

2Г
Г695



**САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П.КОРОЛЕВА**

Б. А. Горлач

МАТЕМАТИКА

**Учебник
для экономических специальностей**

Часть 2



Самара, 2002

Глава 3

Векторы

3.1 Вектор как геометрический объект. Линейные операции над векторами

Вектором с геометрической точки зрения называется отрезок в пространстве (на плоскости), направленный от некоторой точки A (начала вектора) этого пространства к другой его точке B (конец вектора) (рис. 3.1,а).

Вектор принято обозначать или парой букв $\overline{AB}$ с чертой (реже стрелкой) сверху, обозначающих начало вектора (первая буква) и конец вектора (вторая буква), или одной буквой $\mathbf{a}$, выделенной жирным шрифтом или чертой сверху.

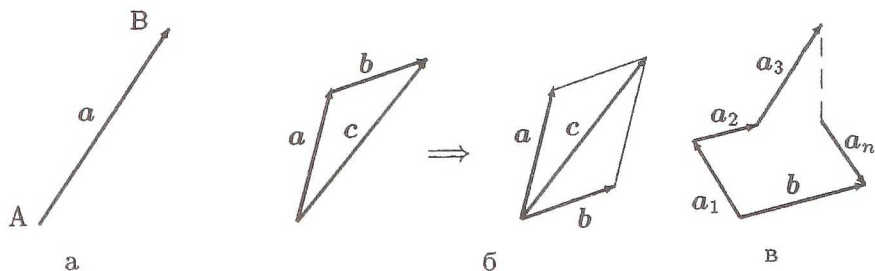


Рис. 3.1: Вектор и суммы векторов

Модулем вектора называется его длина

$$a = |\mathbf{a}| = |\overline{AB}|.$$

Вектор, начало которого совпадает с его концом, называют *нулевым вектором*.

Произведением вектора $\mathbf{a}$ на число $\lambda \in \mathbb{R}$ называют вектор $\lambda \mathbf{a}$, модуль которого равен $|\lambda|a$, параллельный вектору $\mathbf{a}$ и направленный в сторону $\mathbf{a}$ при $\lambda > 0$ и в противоположную вектору $\mathbf{a}$ сторону при $\lambda < 0$.

Для нулевого вектора направление не определено.

Суммой двух векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называется вектор $\mathbf{c}$, начало которого совпадает с началом вектора $\mathbf{a}$, а конец — с концом вектора $\mathbf{b}$ при условии, что начало вектора $\mathbf{b}$ совмещено с концом вектора $\mathbf{a}$ (левый рис. 3.1,б). Вектор $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ можно представить как диагональ параллелограмма, сторонами которого служат векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ (правый рис. 3.1,б).

Суммой n векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ называется вектор $\mathbf{b}$, соединяющий начало первого вектора с концом последнего при условии, что конец каждого предыдущего из суммируемых векторов является началом последующего вектора (рис. 3.1,в).

Сложение и умножение на число математических объектов называют *линейными операциями* над этими объектами.

С помощью геометрических построений можно убедиться в том, что для линейных операций над векторами справедливы свойства $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ — векторы; $\lambda \in \mathbb{R})$:

1. $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ — коммутативность;
2. $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$ — ассоциативность;
3. $\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$ — дистрибутивность.

Разность двух векторов $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ можно рассматривать как сумму вектора $\mathbf{a}$ с вектором $\mathbf{b}$, умноженным на -1 .

Читателю рекомендуется провести построения, аналогичные рис. 3.1,б, для разности векторов.

3.2 Скалярное произведение векторов. Неравенство Коши-Буняковского

Скалярным произведением $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называется число, равное произведению модулей векторов на косинус угла между ними:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = ab \cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}). \quad (3.1)$$

Из формулы (3.1) следует, что знак скалярного произведения определяется косинусом угла между векторами. Оно положительно, если угол между направлениями векторов меньше прямого, и отрицательно в противном случае.

Равенство нулю скалярного произведения является условием ортогональности входящих в произведение векторов.

Скалярное произведение вектора самого на себя, называемое *скалярным квадратом*, определяет квадрат модуля этого вектора (косинус угла равен единице):

$$(a, a) = a \cdot a \cos(a, a) = a^2.$$

Для скалярного произведения векторов справедливы свойства:

1. $(a, b) = (b, a)$ — коммутативность;
2. $((a + b), c) = (a, c) + (b, c)$ — дистрибутивность;
3. $\lambda(a, b) = (\lambda a, b) = (a, \lambda b)$ — возможность внесения под (вынесения) знака скалярного произведения числового множителя.

Пример 1. Найти скалярное произведение векторов a и b , если известны их модули $a = 1$, $b = 2$ и угол $\alpha = (\hat{a}, \hat{b}) = \pi/6$.

Решение.

$$(a, b) = 1 \cdot 2 \cos(\pi/6) = \sqrt{3}.$$

Неравенством Коши-Буняковского называется следующее соотношение между скалярными произведениями двух векторов:

$$(a, b)^2 \leq (a, a) \cdot (b, b). \quad (3.2)$$

Докажем справедливость этого неравенства. Для этого найдем скалярный квадрат нового вектора $c = ka + b$, где k — некоторый скалярный множитель:

$$(c, c) = (ka + b, ka + b) = k^2(a, a) + 2k(a, b) + (b, b).$$

В левой части равенства стоит неотрицательная величина — скалярный квадрат вектора c , поэтому правая часть записанного равенства, представляющая собой квадратный трехчлен относительно k , также неотрицательна. Последнее утверждение говорит о том, что учетверенный дискриминант

$$D = (a, b)^2 - (a, a) \cdot (b, b) \leq 0.$$

Отсюда следует (3.2).

Пример 2. Установить связь между неравенством Коши-Буняковского и областью допустимых значений функции $\cos \varphi$.

Решение.

Пусть $\varphi = (\hat{a}, \hat{b})$ – угол между двумя векторами. Из скалярного произведения векторов следует:

$$\cos \varphi = \frac{(a, b)}{a \cdot b}.$$

Запишем неравенство Коши-Буняковского в виде

$$\frac{(a, b)^2}{a^2 \cdot b^2} \leq 1.$$

Извлекая квадратный корень из обеих частей последнего равенства, получим:

$$-1 \leq \frac{(a, b)}{a \cdot b} \leq 1.$$

В центре полученного неравенства стоит выражение, определяющее косинус угла между двумя векторами. Поэтому из него следует:

$$-1 \leq \cos \varphi \leq 1.$$

3.3 Проекция вектора на направленную ось

Проекцией точки на ось, как известно из курса геометрии, является основание перпендикуляра, опущенного на эту ось из рассматриваемой точки.

Вектор как геометрический объект представляет собой геометрическое место точек, лежащих на прямой, соединяющей начало вектора с его концом. Поэтому проекция вектора a на ось, направление которой определяется некоторым вектором c ($Pr_c a$), представляет собой геометрическое место точек проекций всех точек вектора на эту ось, т. е. (рис. 3.2, а)

$$Pr_c a = a \cos(\hat{a}, \hat{c}). \quad (3.3)$$

Из формулы видно, что знак проекции определяется знаком косинуса угла между векторами a и c . Проекция положительна, если угол меньше $\pi/2$, и отрицательна, если угол заключен между $\pi/2$ и π .

Вектор $a_c = \frac{c}{c} Pr_c a$, имеющий направление c ($\cos(\hat{a}, \hat{c}) > 0$), или вектор $b_c = \frac{c}{c} Pr_c b$, имеющий направление, противоположное c ($\cos(\hat{a}, \hat{c}) < 0$),

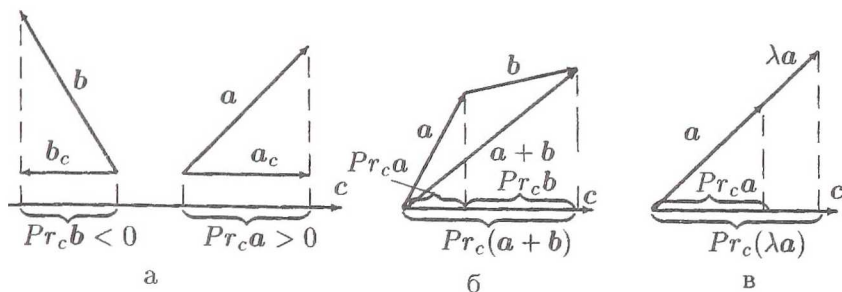


Рис. 3.2: Проекция векторов и их свойства

азываются *составляющими* векторов соответственно a или b на направление вектора c .

Свойства проекций.

1. Проекция суммы двух векторов на направленную ось равна сумме проекций векторов на эту ось.

Справедливость свойства следует из рис. 3.2,б.

2. При умножении вектора на число λ его проекция увеличивается в λ раз.

Справедливость свойства следует из подобия треугольников, изображенных на рис. 3.2,в.

Сравнивая (3.3) с формулой (3.1), для скалярного произведения получим:

$$(a, b) = a Pr_a b = b Pr_b a. \quad (3.4)$$

Если направление оси определяется единичным вектором e ($e = 1$), то

$$(a, e) = Pr_e a. \quad (3.5)$$

Пример. Найти проекцию вектора a на направление вектора b , если $a = 2$ и $\alpha = (\hat{a}, \hat{b}) = 2\pi/3$.

Решение.

$$Pr_b a = a \cos \alpha = 2 \cos(2\pi/3) = -1.$$

3.4 Линейная зависимость системы векторов

Пусть задана система n векторов a_i , ($i = \overline{1, n}$): $a_1, a_2, \dots, a_n$ и совокупность n чисел k_i : $k_1, k_2, \dots, k_n$.

Любой вектор типа

$$\mathbf{a} = k_1 \mathbf{a}_1 + k_2 \mathbf{a}_2 + \dots + k_n \mathbf{a}_n = \sum_{i=1}^n k_i \mathbf{a}_i \quad (3.6)$$

называется *линейной комбинацией векторов $\mathbf{a}_i$ ($i = \overline{1, n}$)*. Говорят, что вектор $\mathbf{a}$ линейно выражается через векторы $\mathbf{a}_i$ или разлагается по этим векторам.

Система векторов $\mathbf{a}_i$ ($i = \overline{1, n}$) называется *линейно зависимой*, если существуют такие числа λ_i ($i = \overline{1, n}$), не равные одновременно нулю, что выполняется равенство

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{a}_n = \mathbf{\Theta}, \quad (3.7)$$

где $\mathbf{\Theta}$ — нулевой вектор.

Например, если два вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны, направлены в противоположные стороны и известно, что модуль вектора $\mathbf{a}$ в пять раз больше модуля вектора $\mathbf{b}$, то линейная комбинация

$$\mathbf{a} + 5\mathbf{b} = \mathbf{\Theta}.$$

Поэтому векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, и вообще любые коллинеарные векторы, линейно зависимы.

Система векторов $\mathbf{a}_i$ ($i = \overline{1, n}$) называется *линейно независимой*, если равенство (3.7) выполняется только в том случае, когда $\lambda_i = 0$ для всех ($i = \overline{1, n}$), т.е. все числовые множители в линейной комбинации векторов равны нулю.

Перечислим некоторые важные свойства системы линейно зависимых векторов.

Свойство 1. Одиночный вектор представляет собой линейно зависимую систему векторов.

Доказательство.

Если система из одного вектора $\mathbf{a}$ линейно зависима, то найдется такое число $m \neq 0$, что будет выполняться равенство $m\mathbf{a} = \mathbf{\Theta}$.

Умножим обе части этого векторного равенства на m^{-1} . Получим $m^{-1}m\mathbf{a} = m^{-1}\mathbf{\Theta}$. Или $1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{\Theta}$. Таким образом, линейная комбинация векторов (одного вектора) равна нулю в случае, когда единственный множитель этой линейной комбинации отличен от нуля (равен единице).

Утверждение Свойства 1 справедливо и в случае, когда вектор $\mathbf{a}$ — нулевой.

Свойство 2. Если среди системы векторов имеется хотя бы один такой, который является линейной комбинацией остальных векторов, то система векторов линейно зависима.

Доказательство.

Пусть среди n векторов $a_1, a_2, \dots, a_n$ имеется вектор a_i , который линейно выражается через $n - 1$ остальных векторов:

$$a_i = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_{i-1} a_{i-1} + \lambda_{i+1} a_{i+1} + \dots + \lambda_n a_n.$$

Прибавляя к обеим частям равенства вектор $-a_i$, получим:

$$\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_{i-1} a_{i-1} + (-1)a_i + \lambda_{i+1} a_{i+1} + \dots + \lambda_n a_n = \mathbf{0}.$$

Равенство нулю линейной комбинации векторов в случае, когда не все множители входящих в нее векторов равны нулю (множитель при a_i равен -1) говорит о линейной зависимости векторов.

Читателю предоставляется возможность самому доказать обратное к Свойству 2 утверждение: если система векторов линейно зависима, то среди входящих в нее векторов найдется хотя бы один вектор такой, который может быть представлен в виде линейной комбинации остальных векторов.

По аналогии с предыдущими можно доказать еще два ниже приведенные свойства.

Свойство 3. Если часть векторов некоторой совокупности векторов представляет собой линейно зависимую систему, то вся совокупность векторов линейно зависима.

В частности, если система векторов содержит нулевой вектор, то она линейно зависима.

Свойство 4. Если система векторов линейно независима, а при добавлении к ней другого вектора становится линейно зависимой, то добавленный вектор можно представить как линейную комбинацию векторов исходной системы.

Пример. Исследовать на линейную независимость *лестничную* систему векторов:

$$\begin{cases} a_1 = (a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots, a_{1n}), \\ a_2 = (0, a_{22}, a_{23}, \dots, a_{2n}), \\ a_3 = (0, 0, a_{33}, \dots, a_{3n}), \\ \vdots \end{cases}$$

В приведенной системе векторов (их может быть любое количество m , но $m \leq n$) a_{ij} — числа, причем числа с одинаковыми индексами должны

быть отличными от нуля.

Решение.

Составим и приравняем нулевому вектору линейную комбинацию заданных векторов:

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_m \mathbf{a}_m = \mathbf{0}, \quad (m \leq n).$$

Записанное векторное равенство будет справедливым для каждого из компонентов векторов. Так для первого компонента имеем

$$\lambda_1 a_{11} + \lambda_2 \cdot 0 a_2 + \dots + \lambda_m \cdot 0 = 0.$$

Это равенство ($a_{11} \neq 0$) возможно только когда $\lambda_1 = 0$.

Рассматривая далее линейную комбинацию $m - 1$ векторов $\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \dots, \mathbf{a}_m$, убеждаемся, что их линейная независимость возможна только при $\lambda_2 = 0$ и т.д. В итоге убеждаемся в том, что система исходных векторов будет равна нулевому вектору только в случае, когда все $\lambda_i = 0$ ($i = \overline{1, m}$).

Из определения следует, что система исходных векторов линейно независима (сумма ненулевых векторов равна нулевому вектору только в случае, когда все числовые множители в линейной комбинации равны нулю).

3.5 Разложение вектора по базису в пространствах $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ и $\mathcal{R}_3$

Любой вектор можно разложить в пространствах $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3$ по *базису* — системе упорядоченных векторов, называемых *базисными*, количество которых в точности равно размерности пространства.

При этом в $\mathcal{R}_1$ базисным может быть любой вектор $\mathbf{a}$ (рис. 3.3,а); в $\mathcal{R}_2$ в качестве базисных могут быть выбраны любые два непараллельных вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ (рис. 3.3,б); в $\mathcal{R}_3$ — любые три вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$, не лежащие на одной или на параллельных плоскостях (рис. 3.3,в).

На отмеченных рисунках показано разложение произвольного вектора $\mathbf{p}$ по базисным векторам.

Формулы разложения вектора по базисным векторам следующие.

В $\mathcal{R}_1$: $\mathbf{p} = \lambda \mathbf{a}$ — формула указывает на то, что вектор $\mathbf{p}$ параллелен базисному вектору $\mathbf{a}$ и отличается от последнего скалярным множителем λ . Кроме того формула показывает, что вектор $\mathbf{p}$ линейно выражается через вектор $\mathbf{a}$. Поэтому можно утверждать следующее: *два вектора линейно зависимы, если они коллинеарны*. Сделанное утверждение не зависит от размерности пространства.

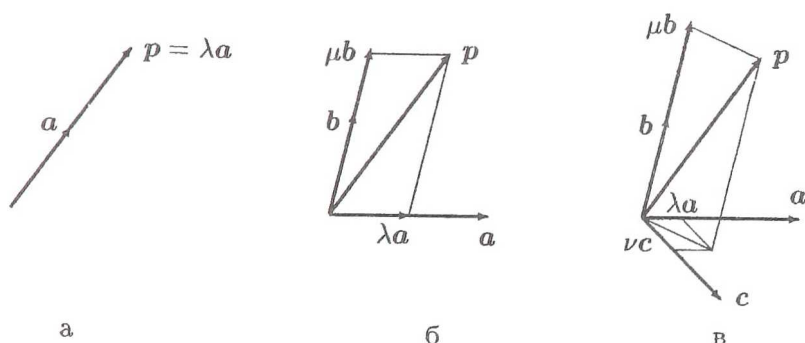


Рис. 3.3: Разложение вектора по базису

В $\mathbb{R}_2$: $p = \lambda a + \mu b$ — формула указывает на то, что вектор p является линейной комбинацией двух базисных векторов или суммой двух векторов, отличающихся от базисных скалярными множителями λ и μ . Можно утверждать, что *три вектора лежат в одной плоскости (компланарны), если они линейно зависимы*.

В $\mathbb{R}_3$:

$$p = \lambda a + \mu b + \nu c. \quad (3.8)$$

Смысл слагаемых и множителей в этой линейной комбинации векторов аналогичен разложениям в одно- и двухмерном пространствах. Ясно, что любые четыре вектора в пространстве $\mathbb{R}_3$ будут линейно зависимыми.

Слагаемые формулы (3.8) называются *составляющими* вектора p по базисным векторам a , b и c , а множители λ , μ и ν — его *компонентами* или *координатами* вектора p .

Такой же смысл заложен в слагаемых и множителях соответствующих формул для $\mathbb{R}_1$ и $\mathbb{R}_2$. В этих формулах базисными векторами являются линейно независимые векторы соответствующего пространства, а векторы p — линейно зависимы по отношению к базисным векторам.

3.6 Базис в пространстве $\mathbb{R}_n$

Обобщим записанные в предыдущем разделе формулы на пространство $\mathbb{R}_n$. Базисными векторами этого пространства могут служить n линейно

независимых векторов e_i ($i = \overline{1, n}$). Придем к соотношению:

$$p = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n, \quad (3.9)$$

в котором λ_i ($i = \overline{1, n}$) — компоненты вектора p в базисе e_i .

Базисом в пространстве $\mathbb{R}_n$ называется система n векторов этого пространства при выполнении условий:

- 1) векторы системы линейно независимы;
- 2) любой вектор из $\mathbb{R}_n$, не входящий в систему, является линейной комбинацией векторов системы.

Примером базиса в $\mathbb{R}_n$ может служить система n векторов:

$$\begin{cases} e_1 = (1, 0, \dots, 0), \\ e_2 = (0, 1, \dots, 0), \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ e_n = (0, 0, \dots, 1). \end{cases} \quad (3.10)$$

Любой вектор $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ пространства $\mathbb{R}_n$ очевидно представим в виде линейной комбинации базисных векторов (3.10):

$$a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n.$$

Справедлива следующая теорема: В пространстве $\mathbb{R}_n$ любая система, состоящая из m векторов при $m > n$ линейно зависима.

Введение двух матриц-столбцов:

$$A^T = (a_1; a_2; \dots; a_n) \quad \text{и} \quad E^T = (e_1; e_2; \dots; e_n),$$

позволяет представить вектор a в виде матричного произведения:

$$a = A^T E = E^T A.$$

Если подразумевать, что базисные векторы в рассматриваемом пространстве $\mathbb{R}_n$ заданы и не изменяются при рассмотрении процессов, описываемых вектором p , то этот вектор можно представить только в виде совокупности его компонентов:

$$p = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n).$$

Вектор, представляемый только в виде совокупности его компонентов, называют *арифметическим вектором*.

Конечно, в пространствах, размерность которых превышает 3, дать геометрическую интерпретацию вектора невозможно, хотя линейно независимый базис можно ввести без затруднений. Что касается геометрической интерпретации арифметических векторов, представляющих собой совокупности компонентов экономических категорий (количества товаров, оборудования, цен и т.д.) то она вообще лишена смысла.

Пример. Установить, будут ли три вектора пространства $\mathbb{R}_4$: $a = (-2, 3, 1, -1)$, $b = (1, -2, 3, 2)$ и $c = (-5, 7, 6, -1)$ линейно независимыми.

Решение.

Три заданных вектора будут линейно независимы, если хотя бы один из числовых множителей в приравненной нулю линейной комбинации этих векторов будет отличен от нуля.

Составим и приравняем нулевому вектору $\Theta = (0, 0, 0, 0)$ линейную комбинацию векторов:

$$\lambda a + \mu b + \nu c = \Theta.$$

Векторное уравнение можно представить аналогичными ему уравнениями, записанными для каждого (по порядку следования соответствующих векторов) компонента вектора. Сказанное приводит к системе четырех уравнений (четыре компонента) с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} -2\lambda + \mu - 5\nu = 0, \\ 3\lambda - 2\mu + 7\nu = 0, \\ \lambda + 3\mu + 6\nu = 0, \\ -\lambda + 2\mu - \nu = 0. \end{cases} \quad (3.11)$$

Записанная система, как нетрудно убедиться непосредственной подстановкой, имеет бесчисленное множество ненулевых решений при $\lambda = -3\nu$ и $\mu = -\nu$. В частности ее решением будут значения $\lambda = 3$, $\mu = 1$ и $\nu = -1$.

Ненулевые значения множителей в приравненной нулю линейной комбинации векторов:

$$3a + b - c = \Theta$$

говорит о линейной зависимости этих векторов.

3.7 Ортонормированный базис

Ортонормированным базисом для геометрического пространства $\mathbb{R}_3$ называется упорядоченная тройка взаимно ортогональных единичных векторов i, j, k .

Согласно определению, ортонормированные базисные векторы должны удовлетворять соотношениям:

$$\begin{aligned} |\mathbf{i}| &= |\mathbf{j}| = |\mathbf{k}| = 1; \\ (\mathbf{i}, \mathbf{i}) &= (\mathbf{j}, \mathbf{j}) = (\mathbf{k}, \mathbf{k}) = 1; \\ (\mathbf{i}, \mathbf{j}) &= (\mathbf{j}, \mathbf{k}) = (\mathbf{k}, \mathbf{i}) = 0. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Упорядоченность ортонормированных базисных векторов имеет два варианта.

Наибольшее распространение получил *правый базис*, для которого направление вращения по кратчайшему расстоянию от предыдущего вектора к последующему осуществляется по правилу *буравчика* (движение от наблюдателя в направлении третьего вектора при вращении первого вектора в сторону второго по часовой стрелке по кратчайшему расстоянию).

Для *левого базиса* вращение векторов осуществляется в противоположную по сравнению с правым базисом сторону.

Ортонормированный базис в пространстве $\mathbb{R}_2$ состоит из двух ортогональных векторов $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$.

С направлением векторов ортонормированного базиса обычно связывается ортогональная декартова система координат x, y, z , которая определяет масштаб — модули составляющих произвольного вектора по направлениям базисных векторов, соответственно $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ (рис. 3.4,а).

Если вектор $\mathbf{a}$ разложить по ортонормированному базису:

$$\mathbf{a} = a_{\mathbf{i}}\mathbf{i} + a_{\mathbf{j}}\mathbf{j} + a_{\mathbf{k}}\mathbf{k}, \quad (3.13)$$

то в этом разложении $a_{\mathbf{i}}, a_{\mathbf{j}}, a_{\mathbf{k}}$ будут координатами конца вектора и одновременно проекциями вектора на направления единичных базисных векторов $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$. Действительно, умножим (3.13) скалярно, например, на базисный вектор $\mathbf{i}$. С учетом (3.12) и (3.5) получим:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{i}) = a_{\mathbf{i}}(\mathbf{i}, \mathbf{i}) + a_{\mathbf{j}}(\mathbf{j}, \mathbf{i}) + a_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}, \mathbf{i}) = a_{\mathbf{i}} = Pr_{\mathbf{i}}\mathbf{a}.$$

Аналогично, $(\mathbf{a}, \mathbf{j}) = a_{\mathbf{j}} = Pr_{\mathbf{j}}\mathbf{a}$ и $(\mathbf{a}, \mathbf{k}) = a_{\mathbf{k}} = Pr_{\mathbf{k}}\mathbf{a}$.

С другой стороны, по определению скалярного произведения

$$(\mathbf{a}, \mathbf{i}) = |\mathbf{a}||\mathbf{i}| \cos \alpha = a \cos \alpha; \quad (\mathbf{a}, \mathbf{j}) = a \cos \beta; \quad (\mathbf{a}, \mathbf{k}) = a \cos \gamma.$$

Поделим соотношение (3.13) на a (модуль вектора $\mathbf{a}$)

$$\mathbf{n}_a = \frac{\mathbf{a}}{a} = \mathbf{i} \cos \alpha + \mathbf{j} \cos \beta + \mathbf{k} \cos \gamma. \quad (3.14)$$

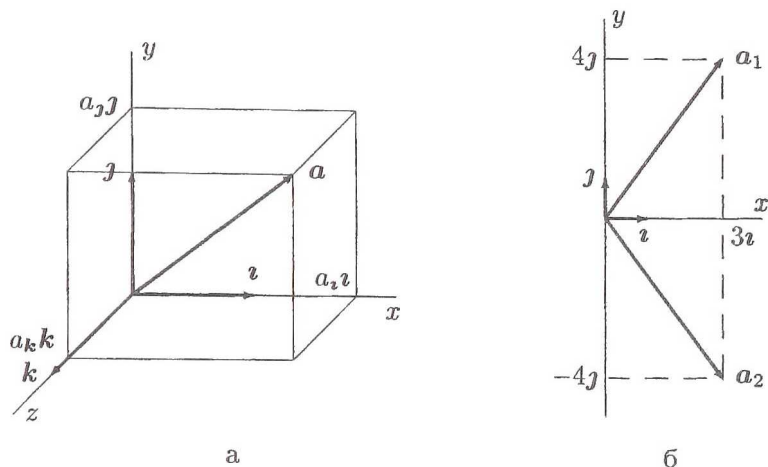


Рис. 3.4: Разложение вектора в ортонормированном базисе

Здесь n_a — единичный вектор, сонаправленный вектору a . Соотношение (3.14) указывает на то, что координатами единичного вектора при его разложении по векторам ортонормированного базиса являются направляющие косинусы и

$$a_i = a \cos \alpha; \quad a_j = a \cos \beta; \quad a_k = a \cos \gamma. \quad (3.15)$$

Используя теорему Пифагора для $\mathbb{R}_3$, найдем скалярный квадрат вектора a :

$$(a, a) = a \cdot a \cos 0 = a^2 = a_i^2 + a_j^2 + a_k^2. \quad (3.16)$$

Отсюда получаем выражение для модуля a вектора a :

$$a = \sqrt{a_i^2 + a_j^2 + a_k^2}. \quad (3.17)$$

В частности, модуль единичного вектора после деления соотношения (3.16) на a^2 с учетом (3.15) получим:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1. \quad (3.18)$$

Все приведенные выше соотношения легко записываются для случая пространства $\mathbb{R}_2$.

Соотношение (3.18) для $\mathbb{R}_2$ с учетом того, что $\beta = \pi/2 - \alpha$ и $\cos^2(\pi/2 - \alpha) = \sin^2 \alpha$, приводится к известной формуле из тригонометрии:

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1.$$

Пример. В пространстве $\mathbb{R}_2$ задан вектор $\mathbf{a}$ своим модулем $a = 5$ направляющим косинусом $\cos(\mathbf{a}, \mathbf{i}) = \cos \alpha = 0,6$. Требуется найти координаты вектора $\mathbf{a}$.

Решение.

1. Используя свойство (3.18) направляющих косинусов ($\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta =$ найдем

$$\cos \beta = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \pm \sqrt{1 - (0,6)^2} = \pm 0,8.$$

2. Координаты вектора в ортонормированном базисе, как показано выше, совпадают с проекциями вектора на направления базисных векторов. Поэтому

$$a_i = Pr_i \mathbf{a} = a \cos \alpha = 5 \cdot 0,6 = 3; \quad a_j = Pr_j \mathbf{a} = a \cos \beta = 5 \cdot (\pm 0,8) = \pm 4.$$

Таким образом, условию задачи удовлетворяют два вектора $\mathbf{a}_1 = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ и $\mathbf{a}_2 = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$ (рис. 3.4,б).

3.8 Операции над векторами, заданными в координатной форме

Рассмотрим пространство $\mathbb{R}_2$, с которым связан ортонормированный базис $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ (рис. 3.5).

Пусть два вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ представлены в этом базисе своими составляющими

$$\mathbf{a} = a_i \mathbf{i} + a_j \mathbf{j}, \quad \mathbf{b} = b_i \mathbf{i} + b_j \mathbf{j}.$$

Если базисные векторы $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$ заданы в рассматриваемом пространстве и все другие рассматриваемые в этом пространстве векторы представлены своими составляющими по базисным векторам, то эти векторы могут быть охарактеризованы полностью своими координатами.

Векторы, выходящие из начала координат, называют *радиус-векторами*.

Радиус-векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ можно символически представить в виде совокупности их координат, т.е. записать в виде арифметического вектора:

$$\mathbf{a} = (a_i; a_j); \quad \mathbf{b} = (b_i; b_j). \quad (3.19)$$

Введем новый вектор

$$c = (c_i; c_j), \quad (3.20)$$

равный разности радиус-векторов a и b .

С учетом (3.19) получим:

$$c = b - a = b_i i + b_j j - a_i i - a_j j = (b_i - a_i)i + (b_j - a_j)j = ((b_i - a_i); (b_j - a_j)).$$

В справедливости записанного равенства легко убедиться и путем соответствующих геометрических построений (рис. 3.5).

Таким образом, для того чтобы получить разность двух радиус-векторов, представленных в фиксированном базисе, связанном с декартовой ортогональной системой координат, достаточно составить вектор, координатами которого будут разности соответствующих координат этих векторов.

Из сказанного сразу следует, что вектор $\overline{AB}$, соединяющий в пространстве $\mathbb{R}_3$ точку $A(a_i; a_j; a_k)$ с точкой $B(b_i; b_j; b_k)$, может быть представлен в координатной форме в виде совокупности его координат, равных разностям координат конца вектора (точки B) и его начала (точки A):

$$\overline{AB} = ((b_i - a_i); (b_j - a_j); (b_k - a_k)). \quad (3.21)$$

Легко убедиться в том, что линейные операции над векторами, заданными в фиксированном базисе, сводятся к линейным операциям над их координатами. Например,

$$a + \lambda b = ((a_i + \lambda b_i); (a_j + \lambda b_j)). \quad (3.22)$$

Рассмотрим скалярное произведение векторов a и b , представленных в ортонормированном базисе, с учетом свойств скалярного произведения, приведенных в разделе 3.2, и соотношений (3.8):

$$\begin{aligned} (a, b) &= ((a_i i + a_j j), (b_i i + b_j j)) = a_i b_i (i, i) + a_i b_j (i, j) + a_j b_i (j, i) + a_j b_j (j, j) = \\ &= a_i b_i + a_j b_j. \end{aligned}$$

Аналогичные зависимости получаются для представления векторов в пространстве $\mathbb{R}_3$:

$$(a, b) = a_i b_i + a_j b_j + a_k b_k. \quad (3.23)$$

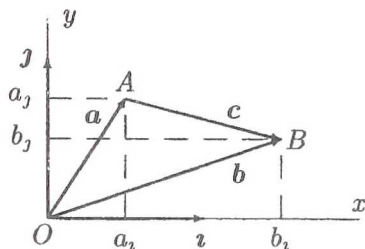


Рис. 3.5: Координаты разности векторов

Из определения скалярного произведения (3.1) вытекает выражение для косинуса угла между векторами:

$$\cos(\hat{\mathbf{a}}, \mathbf{b}) = \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{ab}, \quad (3.24)$$

которое с учетом (3.23) представим в виде

$$\cos(\hat{\mathbf{a}}, \mathbf{b}) = \frac{a_i b_i + a_j b_j + a_k b_k}{\sqrt{a_i^2 + a_j^2 + a_k^2} \sqrt{b_i^2 + b_j^2 + b_k^2}}. \quad (3.25)$$

Равенство

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_i b_i + a_j b_j + a_k b_k = 0 \quad (3.26)$$

является условием ортогональности векторов. Оно следует из (3.25) при $\cos(\hat{\mathbf{a}}, \mathbf{b}) = 0$.

Условие параллельности векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ можно записать в виде

$$\mathbf{a} = \lambda \mathbf{b}.$$

Это условие в координатной форме сводится к равенствам

$$\frac{a_i}{b_i} = \frac{a_j}{b_j} = \frac{a_k}{b_k} = (\lambda). \quad (3.27)$$

Для пространства $\mathbb{R}_2$ последнее отношение в равенстве исключается.

В случае представления вектора в координатной форме в пространстве $\mathbb{R}_n$: $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ вектор $\mathbf{a}$ называют *арифметическим n -мерным вектором*.

Арифметические векторы широко используются в экономических задачах.

Пример 1. В торговый павильон поступили товары трех видов. Совокупность этих товаров представляется арифметическим вектором $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, где количество товаров первого вида $a_1 = 10$, второго вида $a_2 = 5$, третьего вида $a_3 = 12$. Стоимость этих товаров задается арифметическим вектором цен $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, где в некоторых денежных единицах $b_1 = 15$, $b_2 = 20$, $b_3 = 25$. Требуется определить общую стоимость поступивших товаров.

Решение.

При определении общей стоимости P трех упомянутых товаров естественно использовать скалярное произведение векторов количества товаров и вектора их цен:

$$P = (a, b) = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 = 10 \cdot 15 + 5 \cdot 20 + 12 \cdot 25 = 550.$$

Пример 2. Найти угол (косинус угла) между векторами $a = (1, -2, 2)$ и $b = (-3, 2, 6)$.

Решение.

$$\begin{aligned} \cos(\hat{a}, b) &= \frac{a_i b_i + a_j b_j + a_k b_k}{\sqrt{a_i^2 + a_j^2 + a_k^2} \sqrt{b_i^2 + b_j^2 + b_k^2}} = \\ &= \frac{1 \cdot (-3) + (-2) \cdot 2 + 2 \cdot 6}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + 6^2}} = \frac{5}{21}. \end{aligned}$$

Пример 3. Найти угол α (косинус угла) между прямыми AC и BD , если $A(2; -3; 1)$, $B(1; 4; 0)$, $C(-4; 1; 1)$, $D(-5; -5; 3)$.

Решение.

Используя (3.21), получим:

$$\overline{AC} = (-4 - 2; 1 + 3; 1 - 1) = (-6; 4; 0) = 2(-3; 2; 0);$$

$$\overline{BD} = (-5 - 1; -5 - 4; 3 - 0) = (-6; -9; 3) = 3(-2; -3; 1).$$

$$\cos \alpha = \frac{(\overline{AC}, \overline{BD})}{|\overline{AC}| |\overline{BD}|} = \frac{2 \cdot 3(-3 \cdot (-2) + 2 \cdot (-3) + 0 \cdot 1)}{2\sqrt{(-3)^2 + 2^2 + 0^2} \cdot 3\sqrt{(-2)^2 + (-3)^2 + 1^2}} = 0.$$

Результат говорит об ортогональности диагоналей четырехугольника.

Пример 4. Доказать, что вектор $a = (-1, 3; 2, 1; 0, 7)$ параллелен вектору $b = (3, 9; -6, 3; -2, 1)$.

Решение.

Используя формулу (3.27), получим

$$\frac{-1,3}{3,9} = \frac{2,1}{-6,3} = \frac{0,7}{-2,1} = \left(-\frac{1}{3}\right).$$

Равенство говорит о параллельности векторов.

Представление (3.19) обобщается на n , в общем не геометрических, векторов. Так, в пространстве $\mathcal{R}_n$ при условии задания n -мерного базиса (в общем неортогонального) вектор a , имеющий n координат $a_1, a_2, \dots, a_n$, может быть представлен в виде (арифметический вектор)

$$a = (a_1; a_2; \dots; a_n).$$

3.9 Деление отрезка в заданном отношении

Пусть требуется определить координаты точки M , делящей отрезок M_1M_2 прямой в отношении $\lambda = \frac{M_1M}{MM_2}$ (рис. 3.6).

В векторной форме отношение может быть представлено в виде равенства

$$\overrightarrow{M_1M} = \lambda \overrightarrow{MM_2}. \quad (3.28)$$

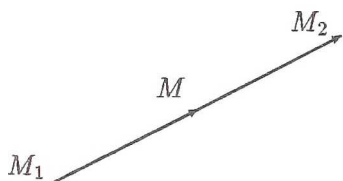


Рис. 3.6: Деление отрезка

Если координаты перечисленных точек в ортогональной декартовой системе координат известны: $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M(x, y, z)$, то равенство (3.28) с учетом (3.21) можно переписать

в виде

$$(x - x_1; y - y_1; z - z_1) = \lambda(x_2 - x; y_2 - y; z_2 - z).$$

Если векторы равны, то равны их соответствующие координаты. Это свойство позволяет из последнего выражения получить формулы для определения координат точки M :

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}; \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}. \quad (3.29)$$

В частности, если точка M делит отрезок M_1M_2 пополам, то $M_1M = MM_2$ и $\lambda = 1$. Тогда из (3.29) следует, что координаты точки M равны полусуммам координат точек M_1 и M_2 :

$$M \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right) \quad (3.30)$$

Пример. Найти координаты точки M , делящей отрезок M_1M_2 в отношении $\frac{3}{1}=3$, если $M_1(2; 3; 1)$, $M_2(-2; 3; 5)$.

Решение.

$$\begin{aligned} M \left(\frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda} \right) &\Rightarrow \\ \Rightarrow M \left(\frac{2 + 3 \cdot (-2)}{1 + 3}, \frac{3 + 3 \cdot 3}{1 + 3}, \frac{1 + 3 \cdot 5}{1 + 3} \right) &\Rightarrow M(-1; 3; 4). \end{aligned}$$

3.10 Резюме

Вектором в современной математике (арифметическим вектором) называют совокупность элементов, описывающих некоторый объект исследования. Такой вектор в пространстве $\mathfrak{R}_n$ отождествляется с матрицей-строкой:

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n). \quad (3.31)$$

В пространствах, размерность которых не превышает трех, можно ввести геометрический аналог вектора — направленный отрезок определенной длины, равной модулю a вектора. В евклидовом пространстве $a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$.

Направление вектора в пространстве $\mathfrak{R}_n$ определяется совокупностью "направляющих косинусов" — координат единичного вектора $\mathbf{n}$, сонаправленного рассматриваемому вектору:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{a}}{a} = \left(\frac{a_1}{a}, \dots, \frac{a_n}{a} \right) = (n_1, \dots, n_n).$$

Линейные операции над векторами (сложение и умножение на число) обладают свойствами коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности.

Любой вектор может быть разложен по базисным векторам $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ (представлен в виде линейной комбинации базисных векторов):

$$\mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + \dots + a_n \mathbf{e}_n.$$

В этом случае (3.31) представляет собой совокупность координат вектора $\mathbf{a}$ в заданном базисе.

Если базис ортонормированный $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \dots, \mathbf{i}_n)$, то есть базис, векторы которого удовлетворяют условиям

$$(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_r) = \delta_{kr} = \begin{cases} 1, & \text{если } k = r, \\ 0, & \text{если } k \neq r, \end{cases}$$

то в разложении $\mathbf{a} = a_1 \mathbf{i}_1 + a_2 \mathbf{i}_2 + \dots + a_n \mathbf{i}_n$ координаты в представлении (3.31) вектора являются проекциями вектора $\mathbf{a}$ на направления базисных векторов.

Важной математической операцией над двумя векторами является их скалярное произведение. Для геометрических векторов — это число, равное произведению модулей векторов на косинус угла между ними:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = ab \cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

Для векторов, представленных в ортонормированном базисе и для арифметических векторов

$$(a, b) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n.$$

Скалярное произведение векторов коммутативно.

Векторы $e_1, e_2, \dots, e_n$ называются линейно независимыми, если равенство $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n - \text{числовые множители})$:

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n = 0$$

(0 – нулевой вектор) выполняется только при условии, когда все множители λ_i ($i = \overline{1, n}$) равны нулю. В противном случае совокупность векторов линейно зависима.

Кроме скалярного произведения на практике (но не в экономических задачах) находят широкое применение векторное и неопределенное (тензорное) произведения векторов.

Интересующимся этими вопросами и желающим расширить свои познания в векторной алгебре рекомендуем /1/ – /4/, /6/, /8/, /9/.

3.11 Вопросы

1. Что собой представляет вектор с геометрической точки зрения?
2. Какие обозначения приняты для векторов?
3. Что представляет собой модуль вектора?
4. Как определяется направление вектора в пространстве? на плоскости?
5. Какой вектор называется нулевым? Можно ли определить его направление?
6. Что собой представляет произведение вектора на число?
7. Что называется суммой двух векторов? n векторов?
8. Что собой представляют линейные операции над векторами?
9. Перечислите свойства линейных операций над векторами.
10. Что называется скалярным произведением векторов?
11. Запишите формулу для скалярного произведения векторов и поясните, от чего зависит знак скалярного произведения?
12. Что такое проекция вектора на направленную ось?
13. Перечислите основные свойства проекций и поясните их на рисунках.
14. Что собой представляет составляющая вектора по заданному направлению?
15. Как связана проекция вектора со скалярным произведением?
16. Какие векторы называются линейно зависимыми? линейно независимыми?
17. Перечислите свойства линейно зависимых векторов.
18. Что собой представляет арифметический вектор?
19. Какова связь между арифметическим и геометрическим векторами?
20. Может ли арифметический вектор не иметь геометрической интерпретации? Если да, то в каких случаях?

21. Как можно разложить вектор по базисам пространств $\mathbb{R}_1$? $\mathbb{R}_2$? $\mathbb{R}_3$?
22. Что собой представляет ортонормированный базис?
23. Запишите все возможные варианты скалярных произведений векторов ортонормированного базиса.
24. Что такое координаты вектора в произвольном базисе? составляющие вектора?
25. Какова связь между проекцией вектора на векторы ортонормированного базиса и координатами вектора?
26. Что собой представляют координаты единичного вектора в ортонормированном базисе?
27. Как определить модуль вектора по его координатам в ортонормированном базисе?
28. Как связаны между собой направляющие косинусы вектора, заданного в ортонормированном базисе?
29. Запишите линейные операции над векторами, представленными своими координатами.
30. Приведите выражения для скалярного произведения векторов, представленных своими координатами в ортонормированном базисе и для косинуса угла между векторами.
31. Запишите в координатной форме условия ортогональности и параллельности двух векторов.
32. В чем состоит задача деления отрезка в заданном отношении?
33. Приведите формулы для определения координат точки, делящей отрезок в заданном отношении.
34. Приведите формулы для определения координат точки, делящей отрезок пополам.

Выберите правильные ответы

- Отметьте, какие из записанных ниже выражений относятся к линейным операциям над векторами (a, b – векторы, λ – скаляр).
 - $a + b$;
 - (a, b) ;
 - $a + \mu b$;
 - $a = |a|$;
 - $a - b$.
- Расставьте номера ответов (правая колонка) в порядке следования номеров вопросов (левая колонка). (a, b, c – векторы, $\lambda \in \mathbb{R}$)

1. Коммутативность	1. $(a, b) = \lambda$
2. Ассоциативность	2. $a + b = b + a$
3. Дистрибутивность	3. $a + (b + c) = (a + b) + c$
4. Скалярное произведение	4. $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$
- Расставьте номера ответов (правая колонка) в порядке следования номеров вопросов (левая колонка) по отношению к скалярному произведению и его свойствам (a, b, c – векторы, $\lambda \in \mathbb{R}$).

1. Коммутативность	1. $(a, b) = a \cos(\hat{a}, \hat{b})$
2. Ассоциативность	2. $(a, b) = (b, a)$
3. Дистрибутивность	3. $(a, (b + c)) = (a, b) + (a, c)$
4. Определение	4. $\lambda(a, b) = (\lambda a, b) = (a, \lambda b)$
- Какие из перечисленных ниже соотношения справедливы для проекций векторов?

1. $Pr_b a = Pr_a b$	2. $Pr_b a = b \cos(\hat{a}, \hat{b})$	3. $Pr_b \lambda a = \lambda Pr_b a$
4. $Pr_c(a, b) = Pr_c a \cdot Pr_c b$	5. $Pr_c(a + b) = Pr_c a + Pr_c b$	
- Отметьте свойства, справедливые по отношению к векторам ортонормированного базиса в $\mathbb{R}_2$ (n – единичный вектор).

1. $(i, j) = 0$	2. $i + j = 2n$	3. $i \perp j$
4. $\sqrt{i^2 + j^2} = 1$	5. $(i, i) = 1$.	
- Отметьте свойства, справедливые по отношению к действиям над векторами, представленными в ортонормированном базисе.

1. $a + b = (a_i + b_i; a_j + b_j; a_k + b_k)$
2. $\lambda a = (\lambda a_i; \lambda a_j; \lambda a_k) = (a_i; \lambda a_j; a_k) = (a_i; a_j; \lambda a_k)$

$$3. (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sqrt{a_i b_i + a_j b_j + a_k b_k} \quad 4. Pr_{\mathbf{b}} \mathbf{a} = a_i b_i + a_j b_j + a_k b_k.$$

$$5. \cos(\hat{\mathbf{a}}, \mathbf{b}) = \frac{a_i b_i + a_j b_j + a_k b_k}{\sqrt{a_i^2 + a_j^2 + a_k^2} \sqrt{b_i^2 + b_j^2 + b_k^2}}$$

7. Отметьте свойства, справедливые по отношению к действиям над векторами, представленными в ортонормированном базисе.

$$1. (\mathbf{a}, \mathbf{a}) = a_i^2 + a_j^2 + a_k^2 \quad 2. a_i = Pr_i \mathbf{a} \quad 3. a_i = a \cos(\hat{\mathbf{a}}, \mathbf{i})$$

$$4. a = \sqrt{i^2 + j^2 + k^2} \quad 5. (\mathbf{i}, \mathbf{k}) = 1.$$

8. Отметьте свойства, справедливые по отношению к векторам, представленным в ортонормированном базисе в $\mathbb{R}_3$ ($\mathbf{a}$ – произвольный вектор; $\mathbf{n}$ – единичный вектор).

$$1. (\mathbf{n}, \mathbf{i}) = \cos \alpha \quad 2. \mathbf{a} = a_i \mathbf{i} + a_j \mathbf{j} + a_k \mathbf{k} \quad 3. a = \sqrt{a_i^2 + a_j^2 + a_k^2}$$

$$4. \mathbf{n} = (\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma) \quad 5. a_i a_k = 0.$$

9. Расставьте номера ответов (правая колонка) в порядке следования номеров вопросов (левая колонка). В местах отсутствия соответствия поставьте цифру 5.

1. Модуль вектора

$$1. a \cos \alpha$$

2. Координата вектора

$$2. \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

3. Деление отрезка

$$3. (x_A + \lambda x_B) / (1 + \lambda)$$

4. Скалярное произведение

$$4. a_x b_x + a_y b_y$$

3.12 Упражнения к разделам 3.1–3.6

ТЕМА 5

Векторы. Линейная зависимость и независимость системы векторов

Семинарское занятие

Вопросы

1. Что собой представляет вектор с геометрической точки зрения? арифметический вектор?
2. Что представляет собой модуль вектора?
3. Как определяется направление вектора в пространстве? на плоскости?
4. Что собой представляют линейные операции над векторами? Перечислите свойства линейных операций.
5. Что называется скалярным произведением векторов? Запишите формулу для скалярного произведения векторов и поясните, от чего зависит знак скалярного произведения.
6. Что такое проекция вектора на направленную ось? Перечислите основные свойства проекций.
7. Что собой представляет составляющая вектора по заданному направлению?
8. Как связана проекция вектора со скалярным произведением?
9. Какие векторы называются линейно зависимыми? линейно независимыми?
10. Как можно разложить вектор по базисам пространств $\mathbb{R}_1$? $\mathbb{R}_2$? $\mathbb{R}_3$?

Задачи

К разделу 3.1

1. Заданы три произвольным образом расположенные в пространстве вектора a , b и c . Путем построений изобразить процесс получения векторов $a + b + c$, $a + b - c$ и $-2a + b + c$.

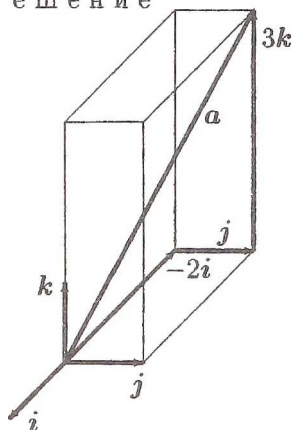
Решение

Для решения задачи используем правила суммирования векторов и умножения вектора на число. Например, в случае построения третьего вектора сначала изображается вектор, длина которого в 2 раза больше вектора a и направленного в сторону, противоположную вектору a . С концом полученного вектора совмещается начало вектора b , затем с концом присоединенного вектора b совмещается начало вектора c . Началом искомого вектора является начало вектора $-2a$, а концом — конец вектора c .

Проверить справедливость свойства коммутативности операции сложения векторов.

2. Построить вектор $a = -2i + j + 3k$, где i , j и k — тройка взаимно ортогональных единичных векторов.

Решение



Искомый вектор a можно получить двумя способами. Либо построением прямоугольного параллелепипеда на векторах $-2i$, j и $3k$, либо последовательно присоединяя к концу каждого предыдущего вектора начало последующего. В первом случае искомый вектор, началом которого служат начала трех векторов-сторон параллелепипеда, совпадает с диагональю построенного параллелепипеда. Во втором случае начало вектора a совпадает с началом первого изображаемого вектора суммы, конец — с концом последнего.

К разделам 3.2 – 3.6.

3. Заданы модули $a = 10$, $b = 5$ двух векторов и угол $\varphi = (\hat{a}, \hat{b}) = 2\pi/3$ между ними. Найти скалярное произведение (a, b) .

Р е ш е н и е

Используя формулу, соответствующую определению скалярного произведения $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a \cdot b \cos(\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{b}})$, найдем $(\cos(2\pi/3) = -1/2)$:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 10 \cdot 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -25.$$

Знак "минус" в значении скалярного произведения говорит о том, что угол между рассматриваемыми векторами тупой.

4. Заданы модули $a = 2$, $b = 5$ двух векторов и их скалярное произведение $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 10$. Определить угол между векторами.

Р е ш е н и е

Из формулы, соответствующей определению скалярного произведения, следует: $\cos(\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{b}}) = \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{a \cdot b}$. Воспользовавшись этим выражением, найдем:

$$\cos(\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{b}}) = \frac{10}{2 \cdot 5} = 1.$$

Отсюда $(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}) = \pm \frac{\pi}{2}$.

5. Найти скалярное произведение векторов $2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$ и $\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$, если известны модули векторов $a = 4$, $b = 1$ и угол $\varphi = (\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}) = \pi/3$.

Р е ш е н и е

Для определения искомой величины предварительно раскроем скалярное произведение, опираясь на его свойства (дистрибутивность, коммутативность и возможность вынесения числового множителя за знак скалярного произведения):

$$\begin{aligned} ((2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}), (\mathbf{a} - 2\mathbf{b})) &= 2(\mathbf{a}, \mathbf{a}) - 4(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + 3(\mathbf{b}, \mathbf{a}) - 6(\mathbf{b}, \mathbf{b}) = \\ &= 2a^2 - a \cdot b \cos \varphi - 6b^2 = 2 \cdot 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} - 6 \cdot 1^2 = 24. \end{aligned}$$

6. Найти проекцию вектора $2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$ на направление вектора $\mathbf{c}$, если $a = \sqrt{3}$, $(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{c}}) = \pi/6$, $(\hat{\mathbf{b}}, \hat{\mathbf{c}}) = \pi/2$.

Р е ш е н и е

Используя свойства суммы проекций векторов и произведения проекции вектора на число, получим:

$$\begin{aligned} Pr_{\mathbf{c}}(2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}) &= 2Pr_{\mathbf{c}}\mathbf{a} + 3Pr_{\mathbf{c}}\mathbf{b} = 2a \cos(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{c}}) + 3b \cos(\hat{\mathbf{b}}, \hat{\mathbf{c}}) = \\ &= 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 3 \cdot b \cdot 0 = 3. \end{aligned}$$

7. Найти проекцию вектора $2\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$ на направление вектора $\mathbf{c}$, если $c = 2$, $(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{c}}) = -1$, $(\hat{\mathbf{b}}, \hat{\mathbf{c}}) = 4$.

Решение

Используя формулу, связывающую проекции векторов со скалярным произведением $Pr_c a = \frac{(a, c)}{c}$, получим:

$$Pr_c(2a - 3b) = 2 \frac{(a, c)}{c} - 3 \frac{(b, c)}{c} = 2 \frac{-1}{2} - 3 \frac{4}{2} = -7.$$

8. Записать вектор $a = -1,5p_1 + 0,5p_2$ в базисе $\{e_1, e_2\}$, если зависимость между двумя парами базисных векторов выражается соотношениями: $e_1 = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)$; $e_2 = \frac{1}{4}(3p_1 + p_2)$.

Решение

Из двух векторных уравнений, связывающих заданные базисные векторы, найдем $p_1 = -e_1 + 2e_2$; $p_2 = 3e_1 - 2e_2$.

Подставляя полученные зависимости в выражение для вектора a , получим: $a = 3e_1 - 4e_2$.

Замечание: линейная независимость двух пар базисных векторов следует из возможности взаимного однозначного представления одной пары векторов через другую.

Желательно представленные преобразования сопроводить рисунком, выбрав в качестве исходного базиса любую пару некомпланарных векторов $\{e_1; e_2\}$, или $\{p_1; p_2\}$.

9. Установить, будут ли функции e^{k_1x} и e^{k_2x} линейно независимыми.

Решение

Составим и приравняем нулю линейную комбинацию заданных функций.

$$\lambda_1 e^{k_1x} + \lambda_2 e^{k_2x} = 0.$$

Предположим, что хотя бы один из числовых множителей в равенстве (пусть λ_1) не равен нулю. Перенесем второе слагаемое в правую часть равенства и поделим полученное выражение на $\lambda_1 e^{k_2x}$:

$$e^{(k_1 - k_2)x} = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}.$$

В правой части полученного выражения стоит число, а в левой — функция переменной x . Равенство возможно только в случае, когда $k_1 = k_2$. Таким образом, экспоненциальные функции будут линейно независимыми только при различных коэффициентах в их показателях.

10. Денежные единицы E , R и U трех государств связаны отношениями, представленными таблицей (значения единиц, приведенных в верхней строке относятся к значениям единиц первого столбца).

Установить, факт линейной зависимости или независимости систем векторов, представленных координатами строк (столбцов) таблицы.

	E	D	R
E	1	$5/6$	25
D	$6/5$	1	30
R	$1/25$	$1/30$	1

Решение

Составим в виде совокупности координат векторы, представленные тремя строками таблицы:

$$a = \left(\frac{E}{E}, \frac{D}{E}, \frac{R}{E} \right) = \left(1, \frac{5}{6}, 25 \right), \quad b = \left(\frac{6}{5}, 1, 30 \right), \quad c = \left(\frac{1}{25}, \frac{1}{30}, 1 \right).$$

Нетрудно убедиться в том, что любой из записанных векторов коллинеарен двум другим. Действительно, например, $b = \frac{6}{5}a = 30c$, $a = \frac{5}{6}b = 25c$ и т.д. Аналогичные соотношения можно записать для векторов, представленных координатами столбцов таблицы. Следовательно отношения обменных курсов различных валют представляются числами, которые являются координатами линейно зависимых векторов.

Упражнения для самостоятельного решения

К разделам 3.1 – 3.6

1. Изобразите на рисунке три произвольных вектора a , b и c . Постройте по ним векторы $0,5a$, $-0,5a$, $a + b + 2c$, $2a - b$ и $a + (-a)$.

2. Заданы модули векторов $a=4$, $b=5$ и угол между ними $(\hat{a}, \hat{b})=2\pi/3$. Найти скалярное произведение векторов.

3. Заданы модули векторов $a=1$, $b=-3$ и угол между ними $(\hat{a}, \hat{b}) = \pi/2$. Найти скалярное произведение векторов $(a+b, a-b)$.

4. Найти $Pr_b a$, если $a = 4$, $(\hat{a}, \hat{b}) = \pi/6$.

5. Найти угол $\alpha = (\hat{a}, \hat{b})$, если $(a, b) = 4$, $a = 2$, $b = 4$.

6. Доказать, что полином n -ной степени $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ представляет собой линейную комбинацию системы линейно независимых "векторов" $\{x^0, x^1, x^2, \dots, x^n\}$.

7. Записать вектор $a = 2e_1 - 3e_2 + e_3$ в базисе $\{i_1, i_2, i_3\}$, если $e_1 = i_1$, $e_2 = i_1 + i_2$, $e_3 = i_1 + i_2 + i_3$.

8. Записать вектор $a = 3e_1 - e_2$ в базисе $\{i_1, i_2, i_3\}$, если $i_1 = e_1 - 2e_2$, $i_2 = e_1 + e_2$. Изобразить на рисунке разложение вектора в двух базисах.

9. Будут ли линейно независимыми функции $\sin x$ и $\cos x$?

10. В обменном пункте валюта D меняется на валюту E по курсу 1 : 1,25, на валюту C по курсу 1 : 0,25. Составить таблицу отношений валют (как в задаче 10 семинарского занятия и показать, что входящие в нее векторы-строки (векторы-столбцы) линейно зависимы.

3.13 Упражнения к разделам 3.7 – 3.9

Т Е М А 6

Операции над векторами в ортонормированном базисе

Семинарское занятие

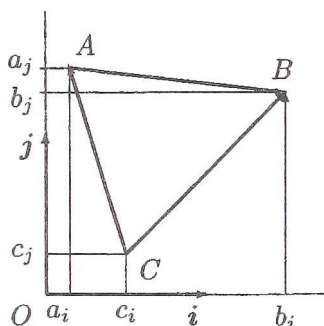
Вопросы

1. Что собой представляет ортонормированный базис?
2. Запишите все возможные варианты скалярных произведений векторов ортонормированного базиса.
3. Какова связь между проекциями вектора на векторы ортонормированного базиса и координатами вектора?
4. Что собой представляют координаты единичного вектора в ортонормированном базисе?
5. Как определить модуль вектора по его координатам в ортонормированном базисе?
6. Как связаны между собой направляющие косинусы вектора, заданного в ортонормированном базисе?
7. Запишите линейные операции над векторами, представленными своими координатами.
8. Приведите выражение для скалярного произведения векторов, представленных своими координатами в ортонормированном базисе. Для косинуса угла между векторами.
9. Запишите в координатной форме условия ортогональности и параллельности двух векторов.
10. В чем состоит задача деления отрезка в заданном отношении? Приведите формулы для определения координат точки, делящей отрезок в заданном отношении и, в частности, пополам.

Задачи

1. В пространстве $\mathcal{R}_2$ заданы два геометрических вектора $\overline{CA}$ и $\overline{CB}$. Ввести в этом пространстве ортонормированный базис и показать на рисунке проекции векторов $\overline{CA}$, $\overline{CB}$ и $\overline{AB}$. Записать выражения для проекций и составляющих этих векторов по направлениям базисных векторов.

Решение



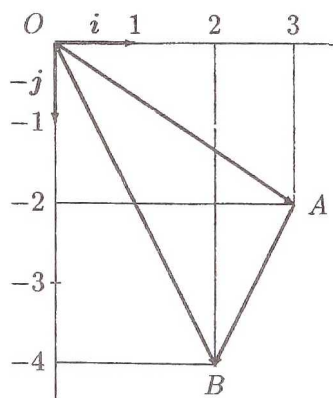
Проекции векторов соответствуют длинам отрезков по координатным осям, связанным с базисными векторами, так как ортогональные базисные векторы имеют единичные модули: $Pr_i \overline{CA} = a_i - c_i$ (отрицательная величина); $Pr_i \overline{CB} = b_i - c_i$, $Pr_i \overline{AB} = b_i - a_i$, ..., $Pr_j \overline{AB} = b_j - a_j$.

Векторы раскладываются на составляющие по направлениям базисных векторов: $\overline{CA} = (a_i - c_i)\mathbf{i} + (a_j - c_j)\mathbf{j}$, ..., $\overline{AB} = (b_i - a_i)\mathbf{i} + (b_j - a_j)\mathbf{j}$.

2. Найти вектор $\overline{AB}$, если в декартовой ортогональной системе координат $A(3; -2)$, $B(2; -4)$.

Построить векторы $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ и $\overline{AB}$ в ортонормированном базисе, связанном с системой координат (O – начало координат).

Решение



Векторы, задаваемые координатами точек их конца и начала, определяются разностями соответствующих координат. Так как координаты точки O нулевые: $O(0, 0)$, то $\overline{OA} = (a_i - 0; a_j - 0) = (a_i; a_j) = (3; -2)$, $\overline{OB} = (b_i; b_j) = (2; -4)$. Записанные соотношения подтверждают утверждение о том, что координаты радиус-векторов в ортонормированном базисе равны координатам концов этих векторов.

Далее имеем: $\overline{AB} = (b_i - a_i; b_j - a_j) = (2 - 3; -4 - (-2)) = (-1; -2)$.

3. В ортонормированном базисе заданы векторы $\mathbf{a} = (4; -2; 0)$ и $\mathbf{b} = (3; 5; -1)$. Найти $0,5\mathbf{a} + \mathbf{b}$ и $2\mathbf{b} - \mathbf{a}$.

Решение

Учитывая свойства линейных операций над векторами, заданными своими координатами, найдем: $0,5\mathbf{a} + \mathbf{b} = (0,5 \cdot 4 + 3; 0,5 \cdot (-2) + 5; 0,5 \cdot 0 + (-1)) = (2; 4; -1)$; $2\mathbf{b} - \mathbf{a} = (2 \cdot 3 - 4; 2 \cdot 5 - (-2); 2 \cdot (-1) - 0) = (2; 12; -2)$.

4. Найти $Pr_{\mathbf{b}}\mathbf{a}$, если $\mathbf{a} = (0; 2; -3)$, $\mathbf{b} = (1; -2; -1)$.

Решение

Воспользуемся формулой определения проекций через скалярное произведение векторов:

$$Pr_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{b} = \frac{a_i b_i + a_j b_j + a_k b_k}{\sqrt{b_i^2 + b_j^2 + b_k^2}} = \frac{0 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) + (-3) \cdot (-1)}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-1)^2}} = -\frac{1}{\sqrt{6}}.$$

5. Найти угол между векторами $\mathbf{a} = (-0,5; 2; 1,5)$ и $\mathbf{b} = (1; -4; -3)$.

Решение

Воспользуемся формулой определения косинуса угла между двумя векторами через скалярное произведение этих векторов:

$$\cos \varphi = \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}} = \frac{a_i b_i + a_j b_j + a_k b_k}{\sqrt{a_i^2 + a_j^2 + a_k^2} \sqrt{b_i^2 + b_j^2 + b_k^2}} = \frac{-0,5 \cdot 1 + 2 \cdot (-4) + 1,5 \cdot (-3)}{\sqrt{(-0,5)^2 + 2^2 + (1,5)^2} \sqrt{1^2 + (-4)^2 + (-3)^2}} = \frac{-13}{0,5\sqrt{26}\sqrt{26}} = -1.$$

Отсюда $\varphi = \arccos(-1) = \pi$.

Заданные векторы оказались коллинеарными. Этого результата можно было ожидать. Действительно, векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ линейно зависимы: $\mathbf{b} = -2\mathbf{a}$.

6. Найти m и n если известно, что векторы $\mathbf{a} = (2; 2; m)$ и $\mathbf{b} = (n; 4; 6)$ параллельны.

Решение

Из условия параллельности векторов $\frac{a_i}{b_i} = \frac{a_j}{b_j} = \frac{a_k}{b_k}$ следует $\frac{2}{n} = \frac{2}{4} = \frac{m}{6}$.

Из двух независимых уравнений получим:

$$\frac{2}{n} = \frac{2}{4}, \Rightarrow n = 4; \quad \frac{2}{4} = \frac{m}{6}, \Rightarrow m = 3.$$

7. Найти m , если векторы $\mathbf{a} = (5m; 2; m)$ и $\mathbf{b} = (-1; 3; m)$ перпендикулярны.

Решение

Из условия перпендикулярности векторов $(a, b) = a_i b_i + a_j b_j + a_k b_k = 0$ следует: $5m \cdot (-1) + 2 \cdot 3 + m \cdot m = 0$. Для определения m имеем квадратное уравнение $m^2 - 5m + 6 = 0$. Это уравнение имеет два действительных корня: $m_1 = 2$ и $m_2 = 3$, которые являются искомыми значениями m .

8. Найти длину и направляющие косинусы вектора $a = (1; \sqrt{2}; -1)$.

Решение

Определив модуль заданного вектора

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{1^2 + (\sqrt{2})^2 + (-1)^2} = 2,$$

найдем единичный вектор, сонаправленный вектору a :

$$n_a = \frac{a}{a} = \left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{1}{2} \right).$$

Координатами единичного вектора в ортонормированном базисе являются направляющие косинусы. Таким образом,

$$\cos \alpha = \frac{1}{2}, \quad \cos \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos \gamma = -\frac{1}{2}.$$

Отсюда находим значения углов: $\alpha = \pi/3$, $\beta = \pi/4$, $\gamma = 3\pi/2$, которые определяют направление вектора a .

9. Разделить отрезок, соединяющий точки $M_1(6; -8; 2)$ и $M_2(-2; 0; 2)$ в отношении 3:1.

Решение

Воспользуемся формулами деления отрезка в отношении $\lambda (\lambda : 1)$:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda},$$

находим:

$$x = \frac{6 + 3 \cdot (-2)}{1 + 3} = 0; \quad y = \frac{-8 + 3 \cdot 0}{1 + 3} = -2; \quad z = \frac{2 + 3 \cdot 2}{1 + 3} = 2.$$

Эти значения определяют координаты точки M , делящей отрезок $M_1 M_2$ в отношении 3 : 1: $M(0; -2; 2)$.

10. Записать выражение для вектора $\overline{AD}$, совпадающего с медианой треугольника ABC , если $A(0; 5; -2)$, $B(3; -1; 4)$, $C(1; 3; -4)$.

Решение

По определению медианы точка D делит отрезок BC пополам. Поэтому

$$D\left(\frac{x_B + x_C}{2}; y_B + y_C \cdot 2 + z_B + z_C \cdot 2\right) \Rightarrow$$

$$D\left(\frac{3+1}{2}; \frac{-1+3}{2}; \frac{4+(-4)}{2}\right) \Rightarrow D(2; 1; 0).$$

Запишем выражение для вектора, совпадающего с медианой:

$$\overline{AD} = (x_D - x_A; y_D - y_A; z_D - z_A) = (2 - 0; 1 - 5; 0 - (-2)) = (2; -4; 2)$$

Упражнения для самостоятельного решения

К разделам 3.7 – 3.9

1. Найти вектор $\overline{AB}$, если в декартовой ортогональной системе координат $A(1; 2; -1)$, $B(3; -4; 1)$.

Построить векторы $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ и $\overline{AB}$ в ортонормированном базисе, связанном с системой координат (O – начало координат).

2. В ортонормированном базисе заданы векторы $\mathbf{a} = (2; -1; 0)$ и $\mathbf{b} = (3; 1; 5)$. Найти $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ и $\mathbf{b} - 2\mathbf{a}$.

3. Найти $Pr_b \mathbf{a}$, если $\mathbf{a} = (0; 2; -3)$, $\mathbf{b} = (1; -2; -1)$.

4. Найти угол между векторами $\mathbf{a} = (2; 3; -1)$ и $\mathbf{b} = (-1; 0; 3)$.

5. Найти m , если известно, что векторы $\mathbf{a} = (1; n; 3)$ и $\mathbf{b} = (m; 4; 6)$ параллельны.

6. Из условия перпендикулярности векторов $\mathbf{a} = (m; 2m; 1)$ и $\mathbf{b} = (m; 1; 1)$ найти m .

7. Найти угол между диагоналями четырехугольника, заданного координатами его вершин: $A(-1; -1)$, $B(-1; 2)$, $C(2; -1)$ и $D(2; 2)$

8. Найти длину и направляющие косинусы вектора $\mathbf{a} = (3; -6; 2)$.

9. Разделить отрезок, соединяющий точки $M_1(2; 3; 0)$ и $M_2(4; 1; 2)$ в отношении 2:1.

10. Найти координаты середины отрезка, соединяющего точки $A(3; 2; 5)$ и $B(-1; 4; 1)$.

3.14 Варианты контрольных работ по векторной алгебре

БИЛЕТ ПО ТЕОРИИ

1. Отметьте, какие из записанных ниже выражений относятся к линейным операциям над векторами ($\mathbf{a}, \mathbf{b}$ – векторы, λ – скаляр).

1. $\mathbf{a} + \mathbf{b}$; 2. $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$; 3. $\mathbf{a} + \mu \mathbf{b}$;
4. $a = |\mathbf{a}|$; 5. $\mathbf{a} - \mathbf{b}$.

2. Отметьте свойства, справедливые по отношению к действиям над векторами, представленными в ортонормированном базисе.

1. $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_x + b_x; a_y + b_y; a_z + b_z)$
2. $\lambda \mathbf{a} = (\lambda a_x; \lambda a_y; \lambda a_z) = (a_x; \lambda a_y; a_z) = (a_x; a_y; \lambda a_z)$
3. $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sqrt{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}$ 4. $\text{Pr}_{\mathbf{b}} \mathbf{a} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$.
5. $\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$

3. Расставьте номера ответов (правая колонка) в порядке следования номеров вопросов (левая колонка) по отношению к скалярному произведению ($\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ – векторы, $\lambda \in \mathbb{R}$). В местах отсутствия соответствия поставьте цифру 5.

- | | |
|---------------------|--|
| 1. Коммутативность | 1. $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a \cos(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ |
| 2. Ассоциативность | 2. $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \mathbf{a})$ |
| 3. Дистрибутивность | 3. $(\mathbf{a}, (\mathbf{b} + \mathbf{c})) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) + (\mathbf{a}, \mathbf{c})$ |
| 4. Определение | 4. $\lambda(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\lambda \mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{a}, \lambda \mathbf{b})$ |

4. Расставьте номера ответов (правая колонка) в порядке следования номеров вопросов (левая колонка) по отношению к скалярному произведению ($\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ – векторы). В местах отсутствия соответствия поставьте цифру 5.

- | | |
|--|--|
| 1. Проекция вектора | 1. $a \cos(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ |
| 2. Свойство ассоциативности | 2. $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ |
| 3. Свойство дистрибутивности | 3. $(\mathbf{a}, (\mathbf{b} + \mathbf{c}))$ |
| 4. Определение скалярного произведения | 4. $ab \cos(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ |

5. Расставьте номера ответов (правая колонка) в порядке следования номеров вопросов (левая колонка). В местах отсутствия соответствия поставьте цифру 5.

1. Модуль вектора
2. Координата вектора
3. Скалярное произведение
4. Деление отрезка в отношении $\lambda : 1$

1. $a \cos \alpha$
2. $\sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$
3. $(x_A + \lambda x_B) / (1 + \lambda)$
4. $a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$

БИЛЕТ ПО ПРАКТИКЕ

1. Найти скалярное произведение $((2a - b), (a + 2b))$, если $a = 1, b = 2, (\hat{a}, \hat{b}) = \pi/3$.
2. Найти косинус угла между диагоналями четырехугольника с вершинами $A(2; 1), B(3; -1), C(-1; 2), D(-2; -2)$. Предварительно построить четырехугольник.
3. Найти проекцию вектора $a + 2b$ на направление вектора c , если $a = 2, b = 3, (\hat{a}, \hat{c}) = \pi/6, (\hat{b}, \hat{c}) = \pi/3$.
4. Найти m , если известно, что векторы $a = (m; -4m; -1)$ и $b = (m; -2; 9)$ ортогональны.
5. Разделить отрезок, соединяющий точки $A(1; -2; 3)$ и $B(3; -6; 0)$, в отношении 2:1.

Глава 4

Аналитическая геометрия

4.1 Прямая на плоскости

Проведем из некоторой фиксированной точки M_0 прямой ℓ , принадлежащей пространству $\mathbb{R}_2$, вектор N , перпендикулярный этой прямой (рис. 4.1). Соединим точку M_0 с произвольной точкой M прямой вектором $\overline{M_0M}$.

Так как векторы N и $\overline{M_0M}$ перпендикулярны, их скалярное произведение должно быть равно нулю:

$$(N, \overline{M_0M}) = 0. \quad (4.1)$$

Равенство (4.1) представляет собой уравнение прямой на плоскости, записанное в *векторной форме*. Действительно, оно справедливо только для точек M , лежащих на прямой.

Для представления уравнения (4.1) в координатной форме введем в рассматриваемом пространстве ортонормированный базис $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ со связанной с ним декартовой ортогональной системой координат x, y .

Пусть A и B являются проекциями вектора N на направления базисных векторов, x_0 и y_0 – координаты фиксированной точки M_0 , а x и y – координаты произвольной точки M прямой ℓ .

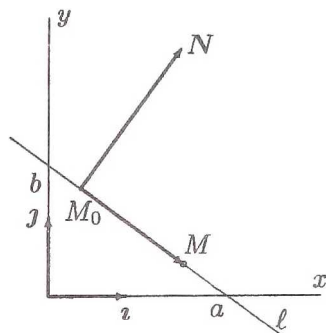


Рис. 4.1: Прямая в $\mathbb{R}_2$

Тогда на основании (3.19) и (3.21) введенные векторы можно записать в виде

$$N = (A; B), \quad \overline{M_0 M} = (x - x_0; y - y_0). \quad (4.2)$$

Подставим (4.2) в (4.1). С учетом (3.23) получим:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \quad (4.3)$$

Это уравнение прямой, проходящей через заданную точку, или уравнение пучка прямых. Если прямая проходит через точку $x = x_0$, $y = y_0$, то при этих значениях координат уравнение (4.3) обращается в тождество.

Раскрыв в (4.3) скобки, приводя подобные члены и обозначая $C = -Ax_0 - By_0$, придем к уравнению прямой в общем виде:

$$Ax + By + C = 0. \quad (4.4)$$

Уравнение, называемое уравнением прямой в отрезках, получается из (4.4), если в нем перенести C в правую часть равенства и поделить полученное уравнение на $-C$ (при условии, что $C \neq 0$, т. е. прямая не проходит через начало координат):

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \quad (4.5)$$

Здесь $a = -C/A$, $b = -C/B$.

При $x = 0$ из (4.5) находится координата $y = b$ пересечения прямой с осью y , а координата $x = a$ пересечения прямой с осью x определяется из уравнения при $y = 0$, т. е. a и b — отрезки, отсекаемые прямой на координатных осях (рис. 4.1).

Если уравнение (4.5) умножить на b и ввести обозначение $k = -b/a$, то придем к известному из школьной программы уравнению прямой с угловым коэффициентом:

$$y = kx + b. \quad (4.6)$$

Предположим, что прямая ℓ проходит через две точки: $M_0(x_0; y_0)$ и $M_1(x_1; y_1)$. Тогда уравнение (4.3) при подстановке в него координат точки M_1 должно обратиться в тождество:

$$A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) = 0.$$

Перенесем в (4.3) и в полученном уравнении слагаемые с множителями B в правые части равенств. Поделив почленно полученные равенства, придем к уравнению прямой, проходящей через две заданные точки:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}. \quad (4.7)$$

Если ввести обозначения для координат вектора $\overline{M_0M_1}$: $x_1 - x_0 = m$, $y_1 - y_0 = n$, то последнее уравнение можно переписать в виде

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}. \quad (4.8)$$

Координаты m и n отличаются от единичного вектора, соосного вектору $\overline{M_0M_1}$, только множителем — модулем этого вектора. Поэтому в частном случае в качестве координат m и n можно принять направляющие косинусы прямой.

К уравнению прямой с угловым коэффициентом, проходящей через заданную точку, можно прийти, потребовав, чтобы уравнение (4.6) обращалось в тождество при подстановке в него координат точки (x_0, y_0) , т. е. $= kx_0 + b$, и вычитая последнее равенство из (4.6):

$$y = y_0 + k(x - x_0) \quad (4.9)$$

Обобщая сказанное, отметим, что любое линейное уравнение в $\mathbb{R}_2$, т. е. уравнение, связывающее переменные x и y (в первых степенях!), представляет собой уравнение прямой.

Пример. На связанной с плоскостью декартовой ортогональной системе координат заданы координаты двух точек $M_0(1; -2)$ и $M_1(5; 0)$. Требуется:

Записать уравнение прямой, проходящей через эти точки и представить в виде уравнений:

- 1.1) в общем виде;
- 1.2) в отрезках;
- 1.3) с угловым коэффициентом.

Найти угол между:

- 2.1) прямой и осью x ;
- 2.2) нормалью к прямой и осью x .

Решение.

1. Подставляя координаты точек M_0 и M_1 в уравнение (4.7), получим:

$$\frac{x - 1}{5 - 1} = \frac{y - (-2)}{0 - (-2)} \implies \frac{x - 1}{2} = \frac{y + 2}{1}.$$

1.1. Приводя полученное уравнение к общему знаменателю и перенося все слагаемые в его левую часть, получим общее уравнение прямой:

$$x - 2y - 5 = 0.$$

1.2. Перенесем свободный член (число 5) в правую часть полученного уравнения. После деления уравнения на 5 приходим к уравнению прямой отрезках:

$$\frac{x}{5} + \frac{y}{-2,5} = 1.$$

Следовательно, прямая отсекает на оси x отрезок, равный 5, а на оси y отрезок, равный $-2,5$.

1.3. Выражая из полученных уравнений переменную y , приходим к уравнению прямой с угловым коэффициентом:

$$y = \frac{1}{2}x - 2,5.$$

2.1. Угол θ наклона прямой к оси x определяется ее угловым коэффициентом (уравнение п. 1.3), равным тангенсу искомого угла:

$$k = \operatorname{tg} \theta = \frac{1}{2}.$$

2.2. Для определения угла между нормалью к прямой и осями координат найдем единичный вектор $\mathbf{n}$, совпадающий по направлению с $N = (1; -2)$ (координаты вектора – множители при переменных в общем уравнении прямой, полученной в п. 1.1):

$$\mathbf{n} = \frac{N}{N} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}}(1; -2) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}; -\frac{2}{\sqrt{5}} \right).$$

Координаты полученного вектора являются косинусами искомых углов наклона нормали к осям координат (3.14). Таким образом,

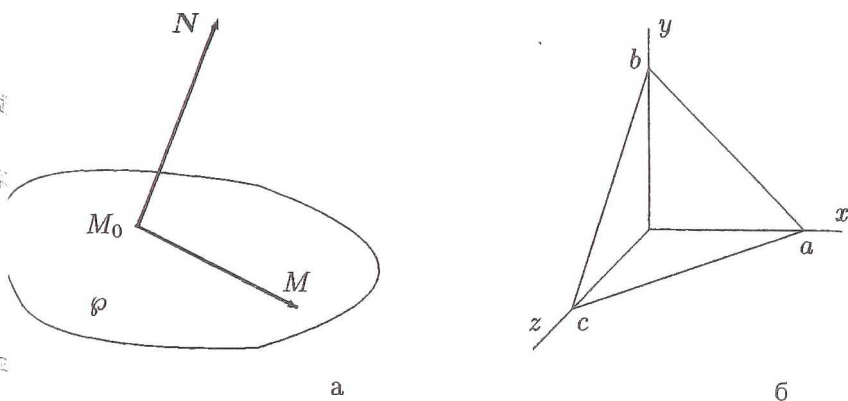
$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}; \quad \cos \beta = -\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

4.2 Уравнение плоскости

Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}_3$ плоскость $\wp$ (рис. 4.2,а).

Подход в выводе уравнения плоскости не отличается в принципе от вывода уравнения прямой на плоскости, приведенного в предыдущем разделе.

Пусть из некоторой фиксированной точки M_0 плоскости восстановлен перпендикуляр к $\wp$, параллельный (может и совпадающий) с некоторым вектором N .

Рис. 4.2: Плоскости в $\mathbb{R}_3$

Соединим выбранную точку M_0 с произвольной точкой M плоскости вектором $\overline{M_0M}$. Так как векторы $\overline{M_0M}$ и N перпендикулярны, то их скалярное произведение должно быть равно нулю (раздел 3.2):

$$(N, \overline{M_0M}) = 0. \quad (4.10)$$

Введем в рассматриваемое пространство $\mathbb{R}_3$ ортонормированный базис j, k со связанной с ним декартовой ортогональной системой координат y, z . Пусть в этом базисе векторы N и $\overline{M_0M}$ представлены своими координатами:

$$N = (A; B; C), \quad \overline{M_0M} = (x-x_0; y-y_0; z-z_0). \quad (4.11)$$

Подставляя (4.11) в (4.10) и расписывая скалярное произведение по формуле (3.24), придем к уравнению:

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0. \quad (4.12)$$

По смыслу вывода уравнение (4.12) описывает *плоскость, проходящую через заданную точку*.

Если в этом уравнении раскрыть скобки и ввести обозначение постоянных величин

$$D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0,$$

придем к уравнению плоскости в общем виде:

$$Ax + By + Cz + D = 0. \quad (4.13)$$

Перенесем постоянную D в правую часть уравнения (4.13) и поделим полученное уравнение на $-D$ при условии, что $D \neq 0$ (плоскость не проходит через начало координат). Вводя обозначения $a = -D/A$, $b = -D/B$, $c = -D/C$, перепишем (4.13) в виде *уравнения плоскости в отрезках*.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \quad (4.14)$$

При $y=z=0$ из этого уравнения получаем $x=a$; при $z=x=0$: $y=b$; при $x=y=0$: $z=c$, т. е. a, b, c — отрезки, отсекаемые плоскостью на осях координат (рис. 4.2,б).

Рассмотрим некоторые частные виды общего уравнения (4.13).

При $D=0$, как отмечалось выше, плоскость проходит через начало координат, т. к. обращается в тождество при $x=y=z=0$.

Равенство $A=0$ (или $B=0$ или $C=0$) делает уравнение (4.4) не зависящим от координаты x (или y или z). Отсутствие координаты x (или y или z) в уравнении указывает на то, что плоскость параллельна оси x (или y или z).

Равенство нулю двух постоянных, стоящих при независимых переменных (например, $A=B=0$, при $C \neq 0$), приводит к уравнению плоскости перпендикулярной третьей координате (z).

Равенство постоянных $A=B=C$ определяет плоскость, равнонаклоненную к осям координат.

Пример 1. Заданы вектор $\mathbf{a} = (2; -4; 5)$ и некоторая точка $M(1; -2; 0)$ пространства $\mathbb{R}_3$. Требуется:

- 1) получить и записать в общем виде уравнение плоскости, перпендикулярной вектору $\mathbf{a}$ и проходящей через точку M ;
- 2) найти отрезки, отсекаемые плоскостью на координатных осях;
- 3) определить косинусы углов между вектором нормали к плоскости и координатными осями.

Решение.

1. Принимаем $\mathbf{N} = \mathbf{a}$. Воспользовавшись уравнением плоскости, проходящей через заданную точку (4.12), получим:

$$2(x-1) - 4(y+2) + 5(z+0) = 0.$$

Раскрывая скобки и приводя подобные члены, приходим к уравнению плоскости в общем виде:

$$2x - 4y + 5z - 10 = 0.$$

2. Для получения уравнения плоскости в отрезках перенесем свободный член вправо и поделим на него уравнение:

$$\frac{x}{5} + \frac{y}{-2,5} + \frac{z}{2} = 1.$$

В знаменателях слагаемых уравнения стоят величины, равные отрезкам, отсекаемым плоскостью на координатных осях: $a = 5$, $b = -2,5$, $c = 2$.

3. Чтобы найти косинусы углов между нормалью N к плоскости и осями координат, достаточно записать в координатной форме единичный вектор, сонаправленный нормали (3.14):

$$n = \frac{N}{N} = \frac{1}{\sqrt{2^2 + (-4)^2 + 5^2}}(2; -4; 5) = \left(\frac{2}{3\sqrt{5}}; \frac{-4}{3\sqrt{5}}; \frac{\sqrt{5}}{3} \right).$$

Отсюда:

$$\cos \alpha = \frac{2}{3\sqrt{5}}; \quad \cos \beta = -\frac{4}{3\sqrt{5}}; \quad \cos \gamma = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Запишем уравнение плоскости, проходящей через три точки с координатами: $A_1(x_1; y_1; z_1)$, $A_2(x_2; y_2; z_2)$ и $A_3(x_3; y_3; z_3)$. Для этого выберем на плоскости произвольную точку $A(x; y; z)$ и проведем через четыре точки три вектора, которые представим в виде совокупности их координат:

$$\begin{aligned} \overline{A_1A} &= (x - x_1; y - y_1; z - z_1), \\ \overline{A_1A_2} &= (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1), \\ \overline{A_1A_3} &= (x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1). \end{aligned}$$

Векторы компланарны (лежат на одной плоскости) и потому линейно зависимы. В этом случае определитель, составленный из координат этих векторов, должен обратиться в нуль:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (4.15)$$

Это (линейное относительно переменных x , y и z) уравнение плоскости *проходящей через три фиксированные точки*.

Пример 2. Записать уравнение плоскости, проходящей через точки с координатами $(1, -2, 0)$, $(2, -2, 1)$ и $(3, -1, 1)$.

Р е ш е н и е.

Подставим координаты заданных точек в уравнение (4.15):

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-0 \\ 2-1 & -2+2 & 1-0 \\ 3-1 & -1+2 & 1-0 \end{vmatrix} = 0. \implies \begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Разложим определитель по элементам первой строки:

$$(x-1) \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - (y+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда, раскрывая определители, получим:

$$-1 \cdot (x-1) + (y+2) + z = 0,$$

или

$$x - y - z - 3 = 0.$$

Подстановка координат каждой из трех точек в полученное уравнение обращает его в равенство.

Сравнение уравнений различных видов для плоскости с соответствующими уравнениями прямой указывает на их идентичность и одинаковую природу с точки зрения векторной алгебры.

В математической литературе обобщения упомянутых уравнений на многомерные пространства с переменными $x_1, x_2, \dots, x_n$ называют *гиперплоскостями*. Так, для уравнения гиперплоскости в общем виде имеем:

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \dots + A_nx_n + D = 0.$$

Подходя с этих позиций, например, к уравнению (4.4) можно назвать его уравнением в общем виде гиперплоскости а (4.5) гиперплоскостью в отрезках в пространстве $\mathbb{R}_2$. Характерной особенностью гиперплоскости (в том числе прямой) является то, что все переменные входят в это уравнение в первой степени.

4.3 Взаимное расположение плоскостей

Рассмотрим две плоскости $\wp_1$ и $\wp_2$, заданные в общем виде

$$\begin{aligned} \wp_1 : \quad & A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0; \\ \wp_2 : \quad & A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Следы этих плоскостей на плоскости страницы, перпендикулярной заданным плоскостям, показаны на рис. 4.3.

На рисунке θ — угол между плоскостями.

Восстановим к плоскостям $\wp_1$ и $\wp_2$ нормали N_1 и N_2 .

Из рисунка видно, что угол θ между плоскостями равен углу между векторами нормалей к ним. Поэтому $\cos \theta$ может быть определен по скалярному произведению векторов $N_1 = (A_1; B_1; C_1)$ и $N_2 = (A_2; B_2; C_2)$ (3.25):

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{(N_1, N_2)}{N_1 N_2} = \\ &= \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Полученное выражение позволяет записать условие ортогональности двух плоскостей ($\cos \theta = 0$):

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0. \quad (4.18)$$

Условие параллельности плоскостей вытекает из условия параллельности ортогональных им векторов ($N_1 = \lambda N_2$):

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = (\lambda). \quad (4.19)$$

Угол между двумя прямыми

$$\begin{aligned} \ell_1: \quad A_1 x_1 + B_1 y_1 + C_1 &= 0; \\ \ell_2: \quad A_2 x_2 + B_2 y_2 + C_2 &= 0 \end{aligned} \quad (4.20)$$

может быть изображен тем же рисунком (4.3), что и угол между плоскостями.

Что касается определения угла, условий перпендикулярности и параллельности прямых, то формулы для них получаются из выражений (4.17) (4.19) путем отбрасывания в них членов, содержащих коэффициенты C_1 и C_2 :

$$\cos \theta = \frac{(N_1, N_2)}{N_1 N_2} = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \quad (4.21)$$

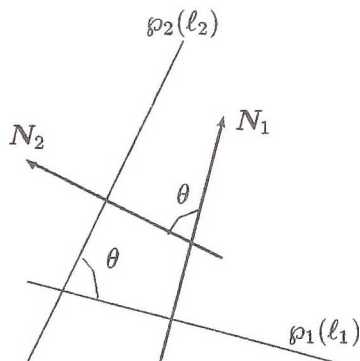


Рис. 4.3: Угол между плоскостями (прямыми)

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0 \quad (\ell_1 \perp \ell_2). \quad (4.22)$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \quad (\ell_1 \parallel \ell_2). \quad (4.23)$$

Напомним, что в школьном курсе математики предлагался еще один вариант определения угла между прямыми на плоскости (но не между плоскостями).

Пусть θ_1 и θ_2 — углы наклона прямых ℓ_1 и ℓ_2 к координатной оси x и $k_1 = \operatorname{tg} \theta_1$; $k_2 = \operatorname{tg} \theta_2$ — угловые коэффициенты, входящие в уравнения прямых с угловым коэффициентом:

$$\ell_1: y = k_1 x + b_1; \quad \ell_2: y = k_2 x + b_2.$$

Тогда тангенс угла между прямыми:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}. \quad (4.24)$$

Условие ортогональности и параллельности соответственно:

$$k_1 = -\frac{1}{k_2}, \quad k_1 = k_2. \quad (4.25)$$

Пример 1. Найти углы между плоскостями а) $\wp_1: x - 3y + 4z + 2 = 0$ и $\wp_2: 6x + 4y - 3 = 0$.

Решение

Так как $N_1 = (1; -3; 4)$, $N_2 = (6; 4; 0)$, то по (4.17):

$$\cos \theta = \frac{1 \cdot 6 + (-3) \cdot 4 + 4 \cdot 0}{\sqrt{1^2 + (-3)^2 + 4^2} \sqrt{6^2 + 4^2 + 0^2}} = -\frac{3}{13\sqrt{2}}.$$

б) $\wp_1: 2x - 3y + z - 2 = 0$ и $\wp_2: 4x + 3y + z + 5 = 0$.

Решение

$$\cos \theta = \frac{2 \cdot 4 + (-3) \cdot 3 + 1 \cdot 1}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2} \sqrt{4^2 + 3^2 + 1^2}} = 0 \implies \wp_1 \perp \wp_2.$$

в) $\wp_1: x - 2y + 3z + 1 = 0$ и $\wp_2: -2x + 4y - 6z + 5 = 0$.

Р е ш е н и е

$$\cos \theta = \frac{1 \cdot (-2) + (-2) \cdot 4 + 3 \cdot (-6)}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-3)^2}} = -1. \quad \Rightarrow \quad \theta = \pi.$$

Результат решения говорит о том, что плоскости параллельны.

Убедимся в этом, используя условие параллельности плоскостей (4.18):

$$\frac{1}{-2} = \frac{-2}{4} = \frac{3}{-6} = \left(\lambda = -\frac{1}{2} \right) (!).$$

Пример 2. Составить уравнение плоскости $\wp$, проходящей через точку $M(2; 1; 0)$ и параллельной плоскости $\wp_1: x - 3y + 2z - 5 = 0$.

Р е ш е н и е

Длина вектора N , перпендикулярного плоскости, ничем не ограничена. Поэтому, в силу требуемой параллельности плоскостей (и их нормальных векторов), принимаем $N = N_1 = (1; -3; 2)$.

Воспользовавшись уравнением плоскости, проходящей через заданную точку (4.12), запишем требуемое уравнение:

$$1(x - 2) - 3(y - 1) + 2(z - 0) = 0.$$

Раскрывая скобки и приводя подобные, запишем уравнение в общем виде:

$$x - 3y + 2z + 1 = 0.$$

Пример 3. Составить уравнение плоскости $\wp$, проходящей через точку $M(3; 2; -1)$ и перпендикулярной плоскостям $\wp_1: 2x - y + z - 3 = 0$ и $\wp_2: x + 2y - z - 2 = 0$.

Р е ш е н и е

Запишем уравнение плоскости $\wp$, проходящей через точку M :

$$A(x - 3) + B(y - 2) + C(z + 1) = 0, \quad (4.26)$$

и потребуем выполнения условия (4.18) ортогональности плоскости $\wp$ плоскостям $\wp_1$ и $\wp_2$ одновременно:

$$\begin{cases} 2A - B + C = 0; \\ A + 2B - C = 0. \end{cases}$$

Решение двух уравнений с тремя неизвестными позволяет выразить две неизвестные через третью. После преобразования системы придем к зависимостям:

$$B = -3A; \quad C = -5A.$$

Подставляя эти выражения в (4.26), получим:

$$A(x - 3) - 3A(y - 2) - 5A(z + 1) = 0.$$

При всех слагаемых этого уравнения стоит одинаковый множитель A , что закономерно при таких преобразованиях. Сокращая уравнение на A , раскрывая скобки и приводя подобные, приходим к искомому уравнению плоскости в общем виде:

$$x - 3y - 5z - 2 = 0.$$

Замечание. При решении задач на построение математических моделей, описывающих геометрические объекты, рекомендуется проверять правильность их построения установлением их непротиворечивости исходным предпосылкам.

Так, плоскость, смоделированная в последней задаче, должна быть

1) перпендикулярной плоскости $\varphi_1 \implies (AA_1 + BB_1 + CC_1 = 0)$:

$$1 \cdot 2 + (-3) \cdot (-1) + (-5) \cdot 1 = 0 (!);$$

2) перпендикулярной плоскости $\varphi_2 \implies (AA_2 + BB_2 + CC_2 = 0)$:

$$1 \cdot 1 + (-3) \cdot 2 + (-5) \cdot (-1) = 0 (!);$$

3) проходить через точку $M(3, 2, -1)$ (обращаться в тождество при подстановке в уравнение плоскости координат точки M вместо текущих координат):

$$1 \cdot 3 - 3 \cdot 2 - 5 \cdot (-1) - 4 = 0 (!).$$

Пример 4. Найти угол между прямыми ℓ_1 : $3x + 4y - 8 = 0$ и ℓ_2 : $2x - y + 3 = 0$.

Решение

1-й способ. Воспользуемся выражением (4.21) для косинуса угла между прямыми:

$$\cos \theta = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2}} = \frac{3 \cdot 2 + 4 \cdot (-1)}{\sqrt{3^2 + 4^2} \sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{5\sqrt{5}}.$$

2-й способ. Воспользуемся выражением (4.24) для тангенса угла между прямыми:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}.$$

Для определения угловых коэффициентов k_1 и k_2 приведем заданные уравнения к виду уравнений с угловыми коэффициентами:

$$\ell_1: y = -\frac{3}{4}x + 2, \implies k_1 = -\frac{3}{4}; \quad \ell_2: y = 2x + 3, \implies k_2 = 2.$$

Тогда

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{-3/4 - 2}{1 - (3/4) \cdot 2} = \frac{11}{2}.$$

Обе функции угла θ $\left(\cos \theta = \frac{2}{5\sqrt{5}} \text{ и } \operatorname{tg} \theta = \frac{11}{2} \right)$ приводят к одному углу $\theta = \arccos \frac{2}{5\sqrt{5}} = \operatorname{arctg} \frac{11}{2} \approx 80^\circ$.

Пример 5. Заданы уравнение прямой ℓ : $3x - y - 5 = 0$ и точка $M(2; -1)$. Составить уравнения прямых, проходящих через точку M :

а) параллельную ℓ ; б) перпендикулярную ℓ .

Решение

Уравнение прямой, проходящей через точку M :

$$A(x - 2) + B(y + 1) = 0.$$

а) используем условие параллельности прямых (4.23):

$$\frac{A}{3} = \frac{B}{-1}; \implies A = -3B, \implies -3B(x-2) + B(y+1) = 0, \implies 3x - y + 5 = 0.$$

б) используем условие ортогональности прямых (4.22):

$$3A - B = 0, \implies B = 3A, \implies A(x-2) + 3A(y+1) = 0, \implies x + 3y + 1 = 0.$$

Полученные в пунктах а) и б) прямые перпендикулярны, т. к. их коэффициенты удовлетворяют условию (4.22):

$$3 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 = 0. (!)$$

4.4 Расстояние от точки до плоскости

Пусть заданы плоскость $\wp$ своим общим уравнением

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

и точка M_0 , не лежащая на плоскости. На рис. 4.4 показаны след этой плоскости, расположенной для удобства перпендикулярно плоскости листа, и точка. Требуется найти расстояние d от точки до плоскости.

Выбирая на плоскости произвольную точку M , построим вектор $\overline{M_0M}$.

Проекция вектора $\overline{M_0M}$ на направление вектора нормали N к плоскости будет искомым расстоянием:

$$d = |Pr_N \overline{M_0M}| = \frac{|(N, \overline{M_0M})|}{N}. \quad (4.27)$$

Если в рассматриваемом пространстве ввести ортонормированный базис и декартову ортогональную систему координат, в которых $N = (A; B; C)$, $\overline{M_0M} = ((x-x_0); (y-y_0); (z-z_0))$, $N = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$, то с учетом (3.23) получим:

$$d = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} |A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0)|.$$

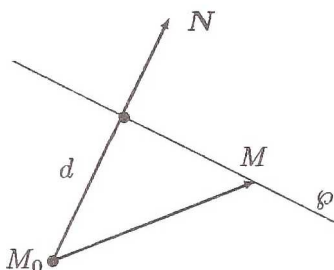


Рис. 4.4: Расстояние от точки до плоскости

плоскости, и знак плюс, если по разные стороны.

В частном случае расстояние от точки до прямой (гиперплоскости в пространстве $\mathbb{R}_2$):

$$d = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} |Ax_0 + By_0 + C|. \quad (4.29)$$

Если точка M_0 совпадает с началом координат, то $\overline{M_0M} = \overline{OM} = (x; y; z)$ и $(N, \overline{OM}) = Ax + By + Cz$. В этом случае

$$d = p = \frac{1}{N} |Ax + By + Cz|.$$

Раскроем скобки под знаком модуля. Изменив знак на противоположный (под знаком модуля это допустимо) и вводя используемую в общем уравнении плоскости (4.13) и получаемую из этого уравнения постоянную $D = -Ax - By - Cz$, придем к формуле

$$d = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} |Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|. \quad (4.28)$$

Отметим, что под знаком модуля получается знак минус (как в рассматриваемом случае), если точка M_0 и начало координат лежат по одну сторону от

Так как $A/N = \cos \alpha$, $B/N = \cos \beta$, $C/N = \cos \gamma$, то последнее уравнение можно переписать в виде

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0. \quad (4.30)$$

Здесь p положительная (по смыслу вывода формулы) величина, равная расстоянию от начала координат до плоскости.

Уравнение (4.30) называется уравнением плоскости в *нормальном виде*.

Пример. Найти расстояние от начала координат и от точки $M(2, 3)$ до прямой, заданной уравнением $3x + 4y + 2 = 0$. Определить направляющие косинусы углов наклона нормали к плоскости.

Решение.

Для определения расстояния от начала координат до плоскости приведем ее уравнение к нормальному виду, разделив его на отрицательное значение модуля вектора $N=(3; 4)$, т.е. на $N=\sqrt{3^2+4^2}=5$:

$$-\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - \frac{2}{5} = 0.$$

Отсюда расстояние от начала координат до плоскости $p = \frac{2}{5} = 0,4$, а направляющие косинусы нормали: $\cos \alpha = -0,6$; $\cos \beta = -0,8$.

Найдем расстояние от точки M до прямой (4.29):

$$d = \frac{1}{5} |3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 2| = 4.$$

4.5 Уравнения прямой в $\mathbb{R}_3$

Рассмотрим в $\mathbb{R}_3$ прямую ℓ с фиксированной на ней точкой M_0 (рис. 4.5).

Выберем на ℓ произвольную точку M и построим вектор $\overline{M_0M}$.

Направление прямой зададим некоторым параллельным ℓ вектором s .

Тогда условием того, что любая точка $M \in \ell$, будет условие параллельности векторов $\overline{M_0M}$ и s :

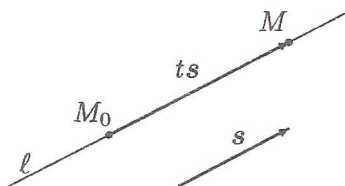
$$\overline{M_0M} = ts. \quad (4.31)$$

Уравнение (4.31) является уравнением прямой в $\mathbb{R}_3$, представленным в векторной форме. Модуль параметра t определяет разделенное на модуль вектора s расстояние от фиксированной точки M прямой до ее произвольной точки M . Если $|s| = 1$, то $|t|$ равно этому расстоянию.

Введем в рассматриваемое пространство ортонормированный базис с декартовой ортогональной системой координат, в которых

$$s=(m;n;p); \quad \overline{M_0M}=(x-x_0;y-y_0;z-z_0). \quad (4.32)$$

Подставляя (4.32) в (4.31) и приравнявая соответствующие координаты, придем к уравнениям прямой в параметрической форме:



$$\begin{cases} x = x_0 + tm, \\ y = y_0 + tn, \\ z = z_0 + tp. \end{cases} \quad (4.33)$$

Рис. 4.5: Прямая в $\mathbb{R}_3$

Выразим из каждого уравнения (4.33) параметр t . Приравняв полученные выражения, получим канонические уравнения прямой:

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p} (=t). \quad (4.34)$$

Если прямая проходит через две заданные точки (введенную ранее точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и точку $M_1(x_1; y_1; z_1)$), то в качестве вектора, определяющего направление прямой, можно выбрать $s = (x_1 - x_0; y_1 - y_0; z_1 - z_0)$. Тогда уравнения (4.34) можно представить в виде уравнений прямой, проходящей через две точки:

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0} = \frac{z-z_0}{z_1-z_0}. \quad (4.35)$$

Из трех канонических уравнения прямой (4.35) только два линейно независимы. Покажем, что это так. Введем для удобства новые переменные

$$X = \frac{x-x_0}{x_1-x_0}, \quad Y = \frac{y-y_0}{y_1-y_0}, \quad Z = \frac{z-z_0}{z_1-z_0},$$

после чего канонические уравнения представим в виде системы:

$$\begin{cases} X - Y = 0, \\ Y - Z = 0, \\ -X + Z = 0. \end{cases}$$

Выпишем матрицу коэффициентов этой однородной СЛАУ и преобразуем ее:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{+N1 \cdot (-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

Две последние строки у матрицы равны и одну из них можно вычеркнуть. Умножим все элементы полученной после этого матрицы на -1 и перенесем столбец коэффициентов при X в правую часть расширенной матрицы:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ Y & Z & X \end{array} \right)$$

В левой части расширенной матрицы получена единичная подматрица второго порядка. Следовательно, ранг расширенной матрицы равен двум и из трех уравнений, которые представляет матрица, линейно независимыми остаются только два.

В частном случае для пространства $\mathbb{R}_2$ (отсутствует координата z) из трех уравнение (4.35) останется одно

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0},$$

совпадающее с ранее полученным уравнением (4.7).

Пример. Через точку $M_0(1; -2; 3)$ провести прямые: а) параллельную вектору $s = (-2; 4; 1)$; б) проходящую через точку $M_1(0; -2; 5)$.

Уравнения записать в параметрическом и каноническом видах.

Решение

а) на основании формул (4.33) и (4.34) сразу записываем требуемые уравнения:

$$\begin{cases} x = 1 - 2t, \\ y = -2 + 4t, \\ z = 3 + t; \end{cases}$$

или

$$\frac{x - 1}{-2} = \frac{y + 2}{4} = \frac{z - 3}{1};$$

б) используя формулы (4.35), запишем

$$\frac{x - 1}{0 - 1} = \frac{y + 2}{-2 + 2} = \frac{z - 3}{5 - 3},$$

или

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{0} = \frac{z-3}{2}.$$

В последней формуле в знаменателе второго выражения появился нуль. В записи канонических уравнений прямой это допустимо. Нуль в знаменателе говорит о том, что вектор s , координаты которого стоят в знаменателях, перпендикулярен соответствующему базисному вектору. В данном случае это вектор j , перпендикулярный координате y . Для решения уравнения, содержащего в знаменателе нуль, следует перейти к параметрической форме записи уравнений прямой.

Приравнивая последние уравнения параметру t и избавляясь от знаменателей, получим:

$$\begin{cases} x = 1 - t, \\ y = -2, \\ z = 3 + 2t. \end{cases}$$

4.6 Взаимное расположение прямых и плоскостей

Пусть заданы две в общем скрещивающиеся (не обязательно пересекающиеся) прямые

$$\ell_1: \begin{cases} x = x_1 + tm_1, \\ y = y_1 + tn_1, \\ z = z_1 + tp_1; \end{cases} \quad \ell_2: \begin{cases} x = x_2 + tm_2, \\ y = y_2 + tn_2, \\ z = z_2 + tp_2, \end{cases} \quad (4.36)$$

их направления задаются векторами $s_1 = (m_1; n_1; p_1)$ и $s_2 = (m_2; n_2; p_2)$.

Тогда косинус угла θ между прямыми определится как косинус угла между векторами s_1 и s_2 (3.24):

$$\cos \theta = \frac{(s_1, s_2)}{|s_1||s_2|} = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}. \quad (4.37)$$

Отсюда вытекает условие перпендикулярности двух прямых:

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0. \quad (4.38)$$

Условие параллельности прямых следует из условия параллельности векторов s_1 и s_2 :

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}. \quad (4.39)$$

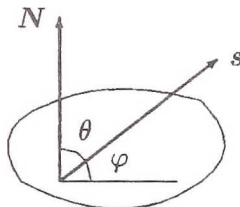
Найдем угол φ между прямой ℓ и плоскостью ρ (рис. 4.6).

Этот угол дополняется до $\pi/2$ углом θ между вектором s , сонаправленным прямой, и вектором N , ортогональным плоскости.

Найдем косинус угла θ между векторами s и N , который равен синусу угла φ между прямой и плоскостью:

$$\cos \theta = \sin \varphi = \frac{(N, s)}{N \cdot s} =$$

$$= \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}. \quad (4.40)$$



Из последней формулы следует условие параллельности прямой и плоскости ($s \perp N$):

$$Am + Bn + Cp = 0. \quad (4.41)$$

Условию перпендикулярности прямой и плоскости соответствует параллельность векторов s и N :

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p} \quad (4.42)$$

Пример 1. Найти угол между прямыми

$$\frac{x-3}{8} = \frac{y+1}{6} = \frac{z}{5\sqrt{5}} \quad \text{и} \quad \frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z+4}{0}.$$

Решение

Знаменатели уравнений представляют собой направляющие векторы $s_1 = (8; 6; 5\sqrt{5})$ и $s_2 = (3; -4; 0)$. По формуле (4.37) находим:

$$\cos \theta = \frac{8 \cdot 3 + 6 \cdot (-4) + 5\sqrt{5} \cdot 0}{\sqrt{8^2 + 6^2 + (5\sqrt{5})^2} \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 0^2}} = \frac{24 - 24}{15 \cdot 5} = 0.$$

Равенство нулю косинуса угла говорит о том, что прямые ортогональны.

Пример 2. Доказать, что прямые $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-1}$ и $\frac{x+5}{-3,6} = \frac{y-1}{1,2}$ параллельны.

Решение

Используя условие (4.39), найдем:

$$\frac{-3,6}{3} = \frac{1,2}{-1} = (-1, 2) (!).$$

Равенство отношений говорит о параллельности прямых.

Пример 3. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $A(1; -2; 0)$ и перпендикулярной двум прямым ℓ_1 и ℓ_2 , если

$$\ell_1 : \begin{cases} x = 1 + 3t, \\ y = 4 - 2t, \\ z = 2 + 3t; \end{cases} \quad \ell_2 : \begin{cases} x = 2 + t, \\ y = -2 + 2t, \\ z = 1 - t. \end{cases}$$

Решение

Запишем уравнение прямой, проходящей через точку A :

$$\frac{x-1}{m} = \frac{y+2}{n} = \frac{z-0}{p}.$$

Вектор $s = (m; n; p)$, определяющий направление этой прямой, должен быть перпендикулярен одновременно двум векторам, сонаправленным заданным прямым: $s_1 = (3; -2; 3)$ и $s_2 = (1; 2; -1)$. Запишем условия перпендикулярности этих векторов:

$$\begin{cases} 3m - 2n + 3p = 0, \\ m + 2n - p = 0. \end{cases}$$

Два уравнения с тремя неизвестными позволяют выразить две неизвестные через третью. Например, $p = -2m$; $n = -\frac{3}{2}m$. Подставим полученные значения в ранее записанное уравнение прямой, проходящей через точку A . После умножения полученных уравнений на $m/2$ получим:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-0}{-4}.$$

Для проверки правильности решения следует убедиться в том, что полученное уравнение удовлетворяет условиям задачи.

Пример 4. Заданы координаты трех вершин треугольника: $A(1; 0)$, $B(-2; -3)$, $C(2; -1)$ (рис. 4.7). Требуется: а) записать уравнение медианы,

выходящей из вершины A ; б) найти координаты точки M , симметричной точке A относительно точки пересечения медианы и стороны BC .

Решение

а) найдем координаты точки D , середины стороны BC треугольника, используя формулу (3.30) деления отрезка пополам:

$$D\left(\frac{-2+2}{2}; \frac{-3+(-1)}{2}\right) \Rightarrow D(0; -2).$$

Уравнение медианы (прямой, проходящей через точки A и D):

$$\frac{x-1}{0-1} = \frac{y-0}{-2-0}; \Rightarrow y = 2x - 2.$$

б) для определения координаты точки M полученное уравнение прямой AD , на продолжении которой лежит точка M , запишем в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = 1 - t, \\ y = -2t. \end{cases} \quad (4.43)$$

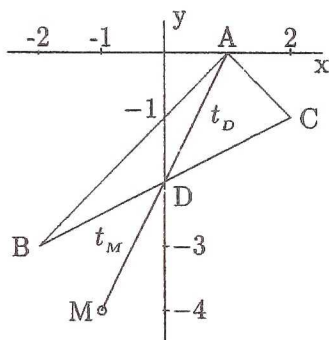


Рис. 4.7: К примеру 4.

Найдем параметр t_D , характеризующий расстояние от точки A (именно эта точка зафиксирована при записи последних уравнений прямой AD) до точки D . Для этого в систему уравнений (4.43) вместо координат $(x; y)$ текущей точки прямой подставим координаты точки $D(0; -2)$. Решение обоих уравнений приводит (что естественно) к одному значению параметра: $t_D = 1$.

Если параметр t_D характеризует расстояние от точки A до точки D , то расстояние до точки M , симметричной точке A относительно D , будет характеризовать параметр t_M , вдвое больший t_D , т. е. $t_M = 2t_D = 2 \cdot 1 = 2$.

Подставляя это значение t в уравнение (4.43), найдем координаты точки M :

$$x_M = 1 - 2 = -1; \quad y_M = -2 \cdot 2 = -4.$$

Таким образом $M(-1; -4)$.

Замечание. Задача нахождения координат точки, симметричной заданной относительно точек на прямой в $\mathbb{R}_3$, аналогична рассмотренной задаче.

В задаче определения координат точки, симметричной заданной относительно некоторой плоскости, необходимо сначала провести через точку

прямую, перпендикулярную плоскости, найти точку пересечения прямой с плоскостью, а затем продолжить решение по рассмотренной схеме.

Пример 5. Найти угол между прямой $\frac{x+3}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{0}$ и плоскостью $4x + 2y - 5z + 8 = 0$.

Решение

По уравнениям прямой и плоскости определяем вектор, соосный прямой: $s = (-1; 2; 0)$, и вектор, нормальный к плоскости: $N = (4; 2; -5)$.

По формуле (4.40) находим

$$\sin \varphi = \frac{4 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 + (-5) \cdot 0}{\sqrt{4^2 + 2^2 + (-5)^2} \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 0^2}} = 0.$$

Равенство нулю числителя говорит о том, что прямая и плоскость параллельны.

Пример 6. Предприятие изготавливает на продажу товары трех видов с планом производства в сутки: первого вида $m = 14$ единиц (ед); второго — $n = 10$ ед и третьего — $p = 5$ ед. На момент планирования на складе предприятия имелась продукция: первого вида $x_0 = 40$ ед; второго — $y_0 = 120$ ед и третьего — $z_0 = 32$ ед.

Определить сколько дней (t) потребуется предприятию для того, чтобы выпустить продукции на $P = 10000$ денежных единиц (д.е), если единица продукции первого вида стоит $A = 10$ д.е; второго — $B = 8$ и третьего — $C = 20$ д.е. Найти количества товаров, планируемых предприятием для выпуска через t дней его работы.

Решение

Обозначим x, y, z — количества единиц товаров, планируемых предприятием для продажи через t дней его работы. Тогда выпуск продукции определится из системы уравнений, описывающих прямую в пространстве трех товаров:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt. \end{cases} \quad (4.44)$$

Общую стоимость планируемого к выпуску товара трех видов можно определить по формуле:

$$P = Ax + By + Cz.$$

Подставляя в последнее уравнение неизвестные x , y и z из системы уравнений, выразим из полученного соотношения искомое неизвестное:

$$t_* = \frac{P - Ax_0 - By_0 - Cz_0}{Am + Bn + Cp}.$$

Используя заданные значения входящих в это выражение величин, получим:

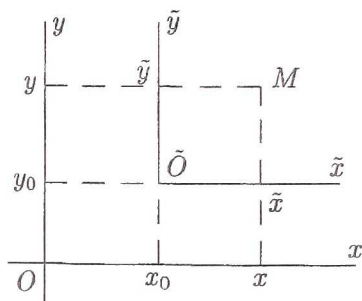
$$t_* = \frac{10000 - 10 \cdot 40 - 8 \cdot 120 - 20 \cdot 30}{10 \cdot 14 + 8 \cdot 10 + 20 \cdot 5} = 25(\text{дней}).$$

Подставляя $t_* = 25$ в систему (4.44), найдем количества планируемых предприятием для продажи товаров:

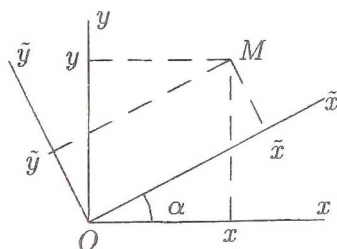
$$\begin{cases} x_* = 40 + 14 \cdot 25 = 450, \\ y_* = 120 + 10 \cdot 25 = 370, \\ x_* = 32 + 5 \cdot 25 = 157. \end{cases}$$

4.7 Преобразование координат

Рассмотрим две ортогональные системы координат на плоскости: xy , которую будем называть исходной (старой), и новую $\tilde{x}\tilde{y}$. Координаты новой системы координат параллельны соответствующим координатам xy , а их начало совмещено с точкой $\tilde{O}(x_0y_0)$ (рис. 4.8,а).



а



б

Рис. 4.8: Преобразование координат

В этом случае начало исходной системы координат в новой системе будет иметь координаты $O(\tilde{x}_0; \tilde{y}_0) \Rightarrow O(-x_0; -y_0)$.

Рассмотрим на плоскости произвольную точку M , которая в старой системе имеет координаты $M(x; y)$, в новой — координаты $M(\tilde{x}; \tilde{y})$.

Из рис. 4.8,а видно, что координаты произвольной точки M связаны зависимостями:

$$\tilde{x} = x - x_0, \quad \tilde{y} = y - y_0; \quad \implies \quad x = \tilde{x} + x_0, \quad y = \tilde{y} + y_0. \quad (4.45)$$

Таким образом, если центр $\tilde{O}$ новой системы координат смещается относительно центра O исходной системы в сторону положительных координат исходной системы, то при определении новых координат произвольной точки от ее значений в исходной системе вычитаются координаты центра $\tilde{O}$ (первые две формулы (4.45)).

Если центр смещается в сторону отрицательного направления координат, то координаты нового центра прибавляются к исходным координатам произвольной точки (вторые две формулы (4.45)).

Отметим, что за исходную систему координат можно принять $\tilde{x}\tilde{y}$, а xy считать новой.

Пример 1. Записать уравнение прямой $4x + 3y - 12 = 0$ в системе координат, параллельной xy , если начало новой системы имеет координаты $\tilde{O}(-2; 1)$ в исходной системе.

Решение

Следуя формулам (4.45), получим:

$$x = \tilde{x} + 2; \quad y = \tilde{y} - 1.$$

Подставим эти значения в заданное уравнение прямой:

$$4(\tilde{x} + 2) + 3(\tilde{y} - 1) - 12 = 0.$$

После раскрытия скобок и приведения подобных приходим к уравнению прямой в новой системе координат:

$$4\tilde{x} + 3\tilde{y} - 7 = 0,$$

Коэффициенты уравнения, отвечающие за наклон прямой, не изменились. Новое значение приобрел свободный член, связанный с расстоянием от прямой до начала координат.

Рассмотрим новую систему координат, повернутую относительно исходной системы на угол α против часовой стрелки относительно точки O — общего начала координат (рис. 4.8,б).

Между координатами произвольной точки M в исходной $(x; y)$ и новой $(\tilde{x}; \tilde{y})$ системах координат будут существовать следующие из рис. 4.8, б зависимости:

$$\begin{aligned} x &= \tilde{x} \cos \alpha - \tilde{y} \sin \alpha; & \tilde{x} &= x \cos \alpha + y \sin \alpha; \\ y &= \tilde{x} \sin \alpha + \tilde{y} \cos \alpha; & \tilde{y} &= -x \sin \alpha + y \cos \alpha. \end{aligned} \quad (4.46)$$

При одновременном перемещении и повороте системы координат будут справедливы формулы преобразования

$$\begin{aligned} x &= \tilde{x} \cos \alpha - \tilde{y} \sin \alpha + x_0; \\ y &= \tilde{x} \sin \alpha + \tilde{y} \cos \alpha + y_0. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Пример 2. Записать уравнение прямой, заданной в примере 1, в системе координат, повернутой относительно исходной на угол $\pi/6$ по часовой стрелке.

Решение.

При повороте системы координат по часовой стрелке имеем $\alpha = -\pi/6$.

По формулам (4.46) найдем:

$$x = \tilde{x} \cos(-\frac{\pi}{6}) - \tilde{y} \sin(-\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \tilde{x} + \frac{1}{2} \tilde{y}; \quad y = \tilde{x} \sin(-\frac{\pi}{6}) + \tilde{y} \cos(-\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2} \tilde{x} + \frac{\sqrt{3}}{2} \tilde{y}.$$

Подставляя полученные выражения в заданное уравнение плоскости, после преобразования получим:

$$(4\sqrt{3} - 3)\tilde{x} + (3\sqrt{3} + 4)\tilde{y} - 24 = 0.$$

Пример 3. Записать уравнение прямой, заданной в примере 1, в системе координат, ось $\tilde{x}$ которой совмещена с направлением прямой, а начало координат находится в точке прямой с заданной в исходной системе координатой $x_0 = 1,5$ (рис. 4.9).

Решение

Прежде, чем осуществить требуемое преобразование координат в заданном уравнении прямой, определим начало координат новой системы и угол, составляемый прямой с осью x .

Подставим $x_0 = 1,5$ в уравнение прямой: $4 \cdot 1,5 + 3y_0 - 12 = 0$.

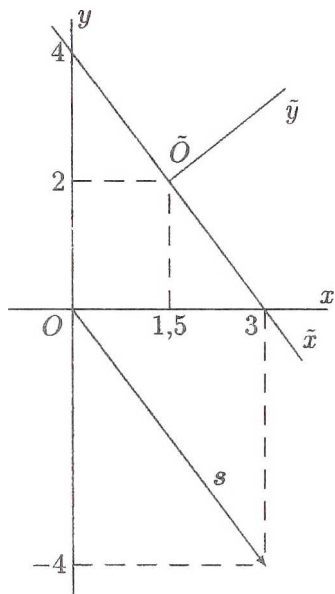
Отсюда находим $y_0 = 2$. Координаты нового центра в исходной системе координат: $\tilde{O}(1,5; 2)$. $\tilde{O}$ — точка, лежащая на заданной прямой.

Представим заданную прямую в виде уравнения прямой, проходящей точку $\tilde{O}$: $4(x - 1,5) + 3(y - 2) = 0$.

Или
$$\frac{x - 1,5}{3} = \frac{y - 2}{-4}.$$

Используя значения параметров этого уравнения, запишем выражение для вектора, соосного прямой: $s = (3; -4)$.

Поделив вектор s на его модуль $s = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$, найдем сонаправленный заданной прямой единичный вектор $n_s = (0,6; -0,8)$. Первая координата этого вектора равна косинусу угла наклона прямой к оси x , вторая – синусу этого угла (см. раздел 3.9).



Преобразуем координаты к новой системе, осуществляя одновременно перемещение начала координат в точку $\tilde{O}(1,5; 2)$ и поворот на угол α . Исходные данные для расчета: $x_0 = 1,5$; $y_0 = 2$; $\cos \alpha = 0,6$; $\sin \alpha = -0,8$.

Воспользовавшись формулами (4.47), получим:

$$x = \tilde{x} \cdot 0,6 - \tilde{y} \cdot (-0,8) + 1,5 = \frac{1}{10}(6\tilde{x} + 8\tilde{y} + 15);$$

$$y = \tilde{x} \cdot (-0,8) + \tilde{y} \cdot 0,6 + 2 = \frac{1}{10}(-8\tilde{x} + 6\tilde{y} + 20).$$

Подставим эти выражения в исходное уравнение прямой:

$$\frac{4}{10}(6\tilde{x} + 8\tilde{y} + 15) + \frac{3}{10}(-8\tilde{x} + 6\tilde{y} + 20) - 12 = 0.$$

После раскрытия скобок и приведения подобных членов приходим к уравнению пря-

$$\tilde{y} = 0.$$

Это уравнение определяет ось $\tilde{x}$, совпадающую с прямой.

Последнего результата следовало ожидать.

4.8 Уравнения второго порядка в $\mathbb{R}_2$

В отличие от математических моделей прямых и плоскостей, которые представляются в виде уравнений первого порядка, математические модели кривых и поверхностей общего вида описываются уравнениями, содержащими переменные в степенях, превышающих единицу.

Рассмотрим уравнение второго порядка в $\mathbb{R}_2$ (на плоскости) в общем виде:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0. \quad (4.48)$$

Предполагаем, что переменные x и y — это координаты произвольных точек на плоскости в декартовой ортогональной системе координат. Множитель 2 во втором слагаемом обусловлен тем, что присутствующие в такого рода суммах слагаемые B_1xy и B_2yx для математических моделей геометрических объектов равны.

Преобразуем уравнение (4.48) к новой системе координат $\tilde{x}\tilde{y}$, повернутой относительно исходной системы xy на угол α против часовой стрелки относительно начала координат (раздел 4.7).

Подставляя в (4.48) первые соотношения (4.46), получим:

$$A(\tilde{x}^2 \cos^2 \alpha - 2\tilde{x}\tilde{y} \sin \alpha \cos \alpha + \tilde{y}^2 \sin^2 \alpha) + 2B(\tilde{x}^2 \sin \alpha \cos \alpha + \tilde{x}\tilde{y}(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) - \tilde{y}^2 \sin \alpha \cos \alpha) + C(\tilde{x}^2 \sin^2 \alpha + 2\tilde{x}\tilde{y} \sin \alpha \cos \alpha + \tilde{y}^2 \cos^2 \alpha) + D(\tilde{x} \cos \alpha - \tilde{y} \sin \alpha) + E(\tilde{x} \sin \alpha + \tilde{y} \cos \alpha) + F = 0.$$

Или

$$\begin{aligned} &\tilde{x}^2(A \cos^2 \alpha + B \sin 2\alpha + C \sin^2 \alpha) + \tilde{x}\tilde{y}(2B \cos 2\alpha - (A - C) \sin 2\alpha) + \\ &+ \tilde{y}^2(A \sin^2 \alpha - B \sin 2\alpha + C \cos^2 \alpha) + \tilde{x}(D \cos \alpha + E \sin \alpha) + \\ &+ \tilde{y}(E \cos \alpha - D \sin \alpha) + F = 0. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Выберем угол α так, чтобы множитель во втором слагаемом, т. е. при произведении $\tilde{x}\tilde{y}$ полученного выражения, обращался в нуль. Из равенства нулю этого множителя определяем

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{A - C}{2B}. \quad (4.50)$$

При значении угла α , удовлетворяющем соотношению (4.50), уравнение (4.49) приводится к виду

$$\tilde{A}\tilde{x}^2 + \tilde{C}\tilde{y}^2 + \tilde{D}\tilde{x} + \tilde{E}\tilde{y} + F = 0, \quad (4.51)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= A \cos^2 \alpha + B \sin 2\alpha + C \sin^2 \alpha; \\ \tilde{C} &= A \sin^2 \alpha - B \sin 2\alpha + C \cos^2 \alpha; \\ \tilde{D} &= D \cos \alpha + E \sin \alpha; \\ \tilde{E} &= E \cos \alpha - D \sin \alpha. \end{aligned} \quad (4.52)$$

Сравнение уравнений (4.48) и (4.51) указывает на то, что проведенное преобразование поворота координат дало возможность избавиться в общем уравнении второго порядка от слагаемого, содержащего произведение переменных.

Для дальнейшего преобразования уравнения (4.51) сгруппируем в нем слагаемые с одинаковыми переменными, дополнив их до полных квадратов. Для сохранения равенства “дополнительные” слагаемые запишем и в правой части уравнения, перенеся в нее свободный член F :

$$\tilde{A} \left(\tilde{x}^2 + 2 \frac{\tilde{D}}{2\tilde{A}} \tilde{x} + \frac{\tilde{D}^2}{4\tilde{A}^2} \right) + \tilde{C} \left(\tilde{y}^2 + 2 \frac{\tilde{E}}{2\tilde{C}} \tilde{y} + \frac{\tilde{E}^2}{4\tilde{C}^2} \right) = \frac{\tilde{D}^2}{4\tilde{A}} + \frac{\tilde{E}^2}{4\tilde{C}} - F.$$

При условии, что $\tilde{F} = \frac{\tilde{D}^2}{4\tilde{A}} + \frac{\tilde{E}^2}{4\tilde{C}} - F \neq 0$, поделим полученное уравнение на $\tilde{F}$, свернем выражения в скобках до квадратов сумм, а множители при них переведем в знаменатели:

$$\frac{\left(\tilde{x} + \frac{\tilde{D}}{2\tilde{A}} \right)^2}{\tilde{F}/\tilde{A}} + \frac{\left(\tilde{y} + \frac{\tilde{E}}{2\tilde{C}} \right)^2}{\tilde{F}/\tilde{C}} = 1.$$

Вводя обозначения для новых переменных и постоянных:

$$x = \tilde{x} + \frac{\tilde{D}}{2\tilde{A}}; \quad y = \tilde{y} + \frac{\tilde{E}}{2\tilde{C}};$$

$$\frac{\tilde{F}}{\tilde{A}} = \pm a^2; \quad \frac{\tilde{F}}{\tilde{C}} = \pm b^2,$$

перепишем исследуемое уравнение в виде

$$\pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Понятно, что введение новых переменных равносильно параллельному переносу координатной системы $\tilde{x}\tilde{y}$ в новый центр с координатами $\tilde{x}_0 = -\frac{\tilde{D}}{2\tilde{A}}$ и $\tilde{y}_0 = -\frac{\tilde{E}}{2\tilde{C}}$. В зависимости от знаков, стоящих при слагаемых последнего уравнения, из него получаются уравнения *эллипса*:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (4.53)$$

и гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{или} \quad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (4.54)$$

Если уравнение (4.51) не содержит квадрата одной из переменных ($\tilde{A}$ или $\tilde{C}$ равны нулю), то параллельным переносом координат его можно привести к уравнению *параболы*:

$$x^2 = 2qy \quad \text{или} \quad y^2 = 2px. \quad (4.55)$$

Уравнения (4.53) – (4.55) называются *каноническими уравнениями кривых второго порядка*, соответственно *эллипса*, *гиперболы* и *параболы*.

Других кривых, описываемых уравнениями второго порядка, не существует.

Пример 1. Привести к каноническому виду уравнение $9x^2 + 16y^2 - 54x + 64y + 1 = 0$.

Решение

В заданном уравнении отсутствует слагаемое, содержащее произведение переменных. Поэтому его приведение к каноническому виду сведется лишь к параллельному переносу осей координат.

Для осуществления этого переноса сгруппируем слагаемые, зависящие только от одной переменной, дополняя их постоянными слагаемыми до полного квадрата. Чтобы не нарушить равенства, такие же слагаемые добавим в правую часть уравнения, перенося туда же свободный член:

$$9(x^2 - 6x + 9) + 16(y^2 + 4y + 4) = 81 + 64 - 1.$$

Следует обратить внимание на то, что множители, стоящие при квадратах переменных, должны быть обязательно вынесены за скобки. В противном случае будет изменяться масштаб координат (координаты будут сокращаться или удлиняться).

Поделив полученное уравнение на $144 = 12^2$, группируя слагаемые в скобках и переводя множители, стоящие перед скобками, в знаменатели, получим:

$$\frac{(x - 3)^2}{4^2} + \frac{(y + 2)^2}{3^2} = 1.$$

Это уравнение эллипса, собственные оси координат которого смещены вправо от исходных координат на 3 единицы и вниз – на 2 единицы. Так что новые (собственные) оси координат эллипса выражаются через старые соотношениями:

$$x = x - 3, \quad y = y + 2.$$

Пример 2. Привести к каноническому виду уравнение $16x^2 + 24xy + 9y^2 - 140x + 20y - 200 = 0$.

Решение

Для удобства преобразований выпишем коэффициенты уравнения, следуя обозначениям (4.48): $A = 16$, $2B = 24$, $C = 9$, $D = -140$, $E = 20$, $F = -200$.

1. Находим котангенс удвоенного угла поворота осей координат (4.50):

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{A - C}{2B} = \frac{16 - 9}{24} = \frac{7}{24}.$$

Для определения коэффициентов уравнения в повернутой на угол α системе координат следует правильно сориентировать повернутую систему координат и найти тригонометрические функции, необходимые для вычисления коэффициентов (4.52) нового уравнения кривой (4.51).

Используя известную из тригонометрии зависимость $\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{2 \operatorname{tg} \alpha}$, получим из нее квадратное уравнение для определения $\operatorname{tg} \alpha$:

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + 2 \operatorname{ctg} 2\alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha - 1 = 0$$

или с учетом найденного выше значения для $\operatorname{ctg} 2\alpha$:

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + \frac{7}{12} \operatorname{tg} \alpha - 1 = 0.$$

Решая уравнение, находим два корня: $\operatorname{tg} \alpha_1 = -4/3$ и $\operatorname{tg} \alpha_2 = 3/4$.

Эти значения определяют на плоскости два взаимно ортогональных направления, показанных на рис. 4.10. Выбор любого из них в качестве направления для новой оси координат $\tilde{x}$ приведет в конечном итоге к одинаковому результату, касающемуся расположения кривой на плоскости. Тем не менее второе значение угла дает положительный угол поворота и только поэтому отдаем ему предпочтение, т. е. принимаем $\operatorname{tg} \alpha = 3/4$.

Так как $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}$, то при известном значении $\operatorname{tg} \alpha$ отсюда имеем уравнение для определения $\sin \alpha$:

$$\frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} = \frac{3}{4} \implies \frac{\sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{9}{16} \implies \sin^2 \alpha = \left(\frac{3}{5}\right)^2.$$

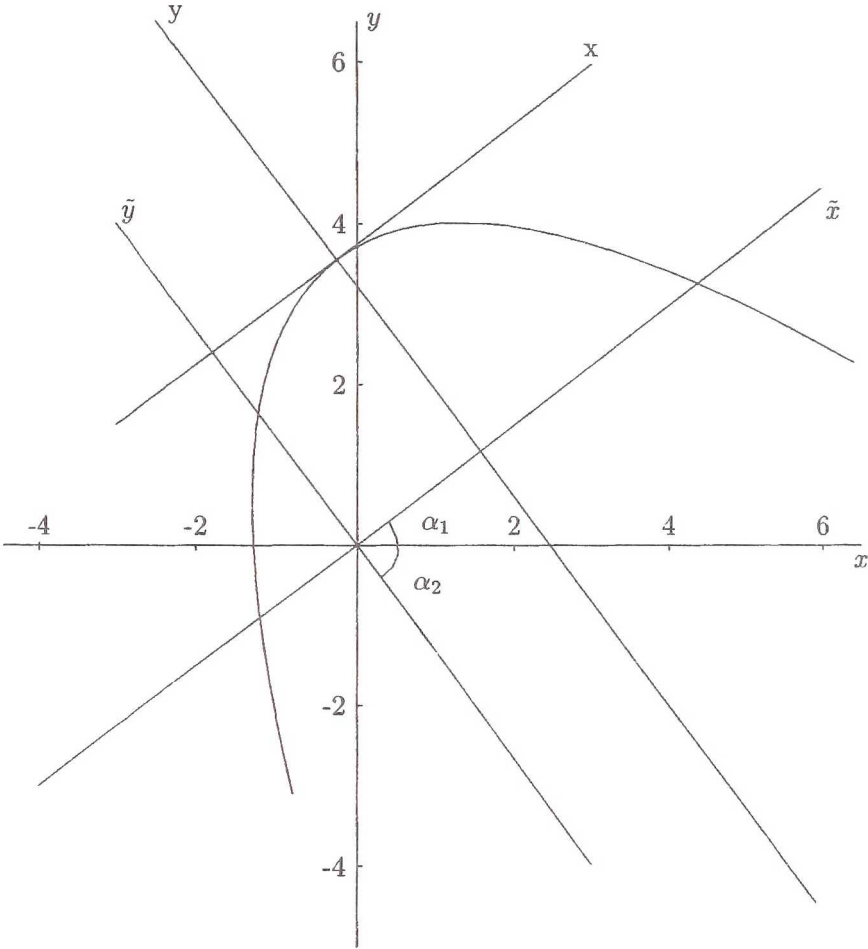


Рис. 4.10: Пример преобразования координат

Из последнего квадратного уравнения получаем два решения: $\sin \alpha = \pm \frac{3}{5}$.

Для определения косинуса угла α используем известную из тригонометрии зависимость

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \pm \sqrt{1 - \left(\pm \frac{3}{5}\right)^2} = \pm \frac{4}{5}.$$

Из соображений положительности угла принимаем

$$\sin \alpha = \frac{3}{5}, \quad \cos \alpha = \frac{4}{5}.$$

2. По формулам (4.52) находим коэффициенты

$$\tilde{A} = A \cos^2 \alpha + B \sin 2\alpha + C \sin^2 \alpha = 16 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 + 24 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} + 9 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 25,$$

$$\tilde{C} = A \sin^2 \alpha - B \sin 2\alpha + C \cos^2 \alpha = 16 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 - 24 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} + 9 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 0,$$

$$\tilde{D} = D \cos \alpha + E \sin \alpha = -140 \cdot \frac{4}{5} + 20 \cdot \frac{3}{5} = -100,$$

$$\tilde{E} = E \cos \alpha - D \sin \alpha = 20 \cdot \frac{4}{5} + 140 \cdot \frac{3}{5} = 100.$$

Подставив найденные коэффициенты в (4.51) и поделив полученное уравнение на 25, приходим к уравнению:

$$\tilde{x}^2 - 4\tilde{x} + 4\tilde{y} - 8 = 0.$$

3. Для определения положения следующей системы координат прибавим к уравнению и вычтем из него цифру 4 (чтобы получить квадрат разности для переменной $\tilde{x}$). Разделя переменные, запишем:

$$\tilde{x}^2 - 4\tilde{x} + 4 = -4\tilde{y} + 12,$$

или

$$(\tilde{x} - 2)^2 = -4(\tilde{y} - 3).$$

4. Введем новые координаты x, y , параллельные координатам $\tilde{x}, \tilde{y}$ с началом отсчета в точке $\tilde{x}_0 = 2$ и $\tilde{y}_0 = 3$, т. е.

$$x = \tilde{x} - 2, \quad y = \tilde{y} - 3.$$

В новых координатах уравнение кривой приводится к каноническому виду:

$$x^2 = -4y.$$

Это уравнение параболы, симметричной относительно оси y с ветвями, направленными в сторону ее отрицательных значений. На рис. 4.10 изображены исследуемая кривая (парабола) и три координатные системы, каждой из которых соответствуют различные уравнения одной и той же (!) кривой.

4.9 Свойства кривых второго порядка

В предыдущем разделе говорилось об инвариантности геометрических объектов по отношению к преобразованию координат. Там же приведены канонические уравнения (4.53) – (4.55) всех трех видов кривых второго порядка.

Приведем независимые от вводимых систем координат определения кривых второго порядка и опишем их основные свойства.

Эллипсом называется геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до двух фиксированных точек F_1 и F_2 , называемых *фокусами*, есть величина постоянная (2а).

На рис. 4.11 показан эллипс со связанной с ним собственной системой координат xy , в которой уравнение эллипса имеет вид (4.53):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Опишем некоторые основные характеристики и свойства эллипса.

1. Постоянные a и b называются полуосями эллипса.

При $y=0$ из уравнения эллипса получаем $x = \pm a$, а при $x=0$: $y = \pm b$. То есть, a и b — это отрезки, отсекаемые эллипсом на осях координат.

2. Координаты фокусов $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$, где

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

при условии, что $a > b$ (a — большая полуось эллипса). Величина $2c$ — расстояние между фокусами.

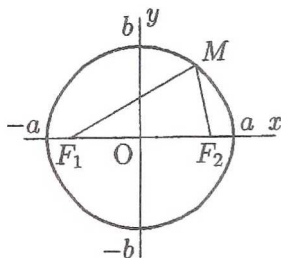


Рис. 4.11: Эллипс

3. Можно ввести параметр t , связанный с переменными x и y соотношениями:

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t, \end{cases} \quad (4.56)$$

которые называются параметрическими уравнениями эллипса.

При подстановке (4.56) в каноническое уравнение (4.53) последнее обращается в тождество.

4. Величина

$$e = \frac{c}{a}$$

называется *эксцентриситетом* эллипса $e \in [0, 1)$.

При $e = 0$ ($a = b = R$) эллипс превращается в окружность:

$$x^2 + y^2 = R^2;$$

при $e \rightarrow 1$ $b \rightarrow 0$ эллипс приближается к прямой.

Читателю предлагается самостоятельно исследовать уравнение эллипса, установив области определения переменных, интервалы возрастания и убывания, симметричность относительно координат. В справедливости проведенных исследований можно убедиться, сопоставляя их с изображенным на рис. 4.11 эллипсом.

Гиперболой называется геометрическое место точек, модуль разности расстояний от которых до двух фиксированных точек F_1 и F_2 , называемых *фокусами*, есть величина постоянная ($2a$).

На рис. 4.12 изображена гипербола с собственными осями координат, в которых гипербола представляется каноническим уравнением (4.54):

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Рассмотрим основные характеристики и свойства гиперболы.

1. Постоянные a и b называются полуосями гиперболы. При $y = 0$ имеем $x = \pm a$. При $x = 0$ получаем мнимые корни $y = \pm \sqrt{-b^2}$, т. е. гипербола не пересекает ось y , которая называется мнимой осью гиперболы (x — действительная ось).

2. Координаты фокусов $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$, где

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Расстояние между фокусами равно $2c$.

3. Можно ввести параметр t такой, что

$$\begin{cases} x = a \operatorname{ch} t = a(e^t + e^{-t})/2, \\ y = b \operatorname{sh} t = b(e^t - e^{-t})/2. \end{cases} \quad (4.57)$$

При таких значениях переменных x и y уравнение гиперболы превращается в тождество.

Уравнения (4.57) называются *параметрическими уравнениями гиперболы*.

Функции $\operatorname{ch} t$ и $\operatorname{sh} t$ — *гиперболические косинус и синус*. Их название определило название кривой.

4. Величина

$$e = \frac{c}{a}$$

называется *эксцентриситетом гиперболы*. Для гиперболы эксцентриситет $e \in (1; \infty)$.

Эксцентриситет характеризует степень отклонения точек гиперболы от оси x . При $e \rightarrow 1$ ($b \rightarrow 0$) ветви гиперболы стремятся к оси x . при $e \rightarrow \infty$ ($b \rightarrow \infty$) — к прямым $x = \pm a$, перпендикулярным оси x .

5. Гипербола имеет две асимптоты — прямые

$$y = \pm \frac{b}{a}x,$$

проходящие через начало координат и вершины прямоугольника со сторонами $2a$ и $2b$, изображенного пунктиром на рис. 4.12.

Читателю предлагается самостоятельно исследовать гиперболу, определив интервалы возрастания и убывания, симметричность осям координат, области определения переменных.

Параболой называется геометрическое место точек, расстояния от которых до некоторой фиксированной точки F , называемой *фокусом параболы*, равны расстоянию до фиксированной прямой, называемой *директрисой*.

На рис. 4.13 изображена парабола с собственными координатами, в которых ее уравнение записывается в виде (4.55)

$$y^2 = 2px.$$

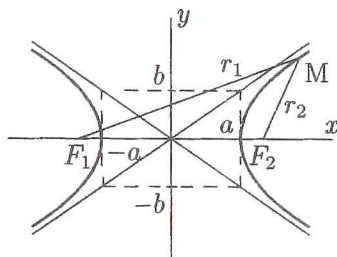


Рис. 4.12: Гипербола

Свойства и характеристики параболы.

1. Парабола проходит через точку $O(0; 0)$ ($y = 0$ при $x = 0$), называемую вершиной параболы.

2. Координаты фокуса $F(p/2; 0)$.

Директрисой является прямая

$$x = -\frac{p}{2},$$

ортогональная оси x и находящаяся от начала собственной системы координат на таком же расстоянии, что и фокус.

3. Важным свойством параболы, определяющим ее широкое применение в рефлекторах осветительных и других волновых приборах, является ее оптическое свойство: луч, выходящий из фокуса, отражается от линии параболы в направлении, перпендикулярном директрисе.

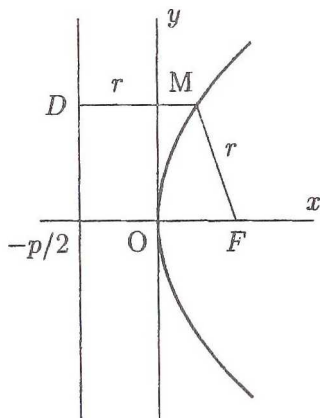


Рис. 4.13: Парабола

Отметим, что приведенные в этом разделе определения кривых второго порядка *инвариантны* по отношению к выбору координатных систем (не зависят от координат). Определения позволяют записать уравнения в бескоординатной форме, а затем ввести удобную для анализа кривой систему координат и записать соответствующее каноническое уравнение. Продемонстрируем процесс получения уравнений на примере параболы.

Пусть расстояние от некоторой точки M кривой до фиксированной точки (фокуса) F равно $|\overline{FM}|$, а расстояние от этой же точки до прямой (директрисы) равно $|\overline{DM}|$ (рис. 4.13). Согласно определению параболы запишем равенство:

$$|\overline{DM}| = |\overline{FM}| = r. \quad (4.58)$$

Это и есть уравнение параболы, не зависящее от систем координат.

Теперь введем декартову систему координат таким образом, что ее ось x расположим ортогонально директрисе так, чтобы она проходила через точку F . Положительным считаем направление от директрисы к фокусу. Ось y проведем перпендикулярно оси x через середину отрезка между директрисой и фокусом в направлении, соответствующим правой системе координат.

Обозначим расстояние между директрисой и фокусом через p . Тогда координаты фокуса $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, а уравнение директрисы $x = -\frac{p}{2}$. Пусть координаты произвольной точки $M(x, y)$.

Задание координат точек $M(x, y)$, $D\left(-\frac{p}{2}, y\right)$ и $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ которые образуют векторы в равенстве (4.58) позволяют записать выражения для этих векторов:

$$\overline{DM} = \left(x + \frac{p}{2}, y - y\right) = \left(x + \frac{p}{2}, 0\right) \quad \overline{FM} = \left(x - \frac{p}{2}, y - 0\right) = \left(x - \frac{p}{2}, y\right)$$

и найти квадраты их модулей:

$$|\overline{DM}|^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + 0^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 \quad |\overline{FM}|^2 = \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2.$$

Приравняем, следуя (4.58) полученные выражения:

$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} = x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2.$$

Отсюда, приводя подобные, приходим к каноническому уравнению параболы

$$y^2 = 2px.$$

Кривые второго порядка можно распознать, не приводя их уравнения к каноническому виду. Для этого достаточно по коэффициентам уравнения (4.48) найти величину

$$\Delta = AC - B^2. \quad (4.59)$$

Кривая является математической моделью:

$$\text{при } \Delta \begin{cases} > 0 & \Rightarrow \text{эллипса,} \\ = 0 & \Rightarrow \text{параболы,} \\ < 0 & \Rightarrow \text{гиперболы.} \end{cases}$$

Пример 1. Составить уравнение кривой второго порядка, если известно, что в ее собственных координатах кривая проходит через две точки $(2;2)$ и $(3;1)$.

Решение

Заметим, что обе точки находятся в первой координатной четверти. Координата x второй точки больше координаты x первой точки ($3 > 2$), а координата y второй точки меньше координаты y первой точки ($1 < 2$). Поэтому функция, описывающая кривую, убывающая.

Из трех функций, описывающих кривые второго порядка в собственных координатах, только эллипс обладает таким свойством. Поэтому кривая описывается уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Обозначая $A = 1/a^2$, $B = 1/b^2$ и подставляя в уравнение эллипса последовательно координаты первой и второй точек, придем к системе двух уравнений:

$$\begin{cases} 4A + 4B = 1, \\ 9A + 1B = 1. \end{cases}$$

Решая уравнение найдем $A = 1/a^2 = 3/32$, $B = 1/b^2 = 5/32$.

Тогда искомое каноническое уравнение эллипса примет вид:

$$\frac{x^2}{(8/\sqrt{6})^2} + \frac{y^2}{(8/\sqrt{10})^2} = 1.$$

Пример 2. Записать уравнение кривой второго порядка, проходящей через точку $(1;2)$ и имеющей асимптоты $y = \pm \frac{1}{2}x$.

Решение

Среди кривых второго порядка только гипербола имеет асимптоты. Гипербола может иметь два вида канонических уравнений в зависимости от того, какая из координат является мнимой:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{или} \quad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Сравнивая общее уравнение асимптот $y = \pm \frac{b}{a}x$ с заданным, получим $\frac{b}{a} = \frac{1}{2}$. Или $a = 2b$.

При этих зависимости между a и b и координатах заданной точки первое из возможных уравнений гиперболы не имеет решений, поэтому за исходное принимаем второе из записанных выше уравнений гиперболы.

Подставляя в него равенство $a = 2b$:

$$-\frac{x^2}{4} + y^2 = b^2$$

Запишем условие того, что кривая проходит через точку с координатами $(1;2)$: $-\frac{1^2}{4} + 2^2 = b^2$. Отсюда: $b^2 = 15/4$.

Тогда $a^2 = 4b^2 = 4 \cdot \frac{15}{4} = 15$.

Окончательно запишем каноническое уравнение гиперболы:

$$-\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{15/4} = 1.$$

Пример 3. Записать каноническое уравнение кривой, расстояние от каждой точки которой до фиксированной точки равно расстоянию до фиксированной прямой. Расстояние от фиксированной точки до прямой равно 8.

Решение

По условию заданная кривая – парабола с параметром $p = 8$. Возможны четыре решения задачи:

$$y^2 = \pm 16x; \quad x^2 = \pm 16y,$$

которые удовлетворяют условиям задачи.

4.10 Поверхности второго порядка

Геометрическими образами квадратных уравнений в пространстве $\mathbb{R}_3$ являются поверхности. Количество различных видов поверхностей (как и кривых) второго порядка ограничено. Каждая из поверхностей преобразованием координат (параллельным перемещением и поворотами вокруг трех осей) может быть приведена к каноническому виду, где ее математическая модель имеет характерный вид.

Рассмотрим все типы поверхностей второго порядка. Они изображены на рис. 4.14 вместе с собственными осями координат.

1. **Цилиндрические поверхности** – это поверхности, образованные параллельным переносом некоторой прямой, образующей цилиндра, вдоль кривой, называемой направляющей цилиндра.

Если речь идет о поверхностях второго порядка, то направляющая может быть либо эллипсом (в частном случае окружностью), либо гиперболой, либо параболой. Соответствующие поверхности будут называться *эллиптическим* (в частности *круговым*) *цилиндром* (рис. 4.14,а); *гиперболическим цилиндром* (рис. 4.14,б) и *параболическим цилиндром* (рис. 4.14,с).

Канонические уравнения соответствующих цилиндрических поверхностей не содержат одну из координат – ту координату, вдоль которой располагается образующая цилиндрической поверхности. Поэтому уравнения изображенных на рис. 4.14 цилиндрических поверхностей имеют в $\mathbb{R}_3$ (!)

соответственно вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1; \quad z^2 = 2px. \quad (4.60)$$

2. Поверхности вращения. Характерной особенностью этих поверхностей является наличие в их уравнениях слагаемых с квадратами двух переменных, имеющих одинаковые коэффициенты. В этом случае в сечениях поверхностей плоскостями, перпендикулярными третьей координате (третья координата – постоянная величина), получаются окружности.

Например,

$x^2 + y^2 - cz = 0$ – поверхность, образованная вращением параболы $x^2 = cz$ (или $y^2 = cz$) вокруг оси z ;

$x^2 + y^2 = cz^2$ – круговой конус (рис. 4.14,d), образованный вращением прямой $x = Cz$ ($y = Cz$) вокруг оси z ($c = C^2$).

3. Эллипсоид – это геометрическое место точек в $\mathbb{R}_3$, удовлетворяющих каноническому уравнению (рис. 4.14,e):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (4.61)$$

В сечениях этой поверхности плоскостями $x = 0$, $y = 0$ и $z = 0$ получаются эллипсы (показаны на рисунке).

4. Однополостный гиперboloид – геометрическое место точек в $\mathbb{R}_3$, удовлетворяющих каноническому уравнению (рис. 4.14,f):

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (4.62)$$

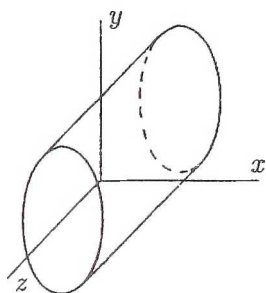
Минус в канонических уравнениях однополостных гиперboloидов может стоять только перед одним из слагаемых левой части уравнения. Переменная, перед которой стоит минус, определяет *минимум ось* гиперboloида.

В сечениях поверхности координатными плоскостями $x = 0$ и $z = 0$ получаются гиперболы; $y = \pm h$ (в том числе $h = 0$) – эллипсы (показаны на рисунке).

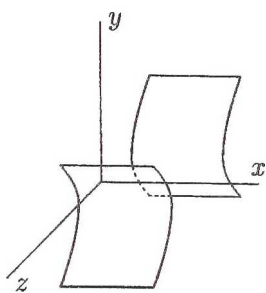
5. Двухполостный гиперboloид – геометрическое место точек в $\mathbb{R}_3$, удовлетворяющих каноническому уравнению (рис. 4.14,g):

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (4.63)$$

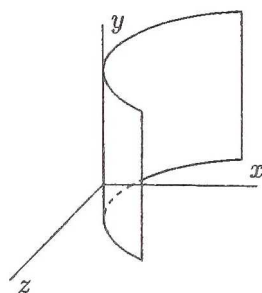
Отрицательные слагаемые этого уравнения определяют координаты плоскости $y = 0$, которую не пересекает поверхность гиперboloида.



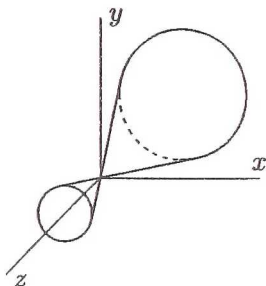
а. Эллиптический цилиндр



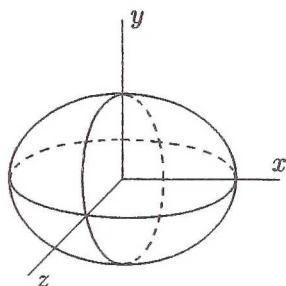
б. Гиперболический цилиндр



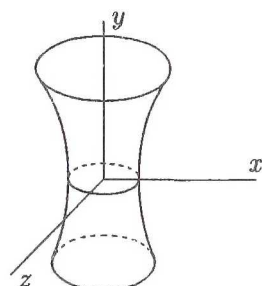
с. Параболический цилиндр



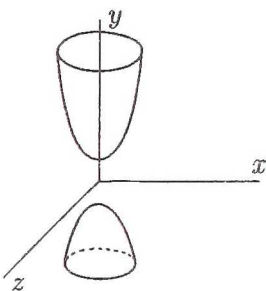
д. Круговой конус



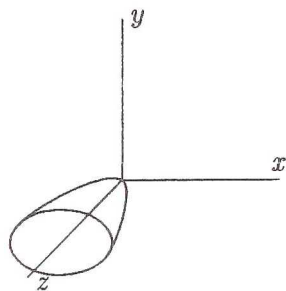
е. Эллипсоид



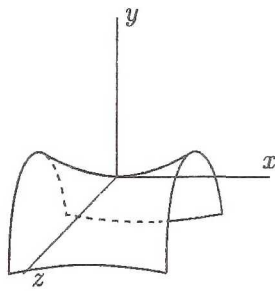
ф. Однополостный гиперболоид



г. Двухполостный гиперболоид



з. Эллиптический параболоид



и. Гиперболический параболоид

Рис. 4.14: Поверхности второго порядка

В сечениях поверхности координатными плоскостями $x = 0$ и $z = 0$ получаются гиперболы; $y = \pm h$ ($h > b$) – эллипсы.

6. **Эллиптический параболоид** – это геометрическое место точек в $\mathbb{R}_3$, удовлетворяющих каноническому уравнению (рис. 4.14,h):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = pz. \quad (4.64)$$

В сечениях поверхности координатными плоскостями $x = 0$ и $y = 0$ получаются параболы; сечение $z = 0$ определяет точку $(0;0;0)$ – вершину параболоида.

7. **Гиперболический параболоид** – это геометрическое место точек в $\mathbb{R}_3$, удовлетворяющих каноническому уравнению (рис. 4.14,i):

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = by. \quad (4.65)$$

Для канонического уравнения этой поверхности характерно то, что слагаемые с квадратами координат имеют противоположные знаки, а третья координата входит в уравнение в первой степени.

Для анализа форм поверхностей широко используется метод сечений. Метод в виде сечений координатными плоскостями применялся выше. В общем поверхности можно рассекать плоскостями, параллельными координатным плоскостям, или даже плоскостями общего вида.

Так, при $x = \pm d$ из (4.65) получим

$$z^2 = -2p(y - y_0),$$

где $p = \frac{1}{2}bc^2$, $y_0 = \frac{d^2}{a^2b}$.

Полученные в двух сечениях кривые представляют собой параболы, ветви которых направлены в сторону отрицательных y и вершины которых смещены в сторону положительных y на величину y_0 . Кривые, соответствующие обсуждаемому уравнению параболы, показаны на рис. 4.14,i – это крайние правое и левое сечения.

Других поверхностей второго порядка, кроме перечисленных, не существует.

В математике разработаны методы сведения общих уравнений поверхностей второго порядка, заданных в пространствах любых измерений, к каноническим уравнениям, но знакомство с этими методами выходит за рамки программы данного курса математики.

4.11 Резюме

Многие математические модели линейной алгебры могут быть наглядно представлены в виде геометрических образов.

Линейное уравнение с n неизвестными (в пространстве $\mathbb{R}_n$):

$$A_0 + A_1x_1 + A_2x_2 + \dots + A_nx_n = 0$$

представляет собой гиперплоскость — обобщение "уравнения плоскости в общем виде": $Ax + By + Cz + D = 0$ для пространства $\mathbb{R}_3$.

В пространстве $\mathbb{R}_2$ уравнение гиперплоскости описывает прямую: $Ax + By + C = 0$.

Уравнения плоскости в пространстве $\mathbb{R}_3$ (гиперплоскости в $\mathbb{R}_n$, в частности, прямой в $\mathbb{R}_2$) может быть представлено в различных видах.

В векторном виде:

$$(N, r) + D = 0,$$

где $N = (A, B, C)$ — вектор нормали к плоскости; $r = (x, y, z)$ радиус-вектор произвольной точки плоскости.

В отрезках a, b, c , отсекаемых плоскостью на координатных осях x, y, z :

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

В нормальном виде:

$$(n, r) - p = 0, \quad \text{или} \quad n_x x + n_y y + n_z z - p = 0,$$

где $n = (n_x, n_y, n_z)$ — единичный вектор нормали к плоскости; p — расстояние от начала координат до плоскости.

Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку с координатами (x_0, y_0, z_0) :

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Кроме записанных уравнений для плоскости прямая на плоскости (гиперплоскость в $\mathbb{R}_2$) может представляться еще несколькими видами характерных уравнений.

Уравнение с угловым коэффициентом (k — тангенс угла между прямой и осью x):

$$y = kx + b,$$

в том числе проходящей через заданную точку:

$$y = y_0 + k(x - x_0).$$

Уравнение прямой проходящей через две точки:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}.$$

Уравнение прямой в пространстве $\mathbb{R}_n$ имеет два характерных представления в координатной форме.

Канонические уравнения:

$$\frac{x_1 - x_{10}}{m_1} = \frac{x_2 - x_{20}}{m_2} = \dots = \frac{x_n - x_{n0}}{m_n}.$$

Здесь $(x_{10}, \dots, x_{n0})$ — координаты фиксированной точки, через которую проходит прямая. Вектор $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \dots, m_n)$ сонаправлен прямой. В частности, если в качестве сонаправленного вектора выбрать вектор $\mathbf{m} = ((x_{10} - x_{11}), (x_{20} - x_{21}), \dots, (x_{n0} - x_{n1}))$, то уравнение будет описывать прямую, проходящую через две точки.

Параметрические уравнения прямой:

$$\begin{cases} x_1 = x_{10} + tm_1, \\ x_2 = x_{20} + tm_2, \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_n = x_{n0} + tm_n. \end{cases}$$

Уравнения аналитической геометрии описывают не только представленные линейные модели, но и поверхности в пространствах различной размерности. Уравнения таких "гиперповерхностей" представляют собой, в частности, полиномы различных степеней с n переменными. Для двух переменных квадратное уравнение:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

описывает в зависимости от коэффициентов три вида кривых: эллипс, гиперболу и параболу (при $A = B = C = 0$ — прямую на плоскости).

Преобразования координат (поворот и параллельное перемещение) позволяют найти собственные координаты кривых, в которых уравнения кривых имеют канонический вид:

эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$

гипербола $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1;$

парабола $y^2 = 2px.$

Более глубокое изложение основ аналитической геометрии приведено в /4/.

4.12 Вопросы

1. Запишите в векторном виде уравнение прямой на плоскости и уравнение плоскости. Поясните записи соответствующими рисунками.
2. Получите из векторного уравнения уравнение прямой (плоскости), проходящей через заданную точку.
3. Приведите уравнение прямой (плоскости), проходящей через заданную точку к уравнению прямой (плоскости) в общем виде.
4. Что с геометрической точки зрения представляет собой совокупность коэффициентов, стоящих при переменных в общем уравнении прямой (плоскости)?
5. Приведите общее уравнение прямой (плоскости) к уравнению прямой (плоскости) в отрезках. Поясните на рисунках смысл коэффициентов этого уравнения.
6. Получите из общего уравнения прямой уравнение прямой с угловым коэффициентом. Поясните смысл коэффициентов.
7. Получите уравнение прямой, проходящей через две заданные точки.
8. Определите углы наклона к осям координат вектора нормали к прямой (плоскости).
9. Изобразите на координатных плоскостях следы плоскостей, получаемых их общего уравнения при различных вариантах равенства нулю некоторых его коэффициентов.
10. Что такое гиперплоскость? Запишите уравнение гиперплоскости: в общем виде; в виде уравнения в отрезках; в виде уравнения гиперплоскости, проходящей через заданную точку.
11. Получите формулу для определения угла между плоскостями. Сопроводите запись соответствующим рисунком.
12. Запишите условия параллельности и перпендикулярности плоскостей.
13. Запишите условие параллельности и ортогональности прямых, заданных уравнениями с угловыми коэффициентами.

14. Как найти расстояние от точки до плоскости? Ответ сопроводите поясняющим рисунком.
15. Получите уравнение плоскости (прямой) в нормальном виде.
16. Что представляет собой свободный член (p) в уравнении плоскости в нормальном виде?
17. Запишите уравнение прямой в $\mathbb{R}_3$ в векторном виде.
18. Получите уравнения прямой в $\mathbb{R}_3$ в параметрическом и в каноническом видах.
19. Запишите уравнение прямой в $\mathbb{R}_3$, проходящей через заданную точку.
20. Что определяет параметр t в уравнениях прямой, записанных в параметрическом виде?
21. Как найти угол между прямыми в пространстве?
22. Запишите условия параллельности и ортогональности прямых в $\mathbb{R}_3$.
23. Как найти угол между прямой и плоскостью?
24. Запишите условия параллельности и ортогональности прямой и плоскости.
25. Как осуществляется преобразование переноса осей координат на плоскости? Запишите формулы связи старых и новых координат.
26. Как осуществляется преобразование поворота осей координат на плоскости? Запишите формулы связи старых и новых координат.
27. Запишите общее уравнение кривых второго порядка на плоскости.
28. Перечислите все возможные виды кривых второго порядка на плоскости.
29. Запишите канонические уравнения всех кривых второго порядка на плоскости.
30. Изобразите эллипс. Поясните на рисунке значения параметров, определяющих эллипс.

31. Запишите параметрические уравнения эллипса. Убедитесь в том, что эти уравнения являются решениями канонического уравнения эллипса.
32. Изобразите гиперболу. Поясните на рисунке значения параметров, определяющих гиперболу.
33. Запишите параметрические уравнения гиперболы. Убедитесь в том, что эти уравнения являются решениями канонического уравнения гиперболы.
34. Что определяет эксцентриситет в уравнениях кривых второго порядка? В каких пределах он изменяется для эллипса и гиперболы?
35. Изобразите параболу. Поясните на рисунке значения параметров, определяющих параболу.
36. В чем состоит оптическое свойство параболы?
37. Перечислите все возможные виды поверхностей второго порядка. Приведите их канонические уравнения. Изобразите поверхности на рисунках.

Выбрать правильные ответы

1. Расставьте номера ответов (правая колонка) в порядке следования номеров соответствующих им вопросов (левая колонка) относительно уравнений прямой на плоскости.

1. Проходит через заданную точку

$$1. \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

2. В отрезках

$$2. Ax + By + C = 0$$

3. В нормальном виде

$$3. A(x-x_0) + B(y-y_0) = 0$$

4. В общем виде

$$4. x \cos \alpha + y \cos \beta - p = 0$$

2. Расставьте номера ответов (правая колонка) в порядке следования номеров вопросов (левая колонка) в отношении прямых на плоскости.

1. Условие перпендикулярности

$$1. \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

2. Условие параллельности

$$2. \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}$$

3. Тангенс угла между прямыми

$$3. A_1 B_2 = B_1 A_2$$

4. Косинус угла между прямыми

$$4. k_1 = 1/k_2.$$

3. Расставьте номера ответов (правая колонка) в порядке следования номеров вопросов (левая колонка) относительно уравнений плоскости.

1. Перпендикулярна оси z

$$1. \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

2. В отрезках

$$2. Ax + By + C = 0$$

3. В нормальном виде

$$3. Ax + By + Cz + D = 0$$

4. В общем виде

$$4. x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0$$

4. Расставьте номера ответов (правая колонка) в порядке следования номеров вопросов (левая колонка).

1. Расстояние от начала координат до плоскости

$$1. \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

2. Тангенс угла между прямыми

$$2. \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}$$

3. Условие перпендикулярности

$$3. A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0$$

4. Условие параллельности

$$4. x_0 \cos \alpha + y_0 \cos \beta + z_0 \cos \gamma$$

5. Отметьте соотношения, являющиеся уравнениями прямой.

1. $Ax + By + C = 0$ 2. $r = r_0 + st$ 3. $m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0$
 4. $\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$ 5. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$

6. Расставьте номера ответов (правая колонка) в порядке следования номеров вопросов (левая колонка).

- | | |
|--|---|
| 1. Условие параллельности прямой и плоскости | 1. $\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$ |
| 2. Условие перпендикулярности прямой и плоскости | 2. $Am + Bn + Cp = 0$ |
| 3. Синус угла между прямой и плоскостью | 3. $\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Am + Bn + Cp}$ |
| 4. Параметр t_* , соответствующий точке пересечения прямой и плоскости | 4. $\frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$ |

7. Расставьте номера ответов (правая колонка) в порядке следования номеров вопросов (левая колонка). (Тильдой обозначены новые координаты).

- | | |
|--|---|
| 1. Преобразование параллельного переноса координат | 1. $\frac{A - C}{2B}$ |
| 2. Катангенс удвоенного угла поворота осей координат | 2. $\tilde{x} = x \cos \alpha + y \sin \alpha,$
$\tilde{y} = -x \sin \alpha + y \cos \alpha$ |
| 3. Преобразование поворота осей координат | 3. $\tilde{x} = x - x_0, \quad \tilde{y} = y - y_0$ |
| 4. Поворот координат вокруг оси z | 4. $\tilde{x} = y, \quad \tilde{y} = -x.$ |

8. Отметьте соотношения, являющиеся уравнениями прямой.

1. $\begin{cases} x = x_0 + tm \\ y = y_0 + tn \end{cases}$ 2. $r = r_0 + st$ 3. $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}$
 4. $\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$ 5. $y_1 - y_0 = k(x_1 - x_0).$

9. Расставьте номера ответов (правая колонка) в порядке следования номеров вопросов (левая колонка).

- | | |
|--|---|
| 1. Условие перпендикулярности прямых | 1. $\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$ |
| 2. Условие параллельности прямых | 2. $\frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$ |
| 3. Условие параллельности прямой и плоскости | 3. $m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$ |
| 4. Косинус угла между прямой и плоскостью | 4. $Am + Bn + Cp = 0$ |

10. По отношению к уравнению $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 0$ и $\Delta = AC - B^2$ расставьте номера ответов (правая колонка) в порядке следования номеров вопросов (левая колонка).

- | | |
|---------------|-----------------|
| 1. Эллипс | 1. $\Delta < 0$ |
| 2. Гипербола | 2. $\Delta = 0$ |
| 3. Парабола | 3. $\Delta > 0$ |
| 4. Окружность | 4. $A = C$. |

11. Расставьте номера ответов (правая колонка) в порядке следования номеров вопросов (левая колонка).

- | | |
|--|---------------|
| 1. Сумма расстояний от точек до фокусов постоянна | 1. Эллипс |
| 2. Модуль разности расстояний от точек до фокусов постоянна | 2. Гипербола |
| 3. Фокусы совпадают | 3. Парабола |
| 4. Расстояние от точек до фокуса равны расстояниям до директрисы | 4. Окружность |

12. Расставьте номера ответов (правая колонка) в порядке следования номеров вопросов (левая колонка).

- | | |
|----------------|--|
| 1. Эллипс | 1. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ |
| 2. Гипербола | 2. $x^2 = 2py$ |
| 3. Парабола | 3. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ |
| 4. Пара прямых | 4. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ |

13. Расставьте номера ответов (правая колонка) в порядке следования номеров вопросов (левая колонка).

1. Двухполостный
гиперболоид

$$1. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$$

2. Эллиптический конус

$$2. \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = pz$$

3. Эллиптический
параболоид

$$3. \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

4. Цилиндрическая
поверхность

$$4. \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$$

4.13 Упражнения к разделу 4.1

Т Е М А 7

Прямая на плоскости

Семинарское занятие

Вопросы

1. Запишите в векторном виде уравнение прямой на плоскости. Поясните запись рисунком.
2. Что с геометрической точки зрения представляет собой совокупность коэффициентов, стоящих при переменных в общем уравнении прямой?
3. Запишите уравнение прямой в отрезках. Поясните смысл коэффициентов этого уравнения.
4. Запишите уравнение прямой с угловым коэффициентом. Поясните смысл коэффициентов.
5. Запишите уравнение прямой, проходящей через две заданные точки.
6. Как найти угол наклона к осям координат вектора нормали к прямой.
7. Изобразите на координатных плоскостях следы прямых, получаемых их общего уравнения при различных вариантах равенства нулю некоторых его коэффициентов.
8. Как найти угол между прямыми (через косинусы и через тангенсы).
9. Запишите условие параллельности прямых. Условие перпендикулярности.
10. Как найти расстояние от точки до прямой?
11. Запишите уравнение прямой в нормальном виде. Что представляет собой свободный член (p) в этом уравнении.

Задачи

1. Изобразить на плоскости прямые, задаваемые уравнениями:

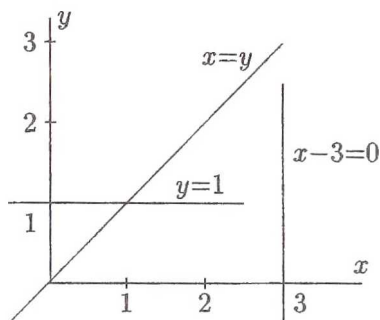
- а) $x = y$;
 б) $x - 3 = 0$;
 в) $y = 1$.

Решение

Прямая а) проходит через начало координат (в уравнении отсутствует свободный член) и равнонаклонена к координатным осям (множители при переменных равны и $\operatorname{tg}(l, x) = 1$).

Прямая б) параллельна оси y и отсекает на оси x отрезок, равный 3.

Прямая в) параллельна оси x и отсекает на оси y отрезок, равный 1.



2. Уравнение $6x - 8y = 9$ записать в виде уравнения прямой:

- а) в общем виде;
 б) в отрезках;
 в) в нормальном виде;
 г) с угловым коэффициентом.

Изобразить прямую и пояснить значения коэффициентов уравнений.

Решение

Переносим все слагаемые исходного уравнения в его левую часть, приходим к уравнению прямой в общем виде ($Ax + By + C = 0$):

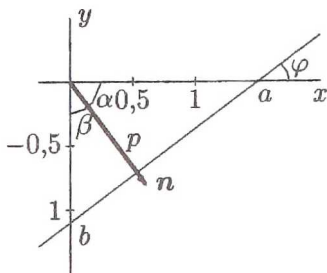
$$6x - 8y - 9 = 0,$$

где $A = 6$, $B = -8$, $C = -9$. Так что вектор нормали к прямой представляется через его координаты:

$$N = (A; B) = (6; -8).$$

Для записи уравнения прямой в отрезках $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1\right)$ следует исходное уравнение поделить на отрицательное значение свободного члена и в числителях его левой части записать переменные с множителями +1:

$$\frac{x}{3/2} + \frac{y}{-9/8} = 1.$$



Так что отрезки отсекаемые прямой на координатных осях x и y соответственно: $a = \frac{3}{2}$; $b = -\frac{9}{8}$.

Для записи уравнения в нормальном виде определим модуль вектора нормали к прямой: $N = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{6^2 + (-8)^2} = \sqrt{100} = 10$. Поделив на N уравнение прямой в общем виде, приходим к уравнению прямой в отрезках ($x \cos \alpha + y \cos \beta - p = 0$):

$$0,6x - 0,8y - 0,9 = 0.$$

Отсюда, косинусы углов α и β наклона нормали к осям координат x и y : $\cos \alpha = 0,6$, $\cos \beta = 0,8$. Эти величины являются координатами единичного вектора нормали к прямой:

$$\mathbf{n} = \frac{N}{N} = (n_x; n_y) = (\cos \alpha; \cos \beta) = (0,6; 0,8).$$

Расстояние от начала координат до прямой: $p = 0,9$.

Для записи уравнения прямой с угловым коэффициентом ($y=kx+b$) достаточно из любого вида ее представления выразить в явном виде переменную y :

$$y = \frac{3}{4}x - \frac{9}{8}.$$

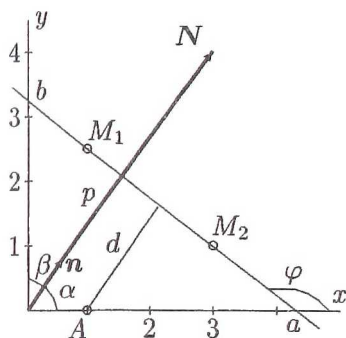
Здесь $k = \operatorname{tg} \varphi = \frac{3}{4}$ — тангенс угла φ наклона прямой к оси x .

3. Записать уравнение прямой, проходящей через точки с заданными координатами $M_1(1; 2,5)$ и $M_2(3, 1)$:

- 1) в общем виде;
- 2) в отрезках;
- 3) в нормальном виде;
- 4) с угловым коэффициентом.

Пояснить на рисунке смысл коэффициентов уравнений. Определить расстояние от начала координат и от точки $A(1, 0)$ до прямой. Найти углы между нормалью к прямой и осями координат и угол наклона прямой к оси x .

Решение



Через две заданные точки проводим вектор $l = \overline{M_1 M_2} = (3-1; 1-2,5) = (2; -1,5) = (m; n)$.

Воспользовавшись вытекающим из уравнения прямой, проходящей через две точки $\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0} \right)$, каноническим уравнением $\left(\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} \right)$, запишем:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2,5}{-1,5}.$$

Умножив это уравнение на 6 и перенося все слагаемые в левую часть, получим уравнение прямой в общем виде:

$$3x + 4y - 13 = 0.$$

Множители при x и y в этом уравнении являются координатами вектора нормали к прямой:

$$N = (3; 4)$$

с модулем $N = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

Поделив уравнение прямой в общем виде на N , приходим к нормальному уравнению прямой:

$$0,6x + 0,8y - 2,6 = 0.$$

Отсюда выписываем значения направляющих косинусов:

$$\cos \alpha = 0,6; \quad \cos \beta = 0,8$$

и расстояние до прямой от начала координат: $p = 2,6$.

Приводя общее уравнение прямой к уравнению прямой в отрезках (делим общее уравнение на свободный член $C = 13$):

$$\frac{x}{13/3} + \frac{y}{13/4} = 1,$$

выписываем значения отрезков, отсекаемых прямой на осях координат:

$$a = \frac{13}{3}; \quad b = \frac{13}{4}.$$

Угол наклона прямой к оси x можно найти, определив его тангенс из уравнения прямой с угловым коэффициентом (из уравнения прямой выделяем в явном виде переменную y):

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{13}{4}.$$

Отсюда $\operatorname{tg} \varphi = -\frac{3}{4} = 0,75$.

Для определения расстояния от точки $A(1; 0)$ до прямой воспользуемся формулой $d = \frac{1}{N}|Ax_0 + By_0 + C|$:

$$d = \frac{1}{5}|3 \cdot 1 + 4 \cdot 0 - 13| = 2.$$

4. Записать в общем виде уравнение прямой, проходящей через точку $M(2; -3)$ и:

а) параллельную вектору $\mathbf{a} = (m; n) = (4; -5)$;

б) перпендикулярной этому вектору.

Решение

Запишем уравнения пучка прямых, проходящих через точку $(A(x-x_0) + B(y-y_0) = 0)$:

$$A(x-2) + B(y+3) = 0.$$

а) Так как вектор $N = (A; B)$ перпендикулярен прямой, то он перпендикулярен и вектору $\mathbf{a}$. Из условия перпендикулярности двух векторов $(mA + nB = 0)$ получим:

$$4A - 5B = 0, \quad \text{или} \quad B = 0,8A.$$

Подставим полученное выражение для B в уравнение пучка прямых:

$$A(x-2) + 0,8A(y+3) = 0.$$

После умножения всех слагаемых уравнения на $5/A$, раскрытия скобок и приведения подобных получим искомое уравнение:

$$5x + 4y + 2 = 0.$$

б) Векторы N и $\mathbf{a}$ параллельны. Для определения постоянных A и B воспользуемся условием параллельности векторов $\left(\frac{A}{m} = \frac{B}{n}\right)$:

$$\frac{A}{4} = \frac{B}{5}. \quad \text{Отсюда} \quad A = 0,8B.$$

Подставим полученное выражение в уравнение пучка прямых:

$$0,8B(x-2) + B(y+3) = 0.$$

После умножения всех слагаемых уравнения на $5/B$, раскрытия скобок и приведения подобных получим искомое уравнение:

$$4x + 5y + 7 = 0.$$

Для проверки правильности полученных уравнений достаточно использовать исходные данные.

Так, для задачи а):

- условие прохождения прямой через точку $M(2; -3)$: $5 \cdot 2 + 4 \cdot (-3) + 2 = 0$ (!);
- условие $N \perp a$: $m_A + n_B = 4 \cdot 5 + 5 \cdot (-4) = 0$ (!).

Для задачи б)

- условие прохождения прямой через точку $M(2; -3)$: $4 \cdot 2 + 5 \cdot (-3) + 7 = 0$ (!);
- условие $N \parallel a$: $\frac{4}{4} = \frac{5}{5}$ (!)

5. Заданы координаты вершин треугольника: $A(-2; 1)$, $B(2; 2)$, $C(0; -2)$. Записать и представить в общем виде уравнение прямой, проходящей через:

- а) точки A и B ;
- б) медиану, выходящую из вершины A ;
- в) точку C параллельно медиане;
- г) точку C перпендикулярно медиане.

Решение

а) Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две фиксированные точки $\left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} \right)$ A и B :

$$\frac{x+2}{2+2} = \frac{y-1}{2-1}, \quad \text{или} \quad \frac{x+2}{4} = \frac{y-1}{1}.$$

Умножая обе части уравнения на 4, раскрывая скобки и приводя подобные, получим:

$$x - 4y + 6 = 0.$$

б) Найдем координаты точки $D = \left(\frac{x_B + x_C}{2}; \frac{y_B + y_C}{2} \right)$, делящей сторону BC пополам:

$$D = \left(\frac{2+0}{2}; \frac{2+(-2)}{2} \right) = (1; 0).$$

Точки A и D медианы принадлежат искомой прямой, поэтому для записи ее воспользуемся тем же уравнением, что и в пункте а):

$$\frac{x+2}{1+2} = \frac{y-1}{0-1}, \quad \text{или} \quad \frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{-1}.$$

Умножая обе части уравнения на 3, раскрывая скобки и приводя подобные, получим:

$$x + 3y - 1 = 0.$$

в) Уравнение пучка прямых, проходящих через точку $C(0, -2)$:

$$\frac{x-0}{m} = \frac{y+2}{n}.$$

Так как искомая прямая параллельна медиане AD , то в качестве ее направляющего вектора можно выбрать $s_B = (m_B; n_B) = s_B = (3; -1)$. Тогда уравнение прямой:

$$\frac{x}{3} = \frac{y+2}{-1}$$

Приводя уравнение к общему знаменателю, раскрывая скобки и приводя подобные, получим:

$$x + 3y + 6 = 0.$$

Это уравнение, как и следовало ожидать, отличается от уравнения параллельной прямой пункта в) только свободным членом, ответственным за расстояние до прямой от начала координат.

г) Прямая проходит через ту же точку C , что и прямая пункта в), поэтому ее уравнение отличается от уравнения пучка прямых, записанного в этом пункте, только значениями знаменателей:

$$\frac{x-0}{m_\Gamma} = \frac{y+2}{n_\Gamma}.$$

Из условия ортогональности направляющих векторов: $s_\Gamma \perp s_B$ следует

$$m_B m_\Gamma + n_B n_\Gamma = 0, \quad \text{или} \quad 3m_\Gamma - n_\Gamma = 0.$$

Отсюда находим $n_\Gamma = 3m_\Gamma$.

Подставляя это выражение в начальное уравнение, умножая на $3m_\Gamma$, раскрывая скобки и приводя подобные, получим:

$$3x - y - 2 = 0.$$

6. Найти угол между прямыми и координату точки их пересечения, если прямые заданы уравнениями:

$$\text{а) } \begin{cases} 2x - 1y + 1 = 0, \\ x + 2y - 4 = 0. \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 2x - 4y + 1 = 0, \\ -x + 2y - 3 = 0. \end{cases}$$

Решение

В случае представления уравнений прямых в общем виде угол между ними удобно определить, находя косинус угла между векторами нормалей к прямым:

$$\cos \theta = \frac{(N_1, N_2)}{N_1 N_2} = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

$$\text{а) } \cos \theta_a = \frac{2 \cdot 1 + (-1) \cdot 2}{\sqrt{2^2 + (-1)^2} \sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{0}{\sqrt{5}} = 0.$$

Поэтому прямые ортогональны и $\theta = \pi/2$. Об ортогональности прямых говорит равенство нулю числителя — скалярного произведения векторов нормалей.

Координаты точки пересечения двух прямых определим, решая систему двух уравнений, описывающих эти прямые:

$$\begin{cases} 2x - y + 1 = 0, \\ x + 2y - 2 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} -5y + 5 = 0, \\ x + 2y - 2 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0, \\ y = 1. \end{cases}$$

Таким образом точка $M(0; 1)$ является точкой пересечения прямых. Ее координаты, в чем можно убедиться, удовлетворяют обоим уравнениям пункта а).

$$\text{б) } \cos \theta_b = \frac{2 \cdot (-1) + (-4) \cdot 2}{\sqrt{2^2 + (-4)^2} \sqrt{(-1)^2 + 2^2}} = \frac{-10}{\sqrt{20} \sqrt{5}} = -1.$$

Отсюда $\theta_b = \pi$, то есть прямые параллельны. В этом убеждает и пропорциональность коэффициентов при переменных.

Задачи для самостоятельного решения

К разделу 4.1.

1. Провести прямую через точки $A(1; -2)$ и $B(3, 0)$. Записать полученное уравнение:

- а) в общем виде;
- б) в отрезках;
- в) в виде уравнения с угловым коэффициентом.

Найти углы наклона:

- а) прямой с осью x ;
- б) нормали к прямой с осями координат.

2. Записать в общем виде уравнение прямой, проходящей через точку $M(-2; 1)$ и

- а) параллельную вектору $\mathbf{a} = (3; -2)$;
- б) перпендикулярную вектору $\mathbf{b} = (1; -3)$.

3. Найти косинус и тангенс угла между прямыми $2x - y + 3 = 0$ и $x + y - 2 = 0$.

4. Заданы точка $M(3; 1)$ и уравнение прямой $\ell : 2x - y + 2 = 0$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку M : а) параллельной ℓ ; б) перпендикулярной ℓ .

5. Заданы координаты трех точек: $A(-3; 2)$, $B(2; 1)$, $C(1; -1)$.

а). Записать и представить в общем виде уравнение прямой, проходящей через точки A и C .

б). Считая AC диагональю параллелограмма, средствами аналитической геометрии найти координаты его недостающей вершины D .

в). Найти угол между диагоналями AB и CD параллелограмма и координаты точки E их пересечения.

г). Найти расстояние между сторонами параллелограмма.

4.14 Упражнения к разделам 4.2 – 4.4

Т Е М А 8

Плоскость

Семинарское занятие

Вопросы

1. Запишите в векторном виде уравнение плоскости. Поясните запись рисунком.
2. Что с геометрической точки зрения представляет собой совокупность коэффициентов, стоящих при переменных в общем уравнении плоскости?
3. Запишите уравнение плоскости в отрезках. Поясните смысл коэффициентов этого уравнения.
4. Запишите уравнение плоскости, проходящей через три точки.
5. Как найти углы наклона к осям координат вектора нормали к плоскости.
6. Изобразите на координатных плоскостях следы плоскостей, получаемых их общего уравнения при различных вариантах равенства нулю некоторых коэффициентов их общих уравнений.
7. Что такое гиперплоскость?
8. Как найти угол между плоскостями.
9. Запишите условие параллельности плоскостей. Условие перпендикулярности.
10. Как найти расстояние от точки до плоскости?
11. Запишите уравнение плоскости в нормальном виде. Что представляет собой свободный член в этом уравнении.

Задачи

Изобразить на декартовых ортогональных координатах плоскости, задаваемые уравнениями:

1. $Ax + By + Cz = 0$.

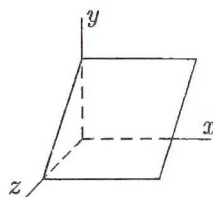
Решение

Плоскость проходит через начало координат. В частности, при $A = B = C = 1$ плоскость одинаково наклону ко всем координатам. Вектор нормали к плоскости $N = (1; 1; 1)$ совпадает с биссектрисой первого координатного угла.

2. $By + Cz + D = 0$.

Решение

Плоскость параллельна оси x .

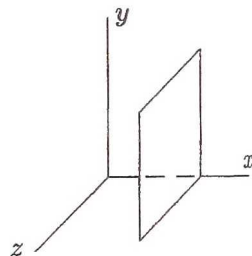


При $B = 0$ ($A \neq 0, C \neq 0$) плоскость параллельна оси y . При $C = 0$ — оси z .

3. $Ax + D = 0$;

Решение

Плоскость перпендикулярна оси x (параллельна осям y и z).



При $A = 0$ и $B = 0$ ($C \neq 0$) — перпендикулярна оси z ; при $A = 0$ и $C = 0$ — оси y . Уравнения $x = 0$, $y = 0$ и $z = 0$ представляют координатные плоскости, перпендикулярные координатам, равным нулю.

4. Записать уравнение плоскости, проходящей через точку $A(3; -2; 0)$ и перпендикулярную вектору $a = (2; 4; -1)$:

а) в общем виде;

б) в нормальном виде;

в) в отрезках.

Определить:

г) направляющие косинусы нормали к плоскости;

д) расстояние от начала координат до плоскости.

е) отрезки, отсекаемые плоскостью на осях координат;

Решение

В уравнении плоскости, проходящей через фиксированную точку $\left(A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \right)$, согласно условию задачи координаты точки: $x_0 = 3, y_0 = -2, z_0 = 0$; координаты вектора, нормального к плоскости: $A = 4, B = 3, C = -1$.

Поэтому искомое уравнение представляется в виде

$$4(x - 3) + 3(y + 2) - (z - 0) = 0.$$

После раскрытия скобок, перенесения всех слагаемых в левую часть и приведения подобных приходим к уравнению плоскости в общем виде:

$$4x + 3y - z - 6 = 0.$$

Координаты вектора нормали к этой плоскости равны множителям при переменных $N = (4; 3; -1) = \mathbf{a}$, но могут отличаться от координат вектора $\mathbf{a}$ на постоянный множитель. В частности, вектор нормали может быть единичным:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{N}}{N} = \frac{(4; 3; -1)}{\sqrt{4^2 + 3^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{26}}(4; 3; -1).$$

Чтобы получить уравнение плоскости в нормальном виде $(x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p)$, необходимо поделить ее общее уравнение на модуль вектора N ($N = \sqrt{26}$):

$$\frac{4}{\sqrt{26}}x + \frac{3}{\sqrt{26}}y - \frac{1}{\sqrt{26}}z - \frac{6}{\sqrt{26}} = 0.$$

Множители при переменных этого уравнения являются направляющими косинусами вектора нормали к плоскости:

$$\cos \alpha = \frac{4}{\sqrt{26}}; \quad \cos \beta = \frac{3}{\sqrt{26}}; \quad \cos \gamma = -\frac{1}{\sqrt{26}},$$

а расстояние от начала координат до плоскости определяет отрицательное значение свободного члена нормального уравнения:

$$p = \frac{6}{\sqrt{26}}.$$

Чтобы получить уравнение плоскости в отрезках $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0\right)$, достаточно перенести свободный член общего уравнения $C = -6$ в его правую часть и поделить полученное выражение на $-C = 6$ (в правой части уравнения должна стоять положительная единица):

$$\frac{x}{3/2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{-6} = 1.$$

Отсюда получаем значения отрезков, отсекаемых плоскостью на координатных осях:

$$a = 1,5; \quad b = 2; \quad c = -6.$$

5. Записать в общем виде уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(3; -2; 0)$ и $M_2(1; -1; 4)$ и параллельной вектору $\mathbf{a} = (1; 2; -2)$.

Р е ш е н и е

Уравнение плоскости, проходящей через точку M_1 :

$$A(x - 3) + B(y + 2) + C(z - 0) = 0. \quad (4.66)$$

Так как искомая плоскость должна проходить через точку M_2 , то координаты этой точки должны удовлетворять уравнению искомой плоскости:

$$A(1 - 3) + B(-1 + 2) + C(4 - 0) = 0,$$

или

$$-2A + B + 4C = 0. \quad (4.67)$$

Это первое уравнение, ограничивающее выбор коэффициентов уравнения.

Вектор $N = (A; B; C)$ ортогонален плоскости, а заданный в условии задачи вектор $\mathbf{a} = (1; 2; -2)$ параллелен ей. Следовательно $N \perp \mathbf{a}$. Из условия ортогональности векторов получим второе уравнение для определения коэффициентов (равенство нулю скалярного произведения векторов):

$$A + 2B - 2C = 0. \quad (4.68)$$

В результате имеем систему двух уравнений (4.67) и (4.68) с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} -2A + B + 4C = 0, \\ A + 2B - 2C = 0. \end{cases} \quad (4.69)$$

Решая систему, выразим две ее неизвестные через третью (в качестве основных неизвестных могут быть выбраны любые две из трех): $A = 2C$, $B = 0$. Подставим эти выражения в уравнение (4.66). После деления на C , раскрытия скобок и приведения подобных получим:

$$2x + z - 6 = 0.$$

Проверим его адекватность. Уравнение должно удовлетворять трем условиям ($\wp$ — обозначение плоскости):

$$M_1 \in \wp: \quad 2 \cdot 3 + 0 \cdot (-2) + 0 - 6 = 0 (!),$$

$$M_2 \in \wp: \quad 2 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + 4 - 6 = 0 (!),$$

$$\mathbf{a} \perp \wp: \quad 2 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot (-2) = 0 (!).$$

6. Записать в общем виде уравнение плоскости, проходящей через точку $M(3; 0; 2)$, параллельной вектору $\mathbf{a} = (2; 0; -2)$ и оси z .

Решение

Уравнение плоскости, проходящей через точку M :

$$A(x - 3) + By + C(z - 2) = 0. \quad (4.70)$$

Так как искомая плоскость параллельна векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{k} = (0; 0; 1)$ (базисный вектор, определяющий направление оси z), то нормаль $\mathbf{N} = (A; B; C)$ к плоскости будет ортогональна этим векторам. Условия ортогональности (равенство нулю суммы произведений координат) приводят к двум уравнениям для определения коэффициентов искомого уравнения:

$$\begin{cases} 2 \cdot A + 0 \cdot B + (-2) \cdot C = 0; \\ 0 \cdot A + 0 \cdot B + 1 \cdot C = 0. \end{cases} \quad (4.71)$$

Этой системе удовлетворяют решения $A = C = 0$, $B \in \mathbb{R}$.

Подставляя значения коэффициентов в уравнение (4.70) после сокращения на $B \neq 0$, получим искомое уравнение:

$$y = 0.$$

Это уравнение, представляющее координатную плоскость, удовлетворяет трем условиям задачи. При проверке надо иметь в виду, что $A = C = 0$.

7. Записать в общем виде уравнение плоскости, проходящей через три точки: $M_0(1; 0; -2)$, $M_1(2; 1; 3)$ и $M_0(1; -1; 0)$.

Решение

Вспользуемся уравнением:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Подставим заданные координаты точек в уравнение:

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y - 0 & z + 2 \\ 2 - 1 & 1 - 0 & 3 + 2 \\ 1 - 1 & -1 - 0 & 0 + 2 \end{vmatrix} = 0, \implies \begin{vmatrix} x - 1 & y & z + 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Разложим определитель по элементам первой строки:

$$(x - 1) \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + (z + 2) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определители, скобки и приводя подобные, приходим к иско-
мому уравнению:

$$7x - 2y - z - 9 = 0.$$

Проверим правильность полученного уравнения, подставляя в него ко-
ординаты заданных точек:

$$M_1: 7 \cdot 1 - 2 \cdot 0 - 1 \cdot (-2) = 0 (!);$$

$$M_2: 7 \cdot 2 - 2 \cdot 1 - 1 \cdot 3 = 0 (!);$$

$$M_3: 7 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) - 1 \cdot 0 = 0 (!).$$

8. Записать в общем виде уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2; 1; -3)$ и параллельную плоскости $3x - y + 2z - 4 = 0$. Найти расстояние между плоскостями.

Решение

Запишем уравнение плоскости, проходящей через точку M :

$$A(x - 2) + B(y - 1) + C(z + 3) = 0. \quad (4.72)$$

Для определения коэффициентов уравнения используем условие парал-
лельности плоскостей (параллельны нормальные векторы):

$$\frac{A}{3} = \frac{B}{-1} = \frac{C}{2} = \lambda.$$

Число λ может быть любым, но отличным от нуля. Удобнее всего считать $\lambda = 1$. Тогда $A = 3$, $B = -1$, $C = 2$.

Подставляя эти значения в (4.73), раскрывая скобки и приводя подобные, получим:

$$3x - y + 2z - 2 = 0.$$

Для определения расстояния между плоскостями достаточно выбрать на одной из них произвольную точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и воспользоваться формулой:

$$d = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} |Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|.$$

Так как точка $M(2; 1; -3)$ принадлежит искомой плоскости, то требуемое расстояния можно найти, определив его как расстояние от M до заданной в условии задачи плоскости:

$$d = \frac{1}{\sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2}} |3 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot (-3) - 4| = \frac{5}{\sqrt{14}}.$$

9. Записать в общем виде уравнение плоскости, проходящей через точку $M(0; -1; 3)$ и перпендикулярную плоскостям $x - 2y + 3z - 1 = 0$ и $2x - y + 3z + 2 = 0$.

Решение

Уравнение плоскости, проходящей через точку M :

$$Ax + B(y + 1) + C(z - 3) = 0. \quad (4.73)$$

Для определения коэффициентов уравнения используем условия перпендикулярности плоскостей (перпендикулярны нормальные векторы):

$$\begin{cases} A - 2B + 3C = 0; \\ 2A - B + 3C = 0. \end{cases} \quad (4.74)$$

Решение системы позволяет выразить два коэффициента через третий: $A = -B$, $C = B$. Подставляя эти значения в уравнение (4.73), после преобразования получим:

$$x - y - z + 2 = 0.$$

Проверка:

$$\begin{aligned} M: & 0 + 1 - 3 + 2 = 0 (!); \\ \rho \perp \rho_1: & 1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-2) + (-1) \cdot 3 = 0 (!); \\ \rho \perp \rho_2: & 1 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) + (-1) \cdot 3 = 0 (!); \end{aligned}$$

10. Найти угол между плоскостями

$$3x - 2y + z + 5 = 0 \quad \text{и} \quad x + 2y - 3z - 1 = 0.$$

Р е ш е н и е

Угол между плоскостями равен углу между нормальными $N_1 = (3; -2; 1)$ и $N_2 = (1; 2; -3)$. Найдем косинус угла между векторами:

$$\cos \theta = \frac{3 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 + 1 \cdot (-3)}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + 1^2} \sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2}} = -\frac{4}{15}.$$

$$\text{Отсюда } \theta = \arccos \left(-\frac{4}{15} \right).$$

Задачи для самостоятельного решения

К разделу 4.2.

Задана своими координатами в декартовой ортогональной системе координат точка $A(1; 2; -3)$ и вектор в связанном с координатами ортонормированном базисе $\mathbf{a} = (3; 3; 1)$.

1. Записать в общем виде уравнение плоскости φ , проходящей через точку A и перпендикулярной вектору $\mathbf{a}$.

2. Найти отрезки, отсекаемые плоскостью на осях координат.

3. Определить косинусы углов между нормалью к плоскости и осями координат.

Записать уравнение плоскости, проходящей:

4. через след пересечения φ с координатной плоскостью xu и параллельной оси z .

5. через точку пересечения φ с осью y и перпендикулярной этой оси.

К разделу 4.3.

6. Найти косинус угла между плоскостями $2x + 3y - z + 3 = 0$ и $x - y + z - 1 = 0$.

7. Записать уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2; -1; 3)$ и параллельной плоскости $2x - y + 3z - 2 = 0$.

8. Записать уравнение плоскости, проходящей через точку $M(3; 0; -1)$ и перпендикулярной плоскостям $3x - y + 2z - 1 = 0$ и $x + y - 3z + 3 = 0$.

9. Записать уравнение плоскости, проходящей через три точки: $M_1(-1; 1; 0)$; $M_2(1; 2; -3)$; $M_3(-1; 3; 1)$.

К разделу 4.4.

10. Дана плоскость $\varphi: 2x + 3y - 6z + 14 = 0$. Найти расстояние от φ :
а) до точки $A(3; -21; 1)$; б) до начала координат.

4.15 Упражнения к разделам 4.5 – 4.6

Т Е М А 9

Прямая и плоскость

Семинарское занятие

Вопросы

1. Запишите уравнение прямой в $\mathbb{R}_3$ в векторном виде.
2. Получите уравнения прямой в $\mathbb{R}_3$ в параметрическом и в каноническом видах.
3. Запишите уравнение прямой в $\mathbb{R}_3$, проходящей через заданную точку.
4. Что определяет параметр t в записанных в параметрическом виде уравнениях прямой?
5. Как найти угол между прямыми в пространстве?
6. Запишите условия параллельности и ортогональности прямых в $\mathbb{R}_3$.
7. Как найти угол между прямой и плоскостью?
8. Запишите условия параллельности и ортогональности прямой и плоскости.

Задачи

1. Прямая проходит через две точки $M_1(1; -2; -1)$ и $M_2(4; -2; 3)$. Записать ее канонические и параметрические уравнения. Определить направляющие косинусы прямой.

Р е ш е н и е

Для составления искомых уравнений воспользуемся уравнениями прямой, проходящей через две точки:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}.$$

Подставляя в них координаты заданных точек, получим:

$$\frac{x - 1}{4 - 1} = \frac{y + 2}{-2 + 2} = \frac{z + 1}{3 + 1},$$

или

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{0} = \frac{z+1}{4}. \quad (4.75)$$

В знаменателях этих представленных в каноническом виде уравнений стоят координаты вектора, сонаправленного прямой: $s = (3; 0; 4)$.

Направляющие косинусы прямой совпадают с направляющими косинусами вектора s , которые равны координатам единичного вектора:

$$n = \frac{s}{s} = \frac{(3; 0; 4)}{\sqrt{3^2 + 0^2 + 4^2}} = (0,6; 0; 0,8).$$

Отсюда следует:

$$\cos \alpha = 0,6; \quad \cos \beta = 0; \quad \cos \gamma = 0,8.$$

Обозначая равенства (4.75) через t , и выражая из них переменные в явном виде, придем к уравнениям прямой в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = 1 + 3t, \\ y = -2; \\ z = -1 + 4t. \end{cases}$$

2. Найти косинус угла между прямыми

$$\frac{x-1}{12} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{-4} \quad \text{и} \quad \frac{x+3}{0} = \frac{y-2}{-8} = \frac{z+4}{6}.$$

Решение

Знаменатели уравнений представляют собой направляющие векторы прямых $s_1 = (12; 3; -4)$ и $s_2 = (0; -8; 6)$.

По формуле $\cos \theta = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$ находим:

$$\cos \theta = \frac{12 \cdot 0 + 3 \cdot (-8) - 4 \cdot 6}{\sqrt{12^2 + 3^2 + (-4)^2} \sqrt{0^2 + (-8)^2 + 6^2}} = \frac{-24}{13 \cdot 10} = -\frac{12}{65}.$$

3. Доказать, что прямые $\frac{x-1}{12} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{-4}$ и $\frac{x+3}{0} = \frac{y-2}{-8} = \frac{z+4}{6}$ ортогональны.

Решение

Повторяем действия предыдущей задачи:

$$\cos \theta = \frac{12 \cdot 0 + 3 \cdot 8 - 4 \cdot 6}{\sqrt{12^2 + 3^2 + (-4)^2} \sqrt{0^2 + (-8)^2 + 6^2}} = \frac{0}{13 \cdot 10} = 0.$$

Равенство нулю косинуса угла говорит об ортогональности прямых.

4. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $A(2; -2; 3)$ и перпендикулярной двум прямым:

$$\begin{cases} x = 4 + 3t, \\ y = 1 + 2t, \\ z = 2 - 3t; \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = 5 + t, \\ y = -3 + 2t, \\ z = -t. \end{cases}$$

Решение

Запишем уравнение прямой, проходящей через точку A :

$$\frac{x-2}{m} = \frac{y+2}{n} = \frac{z-3}{p}.$$

Вектор $s = (m; n; p)$, определяющий направление прямой, должен быть перпендикулярен одновременно двум векторам, сонаправленным заданным прямым: $s_1 = (3; 2; -3)$ и $s_2 = (1; 2; -1)$. Запишем условия перпендикулярности:

$$\begin{cases} 3m + 2n - 3p = 0, \\ m + 2n - p = 0. \end{cases}$$

Два уравнения с тремя неизвестными позволяют выразить любые две неизвестные через третью: $m = p$; $n = 0$. Подставим полученные значения в ранее записанное уравнение прямой, проходящей через точку A :

$$\frac{x-2}{p} = \frac{y+2}{0} = \frac{z-3}{p}.$$

Все части равенств можно умножить на p .

Перепишем полученные уравнения прямой в параметрическом виде

$$\begin{cases} x = 2 + t; \\ y = -2; \\ z = 3 + t. \end{cases}$$

Для проверки правильности решения следует убедиться в том, что полученное уравнение удовлетворяет условиям задачи.

5. Найти координаты точки пересечения прямой

$$\begin{cases} x = 2 + 3t; \\ y = -2t; \\ z = t \end{cases}$$

с плоскостью $3x + y - 2z - 1 = 0$ и угол между ними.

Решение

Для определения параметра $t = t_*$, соответствующего точке пересечения прямой и плоскости, подставим переменные, определяемые параметрическими уравнениями прямой, в уравнение плоскости. Из полученного уравнения с одним неизвестным — параметром t — определяем этот параметр:

$$t_* = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Am + Bn + Cp} = -\frac{3 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + (-2) \cdot 0 - 1}{3 \cdot 3 + 1 \cdot (-2) + (-2) \cdot 1} = -1.$$

Подставляя это значение параметра t в уравнение прямой, получаем искомые координаты точки пересечения:

$$\begin{cases} x_* = 2 + 3 \cdot (-1) = -1; \\ y_* = -2 \cdot (-1) = 2; \\ z_* = -1. \end{cases}$$

Таким образом координаты точки пересечения найдены: $M(-1; 2; -1)$.

Косинус угла между направляющим вектором прямой $s = (3; -2; 1)$ и нормальным к плоскости вектором $N = (3; 1; -2)$ равен синусу угла между прямой и плоскостью. Поэтому

$$\sin \theta = \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}} = \frac{3 \cdot 3 + 1 \cdot (-2) - 2 \cdot 1}{\sqrt{3^2 + 1^2 + (-2)^2} \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{5}{14}.$$

$$\text{Отсюда } \theta = \arcsin \frac{5}{14}.$$

Значение параметра $t_* = -1$ говорит о том, что точку $A(x_0; y_0; z_0) = A(2; 0; 0)$, через которую проходит прямая, и точку $M(-1; 2; -1)$ пересечения прямой и плоскости соединяет вектор $t_* s = (-1) \cdot (3; -2; 1) = (-3; 2; -1)$. Этот вектор (если он найден правильно) должен совпадать с вектором $\overrightarrow{AM} = (-1 - 2; 2 - 0; -1 - 0) = (-3; 2; -1)$. Что и подтверждается.

6. Найти проекцию точки $M_0(5; 3; 1)$ на плоскость $3y + 4z + 12 = 0$ и координаты точки, симметричной точке M_0 относительно плоскости.

Решим задачу следующим образом. Сначала проведем прямую (составим уравнения прямой), проходящую через точку M_0 и перпендикулярную плоскости. Затем найдем параметр t_1 , соответствующий расстоянию от точки M_0 до плоскости. По этому параметру найдем координаты точки

M_1 пересечения прямой и плоскости — это и будет проекция точки на плоскость. Удваивая параметр t_1 , по нему найдем координаты точки M_2 , расположенной от точки M_0 на расстоянии, в два раза превышающем расстояние до плоскости. Это и будет точка, симметричная M_0 .

Решение

Составим уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0) = M_0(5; 3; 1)$ и перпендикулярной плоскости ($N = (A; B; C) = (0; 3; 4) = (m; n; p) = s$):

$$\begin{cases} x = 5; \\ y = 3 + 3t; \\ z = 1 + 4t. \end{cases}$$

Находим параметр $t = t_1$, соответствующий точке пересечения прямой и плоскости:

$$t_1 = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Am + Bn + Cp} = -\frac{0 \cdot 5 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 1 + 12}{0 \cdot 0 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4} = -1.$$

Подставляя значения этого параметра в уравнения прямой, определим координаты точки M_1 — проекции точки M_0 на плоскость:

$$\begin{cases} x_1 = 5; \\ y_1 = 3 + 3 \cdot (-1) = 0; \\ z_1 = 1 + 4 \cdot (-1) = -3. \end{cases}$$

Таким образом $Pr_P M_0 = M_1(5; 0; -3)$.

Удвоим параметр t : $t_2 = 2t_1 = -2$ и по уравнениям прямой найдем соответствующие ему координаты точки M_2 , симметричной M_0 относительно плоскости:

$$\begin{cases} x_2 = 5; \\ y_2 = 3 + 3 \cdot (-2) = -3; \\ z_2 = 1 + 4 \cdot (-2) = -7. \end{cases}$$

Таким образом $M_2(5; -3; -7)$.

Для проверки правильности определения координат точки найдем векторы $\overline{M_0 M_2} = (5 - 5; -3 - 3; -7 - 1) = (0; -6; -8)$ и $-t_2 s = -2(0; 3; 4) = (0; -6; -8)$. Векторы равны.

7. Записать параметрическое уравнение прямой, заданной в виде пары пересекающихся плоскостей:

$$\begin{cases} 3x - y + 2z - 4 = 0; \\ -x + y - z - 2 = 0. \end{cases}$$

Р е ш е н и е

Выберем на линии пересечения плоскостей произвольную точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$. Для этого достаточно пересечь пару плоскостей третьей, непараллельной им плоскостью, например, плоскостью $x = x_0$. В качестве x_0 может быть выбрано любое число, в том числе нуль (во многих случаях нуль оказывается наиболее удобным числом). Оставшиеся две координаты точки M_0 определятся из решения двух уравнений плоскостей, в которых после задания одной координаты (x_0) останутся неизвестными две координаты y_0 и z_0 .

Итак, пусть $x = x_0 = 0$. Тогда уравнения плоскостей преобразуются к виду:

$$\begin{cases} -y_0 + 2z_0 - 4 = 0; \\ y_0 - z_0 - 2 = 0. \end{cases}$$

Решая эти уравнения, получим: $y_0 = 8$, $z_0 = 6$. Таким образом на линии пересечения плоскостей задана точка $M_0(0; 8; 6)$.

Аналогично можно получить координаты еще одной точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ на линии пересечения плоскостей. Пусть, например, $z_1 = 0$. Перепишем уравнения двух плоскостей с учетом этого предположения:

$$\begin{cases} 3x_1 - y_1 - 4 = 0; \\ -x_1 + y_1 - 2 = 0. \end{cases}$$

Решая систему уравнений найдем: $x_1 = 3$, $y_1 = 5$. Таким образом задана вторая точка на линии пересечения плоскостей: $M_1(3; 5; 0)$.

В качестве направляющего вектора $s = (m; n; p)$ искомой прямой выберем вектор, соосный $\overline{M_0M_1} = (3-0; 5-8; 0-6) = (3; -3; -6) = 3(1; -1; -2)$.

Пусть $s = \frac{1}{3}\overline{M_0M_1} = (1; -1; -2)$.

Для записи искомых уравнений воспользуемся параметрическими уравнениями прямой, проходящей через точку M_0 и имеющей направление вектора s :

$$\begin{cases} x = t; \\ y = 8 - t; \\ z = 6 - 2t. \end{cases}$$

Каноническая форма уравнений:

$$\frac{x}{1} = \frac{y-8}{-1} = \frac{z-6}{-2}.$$

Эти уравнения прямой l удовлетворяют трем условиям сформулированной задачи:

$$\begin{aligned} M_0 \in l: \quad \frac{0}{1} &= \frac{8-8}{-1} = \frac{6-6}{-2} (!), \\ l \perp N_0: \quad 1 \cdot 3 + (-1) \cdot (-1) + (-2) \cdot 2 &= 0 (!), \\ l \perp N_1: \quad 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 + (-2) \cdot (-1) &= 0 (!). \end{aligned}$$

Замечание. Вместо определения координат второй точки для записи уравнения прямой можно было определить вектор s из условия его ортогональности векторам нормалей двух плоскостей (условие использовано при проверке правильности решения задачи).

8. Найти расстояние от точки $M(3; 1; -5)$ до прямой

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-3}{-1}.$$

Р е ш е н и е

Проведем через точку M плоскость, ортогональную заданной прямой. Вектор нормали к этой плоскости $N = (A; B; C)$ приравняем вектору $s = (m; n; p) = (2; 3; -1)$, определяющему направление прямой. Уравнение этой плоскости:

$$2(x-3) + 3(y-1) - (z+5) = 0, \quad \text{или} \quad 2x + 3y - z - 14 = 0.$$

Найдем параметр t_* , определяющих количество векторов s , укладываемых в расстояние от точки $A(x_0; y_0; z_0) = A(1; -2; 3)$, находящейся на прямой, до плоскости:

$$t_* = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Am + Bn + Cp} = -\frac{2 \cdot 1 + 2 \cdot 3 - 1 \cdot 3 - 14}{2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + (-1) \cdot (-1)} = -\frac{-21}{14} = 1,5.$$

По найденному параметру из уравнений прямой, представленных в параметрическом виде, находим координаты точки M_* пересечения прямой и плоскости:

$$\begin{cases} x_* = 1 + 2t_* = 1 + 2 \cdot 1,5 = 4; \\ y_* = -2 + 3t_* = -2 + 3 \cdot 1,5 = 2,5; \\ z_* = 3 - t_* = 3 - 1,5 = 1,5. \end{cases}$$

Таким образом координаты точки пересечения найдены: $M_*(4; 2,5; 1,5)$.

Определим вектор $\overline{MM_*} = (4-3; 2,5-1; 1,5+5) = (1; 1,5; 6,5)$. Модуль этого вектора является расстоянием от точки M до заданной прямой:

$$d = |\overline{MM_*}| = \sqrt{1^2 + (1,5)^2 + (6,5)^2} = \sqrt{45,5}.$$

Задачи для самостоятельного решения

К разделам 4.5 – 4.6.

1. Записать в каноническом и параметрическом видах уравнения прямой, проходящей через точку $A(1; -1; 2)$ и:

а) точку $B(0; -3; 1)$;

б) параллельной прямой ℓ : $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+3}{0}$;

в) перпендикулярной плоскости $\wp$: $2x - y + 3z - 1 = 0$.

Найти:

г) синус угла между ℓ и $\wp$;

д) координаты точки M пересечения ℓ и $\wp$;

е) координаты точки M_* , симметричной A относительно точки M .

2. Заданы координаты вершин треугольника $A(1; 2; -1)$, $B(1; 0; 3)$, $C(3; 2; -1)$. Записать уравнения прямых, выходящих из точки A :

а) медианы;

б) параллельной BC ;

в) перпендикулярной плоскости треугольника ABC .

3. Заданы уравнения двух плоскостей:

$$\wp_1 : 2x - 3y + z + 2 = 0 \quad \text{и} \quad \wp_2 : -x + y - z = 0.$$

Составить уравнения прямых, проходящих через точку $M(3; -2; 0)$ и:

а) параллельную плоскостям $\wp_1$ и $\wp_2$;

в) перпендикулярную плоскости $\wp_1$.

4. Найти координаты точки M_* , являющейся проекцией M предыдущей задачи на плоскость $\wp_1$.

5. Составить уравнение прямой, являющейся геометрическим местом точек пересечения плоскостей $\wp_1$ и $\wp_2$ задачи 3.

4.16 Упражнения к разделам 4.8 – 4.9

Т Е М А 10

Кривые второго порядка

Семинарское занятие

Вопросы

1. Как осуществляется преобразование переноса осей координат на плоскости? Запишите формулы связи старых и новых координат.
2. Как осуществляется преобразование поворота осей координат на плоскости? Запишите формулы связи старых и новых координат.
3. Запишите общее уравнение кривых второго порядка на плоскости.
4. По какой формуле и как по значениям коэффициентов общего уравнения кривой второго порядка определить вид кривой?
5. Перечислите все возможные виды кривых второго порядка на плоскости. Запишите их канонические уравнения.
6. Изобразите эллипс. Поясните на рисунке значения параметров, определяющих эллипс.
7. Изобразите гиперболу. Поясните на рисунке значения параметров и характеристик, определяющих гиперболу.
8. Что определяет эксцентриситет в уравнениях кривых второго порядка? В каких пределах он изменяется для эллипса и гиперболы?
9. Изобразите параболу. Поясните на рисунке значения параметров, определяющих параболу.
10. В чем состоит оптическое свойство параболы?

Задачи

Заданные уравнения второго порядка привести к каноническому виду. Определить характеристики кривых (эксцентриситет, полуоси, асимптоты, координаты фокусов и вершин, уравнение директрисы, ...).

$$1. 4x^2 + y^2 + 16x - 2y + 1 = 0.$$

Решение

Сравнивая заданное уравнение с общим уравнением кривой второго порядка $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, определяем входящие в определитель $\Delta = AC - B^2$ коэффициенты: $A = 4$, $B = 0$, $C = 1$.

Значение определителя заданной кривой $\Delta = 4 \cdot 1 - 0^2 = 4 > 0$ говорит о том, что уравнение описывает эллипс.

Приведем уравнение к каноническому виду. Для этого сгруппируем слагаемые с одинаковыми переменными и выделим в них полные квадраты суммы или разности:

$$4(x^2 + 4x + 4) - 16 + (y^2 - 2y + 1) - 1 + 1 = 0.$$

Следует обратить внимание на следующее. Множитель, стоящий при квадрате переменной, выносится за скобку трехчлена; добавленное в скобках слагаемое, умноженное на вынесенный за скобку коэффициент, вычитается из уравнения.

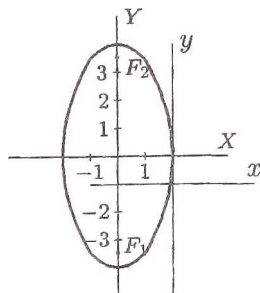
Свернем выражения в скобках и перенесем свободный член в правую часть уравнения:

$$4(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 16.$$

Поделив на 16, получим каноническое уравнение эллипса, центр которого находится в точке $O(x_0; y_0) = O(-2; 1)$:

$$\frac{(x + 2)^2}{4} + \frac{(y - 1)^2}{16} = 1.$$

Введем новые координаты $X = x + 2$, $Y = y - 1$, получаемые параллельным переносом исходной системы координат. Так что начало координат исходной системы $O(0; 0)$ в новой системе XY имеет координаты $O(2; -1)$.



В новых координатах, являющихся собственными координатами эллипса, уравнение имеет вид

$$\frac{X^2}{4} + \frac{Y^2}{16} = 1.$$

Сравнивая это уравнение с уравнением $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$, получаем значения полуосей эллипса: $a = 2$; $b = 4$. Полуось b — большая; a — малая.

Расстояние между фокусами эллипса $2c$, где

$$c = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{16 - 4} = 2\sqrt{3}.$$

Эксцентриситет: $e = \frac{c}{b} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$.

Координаты фокусов: $F_1(0; -c) = F_1(0; -2\sqrt{3})$; $F_2(0; c) = F_2(0; 2\sqrt{3})$.

Координаты вершин $(\pm a; 0)$ и $(0; \pm b)$:

$$(\pm 2; 0) \quad \text{и} \quad (0; \pm 4).$$

$$2. \quad 3x^2 - 12x - 18y - 42 = 0.$$

Решение

По коэффициентам этого уравнения: $A = 3$, $B = C = 0$ находим $\Delta = AC - B^2 = 3 \cdot 0 - 0^2 = 0$. Равенство нулю определителя указывает на то, что уравнение описывает параболу.

Сгруппируем слагаемые при переменной x с целью выделения квадрата разности:

$$3(x^2 - 4x + 4) - 16 - 18y - 42 = 0.$$

Преобразуем уравнение:

$$3(x - 2)^2 = 18(y + 3).$$

Поделив на 3 обе части уравнения, приходим к каноническому уравнению параболы:

$$(x - 2)^2 = 6(y + 3).$$

Осуществим параллельный перенос осей координат:

$$X = x - 2; \quad Y = y + 3$$

и приведем уравнение к виду ($X^2 = 2pY$):

$$X^2 = 6Y.$$

Отсюда, $p = 3$.

Парабола симметрична относительно оси Y (переменная X в квадрате). Уравнение ее директрисы ($Y = -\frac{p}{2}$):

$$Y = -1,5.$$

Фокус: $F(0; p/2) = F(0; 1,5)$.

$$3. \ 2xy = 1.$$

Р е ш е н и е

В этом уравнении $A = C = 0$, $2B = 2$, $B = 1$. Определитель $\Delta = AC - B^2 = 0 \cdot 0 - 1^2 = -1 < 0$. Отрицательное значение определителя характерно для гиперболы.

Исходное уравнение содержит произведение переменных. Чтобы избавиться от произведения, необходимо осуществить поворот координат на угол α , определяемый из соотношения:

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{A - C}{2B} = \frac{0 - 0}{2} = 0.$$

$$\text{Отсюда } 2\alpha = \pm \frac{\pi}{2}, \implies \alpha = \pm \frac{\pi}{4}.$$

Для определенности выбираем положительное значение α . Для него $\sin \alpha = \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin 2\alpha = 1$.

Для определения новых коэффициентов уравнения используем формулы:

$$\tilde{A} = A \cos^2 \alpha + B \sin 2\alpha + C \cos^2 \alpha = 1,$$

$$\tilde{C} = A \sin^2 \alpha - B \sin 2\alpha + C \sin^2 \alpha = 1,$$

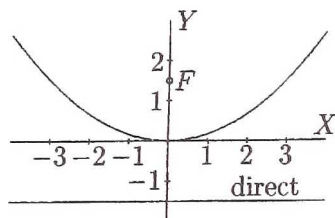
$$\tilde{D} = D \cos \alpha + E \sin \alpha = 0; \quad \tilde{E} = E \cos \alpha - D \sin \alpha = 0.$$

Подставляя эти значения в уравнение кривой, полученное после поворота системы координат ($\tilde{D} = 0$):

$$\tilde{A}X^2 + \tilde{C}Y^2 + \tilde{D}X + \tilde{E}Y + \tilde{F} = 0,$$

получим:

$$X^2 - Y^2 = 1.$$



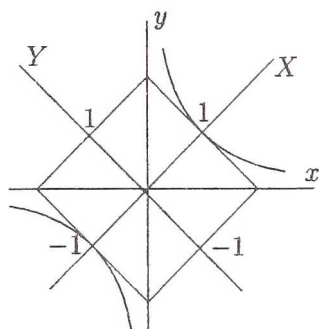
Это каноническое уравнение гиперболы, из которого определяем параметры:

$$a = b = 1; \quad c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2};$$

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{2} > 1.$$

Уравнение асимптот:

$$Y = \pm \frac{b}{a}X, \quad \Rightarrow \quad Y = \pm X.$$



Координаты вершин: $(\pm 1; 0)$.

4. Записать каноническое уравнение кривой второго порядка, если известны координаты двух ее точек $M_1(\sqrt{5}; 4/3)$ и $M_2(3/2; \sqrt{3})$ в собственной системе координат.

Решение

Предварительно установим, какой кривой принадлежат точки. Для этого сравним заданные координаты точек:

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{5}; & y_1 &= 4/3; \\ x_2 &= 1,5; & y_2 &= \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Так как большему значению координаты x ($x_2 > x_1$) соответствует меньшее значение координаты y ($y_2 < y_1$), то искомая функция убывающая в первой координатной четверти. Из трех существующих кривых второго порядка этим свойством обладает только эллипс. Поэтому параметры кривой (a и b) входят в уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Введя обозначения $A = \frac{1}{a^2}$, $B = \frac{1}{b^2}$, после подстановки координат точек в уравнение эллипса приходим к системе двух линейных уравнений:

$$\begin{cases} A(\sqrt{5})^2 + B\left(\frac{4}{3}\right)^2 = 1, \\ A\left(\frac{3}{2}\right)^2 + B(\sqrt{3})^2 = 1, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 45A + 16B = 9, \\ 9A + 12B = 4. \end{cases}$$

Решая систему, получим: $A = \frac{1}{4}$; $B = \frac{1}{9}$.

Уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

5. Записать в собственной системе координат каноническое уравнение кривой второго порядка, если известно, что ее эксцентриситет $e = 0,8$, расстояние между фокусами $2c = 16$.

Р е ш е н и е

Эксцентриситет $e < 1$ указывает на то, что кривая — эллипс. Его каноническое уравнение в собственной системе координат:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Предположим, что a — большая полуось эллипса. Тогда для определения параметров эллипса имеем два соотношения:

$$e = \frac{c}{a} \quad \text{и} \quad c = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Из первой формулы определяем ($c=8$)

$$a = \frac{c}{e} = \frac{8}{0,8} = 10,$$

из второй:

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6.$$

Подставляя найденные параметры в каноническое уравнение, записываем его в виде

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1.$$

6. Записать в собственной системе координат каноническое уравнение кривой второго порядка, модуль разности расстояний от каждой точки которой до двух фиксированных точек равен 6. Кроме того известно, что кривая проходит через точку $M(6; 2\sqrt{3})$. Определить параметры кривой.

Р е ш е н и е

По определению эта кривая — гипербола. Предполагая, что x — ее действительная ось; y — мнимая, запишем каноническое уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

4.17 Варианты контрольных работ по векторам и аналитической геометрии

БИЛЕТ ПО ТЕОРИИ

1. Отметьте, какие из записанных ниже выражений относятся к линейным операциям над векторами ($\mathbf{a}, \mathbf{b}$ – векторы, λ – скаляр).

1. $\mathbf{a} + \mathbf{b}$;
4. $\mathbf{a} = |\mathbf{a}|$;

2. $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$;
5. $\mathbf{a} - \mathbf{b}$.

3. $\mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}$;

2. Расставьте номера ответов (правая колонка) в порядке следования номеров вопросов (левая колонка). В местах отсутствия соответствия поставьте цифру 5.

1. Модуль вектора

1. $a \cos \alpha$

2. Координата вектора

2. $\sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$

3. Скалярное произведение

3. $(x_A + \lambda x_B)/(1 + \lambda)$

4. Деление отрезка в отношении $\lambda:1$

4. $a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$

3. Расставьте номера ответов (правая колонка) в порядке следования номеров вопросов (левая колонка) относительно уравнений плоскости. В местах отсутствия соответствия поставьте цифру 5.

1. Перпендикулярна оси z

1. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

2. В векторном виде

2. $x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0$

3. В нормальном виде

3. $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$

4. Проходящей через точку

4. $Ax + By + C = 0$

4. Расставьте номера ответов (правая колонка) в порядке следования номеров вопросов (левая колонка). В местах отсутствия соответствия поставьте цифру 5.

1. Условие параллельности прямой и плоскости

1. $\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$

2. Условие перпендикулярности прямой и плоскости

2. $Am + Bn + Cp = 0$

3. Синус угла между прямой и плоскостью

3. $\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Am + Bn + Cp}$

4. Параметр t^* , соответствующий точке пересечения прямой и плоскости

4. $\frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$

5. Расставьте номера ответов (правая колонка) в порядке следования номеров вопросов (левая колонка). В местах отсутствия соответствия поставьте цифру 5.

- | | |
|--|---------------|
| 1. Сумма расстояний от точек до фокусов постоянна | 1. Эллипс |
| 2. Модуль разности расстояний от точек до фокусов постоянна | 2. Гипербола |
| 3. Фокусы совпадают | 3. Парабола |
| 4. Расстояние от точек до фокуса равны расстояниям до директрисы | 4. Окружность |

БИЛЕТ ПО ПРАКТИКЕ

1. Найти скалярное произведение $((2a - b), (a + 2b))$, если $a = 1$, $b = 2$, $(\hat{a}, \hat{b}) = \pi/3$.
2. Найти m , если известно, что векторы $a = (m; -4m; -1)$ и $b = (m; -2; 9)$ ортогональны.
3. Записать уравнение плоскости, перпендикулярной плоскости $\frac{x}{3} + \frac{y}{-4} + \frac{z}{2} = 1$ и параллельной прямой $\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{4} = \frac{z}{-1}$.
4. Найти проекцию точки $M(2; -1; 1)$ на плоскость $4x - 2y + z - 8 = 0$.
5. Записать уравнение кривой второго порядка, если известно, что ее эксцентриситет равен 0,6, а расстояние между фокусами равно 6.

4.18 Задание к расчетной работе гл.4

В обеих частях расчетной работы введены обозначения:

a – последняя цифра номера группы, в которой обучается студент;

$b = 1 + \frac{2}{n}$, где n – порядковый номер студента в списке группы (или две последние цифры номера студенческого билета).

Часть 1

Прямая и плоскость

В декартовой ортогональной системе координат заданы вершины тетраэдра: $A(a; b; \frac{a-b}{2})$, $B(3a; -1; 2)$, $C(-1; b; 0)$, $D(1; -2; a+b)$.

1. Записать уравнение плоскости φ , проходящей через точки A , B и C .
2. Найти отрезки, отсекаемые φ на осях координат и косинусы углов между нормалью к плоскости и осями координат.
3. Определить синус угла между прямой AD и φ , а также косинус угла между плоскостями φ и ADC .
4. Найти расстояние от точки D до точки A и до плоскости φ .
5. Провести через точку D прямую, перпендикулярную φ и найти координаты точки, симметричной D относительно φ .

Часть 2

Приведение уравнения второго порядка к каноническому виду

Привести уравнение кривой $ax^2 + bxy + (b - 2a)y^2 + 2x + 3y - 1 = 0$ к каноническому виду.

Во всех трех координатных системах найти параметры и координаты характерных точек кривой: вершин, фокусов, уравнения асимптот, эксцентриситет.

Записать параметрические уравнения кривой. Построить кривую с начальными, промежуточными и собственными координатами.

4.19 Ответы к упражнениям

Тема 1.

1: -2; 2: 5; 3: -44; 4: 0; 5: 1; 6: 57; 7: -191;
8: $abcd(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$.

Тема 2.

$$1: AB = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}; \quad BA = \begin{pmatrix} 3 & -8 & 11 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & -6 & 6 \end{pmatrix};$$

$$A + B^T = (A^T + B)^T = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$2: AB = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 10 & -6 \\ 0 & 6 & 5 \end{pmatrix}; \quad BA = \begin{pmatrix} 14 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix};$$

$$A + B^T = (A^T + B)^T = (A + B^T)^T = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 5 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$3: AB = (6); \quad BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$(A^T + B)^T = (A + B^T)^T = (2 \ 4 \ -2).$$

$$6: A^2 = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -3 \\ -6 & 4 & 9 \\ -6 & 7 & 5 \end{pmatrix}; \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -13 & -19 & -7 \\ -6 & -8 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тема 3.

1,2: $(x; y) = (1; -1)$ и $(x_1; x_2; x_3) = (1; -2; 0)$.

4: $(200; 200)$. 5: 2.

Тема 4.

1: Система несовместна. 2: $x_1 = -0,2 - 2,8x_2$, $x_3 = -0,8 - 2,2x_2$.

3: $(1; 2)$. 4: $\lambda = 4$, $x_1 = x_2 = 1$. 5: $(100; 200; 150)$.

Тема 5.

2: -10. 3: -17. 4: $2\sqrt{3}$. 5: $\pi/3$. 7: $(0; -2; 1)$. 8: $\frac{1}{3}(2; 7)$. 9: Да.

Тема 6.

- 1: $\overline{AB} = 2(1; -3; 1)$; $|\overline{AB}| = 2\sqrt{11}$. 2: $a + b = 5(1; 0; 1)$;
 $a - 2b = (-1; 3; 5)$. 3: $-1/\sqrt{6}$. 4: $\arccos\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{7}}\right)$. 5: $m = n = 2$.
 6: $m = 1$. 7: $\alpha = \pi/2$. 8: $a = 7$; $\cos \alpha = \frac{3}{7}$; $\cos \beta = \frac{6}{7}$; $\cos \gamma = \frac{2}{7}$.
 9: $M\left(\frac{10}{3}; \frac{5}{3}; \frac{4}{3}\right)$. 10: $C(1; 3; 3)$.

Тема 7.

- 1: а) $5x - 2y - 9 = 0$; $\theta = \arctg(2,5)$; $\alpha = \frac{5}{\sqrt{29}}$; $\beta = \frac{2}{\sqrt{29}}$.
 2: а) $3x - 2y + 8 = 0$; б) $3x - y + 7 = 0$. 3: $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{10}}$; $\tg \theta = -3$.
 4: а) $2x - y - 5 = 0$; б) $x + 2y - 5 = 0$.
 5: а) $3x + 4y + 1 = 0$; б) $D(-2; 4)$ (найти точку пересечения прямых $AD \parallel CB$ и $BD \parallel AC$); в) $E(2; 1)$, $\cos \alpha = \frac{23}{5\sqrt{26}}$; г) 2,2 и $2,2\sqrt{5}$.

Тема 8.

- 1: $3x + 3y + z - 6 = 0$. 2: $a = b = 2$; $c = 6$.
 3: $\cos \alpha = \cos \beta = \frac{3}{\sqrt{19}}$; $\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{19}}$. 4: $x + y - 2 = 0$. 5: $y = 2$.
 6: $\cos \theta = -\frac{2}{\sqrt{39}}$. 7: $2x - y + 3z - 14 = 0$. 8: $x + 11y + 4z + 1 = 0$.
 9: $7x - 2y + 4z + 9 = 0$. 10: $d_A = 1$; $d_0 = 2$.

Тема 9.

- 1: а) $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{1}$ и $\begin{cases} x = 1+t, \\ y = -1+2t, \\ z = 2+t; \end{cases}$
 б) $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{0}$; в) $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{3}$;
 г) $\sin \varphi = \frac{3}{84}$; д) $M\left(-\frac{5}{3}; -\frac{19}{3}; -\frac{2}{3}\right)$; е) $M_*\left(-\frac{13}{3}; -\frac{35}{3}; -\frac{10}{3}\right)$.
 2: а) $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{2}$; б) $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{-2}$;
 в) $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{1}$.
 3: а) $\frac{x-3}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{-1}$; б) $\frac{x-3}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z}{1}$
 4: $M_* = (1; 1; -1)$. 5: $\frac{x}{-2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{1}$.

Тема 10.

1: гипербола $\frac{(x+2)^2}{(9/2)^2} - \frac{(y-1)^2}{3^2} = 1.$

2: эллипс $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1; F_1(-3; 0); F_2(3; 0); e = \frac{\sqrt{5}}{5}.$

3: эллипс $\frac{(x+1)^2}{10^2} + \frac{y^2}{16} = 1; e = \frac{\sqrt{5}}{5}.$

4: гипербола $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$

5: парабола $y^2 = 12x$ или $x^2 = 12y.$

Библиографический список

1. Высшая математика для экономистов /Под редакцией Н.Ш.Крамера. — М., изд. "ЮНИТИ", 1997. 440 с.

Признанный учебник по математике для экономических специальностей вузов. Приведены примеры приложения математических методов и моделей в экономике. Подробный разбор задач отсутствует. Рекомендуются как дополнительное пособие для освоения программного курса математики и разделов, непонятых при чтении предлагаемого учебника.

2. Карасев А.И., Аксютин З.М., Савельева Т.И. Курс высшей математики для экономических вузов, т.1 — М., Высшая школа, 1982, — 320 с.

Учебник, считавшийся основным при изучении математики в период его издания. Изложение характерно стандартным подходом к изложению математики, не зависящим от направления подготовки специалистов. Приложениями к исследованию экономических задач не изобилует.

Рекомендуется как дополнительное пособие для освоения программного курса математики и разделов, непонятых при чтении предлагаемого учебника.

3. Г.Ф.Лаптев. Элементы векторного исчисления. — М., Наука, 1975, — 336 с.

Подробно, с доказательствами изложены основные положения векторного исчисления, в том числе, векторного анализа (не только векторной алгебры). Рекомендуются желающим глубже освоить векторное исчисление.

4. А.Н.Рублев. Курс линейной алгебры и аналитической геометрии. — М., Высшая школа, 1972, — 424 с.

Рекомендованный и широко используемый в классических университетах учебник. Изложение материала сопровождается строгими выводами формул и доказательствами теорем. Рекомендуются для углубления знаний по разделам, охватываемым указанной в заглавии тематикой.

5. А.С.Солодовников, В.А.Бабайцев, А.В.Браилов, И.Г.Шандра Математика в экономике, ч. 1. — М. Финансы и экономика, 2001, — 220 с.

Учебник четко ориентирован на нужды экономики. Первая часть содержит материалы по линейной алгебре и линейному программированию. Рекомендуется для получения дополнительных знаний и знакомства с новыми подходами к трактовке положений математики в приложении к задачам экономики.

6. Справочник по математике для экономистов /Под редакцией В.И.Ермакова. — М., Высшая школа, 1997, — 384 с.

Основные разделы математики, применяемые в современной экономической науке, представлены не только соответствующими формулами, представляющими эти разделы, но и описанием особенностей их применения, примерами применения, а порой и выводами. Справочник полезен для постоянного использования в практической работе по использованию математики для решения экономических задач.

7. Экономико-математические методы и прикладные модели /Под редакцией В.В.Феодосьева. — М., Высшая школа, 1999, 392 с.

С использованием современного подхода рассмотрены характерные математические модели экономических процессов, в том числе базирующиеся на использовании элементов линейной алгебры.

Полезен для углубления знаний по математическому моделированию в экономике.

8. Сборник задач по высшей математике для вузов /Под редакцией А.В.Ефимова и Б.П.Демидовича. — М., Наука, 1981, — 470 с.

Полезен для совершенствования навыков решения задач.

9. П.С.Моденов, А.С.Пархоменко. Сборник задач по аналитической геометрии. — М., Наука, 1976. — 384 с.

Полезен для совершенствования навыков решения задач.

Предметный указатель

Неравенство

Коши-Буняковского, 85

алгебраическое дополнение, 20

асимптоты

гиперболы, 155

базис, 90

левый, 94

ортонормированный, 93

правый, 94

вектор

арифметический, 98

арифметический, 92

геометрический, 83

вектора

компоненты, 91

координаты, 91

модуль, 84

проекция, 86

произведение на число, 84

составляющие, 87, 91

векторы

базисные, 90

линейная комбинация, 88

линейно зависимые, 88

линейно независимые, 88

сумма, 84

гиперплоскость, 128

директриса, 155

критерий

продуктивности, 34

матриц

произведение, 23

сумма, 22

матрица

диагональная, 16

единичная, 16

квадратная, 15

невыврожденная, 26

неособенная, 26

нулевая, 16

обратная, 26

определение, 15

положительная, 34

продуктивная, 34

прямоугольная, 15

расширенная, 60

симметричная, 17

союзная, 27

столбец, 15

строка, 15

транспонированная, 16

треугольная, 16

матрицы

главная диагональ, 15

подматрица, 17

ранг, 35

- метод
 - Гаусса-Жордана, 62
 - Крамера, 31
 - обратной матрицы, 30
- модель
 - Леонтьева, 33
- определиТЕЛЬ, 17
 - второго порядка, 17
 - первого порядка, 17
 - третьего порядка, 17
- определиТЕЛЯ
 - разложение, 21
- переменная
 - основная, 63
 - свободная, 63
- полуОСИ
 - гиперБОЛЫ, 154
 - ЭЛЛИПСА, 153
- ПРАВИЛО
 - треугоЛЬНИКА, 18
- ПРЕОБРАЗОВАНИЯ
 - элеМЕНТАРНЫЕ, 35
- РАДИУС-ВЕКТОР, 96
- РАСТОЯНИЕ
 - до ПЛОСКОСТИ, 134
 - до ПРЯМОЙ, 134
- РЕШЕНИЕ
 - ДОПУСТИМОЕ, 60
- СИМВОЛ КРОНЕКЕРА, 21
- СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ, 84
- ТЕОРЕМА
 - КРОНЕКЕРА-КАПЕЛЛИ, 63
- УРАВНЕНИЕ
 - гиперБОЛЫ, 149
 - ОДНОРОДНОЕ, 65
- ПАРАБОЛЫ, 149
- ПЛОСКОСТИ
 - в общем виде, 125
 - в отрезках, 126
 - нормальное, 135
- ПРЯМОЙ
 - в общем виде, 122
 - в отрезках, 122
 - векторное, 121, 135
 - каноническое, 136
 - параметрическое, 136
 - проходящей через две точки, 136
 - с угловым коэффициентом, 122
- ПУЧКА ПРЯМЫХ, 122
- ЭЛЛИПСА, 148
- ФОКУС
 - гиперБОЛЫ, 154
 - ПАРАБОЛЫ, 155
 - ЭЛЛИПСА, 153
- ЭКСЦЕНТРИСИТЕТ
 - гиперБОЛЫ, 155
 - ЭЛЛИПСА, 154