно, величина ускорения может возрастать, убывать или оставаться постоянной. Это зависит от граничных условий задачи. Изменение $\mathbf{r}(t), \mathbf{V}(t)$ вдоль траектории получаем путем интегрирования:

$$\mathbf{V}(t) = \mathbf{V}_A + \int_{t_0}^t \bar{\mathbf{a}}(t) dt = \mathbf{V}_A - \frac{C_1(t-t_0)^2}{4} + \frac{C_2(t-t_0)}{2} \quad (7.22)$$

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_A + \mathbf{V}_A(t-t_0) - \frac{C_1(t-t_0)^3}{12} + \frac{C_2(t-t_0)^2}{4}. \quad (7.23)$$

Векторные константы C_1 и C_2 определяются из граничных условий задачи.

7.5. Задача о минимуме времени разгона космического аппарата с малой тягой до параболической скорости

Пусть космический аппарат (КА) стартует с начальной круговой орбиты и совершает разгон в центральном поле тяготения под действием малой тяги P постоянной величины: $P = c\beta$, где c - скорость истечения, β - секундный расход массы. Следовательно, секундный расход массы

определяется по формуле: $\beta = P/c$. С другой стороны, $P = a_0 m_0$, где a_0 - начальное ускорение, а m_0 - начальная масса КА. Запишем выражение для текущего значения ускорения:

$$a = \frac{P}{m} = \frac{a_0 m_0}{m_0 - \beta t} = \frac{a_0 m_0}{m_0 - a_0 m_0 t / c} = \frac{a_0}{1 - a_0 t / c}. \quad (7.24)$$

Будем считать, что вектор тяги не выходит из плоскости орбиты. Тогда плоское движение КА может быть описано в полярных координатах (r, φ) , где r - расстояние до центра притяжения, φ - центральный угол, отсчитываемый от некоторого постоянного направления (рис.7.3).

Если текущие значения расстояния, скорости и времени отнести соответственно к радиусу начальной орбиты, круговой скорости и времени прохождения одного радиана на этой орбите, то уравнения движения запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= u, \\ \dot{\varphi} &= \frac{w}{r}, \\ \dot{u} &= \frac{w^2}{r} - \frac{1}{r^2} + a \cos \lambda, \\ \dot{w} &= -\frac{uw}{r} + a \sin \lambda. \end{aligned} \quad (7.25)$$

Здесь u и w - радиальная и тангенциальная составляющие скорости, λ - угол между радиусом-вектором и вектором тяги. На рис. 7.3 обозначен также угол γ между векторами тяги и скорости.

Сформулируем оптимизационную задачу. Для данной неавтономной системы дифференциальных уравнений, описывающих движение КА с малой тягой, найти закон управления углом γ , обеспечивающий минимальное время достижения параболической скорости, т.е. доставляющий минимум функционалу

$$I = T = (t_K - t_0) = \int_{t_0}^{t_K} 1 dt. \quad (7.26)$$

В конечный момент времени необходимо достигнуть параболической скорости; при этом удельная механическая энергия поступательного движения центра масс аппарата равна нулю. Запишем граничные условия:

$$t = t_0: r_0 = 1, \varphi_0 = 0, u_0 = 0, w_0 = 1,$$

$$t = t_K: h_K = \frac{u_K^2 + w_K^2}{2} - \frac{1}{r_K} = 0.$$

Последнее условие можно записать так: $g = r_K (u_K^2 + w_K^2) - 2 = 0$, где $r_K = r(t_K)$, $u_K = u(t_K)$, $w_K = w(t_K)$ - параметры траектории в точке набора параболической скорости, t_K - не задано.

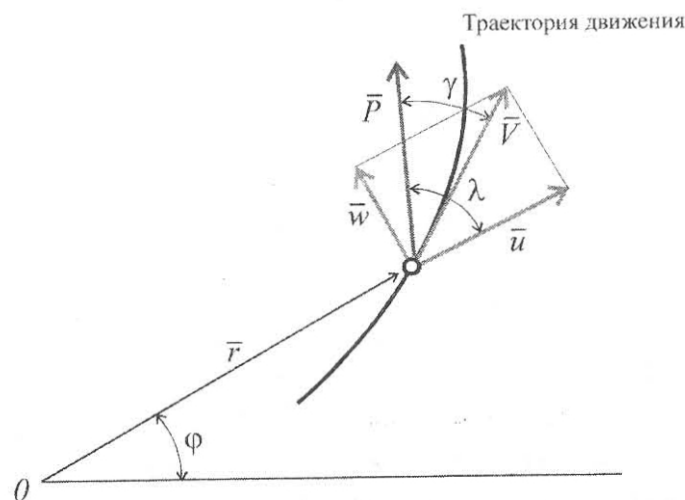


Рис.7.3. Полярные координаты

Будем решать задачу на основе принципа максимума Понтрягина. Введем сопряженную вектор-функцию ψ и запишем выражение для гамильтониана:

$$\begin{aligned} \psi &= (\psi_r, \psi_\varphi, \psi_u, \psi_w)^T, \\ H &= \psi_r u + \psi_\varphi \frac{w}{r} + \psi_u \left(\frac{w^2}{r} - \frac{1}{r^2} + a(t) \cos \lambda \right) + \\ &+ \psi_w \left(-\frac{uw}{r} + a(t) \sin \lambda \right) - 1. \end{aligned} \quad (7.27)$$

Неавтономность системы не вносит изменений в алгоритм решения задачи. В соответствии с принципом максимума необходимое условие оптимальности имеет вид

$$\frac{dH}{d\lambda} = -\psi_u a(t) \sin \lambda + \psi_w a(t) \cos \lambda = 0. \quad (7.28)$$

Откуда

$$\psi_w - \psi_u \operatorname{tg} \lambda = 0, \quad \operatorname{tg} \lambda_{opt} = \frac{\psi_w}{\psi_u}$$

или

$$\sin \lambda_{opt} = \frac{\psi_w}{\sqrt{\psi_u^2 + \psi_w^2}}, \quad \cos \lambda_{opt} = \frac{\psi_u}{\sqrt{\psi_u^2 + \psi_w^2}}. \quad (7.29)$$

Определим знак второй производной

$$\frac{d^2 H}{d^2 \lambda} = (-\psi_u \cos \lambda - \psi_w \sin \lambda) a = -\frac{\psi_u^2 + \psi_w^2}{\sqrt{\psi_u^2 + \psi_w^2}} a < 0.$$

Следовательно, при таком управлении гамильтониан действительно достигает максимума по управлению $\lambda(e)$.

Сопряженная система уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_r &= -\frac{\partial H}{\partial r} = \psi_\varphi \frac{w}{r^2} + \psi_u \frac{w^2}{r^2} - \psi_u \frac{2}{r^3} - \psi_w \frac{uw}{r^2}, \\ \dot{\psi}_\varphi &= -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0, \\ \dot{\psi}_u &= -\frac{\partial H}{\partial u} = -\psi_r + \psi_w \frac{w}{r}, \\ \dot{\psi}_w &= -\frac{\partial H}{\partial w} = \psi_\varphi \frac{1}{r} - \psi_u \frac{2w}{r} + \psi_w \frac{u}{r}. \end{aligned} \quad (7.30)$$

Запишем условия transversальности, учитывая связь между параметрами в конце траектории:

$$\begin{aligned} \psi_r(t_K) &= v \frac{\partial g}{\partial r} \Big|_{t_K} = v(u^2 + w^2) \Big|_{t_K}, \\ \psi_\varphi(t_K) &= v \frac{\partial g}{\partial \varphi} \Big|_{t_K} = 0, \\ \psi_u(t_K) &= v \frac{\partial g}{\partial u} \Big|_{t_K} = v 2ru \Big|_{t_K}, \\ \psi_w(t_K) &= v \frac{\partial g}{\partial w} \Big|_{t_K} = v 2rw \Big|_{t_K}. \end{aligned}$$

Из второго условия следует, что $\psi_\varphi = 0$. Кроме того,

$$\begin{aligned} \psi_u(t_K) / \psi_w(t_K) &= u_K / w_K, \\ \psi_r(t_K) / \psi_u(t_K) &= (u^2 + w^2) / 2ru \Big|_{t_K} = (1/r^2 u) \Big|_{t_K}. \end{aligned}$$

Откуда

$$\psi_u(t_K) = \psi_r(t_K) u_K r_K^2, \quad \psi_w(t_K) = \psi_r(t_K) w_K r_K^2. \quad (7.32)$$

Таким образом, имеем два соотношения, которые связывают три сопряженные переменные в конце оптимальной траектории. Третье граничное условие имеет вид

$$r_K(u_K^2 + w_K^2) - 2 = 0.$$

Полная система уравнений, замкнутая оптимальным законом управления, принимает вид

$$\dot{r} = u,$$

$$\dot{u} = \frac{w^2}{r} - \frac{1}{r^2} + \frac{a_0}{1 - a_0 t / c} \frac{\psi_u}{\sqrt{\psi_u^2 + \psi_w^2}},$$

$$\dot{w} = -\frac{uw}{r} + \frac{a_0}{1 - a_0 t / c} \frac{\psi_w}{\sqrt{\psi_u^2 + \psi_w^2}}, \quad (7.33)$$

$$\dot{\psi}_r = \psi_u \frac{w^2}{r^2} - \psi_u \frac{2}{r^3} - \psi_w \frac{uw}{r^2},$$

$$\dot{\psi}_u = -\psi_r + \psi_w \frac{w}{r},$$

$$\dot{\psi}_w = -\psi_u \frac{2w}{r} + \psi_w \frac{u}{r}.$$

Для решения краевой задачи необходимо подобрать начальные значения $\psi_r(t_0)$, $\psi_u(t_0)$, $\psi_w(t_0)$ так, чтобы при $t = t_K$ удовлетворить трем условиям трансверсальности:

$$\psi_u(t_K) = \psi_r(t_K) u_K r_K^2, \quad \psi_w(t_K) = \psi_r(t_K) w_K r_K^2,$$

$$r_K(u_K^2 + w_K^2) = 2.$$

Последнее условие используется для выхода из интегрирования.

Уравнения сопряженной системы уравнений можно пронормировать по одной из переменных, разделив каждый член, например, на $\psi_w(t_0)$. Тогда

$$\bar{\psi}_w(t_0) = 1,$$

$$\bar{\psi}_u(t_0) = \psi_u(t_0) / \psi_w(t_0),$$

$$\bar{\psi}_r(t_0) = \psi_r(t_0) / \psi_w(t_0).$$

Таким образом, для выполнения двух условий трансверсальности необходимо подобрать начальные значения двух сопряженных переменных, т.е. решить краевую задачу второго порядка. Выразим их через величины, имеющие простой физический смысл:

$$\operatorname{tg} \lambda = \psi_w / \psi_u, \text{ но } \bar{\psi}_w(t_0) = 1, \text{ поэтому } \bar{\psi}_u(t_0) = \operatorname{ctg} \lambda(t_0).$$

После преобразования можно получить

$$\bar{\psi}_r(t_0) = \frac{1 + \cos^2 \lambda(t_0) + \dot{\lambda}(t_0)}{\sin^2 \lambda(t_0)}. \quad (7.34)$$

Предположив, что в начале разгона угол λ близок к 90° , а скорость его изменения близка к 0, получим

$$\bar{\psi}_u^0(t_0) = 0,$$

$$\bar{\psi}_r^0(t_0) = 1.$$

Из условий трансверсальности следует, что

$$\frac{u(t_K)}{w(t_K)} = \frac{\psi_u(t_K)}{\psi_w(t_K)} = \operatorname{ctg} \lambda(t_K), \quad (7.35)$$

т.е. при $t = t_K$ тяга должна быть направлена по скорости.

Здесь описан классический пример удачного выбора начального приближения для решения краевой задачи, основанного на понимании физического смысла задачи [16].

Решив краевую задачу, получим оптимальный закон управления направлением вектора тяги. На рис. 7.4 показан вид оптимального управления углом γ между тягой и вектором скорости.

При разгоне КА с малой тягой вектор тяги колеблется относительно вектора скорости с периодом, равным времени обращения по орбите, совпадая с ним в конечный момент при $h_K = 0$.

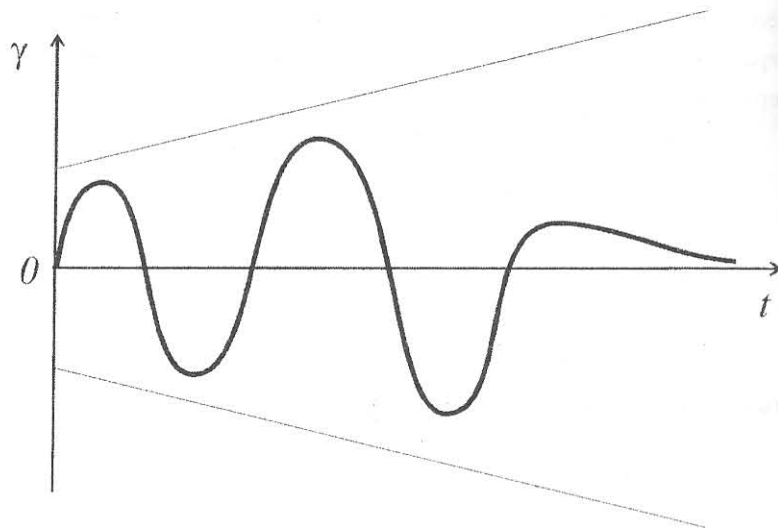


Рис. 7.4. Оптимальное управление углом γ

7.6. Задача синтеза оптимального управления при переориентации космического аппарата

Рассмотрим задачу одноосной переориентации КА (рис. 7.5).

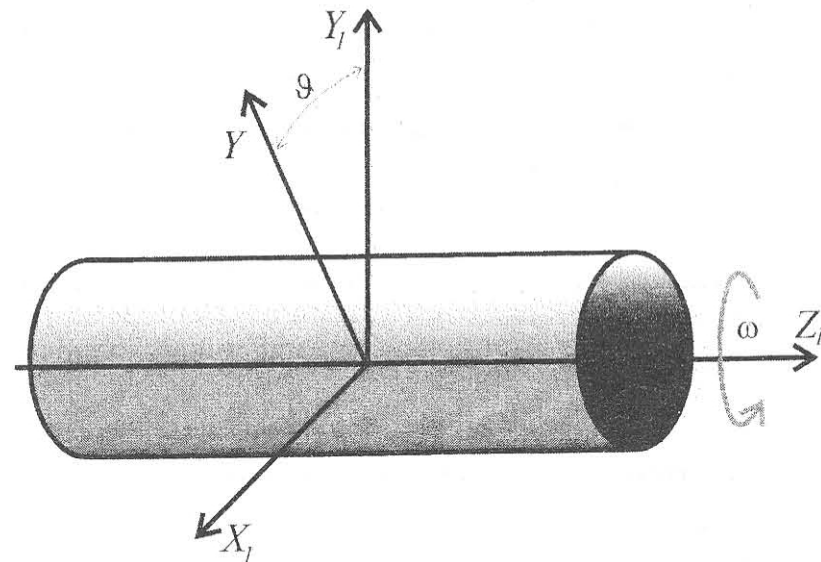


Рис. 7.5. Одноосная переориентация космического аппарата

Здесь OX_1, OY_1, OZ_1 – связанные с корпусом КА оси координат; вращение происходит только вокруг оси OZ_1 . Уравнения вращательного движения относительно оси OZ_1 имеют вид

$$\dot{\vartheta} = \omega, \quad I_z \dot{\omega} = M, \quad (7.36)$$

где ϑ и ω – угол и угловая скорость поворота вокруг оси OZ_1 , I_z – момент инерции КА относительно оси Z_1 , M – управляющий момент.

В качестве управления примем угловое ускорение: $u = M / I_z$, $|u| \leq u_{\max}$. Тогда уравнения движения примут вид

$$\dot{\vartheta} = \omega, \quad \dot{\omega} = u. \quad (7.37)$$

Сформулируем оптимизационную задачу. Для данной системы дифференциальных уравнений, описывающих движение КА относительно оси OZ_1 , найти закон управления угловым ускорением, обеспечивающий

переориентацию КА из произвольных начальных условий ϑ_0, ω_0 в заданное конечное положение $\vartheta = 0, \omega = 0$ за минимальное время, то есть закон управления $\bar{u}(t, \vartheta, \omega)$, доставляющий минимум функционалу

$$I = \int_{t_0}^{t_K} 1 dt \rightarrow \min. \quad (7.38)$$

Применим алгоритм принципа максимума. Составим гамильтониан

$$H = -1 + \psi_{\vartheta} \omega + \psi_{\omega} u \quad (7.39)$$

и запишем уравнения для сопряженных переменных

$$\dot{\psi}_{\vartheta} = 0, \quad \dot{\psi}_{\omega} = -\psi_{\vartheta}. \quad (7.40)$$

Интегрируя эти уравнения, получаем $\psi_{\vartheta} = c_1 = \text{const}$,

$$\psi_{\omega} = -c_1 t + c_2.$$

Так как на управление наложено ограничение, то максимум гамильтониана обеспечивается при максимальном управляющем воздействии: $u_{opt} = u_{\max}$ при $\psi_{\omega} > 0$ и $u_{opt} = -u_{\max}$ при $\psi_{\omega} < 0$ или

$$u_{opt}(t) = u_{\max} \text{sign} \psi_{\omega} = u_{\max} \text{sign}(c_2 - c_1 t). \quad (7.41)$$

Так как ψ_{ω} - линейная функция, закон управления будет иметь не больше одного переключения на отрезке $[t_0, t_K]$, что полностью соответствует теореме А.А. Фельдбаума для сопряженной системы (7.40).

Исследуем процесс оптимальной переориентации, изобразив его на фазовой плоскости, т.е. в координатах (ϑ, ω) . Проинтегрировав уравнения движения, получим

$$\omega = a + ut,$$

$$\begin{aligned} \vartheta &= b + at + ut^2 = u(t + a/u)^2 / 2 + b - a^2 / 2u = \\ &= \omega^2 / 2u + c, \end{aligned} \quad (7.42)$$

где $c = b - a^2 / 2u$, a и b - произвольные постоянные. Управление u может принимать только два значения: $u_{\max}$ или $-u_{\max}$.

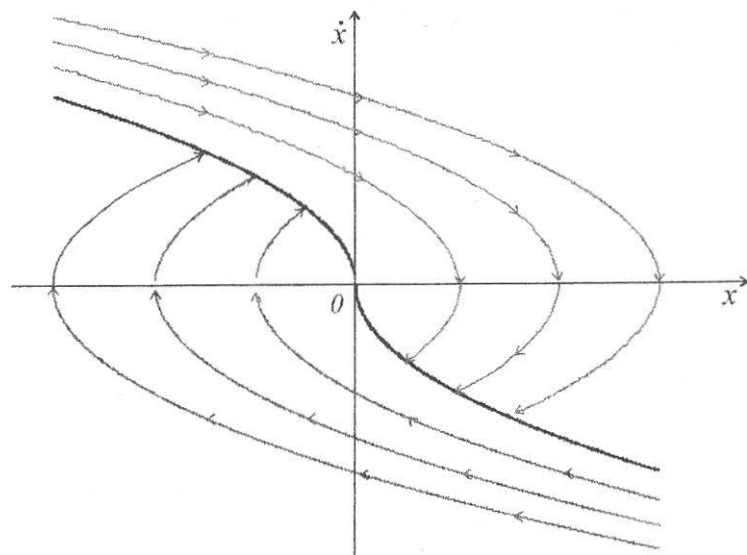


Рис. 7.6. Движение по фазовой плоскости

Следовательно, оптимальная фазовая траектория - парабола, а движение по фазовой плоскости осуществляется снизу вверх при $u_{opt} = u_{\max}$ или сверху вниз при $u_{opt} = -u_{\max}$ (рис. 7.6). В начало координат ведет только одна траектория, поэтому решение единственно. Эта траектория (линия АОВ) является линией переключения.

Получим закон оптимального управления в форме синтеза, то есть зависимости $u_{opt}(\vartheta, \omega)$. Имеем для точек, лежащих ниже линии

переключения и на дуге ОВ, $u_{opt} = u_{max}$, для точек, лежащих выше линии

переключения и на дуге ОА, $u_{opt} = -u_{max}$, или

$$u_{opt} = u_{max}, \text{ если } g \leq \omega^2 / 2u_{max} \text{ и } \omega < 0,$$

$$g < -\omega^2 / 2u_{max} \text{ и } \omega > 0;$$

$$u_{opt} = -u_{max}, \text{ если } g \geq -\omega^2 / 2u_{max} \text{ и } \omega > 0,$$

$$g > \omega^2 / 2u_{max} \text{ и } \omega < 0.$$

Оптимальный закон управления в форме синтеза имеет вид

$$u_{opt} = -u_{max} \operatorname{sign} \left(g + \frac{\omega|\omega|}{2u_{max}} \right). \quad (7.43)$$

7.7. Выбор оптимальной траектории набора высоты скоростного самолета-перехватчика

Самолет, находящийся в точке А, имеющий скорость V_0 и высоту H_0 , должен подняться на заданную высоту H_K и достигнуть значения скорости V_K . Пусть известен расход топлива, необходимый для подъема с некоторой высоты H_1 на высоту H_2 ($\Delta H = H_2 - H_1$, принимается достаточно малой) при постоянной скорости V , а также расход топлива, необходимый для разгона со скорости V_1 до скорости V_2 ($\Delta V = V_2 - V_1$ также достаточно мала) при постоянной высоте H . Это позволяет построить сетку локальных расходов топлива на плоскости параметров $H-V$ (рис. 7.7). На этой сетке по горизонтали и вертикали отложены расходы топлива в некоторых условных единицах.

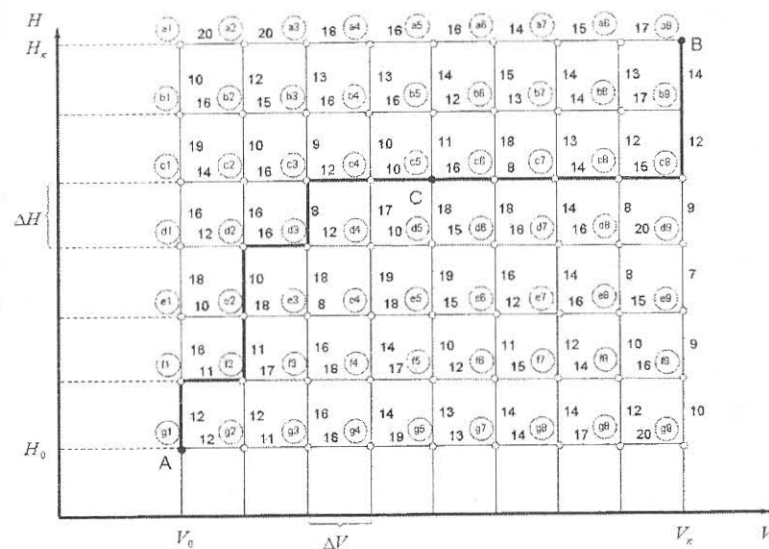


Рис. 7.7. Сетка локальных расходов скорости

Необходимо найти оптимальную траекторию в координатах $H-V$, при которой суммарный расход топлива на перемещение из точки А в точку В будет минимальным. Ограничением в данной задаче является условие движения по сетке только вверх и вправо.

Будем решать задачу методом динамического программирования. Согласно принципу оптимальности, попав в промежуточную точку С в результате стратегии управления U_1 , для оптимального перемещения в точку В надо использовать стратегию управления U_2 , оптимальную относительно промежуточного состояния в точке С.

Введем критерий оптимальности

$$I = M_T = \sum_i \Delta M_{Ti} \rightarrow \min, \quad (7.44)$$

где ΔM_{Ti} - локальный расход топлива, затрачиваемый на перемещение между соседними узлами сетки, i - номер шага. Общее число шагов может

быть произвольным, оно зависит от шага разбиения.

Запишем

$$M_{T_{ACB}} = M_{T_{AC}} + M_{T_{CB}}.$$

Функция будущих потерь

$$S_{CB}(H_C, V_C) = \min_{U_{II}} M_T(H_C, V_C, U_{II}) \quad (7.45)$$

представляет собой минимальное значение критерия на оставшемся участке, представленное в виде зависимости от координат промежуточной точки C .

Основное рекуррентное соотношение записывается так:

$$\begin{aligned} \min_{U_I} M_{T_{ACB}} &= \min_{U_I, U_{II}} (M_{T_{AC}} + M_{T_{CB}}) = \\ &= \min_{U_I} \left(M_{T_{AC}} + \min_{U_{II}} M_{T_{CB}} \right) = \\ &= \min_{U_I} (M_{T_{AC}} + S_{CB}(H_C, V_C)) = S_{ACB}(H_A, V_A). \end{aligned} \quad (7.46)$$

На основании соотношения (7.46) будем решать задачу последовательно, двигаясь от точки B к точке A . Обозначим узлы сетки строчными буквами с индексами. На первом шаге процесса возможны только два варианта попадания в точку B из соседних точек a_8 и b_9 . Сравнить эти варианты невозможно, так как координаты точек a_8 и b_9 разные. На втором шаге, когда переход в точку B включает две ячейки сетки, возможны уже четыре маршрута (их начальные точки обозначены a_7 , b_8 и c_9 , причем точка b_8 является общей для двух возможных маршрутов). Именно эти два маршрута сравниваются по суммарным затратам топлива, и остается только один, где расход минимален. Другие начальные точки a_7 и c_9 пока остаются в числе возможных точек маршрута. Затем процедура повторяется, на каждом шаге происходит сравнение маршрутов, имеющих одинаковые начальную и конечную точки, и отбрасывание неоптимальных вариантов.

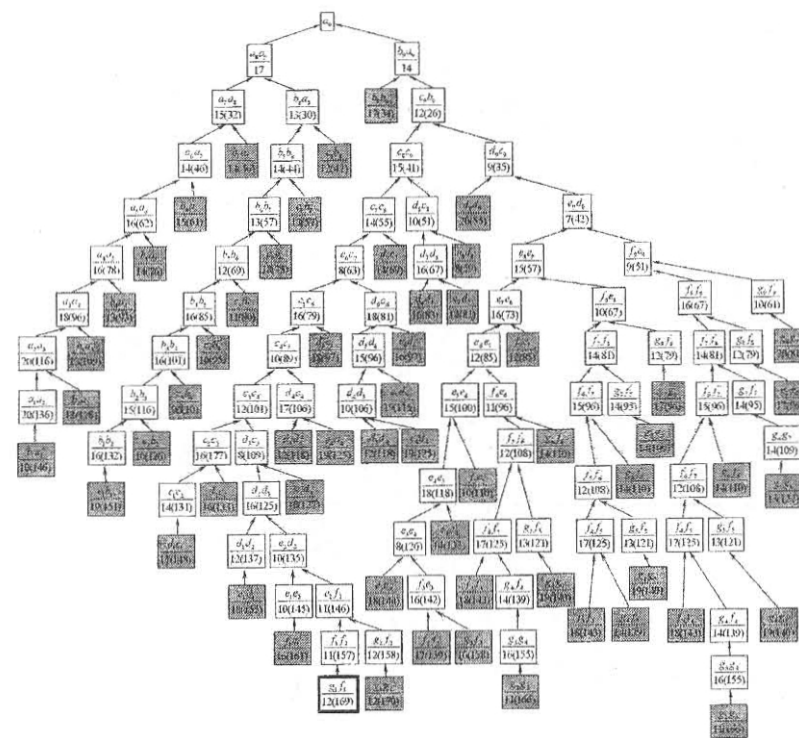


Рис. 7.8. Процесс решения задачи

Процесс решения задачи удобно отобразить в виде расходящегося «веника» (рис. 7.8), на каждом узле которого, начиная со второго, идет исключение неоптимальных маршрутов (выделяются черными квадратами). Постепенно «веник» начинает сужаться, пока не сойдется к начальной точке A (результат обведен жирной рамкой).

Оптимальная траектория, полученная на основе такого алгоритма, показана на рис. 7.7. Очевидно, уменьшая шаг разбиения по H и V , можно приблизиться к непрерывному процессу.

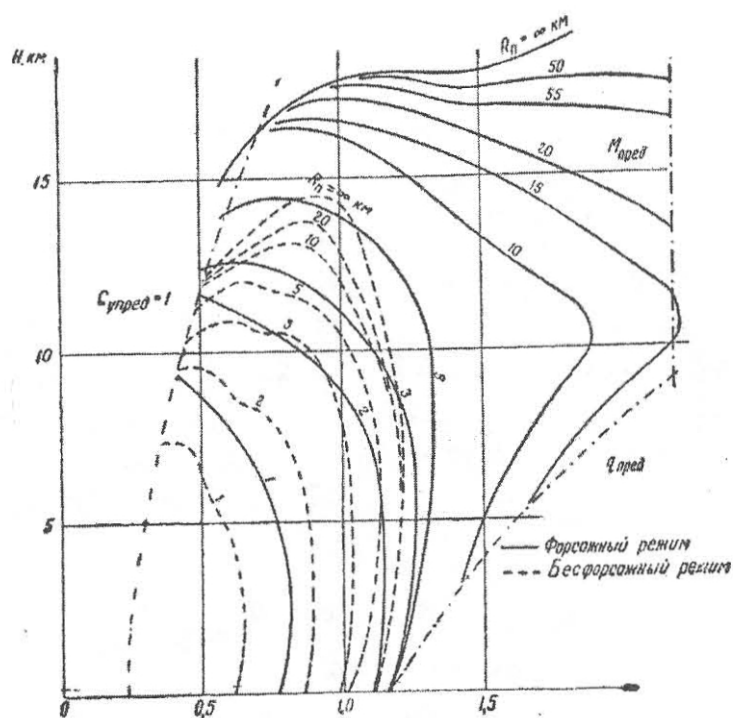


Рис. 7.9. Исходные данные для оптимизации траектории

На рис. 7.9 приведены исходные данные для оптимизации траектории набора высоты реального самолета-перехватчика [16]. Здесь на плоскости параметров $H - M$ (M - число Маха, равное отношению скорости полета к скорости звука на данной высоте) нанесены изолинии

тангенциальной перегрузки $n_x = \frac{P - X_a}{mg}$, где P - тяга двигателя на

форсажном режиме, X_a - сила лобового сопротивления, m - масса самолета, g - ускорение силы тяжести.

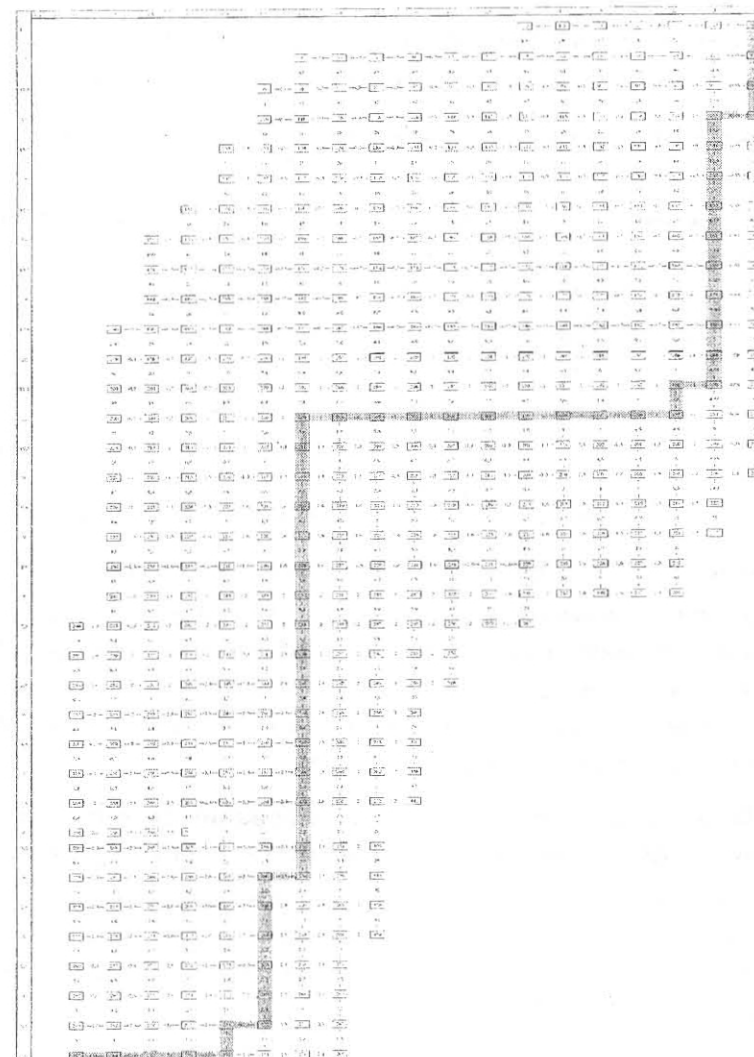


Рис. 7.10. Результаты пересчета изолиний тангенциальной перегрузки и оптимальные траектории перехватчика

Здесь же нанесены линии ограничений на допустимые режимы полета: по максимально допустимому коэффициенту подъемной силы c_y , по предельно допустимому числу Маха M , по предельно допустимому скоростному напору q .

В качестве критерия оптимальности выберем теперь время перемещения самолета из начальной точки A в конечную B . Локальные затраты времени подсчитываются следующим образом:

$$\Delta T_V = \frac{V_2 - V_1}{gn_x}, \quad (7.47)$$

$$\Delta T_H = \frac{H_2 - H_1}{V_1 n_x}. \quad (7.48)$$

Результаты пересчета изолиний тангенциальной перегрузки в ΔT_V , ΔT_H показаны на рис. 7.10. Там же показан оптимальный режим полета.

Результаты оптимизации дали классическую траекторию набора высоты самолетом-перехватчиком: резкий набор высоты на дозвуковой скорости, переход через скорость звука ($M = 1$) на некоторой постоянной высоте, затем — резкий набор высоты на сверхзвуковых скоростях с выходом на предельно допустимые числа Маха.

7.8. Задача аналитического конструирования автопилота, управляющего продольным движением крылатой ракеты

Рассмотрим возмущенное движение крылатой ракеты, летящей на постоянной высоте. Изолированное движение по углу тангажа ϑ описывается следующей системой линеаризованных дифференциальных уравнений [15] (рис. 7.11)

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta\omega_{z_1}}{dt} &= a_1\Delta\omega_{z_1} + b_1\Delta\delta_\delta, \\ \frac{d\Delta\vartheta}{dt} &= \Delta\omega_{z_1}. \end{aligned} \quad (7.49)$$

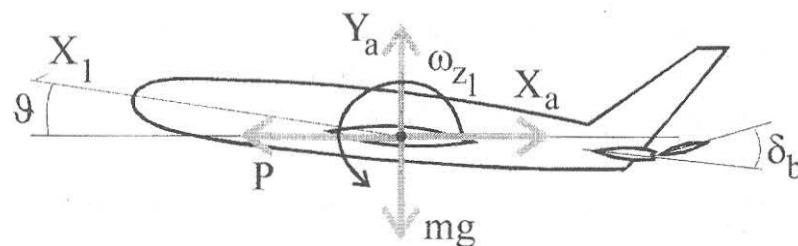


Рис. 7.11. Система сил, действующая на крылатую ракету

Здесь ϑ — угол тангажа; $\bar{P}$ — вектор тяги; $\bar{X}_a$, $\bar{Y}_a$ — сила лобового сопротивления и подъемная сила, соответственно; $m\bar{g}$ — сила тяжести; δ_δ — угол отклонения руля высоты от нейтрального положения; ω_{z_1} — угловая скорость вращения относительно поперечной оси OZ_1 ; $\Delta\vartheta$, $\Delta\omega_{z_1}$, $\Delta\delta_\delta$ — отклонения параметров от их балансирующих значений в возмущенном движении.

Из общих принципов движения летательных аппаратов в атмосфере

$$a_1 = \frac{M_{z_1}^{\omega_{z_1}}}{J_{z_1}}, \quad b_1 = \frac{M_{z_1}^{\delta_\delta}}{J_{z_1}}. \quad (7.50)$$

Здесь

$$M_{z_1}^{\omega_{z_1}} = \frac{\partial M_{z_1}}{\partial \omega_{z_1}}, \quad M_{z_1}^{\omega_{z_1}} < 0 -$$

производная, характеризующая демпфирующий момент;

$$M_{z_1}^{\delta_\delta} = \frac{\partial M_{z_1}}{\partial \delta_\delta}, \quad M_{z_1}^{\delta_\delta} > 0 -$$

производная управляющего момента, создаваемого рулем высоты;

J_{z_1} — момент инерции относительно поперечной оси OZ_1 , M_{z_1} — аэродинамический момент относительно оси OZ_1 . Поэтому $a_1 < 0$, $b_1 > 0$.

Пусть номинальный (невозмущенный) режим полета характеризуется постоянством коэффициентов a_1 , b_1 . Необходимо найти такой закон управления рулем высоты в форме синтеза

$$\Delta \bar{\delta}_e = \Delta \bar{\delta}_e(\Delta \omega_{z_1}, \Delta \vartheta),$$

который минимизирует квадратичный критерий качества управления

$$I = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} [q_1 \Delta \omega_{z_1}^2 + q_2 \Delta \vartheta^2 + w_1 \Delta \delta_e^2] dt. \quad (7.51)$$

Здесь весовые коэффициенты q_1 , q_2 - «цены» отклонений угловой скорости и угла тангажа от невозмущенного движения на бесконечном интервале $[t_0, \infty]$ времени стабилизации, w_1 - «цена» затрат на стабилизацию. Предполагается, что q_1 , q_2 , w_1 - некоторые известные положительные константы.

Пусть на значение управляющей переменной $\Delta \delta_e$ не накладывается ограничений. Будем решать поставленную задачу методом динамического программирования. Уравнение (7.48) запишем в векторно-матричной форме

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{\omega}_{z_1} \\ \Delta \dot{\vartheta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \omega_{z_1} \\ \Delta \vartheta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta \delta_e. \quad (7.52)$$

В этих обозначениях (см. раздел 4) матрицы записываются так

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ Q = \begin{bmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{bmatrix}, \quad W = w_1. \quad (7.53)$$

Согласно результатам п. 4.5 оптимальный закон стабилизации угла тангажа и угловой скорости имеет вид:

$$\Delta \delta_e = W^{-1} B^T K^{\infty} \begin{bmatrix} \Delta \omega_{z_1} \\ \Delta \vartheta \end{bmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{w_1} \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ K_{21}^{\infty} & K_{22}^{\infty} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \omega_{z_1} \\ \Delta \vartheta \end{bmatrix} = \\ = -\left(\frac{b_1 K_{11}^{\infty}}{w_1} \right) \Delta \omega_{z_1} - \left(\frac{b_1 K_{12}^{\infty}}{w_1} \right) \Delta \vartheta. \quad (7.54)$$

Здесь матрица

$$K^{\infty} = \begin{bmatrix} K_{11}^{\infty} & K_{12}^{\infty} \\ K_{21}^{\infty} & K_{22}^{\infty} \end{bmatrix}$$

соответствует «асимптотическому» решению матричного алгебраического уравнения Риккати, когда производная матрица коэффициентов $\dot{K}$ стремится к нулю:

$$K^{\infty} A + A^T K^{\infty} + Q - K^{\infty} B W^{-1} B^T K^{\infty} = 0 \quad (7.55)$$

или в развернутом виде ($K_{12}^{\infty} = K_{21}^{\infty}$)

$$\begin{bmatrix} K_{11}^{\infty} & K_{12}^{\infty} \\ K_{21}^{\infty} & K_{22}^{\infty} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{11}^{\infty} & K_{12}^{\infty} \\ K_{21}^{\infty} & K_{22}^{\infty} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{bmatrix} - \\ - \frac{1}{w_1} \begin{bmatrix} K_{11}^{\infty} & K_{12}^{\infty} \\ K_{21}^{\infty} & K_{22}^{\infty} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{11}^{\infty} & K_{12}^{\infty} \\ K_{21}^{\infty} & K_{22}^{\infty} \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} K_{11}^{\infty} a_1 + K_{12}^{\infty} & 0 \\ K_{12}^{\infty} a_1 + K_{22}^{\infty} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11}^{\infty} a_1 + K_{12}^{\infty} & K_{12}^{\infty} a_1 + K_{22}^{\infty} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{bmatrix} - \frac{1}{w_1} \begin{bmatrix} (K_{11}^{\infty} b_1)^2 & K_{11}^{\infty} K_{12}^{\infty} b_1^2 \\ K_{11}^{\infty} K_{12}^{\infty} b_1^2 & (K_{22}^{\infty} b_1)^2 \end{bmatrix} = 0. \quad (7.56)$$

Это матричное уравнение эквивалентно системе трех линейных алгебраических уравнений относительно K_{11}^{∞} , K_{12}^{∞} , K_{22}^{∞} :

$$2(K_{11}^{\infty} a_1 + K_{12}^{\infty}) + q_1 - \frac{1}{w_1} b_1^2 (K_{11}^{\infty})^2 = 0,$$

$$K_{12}^{\infty} a_1 + K_{22}^{\infty} - \frac{1}{w_1} b_1^2 K_{11}^{\infty} K_{12}^{\infty} = 0, \quad (7.57)$$

$$q_2 - \frac{1}{w_1} b_1^2 (K_{12}^{\infty})^2 = 0.$$

Решениями системы (7.57) будут:

$$K_{12}^{\infty} = \pm \sqrt{w_1 q_2 b_1^2}, \quad (7.58)$$

$$K_{11}^{\infty} = \frac{a_1 w_1}{b_1^2} \pm \sqrt{\left(\frac{a_1 w_1}{b_1^2} \right)^2 + \frac{2 w_1 K_{12}^{\infty}}{b_1^2} + \frac{q_1 w_1}{b_1^2}}, \quad (7.59)$$

$$K_{22}^{\infty} = \frac{b_1^2}{w_1} K_{11}^{\infty} K_{12}^{\infty} - a_1 K_{12}^{\infty}. \quad (7.60)$$

Поскольку оптимальному решению соответствует лишь положительно определенная матрица K^{∞} , то ее элементы должны удовлетворять критерию Сильвестра

$$K_{11}^{\infty} > 0, K_{22}^{\infty} > 0, K_{11}^{\infty} K_{22}^{\infty} - (K_{12}^{\infty})^2 > 0.$$

Так как по условию $a_1 < 0$, то в уравнении (7.58) перед корнем следует выбрать знак «плюс». Из уравнения (7.59) следует, что $K_{12}^{\infty} > 0$. Это дает окончательный закон оптимальной стабилизации в виде линейного регулятора

$$\Delta \delta_e = -l_{\omega} \Delta \omega_{z_1} - l_g \Delta g, \quad \text{где} \quad (7.61)$$

$$l_{\omega} = \frac{a_1 K_{11}^{\infty}}{w_1} = \left\{ \frac{M_{z_1}^{\omega_{z_1}}}{M_{z_1}^{\delta_e}} + \left[\left(\frac{M_{z_1}^{\omega_{z_1}}}{M_{z_1}^{\delta_e}} \right)^2 + 2 \sqrt{\left(\frac{J_{z_1}}{M_{z_1}^{\delta_e}} \right)^2 \frac{q_2}{w_1} + \frac{q_1}{w_1}} \right]^{1/2} \right\}, \quad (7.62)$$

$$l_g = \frac{a_1 K_{12}^{\infty}}{w_1} = \sqrt{\frac{q_2}{w_1}}. \quad (7.63)$$

Коэффициенты обратной связи l_{ω} и l_g называются передаточными числами автопилота.

Заключение

Синтез современных сложных технических систем с учетом их реальных свойств, эволюции, управления, многочисленных внутренних и внешних связей является сложнейшей научной проблемой. В итерационной процедуре синтеза важное место занимает поиск оптимальных решений как в области оптимального управления динамическими системами, так и в области параметрической оптимизации. Постановка любой оптимизационной задачи предполагает наличие следующих компонентов: критерия оптимальности или целевой функции; математические модели процесса или объекта; математического описания области допустимых решений; требований к результату решения задачи.

Грамотный выбор математической модели зачастую дает уверенность в получении требуемого решения. Ведь математическая модель — это достаточно полное и точное описание объекта и процесса управления в рамках выбранной степени приближения и детализации. Найти компромисс между точностью модели и степенью ее адекватности реальному объекту или процессу, с одной стороны, и пригодностью модели для получения требуемого решения известными математическими методами и вычислительными алгоритмами оптимизации, с другой стороны, — это есть искусство исследователя, основанное на глубоком понимании физической сути проблемы и возможностей методов оптимизации. Первое правило специалистов в области методов оптимизации гласит «Не подгоняй задачу под модель!». А второе правило, не менее важное, заключается в понимании границ применимости полученных решений и звучит так: «Не экстраполируй решение на бесконечность!». Усвоив эти правила, исследователь будет критично подходить как к моделям, так и к результатам, сознавая, что каждое решение — это лишь звено в долгой цепочке шагов к познанию истины.

Еще немного об ограничениях, задающих область допустимых решений. Можно задать их так, что задача окажется нерешаемой. Гораздо интереснее другой метод, который, отталкиваясь от определенного решения, полученного методами безусловной оптимизации, приводит к построению минимизирующей последовательности решений как в области выбора законов управления, так в области параметрического синтеза.

В этой книге сделана попытка сравнительно просто изложить основные методы решения оптимизационных задач. Ни в коей мере не претендуя на полноту охвата данной проблемы, а также на математическую чистоту всех выкладок, авторы ставили цель написать учебное пособие для студентов технических университетов и молодых специалистов, чтобы пробудить у них интерес к более глубокому изучению методов и задач оптимизации. Эта цель потребовала выделения из всего множества результатов теории и численных методов оптимизации наиболее важных для практических приложений разделов, использования упрощенных методов доказательств, доступных схем изложения и геометрических иллюстраций. В этой связи примером для подражания авторам послужил конспект лекций профессора В.В.Малышева по курсу «Теория оптимальных систем», который в течение многих лет читается студентам Московского авиационного института. С любезного разрешения автора некоторые подходы, схемы и стиль изложения материала использованы в настоящей книге. В частности, много внимания уделяется как частным постановкам оптимизационных задач (задача на быстродействие, задача с квадратичным функционалом), так и приложениям методов в конкретных постановках задач механики и ракетодинамики. Здесь мы старались руководствоваться старым постулатом ученых-прикладников: «Примеры порою бывают гораздо полезней общих правил». Насколько это удалось – судить читателям, нашим студентам и аспирантам.

Список литературы

1. Эльсгольц, Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / Л.Э.Эльсгольц. - М.: Наука, 1969. - 279 с.
2. Понтрягин, Л.С. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С.Понтрягин, А.Г.Болтянский [и др.]; под ред. Л.С. Понтрягина. - М.: Наука, 1976. - 392 с.
3. Брайсон, А. Прикладная теория оптимального управления / А.Брайсон, Хо-Ю-ши. - М.: Наука, 1972. - 554 с.
4. Химмельблау, Д. Прикладное нелинейное программирование: пер. с англ. / Д.Химмельблау. - М.: Мир, 1975. - 534 с.
5. Кротов, В.Ф. Методы и задачи оптимального управления / В.Ф.Кротов, В.И.Гурман. - М.: Наука, 1973. - 279 с.
6. Беллман, Р. Динамическое программирование / Р.Беллман. - М.: ИЛ, 1960.
7. Малышев, В.В. Теория оптимальных систем: конспект лекций / В.В. Малышев. - М.: МАИ, 1973. - 196 с.
8. Основы автоматического управления / под ред. В.С. Пугачева. - М.: Наука, 1974. - 720 с.
9. Лебедев, А.А. Основы синтеза систем летательных аппаратов / А.А.Лебедев, В.Н.Баранов, В.Г.Бобронников [и др.]; под ред. А.А.Лебедева. - М.: Машиностроение, 1987. - 224 с.
10. Банди, Б. Методы оптимизации. Вводный курс / Б.Банди. - М.: Радио и связь, 1988. - 128 с.
11. Салмин, В.В. Оптимизация космических перелетов с малой тягой / В.В.Салмин. - М.: Машиностроение, 1987. - 208 с.
12. Интриллигатор, М. Математические методы оптимизации и экономическая теория / М.Интриллигатор. - М.: Прогресс, 1979. - 606 с.
13. Болтянский, В.Г. Математические методы оптимального управления / В.Г.Болтянский. - М.: Наука, 1969. - 502 с.
14. Лебедев, В.Н. Расчет движения космического аппарата с малой тягой / В.Н.Лебедев // Математические методы в динамике космических аппаратов. Вып.5. - М.: ВЦ АН СССР, 1968. - 108 с.
15. Расчет и анализ движения летательных аппаратов. Инженерный справочник / под ред. С.А.Горбатенко. - М.: Машиностроение, 1971. - 438 с.
16. Дуров, В.Р. Боевое применение и боевая эффективность истребителей-перехватчиков / В.Р. Дуров. - М.: Воениздат, 1972. - 278 с.

Учебное издание

*Салмин Вадим Викторович,
Лазарев Юрий Николаевич,
Старинова Ольга Леонардовна*

**МЕТОДЫ ОПТИМАЛЬНОГО
УПРАВЛЕНИЯ И ЧИСЛЕННЫЕ
МЕТОДЫ В ЗАДАЧАХ СИНТЕЗА
ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

Учебное пособие

Технический редактор В. Л. Балакин
Редакторская обработка Н. В. Прядильникова
Компьютерная обработка А. В. Ярославцева
Доверстка В. С. Телепова

Подписано в печать 02.12.07 Формат 60x84 1/16.

Бумага офсетная. Печать офсетная.

Печ. л. 10,0.

Тираж 120 экз. Заказ 243 . ИП-73/07

Самарский государственный
аэрокосмический университет.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

Изд-во Самарского государственного
аэрокосмического университета.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.