

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА»

В.С. АСЛАНОВ, А.С. ЛЕДКОВ

ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ, ПРИМЕРЫ И ПРИЛОЖЕНИЯ

САМАРА 2008

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА»

В.С. АСЛАНОВ, А.С. ЛЕДКОВ

ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ, ПРИМЕРЫ И ПРИЛОЖЕНИЯ

Рекомендовано УМС по математике и механике УМО по классическому университетскому образованию РФ в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлениям и специальностям: «Математика», «Прикладная математика и информатика», «Механика»

САМАРА
Издательство СГАУ
2008

УДК 531.01 (075)
ББК 22.317
А 904

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук, проф. В. И. А с т а ф ь е в,
д-р физ.-мат. наук, проф. И. П. З а в е р ш и н с к и й

А 904 *Асланов В.С. Элементы аналитической механики, примеры и приложения: учеб. пособие / В.С. Асланов, А.С. Ледков. – Самара: Изд-во Самар. гос. аэрокосм. ун-та, 2008. – 110 с. : ил.*

ISBN 978-5-7883-0689-6

Учебное пособие посвящено изучению общих принципов аналитической механики. Данный курс является продолжением курса теоретической механики, читаемого студентам механико-математических и инженерно-физических факультетов. В рамках пособия рассматриваются несвободные механические системы и действующие на них силы. Изучаются поведение голономных и неголономных систем, вариационные принципы механики, канонические преобразования. Учебное пособие помимо теоретического материала содержит большое число простых и доступных примеров. Последняя глава посвящена курсовой работе, выполняемой в рамках курса аналитической механики.

Пособие предназначено для студентов естественно-научных направлений «Механика», «Механика. Прикладная математика», изучающих курс аналитической механики и выполняющих в его рамках курсовую работу. Выполнено на кафедре теоретической механики СГАУ.

Утверждено Редакционно-издательским советом университета в качестве учебного пособия

УДК 531.01 (075)
ББК 22.317

ISBN 978-5-7883-0689-6

© Асланов В.С., Дорошин А.В, 2008
© Самарский государственный
аэрокосмический университет, 2008

Оглавление

Введение	5
Глава I. Несвободные механические системы и обобщенные силы.....	7
1. Классификация связей	7
2. Возможные, действительные и виртуальные перемещения.....	9
3. Идеальные связи. Общее уравнения динамики	11
4. Обобщенные координаты. Число степеней свободы	12
5. Неголономные связи в обобщенных координатах	13
6. Элементарная работа сил в обобщенных координатах. Обобщенные силы, потенциалы	14
Глава II. Уравнения движения голономных систем.....	17
7. Уравнение Лагранжа первого рода	17
8. Уравнения Лагранжа второго рода	20
9. Структура кинетической энергии и функции Лагранжа в обобщенных координатах	22
10. Теорема об изменении полной энергии системы. Гироскопические силы ..	24
11. Задача о маятнике переменной длины.....	27
12. Спутник, входящий в атмосферу.....	30
13. Теорема Донкина. Преобразование Лежандра	31
14. Канонические уравнения Гамильтона	33
15. Скобки Пуассона.....	37
16. Теорема Якоби-Пуассона	40
17. Уравнения Рауса. Циклические и позиционные координаты	41
18. Кинетическое происхождение потенциальной энергии для системы с циклическими координатами	45
Глава III. Уравнения движения неголономных систем	52
19. Вывод уравнений движения для неголономных систем на основе общего уравнения динамики	52
20. Вывод уравнений движения для неголономных систем с помощью множителей Лагранжа	53

21. Задача о движении конька.....	54
22. Псевдокоординаты и псевдоскорости	57
23. Уравнения Аппеля	59
24. Задача о качении и верчении монеты	62
Глава IV. Вариационные принципы.....	69
25. Вариационный принцип Гамильтона.....	69
26. Задача о колебании струны	72
27. Вариационный принцип Гамильтона для неконсервативных систем	74
28. Вариационный принцип Гамильтона для неголономных систем.....	75
29. Полная и изохорная вариации	77
30. Основной интегральный инвариант Пуанкаре-Картана	77
Глава V. Канонические преобразования. Уравнение Гамильтона-Якоби.....	81
31. Новый вид гамильтоновой системы.....	81
32. Универсальный интегральный инвариант. Уравнения Уиттекера	82
33. Канонические преобразования. Теорема о каноническом преобразовании.	84
34. Уравнение Гамильтона-Якоби.....	87
35. Уравнение Гамильтона-Якоби для обобщенной консервативной системы. Характеристическая функция Гамильтона.....	89
Глава VI. Приложения аналитической механики. Исследование механической системы с тремя степенями свободы.....	91
36. Уравнения Лагранжа второго рода для системы с тремя степенями свободы	91
37. Уравнения Гамильтона для системы с тремя степенями свободы	97
38. Исследование движения системы под действием неголономной связи. Определение реакции неголономной связи	102
Заключение	107
Список литературы.....	108

Введение

Аналитическую механику можно рассматривать как часть или продолжение теоретической механики. Механика как самостоятельная наука начала оформляться в начале XVII века. Ее основу заложили такие ученые, как Галилео Галилей, Иоганн Кеплер, Рене Декарт, Христиан Гюйгенс. Одним из важнейших этапов в ее развитии стал выход в 1687 году трактата Исаака Ньютона «Математические начала натуральной философии», в котором были установлены и сформулированы основные законы классической механики. Большой вклад в становление механики внес живший в одно время с Ньютоном Готфрид Лейбниц. Он развил теорию дифференциального и интегрального исчисления, ставшую основным инструментом классической механики.

В XVIII веке механика продолжала бурно развиваться. Законы Ньютона были распространены на задачи механики твердого тела, задачи динамики были сведены к задачам статики (Жан Даламбер), сформировалась теория удара, были заложены начала вариационного исчисления (Иоганн Бернулли), заложены основы кинематики твердого тела (Леонард Эйлер).

Рождением аналитической механики следует считать 1788 год, когда в свет вышла работа Жозефа Луи Лагранжа «Аналитическая механика». В своей работе Лагранж полностью отказался от геометрической трактовки в механике, сведя все учение о равновесии и движении к некоторым общим уравнениям. В основу статики Лагранж положил принцип возможных перемещений, а в основу динамики — сочетание принципа возможных перемещений с принципом Д'Аламбера. Из других важных моментов следует отметить введение обобщенных координат и развитие принципа наименьшего действия.

Дальнейшее развитие и становление аналитической механики связано с именами таких выдающихся ученых, как Уильям Гамильтон, Карл Якоби, Карл Гаусс, Густав Кирхгоф. В рамках аналитической механики осуществляется переход к гамильтоновой механике, углубляются и развиваются методы небесной механики.

Бурное развитие аналитической механики в XIX-XX веках связано с развитием техники – железнодорожного и автомобильного транспорта, воздухоплавания, космических полетов. Эти направления потребовали создания новых механических теорий, описывающих поведение сложных механических систем в различных условиях. Развитие вычислительной техники во второй половине XX века привело к широкому использованию в механике методов моделирования механических процессов, основанных на численном эксперименте.

Заложенные в рамках аналитической механики методы и подходы сыграли огромную роль в создании и развитии теории относительности и квантовой механики.

Для аналитической механики характерно рассмотрение поведения не одной материальной точки, а их системы, использование обобщенных координат и вариационных принципов. Основное содержание аналитической механики составляет изложение общих принципов механики, вывод из них основных дифференциальных уравнений движения, исследование этих уравнений и методов их интегрирования.

Данное пособие посвящено изучению общих принципов аналитической механики применительно к голономным и неголономным системам. Подробно рассмотрены вариационные принципы и интегральные инварианты механики, канонические преобразования, уравнения Гамильтона-Якоби, уравнения Апеля, уравнения Уиттекера, системы с циклическими координатами, структура кинетической энергии и функции Лагранжа.

Глава I. Несвободные механические системы и обобщенные силы

1. Классификация связей

Рассмотрим движение системы N материальных точек относительно некоторой прямоугольной декартовой системы координат, предполагаемой неподвижной. Состояние системы задается радиусами векторами $\vec{r}_k$ и скоростями $\vec{V}_k$ ее точек. Очень часто при движении системы положения и скорости ее точек не могут быть произвольными. Ограничения, налагаемые на величины $\vec{r}_k$ и $\vec{V}_k$, которые должны выполняться при любых действующих на систему силах, называются **связями**. Если на систему не наложены связи, то она называется **свободной**. При наличии одной или нескольких связей система называется **несвободной**.

В общем случае связь задается соотношением $f(\vec{r}_k, \vec{V}_k, t) \geq 0$. Если в этом соотношении присутствует только знак равенства, то связь называется **удерживающей** (двусторонней, неосвобождающей), в противном случае – **неудерживающей** (односторонней, освобождающей).

Если уравнение связи можно записать в виде, не содержащем проекции скоростей точек системы, то связь называется **геометрической** (конечной, голономной):

$$f_\alpha(\vec{r}_k, t) = 0. \quad (1.1)$$

Если же в уравнение связи входят проекции скоростей $\vec{V}_k$, то связь называется **дифференциальной** (кинематической):

$$f_\alpha(\vec{r}_k, \vec{V}_k, t) = 0 \quad (\alpha = \overline{1, l}).$$

Дифференциальную связь $f_\alpha(\vec{r}_k, \vec{V}_k, t) = 0$ называют **интегрируемой**, если ее можно представить в виде зависимости между координатами точек системы и временем (как в случае геометрической связи). Неинтегрируемую дифференциальную связь называют еще **неголономной** связью.

В классической аналитической механике рассматриваются линейные по скоростям неголономные связи:

$$\sum_{k=1}^N \vec{a}_{\beta k} \cdot \vec{V}_k + a_{\beta} = 0 \quad (\beta = \overline{1, s}), \quad (1.2)$$

где коэффициенты $\vec{a}_{\beta k}$ и a_{β} есть функции радиуса вектора точек и времени.

Связь называется **реономной**, если она зависит от времени. И **склерономной**, если не зависит от времени.

Пример 1. Задача о движении конька по льду [1]. Пусть конек движется по льду, расположенному в горизонтальной плоскости (рис.1). Конек будем моделировать тонким стержнем, одна из точек которого, например C , во все время движения имеет скорость, направленную вдоль стержня; φ – угол, который образует стержень с осью Ox . Тогда уравнение связи будет выглядеть следующим образом:

$$\dot{y} = \dot{x} \operatorname{tg} \varphi. \quad (a)$$

Докажем, что эта связь неинтегрируемая.

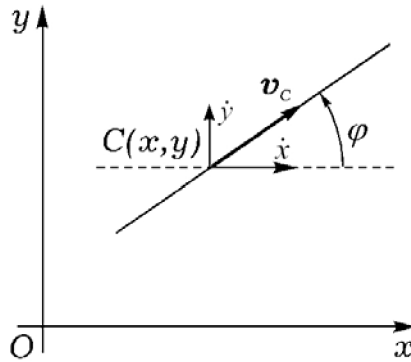


Рис.1. Задача о движении конька по льду

Проведем доказательство от противного. Предположим, что x, y, φ связаны соотношением $f(x, y, \varphi, t) = 0$. Вычислим полную производную f по времени

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial f}{\partial \varphi} \dot{\varphi} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

Используя уравнение связи (a), $\dot{f}$ можно записать в виде

$$\dot{f} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + tg\varphi \frac{\partial f}{\partial y} \right) \dot{x} + \frac{\partial f}{\partial \varphi} \dot{\varphi} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

Отсюда, ввиду независимости величин $\dot{x}, \dot{\varphi}$, получаем равенства

$$\frac{\partial f}{\partial x} + tg\varphi \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

Поскольку угол φ произволен, из этих равенств следует, что частные производные функции f по всем ее аргументам равны нулю, т.е. f не зависит от x, y, φ, t . Следовательно, предположение об интегрируемости связи (а) неверно.

2. Возможные, действительные и виртуальные перемещения

Введем понятие возможных перемещений, т.е. перемещений допускаемых связями (1.1) и (1.2). Для этого продифференцируем (1.1) по времени:

$$\sum_{k=1}^N \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \vec{r}_k} \frac{d\vec{r}_k}{dt} + \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} = 0, \quad (2.1)$$

а затем полученное выражение и связь (1.2) умножим на дифференциал времени:

$$\sum_{k=1}^N \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \vec{r}_k} d\vec{r}_k + \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} dt = 0 \quad (\alpha = \overline{1, l}), \quad (2.2)$$

$$\sum_{k=1}^N \vec{a}_{\beta k} d\vec{r}_k + a_{\beta} dt = 0 \quad (\beta = \overline{1, s}). \quad (2.3)$$

Мы получили систему из $l+s$ линейных неоднородных уравнений относительно $d\vec{r}_k$. $d\vec{r}_k$, удовлетворяющие системе (2.2), (2.3), являются **возможными перемещениями**, допускаемыми связями (1.1) и (1.2).

Совокупность векторов скоростей $\vec{V}_k$, удовлетворяющих системе (1.2), (2.1), будем называть **возможными скоростями**.

Если на систему при наложенных связях (1.1), (1.2) действуют силы, то она будет совершать движение, которое удовлетворяет уравнениям (2.2), (2.3). При этом система будет двигаться по единственному направлению, которое определяется силами и начальными условиями. Система будет совершать **действительное** перемещение, которое является одним из возможных.

Поставим в соответствие неоднородной системе (2.2), (2.3) следующую однородную систему:

$$\sum_{k=1}^N \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \vec{r}_k} \delta \vec{r}_k = 0 \quad (\alpha = \overline{1, l}), \quad (2.4)$$

$$\sum_{k=1}^N \vec{a}_{\beta k} \delta \vec{r}_k = 0 \quad (\beta = \overline{1, s}). \quad (2.5)$$

Тогда, $\delta \vec{r}_k$, удовлетворяющие $l+s$ однородным уравнениям (2.4), (2.5), называются **виртуальными перемещениями** или **вариациями**.

Вариация $\delta \vec{r}$ отвечает движению при «замороженной» связи и направлена по касательной к ее поверхности.

При определении вариации связи (1.1) и (1.2) рассматриваются для фиксированного момента времени $t = t^*$ и переход из некоторого положения $\vec{r}_k^*$ в $\vec{r}_k^* + \delta \vec{r}_k$ называется **синхронным варьированием**. При синхронном варьировании процесс движения не рассматривается, а сравниваются бесконечно близкие положения при фиксированном времени.

Для склерономных связей виртуальные перемещения совпадают с возможными [1].

Пример 2. Возможные, действительные и виртуальные. На рис. 2 показано движение точки по окружности постоянного радиуса. При этом

$$d\vec{r} = \vec{V}dt = \delta \vec{r}.$$

На рис. 3 показано движение точки по окружности переменного радиуса. В этом случае

$$d\vec{r} = \vec{V}_e dt, \quad \delta \vec{r} = \vec{V}_r.$$

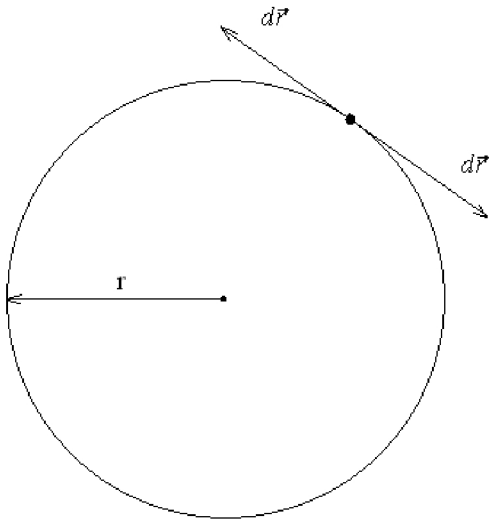


Рис.2. Движение точки по окружности
постоянного радиуса r

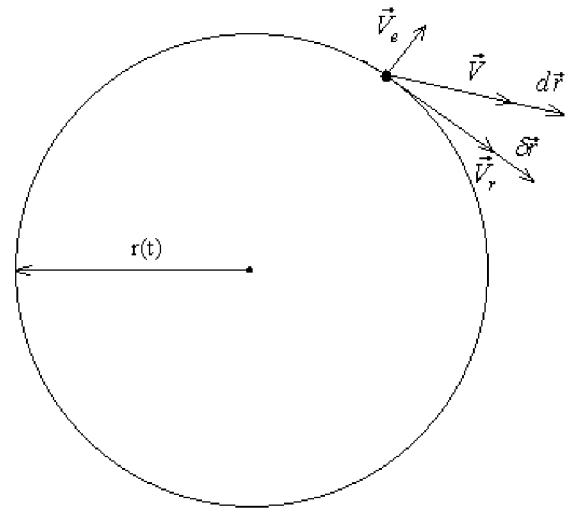


Рис.3. Движение точки по окружности
переменного радиуса $r(t)$

3. Идеальные связи. Общее уравнения динамики

Связь называется **идеальной**, если работа силы реакции этой связи на любых виртуальных перемещениях равна нулю.

Для материальных точек несвободной системы имеют место уравнения

$$m_k \vec{w}_k = \vec{F}_k + \vec{R}_k \quad (k = \overline{1, N}), \quad (3.1)$$

где m_k – масса k -й точки, $\vec{w}_k$ – ее ускорение, а $\vec{F}_k$ и $\vec{R}_k$ – соответственно равнодействующая активных сил и равнодействующая сил реакций, действующих на эту точку. Поскольку связи идеальны, то в любом положении системы при любых виртуальных перемещениях

$$\sum_{k=1}^N \vec{R}_k \delta \vec{r}_k = 0. \quad (3.2)$$

Подставляя в (3.2) вместо реакций $\vec{R}_k$ их выражения из уравнений (3.1) и умножая обе части полученного равенства на -1 , получаем

$$\sum_{k=1}^N (\vec{F}_k - m_k \vec{w}_k) \delta \vec{r}_k = 0. \quad (3.3)$$

Равенство (3.3) называется **общим уравнением динамики**. Это равенство утверждает, что при движении системы в любой момент времени

сумма работ активных сил и сил инерции на любых виртуальных перемещениях равна нулю, если на систему наложены только идеальные связи.

Таким образом, общее уравнение динамики всегда выполняется для любого совместимого со связями движения, соответствующего заданным активным силам $\vec{F}_k$.

Пусть теперь, наоборот, дано некоторое совместимое со связями движение системы, для которого выполняется общее уравнение динамики (3.3). Тогда, полагая

$$\vec{R}_k = m_k \vec{w}_k - \vec{F}_k,$$

будем иметь равенства (3.1) и (3.2).

В любой момент времени можно подобрать такие реакции $\vec{R}_k$, которые в силу равенства (3.2) были бы допустимыми для данных связей и при которых имеют место полученные из второго закона Ньютона уравнения (3.1). Мы считаем, что эти реакции $\vec{R}_k$ в действительности реализуются и что, следовательно, рассматриваемое движение соответствует данным активным силам.

Таким образом, общее уравнение динамики выражает необходимое и достаточное условие для того, чтобы движение, совместимое со связями, соответствовало заданной системе активных сил $\vec{F}_k$.

4. Обобщенные координаты. Число степеней свободы

Пусть дана система из N материальных точек с радиусами-векторами $\vec{r}_k = x_k \vec{i} + y_k \vec{j} + z_k \vec{k}$, подчиненная связям (1.1) и (1.2).

Число независимых виртуальных перемещений называется **числом степеней свободы** данной системы.

Если в системе N точек, то число степеней свободы можно найти по следующей формуле:

$$n = 3N - (l + s).$$

Наименьшее число параметров системы, необходимых для задания возможного положения системы, называют **числом независимых обобщенных координат**, а сами эти параметры – **обобщенными координатами**. Их количество определяется следующим соотношением:

$$m = 3N - l.$$

Если система голономная, то число обобщенных координат равно числу степеней свободы. Вектор обобщенных координат будем обозначать как

$$\vec{q} = (q_1, q_2, \dots, q_m).$$

Положение каждой точки определяется ее радиусом-вектором $\vec{r}_k = \vec{r}_k(\vec{q}, t)$. Обобщенная координата q_j должна быть дважды дифференцируема по времени.

Пример 3. Движение точки по сфере. Точка движется по сфере постоянного радиуса $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. В данном случае мы имеем одну голономную связь и одну точку. Таким образом, наименьшее число параметров системы, необходимых для задания движения, равно двум. Наложим еще одну голономную связь. Пусть точка движется по экватору, т.е. $z = 0$ и $x^2 + y^2 = R^2$. Тогда для описания движения достаточно всего одного параметра – угла поворота точки φ :

$$\begin{aligned} x &= R \cos \varphi, \\ y &= R \sin \varphi. \end{aligned}$$

5. Неголономные связи в обобщенных координатах

Поскольку радиус-вектор точки есть функция обобщенных координат и времени, то

$$\dot{\vec{r}}_k = \frac{d\vec{r}_k}{dt} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial t}. \quad (5.1)$$

Подставим (5.1) в уравнение неголономной связи (1.2):

$$\sum_{k=1}^N \vec{a}_{\beta k} \left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial t} \right) + a_\beta = 0 \quad (\beta = \overline{1, s}). \quad (5.2)$$

Введем следующие обозначения:

$$b_{\beta j} = \sum_{k=1}^N \vec{a}_{\beta k} \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j}, \quad b_\beta = a_\beta + \sum_{k=1}^N \vec{a}_{\beta k} \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial t}.$$

Тогда (5.2) можно представить в виде

$$\sum_{j=1}^m b_{\beta j} \dot{q}_j + b_\beta = 0. \quad (5.3)$$

Для голономных систем обобщенные скорости $\dot{q}_j$ независимы, а для неголономных связаны между собой соотношением (5.3).

Пользуясь формулой (5.1), запишем

$$d\vec{r}_k = \sum_{j=1}^m \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial t} dt.$$

Найдем также виртуальные перемещения

$$\delta \vec{r}_k = \sum_{j=1}^m \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \delta q_j.$$

Для неголономных систем вариации обобщенных координат являются зависимыми и определяются системой линейных однородных уравнений вида

$$\sum_{j=1}^m b_{\beta j} \delta q_j = 0 \quad (\beta = \overline{1, s}). \quad (5.4)$$

6. Элементарная работа сил в обобщенных координатах.

Обобщенные силы, потенциальные силы

Каждой координате q_j соответствует своя обобщенная сила Q_j .

Обобщенные силы определяются следующим образом. Рассмотрим элементарную работу активных сил на виртуальных перемещениях

$$\delta A = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k \delta \vec{r}_k. \quad (6.1)$$

Но виртуальными перемещениями $\delta \vec{r}_k$ являются виртуальные дифференциалы (т.е. дифференциалы при фиксированном, «замороженном» времени) от функции $\vec{r}_k = \vec{r}_k(\vec{q}, t)$:

$$\delta \vec{r}_k = \sum_{j=1}^m \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \delta q_j. \quad (6.2)$$

Подставим выражения (6.2) в правую часть формулы (6.1) и выразим элементарную работу активных сил на виртуальных перемещениях через произвольные элементарные приращения δq_j независимых координат q_j :

$$\delta A = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k \sum_{j=1}^m \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{k=1}^N \vec{F}_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \right) \delta q_j,$$

где коэффициенты при δq_j – обобщенные силы Q_j – определяются равенствами

$$Q_j = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j}. \quad (6.3)$$

Заметим, что на практике при нахождении величины Q_j далеко не всегда пользуются формулой (6.3); вместо этого системе дают такое элементарное виртуальное перемещение, при котором только j -я координата q_j получает некоторое приращение, а остальные независимые координаты не изменяются. После этого вычисляют работу активных сил δA_j на таком специально выбранном перемещении. Тогда

$$\delta A_j = Q_j \delta q_j$$

и выражение для обобщенных сил:

$$Q_j = \frac{\delta A_j}{\delta q_j}.$$

Пусть на систему действуют потенциальные силы

$$\vec{F}_k = - \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x_k} \vec{i} + \frac{\partial \Pi}{\partial y_k} \vec{j} + \frac{\partial \Pi}{\partial z_k} \vec{k} \right). \quad (6.4)$$

Подставим (6.4) в (6.1):

$$\begin{aligned}\delta A &= -\sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x_k} \vec{i} + \frac{\partial \Pi}{\partial y_k} \vec{j} + \frac{\partial \Pi}{\partial z_k} \vec{k} \right) (\delta x_k \vec{i} + \delta y_k \vec{j} + \delta z_k \vec{k}) = \\ &= -\sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x_k} \delta x_k + \frac{\partial \Pi}{\partial y_k} \delta y_k + \frac{\partial \Pi}{\partial z_k} \delta z_k \right).\end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\delta x_k = \sum_{j=1}^m \frac{\partial x_k}{\partial q_j} \delta q_j, \quad \delta y_k = \sum_{j=1}^m \frac{\partial y_k}{\partial q_j} \delta q_j, \quad \delta z_k = \sum_{j=1}^m \frac{\partial z_k}{\partial q_j} \delta q_j$$

перепишем выражение для δA :

$$\delta A = -\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial q_j} + \frac{\partial \Pi}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial q_j} + \frac{\partial \Pi}{\partial z_k} \frac{\partial z_k}{\partial q_j} \right) \delta q_j.$$

Окончательно имеем:

$$\delta A = -\sum_{j=1}^m \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \delta q_j, \quad (6.5)$$

$$Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}. \quad (6.6)$$

Глава II. Уравнения движения голономных систем

7. Уравнение Лагранжа первого рода

Пусть связи идеальные. Тогда

$$m_k \vec{w}_k = \vec{F}_k + \vec{R}_k,$$
$$\sum_{k=1}^N \vec{R}_k \cdot \delta \vec{r} = \sum_{k=1}^N (\vec{F}_k - m_k \vec{w}_k) \cdot \delta \vec{r} = 0. \quad (7.1)$$

Поскольку рассматриваются любые виртуальные перемещения, уравнение (7.1) распадается на систему уравнений.

Умножаем соотношения для виртуальных перемещений (2.4) и (2.5) на некоторые множители λ_α и μ_β – функции времени.

$$\lambda_\alpha \sum_{k=1}^N \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{r}_k} \delta \vec{r}_k = 0 \quad (\alpha = \overline{1, l});$$
$$\mu_\beta \sum_{k=1}^N \vec{a}_{\beta k} \delta \vec{r}_k = 0 \quad (\beta = \overline{1, s}). \quad (7.2)$$

Вычитая (7.2) из (7.1), для идеальных связей получим

$$\sum_{k=1}^N \left(\vec{R}_k - \sum_{\alpha=1}^l \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{r}_k} - \sum_{\beta=1}^s \mu_\beta \vec{a}_{\beta k} \right) \delta \vec{r}_k = 0. \quad (7.3)$$

Далее выбираем λ_α и μ_β по следующему правилу. Из $3N$ компонент виртуальных перемещений условно назначаем $n = 3N - l - s$ независимых и $l + s$ зависимых. Подберем $l + s$ переменных λ_α и μ_β так, чтобы коэффициенты при зависимых компонентах (выражения в скобках) в (7.3) обращались в нуль.

Например, пусть δx_k – зависимая компонента, а $\left(R_{xk} - \sum_{\alpha=1}^l \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_k} - \sum_{\beta=1}^s \mu_\beta \vec{a}_{\beta k} \right) \delta x_k$ – член суммы, тогда λ_α и μ_β таковы, что выполняется равенство

$$\sum_{\alpha=1}^l \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_k} + \sum_{\beta=1}^s \mu_\beta \vec{a}_{\beta k} - R_{xk} = 0,$$

и так далее.

Тогда в сумме (7.3) остается l слагаемых для независимых компонент. Но поскольку значения виртуальных перемещений независимых компонент произвольны, то, поочередно задавая одно значение не равным нулю, а остальные равными нулю, получим, что и для независимых координат коэффициенты обращаются в ноль.

Следовательно, функции времени λ_α и μ_β могут быть подобраны так, чтобы

$$\vec{R}_k = \sum_{\alpha=1}^l \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{r}_k} + \sum_{\beta=1}^s \mu_\beta \vec{a}_{\beta k} . \quad (7.4)$$

Подставляя (7.4) в уравнение (3.1), получим так называемые **уравнения Лагранжа первого рода**

$$m_k \vec{w}_k = \vec{F}_k + \sum_{\alpha=1}^l \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{r}_k} + \sum_{\beta=1}^s \mu_\beta \vec{a}_{\beta k} . \quad (7.5)$$

В правой части (7.5) второе и третье слагаемое есть не что иное, как силы реакции голономной связи (1.1) и неголономной связи (1.2) соответственно.

Заменяя каждое векторное уравнение тремя скалярными, мы можем считать, что уравнения (7.5), (1.1) и (1.2) составляют систему $3N+l+s$ скалярных уравнений с $3N+l+s$ неизвестными скалярными величинами $x_k, y_k, z_k, \lambda_\alpha, \mu_\beta$. Интегрируя эту систему, мы получаем конечные уравнения движения и одновременно с ними величины реакций связей. Однако интегрирование такой системы обычно весьма затруднено из-за большого числа уравнений. Для многомерных задач недостатком также является неоднородность уравнений, входящих в данную систему, т.е. эти уравнения имеют разные порядки и тогда целесообразно сначала привести уравнения связей к 2-му порядку, т.е. продифференцировать.

После нахождения неопределенных множителей λ_α и μ_β с помощью уравнений (7.4) можно найти силы реакций.

Пример 4. Математический маятник. Рассмотрим математический маятник массой m и длиной невесомого и нерастяжимого стержня l (рис.4).

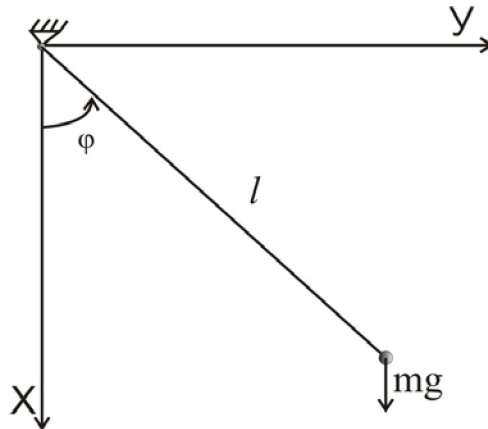


Рис.4. Математический маятник

Уравнение связи будет выглядеть следующим образом:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - l^2 = 0. \quad (a)$$

В проекциях на выбранные оси координат имеем:

$$m\ddot{x} = mg + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} = mg + 2x\lambda, \quad (b)$$

$$m\ddot{y} = \lambda \frac{\partial f}{\partial y} = 2y\lambda. \quad (c)$$

Из (c) выразим множитель λ :

$$\lambda = \frac{m\ddot{y}}{2y},$$

и подставим в уравнение (b):

$$m(\ddot{x}y - \ddot{y}x) = mgy.$$

Сделаем замену:

$$x = l \cos \varphi, \quad y = l \sin \varphi.$$

Получим следующее уравнение движения маятника:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0.$$

Попутно мы получили и выражения для реакций, возникающих в шарнире:

$$R_x = 2x\lambda = -ml \cos \varphi,$$

$$R_y = 2y\lambda = -ml \sin \varphi.$$

8. Уравнения Лагранжа второго рода

Пусть на систему действуют только идеальные голономные связи. В этом случае вариации обобщенных координат независимы. Выполним предварительные вычисления. Так как радиус-вектор точки зависит от обобщенных координат и времени, то

$$\dot{\vec{r}}_k = \frac{d\vec{r}_k}{dt} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial t}. \quad (8.1)$$

Из формулы (8.1) следует, что

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_k}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j}. \quad (8.2)$$

С другой стороны, дифференцируя (8.1) по обобщенной координате:

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_k}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 \vec{r}_k}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 \vec{r}_k}{\partial q_i \partial t}. \quad (8.3)$$

Найдем производную по времени от $\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i}$:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} \right) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 \vec{r}_k}{\partial q_j \partial q_i} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 \vec{r}_k}{\partial q_j \partial t}. \quad (8.4)$$

Из сравнения (8.3) и (8.4) следует, что

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial \dot{\vec{r}}_k}{\partial q_i}. \quad (8.5)$$

Найдем работу активных сил A_F и сил инерции A_Φ . Из соотношений (6.1), (6.2) и (6.3) следует:

$$\begin{aligned} \delta A_F &= \sum_{k=1}^N \vec{F}_k \delta \vec{r}_k = \sum_{j=1}^m Q_j \delta q_j, \\ \delta A_\Phi &= - \sum_{k=1}^N m_k \vec{w}_k \delta \vec{r}_k = - \sum_{k=1}^N m_k \frac{d\dot{\vec{r}}_k}{dt} \sum_{j=1}^m \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \delta q_j = - \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^N m_k \frac{d\dot{\vec{r}}_k}{dt} \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \delta q_j. \end{aligned}$$

Преобразуем последнее выражения, используя формулу дифференцирования

произведения $(UV)' = U'V + V'U$, полагая U и V равными $\dot{\vec{r}}_k$ и $\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j}$.

$$\delta A_\phi = - \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^N \left[m_k \frac{d}{dt} \left(\dot{\vec{r}}_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \right) - m_k \dot{\vec{r}}_k \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \right) \right] \delta q_j. \quad (8.6)$$

Перепишем (8.6) с учетом (8.2) и (8.5):

$$\delta A_\phi = - \sum_{j=1}^m \left[\frac{d}{dt} \sum_{k=1}^N m_k \dot{\vec{r}}_k \frac{\partial \dot{\vec{r}}_k}{\partial \dot{q}_j} - \sum_{k=1}^N m_k \dot{\vec{r}}_k \frac{\partial \dot{\vec{r}}_k}{\partial q_j} \right] \delta q_j. \quad (8.7)$$

Рассмотрим кинетическую энергию системы

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \dot{\vec{r}}_k^2 = T(q_j, \dot{q}_j, t).$$

Найдем частные производные кинетической энергии по обобщенным координатам и скоростям:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial q_j} &= \sum_{k=1}^N m_k \dot{\vec{r}}_k \frac{\partial \dot{\vec{r}}_k}{\partial q_j}, \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} &= \sum_{k=1}^N m_k \dot{\vec{r}}_k \frac{\partial \dot{\vec{r}}_k}{\partial \dot{q}_j}. \end{aligned} \quad (8.8)$$

Запишем (8.7) с учетом (8.8):

$$\delta A_\phi = - \sum_{j=1}^m \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] \delta q_j. \quad (8.9)$$

Запишем общее уравнение динамики (3.3) с учетом найденных работ активных сил и сил инерции:

$$\sum_{j=1}^m \left[Q_j - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] \delta q_j = 0. \quad (8.10)$$

Мы получили общее уравнение динамики в обобщенных координатах. Оно справедливо как для голономных, так и неголономных систем. В случае неголономных систем к уравнениям (8.10) следует добавить уравнения (5.4). В голономной системе вариации обобщенных координат являются независимыми, поэтому уравнениям (8.10) можно поставить в соответствие m уравнений вида

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad (j = \overline{1, m}). \quad (8.11)$$

Уравнения (8.11) получили название **уравнений Лагранжа второго рода**. Они понижают порядок системы на l голономных связей, но в (8.11) исключены реакции этих связей.

Пусть на систему действуют только потенциальные силы. Введем в рассмотрение **функцию Лагранжа (лагранжиан)**, или **кинетический потенциал**,

$$L = T - \Pi. \quad (8.12)$$

Учитывая (8.12) и (6.6), запишем уравнения Лагранжа (8.11)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0. \quad (8.13)$$

Пример 5. Получение уравнения движения математического маятника. Найдем уравнение движения математического маятника длиной l и массой m (рис.4). Кинетический потенциал в данном случае запишется следующим образом:

$$L = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2 + m g l \cos \varphi,$$

а уравнение Лагранжа согласно (8.13) будет иметь вид

$$m l^2 \ddot{\varphi} + m g l \sin \varphi = 0.$$

Преобразуя это уравнение, получим

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0.$$

9. Структура кинетической энергии и функции Лагранжа в обобщенных координатах

Рассмотрим кинетическую энергию системы, учитывая равенство (8.1):

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \dot{\vec{r}}_k^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial t} \right)^2.$$

Преобразуем это выражение к виду

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j,i=1}^m a_{ji} \dot{q}_j \dot{q}_i + \sum_{j=1}^m a_j \dot{q}_j + a_0 = T_2 + T_1 + T_0. \quad (9.1)$$

где коэффициенты a_{ji}, a_j, a_0 определяются соотношениями:

$$\begin{aligned} a_{ji} &= \sum_{k=1}^N m_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i}, \\ a_j &= \sum_{k=1}^N m_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial t}, \\ a_0 &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \left(\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial t} \right)^2. \end{aligned} \quad (9.2)$$

Формула (9.1) показывает, что кинетическая энергия голономной системы представляет собой многочлен второй степени относительно обобщенных скоростей.

В случае склерономной системы время явно не входит в зависимость радиуса-вектора точки от обобщенных координат и потому

$$\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial t} = 0.$$

Тогда кинетическая энергия (8.1) преобразуется к виду

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j,i=1}^m a_{ji} \dot{q}_j \dot{q}_i = T_2.$$

Таким образом, кинетическая энергия склерономной системы представляет собой квадратичную форму обобщенных скоростей.

В случае, когда потенциальная энергия системы не зависит от обобщенных скоростей, можно провести аналогию в структуре кинетического потенциала:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{j,i=1}^m c_{ji} \dot{q}_j \dot{q}_i + \sum_{j=1}^m c_j \dot{q}_j + c_0 = L_2 + L_1 + L_0,$$

где $c_{ji} = a_{ji}$, $c_j = a_j$, $c_0 = a_0 - \Pi$.

Учитывая (8.12):

$$L_2 = T_2, \quad L_1 = T_1, \quad L_0 = T_0 - \Pi.$$

10. Теорема об изменении полной энергии системы.

Гирскопические силы

Рассмотрим случай, когда помимо потенциальных сил, определяемых потенциалом Π , на систему действуют еще непотенциальные силы $\tilde{Q}_j = \tilde{Q}_j(t, q_i, \dot{q}_i)$, тогда

$$Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} + \tilde{Q}_j.$$

Уравнения Лагранжа принимают вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} + \tilde{Q}_j. \quad (10.1)$$

Введем в рассмотрение **полную энергию системы** E , равную сумме кинетической и потенциальной энергий:

$$E = T + \Pi,$$

и вычислим полную производную по времени от нее. Для этого сначала найдем полную производную по времени от кинетической энергии системы:

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial T}{\partial q_j} \dot{q}_j + \sum_{j=1}^m \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j + \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (10.2)$$

Перепишем (10.2), преобразовав вторую сумму с помощью правила «производная произведения» $(UV)' = U'V + V'U$, полагая U и V равными $\dot{q}_j$ и

$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}$ соответственно.

$$\frac{dT}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^m \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j + \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) \dot{q}_j + \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (10.3)$$

Из (9.1) следует, что

$$\sum_{j=1}^m \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = 2T_2, \quad \sum_{j=1}^m \frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = T_1, \quad \sum_{j=1}^m \frac{\partial T_0}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = 0.$$

Замечая, что $T = T_2 + T_1 + T_0$ и используя уравнения Лагранжа (10.1) и теорему об однородных функциях, получаем

$$\frac{dT}{dt} = \frac{d}{dt}(2T_2 + T_1) + \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} - \tilde{Q}_j \right) \dot{q}_j + \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (10.4)$$

Найдем полную производную потенциальной энергии по времени:

$$\frac{d\Pi}{dt} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \Pi}{\partial t}. \quad (10.5)$$

Перепишем (10.4) с учетом (10.5):

$$\frac{dT}{dt} = 2 \frac{dT}{dt} - \frac{d}{dt}(T_1 + 2T_0) + \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{d\Pi}{dt} - \frac{\partial \Pi}{\partial t} - \sum_{j=1}^m \tilde{Q}_j \dot{q}_j. \quad (10.6)$$

Учитывая (10.6), можно записать выражение для изменения полной энергии системы:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}(T_1 + 2T_0) - \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \Pi}{\partial t} + \sum_{j=1}^m \tilde{Q}_j \dot{q}_j. \quad (10.7)$$

Соотношение (10.7) определяет **теорему об изменении полной энергии системы**.

Введем понятие **мощности непотенциальных сил** $N = \sum_{j=1}^m \tilde{Q}_j \dot{q}_j$ и

рассмотрим **частные случаи теоремы об изменении полной энергии системы**:

1. Система склерономна.

Тогда $T_1 = T_0 = \frac{\partial T}{\partial t} = 0$ и (10.7) запишется в виде

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{j=1}^m \tilde{Q}_j \dot{q}_j + \frac{\partial \Pi}{\partial t}.$$

2. Система склерономна и потенциальная энергия явным образом не зависит от времени.

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{j=1}^m \tilde{Q}_j \dot{q}_j. \quad (10.8)$$

То есть полная производная от полной энергии системы равна мощности непотенциальных сил.

3. Система консервативная (то есть система склерономная, все силы потенциальные и потенциальная энергия Π не зависит явно от времени).

Для консервативной системы, согласно равенству (10.7)

$$\frac{dE}{dt} = 0,$$

то есть при любом движении системы

$$E = \text{const} = h.$$

Полная энергия консервативной системы не изменяется при движении системы. Последнее равенство представляет собой первый интеграл системы.

Непотенциальные силы называются **гироскопическими**, если их мощность равна нулю:

$$N = \sum_{j=1}^m \tilde{Q}_j \dot{q}_j = 0.$$

Примером такой силы является Кориолисова сила инерции.

Непотенциальная сила называется **диссипативной**, если ее мощность отрицательна либо равна нулю:

$$\sum_{j=1}^m \tilde{Q}_j \dot{q}_j \leq 0.$$

Примером диссипативной силы служит сила вязкого трения.

Если на систему действуют только гироскопические силы, то согласно (10.8) система консервативна.

Если на систему действуют диссипативные силы, то полная энергия уменьшается или остается неизменной.

Для иллюстрации применения теоремы об изменении полной энергии рассмотрим задачу о нахождении максимальной амплитуды колебания маятника переменной длины.

11. Задача о маятнике переменной длины

Рассмотрим математический маятник переменной во времени длины $l = l(t)$ массой m . Требуется найти максимальную амплитуду колебания этого маятника [2].

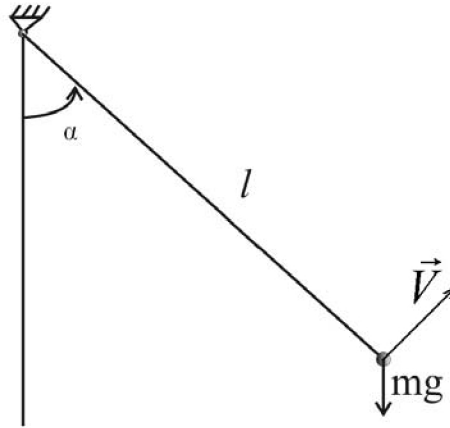


Рис.5. Маятник переменной длины

Будем рассматривать малые колебания при медленном изменении длины нити. Найдем потенциальную и кинетическую энергию системы, учитывая эти допущения:

$$\Pi = -mgl \cos \alpha \approx -mgl + mgl \frac{\alpha^2}{2}, \quad (11.1)$$

$$T = \frac{mV^2}{2} \approx \frac{ml^2 \dot{\alpha}^2}{2} + \frac{m\dot{l}^2}{2} = T_2 + T_0.$$

Непотенциальные силы отсутствуют. Запишем полную энергию системы:

$$E = T_2 + T_0 + \Pi. \quad (11.2)$$

Найдем производную по времени от (11.2):

$$\frac{d}{dt}(T_2 + T_0 + \Pi) = 2 \frac{dT_0}{dt} + \frac{\partial \Pi}{\partial t} - \frac{\partial T_2}{\partial t} - \frac{\partial T_0}{\partial t}. \quad (11.3)$$

Отметим, что T_0 зависит только от времени, поэтому

$$\frac{dT_0}{dt} = \frac{\partial T_0}{\partial t}.$$

Перепишем (11.3) с учетом этого замечания:

$$\frac{d}{dt}(T_2 + \Pi) = \frac{\partial \Pi}{\partial t} - \frac{\partial T_2}{\partial t}. \quad (11.4)$$

Подставляя (11.1) в (11.4), имеем

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{ml^2 \dot{\alpha}^2}{2} - mgl + mgl \frac{\alpha^2}{2} \right) = -mgl + mgl \frac{\alpha^2}{2} - mli \dot{\alpha}^2.$$

Упростим полученное соотношение:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{ml^2 \dot{\alpha}^2}{2} + mgl \frac{\alpha^2}{2} \right) = mgl \frac{\alpha^2}{2} - mli \dot{\alpha}^2. \quad (11.5)$$

Уравнение (11.5) является дифференциальным уравнением второго порядка по переменной α . Оно может быть представлено как система двух дифференциальных уравнений первого порядка при замене $\dot{\alpha} = \beta$. Можно считать, что (11.5) включает в себя две переменные – α и β . Перейдем в (11.5) от переменных $\alpha, \dot{\alpha}$ к переменным α_m, φ путем следующих замен:

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_m \cos \varphi, \\ \beta &= \dot{\alpha} = -\omega \alpha_m \sin \varphi, \end{aligned}$$

где $\omega = \sqrt{g/l}$ – мгновенная частота колебаний маятника.

Такую замену переменных называют **переходом к переменным амплитуды, фазы**. Перепишем (11.5) с учетом сделанных замен. Рассмотрим левую часть равенства

$$\frac{m}{2} \frac{d}{dt} (gl \alpha_m^2 \cos^2 \varphi + l^2 \omega^2 \alpha_m^2 \sin^2 \varphi) = \frac{mg}{2} \frac{d}{dt} (l \alpha_m^2).$$

Теперь можно записать (11.5) в виде

$$\frac{mg}{2} \frac{d}{dt} (l \alpha_m^2) = \frac{mgl}{2} \alpha_m^2 \cos^2 \varphi - m \frac{g}{l} \alpha_m^2 l \dot{\varphi} \sin^2 \varphi.$$

Сократим mg :

$$\frac{d}{dt} (l \alpha_m^2) = l \alpha_m^2 \cos^2 \varphi - 2 \alpha_m^2 \dot{\varphi} \sin^2 \varphi. \quad (11.6)$$

Обозначим:

$$\Phi(\alpha_m, \varphi) = l \alpha_m^2 \cos^2 \varphi - 2 \alpha_m^2 \dot{\varphi} \sin^2 \varphi.$$

Усредняя правую часть (11.6) по быстрой переменной, найдем среднее значение правой части:

$$\overline{\Phi}(\alpha_m) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (i\alpha_m^2 \cos^2 \varphi - 2\alpha_m^2 j \sin^2 \varphi) d\varphi = -\frac{1}{2} \alpha_m^2 j.$$

Перепишем (11.6) с учетом проведенной операции:

$$\frac{d}{dt}(l\alpha_m^2) = -\frac{1}{2} \alpha_m^2 j. \quad (11.7)$$

Продифференцируем левую часть (11.7):

$$l\alpha_m^2 + 2l\alpha_m \dot{\alpha}_m = -\frac{1}{2} \alpha_m^2 j. \quad (11.8)$$

Разделим переменные в (11.8), и найдем решение задачи:

$$\int_{\alpha_{m0}}^{\alpha_m} \frac{d\alpha_m}{\alpha_m} = -\frac{3}{4} \int_{l_0}^l \frac{dl}{l}.$$

Интегрируя, получаем

$$\begin{aligned} \int_{\alpha_{m0}}^{\alpha_m} \frac{d\alpha_m}{\alpha_m} &= -\frac{3}{4} \int_{l_0}^l \frac{dl}{l}, \\ \frac{\alpha_m}{\alpha_{m0}} &= \left(\frac{l_0}{l} \right)^{3/4}. \end{aligned}$$

или

$$\alpha_m = \frac{const}{l^{3/4}(t)}.$$

Мы получили зависимость амплитуды колебаний маятника переменной длины от длины маятника. Значение α_m не зависит от вида зависимости $l = l(t)$, а зависит только от значения l в данный момент времени.

12. Спутник, входящий в атмосферу

Рассмотрим задачу о спутнике, входящем в атмосферу и совершающем плоские угловые колебания [2].

Уравнение, описывающее колебательный процесс, имеет вид

$$I\ddot{\alpha} + k(t)\alpha = 0,$$

где α — угол атаки, I — момент инерции спутника относительно оси, перпендикулярной плоскости колебаний, проходящей через центр масс тела.

Кинетическая и потенциальная энергия системы имеют вид

$$T = \frac{I\dot{\alpha}^2}{2},$$
$$\Pi = \frac{k(t)\alpha^2}{2}.$$

При этом непотенциальные силы отсутствуют и $T_1 = T_0 = \frac{\partial T}{\partial t} = 0$. Закон изменения полной энергии приобретает следующий вид:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial \Pi}{\partial t}.$$

Можно принять, что при медленном изменении коэффициента $k(t)$ на одном периоде колебаний справедливы соотношения

$$\alpha = \alpha_m \cos \varphi,$$
$$\dot{\alpha} = -\alpha_m \sin \varphi \dot{\varphi} = -\sqrt{\frac{k}{I}} \alpha_m \sin \varphi.$$

Поскольку амплитуда колебаний изменяется медленно,

$$E = \frac{k\alpha_m^2}{2} \cos^2 \varphi + I \frac{k\alpha_m^2}{2I} \sin^2 \varphi = \frac{k\alpha_m^2}{2},$$
$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} = \frac{dk}{dt} \frac{\alpha^2}{2} = \frac{dk}{dt} \frac{(\alpha_m \cos \varphi)^2}{2}.$$

Усредняя последнее выражение по периоду [5] и учитывая, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{2},$$

получим

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} = \frac{dk}{dt} \frac{\alpha_m^2}{4}.$$

Откуда следует:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{k\alpha_m^2}{2} \right) = \frac{dk}{dt} \frac{\alpha_m^2}{4} = \frac{\partial \Pi}{\partial t},$$

$$\frac{dk}{dt} (\alpha_m^2) + k \frac{d}{dt} (\alpha_m^2) = \frac{dk}{dt} \left(\frac{\alpha_m^2}{2} \right),$$

$$\frac{1}{2} \frac{1}{k} \frac{dk}{dt} + \frac{\frac{d}{dt} (\alpha_m^2)}{(\alpha_m^2)} = 0,$$

$$\frac{1}{2} \ln k + \ln (\alpha_m^2) = 0,$$

$$\alpha_m \sqrt[4]{k(t)} = \text{const.}$$

Мы получили следующую зависимость амплитуды колебаний спутника

$$\alpha_m = \frac{c}{\sqrt[4]{k(t)}}.$$

13. Теорема Донкина. Преобразование Лежандра

Теорема Донкина. Пусть дана некоторая функция $X = X(x_1, x_2, \dots, x_n)$, гессиан которой отличен от нуля:

$$\det \left(\frac{\partial^2 X}{\partial x_i \partial x_k} \right)_{i,k=1}^n \neq 0, \quad (13.1)$$

и пусть имеется преобразование переменных, порождаемое функцией $X = X(x_1, x_2, \dots, x_n)$:

$$y_i = \frac{\partial X}{\partial x_i} \quad (i = \overline{1, n}). \quad (13.2)$$

1) Тогда существует преобразование, обратное преобразованию (13.2), которое также порождается некоторой функцией $Y = Y(y_1, y_2, \dots, y_n)$:

$$x_i = \frac{\partial Y}{\partial y_i} \quad (i = \overline{1, n}), \quad (13.3)$$

при этом порождающая функция Y обратного преобразования связана с порождающей функцией X прямого преобразования формулой

$$Y = \sum_{i=1}^n x_i y_i - X. \quad (13.4)$$

2) Если функция X содержит параметры $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, т.е. $X = X(x_1, x_2, \dots, x_n, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$, то Y также содержит эти параметры, т.е. $Y = Y(y_1, y_2, \dots, y_n, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ и

$$\frac{\partial Y}{\partial \alpha_j} = -\frac{\partial X}{\partial \alpha_j} \quad (j = \overline{1, m}). \quad (13.5)$$

Доказательство. Гессиан функции X совпадает с якобианом правых частей в уравнениях (13.2). Поэтому условие (13.1) показывает, что из уравнений (13.2) можно выразить переменные $x_1, x_2, \dots, x_n$ через $y_1, y_2, \dots, y_n$:

$$x_i = f_i(y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (i = \overline{1, n}). \quad (13.6)$$

Пусть функция $Y = Y(y_1, y_2, \dots, y_n)$ определяется формулой (13.4), в которой переменные x_i заменены выражениями (13.6). Тогда

$$\frac{\partial Y}{\partial y_i} = \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\sum_{k=1}^n x_k y_k - X \right) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial x_k}{\partial y_i} y_k + x_i - \sum_{k=1}^n \frac{\partial X}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial y_i}.$$

Но, согласно равенствам (13.2), две суммы, стоящие в правой части этого равенства, взаимно уничтожаются и, следовательно, имеют место формулы (13.3).

Пусть теперь X содержит помимо переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, еще параметры $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$. Тогда эти параметры фигурируют в прямом преобразовании (13.2), а следовательно, и в обратном:

$$x_i = f_i(y_1, y_2, \dots, y_n, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \quad (i = \overline{1, n}).$$

Функция Y определяется равенством (13.4), в котором x_i заменены на $x_i = f_i(y_1, y_2, \dots, y_n, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$; тогда, рассматривая величины $y_1, y_2, \dots, y_n$ как постоянные,

$$\frac{\partial Y}{\partial \alpha_j} = \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i - X \right) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_j} y_i - \sum_{k=1}^n \frac{\partial X}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_j} - \frac{\partial X}{\partial \alpha_j} = - \frac{\partial X}{\partial \alpha_j} \quad (j = \overline{1, m}).$$

Теорема Донкина доказана.

Переход от переменных x_i к y_i называется **преобразованием Лежандра**.

14. Канонические уравнения Гамильтона

Будем называть переменные $t, q_j, \dot{q}_j (i = \overline{1, m})$, через которые выражается функция Лагранжа, **переменными Лагранжа**. Система значений этих переменных характеризует момент времени и соответствующее состояние системы, т. е. положение системы и скорости ее точек.

Гамильтон предложил в качестве основных переменных, характеризующих состояние системы, взять величины t, q_j, p_j , где $p_j (i = \overline{1, m})$ – **обобщенные импульсы**, определяемые равенствами

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}. \quad (14.1)$$

Переменные t, q_j, p_j будем называть **переменными Гамильтона**. Причем, переменные Гамильтона могут быть выражены через переменные Лагранжа и наоборот, и состояние системы можно характеризовать как системой значений переменных Лагранжа, так и системой значений переменных Гамильтона.

Натуральными будем называть системы, в которых силы имеют потенциал $\Pi = \Pi(t, q_j)$ или обобщенный потенциал

$$V = \sum_{j=1}^m \Pi_j \dot{q}_j + \Pi = V(t, q_j, \dot{q}_j).$$

В случае натуральной системы $L = T - V$ – квадратичная функция относительно обобщенных скоростей и обобщенные импульсы согласно формуле (14.1)

$$p_j = \sum_{k=1}^m a_{jk} \dot{q}_k + c_j, \quad j = (\overline{1, m}). \quad (14.2)$$

Систему (14.2) можно разрешить относительно обобщенных скоростей, если $\det(a_{jk}) \neq 0$:

$$\dot{q}_j = \sum_{k=1}^m b_{jk} p_k + b_j, \quad j = (\overline{1, m}). \quad (14.3)$$

В случае, когда силы имеют обычный потенциал $\Pi = \Pi(t, q_j)$, получаем согласно (8.12):

$$p_j = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}, \quad j = (\overline{1, m}).$$

Функцию $\hat{F}(t, q_j, p_j)$ будем называть **союзным выражением** для $F(t, q_j, \dot{q}_j)$, в котором используется преобразование (14.3).

Введем в рассмотрение **функцию Гамильтона (гамильтониан)**

$$H(t, q_j, p_j) = \sum_{j=1}^m p_j \hat{q}_j - \hat{L}. \quad (14.4)$$

Воспользуемся преобразованием Лежандра. Поставим в соответствие переменным из теоремы Донкина $x_1 \dots x_m, \alpha_1 \dots \alpha_m, a_{m+1}$ – переменные Лагранжа $\dot{q}_1 \dots \dot{q}_m, q_1 \dots q_m, t$; а переменным $y_1 \dots y_m, \alpha_1 \dots \alpha_m, a_{m+1}$ – переменные Гамильтона $p_1 \dots p_m, q_1 \dots q_m, t$. При этом условие (13.1) эквивалентно

$$\det \left(\frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}_j} \right)_{i,j=1}^m \neq 0.$$

Функцию Гамильтона (14.4) поставим в соответствие функции (13.4) из теоремы Донкина. Определение обобщенных импульсов соответствует уравнению прямого преобразования (13.2). Тогда справедливы также (13.3) и (13.5). Получаем, что

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad (14.5)$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_j} = -\frac{\partial L}{\partial q_j}.$$

Подставляем (14.1) и (14.5) в уравнения Лагранжа (8.13):

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}. \quad (14.6)$$

Уравнения (14.5) и (14.6) составляют систему **канонических уравнений Гамильтона**

$$\begin{aligned} \dot{q}_j &= \frac{\partial H}{\partial p_j}, \\ \dot{p}_j &= -\frac{\partial H}{\partial q_j}. \end{aligned} \quad (14.7)$$

Система (14.7) представляет собой систему $2m$ дифференциальных уравнений первого порядка, эквивалентных m дифференциальным уравнениям второго порядка, при выполнении условия $\det(a_{jk}) \neq 0$.

Отметим некоторые **свойства функции Гамильтона**.

Найдем полную производную по времени функции Гамильтона (14.4):

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{j=1}^m \left[\frac{\partial H}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial H}{\partial p_j} \dot{p}_j \right] + \frac{\partial H}{\partial t}.$$

Преобразуем это выражение с учетом (14.7):

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{j=1}^m \left[\frac{\partial H}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_j} \right] + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}.$$

Таким образом, полная и частная производные по времени от функции Гамильтона равны между собой:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}.$$

Если функция Гамильтона не зависит явным образом от времени, то

$$H = H(q_1 \dots q_m, p_1 \dots p_m) = \text{const} = h. \quad (14.8)$$

Уравнение (14.8) есть **обобщенный интеграл энергии**. Поясним это понятие.

На основании определения обобщенного импульса можно записать

$$H = \sum_{j=1}^m p_j \dot{q}_j - L = \sum_{j=1}^m \frac{\partial L_2}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j + \sum_{j=1}^m \frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j + \sum_{j=1}^m \frac{\partial L_0}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L_2 - L_1 - L_0.$$

Используем **теорему Эйлера об однородных функциях**. Для однородной функции $f(x_1 \dots x_n)$ m -й степени имеет место формула Эйлера:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i = m f.$$

Применительно к кинетическому потенциалу будем иметь:

$$\sum_{j=1}^m \frac{\partial L_2}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = 2L_2, \quad \sum_{j=1}^m \frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = L_1.$$

Тогда гамильтониан можно записать в виде $H = L_2 - L_0$.

Для натуральных систем имеем (см. пункт 9):

$$L_2 = T_2, \quad L_0 = T_0 - \Pi.$$

Перепишем выражение для функции Гамильтона с учетом последних соотношений:

$$H = T_2 - T_0 + \Pi.$$

Для склерономных систем $T_0 = 0$, $T = T_2$, поэтому

$$H = T + \Pi = \text{const} = h. \quad (14.9)$$

Формула (14.9) по сравнению с (14.4) позволяет проще получить гамильтониан.

Таким образом, для склерономных натуральных систем гамильтониан является полной энергией системы, записанной в переменных Гамильтона.

Пример 6. Канонические уравнения движения математического маятника. Найдем канонические уравнения движения математического маятника длиной l и массой m (см. рис.4).

Кинетический потенциал в данном случае запишется следующим образом:

$$L = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\varphi}^2 + mgl \cos \varphi.$$

Тогда для обобщенного импульса имеем

$$p_{\varphi} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2 \dot{\varphi},$$

откуда

$$\dot{\varphi} = \frac{p_{\varphi}}{ml^2}.$$

Запишем функцию Гамильтона:

$$H = p_{\varphi} \dot{\varphi} - L = \frac{1}{2ml^2} p_{\varphi}^2 - mgl \cos \varphi.$$

Канонические уравнения (14.7) имеют вид

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{ml^2} p_{\varphi},$$

$$\dot{p}_{\varphi} = -mgl \sin \varphi.$$

15. Скобки Пуассона

Некоторая функция $f(t, q_j, p_j)$ называется **интегралом уравнений движения** (14.7):

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \quad (j = 1, m),$$

если для любого движения данной системы эта функция сохраняет постоянное значение c :

$$f(t, q_j, p_j) = c. \quad (15.1)$$

Иногда интегралом называют само соотношение (15.1).

Очевидно, что если функции $f_1 \dots f_t$ являются интегралами уравнений движения, то произвольная функция от этих интегралов будет также интегралом. Поэтому в дальнейшем нас будут интересовать только независимые интегралы.

Если известна «полная» система интегралов, состоящая из $2m$ независимых интегралов (m — число степеней свободы системы), то, разрешая соотношения

$$f_k(t, q_j, p_j) = c_k$$

относительно обобщенных скоростей и импульсов, получаем конечные уравнения движения

$$q_j = \varphi(t, c_1 \dots c_{2m}), \quad p_j = \psi(t, c_1 \dots c_{2m}),$$

содержащие $2m$ произвольных постоянных $c_1 \dots c_{2m}$.

Таким образом, если известны $2m$ независимых интегралов, то известны все движения системы.

Покажем метод нахождения интегралов уравнений движения, предложенный Пуассоном и Якоби.

Пусть $f(t, q_j, p_j)$ — интеграл уравнений (14.7). Продифференцируем (15.1) по времени с учетом (14.7):

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_j} \right) = 0. \quad (15.2)$$

Пуассон ввел специальное обозначение — **скобки Пуассона** — для следующего выражения, составленного из частных производных двух произвольных функций:

$$(\varphi, \psi) = \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_j} \frac{\partial \psi}{\partial p_j} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_j} \frac{\partial \psi}{\partial q_j} \right). \quad (15.3)$$

При помощи скобок Пуассона равенство (15.2) – необходимое и достаточное условие для того, чтобы функция $f(t, q_j, p_j)$ была интегралом уравнений (14.7), – записывается так:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (f, H) = 0. \quad (15.4)$$

Отметим следующие **свойства скобок Пуассона** [3].

Для любых функций $\varphi(t, q_j, p_j)$, $\psi(t, q_j, p_j)$, $\chi(t, q_j, p_j)$:

- 1) $(\varphi, \psi) = -(\psi, \varphi)$;
- 2) $(c\varphi, \psi) = c(\varphi, \psi)$, c – постоянная;
- 3) $(\varphi + \psi, \chi) = (\varphi, \chi) + (\psi, \chi)$;
- 4) $((\varphi, \psi), \chi) + ((\psi, \chi), \varphi) + ((\chi, \varphi), \psi) = 0$;
- 5) $\frac{\partial}{\partial t}(\varphi, \psi) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \psi\right) + \left(\varphi, \frac{\partial \psi}{\partial t}\right)$.

Тождества 1, 2, 3 и 5 получаются непосредственно из определения (15.3) скобок Пуассона. Тождество 4, которое называют **тождеством Пуассона**, можно получить, воспользовавшись определением скобок Пуассона.

Пример 7. Вычисление скобок Пуассона. Для функций $\varphi(q, p, t)$ и $\psi(q, p, t)$ вычислить скобку Пуассона (φ, ψ) , если:

$$\begin{aligned} \varphi(q, p, t) &= q \cos(\omega t) + \frac{p}{\omega} \sin(\omega t), \\ \psi(q, p, t) &= p \cos(\omega t) - q \omega \sin(\omega t). \end{aligned}$$

Согласно формуле (15.3) имеем:

$$\begin{aligned} (\varphi, \psi) &= \cos(\omega t) \cos(\omega t) - \left(\frac{\sin(\omega t)}{\omega} \cdot (-\omega \sin(\omega t)) \right) = \\ &= \cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t) = 1. \end{aligned}$$

16. Теорема Якоби-Пуассона

Теорема Якоби-Пуассона. Если f и g – интегралы уравнений движения, то (f, g) – также интеграл этих уравнений.

Доказательство. Требуется доказать, что для функции (f, g) выполняется соотношение (15.4):

$$\frac{\partial(f, g)}{\partial t} + ((f, g), H) = 0.$$

Когда такое соотношение имеет место для каждой из функций f и g :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (f, H) = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial t} + (g, H) = 0.$$

Действительно, согласно тождеству 5

$$\begin{aligned} \frac{\partial(f, g)}{\partial t} &= \left(\frac{\partial f}{\partial t}, g \right) + \left(f, \frac{\partial g}{\partial t} \right) = \\ &= -((f, H), g) - (f, (g, H)) = ((H, f), g) + ((g, H), f). \end{aligned}$$

Поэтому, используя тождество Пуассона, получаем

$$\frac{\partial(f, g)}{\partial t} + ((f, g), H) = ((f, g), H) + ((g, H), f) + ((H, f), g) = 0,$$

что и требовалось доказать.

Может показаться, что теорема Якоби-Пуассона всегда позволяет по двум известным первым интегралам найти еще один первый интеграл, затем еще один и так далее до тех пор, пока не будет получено количество первых интегралов, необходимое для построения общего интеграла системы. Это далеко не так. На практике скобка Пуассона часто может быть либо константой, либо функцией известных первых интегралов.

Для того чтобы можно было надеяться получить из двух первых интегралов много или даже все первые интегралы, недостающие для построения общего интеграла, надо, чтобы хотя бы один из двух известных исходных первых интегралов был характерен для рассматриваемой частной задачи, чтобы он как можно полнее отражал физическую сущность именно данной задачи. Если за исходные первые интегралы брать интегралы,

вытекающие из основных, общих для всех систем теорем динамики, то вряд ли в общем случае можно надеяться на эффективное применение теоремы Якоби-Пуассона.

Пример 8. Рассмотрим движение материальной точки под действием притяжения к заданному центру O . Пусть $Oq_1q_2q_3$ неподвижная прямоугольная декартова система координат, а $\Pi(\vec{r})$ – потенциал силы притяжения, $r^2 = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2$. Если массу точки принять за единицу, то для функции Гамильтона имеем выражение

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + \Pi(\vec{r}).$$

Пусть $f_1 = q_2p_3 - q_3p_2$ и $f_2 = q_3p_1 - q_1p_3$ – первые интегралы (проверкой можно убедиться в справедливости того, что $(f_1, H) = 0$ и $(f_2, H) = 0$). Они представляют собой проекции момента количества движения материальной точки относительно центра O на оси Oq_1 и Oq_2 . Согласно теореме Якоби-Пуассона функция (f_1, f_2) тоже должна быть первым интегралом:

$$(f_1, f_2) = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial f_1}{\partial q_i} \frac{\partial f_2}{\partial p_i} - \frac{\partial f_1}{\partial p_i} \frac{\partial f_2}{\partial q_i} \right) = q_1p_2 - q_2p_1.$$

Полученный интеграл есть проекция момента количества движения на ось Oq_3 .

17. Уравнения Рауса. Циклические и позиционные координаты

Раус предложил в качестве переменных, описывающих состояние системы, использовать часть переменных Лагранжа и часть переменных Гамильтона:

$$q_1 \dots q_m, \dot{q}_1 \dots \dot{q}_m, q_{m+1} \dots q_n, p_{m+1} \dots p_n, t. \quad (17.1)$$

Первые m обобщенных координат и скоростей являются переменными Лагранжа, остальные переменные – Гамильтона. При этом $m < n$.

Для того чтобы от переменных Лагранжа перейти к переменным Гамильтона, необходимо воспользоваться следующим соотношением:

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \quad (\alpha = \overline{m+1, n}). \quad (17.2)$$

Пусть гессиан относительно обобщенных скоростей не равен нулю:

$$\det \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_\alpha \partial \dot{q}_\beta} \right)_{\alpha, \beta = m+1}^n \neq 0,$$

тогда согласно теореме Донкина получаем обратное преобразование:

$$\dot{q}_\alpha = \frac{\partial R}{\partial p_\alpha}, \quad (17.3)$$

где $R = \sum_{\alpha=m+1}^n p_\alpha \hat{q}_\alpha - L$ – **функция Рауса**.

В совокупности величины (17.1) $q_j, \dot{q}_j, q_\alpha, t$ будем рассматривать как параметры $(j = \overline{1, m}, \alpha = \overline{m+1, n})$. Тогда в силу теоремы Донкина имеем:

$$\frac{\partial R}{\partial q_j} = -\frac{\partial L}{\partial q_j}, \quad \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j} = -\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \quad (j = \overline{1, m}); \quad (17.4)$$

$$\frac{\partial R}{\partial q_\alpha} = -\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}, \quad (17.5)$$

$$\frac{\partial R}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}.$$

С помощью (17.4) можно записать m уравнений Лагранжа вида

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial R}{\partial q_j} = 0 \quad (j = \overline{1, m}). \quad (17.6)$$

Уравнения Лагранжа для q_α в силу (17.2) и (17.5) имеют вид

$$\dot{p}_\alpha = -\frac{\partial R}{\partial q_\alpha}. \quad (17.7)$$

Уравнения (17.3) и (17.7) составляют систему $2(n-m)$ канонических уравнений Гамильтона вида

$$\dot{q}_\alpha = \frac{\partial R}{\partial p_\alpha}, \quad \dot{p}_\alpha = -\frac{\partial R}{\partial q_\alpha} \quad (\alpha = \overline{m+1, n}). \quad (17.8)$$

Таким образом, система уравнений (17.6) и (17.8) образует полную систему уравнений движения. При этом в (17.6) функция Рауса играет роль функции Лагранжа, а в уравнениях (17.8) роль функции Гамильтона.

Пусть голономная система имеет n степеней свободы. Координата q_α называется **циклической**, если она не входит явным образом в функцию Лагранжа, т.е. $\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0 \quad (\alpha = \overline{m+1, n})$.

Согласно теореме Донкина q_α не входит тогда в функцию Гамильтона и Рауса.

Остальные координаты $q_j \quad (j = \overline{1, m})$ называют **позиционными**. От позиционных координат зависит кинетическая и потенциальная энергия.

Теорема. *Порядок системы, описывающей движение системы, уменьшается на удвоенное число циклических координат.*

Доказательство. Пусть имеется одна циклическая координата q_α . Согласно уравнениям Гамильтона или Рауса ей соответствует первый интеграл

$$p_\alpha = c_\alpha = \text{const}. \quad (17.9)$$

Запишем каноническую систему Гамильтона:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = \overline{1, n}, \quad i \neq \alpha), \quad (17.10)$$

где H в силу (17.9) имеет вид

$$H = H(q_1 \dots q_{\alpha-1}, q_{\alpha+1} \dots q_n, p_1 \dots p_{\alpha-1}, c_\alpha, p_{\alpha+1} \dots p_n, t). \quad (17.11)$$

Т.е. система (17.10) может быть проинтегрирована:

$$q_i = q_i(t, c_\alpha, c_1 \dots c_{2n-2}), \quad p_i = p_i(t, c_\alpha, c_1 \dots c_{2n-2}). \quad (17.12)$$

Если подставить (17.12) в (17.11):

$$H = H(t, c_\alpha, c_1 \dots c_{2n-2}).$$

Выпишем уравнения Гамильтона для циклической координаты

$$\frac{dq_\alpha}{dt} = \frac{\partial H(t, c_\alpha, c_1 \dots c_{2n-2})}{\partial c_\alpha}. \quad (17.13)$$

Правая часть (17.13) есть функция времени. Разделим переменные и проинтегрируем:

$$q_\alpha = \int \frac{\partial H(t, c_\alpha, c_1 \dots c_{2n-2})}{\partial c_\alpha} dt + c_{2n}.$$

Таким образом, циклические переменные позволяют понизить порядок системы, а сами переменные получаются путем взятия квадратур.

Пример 9. Использование уравнений Рауса. Запишем уравнения Рауса для системы, изображенной на рис. 6.

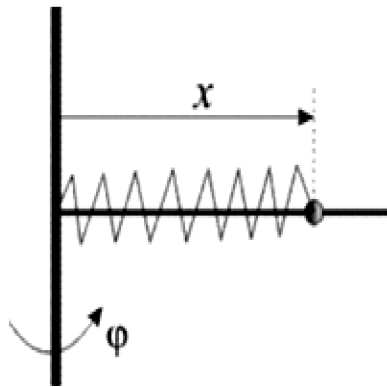


Рис.6. Механическая система

Кинетическая и потенциальные энергии имеют следующий вид:

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + (\dot{\phi} x)^2), \quad \Pi = \frac{c}{2} (x - x_0)^2.$$

Запишем Лагранжиан системы:

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + (\dot{\phi} x)^2) - c(x - x_0)^2.$$

Найдем обобщенный импульс, учитывая (17.2):

$$p_\phi = m x^2 \dot{\phi} = c_\phi$$

Откуда можно выразить обобщенную скорость:

$$\dot{\phi} = \frac{c_{\phi}}{mx^2}.$$

Теперь можно записать выражение для функции Рауса:

$$\begin{aligned} R = p_{\phi}\dot{\phi} - L &= \frac{p_{\phi}^2}{mx^2} - \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \left(\frac{c_{\phi}}{mx^2}x\right)^2\right) + \frac{1}{2}c(x-x_0)^2 = \\ &= \frac{1}{2}\frac{p_{\phi}^2}{mx^2} - \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}c(x-x_0)^2. \end{aligned}$$

Запишем уравнения (17.6) и (17.8) для рассматриваемой системы:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial R}{\partial x} = 0,$$

$$\dot{\phi} = \frac{\partial R}{\partial p_{\phi}},$$

$$\dot{p}_{\phi} = -\frac{\partial R}{\partial \phi}.$$

Или, с учетом выражения для функции Рауса, имеем:

$$m\ddot{x} - \frac{p_{\phi}^2}{mx^3} + 2c(x-x_0) = 0,$$

$$\dot{\phi} = \frac{p_{\phi}}{mx^2},$$

$$\dot{p}_{\phi} = 0.$$

18. Кинетическое происхождение потенциальной энергии для системы с циклическими координатами

Рассмотрим движения голономной склерономной системы с циклическими координатами q_{α} ($\alpha = \overline{m+1, n}$). Кинетическая энергия такой системы имеет вид

$$T = \frac{1}{2} \sum_{r,s=1}^n a_{rs}(q_1 \dots q_m) \dot{q}_r \dot{q}_s. \quad (18.1)$$

Найдем выражение для кинетической энергии в переменных Рауса $q_i, \dot{q}_i, p_\alpha$ ($i = \overline{1, m}; \alpha = \overline{m+1, n}$). Для этого выразим все $\dot{q}_\alpha$ через p_α ($\alpha = \overline{m+1, n}$):

$$p_\alpha = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} = \sum_{i=1}^m a_{\alpha i} \dot{q}_i + \sum_{\beta=m+1}^n a_{\alpha \beta} \dot{q}_\beta \quad (\alpha = \overline{m+1, n}). \quad (18.2)$$

Поскольку определитель $D = \det(a_{\alpha\beta})_{\alpha, \beta=m+1}^n \neq 0$, то из соотношений (18.2) находим

$$\dot{q}_\alpha = \sum_{\beta=m+1}^n b_{\alpha\beta} \left(p_\beta - \sum_{i=1}^m a_{\beta i} \dot{q}_i \right) \quad (\alpha = \overline{m+1, n}), \quad (18.3)$$

где

$$\|b_{\alpha\beta}\| = \|a_{\alpha\beta}\|^{-1}. \quad (18.4)$$

Полагая

$$\gamma_{\alpha i} = \sum_{\beta=m+1}^n b_{\alpha\beta} a_{\beta i} \quad (i = \overline{1, m}; \alpha = \overline{m+1, n}), \quad (18.5)$$

запишем соотношения (18.3) в следующем виде:

$$\dot{q}_\alpha = \sum_{\beta=m+1}^n b_{\alpha\beta} p_\beta - \sum_{i=1}^m \gamma_{\alpha i} \dot{q}_i \quad (\alpha = \overline{m+1, n}). \quad (18.6)$$

Здесь $b_{\alpha\beta}$ и $\gamma_{\alpha i}$ – функции от позиционных координат q_i ($i = \overline{1, m}$). Подставляя выражения (18.6) для $\dot{q}_\alpha$ в формулу (18.1), получаем выражение для кинетической энергии в переменных Рауса:

$$\hat{T} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^* \dot{q}_i \dot{q}_j + \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=m+1}^n a_{\alpha\beta}^* p_\alpha p_\beta + \sum_{i=1}^m \sum_{\alpha=m+1}^n a_{i\alpha}^* \dot{q}_i p_\alpha. \quad (18.7)$$

В этой формуле все $a_{i\alpha}^* = 0$, то есть выражение для кинетической энергии есть сумма квадратичной формы относительно позиционных скоростей и квадратичной формы относительно обобщенных импульсов.

Действительно,

$$a_{i\alpha}^* = \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial \dot{q}_i \partial p_\alpha} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\sum_{\beta=m+1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\beta} \frac{\partial \dot{q}_\beta}{\partial p_\alpha} \right) = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\sum_{\beta=m+1}^n b_{\beta\alpha} p_\beta \right) = 0,$$

так как $\sum_{\beta=m+1}^n b_{\alpha\beta} p_{\beta}$ зависит только от переменных q_i и p_{β} , которые рассматриваются как независимые по отношению к $\dot{q}_i$ ($i = \overline{1, m}$; $\beta = \overline{m+1, n}$).

Вычислим теперь коэффициенты $a_{\alpha\beta}^*$:

$$a_{\alpha\beta}^* = \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial p_{\alpha} \partial p_{\beta}} = \frac{\partial}{\partial p_{\alpha}} \left(\sum_{\gamma=m+1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\gamma}} \frac{\partial \dot{q}_{\gamma}}{\partial p_{\beta}} \right) = \frac{\partial}{\partial p_{\alpha}} \left(\sum_{\gamma=m+1}^n b_{\gamma\beta} p_{\gamma} \right) = b_{\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta = \overline{m+1, n}).$$

Аналогично найдем коэффициенты a_{ij}^* , учитывая, что все $\dot{q}_{\alpha}$ заменяются выражениями (18.6):

$$a_{ij}^* = \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} = a_{ij} - \sum_{\alpha=m+1}^n \gamma_{\alpha i} a_{\alpha j}.$$

Используя равенства (18.5), получаем

$$a_{ij}^* = a_{ij} - \sum_{\alpha, \beta=m+1}^n b_{\alpha\beta} a_{\alpha j} a_{\beta i} \quad (i, j = \overline{1, m}). \quad (18.8)$$

Таким образом, формула (18.7) имеет вид

$$\hat{T} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^* \dot{q}_i \dot{q}_j + \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=m+1}^n b_{\alpha\beta} p_{\alpha} p_{\beta}. \quad (18.9)$$

Здесь коэффициенты a_{ij}^* и $b_{\alpha\beta}$ определяются равенствами (18.4) и (18.8).

Пусть силы, приложенные к склерономной системе, имеют потенциал $\Pi = \Pi(t, q_i)$. Тогда $L = T - \Pi$. Вычислим функцию Рауса:

$$\begin{aligned} R &= R(t, q_i, \dot{q}_i, p_{\alpha}) = \\ &= \sum_{\alpha=m+1}^n p_{\alpha} \dot{q}_{\alpha} - L = \sum_{\alpha=m+1}^n p_{\alpha} \left(\sum_{\beta=m+1}^n b_{\alpha\beta} p_{\beta} - \sum_{i=1}^m \gamma_{\alpha i} \dot{q}_i \right) - T + \Pi = \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m a_{ij}^* \dot{q}_i \dot{q}_j + \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=m+1}^n b_{\alpha\beta} p_{\alpha} p_{\beta} + \Pi - \sum_{i=1}^m \left(\sum_{\alpha=m+1}^n \gamma_{\alpha i} p_{\alpha} \right) \dot{q}_i. \end{aligned} \quad (18.10)$$

Рассмотрим функцию $\Pi^*(t, q_i, p_{\alpha})$, которую назовем **потенциалом Рауса**:

$$\Pi^* = \Pi + \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=m+1}^n b_{\alpha\beta} p_{\alpha} p_{\beta}. \quad (18.11)$$

Кроме того, введем обозначение

$$T^* = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m a_{ij}^* \dot{q}_i \dot{q}_j. \quad (18.12)$$

Тогда, согласно равенству (18.10), функция $-R$, которая для позиционных координат играет роль функции Лагранжа, равна $T^* - V$, где V – обобщенный потенциал, определяемый равенством

$$V = - \sum_{i=1}^m \left(\sum_{\alpha=m+1}^n \gamma_{\alpha i} p_{\alpha} \right) \dot{q}_i + \Pi^*(t, q_i, p_i).$$

Рассмотрим теперь какое-либо движение исходной системы. В этом движении

$$p_{\alpha} = \text{const} = c_{\alpha} \quad (\alpha = \overline{m+1, n}),$$

и изменение позиционных координат $q_i = q_i(t) \quad (t = \overline{1, m})$ может быть определено из дифференциальных уравнений (17.6), в которых всюду необходимо заменить обобщенные импульсы p_{α} на $c_{\alpha} \quad (\alpha = \overline{m+1, n})$. Но эти уравнения являются уравнениями Лагранжа (с функцией Лагранжа $-R = T^* - V$) для некоторой вспомогательной натуральной склерономной системы с m степенями свободы, имеющей кинетическую энергию (18.12) и обобщенный силовой потенциал $V = - \sum_{i=1}^m \left(\sum_{\alpha=m+1}^n \gamma_{\alpha i} c_{\alpha} \right) \dot{q}_i + \Pi^*(t, q_i, c_{\alpha})$. Потенциальной энергией этой системы является потенциал Рауса $\Pi^*(t, q_i, c_{\alpha})$. Из формул (18.9), (18.10) и (18.11) следует, что

$$T + \Pi = T^* + \Pi^*.$$

Полученную вспомогательную систему будем называть **приведенной системой**.

Таким образом, изменение позиционных координат определяет движение приведенной системы с кинетической энергией T^* и обобщенным потенциалом

$V = V_1 + \Pi^*$, где Π^* – потенциал Рауса. При соответствующих движениях исходной и приведенной систем полные энергии этих систем равны между собой.

Рассмотрим частный случай, когда выражение кинетической энергии исходной системы (18.1) не содержит произведений позиционных скоростей на циклические скорости ($a_{i\alpha} = 0$). В этом случае кинетическая энергия T распадается на две квадратичные формы, из которых одна содержит только позиционные скорости, а вторая – только циклические скорости. Такая система называется **гироскопически несвязанной**. Для гироскопически несвязанной системы, согласно формулам (18.5), все $\gamma_{\alpha i} = 0$ и, следовательно, $V_1 = 0$ и $V = \Pi^*$.

Таким образом, если исходная система является гироскопически несвязанной, то приведенная система имеет обычный потенциал Π^* . Кроме того, из равенств (18.8) следует, что для гироскопически несвязанной системы $a_{ij}^* = a_{ij}$, то есть

$$T^* = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j.$$

В этом случае исходная система имеет кинетическую энергию

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j + \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=m+1}^n b_{\alpha\beta} c_\alpha c_\beta$$

и потенциальную $\Pi = \Pi(t, q_i)$, а приведенная – кинетическую энергию

$$T^* = \frac{1}{2} \sum_{i,j=m+1}^n a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j$$

и потенциальную

$$\Pi^* = \Pi(t, q_i) + \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=m+1}^n b_{\alpha\beta} c_\alpha c_\beta.$$

Мы видим, что часть кинетической энергии исходной системы

$\left(\frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=m+1}^n b_{\alpha\beta} c_\alpha c_\beta \right)$ перешла в потенциальную энергию приведенной системы.

Пример 10. Сферический маятник. Рассмотрим сферический маятник массой 1 кг и длиной 1 м (рис.7).

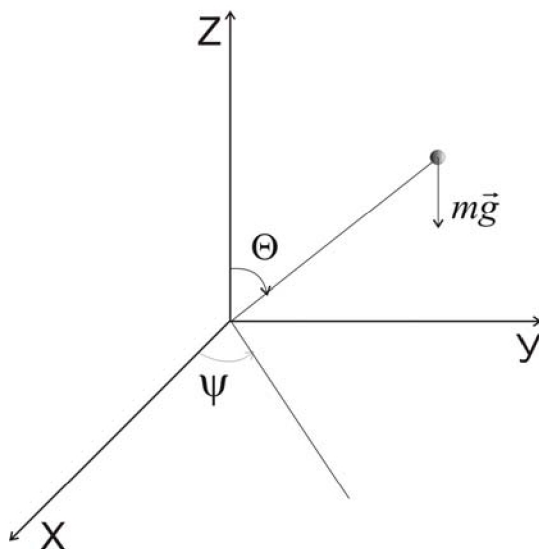


Рис.7. Сферический маятник

Запишем кинетическую и потенциальную энергию:

$$T = \frac{1}{2}(\dot{\Theta}^2 + \sin^2 \Theta \dot{\Psi}^2) , \quad (a)$$

$$\Pi = g \cos \Theta . \quad (b)$$

Найдем обобщенный импульс p_Ψ :

$$p_\Psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\Psi}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\Psi}} = \dot{\Psi} \sin^2 \Theta = c_\Psi ,$$

$$\dot{\Psi} = \frac{c_\Psi}{\sin^2 \Theta} . \quad (c)$$

Подставим (c) в (a), тогда

$$T = \frac{1}{2} \left(\dot{\Theta}^2 + \frac{c_\Psi^2}{\sin^2 \Theta} \right) .$$

Запишем гамильтониан:

$$H = E = \frac{1}{2} \dot{\Theta}^2 + \frac{1}{2} \frac{c_\Psi^2}{\sin^2 \Theta} + g \cos \Theta .$$

Имеем систему с одной степенью свободы. Выражения для приведенной кинетической и потенциальной энергии имеют вид:

$$T^* = \frac{1}{2} \dot{\Theta}^2, \quad \Pi^* = \frac{1}{2} \frac{c_\psi^2}{\sin^2 \Theta} + g \cos \Theta.$$

Таким образом, мы видим, что часть кинетической энергии «перешла» в потенциальную энергию.

Найдем положения равновесия системы. Для этого определим экстремумы потенциальной энергии

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi^*}{\partial \Theta} &= -g \sin \Theta - \frac{c_\psi^2}{2} \frac{2 \sin \Theta \cos \Theta}{\sin^4 \Theta} = -g \sin \Theta \left(1 + \frac{c_\psi^2}{g} \frac{\cos \Theta}{\sin^4 \Theta} \right) = \\ &= \frac{-g}{\sin^3 \Theta} \left[(1 - \cos^2 \Theta)^2 + \frac{c_\psi^2 \cos \Theta}{g} \right] = 0. \end{aligned}$$

Положения равновесия системы могут быть определены из уравнения

$$(1 - \cos^2 \Theta)^2 + \frac{c_\psi^2 \cos \Theta}{g} = 0.$$

Глава III. Уравнения движения неголономных систем

19. Вывод уравнений движения для неголономных систем на основе общего уравнения динамики

Пусть в системе имеются неголономные связи (5.3), вариации обобщенных координат являются зависимыми и определяются (5.4).

Запишем общее уравнение динамики в обобщенных координатах:

$$\sum_{i=1}^m \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} - Q_i \right) \delta q_i = 0. \quad (19.1)$$

Пусть первые n вариаций обобщенных координат будут независимые, а остальные ($m - n = s$) зависимые.

Используя (5.3) и (5.4), выразим зависимые скорости и вариации координат через независимые:

$$\begin{aligned} \dot{q}_{n+k} &= \sum_{i=1}^n A_{ki} \dot{q}_i \quad (k = \overline{1, s}), \\ \delta q_{n+k} &= \sum_{i=1}^n A_{ki} \delta q_i \quad (k = \overline{1, s}). \end{aligned} \quad (19.2)$$

Общее уравнение динамики (19.1) можно представить в виде

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^m \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} - Q_i \right) \delta q_i + \\ &+ \sum_{k=1}^s \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{n+k}} - \frac{\partial T}{\partial q_{n+k}} - Q_{n+k} \right) \delta q_{n+k} = 0. \end{aligned} \quad (19.3)$$

Заменим зависимые вариации в (19.3) их выражениями (19.2), тогда

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^m \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} - Q_i \right) \delta q_i + \\ &+ \sum_{k=1}^s \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{n+k}} - \frac{\partial T}{\partial q_{n+k}} - Q_{n+k} \right) \sum_{i=1}^n A_{ki} \delta q_i = 0. \end{aligned} \quad (19.4)$$

В (19.4) содержатся только независимые вариации. Приравняем множители перед независимыми вариациями к нулю, получим n уравнений вида

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i - \sum_{k=1}^s A_{ki} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{n+k}} - \frac{\partial T}{\partial q_{n+k}} - Q_{n+k} \right) \quad (i = \overline{1, n}). \quad (19.5)$$

Система уравнений (5.3) и (19.4) включает в себя $n+s=m$ уравнений и содержит m неизвестных q_i .

20. Вывод уравнений движения для неголономных систем с помощью множителей Лагранжа

Пусть на систему наложено s дифференциальных неинтегрируемых связей (5.3). При неголономной связи зависимыми являются вариации обобщенных координат (см. соотношение (5.4)).

Тогда в общем уравнении динамики

$$\sum_{j=1}^m \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right) \delta q_j = 0. \quad (20.1)$$

величины δq_j не могут быть произвольными. Они связаны с независимыми соотношениями (5.4) и число степеней свободы системы равно $n = m - s$.

Для вывода уравнений движения воспользуемся методом неопределенных множителей Лагранжа. Каждое из s равенств (5.4) умножим на свой неопределенный скалярный множитель λ_β и результаты вычтем из (20.1).

Тогда получим

$$\sum_{j=1}^m \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j - \sum_{\beta=1}^s \lambda_\beta b_{\beta j} \right) \delta q_j = 0. \quad (20.2)$$

В силу независимости равенств (5.4) ранг матрицы, составленной из коэффициентов $b_{\beta j}$, равен s . Следовательно, хотя бы один из ее миноров порядка s отличен от нуля. Тогда величины $\delta q_1 \dots \delta q_n$ можно принять за независимые, а δq_{n+k} ($k = \overline{1, s}$) однозначно выражаются через них из равенств (5.4).

Выберем величины λ_β так, чтобы коэффициенты при $\delta q_{n+1} \dots \delta q_m$ в выражении (20.2) обратились в нуль. При таком выборе величин λ_β в (20.2)

будут содержаться только независимые вариации δq_i ($i = \overline{1, n}$), и, следовательно, коэффициенты при них должны равняться нулю.

Таким образом, приходим к следующим уравнениям:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j + \sum_{\beta=1}^s \lambda_{\beta} b_{\beta j} \quad (j = \overline{1, m}). \quad (20.3)$$

К ним еще нужно присоединить s уравнений связей (5.3). Тогда получим систему $m+s$ уравнений для определения величин q_j, λ_{β} ($j = \overline{1, m}; \beta = \overline{1, s}$).

Величины λ_{β} называются множителями связей. Слагаемые $\sum_{\beta=1}^s \lambda_{\beta} b_{\beta j}$ в уравнениях (20.3) представляют собой обобщенные реакции связей.

Пример применения данного метода для нахождения уравнений движения можно рассмотреть на задаче о движении конька.

21. Задача о движении конька

Рассмотрим движение конька по горизонтальной поверхности льда в предположении, что трение отсутствует. Пусть C — центр масс конька. Положение конька зададим тремя обобщенными координатами x, y, φ .

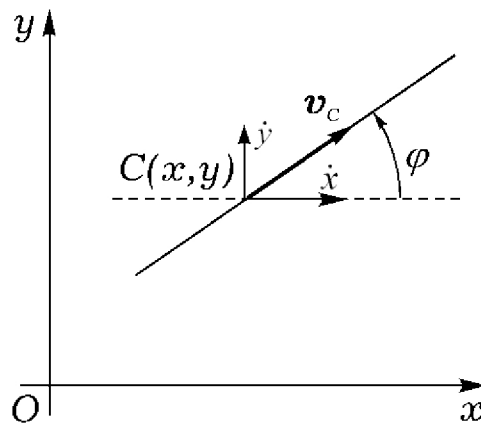


Рис.8. Движение конька

Неинтегрируемая связь задается уравнением

$$\dot{x} \operatorname{tg} \varphi - \dot{y} = 0. \quad (21.1)$$

Если m – масса конька, J_c – его момент инерции относительно вертикальной оси, проходящей через центр масс, то кинетическая энергия вычисляется по формуле

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}J_c\dot{\varphi}^2. \quad (21.2)$$

Уравнения (20.3) в данном случае принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} &= Q_x + \lambda \operatorname{tg} \varphi, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial T}{\partial y} &= Q_y - \lambda, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} &= Q_\varphi. \end{aligned} \quad (21.3)$$

Так как трения нет, а потенциальная энергия Π конька постоянна, то обобщенные силы равны нулю. Уравнения движения (21.3) с учетом выражения для кинетической энергии (21.2) запишутся в виде

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= \lambda \operatorname{tg} \varphi, \\ m\ddot{y} &= -\lambda, \\ \ddot{\varphi} &= 0. \end{aligned} \quad (21.4)$$

Пусть в начальный момент центр масс конька находится в начале координат и конек расположен вдоль оси Ox . Пусть, далее, в начальный момент скорость центра масс равна V_0 , а угловая скорость конька ω_0 . Из уравнения связи (21.1) находим тогда, что при $t=0$, $\dot{y}=0$. Из третьего уравнения системы (21.4) следует

$$\varphi = \omega_0 t; \quad (21.5)$$

т. е. конек движется, равномерно вращаясь вокруг вертикали.

Исключив теперь величину λ из первых двух уравнений системы (21.4), получим

$$\ddot{x} + \operatorname{tg}(\omega_0 t) \ddot{y} = 0. \quad (21.6)$$

Используя уравнение связи (21.1), исключаем отсюда величину $\ddot{y}$. Тогда с учетом равенства (21.5) получим уравнение относительно x :

$$\ddot{x} + \ddot{x} \operatorname{tg}^2(\omega_0 t) + \dot{x} \omega_0 \operatorname{tg}(\omega_0 t) [1 + \operatorname{tg}^2(\omega_0 t)] = 0,$$

$$\ddot{x} + \omega_0 \operatorname{tg}(\omega_0 t) \dot{x} = 0. \quad (21.7)$$

Из (21.1), (21.5) и (21.7) с учетом начальных условий найдем

$$x = \frac{V_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t),$$

$$y = \frac{V_0}{\omega_0} (1 - \cos(\omega_0 t)). \quad (21.8)$$

Отсюда следует, что центр масс конька равномерно со скоростью V_0 движется по окружности радиусом $\frac{V_0}{\omega_0}$, центр которой находится на оси Oy .

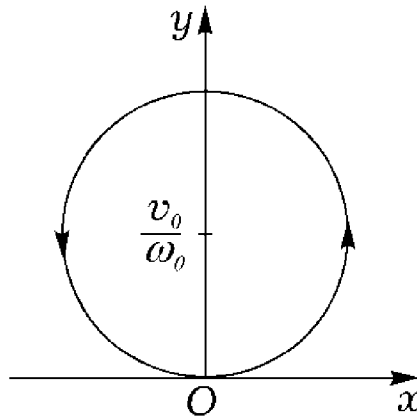


Рис.9. Движение центра масс конька

Множитель λ можно найти теперь из (21.8) и второго из уравнений системы (21.4):

$$\lambda = -m\omega_0 V_0 \cos(\omega_0 t). \quad (21.9)$$

При известной величине λ можно найти реакцию связи. Для ее проекций из (21.4), (21.5) получаем выражения

$$R_x = \lambda \operatorname{tg}(\omega_0 t),$$

$$R_y = -\lambda.$$

Подставив в них значение λ из формулы (21.9), получим

$$\begin{aligned} R_x &= -m\omega_0 V_0 \sin(\omega_0 t), \\ R_y &= m\omega_0 V_0 \cos(\omega_0 t). \end{aligned}$$

Реакция имеет постоянную величину $m\omega_0 V_0$ и направлена к центру окружности, по которой движется центр масс конька.

22. Псевдокоординаты и псевдоскорости

В некоторых задачах динамики, особенно при изучении движения неголономных систем, бывает удобно ввести координаты более общего вида, которые получили название **псевдокоординат**. Пусть n – число степеней свободы. Рассмотрим n независимых линейных комбинаций обобщенных скоростей

$$\dot{\pi}_i = \sum_{j=1}^m c_{ij} \dot{q}_j \quad (i = \overline{1, n}). \quad (22.1)$$

Коэффициенты c_{ij} – функции $q_1 \dots q_m, t$. Величины $\dot{\pi}_i$ имеют вполне определенный смысл некоторых линейных комбинаций обобщенных скоростей, но сами символы π_i могут и не иметь смысла, т. е. правые части в равенствах (22.1) могут не быть полными производными по времени от каких-либо функций обобщенных координат и времени. Будем называть символы π_i **псевдокоординатами**, а величины $\dot{\pi}_i$ и $\ddot{\pi}_i$ – соответственно **псевдоскоростями** и **псевдоускорениями**. Некоторые из π_i могут быть, в частности, обобщенными координатами q_i , тогда соответствующие $\dot{\pi}_i$ и $\ddot{\pi}_i$ – обобщенные скорости и обобщенные ускорения.

Величины c_{ij} будем выбирать так, чтобы определитель линейной системы из $m=n+s$ уравнений (5.3), (22.1) относительно обобщенных скоростей был отличен от нуля. Разрешив эту систему, получим

$$\dot{q}_j = \sum_{i=1}^n d_{ij} \dot{\pi}_i + g_j = 0 \quad (j = \overline{1, m}). \quad (22.2)$$

Псевдоскорости могут принимать произвольные значения. Если они заданы, то обобщенные скорости находятся из (22.2). Величины d_{ij}, g_j в (22.2) – функции $q_1 \dots q_m, t$.

$$\delta\pi_i = \sum_{j=1}^m c_{ij} \delta q_j \quad (i = \overline{1, n}). \quad (22.3)$$

Формула (22.3) фактически является определением величин $\delta\pi_i$. Именно, $\delta\pi_i$ – это величина, равная правой части равенства (22.3), в которой δq_j – вариации обобщенных координат.

Из (22.3) и (5.4) находим выражение δq_j через величины $\delta\pi_i$ ($i = \overline{1, n}$):

$$\delta q_j = \sum_{i=1}^n d_{ij} \delta\pi_i \quad (j = \overline{1, m}). \quad (22.4)$$

Здесь величины $\delta\pi_i$ могут принимать произвольные значения.

Выразим виртуальные перемещения $\delta\vec{r}_k$ точек системы через величины $\delta\pi_i$. Подставив (22.4) в выражение для виртуальных перемещений (6.2):

$$\delta\vec{r}_k = \sum_{j=1}^m \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \delta q_j,$$

получим

$$\delta\vec{r}_k = \sum_{i=1}^n \vec{e}_{ki} \delta\pi_i \quad (k = \overline{1, N}), \quad (22.5)$$

где введено обозначение

$$\vec{e}_{ki} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} d_{ij} \quad (k = \overline{1, N}, i = \overline{1, n}).$$

Найдем выражение для $\vec{w}_k = \ddot{\vec{r}}_k$:

$$\vec{w}_k = \ddot{\vec{r}}_k = \sum_{j=1}^m \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \ddot{q}_j + \sum_{j,k=1}^m \frac{\partial^2 \vec{r}_k}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k + 2 \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 \vec{r}_k}{\partial q_j \partial t} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 \vec{r}_k}{\partial t^2}. \quad (22.6)$$

Запишем это выражение несколько иначе. Для этого продифференцируем обе части соотношений (22.2) по времени и полученное выражение для обобщенных ускорений подставим в формулу (22.6), которая примет вид

$$\vec{w}_k = \sum_{i=1}^n \vec{e}_{ki} \ddot{\pi}_i + \vec{h}_k \quad (k = \overline{1, N}),$$

где вектор-функции $\vec{h}_k$ не зависят от псевдоускорений. Отсюда следует, что

$$\vec{e}_{ki} = \frac{\partial \vec{w}_k}{\partial \ddot{\pi}_i} \quad (k = \overline{1, N}; i = \overline{1, n}). \quad (22.7)$$

Подставив (22.7) в (22.5), получим окончательное выражение для $\delta \vec{r}_k$ в виде

$$\delta \vec{r}_k = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{w}_k}{\partial \ddot{\pi}_i} \delta \pi_i \quad (k = \overline{1, N}). \quad (22.8)$$

23. Уравнения Аппеля

Аппель предложил в качестве уравнений движения использовать уравнения, не содержащие множителей связей. Уравнения Аппеля применимы как к голономным, так и к неголономным системам с неинтегрируемыми связями вида (5.3). Получим эти уравнения в псевдокоординатах. Пусть псевдоскорости определены по формулам (22.1).

Для получения уравнений Аппеля выразим в псевдокоординатах общее уравнение динамики

$$\sum_{k=1}^N (\vec{F}_k - m_k \vec{w}_k) \delta \vec{r}_k = 0. \quad (23.1)$$

Подставим в равенство

$$\sum_{k=1}^N \vec{F}_k \delta \vec{r}_k = \sum_{j=1}^m Q_j \delta q_j = \delta A,$$

где Q_j – обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате q_j , вместо величин δq_j их выражения через $\delta \pi_i$ по формулам (22.4). Получим элементарную работу активных сил в виде

$$\delta A = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k \delta \vec{r}_k = \sum_{j=1}^m Q_j \sum_{i=1}^n d_{ij} \delta \pi_i = \sum_{i=1}^n \Pi_i \delta \pi_i, \quad (23.2)$$

где $\Pi_i = \sum_{j=1}^m d_{ij} Q_j \quad (i = \overline{1, n})$.

Величины Π_i называются обобщенными силами, соответствующими псевдокоординатам π_i .

Работы сил инерции в псевдокоординатах получим, при помощи равенств (22.8)

$$-\sum_{k=1}^N m_k \vec{w}_k \delta \vec{r}_k = -\sum_{k=1}^N m_k \vec{w}_k \sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{w}_k}{\partial \ddot{\pi}_i} \delta \pi_i = -\sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^N m_k \vec{w}_k \frac{\partial \vec{w}_k}{\partial \ddot{\pi}_i} \right) \delta \pi_i. \quad (23.3)$$

Если ввести функцию S по формуле

$$S = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k w_k^2,$$

то равенство (23.3) можно записать так:

$$-\sum_{k=1}^N m_k \vec{w}_k \delta \vec{r}_k = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial S}{\partial \ddot{\pi}_i} \delta \pi_i. \quad (23.4)$$

Функция S называется **энергией ускорений**. В общем случае она является функцией от $q_1 \dots q_m, \dot{\pi}_1 \dots \dot{\pi}_n, \ddot{\pi}_1 \dots \ddot{\pi}_n, t$.

Из равенств (23.2) и (23.4) следует, что общее уравнение динамики в псевдокоординатах имеет вид

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial S}{\partial \ddot{\pi}_i} - \Pi_i \right) \delta \pi_i = 0.$$

Так как величины $\delta \pi_i$ могут принимать произвольные значения, то отсюда следуют уравнения

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{\pi}_i} = \Pi_i \quad (i = \overline{1, n}). \quad (23.5)$$

Эти уравнения называются **уравнениями Аппеля**. Они должны рассматриваться совместно с s уравнениями связей (5.3) и p соотношениями (22.1), вводящими псевдоскорости.

Основное достоинство этих уравнений – это простота вывода. К недостаткам можно отнести то, что они не позволяют найти уравнения и реакции связей.

Пример 11. Использование уравнений Аппеля. Рассмотрим движение двух материальных точек массой m в вертикальной плоскости, соединенных невесомым стержнем длиной l . Скорость середины стержня направлена всегда по стержню.

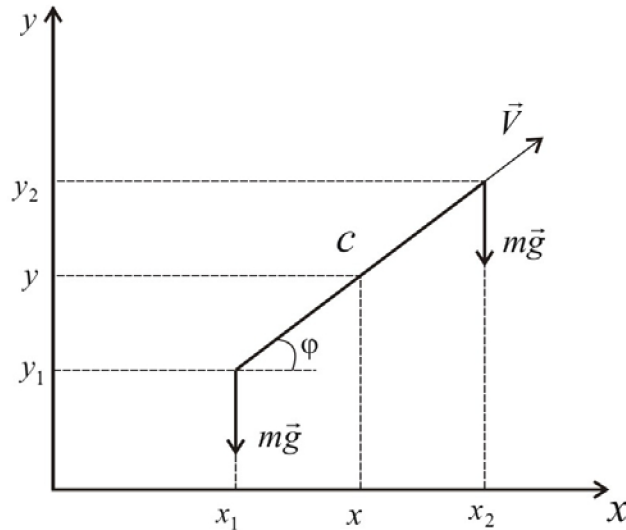


Рис.10. Механическая система

В качестве независимых координат выберем координаты центра стержня x и y , а также угол, образованный горизонтальной осью и стержнем – φ . Будем иметь неголономную связь

$$\dot{x} \operatorname{tg} \varphi - \dot{y} = 0 \quad (a)$$

Введем псевдоскорость следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{\pi} \cos \varphi, \\ \dot{y} &= \dot{\pi} \sin \varphi. \end{aligned} \quad (b)$$

Запишем энергию ускорения

$$S = \frac{1}{2} m (\ddot{x}_1^2 + \ddot{y}_1^2 + \ddot{x}_2^2 + \ddot{y}_2^2). \quad (c)$$

Координаты точек можно найти по формулам:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= x \mp \frac{l}{2} \cos \varphi, \\ y_{1,2} &= y \mp \frac{l}{2} \sin \varphi. \end{aligned}$$

Тогда, подставляя эти соотношения в (с), имеем

$$S = \frac{1}{2} 2m (\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2) + \frac{1}{4} m l^2 (\ddot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^4).$$

Перепишем с учетом (b):

$$S = m\ddot{\pi}^2 + \frac{1}{4}ml^2\ddot{\varphi}^2 + \dots \quad (d)$$

В (d) опущены члены, не содержащие псевдоускорения.

Найдем вариацию работы, учитывая, что $\delta y = \sin \varphi \delta \pi$:

$$-2mg\delta y = \delta A = -2mg \sin \varphi \delta \pi + 0 \cdot \delta \varphi.$$

Откуда

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= -2mg \sin \varphi, \\ \Pi_2 &= 0. \end{aligned} \quad (e)$$

Запишем уравнения Аппеля (22.5) с помощью (d) и (e):

$$\begin{aligned} 2m\ddot{\pi} &= -2mg \sin \varphi, \\ \ddot{\varphi} &= 0, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \ddot{\pi} &= -g \sin \varphi, \\ \ddot{\varphi} &= 0. \end{aligned} \quad (f)$$

Уравнения (a) и (f) составляют полную систему уравнений движения, которая легко интегрируется. Решение имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} x &= \frac{g}{2\alpha^2}(\alpha t + \beta) + \left(\frac{\gamma}{\alpha} + \frac{g}{2\alpha^2} \cos(\alpha t + \beta) \right) \sin(\alpha t + \beta) + \delta, \\ y &= -\left(\frac{\gamma}{\alpha} + \frac{g}{2\alpha^2} \cos(\alpha t + \beta) \right) \cos(\alpha t + \beta) + \varepsilon, \\ \varphi &= \alpha t + \beta. \end{aligned}$$

Константы интегрирования $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ могут быть найдены из начальных условий.

24. Задача о качении и верчении монеты

Решение этой классической задачи дано было впервые Аппелем и Картевеном в 1899 году. Представим себе вначале свободное движение монеты (бесконечно тонкого диска) в трехмерном пространстве. Тогда механическая система (монета) имеет 6 степеней свободы и определяется шестью

обобщенными координатами. Ими могут быть координаты центра масс монеты ξ_c, η_c, ζ_c и углы Эйлера ψ, Θ, φ .

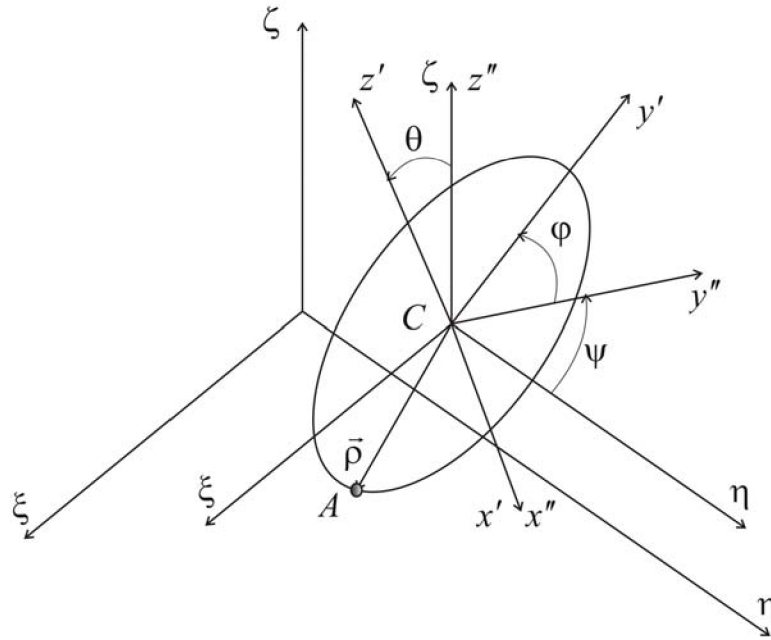


Рис.11. Движение монеты

Если бесконечно тонкая монета катится по плоскости (или вертится), то скорость точки монеты, соприкасающейся с плоскостью, должна быть равна нулю:

$$\vec{V}_A = \vec{V}_C + \vec{V}_{AC} = \vec{V}_C + \vec{\omega} \times \overrightarrow{CA} = 0.$$

Выписанное векторное равенство эквивалентно трем скалярным, спроецированным на неподвижные оси. При переходе от неподвижной системы осей к подвижной системе найдем, что $\overrightarrow{CA} = -R\vec{e}_{y'}$, где R – радиус монеты, $\vec{e}_{y'}$ – единичный орт, направленный по оси y' . Получаем

$$\vec{\rho} = \overrightarrow{CA} = R(\vec{e}_{\xi} \sin \psi \cos \Theta - \vec{e}_{\eta} \cos \psi \cos \Theta - \vec{e}_{\zeta} \sin \Theta).$$

Аналогично разложим вектор угловой скорости по осям ξ, η, ζ :

$$\begin{aligned} \omega &= \dot{\psi} \vec{e}_{\zeta'} + \dot{\Theta} \vec{e}_{x'} + \dot{\varphi} \vec{e}_{z'} = \\ &= \vec{e}_{\xi} (\dot{\Theta} \cos \psi + \dot{\varphi} \sin \Theta \sin \psi) + \vec{e}_{\eta} (\dot{\Theta} \sin \psi - \dot{\varphi} \sin \Theta \cos \psi) + \\ &+ \vec{e}_{\zeta} (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \Theta), \end{aligned}$$

и, учтем, что $\vec{V}_C = \vec{e}_{\xi} \dot{\xi}_c + \vec{e}_{\eta} \dot{\eta}_c + \vec{e}_{\zeta} \dot{\zeta}_c$. В итоге равенство $\vec{V}_A = 0$ приобретает вид

$$\vec{e}_\xi \dot{\xi}_c + \vec{e}_\eta \dot{\eta}_c + \vec{e}_\zeta \dot{\zeta}_c + \begin{vmatrix} \vec{e}_\xi & \vec{e}_\eta & \vec{e}_\zeta \\ \omega_\xi & \omega_\eta & \omega_\zeta \\ \rho_\xi & \rho_\eta & \rho_\zeta \end{vmatrix} = 0,$$

раскрывая которое получим:

$$\xi_c - R\dot{\Theta} \sin \psi \sin \Theta + R \cos \psi (\dot{\psi} \cos \Theta + \dot{\phi}) = 0, \quad (24.1)$$

$$\eta_c + R\dot{\Theta} \cos \psi \sin \Theta + R \sin \psi (\dot{\psi} \cos \Theta + \dot{\phi}) = 0, \quad (24.2)$$

$$\zeta_c - R\dot{\Theta} \cos \Theta = 0.$$

Третье из этих кинематических соотношений может быть проинтегрировано:

$$\zeta_c = R \sin \Theta,$$

тем самым мы получаем 5 обобщенных координат: $\xi, \eta, \zeta, \Theta, \phi$, которые не являются независимыми из-за наличия двух кинематических связей (24.1) и (24.2), поэтому число степеней свободы равно $5 - 2 = 3$.

Выпишем далее выражение для кинетической и потенциальной энергии (монета находится в поле силы тяжести):

$$\begin{aligned} T &= \frac{m}{2} (\dot{\xi}_c^2 + \dot{\eta}_c^2 + R^2 \dot{\Theta}^2 \cos^2 \Theta) + \\ &+ \frac{1}{2} \left(A (\dot{\psi}^2 \sin^2 \Theta + \dot{\Theta}^2) + C (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \Theta)^2 \right), \\ \Pi &= mgR \sin \Theta, \end{aligned}$$

где m – масса монеты, A и C – экваториальный и осевой моменты инерции, g – ускорение свободного падения.

Выпишем уравнения Рауса в виде

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = \lambda_\xi A_{\xi k} + \lambda_\eta A_{\eta k}$$

где $L = T - \Pi$, q_k – обобщенные координаты $(\xi_c, \eta_c, \psi, \Theta, \phi)$, λ_ξ и λ_η – множители Лагранжа, $A_{\xi k}$ и $A_{\eta k}$ – коэффициенты при соответствующих производных в кинематических связях.

Эти уравнения имеют вид:

$$m \ddot{\xi}_c = \lambda_\xi, \quad (24.3)$$

$$m\ddot{\eta}_c = \lambda_\eta, \quad (24.4)$$

$$\frac{d}{dt} [A\dot{\psi} \sin^2 \Theta + C(\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \Theta) \cos \Theta] = R \cos \Theta (\lambda_\xi \cos \psi + \lambda_\eta \sin \psi), \quad (24.5)$$

$$\frac{d}{dt} [C(\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \Theta)] = R (\lambda_\xi \cos \psi + \lambda_\eta \sin \psi), \quad (24.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [(mR^2 \cos^2 \Theta + A)\dot{\Theta}] + mR^2 \dot{\Theta}^2 \sin \Theta \cos \Theta - \\ - A\dot{\psi}^2 \sin \Theta \cos \Theta + C\dot{\psi}^2 (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \Theta) \sin \Theta + \\ + mgR \cos \Theta = R \sin \Theta (-\lambda_\xi \sin \psi + \lambda_\eta \cos \psi). \end{aligned} \quad (24.7)$$

В уравнениях (24.1)-(24.7) производная $\dot{\phi}$ входит в сумме с $\dot{\psi} \cos \Theta$, поэтому в дальнейшем заменяем всюду $\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \Theta$ на ω_z .

Учитывая уравнения связей (24.1) и (24.2), можно выразить вторые производные $\ddot{\xi}_c$ и $\ddot{\eta}_c$ через остальные переменные и тем самым, согласно уравнениям (24.3) и (24.4), найти выражения для λ_ξ и λ_η :

$$\begin{aligned} \lambda_\xi &= mR \frac{d}{dt} (\dot{\Theta} \sin \Theta \sin \psi - \omega_z \cos \psi), \\ \lambda_\eta &= -mR \frac{d}{dt} (\dot{\Theta} \sin \Theta \cos \psi + \omega_z \sin \psi). \end{aligned}$$

Подставляя их в правые части уравнений (24.5)-(24.7), получим в итоге три уравнения для переменных Θ , $\dot{\psi} = \omega_\psi$ и ω_z :

$$\frac{d}{dt} [A\omega_\psi \sin^2 \Theta + C\omega_z \cos \Theta] = mR^2 \cos \Theta (\dot{\Theta} \omega_\psi \sin \Theta - \dot{\omega}_z), \quad (24.8)$$

$$\frac{d}{dt} [C\omega_z] = mR^2 (\dot{\Theta} \omega_\psi \sin \Theta - \dot{\omega}_z), \quad (24.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [(mR^2 \cos^2 \Theta + A)\dot{\Theta}] + mR^2 \dot{\Theta}^2 \sin \Theta \cos \Theta - A\omega_\psi^2 \sin \Theta \cos \Theta + \\ + C\omega_z \omega_\psi \sin \Theta + mgR \cos \Theta = -mR^2 \left[\frac{d}{dt} (\dot{\Theta} \sin \Theta) + \omega_z \omega_\psi \right] \sin \Theta. \end{aligned} \quad (24.10)$$

Уравнение (24.9) можно записать в виде

$$\frac{C + mR^2}{mR^2} \frac{d\omega_z}{d\Theta} = \omega_\psi \sin \Theta. \quad (24.11)$$

Из уравнений (24.8) и (24.9) следует соотношение

$$\frac{d}{dt} [A \sin^2 \Theta \omega_\psi] + C \omega_z \frac{d \cos \Theta}{dt} = 0, \quad (24.12)$$

которое можно записать в виде

$$\omega_z = \frac{A}{C} \left[\frac{d\omega_\psi}{d\Theta} \sin \Theta + 2\omega_\psi \cos \Theta \right]. \quad (24.13)$$

Объединяя уравнения (24.13) и (24.11), получим

$$\frac{d^2 \omega_z}{d\Theta^2} + \operatorname{ctg} \Theta \frac{d\omega_z}{d\Theta} - \frac{mR^2}{C + mR^2} \frac{C}{A} \omega_z = 0, \quad (24.14)$$

уравнение, исследованное Аппелем и Картевегом, подстановкой оно сводится к гипергеометрическому уравнению Гаусса. Поскольку изучить поведение решений уравнения (24.14) очень трудно, ограничимся исследованием частных решений уравнений (24.8)-(24.10). Изучим стационарные режимы:

$$\Theta = \text{const}, \omega_z = \text{const}, \omega_\psi = \text{const}.$$

Уравнения (24.8) и (24.9) при этом переходят в тождества, а уравнение (24.10) дает соотношение

$$(C + mR^2) \omega_z \omega_\psi \sin \Theta - A \omega_\psi^2 \sin \Theta \cos \Theta + mgR \cos \Theta = 0.$$

Отметим, что в реальных условиях стационарные режимы могут существовать, если $|T| = m\sqrt{\ddot{\xi}_c^2 + \ddot{\eta}^2} \leq fmg$, где T – сила трения, f – коэффициент трения, в противном случае точка A монеты будет проскальзывать.

Отсюда, с учетом выражений для λ_ξ и λ_η , получим условие

$$R|\omega_z \omega_\psi| \leq fg. \quad (24.15)$$

Всегда возможны режимы:

а) $\Theta = \frac{\pi}{2}$, $\omega_z = 0$, $\omega_\psi = \text{const}$ – чистое верчение,

б) $\Theta = \frac{\pi}{2}$, $\omega_\psi = 0$, $\omega_z = \text{const}$ – чистое качение.

Исследуем устойчивость таких режимов, для этого рассмотрим движение монеты, близкое к чистому верчению или чистому качению.

В случае (а) представим переменные в виде:

$$\Theta = \frac{\pi}{2} + \Delta\Theta, \quad \omega_z = \Delta\omega_z, \quad \omega_\psi = \Omega + \Delta\omega_\psi, \quad (24.16)$$

где значения $\Delta\Theta, \Delta\omega_z, \Delta\omega_\psi$ малы (их квадратами и производными можно пренебречь), а

$$\Theta \approx \text{const}, \quad \sin \Theta \approx 1, \quad \cos \Theta \approx 0.$$

Тогда уравнение (24.10) запишется в виде

$$(A + mR^2)\Delta\ddot{\Theta} + (A\Omega^2 - mgR)\Delta\Theta + (C + mR^2)\Omega\Delta\omega_z = 0, \quad (24.17)$$

а уравнение (24.9) – в виде

$$(C + mR^2)\Delta\dot{\omega}_z = mR^2\Omega\Delta\dot{\Theta}. \quad (24.18)$$

Интегрируя выражение (24.18), получим

$$(C + mR^2)\Delta\omega_z = mR^2\Omega\Delta\Theta + C_1,$$

где константа есть величина малая. Подставляя этот результат в уравнение (24.17), получим

$$(A + mR^2)\Delta\ddot{\Theta} + [(A + mR^2)\Omega^2 - mgR]\Delta\Theta + (C + mR^2)\Omega C_1 = 0.$$

Решение этого уравнения при

$$\omega^2 = \Omega^2 - \frac{mgR}{A + mR^2} > 0 \quad (24.19)$$

имеет вид

$$\Delta\Theta = -\frac{(C + mR^2)\Omega C_1}{(A - mR^2)\Omega^2 - mgR} + C_2 \cos \omega t + C_3 \sin \omega t.$$

Как видно, решение имеет колебательный, невозрастающий характер, следовательно, возникшее отклонение $\Delta\Theta$ не возрастает и решение $\Theta = \frac{\pi}{2}$

устойчиво.

Если, напротив, $\lambda^2 = \frac{mgR}{A + mR^2} - \Omega^2 > 0$, то решение имеет вид

$$\Delta\Theta = -\frac{(C + mR^2)\Omega C_1}{(A - mR^2)\Omega^2 - mgR} + \tilde{C}_3 e^{\lambda t} + \tilde{C}_4 e^{-\lambda t}$$

и слагаемое $\tilde{C}_3 e^{\lambda t}$ неограниченно возрастает, т.е. приращение $\Delta\Theta$ перестает быть малым, стационарный режим разрушается, он неустойчив.

Аналогично рассмотрим случай (б):

$$\Theta = \frac{\pi}{2} + \Delta\Theta, \quad \omega_z = \Omega + \Delta\omega_z, \quad \omega_\psi = \Delta\omega_\psi.$$

Уравнение (24.10) приобретает вид

$$(A + mR^2)\Delta\ddot{\Theta} - mgR\Delta\Theta + (C + mR^2)\Omega\Delta\omega_\psi = 0, \quad (24.20)$$

а уравнение (24.11):

$$A\Delta\dot{\omega}_\psi = C\Omega\Delta\dot{\Theta}.$$

Интегрируя последнее уравнение и подставляя результат в уравнение (24.20), получим аналогично предыдущему условие устойчивости:

$$(C + mR^2)\frac{A}{C}\Omega^2 > mgR.$$

Глава IV. Вариационные принципы

Вариационные принципы представляют собой условия, отличающие истинное (действительное) движение от возможных. Выделяют дифференциальные и интегральные вариационные принципы. **Дифференциальные вариационные принципы** представляют собой условия для заданного фиксированного момента времени, а **интегральные** – для конечного интервала времени.

25. Вариационный принцип Гамильтона

Рассмотрим произвольную голономную систему с независимыми координатами $q_1 \dots q_m$ и функцией Лагранжа $L(t, q_j, \dot{q}_j)$.

Интеграл

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L(t, q_j, \dot{q}_j) dt \quad (25.1)$$

называется **действием (по Гамильтону)** за промежуток времени (t_0, t_1) , а выражение $L(t, q_j, \dot{q}_j) dt$ – **элементарным действием**.

Так как функция L имеет вид $L = L(t, q_j, \dot{q}_j)$, то для вычисления действия (25.1) необходимо задать функции $q_j = q_j(t)$ ($j = \overline{1, m}$) в интервале времени (t_0, t_1) – другими словами, действие S есть функционал, зависящий от движения системы.

Если мы произвольно зададим функции $q_j = q_j(t)$ ($j = \overline{1, m}$), то получим некоторое кинематически возможное (т. е. допускаемое связями) движение. В расширенном $(m+1)$ -мерном координатном пространстве, где координатами являются величины обобщенные координаты и время, это движение изображается некоторой кривой. Мы будем рассматривать всевозможные такие кривые – «пути», проходящие через две заданные точки пространства $M_0(t_0, q_j^0)$ и $M_1(t_1, q_j^1)$, т.е. все возможные движения, переводящие систему из

данного начального положения q_j^0 , которое она занимала в момент времени t_0 , в данное конечное положение q_j^1 , которое она занимает в момент времени t_1 . При этом заранее фиксируются начальный и конечный моменты времени t_0 и t_1 , начальное и конечное положения системы. В остальном движения произвольны.

Если система натуральная и несвободная, то рассматриваемые здесь движения подчиняются лишь одному ограничению: при движении системы наложенные на точки системы связи не должны нарушаться. Это условие выполняется автоматически, когда мы задаем движение в независимых координатах, полагая $q_j = q_j(t)$ ($j = \overline{1, m}$).

Допустим, что среди рассматриваемых путей имеется так называемый «прямой» путь, т.е. путь, по которому может двигаться система при заданной функции L (т. е. в данном силовом поле).

Для прямого пути функции $q_j = q_j(j = \overline{1, m})$ удовлетворяют уравнениям Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad (j = \overline{1, m}). \quad (25.2)$$

Все остальные пути, проходящие через точки M_0 и M_1 , будем называть «окольными» путями.

Мы докажем, что действие S имеет для прямого пути экстремальное (точнее, стационарное) значение по сравнению с окольными путями. В этом и заключается принцип Гамильтона (данный принцип также называют принципом Гамильтона-Остроградского).

Рассмотрим произвольное однопараметрическое семейство путей

$$q_j = q_j(t, \alpha) \quad (t_0 \leq t \leq t_1; -\gamma \leq \alpha \leq \gamma; j = \overline{1, m}),$$

содержащее в себе при $\alpha = 0$ данный прямой путь; при $\alpha \neq 0$ получаются окольные пути. Пусть все эти пути имеют общее начало M_0 и общий конец M_1 :

$$q_j(t_0, \alpha) = q_j^0, \quad q_j(t_1, \alpha) = q_j^1 \quad \left(-\gamma \leq \alpha \leq \gamma; j = \overline{1, m} \right).$$

Действие S , вычисленное вдоль пути, принадлежащего этому семейству, представляет собой функцию параметра α

$$S(\alpha) = \int_{t_0}^{t_1} L[t, q_j(t, \alpha), \dot{q}_j(t, \alpha)] dt.$$

Вычислим вариацию действия S :

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_0}^{t_1} \delta L dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right) dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{d}{dt} (\delta q_j) \right) dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \right) - \delta q_j \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \right) dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^m \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \right) dt + \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} \delta q_j - \delta q_j \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \right) dt = \\ &= \sum_{j=1}^m \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \Big|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j dt. \end{aligned} \tag{25.3}$$

Здесь мы преобразовали интеграл при помощи интегрирования по частям, используя для этого перестановочность операции варьирования и операции дифференцирования по времени:

$$\delta \dot{q}_j = \delta \frac{d}{dt} q_j(t, \alpha) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{d}{dt} q_j(t, \alpha) \delta \alpha = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} q_j(t, \alpha) \delta \alpha \right] = \frac{d}{dt} \delta q_j.$$

Прямой и все окольные пути проходят через фиксированные начальную и конечную точки в расширенном координатном пространстве. Поэтому при $t = t_0$ и при $t = t_1$ вариации $\delta q_j = 0$ и проинтегрированная часть обращается в нуль.

Из равенства (25.3) видно, что для прямого пути выражение, стоящее под знаком преобразованного интеграла, в силу уравнений Лагранжа, равно нулю. Поэтому для прямого пути

$$\delta S = 0. \tag{25.4}$$

Это и есть математическое выражение принципа Гамильтона.

Имеет место и обратное утверждение: если для некоторого пути $\delta S = 0$, то этот путь является прямым. Действительно, вследствие произвольности вариаций $\delta q_j = 0$ (они на концах равны нулю, в остальных же точках пути совершенно произвольны) из условия $\delta S = 0$, в силу равенства (25.3), следуют равенства (25.2), т. е. уравнения Лагранжа для прямого пути.

Поскольку из принципа Гамильтона вытекают уравнения Лагранжа в независимых координатах (и наоборот), то принцип Гамильтона может быть положен в основу динамики голономных систем [4].

Прямые пути, т. е. «истинные» движения при заданной функции L , могут быть охарактеризованы как при помощи дифференциальных уравнений движения в форме Лагранжа, так и при помощи вариационного принципа Гамильтона. Однако между дифференциальными уравнениями движения и вариационными принципами имеется одно принципиальное различие.

Дифференциальные уравнения движения выражают некоторую зависимость, связывающую между собой момент времени, положение системы, скорости и ускорения ее точек в этот момент. Если эта зависимость выполняется в каждой точке некоторого пути, то этот путь является прямым. Вариационный же принцип характеризует весь прямой путь в целом. Он формулирует экстремальное (стационарное) свойство некоторого функционала, выделяющее прямой путь среди других кинематически возможных путей. Вариационные принципы имеют более обобщимую и компактную форму и часто используются в качестве фундамента для новых (неклассических) областей механики.

26. Задача о колебании струны

Рассмотрим струну длиной l , закрепленную на шарнирах (рис. 12). Составим уравнение движения струны. Пусть k – сила натяжения струны, а ρ – линейная плотность струны.

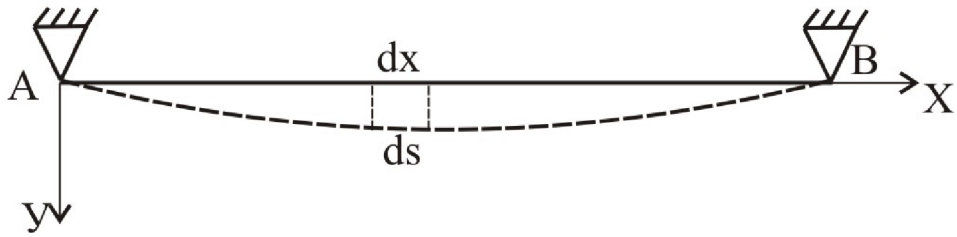


Рис.12. Струна

Вычислим удлинение струны:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + y'^2} dx, \quad y' = \frac{dy}{dx}.$$

Тогда

$$\Delta x = ds - dx = \left(\sqrt{1 + y'^2} - 1 \right) dx \approx \left(1 + \frac{1}{2} y'^2 - 1 \right) dx = \frac{1}{2} y'^2 dx.$$

Найдем потенциальную и кинетическую энергию системы:

$$\begin{aligned} d\Pi &= k \Delta x = \frac{k}{2} y'^2 dx, \\ dT &= \frac{1}{2} dm \dot{y}^2 = \frac{1}{2} \rho \dot{y}^2 dx. \end{aligned} \tag{26.1}$$

Интегрируя (26.1), получаем

$$\begin{aligned} \Pi &= \int_0^l d\Pi = \frac{1}{2} \int_0^l k y'^2 dx, \\ T &= \int_0^l dT = \frac{1}{2} \int_0^l \rho \dot{y}^2 dx. \end{aligned} \tag{26.2}$$

Действие по Гамильтону в силу (26.2) имеет тогда следующий вид:

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x, \dot{y}, y') dt = \frac{1}{2} \iint (\rho \dot{y}^2 - k y'^2) dx dt. \tag{26.3}$$

В (26.3) входят две независимые переменные, тогда условию (25.4) отвечает не уравнения Лагранжа второго рода, которые зависят от времени, а уравнение похожей структуры для двух независимых переменных – уравнение Остроградского:

$$\begin{aligned}
L_y - \frac{\partial}{\partial t} L_{\dot{y}} - \frac{\partial}{\partial x} L_{y'} &= 0, \\
L_y &= \frac{\partial L}{\partial y}, \\
L_{y'} &= \frac{\partial L}{\partial y'}, \\
L_{\dot{y}} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}.
\end{aligned}
\tag{26.4}$$

Отметим, что (26.4) совпадает с (25.2) при одной независимой переменной.

Найдем частные производные в (26.4):

$$L_y = 0, \quad L_{y'} = -2ky', \quad L_{\dot{y}} = 2\dot{y}\rho. \tag{26.5}$$

Подставляя (26.5) в уравнение Остроградского, получим уравнение движения струны:

$$\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - k \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0.$$

27. Вариационный принцип Гамильтона для неконсервативных систем

Принцип Гамильтона можно обобщить, по крайней мере формально, и на неконсервативные системы. Обобщённый таким путём принцип записывается следующим образом:

$$S = \int_{t_0}^{t_1} (T + A) dt. \tag{27.1}$$

Запишем вариацию действия по Гамильтону (27.1):

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} (\delta T + \delta A) dt. \tag{27.2}$$

Найдем вариацию δA :

$$\delta A = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k \delta \vec{r}_k = \sum_{j=1}^m Q_j \delta q_j. \tag{27.3}$$

Так как кинетическая энергия, подобно лагранжиану консервативной системы, является функцией обобщенных координат и скоростей, то для вариации кинетической энергии будем иметь аналогично (25.2):

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta T dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j dt. \quad (27.4)$$

Теперь, подставляя (27.3) и (27.4) в выражение (27.2), будем иметь

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} + Q_j \right) \delta q_j dt. \quad (27.5)$$

Запишем уравнения Лагранжа второго рода для произвольной неконсервативной системы сил:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j. \quad (27.6)$$

Очевидно, что прямому пути отвечает уравнение (27.6), откуда следует принцип Гамильтона для действия (27.1)

$$\delta S = 0. \quad (27.7)$$

Уравнения (27.6) и принцип (27.7) сформулированы для голономных систем, на которые действуют произвольные неконсервативные силы.

28. Вариационный принцип Гамильтона для неголономных систем

Будем рассматривать неголономную систему при действии на нее только потенциальных сил, хотя приведенные ниже результаты можно распространить и на неконсервативные силы. Пусть на систему наложены s неголономных связей (5.4). Запишем вариацию действия по Гамильтону:

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} \delta L dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j dt = 0. \quad (28.1)$$

Покажем, что при наличии (5.4) выполняется (28.1). Умножим каждое из s линейных уравнений (5.4) на множитель λ_β и получим:

$$\lambda_\beta \sum_{j=1}^m b_{\beta j} \delta q_j = 0 \quad (\beta = \overline{1, s}). \quad (28.2)$$

Просуммируем s уравнений системы (28.2) и возьмем интеграл от полученной суммы по времени:

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{\beta=1}^s \sum_{j=1}^m \lambda_\beta b_{\beta j} \delta q_j \right) dt = 0. \quad (28.3)$$

Сложим (28.3) с (28.1), получим

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} + \sum_{\beta=1}^s \lambda_\beta b_{\beta j} \right) \delta q_j dt = 0. \quad (28.4)$$

Рассмотрим вариации обобщенных координат. Первые $n = m - s$ вариаций будем считать независимыми, а последние s зависимыми. Тогда s неопределенных множителей λ_β будем выбирать так, чтобы

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} + \sum_{\beta=1}^s \lambda_\beta b_{\beta j} = 0 \quad (j = \overline{n+1, m}). \quad (28.5)$$

В силу (28.5) выражение (28.4) содержит только независимые вариации.

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} + \sum_{\beta=1}^s \lambda_\beta b_{\beta j} \right) \delta q_j dt = 0. \quad (28.6)$$

Так как вариации обобщенных координат в (28.6) независимы, то можно записать выражение, аналогичное (28.5), но уже для независимых вариаций:

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} + \sum_{\beta=1}^s \lambda_\beta b_{\beta j} = 0 \quad (j = \overline{1, n}). \quad (28.7)$$

Объединяя (28.5) и (28.7), имеем m уравнений Лагранжа первого рода для обобщенных координат. Добавим к ним еще s уравнений неголономных связей (5.3). Получаем замкнутую систему уравнений движения и уравнений связей для неголономной системы.

Таким образом, принцип Гамильтона можно распространить на неголономные системы.

29. Полная и изохорная вариации

Введем понятие полной и изохорной вариации. Введем параметр варьирования α , и пусть $t = t(\alpha)$, тогда

$$q = q(t(\alpha), \alpha). \quad (29.1)$$

Найдем **полную вариацию** обобщенной координаты согласно (29.1):

$$\delta q = \frac{\partial q}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \alpha} \delta \alpha + \frac{\partial q}{\partial \alpha} \delta \alpha, \quad (29.2)$$

где $\delta t = \frac{\partial t}{\partial \alpha} \delta \alpha$, $\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{dq}{dt} = \dot{q}$, $\Delta q = \frac{\partial q}{\partial \alpha} \delta \alpha$.

Величину Δq будем называть **изохорной вариацией**. Она соответствует полной вариации при фиксированном времени. Перепишем (29.2) учетом новых обозначений:

$$\delta q = \dot{q} \delta t + \Delta q. \quad (29.3)$$

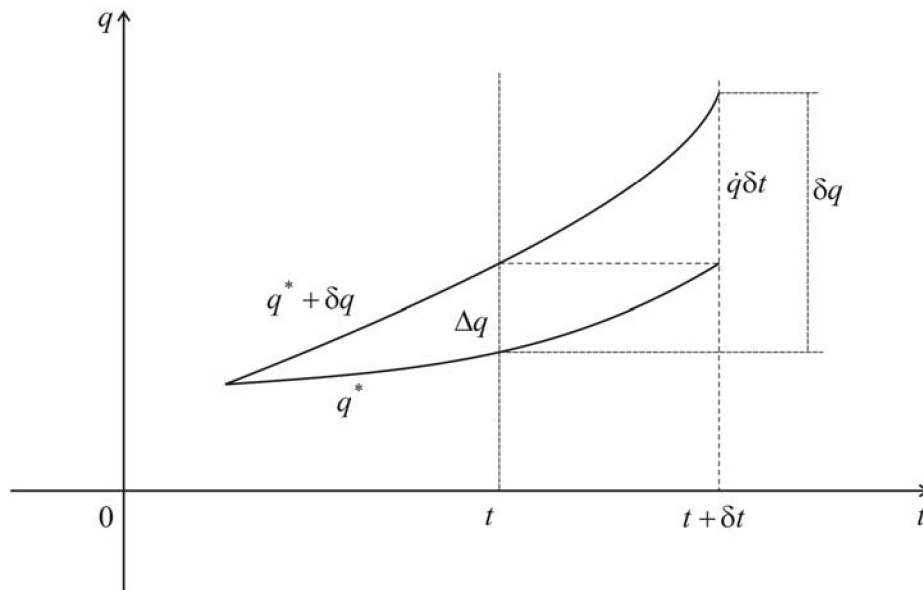


Рис.13. Полная и изохорная вариации

30. Основной интегральный инвариант Пуанкаре-Картана

Рассмотрим общий случай, когда начальный и конечный моменты времени не фиксируются, а являются функцией параметра α . Кроме того, обобщенные координаты и импульсы также не фиксируются в начале и конце траектории:

$$\begin{aligned} t_0 &= t_0(\alpha), \quad q_j^0 = q_j^0(t_0, \alpha), \quad p_j^0 = p_j^0(t_0, \alpha); \\ t_1 &= t_1(\alpha), \quad q_j^1 = q_j^1(t_1, \alpha), \quad p_j^1 = p_j^1(t_1, \alpha). \end{aligned} \quad (30.1)$$

Действие по Гамильтону запишется в виде

$$S = \int_{t_0(\alpha)}^{t_1(\alpha)} L(t, q_j, \dot{q}_j) dt. \quad (30.2)$$

Найдем вариацию действия (30.2):

$$\delta S = L_1 \delta t_1 - L_0 \delta t_0 + \int_{t_0}^{t_1} \delta L dt. \quad (30.3)$$

Рассмотрим последнее слагаемое в (30.3), пользуясь (25.3):

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta L dt = \sum_{j=1}^m \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \Big|_0^1 + \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j dt. \quad (30.4)$$

Первая группа слагаемых в (30.4) не равна нулю в силу (30.1), а также в ней δq_j – изохорная вариация, т.е.

$$\delta q_j = \Delta q_j. \quad (30.5)$$

Тогда, подставляя (30.4) в (30.3), можно переписать с учетом (30.5) и (30.1):

$$\begin{aligned} \delta S &= L_1 \delta t_1 + \sum_{j=1}^m p_j^1 \Delta q_j^1 - L_0 \delta t_0 - \sum_{j=1}^m p_j^0 \Delta q_j^0 + \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j dt. \end{aligned} \quad (30.6)$$

Подставим (29.3) в (30.6):

$$\begin{aligned} \delta S &= L_1 \delta t_1 + \sum_{j=1}^m p_j^1 (\delta q_j^1 - \dot{q}_j^1 \delta t_1) - L_0 \delta t_0 - \\ &- \sum_{j=1}^m p_j^0 (\delta q_j^0 - \dot{q}_j^0 \delta t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j dt. \end{aligned} \quad (30.7)$$

Имея в виду, что

$$H = \sum_{j=1}^m p_j \dot{q}_j - L, \quad (30.8)$$

и обозначая

$$\left[\sum_{j=1}^m p_j \delta q_j - H \delta t \right]_0^1 = \left(\sum_{j=1}^m p_j^1 \delta q_j^1 - H_1 \delta t_1 \right) - \left(\sum_{j=1}^m p_j^0 \delta q_j^0 - H_0 \delta t_0 \right), \quad (30.9)$$

перепишем (30.7) в компактном виде:

$$\delta S = \left[\sum_{j=1}^m p_j \delta q_j - H \delta t \right]_0^1 + \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j dt. \quad (30.10)$$

Возьмем две замкнутые кривые:

$$\begin{aligned} C_0 : q_j^0 &= q_j^0(\alpha), \quad p_j^0 = p_j^0(\alpha), \quad t_0 = t_0(\alpha); \\ C_1 : q_j^1 &= q_j^1(\alpha), \quad p_j^1 = p_j^1(\alpha), \quad t_1 = t_1(\alpha). \end{aligned} \quad (30.11)$$

Т.к. кривые замкнутые, то

$$q_j(t, 0) = q_j(t, l), \quad p_j(t, 0) = p_j(t, l), \quad t(0) \equiv t(l). \quad (30.12)$$

Для каждого фиксированного α движения из точки, принадлежащей кривой C_0 , в точку на кривой C_1 по прямому пути образуют линии прямого пути.

Совокупность таких линий образует трубку прямых путей.

Для прямых путей действие по Гамильтону (30.10) приобретает вид

$$\delta S = \left[\sum_{j=1}^m p_j \delta q_j - H \delta t \right]_0^1. \quad (30.13)$$

Рассмотрим само действие вдоль образующей трубки от кривой C_0 к кривой C_1 :

$$S(\alpha) = \int_{t_0(\alpha)}^{t_1(\alpha)} L dt. \quad (30.14)$$

Возьмем вариацию (30.2) слева и справа с учетом (30.13):

$$\delta S(\alpha) = \frac{\partial S}{\partial \alpha} \delta \alpha = \left[\sum_{j=1}^m p_j \delta q_j - H \delta t \right]_0^1.$$

Интегрируя это равенство по α в пределах от 0 до l с учетом

$$\delta t = \frac{\partial t}{\partial \alpha} \delta \alpha, \quad \delta q = \frac{\partial q}{\partial \alpha} \delta \alpha + \dot{q} \frac{\partial t}{\partial \alpha} \delta \alpha, \quad (30.15)$$

получим

$$0 = S(l) - S(0) = \int_0^l \left[\sum_{j=1}^m p_j \delta q_j - H \delta t \right]_0^1. \quad (30.16)$$

Правую часть (30.16) следует рассматривать с учетом (30.15). В силу (30.12) левая часть (30.16) равна нулю, тогда согласно (30.9)

$$0 = \int_0^l \left[\sum_{j=1}^m p_j \delta q_j - H \delta t \right]_0^1 = \oint_{C_1} \left[\sum_{j=1}^m p_j \delta q_j - H \delta t \right] - \oint_{C_0} \left[\sum_{j=1}^m p_j \delta q_j - H \delta t \right]. \quad (30.17)$$

Из (30.17) следует, что

$$\oint_{C_1} \left[\sum_{j=1}^m p_j \delta q_j - H \delta t \right] = \oint_{C_0} \left[\sum_{j=1}^m p_j \delta q_j - H \delta t \right].$$

Перемещая контуры C_1 и C_0 вдоль трубки прямых путей, можно утверждать, что

$$I = \oint_{C_1} \left[\sum_{j=1}^m p_j \delta q_j - H \delta t \right] = const. \quad (30.18)$$

То есть вдоль трубки прямых путей интеграл, взятый по замкнутому контуру, сохраняет свое значение, т.е. является интегральным инвариантом - **интегральным инвариантом Пуанкаре-Картана.**

Глава V. Канонические преобразования. Уравнение Гамильтона-Якоби

31. Новый вид гамильтоновой системы

Интегральный инвариант (30.18) отвечает следующей канонической системе:

$$\frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \quad (j = \overline{1, m}).$$

Обобщенные координаты и время входят в (30.18) посредством вариаций, а импульсы и гамильтониан как линейные множители.

Введем следующие обозначения:

$$q_{m+1} = t, \quad z = p_{m+1} = -H. \quad (31.1)$$

Из соотношений (31.1)

$$z = -H(t, q_1 \dots q_m, p_1 \dots p_m). \quad (31.2)$$

Выразим первый обобщенный импульс:

$$p_1 = -K(t, q_1 \dots q_m, z, p_2 \dots p_m). \quad (31.3)$$

Перепишем (30.18) с учетом (31.2) и (31.3):

$$I = \oint_{C_1} (z \delta t + p_2 \delta q_2 + \dots + p_m \delta q_m - K \delta q_1) = \text{const}. \quad (31.4)$$

Очевидно, что в (31.4) независимой переменной является q_1 , а новый гамильтониан это K . Таким образом, получим новую гамильтонову систему:

$$\begin{aligned} \frac{dt}{dq_1} &= \frac{\partial K}{\partial t}, \quad \frac{dz}{dq_1} = -\frac{\partial K}{\partial t}, \\ \frac{dq_j}{dq_1} &= \frac{\partial K}{\partial p_j}, \quad \frac{dp_j}{dq_1} = -\frac{\partial K}{\partial q_j}. \end{aligned} \quad (31.5)$$

Каноническая система (31.5) содержит $2m$ уравнений (т.к. $j = \overline{2, m}$) и записана для независимой переменной q_1 .

32. Универсальный интегральный инвариант.

Уравнения Уиттекера

Рассмотрим обобщенно-консервативную систему, для которой гамильтониан не зависит явно от времени и сохраняет свое значение:

$$H(q_1 \dots q_m, p_1 \dots p_m) = h = \text{const} . \quad (32.1)$$

Для обобщенно-консервативной системы (32.1) интегральный инвариант (30.18) приобретает вид

$$I = \oint_{C_1} \left[\sum_{j=1}^m p_j \delta q_j \right] = \text{const} . \quad (32.2)$$

Выражение (32.2) представляет собой **универсальный интегральный инвариант**.

Рассмотрим в качестве независимой координаты q_1 , а нового гамильтониана

$$p_1 = -K(q_1 \dots q_m, p_2 \dots p_m, h) . \quad (32.3)$$

Тогда вместо (32.2) можно записать следующее выражение:

$$I = \oint_{C_1} \left[\sum_{j=2}^m p_j \delta q_j - K \delta q_1 \right] = \text{const} . \quad (32.4)$$

Очевидно, что если система обобщенно-консервативна, то время t в силу (32.3) можно рассматривать как циклическую переменную, которой соответствует импульс h (32.1).

Известно, что наличие циклической переменной понижает порядок системы на 2. Таким образом, для гамильтониана (32.3) запишем новую каноническую систему вида (31.5):

$$\frac{dq_j}{dq_1} = \frac{\partial K}{\partial p_j}, \quad \frac{dp_j}{dq_1} = -\frac{\partial K}{\partial q_j} \quad (j = \overline{2, m}) . \quad (32.5)$$

Система уравнений (32.5) называется **уравнениями Уиттекера**.

Проинтегрируем уравнение (32.5), в результате будем иметь

$$\begin{aligned} q_j &= \varphi_j(q_1, h, c_1, \dots, c_{2m-2}), \\ p_j &= \varphi_j(q_1, h, c_1, \dots, c_{2m-2}) \quad (j = \overline{2, m}). \end{aligned} \quad (32.6)$$

После этого подставим (6) в формулу (3) и найдем

$$p_1 = \psi_1(q_1, h, c_1, \dots, c_{2m-2}). \quad (32.7)$$

В выражения (32.6) и (32.7) входят $2m-1$ постоянных, так как уравнение для q_1 отсутствует, поскольку эта координата является независимой переменной.

Зависимость координаты q_1 от времени получим из уравнения

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_1}$$

при помощи квадратуры

$$t = \int \frac{dq_1}{\left(\frac{\partial H}{\partial p_1} \right)} + c_{2m-1}. \quad (32.8)$$

Входящая в последнее уравнение константа c_{2m-1} является недостающей постоянной.

Гамильтонова система Уиттекера (32.5) может быть заменена эквивалентной системой уравнений типа Лагранжа

$$\frac{d}{dq_1} \frac{\partial P}{\partial q'_j} - \frac{\partial P}{\partial q_j} = 0 \quad (j = \overline{2, m}), \quad (32.9)$$

где $q'_j = \frac{dq_j}{dq_1}$, а функция P определена как

$$P = P(q_1, \dots, q_m, q'_2, \dots, q'_m) = \sum_{j=2}^m p_j q'_j - K(q_1, \dots, q_m, q'_2, \dots, q'_m). \quad (32.10)$$

Здесь p_j должны быть заменены на

$$q'_j = \frac{dq_j}{dq_1},$$

которые могут быть получены из (32.5).

С помощью равенств (32.3) преобразуем выражения для P :

$$P = \sum_{j=2}^m p_j q'_j + p_1 = \frac{1}{\dot{q}_1} \sum_{j=1}^m p_j \dot{q}_j = \frac{1}{\dot{q}_1} (L + H), \quad (32.11)$$

поскольку

$$q'_j = \frac{dq_j}{dq_1} = \frac{dq_j}{dt} \frac{dt}{dq_1} = \frac{1}{\dot{q}_1} \dot{q}_j.$$

В случае натуральной системы (силы потенциальны) $L = T - \Pi$, $P = T + \Pi$ и (32.11) принимает вид

$$P = \frac{2T}{\dot{q}_1}. \quad (32.12)$$

33. Канонические преобразования. Теорема о каноническом преобразовании

Преобразование координат

$$\begin{aligned} Q_j &= Q_j(t, q_1 \dots q_m, p_1 \dots p_m), \\ P_j &= P_j(t, q_1 \dots q_m, p_1 \dots p_m). \end{aligned} \quad (33.1)$$

называют **каноническим**, если это преобразование переводит любую гамильтонову систему

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \quad (j = \overline{1, m}). \quad (33.2)$$

в новую гамильтонову систему вида

$$\dot{Q}_j = \frac{\partial H'}{\partial P_j}, \quad \dot{P}_j = -\frac{\partial H'}{\partial Q_j} \quad (j = \overline{1, m}) \quad (33.3)$$

при выполнении условия в каждой точке пространства

$$\frac{\partial(Q_1 \dots Q_m, P_1 \dots P_m)}{\partial(q_1 \dots q_m, p_1 \dots p_m)} \neq 0. \quad (33.4)$$

Смысл канонических преобразований заключается в том, чтобы перевести систему (33.2) в более простую систему (33.3), решение которой получить проще.

Для реализации преобразования (33.1) необходимо найти $2m$ независимых соотношений.

Введем в рассмотрение производящую функцию F , которая может быть записана в одном из четырех видов:

$$\begin{aligned} F_1(q_1 \dots q_m, Q_1 \dots Q_m, t), & \quad F_2(q_1 \dots q_m, P_1 \dots P_m, t), \\ F_3(p_1 \dots p_m, Q_1 \dots Q_m, t), & \quad F_4(p_1 \dots p_m, P_1 \dots P_m, t). \end{aligned} \quad (33.5)$$

Функции (33.5) не содержат ни одной сопряженной пары (q, p) и (Q, P) , в противном случае невозможно получить соотношение вида (33.1).

Теорема о канонических преобразованиях: Для канонического преобразования (33.1) необходимо и достаточно, чтобы существовала функция F старых и новых переменных, полный дифференциал которой равен

$$dF = \sum_{j=1}^m p_j dq_j - H dt - \left(\sum_{j=1}^m P_j dQ_j - H' dt \right). \quad (33.6)$$

Доказательство. Разделим (33.6) на дифференциал времени и проинтегрируем в пределах $[t_0, t_1]$, тогда

$$F|_{t_0}^{t_1} = \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{j=1}^m p_j \dot{q}_j - H \right) dt - \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{j=1}^m P_j \dot{Q}_j - H' \right) dt. \quad (33.7)$$

Пусть $F = F(q_j, Q_j, t)$, тогда полный дифференциал

$$dF = \sum_{j=1}^m \frac{\partial F}{\partial q_j} dq_j + \sum_{j=1}^m \frac{\partial F}{\partial Q_j} dQ_j + \frac{\partial F}{\partial t} dt,$$

а вариация

$$\delta F = \sum_{j=1}^m \frac{\partial F}{\partial q_j} \delta q_j + \sum_{j=1}^m \frac{\partial F}{\partial Q_j} \delta Q_j. \quad (33.8)$$

Возьмем вариацию от (33.7):

$$\delta F|_{t_0}^{t_1} = \delta \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{j=1}^m p_j \dot{q}_j - H \right) dt - \delta \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{j=1}^m P_j \dot{Q}_j - H' \right) dt. \quad (33.9)$$

Согласно принципу Гамильтона

$$\sum_{j=1}^m p_j \dot{q}_j - H = L(q_j, \dot{q}_j, t).$$

Для канонических систем

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L dt = 0.$$

Левая часть выражения (33.9) обращается в ноль в силу (33.8) и того, что вариации координат в начале и в конце траектории равны нулю:

$$\delta q_j = 0, \quad \delta Q_j = 0 \quad \text{при} \quad t = t_0, t_1.$$

Тогда выражение (33.9) запишется в виде

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{j=1}^m P_j \dot{Q}_j - H' \right) dt = 0. \quad (33.10)$$

Из (33.10) следует, что P и Q – новые гамильтоновы переменные, которые отвечают гамильтоновой системе (33.3) с гамильтонианом H' . Теорема доказана.

Найдем $2m$ соотношений вида (33.1) и одно соотношение для нового гамильтониана H' . В качестве производящей функции выберем первую из (33.5). Запишем полный дифференциал для нее:

$$dF_1 = \sum_{j=1}^m \frac{\partial F_1}{\partial q_j} dq_j + \sum_{j=1}^m \frac{\partial F_1}{\partial Q_j} dQ_j + \frac{\partial F_1}{\partial t} dt. \quad (33.11)$$

Сравним соотношения (33.6) и (33.11), получим $2m+1$ соотношений:

$$p_j = \frac{\partial F_1}{\partial q_j}, \quad P_j = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_j}, \quad H' = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}. \quad (33.12)$$

Эти $2m+1$ соотношений обеспечивают каноническое преобразование. Найдем формулы канонического преобразования типа (33.12) для второй функции в (33.5).

Воспользуемся преобразованием Лежандра (см. теорему Донкина п.13):

$$\begin{aligned} X &\equiv -F_1, & Y &\equiv -F_2, \\ y_j &\equiv P_j, & x_j &\equiv Q_j. \end{aligned} \quad (33.13)$$

Используя второе уравнение (33.12) и учитывая (33.13), будем иметь

$$F_2 = \sum_{j=1}^m P_j Q_j + F_1. \quad (33.14)$$

Тогда

$$Q_j = \frac{\partial F_2}{\partial P_j}, \quad p_j = \frac{\partial F_2}{\partial q_j}, \quad H' = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}. \quad (33.15)$$

Система (33.15) будет содержать $2m+1$ уравнений, которые обеспечат преобразование (33.1) и определяют новый вид гамильтониана для новой гамильтоновой системы (33.3). Аналогично можно получить формулы канонического преобразования для остальных функций из (33.5). Следует отметить, что из формул канонического преобразования следует, что если производящие функции F_1 и F_2 не зависят явно от времени, то $H' = H$. И тогда можно просто произвести замену старых переменных новыми.

34. Уравнение Гамильтона-Якоби

Пусть дана гамильтонова система

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \quad (j = \overline{1, m}). \quad (34.1)$$

Найдем каноническое преобразование, такое чтобы в новой системе

$$\dot{Q}_j = \frac{\partial H'}{\partial P_j}, \quad \dot{P}_j = -\frac{\partial H'}{\partial Q_j} \quad (j = \overline{1, m}) \quad (34.2)$$

и гамильтониан

$$H' \equiv 0. \quad (34.3)$$

В этом случае новая система (34.2) легко интегрируется:

$$Q_j = \beta_j, \quad P_j = \alpha_j. \quad (34.4)$$

где α_j, β_j - константы.

Если такое преобразование будет найдено, то будет найдено решение системы (34.2). Остается найти производящую функцию. Выберем в качестве таковой вторую из (33.5) и обозначим ее

$$S = S(q_1 \dots q_m, P_1 \dots P_m, t). \quad (34.5)$$

Функция (34.5) есть главная функция Гамильтона. В силу последнего уравнения (33.15) и (34.3) имеем уравнение для определения функции S :

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(t, q_1 \dots q_m, \frac{\partial S}{\partial q_1} \dots \frac{\partial S}{\partial q_m}\right) = 0. \quad (34.6)$$

Уравнение (34.6) – **уравнение Гамильтона-Якоби**. Найдя решение этого уравнения в виде $S = S(q_1 \dots q_m, \alpha_1 \dots \alpha_m, t)$, найдем решение исходной системы (34.1).

Решение исходной системы будет иметь вид

$$\begin{aligned} q_j &= q_j(t, \alpha_1 \dots \alpha_m, \beta_1 \dots \beta_m), \\ p_j &= p_j(t, \alpha_1 \dots \alpha_m, \beta_1 \dots \beta_m). \end{aligned}$$

При известном решении S можно решить эту задачу с помощью (33.15):

$$p_j = \frac{\partial S}{\partial q_j}. \quad (34.7)$$

Соотношение (34.6) устанавливает связь между обобщенными импульсами, координатами и временем.

Для получения зависимости обобщенных координат от времени воспользуемся (33.15) и первым соотношением из (34.4)

$$\beta_j = \frac{\partial S}{\partial \alpha_j}. \quad (34.8)$$

Таким образом, (34.8) устанавливает связь между α_j, β_j, t .

С помощью канонических преобразований решение системы $2m$ дифференциальных уравнений (34.1) заменены на поиск решения одного уравнения первого порядка в частных производных (34.6), содержащего $m+1$ независимых переменных:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(t, q_1 \dots q_m, \frac{\partial S}{\partial q_1} \dots \frac{\partial S}{\partial q_m}\right) = 0.$$

35. Уравнение Гамильтона-Якоби для обобщенной консервативной системы. Характеристическая функция Гамильтона

Рассмотрим обобщенно-консервативную систему, т.е. систему в которой

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0, H(q_1 \dots q_m, p_1 \dots p_m) = h = \text{const}.$$

Для такой системы уравнение Гамильтона-Якоби имеет вид

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_1 \dots q_m, \frac{\partial S}{\partial q_1} \dots \frac{\partial S}{\partial q_m}\right) = 0. \quad (35.1)$$

В уравнение (35.1) явно время не входит, следовательно, число независимых переменных может быть уменьшено на 1.

Положим, что

$$S = -ht + W(q_1 \dots q_m). \quad (35.2)$$

Подставим (35.2) в (35.1), тогда уравнение Гамильтона-Якоби для обобщенно-консервативной системы запишется в виде

$$H\left(q_1 \dots q_m, \frac{\partial W}{\partial q_1} \dots \frac{\partial W}{\partial q_m}\right) = h. \quad (35.3)$$

где W – характеристическая функция Гамильтона.

Общий интеграл уравнения (35.3) можно представить в виде

$$W = W(q_1 \dots q_m, \alpha_1 \dots \alpha_{m-1}, \alpha_m \equiv h) + \alpha_{m+1}. \quad (35.4)$$

Далее запишем формулы канонического преобразования для характеристической функции Гамильтона, используя (34.6), (34.7), (35.4):

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_j} = \frac{\partial W}{\partial \alpha_j} = \beta_j \quad (j = \overline{1, m-1}), \quad (35.5)$$

$$\frac{\partial S}{\partial q_j} = \frac{\partial W}{\partial q_j} = p_i \quad (j = \overline{1, m-1}), \quad (35.6)$$

$$\frac{\partial S}{\partial h} = -t + \frac{\partial W}{\partial h} = \beta_m = t_0,$$

$$\frac{\partial W}{\partial h} = t + t_0. \quad (35.7)$$

$m - 1$ соотношений (35.5) называют **геометрическими**, они не содержат времени и обобщенных скоростей. Значит по ним можно определить траекторию. $m - 1$ соотношений (35.6), включающие обобщенные координаты и импульсы и не включающие время, называют **кинематическими**. Соотношение (35.7) определяет закон движения. Этих соотношений достаточно, чтобы определить зависимость $q_j(t)$, $p_j(t)$, т.е. найти решение гамильтоновой системы.

Глава VI. Приложения аналитической механики.

Исследование механической системы с тремя степенями свободы

36. Уравнения Лагранжа второго рода для системы с тремя степенями свободы

Порядок выполнения работы

1. Определить количество степеней свободы механической системы s , выбрать систему координат и ввести независимые обобщенные координаты в числе, равном числу степеней свободы.

2. Составить уравнения движения с помощью уравнений Лагранжа второго рода. Для этого необходимо:

2.1. Определить обобщенные силы системы, соответствующие избранным обобщенным координатам.

Определение обобщенных сил можно проводить двумя способами [3]:

а) Наиболее распространенным приемом является вычисление обобщенных сил как коэффициентов в выражении суммы элементарных работ задаваемых сил при соответствующих обобщенных возможных перемещениях. В этом случае вычисление обобщенных сил следует проводить в следующем порядке:

- 1) изобразить все задаваемые силы системы;
- 2) если не все связи, наложенные на материальную систему, являются идеальными, то добавить к задаваемым силам соответствующие силы реакций связей (например, силы трения);
- 3) дать независимые обобщенные возможные перемещения системе в числе, равном числу обобщенных координат, т.е. числу степеней свободы материальной системы;
- 4) для определения обобщенной силы Q_i , соответствующей i -й обобщенной координате q_i , надо вычислить сумму работ всех сил,

включая силы реакций неидеальных связей, на обобщенном возможном перемещении dq_i . При этом все остальные обобщенные возможные перемещения надо считать равными нулю. Тогда обобщенная сила Q_i будет равна коэффициенту при dq_i . Аналогично определить все остальные обобщенные силы.

б) Если все силы, действующие на материальную систему, потенциальны, то после выбора обобщенных координат надо вычислить потенциальную энергию Π системы, выразив ее в зависимости от обобщенных координат. Обобщенная сила определяется как взятая с обратным знаком частная производная от потенциальной энергии по соответствующей обобщенной координате, т. е. $Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}$. Этот способ определения обобщенных сил в случае систем с несколькими степенями свободы эффективнее предыдущего способа. Однако он пригоден лишь, когда все задаваемые силы потенциальны.

2.2. Вычислить кинетическую энергию T рассматриваемой системы материальных точек.

2.3. Найти частные производные от кинетической энергии по обобщенным скоростям и вычислить производные от них по времени:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) = \dots \quad (i = \overline{1, s}).$$

2.4. Определить частные производные от кинетической энергии T по обобщенным координатам:

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} = \dots \quad (i = \overline{1, s}).$$

2.5. Полученные в пунктах 2.1, 2.3 и 2.4 результаты подставить в уравнения Лагранжа:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial T}{\partial q_1} - Q_1 &= 0, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial T}{\partial q_2} - Q_2 &= 0, \\ \dots \dots \dots, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial T}{\partial q_s} - Q_s &= 0.\end{aligned}$$

3. Проинтегрировать полученные уравнения в одном из математических пакетов и построить графики зависимостей обобщенных координат и скоростей от времени, а также построить график зависимости полной энергии системы от времени.

Пример 12. Выполнение первой части курсовой работы

Рассмотрим механическую систему с тремя степенями свободы (рис. 14). Выберем за обобщенные координаты x , φ , α .

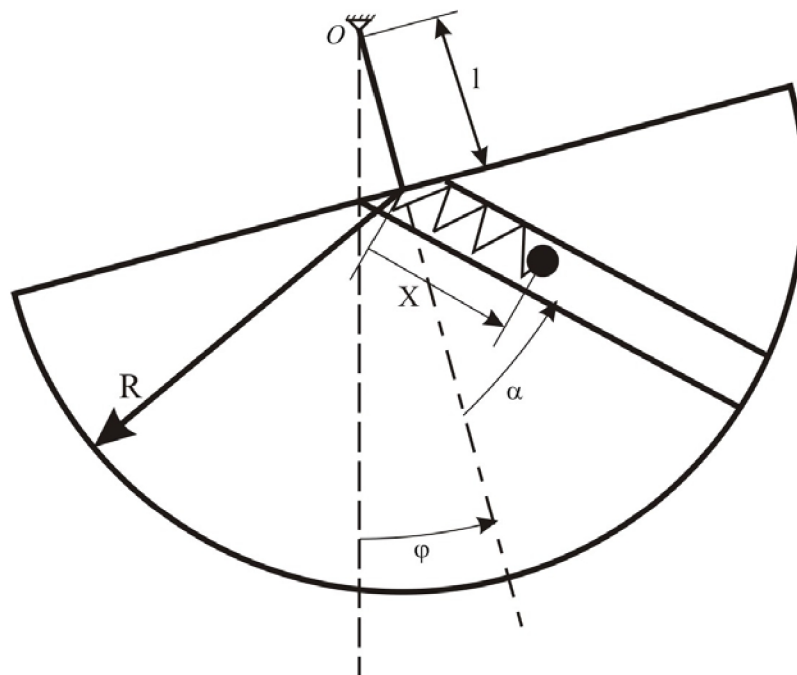


Рис. 14. Механическая система

Составим уравнения движения системы с помощью уравнений Лагранжа 2-го рода. В выбранных обобщенных координатах они принимают вид:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} &= Q_x, \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} &= Q_\varphi, \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \alpha} &= Q_\alpha,\end{aligned}$$

где Q_x , Q_φ , Q_α – обобщенные силы.

Обозначим: $L = T - \Pi$ – функция Лагранжа, тогда уравнения Лагранжа 2-го рода примут вид:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} &= 0, \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= 0, \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \alpha} &= 0.\end{aligned}\tag{36.1}$$

Найдем кинетическую энергию системы. Она состоит из кинетических энергий всех тел, входящих в систему: пластины T_1 и шарика T_2 :

$$T_1 = \frac{I\dot{\varphi}^2}{2}, \quad T_2 = \frac{m_2 V^2}{2};$$

$$I = \frac{m_1 R^2}{2} - m_1 \left(\frac{4R}{3\pi}\right)^2 + m_1 \left(l + \frac{4R}{3\pi}\right)^2,$$

где m_1 – масса пластины, m_2 – масса шарика, I – момент инерции пластины относительно точки O .

Абсолютная скорость шарика (рис. 15) равна геометрической сумме относительной и переносной скоростей:

$$\vec{V} = \vec{V}_r + \vec{V}_e.$$

Переносная скорость точки М может быть вычислена как скорость сложного движения

$$\vec{V}_e = \vec{V}_1 + \vec{V}_2,$$

где $\vec{V}_1$ – скорость полюса (точки А), а $\vec{V}_2$ – скорость относительно полюса.

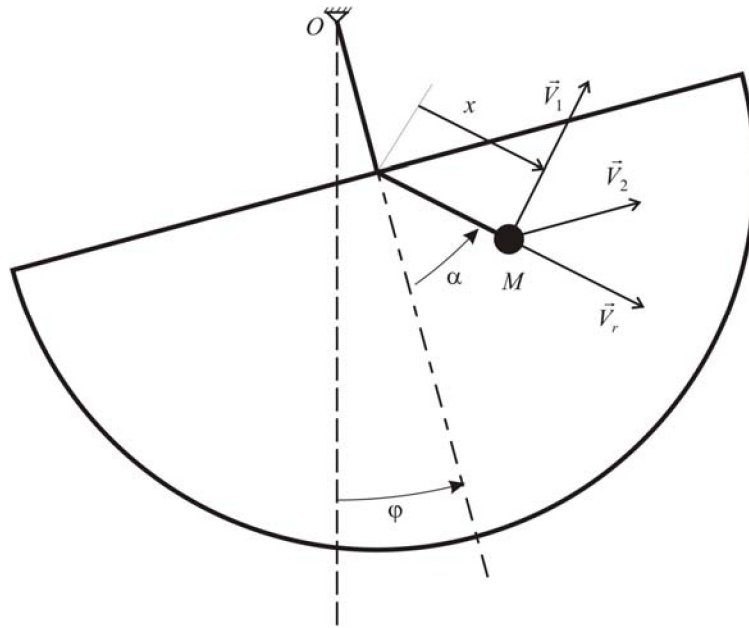


Рис. 15. Абсолютная скорость шарика

Окончательно для точки М имеем:

$$\begin{aligned}\vec{V} &= \vec{V}_r + \vec{V}_1 + \vec{V}_2. \\ V^2 &= V_r^2 + V_1^2 + V_2^2 + 2(V_1 V_2 \cos(\widehat{V_1 V_2}) + \\ &+ V_1 V_r \cos(\widehat{V_1 V_r}) + V_r V_2 \cos(\widehat{V_r V_2})).\end{aligned}\quad (36.2)$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned}V_1 &= l\dot{\phi}, \quad V_2 = x\dot{\alpha}, \quad V_r = \dot{x}, \\ \cos(\widehat{V_1 V_2}) &= \cos(\alpha), \quad \cos(\widehat{V_1 V_r}) = \sin(\alpha), \quad \cos(\widehat{V_2 V_r}) = 0,\end{aligned}$$

перепишем (2.2) в виде

$$V^2 = l^2 \dot{\phi}^2 + x^2 \dot{\alpha}^2 + \dot{x}^2 + 2l\dot{\phi}(\dot{x}\dot{\alpha} \cos(\alpha) + \dot{x} \sin(\alpha))$$

Тогда для кинетической энергии системы имеем

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2} m_2 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} (I + m_2 l^2) \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} m_2 x^2 \dot{\alpha}^2 + \\ &+ m_2 l \dot{\phi} (\dot{x} \dot{\alpha} \cos(\alpha) + \dot{x} \sin(\alpha)).\end{aligned}\quad (36.3)$$

Вычислим потенциальную энергию системы

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_{\text{упр}}.$$

Здесь Π_1 , Π_2 , $\Pi_{\text{упр}}$ – потенциальные энергии сил тяжести рамки, шарика, а также силы упругости пружины, которые определяются формулами:

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= -m_1 g \left(l + \frac{4R}{3\pi} \right) \cos \varphi, \\ \Pi_2 &= -m_2 g (l \cos \varphi + x \sin(\alpha - \varphi)), \\ \Pi_{\text{упр}} &= \frac{c}{2} (x - l_0)^2. \end{aligned}$$

Тогда потенциальная энергия системы примет вид

$$\Pi = -m_1 g \left(l + \frac{4R}{3\pi} \right) \cos \varphi - m_2 g (l \cos \varphi + x \cos(\alpha + \varphi)) + \frac{c}{2} (x - l_0)^2. \quad (36.4)$$

Найдем все частные производные по обобщенным координатам и скоростям:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) &= m_2 (\ddot{x} + 2l\ddot{\varphi} \sin(\alpha) + 2l\dot{\varphi} \cos(\alpha) \dot{\alpha}) \\ \frac{\partial L}{\partial x} &= m_2 (x\dot{\alpha}^2 + 2l\dot{\varphi} \cos(\alpha) \dot{\alpha}) + m_2 g \cos(\alpha + \varphi) - c(x - l_0) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) &= I\ddot{\varphi} + \frac{1}{2} m_2 (2l^2 \ddot{\varphi} + 4l\dot{x}\dot{\alpha} \cos(\alpha) + 2lx\ddot{\alpha} \cos(\alpha) - \\ &\quad - 2lx\dot{\alpha}^2 \sin(\alpha) + 2l\ddot{x} \sin(\alpha)) \\ \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= -m_1 g \left(l + \frac{4R}{3\pi} \right) \sin(\varphi) - m_2 g (l \sin(\varphi) + x \sin(\alpha + \varphi)) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} \right) &= \frac{1}{2} m_2 (4x\dot{x}\dot{\alpha} + 2x^2 \ddot{\alpha} + 2l\dot{x}\dot{\varphi} \cos(\alpha) + \\ &\quad + 2lx\ddot{\varphi} \cos(\alpha) - 2lx\dot{\varphi} \sin(\alpha) \dot{\alpha}) \\ \frac{\partial L}{\partial \alpha} &= \frac{1}{2} m_2 (-2lx\dot{\varphi} \sin(\alpha) \dot{\alpha} + 2l\dot{x}\dot{\varphi} \cos(\alpha)) - m_2 g x \sin(\alpha + \varphi). \end{aligned} \right. \quad (36.5)$$

С учетом (1.5) перепишем систему (1.1):

$$\left\{ \begin{aligned} m_2 \ddot{x} + m_2 l \ddot{\varphi} \sin \alpha - m_2 x \dot{\alpha}^2 - m_2 g \cos(\alpha + \varphi) + c(x + l_0) &= 0, \\ m_2 l \ddot{x} \sin \alpha + (I + m_2 l^2) \ddot{\varphi} + m_2 l x \ddot{\alpha} \cos \alpha + m_1 g \left(l + \frac{4R}{3\pi} \right) \sin \varphi + \\ + m_2 l (2\dot{x}\dot{\alpha} \cos \alpha - x\dot{\alpha} \sin \alpha) + m_2 g (l \sin \varphi + x \sin(\alpha + \varphi)) &= 0, \\ m_2 l x \cos \alpha \ddot{\varphi} + m_2 x^2 \ddot{\alpha} + m_2 x (2\dot{\alpha}\dot{x} + g \sin(\alpha + \varphi)) &= 0. \end{aligned} \right.$$

Проинтегрируем численно полученную систему с начальными условиями и результаты представим в виде графиков (рис. 16 – 19):

$$x_0 = 0,4; \quad \varphi_0 = \pi/6; \quad \alpha_0 = \pi/6; \quad \dot{x}_0 = 0; \quad \dot{\varphi}_0 = 0; \quad \dot{\alpha}_0 = 0.$$

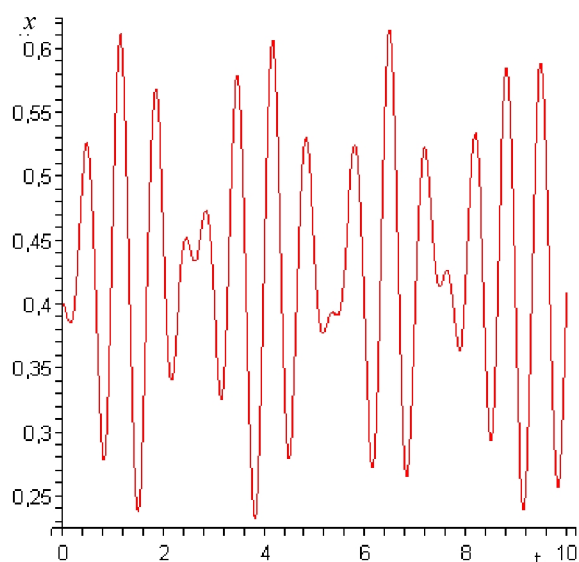


Рис. 16. Зависимость x от времени t

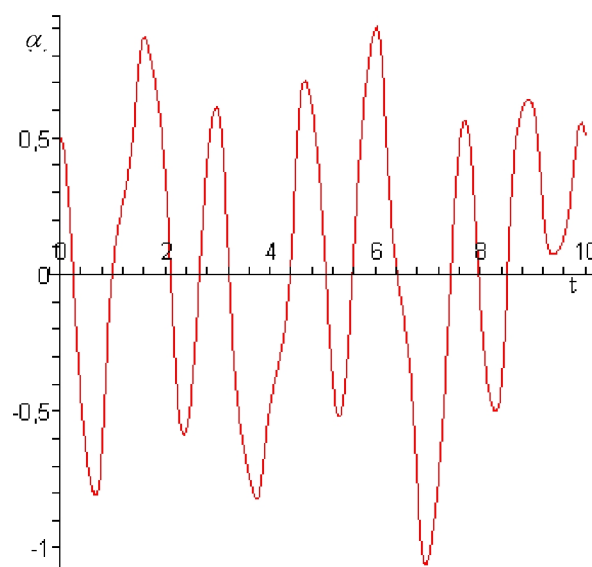


Рис. 17. Зависимость α от времени t

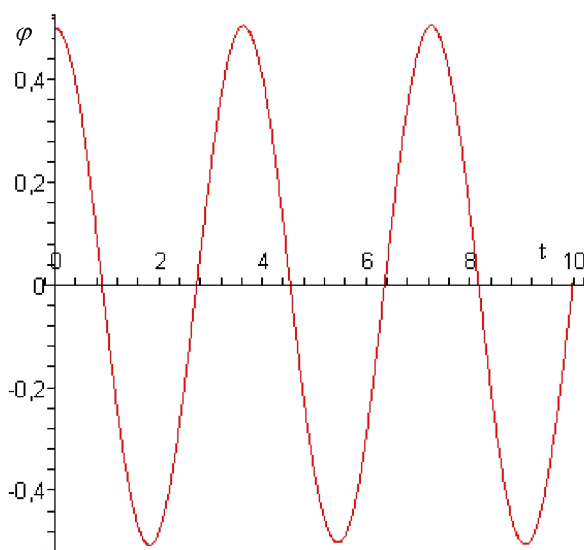


Рис. 18. Зависимость φ от времени t

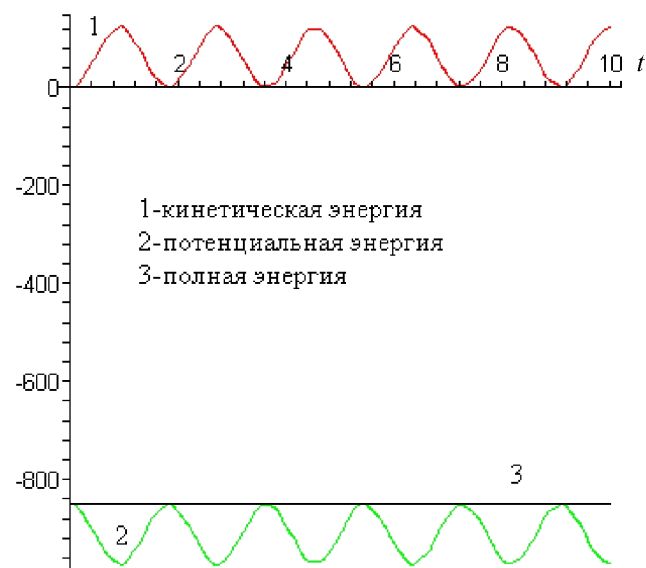


Рис. 19. Зависимость энергии от времени t

37. Уравнения Гамильтона для системы с тремя степенями свободы

Порядок выполнения работы

1. Составить выражения для потенциальной и кинетической энергий.
2. Составить функцию Лагранжа, которая выражается через потенциальную и кинетическую энергии:

$$L = T - \Pi .$$

3. Найти обобщенные импульсы, определяемые равенствами:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (i = 1, \dots, n). \quad (37.1)$$

4. Разрешая систему (37.1) относительно обобщенных скоростей получить систему линейных выражений:

$$\dot{q}_i = \sum_{k=1}^n b_{ik} p_k + b_i \quad (i = 1, \dots, n). \quad (37.2)$$

5. Используя (37.2), составить функцию Гамильтона, в которой все обобщенные скорости выражены через обобщенные импульсы:

$$H = \sum_{i=1}^n p_i \hat{q}_i - \hat{L}.$$

Если система является консервативной, то

$$H(q_i, p_i, t) = T(q_i, p_i, t) + \Pi(q_i, p_i, t).$$

6. С помощью функции Гамильтона записать уравнения движения в виде системы $2n$ обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка – канонических уравнений Гамильтона:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, \dots, n).$$

Пример 13. Выполнение второй части курсовой работы

Кинетическая и потенциальная энергии системы имеют вид

$$T = \frac{1}{2} m_2 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} (I + m_2 l^2) \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\alpha}^2 + m_2 l \dot{\varphi} (x \dot{\alpha} \cos(\alpha) + \dot{x} \sin(\alpha)),$$

$$\Pi = -m_1 g \left(l + \frac{4R}{3\pi} \right) \cos \varphi - m_2 g (l \cos \varphi + x \cos(\alpha + \varphi)) + \frac{c}{2} (x - l_0)^2.$$

Составим функцию Лагранжа:

$$\begin{aligned}
L = T - \Pi = & \frac{1}{2} m_2 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} (I + m_2 l^2) \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\alpha}^2 + \\
& + m_2 l \dot{\phi} (x \dot{\alpha} \cos(\alpha) + \dot{x} \sin(\alpha)) + m_1 g \left(l + \frac{4R}{3\pi} \right) \cos \varphi + \\
& + m_2 g (l \cos \varphi + x \cos(\alpha + \varphi)) - \frac{c}{2} (x - l_0)^2.
\end{aligned}$$

Найдем выражение для обобщенных импульсов. Для этого продифференцируем выражение для кинетического потенциала частным образом по соответствующим обобщенным скоростям:

$$\begin{aligned}
p_x &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m_2 \dot{x} + m_2 l \sin(\alpha) \dot{\phi}, \\
p_\varphi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = (J + m_2 l^2) \dot{\phi} + m_2 l x \dot{\alpha} + m_2 l \sin(\alpha) \dot{x}, \\
p_\alpha &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} = m_2 x^2 \dot{\alpha} + m_2 l x \cos(\alpha) \dot{\phi}.
\end{aligned} \tag{37.3}$$

Поскольку система является консервативной, то

$$H(q_i, p_i, t) = T(q_i, p_i, t) + \Pi(q_i, t). \tag{37.4}$$

Из системы (37.3) найдем обобщенные скорости, как функции обобщенных импульсов и подставим в (37.4). Получим:

$$\begin{aligned}
H = & p_x^2 \left(\frac{l^2 \sin^2(\alpha)}{2J} + \frac{1}{2m_2} \right) + p_\varphi^2 \frac{1}{2J} + p_\alpha^2 \left(\frac{l^2 \cos^2(\alpha)}{2Jx^2} + \frac{1}{2x^2 m_2} \right) - \\
& - p_x p_\varphi \frac{l \sin(\alpha)}{J} + p_x p_\alpha \frac{l^2 \sin(2\alpha)}{2Jx} - p_\varphi p_\alpha \frac{l \cos(\alpha)}{Jx} - \\
& - m_1 g \left(l + \frac{4R}{3\pi} \right) \cos \varphi - m_2 g (l \cos \varphi + x \cos(\alpha + \varphi)) + \frac{c}{2} (x - l_0)^2.
\end{aligned} \tag{37.5}$$

Составим теперь для нашей системы уравнения Гамильтона. Канонические уравнения Гамильтона имеют вид

$$\begin{aligned}
\dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\
\dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}.
\end{aligned}$$

Продифференцируем (37.5) по обобщенным координатам и обобщенным импульсам. Получим систему канонических уравнений Гамильтона:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p_x} = p_x \left(\frac{l^2 \sin^2(\alpha)}{J} + \frac{1}{m_2} \right) - p_\varphi \frac{l \sin(\alpha)}{J} + p_\alpha \frac{l^2 \sin(2\alpha)}{2Jx}, \\
\dot{\varphi} &= \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = p_\varphi \frac{1}{J} - p_x \frac{l \sin(\alpha)}{J} - p_\alpha \frac{l \cos(\alpha)}{Jx}, \\
\dot{\alpha} &= \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} = p_\alpha \left(\frac{l^2 \cos^2(\alpha)}{Jx^2} + \frac{1}{x^2 m_2} \right) + p_x \frac{l^2 \sin(2\alpha)}{2Jx} - p_\varphi \frac{l \cos(\alpha)}{Jx}, \\
\dot{p}_x &= -\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{p_\alpha^2}{x^3} \left(\frac{l^2 \cos^2(\alpha)}{J} + \frac{1}{m_2} \right) + m_2 g \cos(\alpha + \varphi) - c(x - l_0) + \\
&\quad + \frac{1}{x^2} \left(p_x p_\alpha \frac{l^2 \sin(2\alpha)}{2J} - p_\varphi p_\alpha \frac{l \cos(\alpha)}{J} \right), \\
\dot{p}_\varphi &= -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = -m_1 g \left(l + \frac{4R}{3\pi} \right) \sin \varphi - m_2 g (l \sin \varphi + x \sin(\alpha + \varphi)), \\
\dot{p}_\alpha &= -\frac{\partial H}{\partial \alpha} = -\sin(2\alpha) \left(\frac{p_x^2 l^2}{2J} - \frac{p_\alpha^2 l^2}{2Jx^2} \right) + p_x p_\varphi \frac{l \cos(\alpha)}{J} - \\
&\quad - p_x p_\alpha \frac{l^2 \cos(2\alpha)}{Jx} - p_\varphi p_\alpha \frac{l \sin(\alpha)}{Jx} - m_2 g x \sin(\alpha + \varphi).
\end{aligned} \tag{37.6}$$

Проинтегрируем численно полученную систему. Для того чтобы получить начальные значения импульсов, подставим в формулу (37.3) начальные условия из предыдущего раздела.

Получим:

$$x_0 = 0,4; \quad p_{x0} = 0; \quad \varphi_0 = \frac{\pi}{6}; \quad p_{\varphi 0} = 0; \quad \alpha_0 = \frac{\pi}{6}; \quad p_{\alpha 0} = 0.$$

Результаты представлены в виде графиков (рис. 20 – 25).

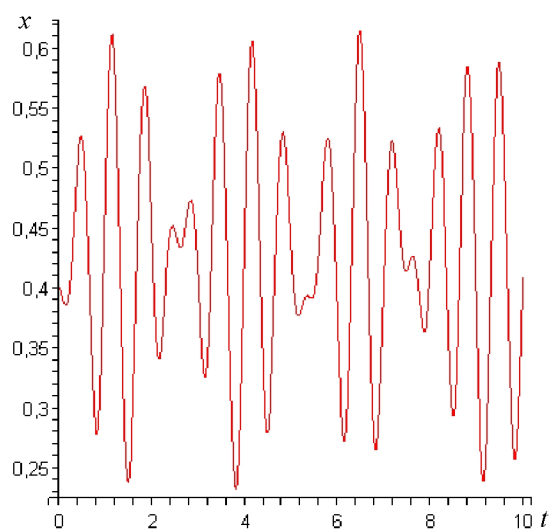


Рис. 20. Зависимость x от времени t

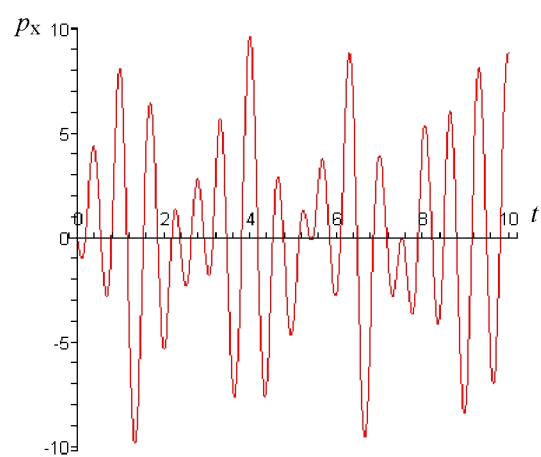


Рис. 21. Зависимость p_x от времени t

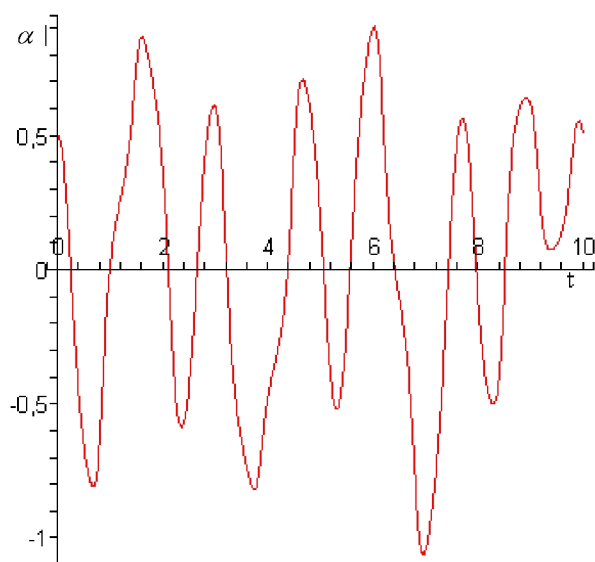


Рис. 22. Зависимость α от времени t

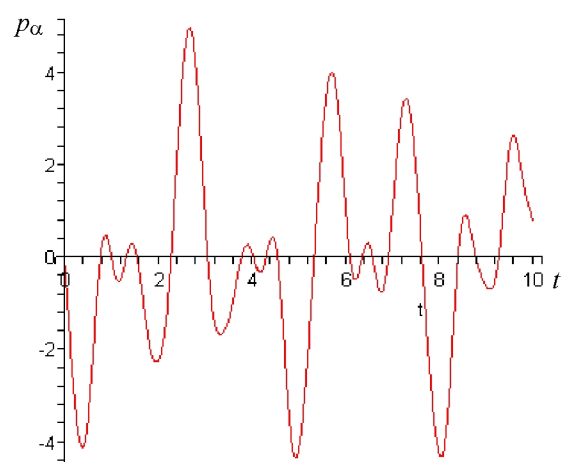


Рис. 23. Зависимость p_α от времени t

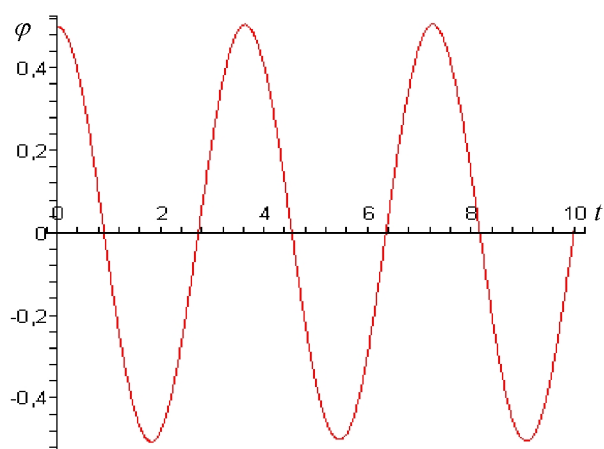


Рис. 24. Зависимость φ от времени t

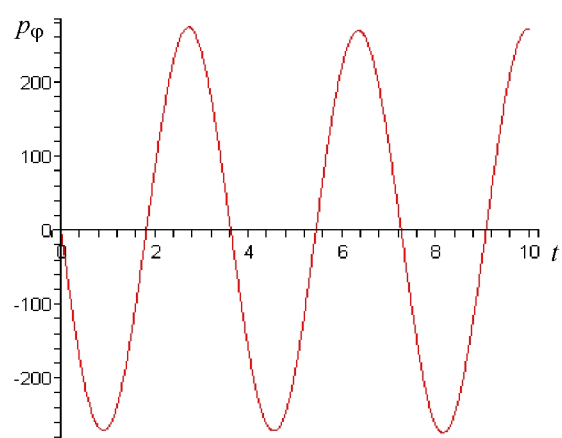


Рис. 25. Зависимость p_φ от времени t

38. Исследование движения системы под действием неголономной связи. Определение реакции неголономной связи

1. Наложить на систему неголономную связь вида

$$\sum_{k=1}^N \vec{a}_{\beta k} \vec{V}_k + a_{\beta} = 0 \quad (\beta = \overline{1, s}). \quad (38.1)$$

2. Коэффициенты при обобщенных скоростях в равенствах (38.1) умножить на неопределенный скалярный множителей Лагранжа λ_{β} и результаты вычесть из уравнения Лагранжа 2-го рода. Тогда уравнения движения в выбранных обобщенных координатах примут вид:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} &= \lambda a_{\beta x}, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} &= \lambda a_{\beta y}, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \right) - \frac{\partial L}{\partial z} &= \lambda a_{\beta z}. \end{aligned} \quad (38.2)$$

3. Продифференцировать уравнение связи (38.1).

4. Из любого уравнения системы (38.2) выразить множитель Лагранжа и подставить его в оставшиеся уравнения системы, которые вместе с уравнением, полученным в пункте 3, образуют систему дифференциальных уравнений движения системы.

5. Реакции неголономной связи определяем из правых частей уравнений системы (38.2):

$$\begin{aligned} R_x &= \lambda a_{\beta x}, \\ R_y &= \lambda a_{\beta y}, \\ R_z &= \lambda a_{\beta z}. \end{aligned}$$

6. Результаты численного интегрирования системы дифференциальных уравнений движения системы представить в виде графиков.

Пример 14. Выполнение второй части курсовой работы

Наложим на систему, представленную на рис. 14, неголономную связь

$$\dot{x} \sin(\alpha) + \dot{\varphi} = 0. \quad (38.3)$$

Для составления уравнений движения воспользуемся уже полученными в первой части выражениями для кинетической и потенциальной энергии:

$$T = \frac{1}{2} m_2 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} (I + m_2 l^2) \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\alpha}^2 + m_2 l \dot{\varphi} (x \dot{\alpha} \cos(\alpha) + \dot{x} \sin(\alpha)),$$
$$\Pi = -m_1 g \left(l + \frac{4R}{3\pi} \right) \cos \varphi - m_2 g (l \cos \varphi + x \cos(\alpha + \varphi)) + \frac{c}{2} (x - l_0)^2.$$

Уравнения Лагранжа 2-го рода в выбранных обобщенных координатах примут вид:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} &= 0, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= 0, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \alpha} &= 0. \end{aligned} \quad (38.4)$$

Коэффициенты при обобщенных скоростях в равенстве (38.3) умножим на неопределенный скалярный множитель Лагранжа λ_β и результаты вычтем из (38.2). Тогда, уравнения движения в выбранных обобщенных координатах x, φ, α примут вид:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} &= \lambda \sin(\alpha), \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= \lambda, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \alpha} &= 0. \end{aligned} \quad (38.5)$$

Найдем все производные, необходимые нам для составления уравнений (38.1):

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) &= m_2 (\ddot{x} + 2l\ddot{\phi} \sin(\alpha) + 2l\dot{\phi} \cos(\alpha) \dot{\alpha}), \\ \frac{\partial L}{\partial x} &= m_2 (x\dot{\alpha}^2 + 2l\dot{\phi} \cos(\alpha) \dot{\alpha}) + m_2 g \cos(\alpha + \varphi) - c(x - l_0), \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) &= I\ddot{\phi} + \frac{1}{2} m_2 (2l^2 \ddot{\phi} + 4l\dot{x}\dot{\alpha} \cos(\alpha) + 2lx\ddot{\alpha} \cos(\alpha) - \\ &\quad - 2lx\dot{\alpha}^2 \sin(\alpha) + 2l\ddot{x} \sin(\alpha)), \\ \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= -m_1 g \left(l + \frac{4R}{3\pi} \right) \sin(\varphi) - m_2 g (l \sin(\varphi) + x \sin(\alpha + \varphi)), \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} \right) &= \frac{1}{2} m_2 (4x\dot{x}\dot{\alpha} + 2x^2\ddot{\alpha} + 2l\dot{x}\dot{\phi} \cos(\alpha) + \\ &\quad + 2lx\ddot{\phi} \cos(\alpha) - 2lx\dot{\phi} \dot{\alpha} \sin(\alpha)), \\ \frac{\partial L}{\partial \alpha} &= \frac{1}{2} m_2 (-2lx\dot{\phi} \sin(\alpha) \dot{\alpha} + 2l\dot{x}\dot{\phi} \cos(\alpha)) - m_2 g x \sin(\alpha + \varphi). \end{aligned} \right. \quad (38.6)$$

Подставляем (38.6) в (38.5), получим:

$$\left\{ \begin{aligned} m_2 \ddot{x} + m_2 l \sin(\alpha) \ddot{\phi} - m_2 x \dot{\alpha}^2 - m_2 g \cos(\alpha + \varphi) + \\ + c(x + l_0) &= \lambda \sin(\alpha), \\ m_2 l \sin(\alpha) \ddot{x} + (I + m_2 l^2) \ddot{\phi} + m_2 l x \cos(\alpha) \ddot{\alpha} + \\ + m_2 l (2\dot{x}\dot{\alpha} \cos(\alpha) - x\dot{\alpha} \sin(\alpha)) + m_1 g \left(l + \frac{4R}{3\pi} \right) \sin(\varphi) + \\ + m_2 g (l \sin(\varphi) + x \sin(\alpha + \varphi)) &= \lambda, \\ m_2 l x \cos(\alpha) \ddot{\phi} + m_2 x^2 \ddot{\alpha} + m_2 x (2\dot{\alpha}\dot{x} + g \sin(\alpha + \varphi)) &= 0. \end{aligned} \right. \quad (38.7)$$

Выразим λ из первого уравнения системы (38.7) и подставим во второе, тогда

$$\begin{aligned} &m_2 l \sin(\alpha) \ddot{x} + (I + m_2 l^2) \ddot{\phi} + m_2 l x \cos(\alpha) \ddot{\alpha} + \\ &+ m_2 l (2\dot{x}\dot{\alpha} \cos(\alpha) - x\dot{\alpha} \sin(\alpha)) + m_1 g \left(l + \frac{4R}{3\pi} \right) \sin(\varphi) + \\ &+ m_2 g (l \sin(\varphi) + x \sin(\alpha + \varphi)) = \\ &= \frac{m_2 \ddot{x} - m_2 x \dot{\alpha}^2 - m_2 g \cos(\alpha + \varphi) + c(x + l_0)}{\sin(\alpha)} + m_2 l \ddot{\phi}. \end{aligned} \quad (38.8)$$

Продифференцируем по времени уравнение связи (38.3):

$$\ddot{x} \sin(\alpha) + \dot{x} \cos(\alpha) + \ddot{\varphi} = 0. \quad (38.9)$$

Уравнения (38.8) и (38.9) вместе с третьим уравнением системы (38.7) образуют систему дифференциальных уравнений движения системы:

$$\begin{cases} \ddot{x} \sin(\alpha) + \dot{x} \cos(\alpha) + \ddot{\varphi} = 0, \\ m_2 l x \cos(\alpha) \ddot{\varphi} + m_2 x^2 \ddot{\alpha} + m_2 x (2 \dot{\alpha} \dot{x} + g \sin(\alpha + \varphi)) = 0, \\ m_2 l \sin(\alpha) \ddot{x} + (I + m_2 l^2) \ddot{\varphi} + m_2 l x \cos(\alpha) \ddot{\alpha} + \\ + m_2 l (2 \dot{x} \dot{\alpha} \cos(\alpha) - x \dot{\alpha} \sin(\alpha)) + m_1 g \left(l + \frac{4R}{3\pi} \right) \sin(\varphi) + \\ + m_2 g (l \sin(\varphi) + x \sin(\alpha + \varphi)) = \\ = \frac{m_2 \ddot{x} - m_2 x \dot{\alpha}^2 - m_2 g \cos(\alpha + \varphi) + c(x + l_0)}{\sin(\alpha)} + m_2 l \ddot{\varphi}. \end{cases} \quad (38.10)$$

Реакции неголономной связи определяем из правых частей уравнений системы (38.7):

$$\begin{cases} R_x = \sin(\alpha) (m_2 l \sin(\alpha) \ddot{x} + (I + m_2 l^2) \ddot{\varphi} + m_2 l x \cos(\alpha) \ddot{\alpha} + \\ + m_2 l (2 \dot{x} \dot{\alpha} \cos(\alpha) - x \dot{\alpha} \sin(\alpha)) + m_1 g \left(l + \frac{4R}{3\pi} \right) \sin(\varphi) + \\ + m_2 g (l \sin(\varphi) + x \sin(\alpha + \varphi))), \\ R_\varphi = m_2 l \sin(\alpha) \ddot{x} + (I + m_2 l^2) \ddot{\varphi} + m_2 l x \cos(\alpha) \ddot{\alpha} + \\ + m_2 l (2 \dot{x} \dot{\alpha} \cos(\alpha) - x \dot{\alpha} \sin(\alpha)) + m_1 g \left(l + \frac{4R}{3\pi} \right) \sin(\varphi) + \\ + m_2 g (l \sin(\varphi) + x \sin(\alpha + \varphi)), \\ R_\alpha = 0. \end{cases} \quad (38.11)$$

Проинтегрируем численно полученную систему (38.10) с начальными условиями:

$$x_0 = 0,4; \quad \dot{x}_0 = 0; \quad \varphi_0 = \frac{\pi}{6}; \quad \dot{\varphi}_0 = 0; \quad \alpha_0 = \frac{\pi}{6}; \quad \dot{\alpha}_0 = 0.$$

Результаты представлены в виде графиков (рис. 26 – 29).

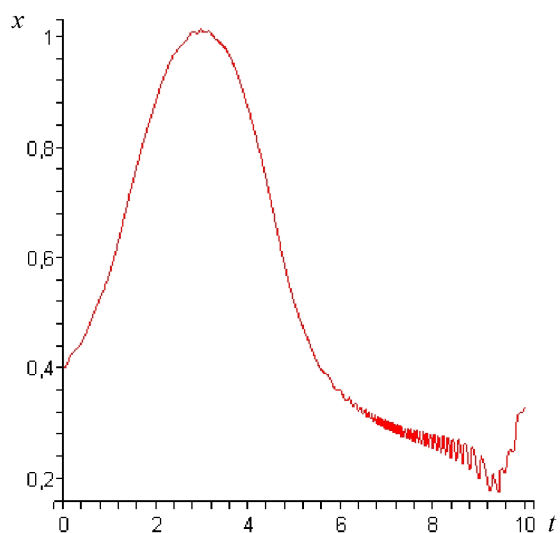


Рис. 26. Зависимость x от времени t

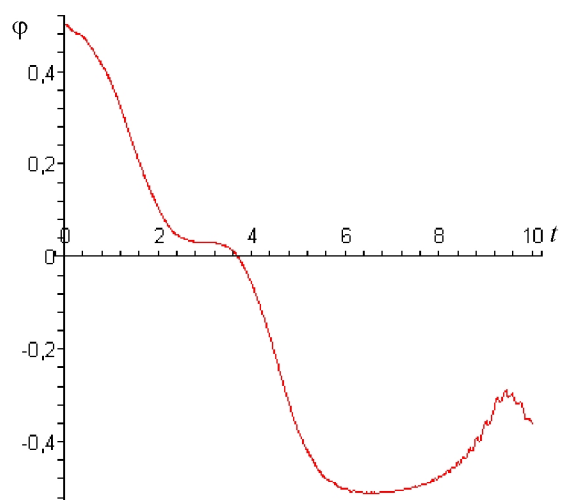


Рис. 27. Зависимость φ от времени t

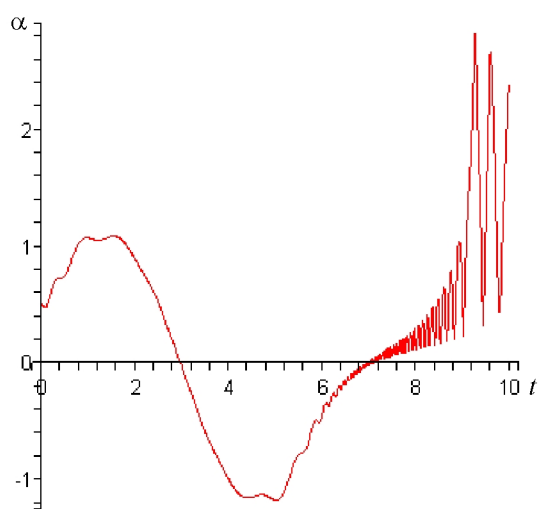


Рис. 28. Зависимость α от времени t

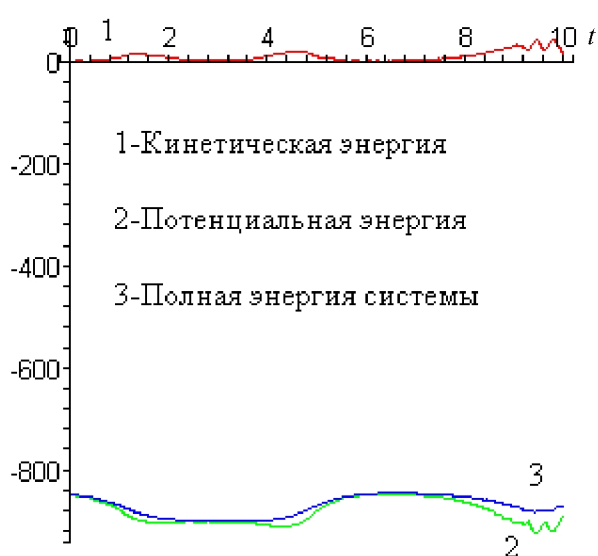


Рис. 29. Зависимость энергии от времени

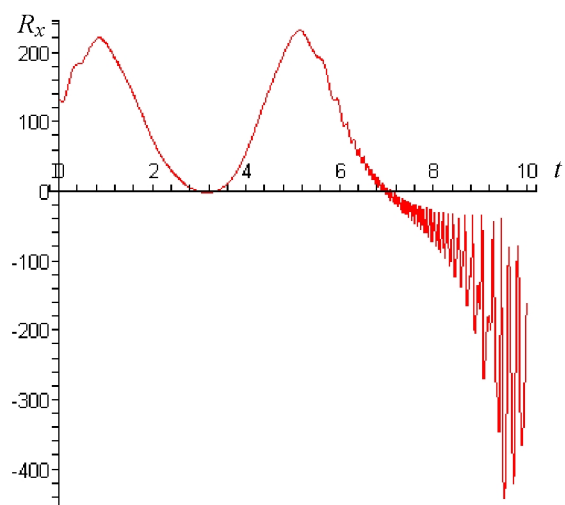


Рис. 30. Реакция неголономной связи R_x

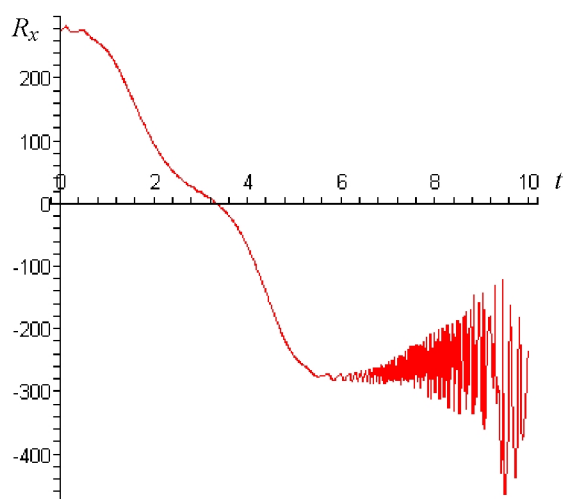


Рис. 31. Реакция неголономной связи R_φ

Заключение

В рамках учебного пособия изложены общие принципы аналитической механики. Рассмотрены способы получения дифференциальных уравнений, описывающих движение голономных и неголономных механических систем, и методы их интегрирования.

Показано использование уравнений Лагранжа первого и второго рода, канонических уравнений Гамильтона, скобок Пуассона и уравнений Рауса для изучения движения голономных механических систем. Движение неголономных систем предлагалось исследовать с помощью множителей Лагранжа и уравнений Аппеля. В рамках пособия также рассмотрены вариационные принципы механики для неконсервативных и неголономных систем, применение основного интегрального инварианта Пуанкаре-Картана, канонические преобразования, универсальный интегральный инвариант, уравнения Уиттекера и уравнение Гамильтона-Якоби.

В пособии рассмотрено несколько практически важных примеров, в частности приводятся решения задач о спуске космического аппарата в атмосфере, о кручении и верчении монеты, о колебании струны, о движении конька. В последней главе даны методические рекомендации и примеры исследования поведения механической системы с тремя степенями свободы.

Пособие предназначено для углубленного изучения курса аналитической механики в рамках подготовки кадров высшей квалификации по естественно-научным направлениям «Механика», «Механика. Прикладная математика».

Список литературы

1. Гантмахер, Ф.Р. Лекции по аналитической механике: учеб. пособие для вузов / Ф.Р. Гантмахер; под ред. Е.С. Пятницкого. – 3-е изд. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 264 с.
2. Ярошевский, В.А. Лекции по теоретической механике: учеб. пособие / В.А. Ярошевский. – М: МФТИ, 2001. – 244 с.
3. Маркеев, А.П. Теоретическая механика: учебник для университетов / А.П. Маркеев. – М.: ЧеРо, 1999. - 572 с.
4. Ландау, Л.Д. Теоретическая физика: учеб. пособие для вузов: в 10 т. Т. I. Механика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – 5-е изд., стереотип. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 224 с.
5. Моисеев, Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики / Н.Н. Моисеев. – М.: Наука, 1969. – 379 с.

Учебное издание

*Асланов Владимир Степанович
Ледков Александр Сергеевич*

ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ, ПРИМЕРЫ И ПРИЛОЖЕНИЯ

Учебное пособие

Редактор Л. Я. Ч е г о д а е в а
Доверстка Т. Е. П о л о в н е в а

Подписано в печать 05.10.2008 г. Формат 60х84 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Печ. л. 6,75.
Тираж 100 экз. Заказ . Арт. С-8/2008

Самарский государственный аэрокосмический
университет. 443086, Самара, Московское шоссе, 34.

Изд-во Самарского государственного аэрокосмического
университета. 443086, Самара, Московское шоссе, 34.