

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА»  
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

**О. Л. СТАРИНОВА, Е. И. ДАВЫДОВ, А. С. КУЧЕРОВ**

**СОВРЕМЕННАЯ ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ И СИСТЕМЫ  
ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА**

ЭЛЕКТРОННЫЙ КУРС ЛЕКЦИЙ

САМАРА  
2010

УДК 629.7.017.1 (075)

Составители: Ольга Леонардовна Старинова, Евгений Иванович Давыдов, Александр Степанович Кучеров

Электронный курс лекций предназначен для студентов, обучающихся в рамках магистерской программы «Проектирование и конструирование космических мониторинговых и транспортных систем» по направлению 160400.68 «Ракетные комплексы и космонавтика».

Разработано на кафедре летательных аппаратов СГАУ.

## Цели и задачи теории управления (ТУ)

Курс ТУ изучает общие принципы построения систем автоматического управления, методы анализа. Является составной частью кибернетики. Общая ТУ охватывает как живую, так и неживую природу.

### Принцип работы и особенности систем автоматического управления (САУ). САУ искусственного спутника

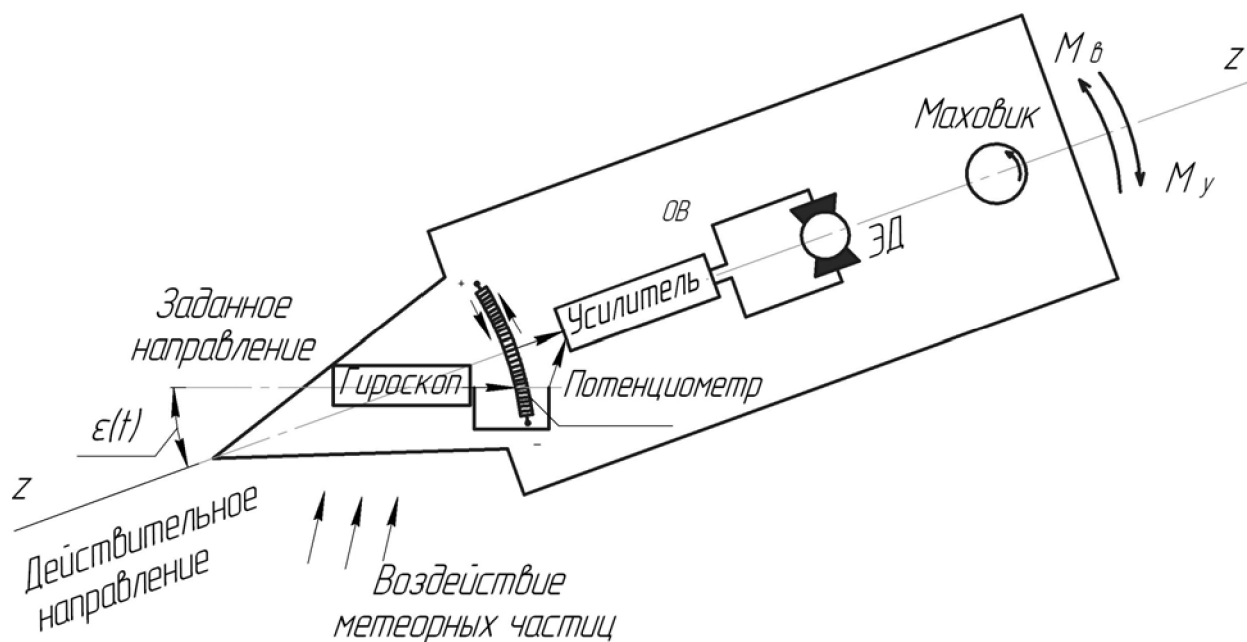


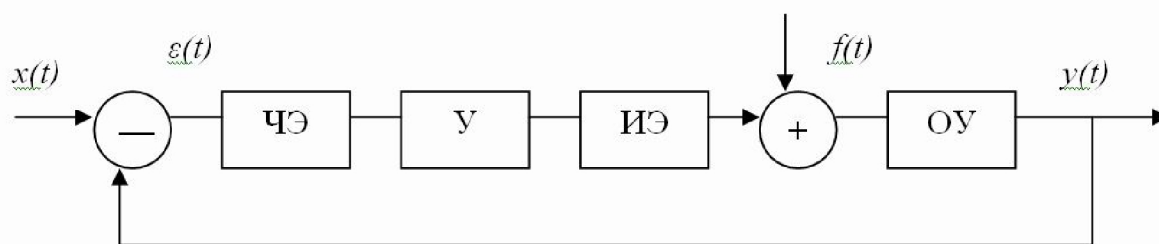
Рисунок 1 — Упрощенная схема искусственного спутника

$\epsilon(t)$  — ошибка рассогласования;  
ОВ — обмотка возбуждения;  
ЭД — электродвигатель постоянного тока.

Чувствительным элементом вместе с элементом сравнения является гироскоп с потенциометром. Движок потенциометра жестко связан с осью гироскопа, а потенциометр жестко связан с корпусом искусственного спутника Земли (ИСЗ). При отклонении ИСЗ от заданного направления движок потенциометра скользит по его корпусу, а на усилитель поступает напряжение сигнала рассогласования  $\epsilon(t)$ . Знак рассогласования зависит от направления отклонения ИСЗ от заданного.

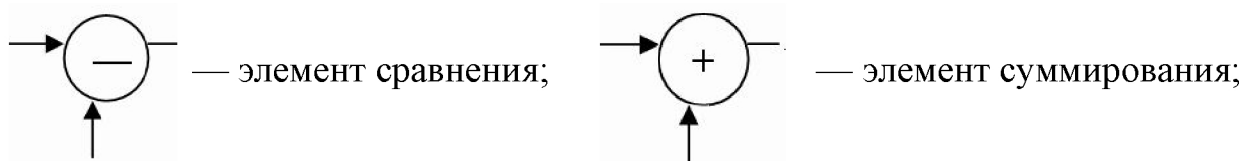
Пусть на ИСЗ действует внешнее воздействие метеорных частиц, под влиянием которых создается возмущающий момент  $M_b$ , тогда ось ИСЗ займет положение  $z - z$ . На входе усилителя (У) появляется напряжение рассогласования и усиливается. Исполнительным элементом является электродвигатель (ЭД) с маховиком, который создает реактивный управляющий момент  $M_y$ , который возвратит спутник в исходное положение.

Любую САУ можно представить в виде функциональной структурной схемы.



Главная отрицательная обратная связь

Рисунок 2 — структурная схема САУ



$x(t)$  — управляющее воздействие (заданное значение регулируемой величины);

$y(t)$  — реакция системы (действующее значение регулируемой величины);

$f(t)$  — возмущающее воздействие (порыв ветра, метеорные частицы);

$\varepsilon(t)$  — ошибка, сигнал рассогласования;

ЧЭ — чувствительный элемент;

У — усилитель;

ИЭ — исполнительный элемент;

ОУ — объект управления.

Кроме главной отрицательной обратной связи (ОС), могут быть местные ОС, которые охватывают одно или несколько звеньев. Для улучшения качественных характеристик системы они могут быть как положительными, так и отрицательными. Но главная обратная связь бывает только отрицательной. Все элементы, входящие в эту схему, являются функционально необходимыми, то есть без них не может работать система.

## Классификация САУ

Все САУ делят на три группы:

- 1) обыкновенные;
- 2) самонастраивающиеся;
- 3) игровые.

**Самонастраивающиеся системы** — это системы, в которых автоматически, заранее непредусмотренным образом изменяются параметры системы. По методу исследования САУ делят на:

- линейные;
- нелинейные;
- особые.

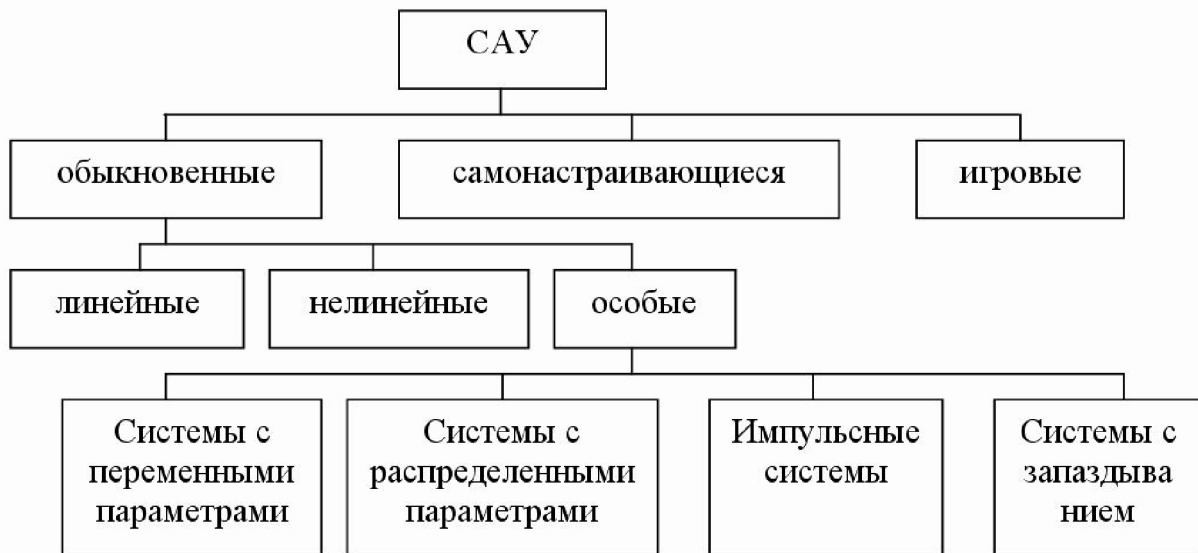


Рисунок 3 — Классификация САУ

**Линейные системы** — системы, поведение которых описывается линейными уравнениями.

**Нелинейные системы** — такие системы, в которых поведение хотя бы одного элемента описывается нелинейными уравнениями.

**Особые системы** — системы, поведение которых описывается уравнением с переменными коэффициентами.

**Системы с распределенными параметрами** — системы, которые описываются дифференциальными уравнениями в частных производных.

**Импульсные системы** — системы, реагирующие дискретно на поданный на ее вход сигнал.

**Системы с запаздыванием** — системы, имеющие в своем составе элемент с «чистым» запаздыванием.

САУ можно классифицировать по:

- физической природе регулируемой величины (система регулирования тока, числа оборотов, температуры и т. д.);
- физической природе основных элементов (электрические, гидравлические, механические системы и т. д.);
- точности системы в установившемся режиме: астатические и статические.

**Астатические системы** — это системы, у которых статическая ошибка не зависит от величины управляющего воздействия, в противном случае систему называют статической.

**Статическая ошибка** — это разность между заданным и действительным значением регулируемой величины.

Системы можно классифицировать по виду управляющего воздействия

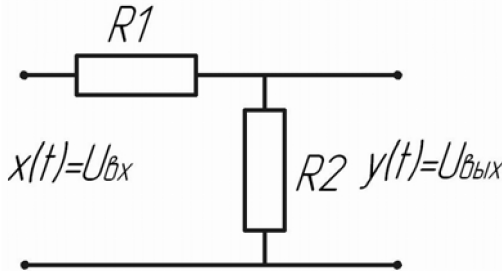
- системы стабилизации;
- следящие системы;
- программные системы;

**Системы стабилизации** – управляющее воздействие  $x(t) = \text{const}$  (например, стабилизация напряжения 220В).

**Программные системы** – когда управляющее воздействие заранее задано по определенному закону  $x(t) = \text{var}$  (например, станки с программным управлением).

**Следящие системы** – это автоматическое устройство для воспроизведения величины, меняющейся по определенному закону (например, слежение радиолокатора за целью).

САУ - динамические системы.



$$I = \frac{U_{вх}}{R_1 + R_2};$$

$$U_{вых} = I \cdot R_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot U_{вх} = K \cdot U_{вх};$$

$$K = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \text{ — статический коэффициент}$$

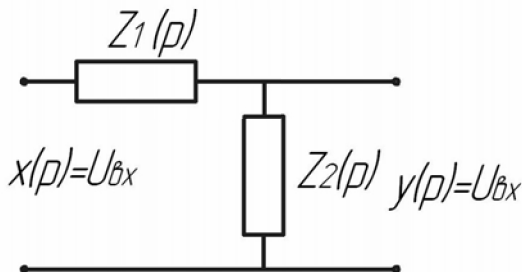
усиления

$$p = \frac{d}{dt};$$

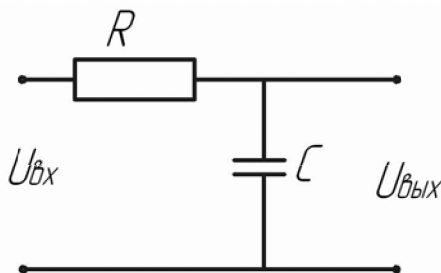
$z(p) = R$  — омическое сопротивление;

$z(p) = L \cdot p$  — индуктивное сопротивление;

$z(p) = \frac{1}{c \cdot p}$  — емкостное сопротивление;



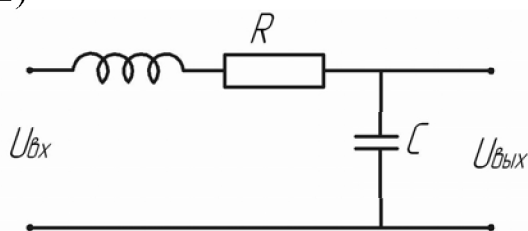
$$y(p) = U_{вых} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} U_{вх}$$



$$1) U_{вых} = \frac{\frac{1}{c \cdot p}}{R + \frac{1}{c \cdot p}} \cdot U_{вх} = \frac{1}{Rcp + 1} \cdot U_{вх};$$

$$Rc \frac{dy}{dt} + y(t) = x(t), \quad T = Rc \text{ — постоянная времени.}$$

2)

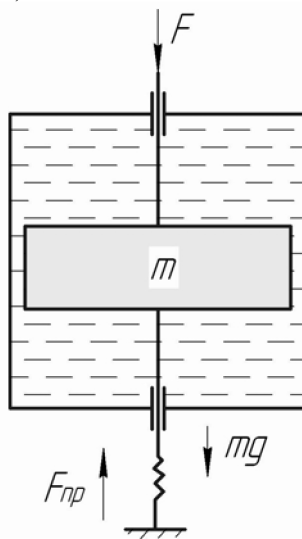


$$U_{вых} = \frac{\frac{1}{c \cdot p}}{L \cdot p + R + \frac{1}{c \cdot p}} \cdot U_{вх} = \frac{1}{Lcp^2 + Rcp + 1} \cdot U_{вх};$$

$$Lc \frac{d^2 y}{dt} + Rc \frac{dy}{dt} + y(t) = x(t);$$

$$(Lcp^2 + Rcp + 1) \cdot U_{\text{вых}} = U_{\text{вх}}; U_{\text{вых}} = y(t); U_{\text{вх}} = x(t).$$

3)



$$F = F_{\text{зудр. сопр.}} + F_{\text{пр.}};$$

$$c\dot{y} + ky = F;$$

$$c \frac{dy}{dt} + ky = F;$$

$$mg + F = F_{\text{зудр. сопр.}} + F_{\text{пр.}} + F_u = m\ddot{y} + c\dot{y} + ky.$$

$$U_{\text{вых}} = k \cdot U_{\text{вх}} \Rightarrow y(t) = k \cdot x(t)$$

## Дифференциальные уравнения элементов и САУ

САУ — динамическая система и ее поведение описывается ДУ. В общем виде любой элемент или САУ записывается:

(1):

$$a_n \cdot \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \cdot \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \cdot \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y = b_m \cdot \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \cdot \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \cdot \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x,$$

где  $a_i$ ,  $b_i$  — коэффициенты, зависящие от параметров системы (инерционные, массовые, аэродинамические характеристики системы);

$y(t)$  — выходной сигнал или реакция системы;

$x(t)$  — входной сигнал.

Если предположить, что  $p = \frac{d}{dt}$  — оператор дифференцирования, то ДУ (1)

можно представить в виде:

$$(a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + \dots + a_1 \cdot p + a_0) \cdot y(t) = (b_m \cdot p^m + b_{m-1} \cdot p^{m-1} + \dots + b_1 \cdot p + b_0) \cdot x(t) \quad (2)$$

Уравнение (2) — это ДУ (1) в операторном виде.

## Типовые (эквивалентные) звенья

Элементы, образующие САУ по физической природе весьма разнообразны. Если математическое описание проводить, исходя из физической природы их элементов, и учитывать выполняемые ими функции, то такое описание окажется чрезвычайно трудоемким. Поэтому математическое описание производят не с точки зрения выполняемой функции, а с точки зрения того, как то или иное звено реагирует на поданное на его вход типовое воздействие. В результате большое число элементов можно свести к типовым (эквивалентным)

звеньям. Каждое такое звено описывается ДУ не выше второго порядка. Таких звеньев около 12-15.

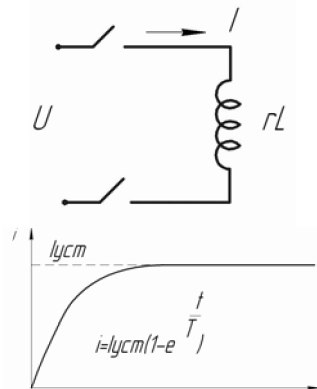
**1. Усилительное, или безынерционное звено.**

$y = k \cdot x$ , где  $k$  — статический коэффициент усиления.

Пример. Ламповый или транзисторный усилитель описывается уравнением  $U_{\text{вых}} = k \cdot U_{\text{вх}}$ .

**2. Апериодическое звено.**

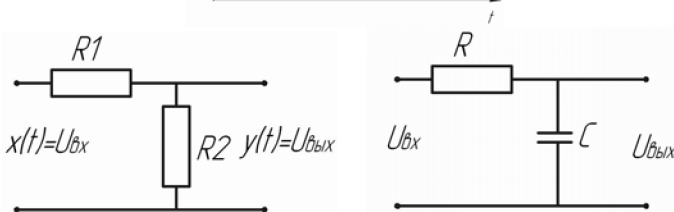
$$T \cdot \frac{dy}{dt} + y = k \cdot x; \quad (Tp + 1) \cdot y = k \cdot x.$$



$$U = ir + Lpi; \quad U = ir(1 + \frac{L}{r} \cdot p);$$

$$T = \frac{L}{r}, \quad i = kU(1 + Tp); \quad k = \frac{1}{r}.$$

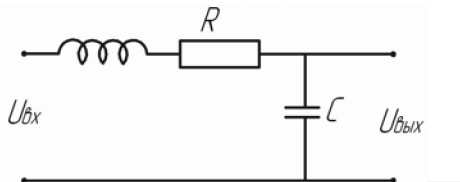
$I_{\text{уст}}$  — установившийся ток.



$$U_{\text{вых}} \cdot (Tp + 1) = k \cdot U_{\text{вх}};$$

$$T = Rc.$$

**3. Колебательное звено.**



$$T^2 \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} + 2c \cdot T \cdot \frac{dy}{dt} + y = k \cdot x_{\text{вх}}; \quad (T^2 p^2 + 2cTp + 1) \cdot y = k \cdot x_{\text{вх}}$$

$T$  — постоянная времени,  $c$  — коэффициент демпфирования, который определяет степень колебательности системы.

**4. Консервативное звено.**  $c = 0$ ;  $(T^2 p^2 + 1) \cdot y = k \cdot x_{\text{вх}}$  — колебания с постоянной амплитудой.

**5. Неустойчивое Колебательное звено (частный случай).**

$$(T^2 p^2 + 2cTp + 1) \cdot y = k \cdot x_{\text{вх}}$$

**6. Интегрирующее звено.**

$$\frac{dy}{dt} = k \cdot x; \quad py = k \cdot x$$

Пример: электродвигатель.

**7. Дифференцирующее звено.**

$$y = k \cdot \frac{dx}{dt}; \quad y = kpx$$

**8. Форсирующее звено 1-го порядка.**

$$y = k(Tp + 1)x$$

**9. Форсирующее звено 2-го порядка.**

$$y = k(T^2 p^2 + 2cTp + 1)x$$

**10. Звено с «чистым» запаздыванием.**

$$y = x(t - \tau), \tau \text{ — «чистое» запаздывание.}$$

### Передаточная функция

Для определения реакции на выходе системы необходимо решить ДУ (2):  
 $(a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + \dots + a_1 \cdot p + a_0) \cdot y(t) = (b_m \cdot p^m + b_{m-1} \cdot p^{m-1} + \dots + b_1 \cdot p + b_0) \cdot x(t)$ .

Это уравнение можно решить классическим способом или с использованием других способов преобразования. Эффективным способом является операционный метод, который позволяет заменить действия интегрирования и дифференцирования обычными алгебраическими действиями (умножения, деления) и исключает нахождение постоянной интегрирования.

Эффективным методом является прямое преобразование Лапласа, которое осуществляет преобразование вещественной переменной  $f(t)$  в комплексную переменную  $F(p)$ . Т.е.,  $f(t) \rightarrow F(p)$ ,  $y(t) \rightarrow Y(p)$ .

$f(t)$  — оригинал;  $F(p)$  — изображение.

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt \text{ - прямое преобразование по Лапласу для функции } f(t).$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j_{\infty}}^{c+j_{\infty}} F(p) \cdot e^{pt} dp \text{ — обратное преобразование по Лапласу для функции}$$

$F(p)$ .

$p = \alpha + j \cdot \omega$  - комплексная переменная, иногда ее обозначают через  $s$ ;

$c$  - абсцисса абсолютной сходимости. Для типовых сигналов  $c = 0$ , например,  $f(t) = 0, t < 0$ :

$$\int f(t) dt \leftarrow \frac{F(p)}{p}$$

$$\frac{df(t)}{dt} \leftarrow F(p) \cdot p$$

Если провести преобразование по Лапласу для ДУ (2), получим:

$$(a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + \dots + a_1 \cdot p + a_0) \cdot Y(p) = (b_m \cdot p^m + b_{m-1} \cdot p^{m-1} + \dots + b_1 \cdot p + b_0) \cdot X(p).$$

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{b_m \cdot p^m + b_{m-1} \cdot p^{m-1} + \dots + b_1 \cdot p + b_0}{a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + \dots + a_1 \cdot p + a_0}$$

— передаточная функция звена или системы.

Передаточная функция имеет фундаментальное значение:

$$Y(p) = \int_0^{\infty} y(t) \cdot e^{-pt} dt;$$

$$X(p) = \int_0^{\infty} x(t) \cdot e^{-pt} dt;$$

$$p = \alpha + j \cdot \omega.$$

Передаточной функцией звена или системы называется отношение изображения по Лапласу выходной величины к изображению по Лапласу на входе при нулевых начальных условиях.

### Передачная функция типовых элементов

#### 1. Усилительное звено.

$$W(p) = k = \frac{Y(p)}{X(p)}; X(p) = \int_0^{\infty} x(t) \cdot e^{-pt} dt; p = \alpha + j \cdot \omega$$

$$y(t) = k \cdot x(t), k \text{ — статический коэффициент усиления.}$$

#### 2. Аperiodическое звено.

$$W(p) = \frac{k}{Tp+1}; p = \alpha + j \cdot \omega; \text{ ДУ: } T \cdot \frac{dy}{dt} + y(t) = k \cdot x(t); (Tp+1) \cdot y = k \cdot x; p = \frac{d}{dt}.$$

#### 3. Колебательное звено.

$$\text{ДУ: } (T^2 p^2 + 2cTp + 1) \cdot y(t) = k \cdot x(t)$$

$T$  - постоянная времени,  $c$  - коэффициент демпфирования, который определяет степень колебательности системы.

Если взять прямое преобразование по Лапласу для функций  $x(t)$  и  $y(t)$ , то получим передачную функцию:

$$W(p) = \frac{k}{T^2 p^2 + 2cTp + 1}.$$

#### 4. Консервативное звено. $c = 0$ ; $W(p) = \frac{k}{T^2 p^2 + 1}$ .

#### 5. Неустойчивое Колебательное звено.

$$c < 0; W(p) = \frac{k}{T^2 p^2 + 2cTp + 1}.$$

#### 6. Интегрирующее звено.

$$\text{ДУ: } py(t) = k \cdot x_{\text{ax}}(t); W(p) = \frac{k}{p}.$$

#### 7. Дифференцирующее звено.

$$\text{ДУ: } y(t) = kpx(t); W(p) = k \cdot p.$$

#### 8. Форсирующее звено 1-го порядка.

$$\text{ДУ: } y(t) = k(Tp+1)x(t); W(p) = k(Tp+1).$$

#### 9. Форсирующее звено 2-го порядка.

$$\text{ДУ: } y(t) = k(T^2 p^2 + 2cTp + 1)x(t); W(p) = k(T^2 p^2 + 2cTp + 1).$$

#### 10. Звено с «чистым» запаздыванием.

$$\text{ДУ: } y(t) = x(t)(t - \tau); W(p) = e^{-\tau p}, \tau \text{ — «чистое» запаздывание.}$$

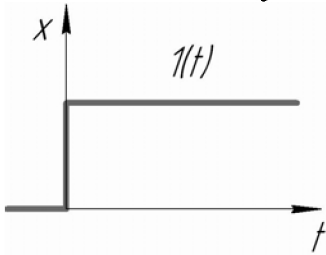
#### 11. Неустойчивое аperiodическое звено.

$$W(p) = \frac{k}{Tp-1}.$$

### Типовые воздействия, используемые в САУ

Характеристикой звена или системы является их реакция на вполне определенное входное воздействие. Такими воздействиями являются:

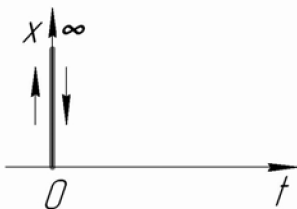
### 1. Единичное ступенчатое воздействие



$$x = 1(t).$$

$$\begin{cases} x = 0, & t < 0; \\ x = 1(t), & t \geq 0. \end{cases}$$

### 2. Импульсное входное воздействие

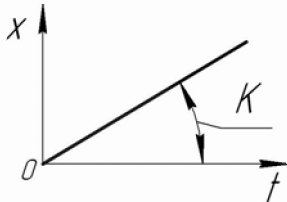


$$x = \delta(t).$$

$$\begin{cases} x = 0, & t \neq 0; \\ x = \infty, & t = 0. \end{cases}$$

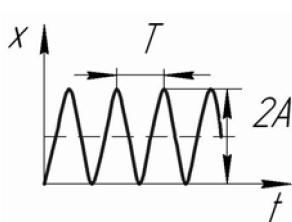
$$\delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} 1(t) dt.$$

### 3. Линейно нарастающий сигнал



$$x = k \cdot t \cdot 1(t).$$

### 4. Гармонический входной сигнал



$$x(t) = \begin{cases} A \cdot \sin(\omega t + \varphi); \\ A \cdot \cos(\omega t + \varphi). \end{cases}$$

$$x(t) = A_1 \cdot \sin(\omega t) + A_2 \cdot \cos(\omega t).$$

$\omega$  – круговая частота;  
 $\varphi$  – начальная фаза.

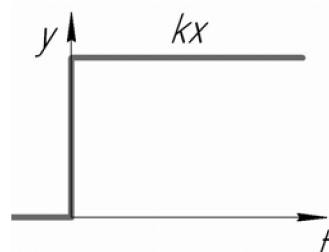
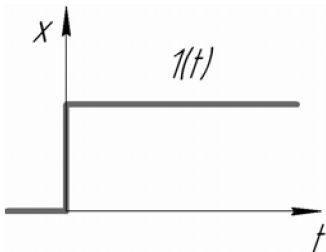
Используется при частотных испытаниях.

Реакция системы или элемента на ступенчатое воздействие называется **переходной характеристикой**.

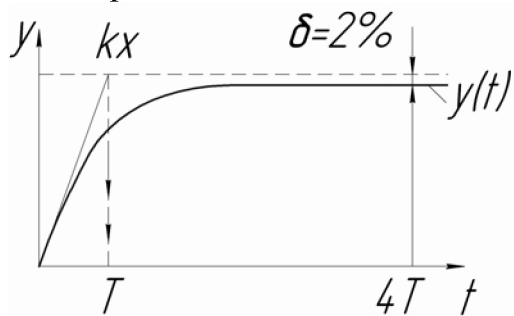
Реакция системы или элемента на импульсное входное воздействие называется **импульсной переходной характеристикой**.

## Переходные характеристики типовых элементов

### 1. Усилительное звено



## 2. Аperiodическое звено

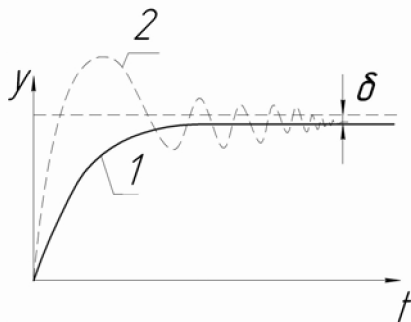


$$y = kx(1 - e^{-\frac{t}{T}}).$$

Если провести касательную к началу координат, то получим постоянную времени  $T$ .

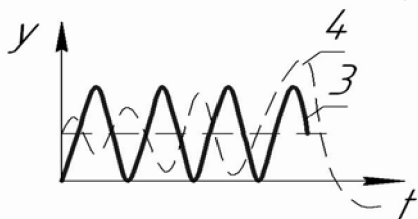
$4T$  – время затухания переходного процесса.

## 3. Колебательное звено



1, когда  $\zeta > 1$ .

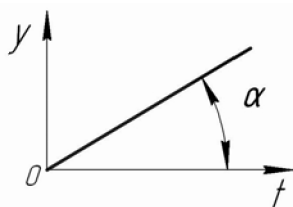
2, когда  $0 < \zeta < 1$  – затухающий колебательный процесс.



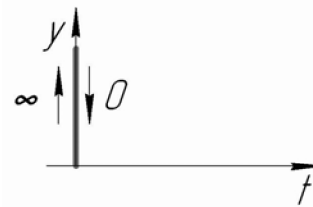
3, когда  $\zeta = 0$  – колебания с постоянной амплитудой в линейных системах.

4, когда  $\zeta < 0$  – колебания с нарастающей амплитудой.

## 4. Интегрирующее звено



$$\alpha = \arctg(k).$$



Для получения переходной характеристики в аналитическом виде, необходимо решить следующее ДУ:

$$(a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + \dots + a_1 \cdot p + a_0) \cdot y(t) = (b_m \cdot p^m + b_{m-1} \cdot p^{m-1} + \dots + b_1 \cdot p + b_0) \cdot 1(t).$$

## Основные требования, предъявляемые к САУ

Здесь не рассматриваются требования с общеинженерной точки зрения (прочность, надежность, экономичность), а рассматриваются требования, вытекающие из специфики работы САУ.

1. Система должна быть устойчива. При выведении САУ из равновесия под действием внешних сил, она должна с течением времени вернуться в исходное состояние с точностью до величины статической ошибки. Это физическое понятие устойчивости.
2. Статическая ошибка не должна превышать заданного значения. **Статическая ошибка** - это разность между заданным и действительным значением регулируемой величины в установившемся режиме.

3. Требование, предъявляемое к переходному процессу. В конкретном случае требования различны:
- монотонность процесса;
  - быстродействие.

Целью анализа САУ является подбор таких параметров системы, которые удовлетворяли бы этим трем требованиям.

### Частотные функции и частотные характеристики

При подаче на вход системы гармонического сигнала  $x(t) = x^{\max} \sin(\omega t)$  (\*) по окончании переходного процесса на выходе устанавливаются колебания той же самой частоты, но отличные по амплитуде и по фазе

$y(t) = y^{\max} \sin(\omega t + \varphi)$  (\*\*), где  $\omega = 2\pi f$  – круговая частота;  
 $f$  – частота, Гц;  $\varphi$  – фаза колебаний.

В системе устанавливаются незатухающие колебания. Поведение системы описывается частным решением однородного ДУ:

$$a_n \cdot \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \cdot \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \cdot \frac{dy}{dt} + a_0 \cdot y = b_m \cdot \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1} \cdot \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \cdot \frac{dx}{dt} + b_0 \cdot x \quad (1)$$

Определим реакцию на выходе системы, т.е.  $y$ .

Заменим  $\sin(\omega t)$  на  $e^{j\omega t}$ , а  $\sin(\omega t + \varphi)$  на  $e^{j(\omega t + \varphi)}$ . Подставив замену в уравнения (\*) и (\*\*), получим:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( x^{\max} \cdot e^{j\omega t} \right) &= j\omega x^{\max} \cdot e^{j\omega t} & \frac{d}{dt} \left( y^{\max} \cdot e^{j(\omega t + \varphi)} \right) &= j\omega \cdot y^{\max} \cdot e^{j(\omega t + \varphi)} \\ \frac{d^2}{dt^2} \left( x^{\max} \cdot e^{j\omega t} \right) &= (j\omega)^2 x^{\max} \cdot e^{j\omega t} & \frac{d^2}{dt^2} \left( y^{\max} \cdot e^{j(\omega t + \varphi)} \right) &= (j\omega)^2 \cdot y^{\max} \cdot e^{j(\omega t + \varphi)} \\ & \dots & \dots & \\ \frac{d^m}{dt^m} \left( x^{\max} \cdot e^{j\omega t} \right) &= (j\omega)^m x^{\max} \cdot e^{j\omega t} & \frac{d^n}{dt^n} \left( y^{\max} \cdot e^{j(\omega t + \varphi)} \right) &= (j\omega)^n \cdot y^{\max} \cdot e^{j(\omega t + \varphi)} \end{aligned}$$

Подставляя полученные выражения в уравнение (1), будем иметь:

$$\begin{aligned} & \left( a_n \cdot (j\omega)^n + a_{n-1} \cdot (j\omega)^{n-1} + \dots + a_1 \cdot (j\omega) + a_0 \right) \cdot y^{\max} \cdot e^{j(\omega t + \varphi)} = \\ & = \left( b_m \cdot (j\omega)^m + b_{m-1} \cdot (j\omega)^{m-1} + \dots + b_1 \cdot (j\omega) + b_0 \right) \cdot x^{\max} \cdot e^{j\omega t} \end{aligned} \quad (2)$$

Далее запишем:

$$W(j\omega) = \frac{b_m \cdot (j\omega)^m + b_{m-1} \cdot (j\omega)^{m-1} + \dots + b_1 \cdot (j\omega) + b_0}{a_n \cdot (j\omega)^n + a_{n-1} \cdot (j\omega)^{n-1} + \dots + a_1 \cdot (j\omega) + a_0} =$$

$$= \frac{y_{\max}}{x_{\max}} \cdot \frac{e^{j(\omega t + \varphi)}}{e^{j\omega t}} = \frac{y_{\max}}{x_{\max}} \cdot e^{j\varphi(\omega)}.$$

$$W(j\omega) = A(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)} = \text{-комплексная частотная функции или}$$

$$= P(\omega) + jQ(\omega) \text{ комплексный коэффициент усиления}$$

(4)

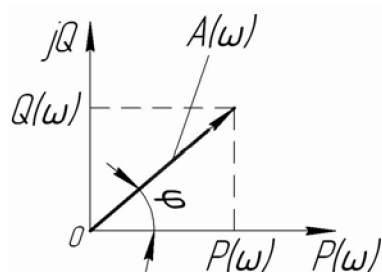
Эта функция может быть получена из передаточной функции путем простой замены  $p$  на  $j\omega$ .

$A(\omega)$  – амплитудная частотная характеристика (АЧХ);

$\varphi(\omega)$  – фазовая частотная характеристика (ФЧХ);

$P(\omega)$  – вещественная частотная характеристика (ВЧХ);

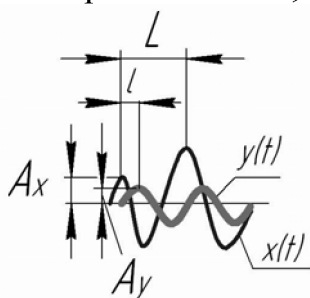
$Q(\omega)$  – мнимая частотная характеристика (МЧХ).



Формулы перехода:

$$\begin{cases} A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}; \\ Q(\omega) = A(\omega) \cdot \sin(\varphi); \\ P(\omega) = A(\omega) \cdot \cos(\varphi); \\ \varphi = \operatorname{arctg} \frac{Q(\omega)}{P(\omega)}. \end{cases}$$

Эти характеристики имеют физический смысл и могут определяться экспериментально, что широко используется.



$$\begin{cases} A(\omega) = \frac{A_y}{A_x}; \\ \varphi(\omega) = \frac{l}{L} \cdot 360^\circ. \end{cases}$$

### Логарифмические частотные характеристики

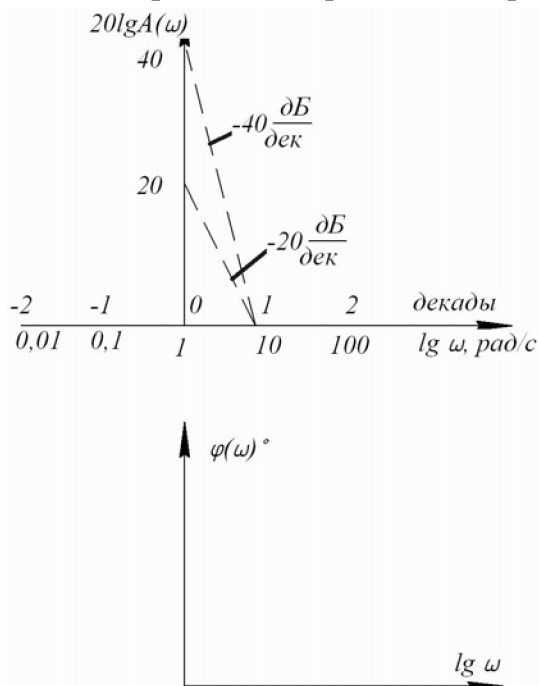
При анализе САУ очень часто используют логарифмические частотные характеристики (ЛЧХ), которые позволяют уменьшить объем вычислительных работ. Эти характеристики могут быть построены по виду передаточной функции. Кроме того, метод ЛЧХ позволяет оценить влияние каждого звена на поведение системы и выбрать корректирующий контур для получения необходимых свойств системы.

Прологарифмируем (4), тогда получим  $\lg W(j\omega) = \lg A(\omega) + j\varphi(\omega)$ ,

где  $\lg A(\omega)$  логарифмическая амплитудная частотная характеристика (ЛАЧХ);

$\varphi(\omega)$  – логарифмическая фазовая частотная характеристика (ЛФЧХ).

Так как  $A(\omega)$  – отношение выходного и входного сигналов, то целесообразно ее строить в координатах  $G = 20 \lg A(\omega)$ , дБ.

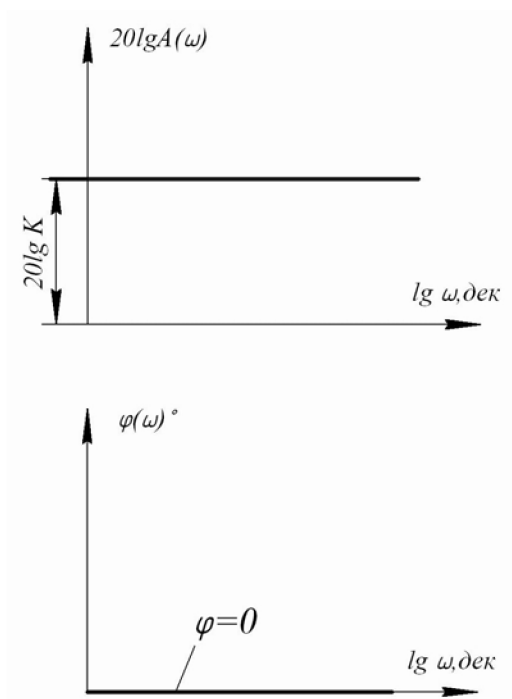


### ЛЧХ типовых звеньев

#### Усилительное звено

$$W(p) = k, \quad A(\omega) = k, \quad 20 \lg A(\omega) = 20 \lg k, \quad \varphi(\omega) = \arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} = 0.$$

Логарифмические амплитудная и фазовая частотные характеристики имеют следующий вид:



## 1. Аperiodическое звено

$$W(p) = \frac{k}{Tp+1}, \quad p = j\omega,$$

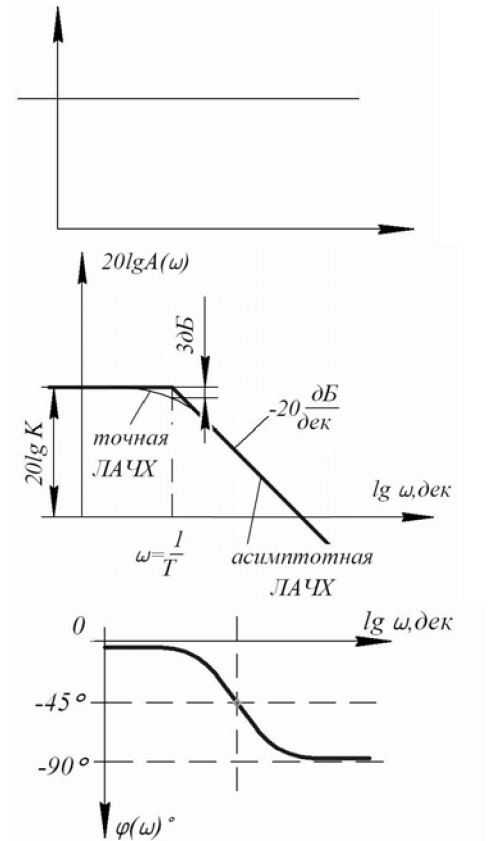
$$W(j\omega) = \frac{k}{Tj\omega+1} = \frac{k \cdot (Tj\omega-1)}{(Tj\omega+1) \cdot (Tj\omega-1)} = \frac{k \cdot (Tj\omega-1)}{-T^2\omega^2-1} = \frac{k}{T^2\omega^2+1} - j \frac{kT\omega}{T^2\omega^2+1},$$

$$A(\omega) = \sqrt{\left(\frac{k}{T^2\omega^2+1}\right)^2 + \left(-j \frac{kT\omega}{T^2\omega^2+1}\right)^2} = \frac{k}{\sqrt{T^2\omega^2+1}},$$

$$20 \lg A(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \sqrt{T^2\omega^2+1}.$$

Если: 1)  $T^2\omega^2 < 1$ , то  $\omega < \frac{1}{T}$ .

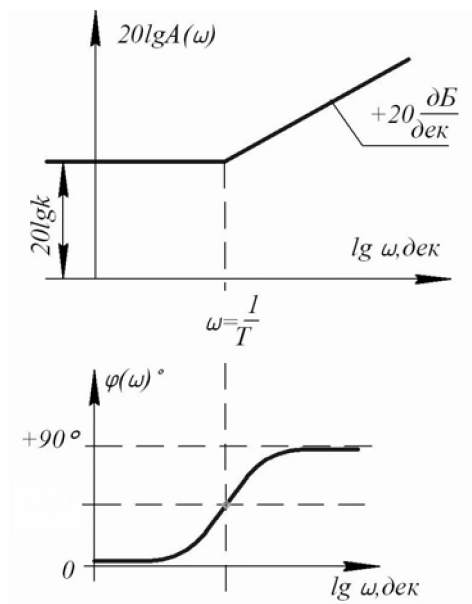
2)  $T^2\omega^2 > 1$ , то  $20 \lg A(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg(T\omega)$ .



$$\varphi(\omega) = \arctg \left( -\frac{kT\omega \cdot (T^2\omega^2+1)}{(T^2\omega^2+1) \cdot k} \right) = \arctg(-T\omega).$$

2. Форсирующее звено 1-го порядка — зеркальное отображение аperiodического звена.

$$W(j\omega) = k(Tj\omega + 1).$$



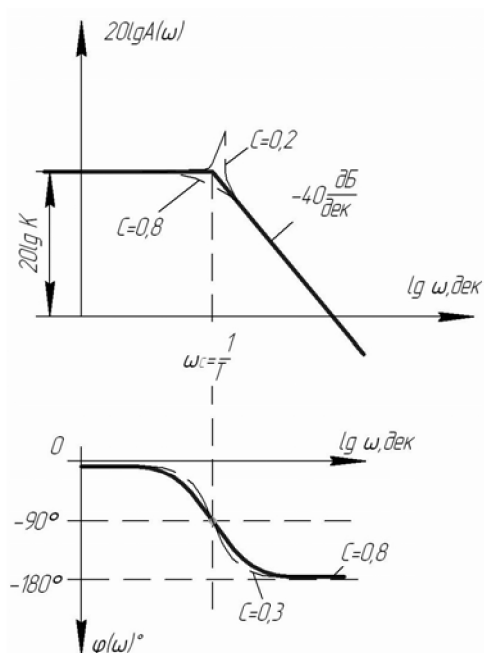
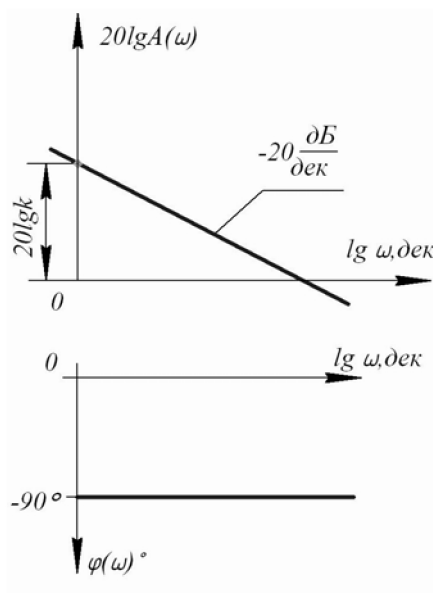
### 3. Интегрирующее звено

$$W(j\omega) = \left( \frac{k}{j\omega} \right) \cdot \frac{j\omega}{j\omega} = -\frac{kj}{\omega};$$

$$20 \lg A(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \omega.$$

$$\varphi = \arctg \left( \frac{k}{\frac{-\omega}{0}} \right) = \arctg(\infty) = -90^\circ.$$

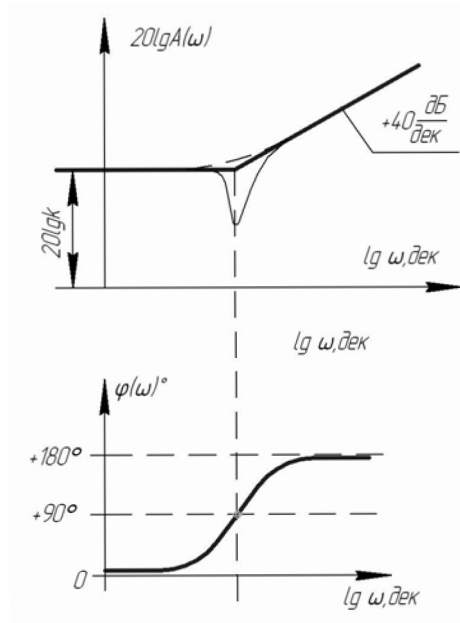
$$p = j\omega; \quad W(j\omega) = \frac{k}{T^2(j\omega)^2 + 2cTj\omega + 1}.$$



$\omega_c$  – сопрягающаяся частота возникает там, где низкочастотная ветвь сопрягается с высокочастотной ветвью.

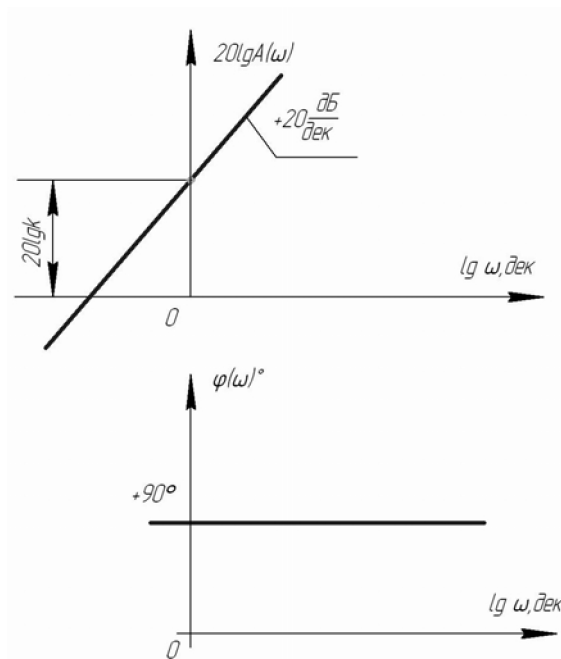
**4. Форсирующее звено 2-го порядка - зеркальное отображение колебательного звена.**

$$W(j\omega) = k \cdot (T^2(j\omega)^2 + 2cTj\omega + 1).$$



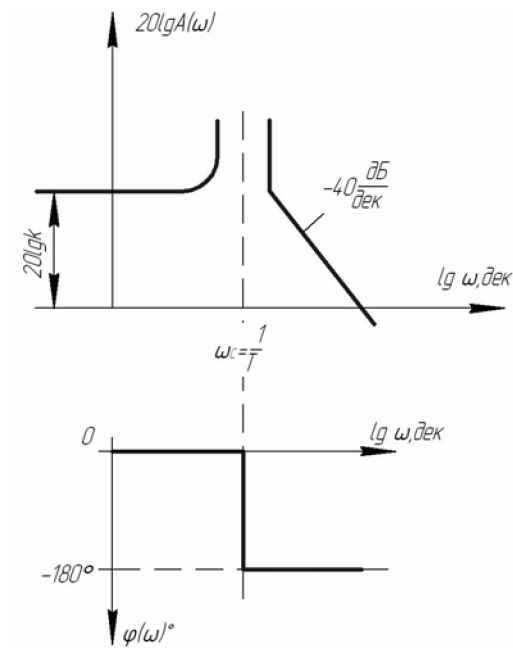
**5. Дифференцирующее звено** — зеркальное отображение интегрирующего звена.

$$W(j\omega) = kj\omega.$$



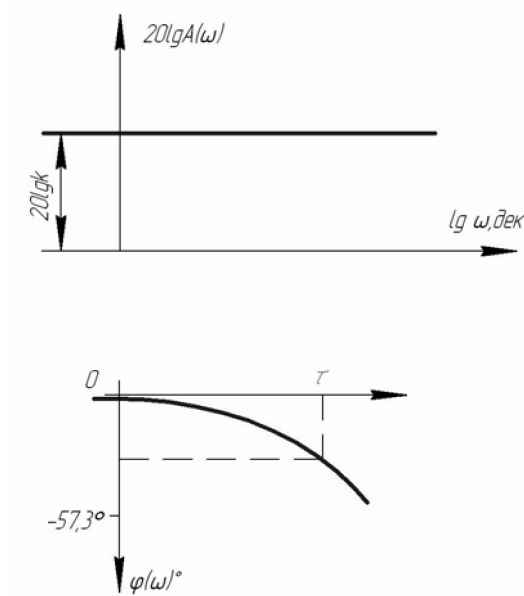
**6. Консервативное звено** (частный случай колебательного звена  $C=0$ ).

$$W(j\omega) = \frac{k}{T^2(j\omega)^2 + 1}.$$



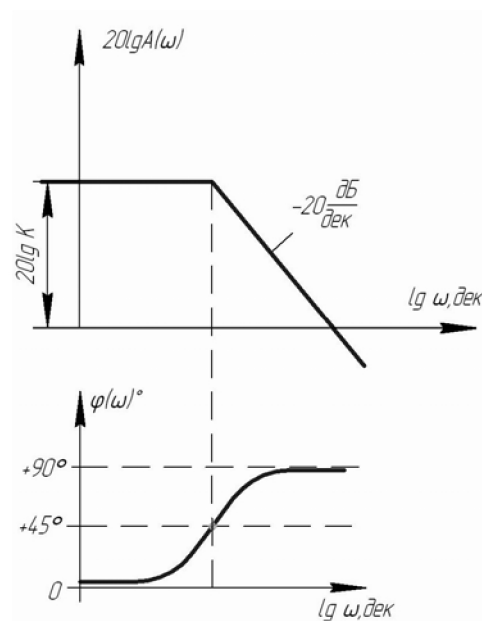
### 7. Звено с «чистым» запаздыванием

$$W(j\omega) = e^{-Tj\omega}$$



### 8. Неустойчивое апериодическое звено

$$W(j\omega) = \frac{k}{Tj\omega - 1}$$

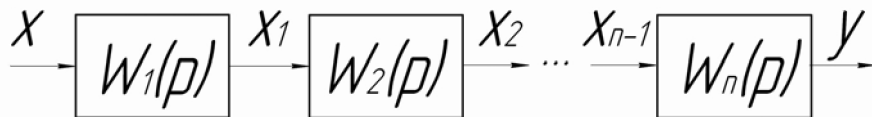


### Типовые соединения элементов

Разнообразные связи в САУ можно свести к трем типовым формам связи:

1. Последовательное соединение элементов;
2. Согласно-параллельное соединение элементов;
3. Встречно-параллельное соединение элементов;

## 1. Последовательное соединение элементов

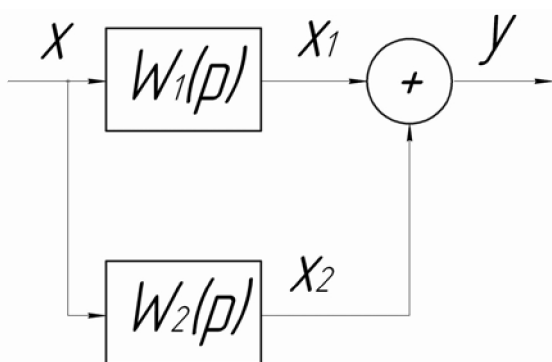


$$W(p) = \frac{y(p)}{x(p)} = \frac{x_1(p)}{x} \cdot \frac{x_2(p)}{x_1(p)} \cdot \frac{x_3(p)}{x_2(p)} \cdot \dots \cdot \frac{y(p)}{x_n(p)}$$

$$W(p) = W_1(p) \cdot W_2(p) \cdot \dots \cdot W_n(p)$$

**Вывод:** при последовательном соединении элементов передаточная функция участка цепи равна произведению передаточных функций отдельных звеньев.

## 2. Согласно-параллельное соединение элементов

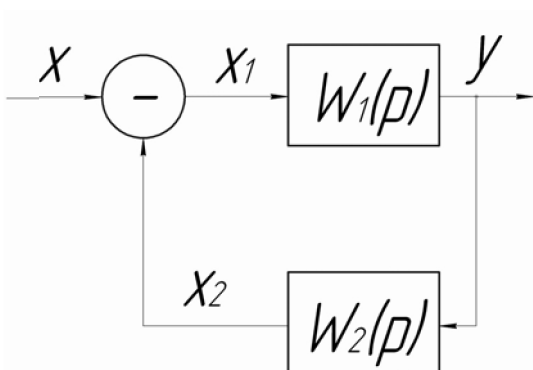


$$W(p) = \frac{y(p)}{x(p)} = \frac{x_1(p) + x_2(p)}{x(p)} = W_1(p) + W_2(p)$$

$$W(p) = W_1(p) + W_2(p)$$

Возможна перестановка элементов между собой с точки зрения математики.

## 3. Встречно-параллельное соединение элементов



$$W(p) = \frac{y(p)}{x(p)}$$

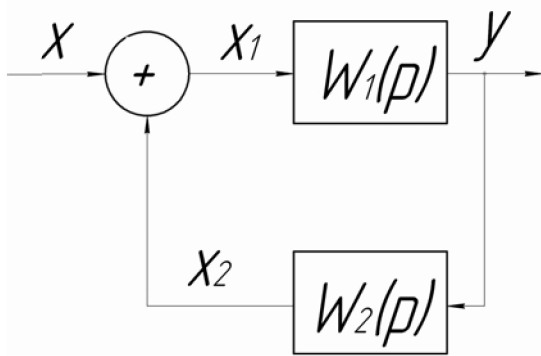
$$x_1(p) = x(p) - x_2(p)$$

$$x(p) = x_1(p) + x_2(p)$$

$$\begin{aligned} W(p) &= \frac{y(p)}{x_1(p) + x_2(p)} = \frac{1}{\frac{x_1(p)}{y(p)} + \frac{x_2(p)}{y(p)}} = \\ &= \frac{1}{\frac{1}{W_1(p)} + W_2(p)} = \frac{W_1(p)}{W_1(p) \cdot W_2(p) + 1} \end{aligned}$$

$$W(p) = \frac{W_1(p)}{W_1(p) \cdot W_2(p) + 1}$$

Если  $W_2(p) = 1$ , то жесткая обратная связь. В этом случае передаточная функция принимает вид:  $W(p) = \frac{W_1(p)}{W_1(p) + 1}$ .



$$W(p) = \frac{y(p)}{x(p)}$$

$$x_1(p) = x(p) + x_2(p)$$

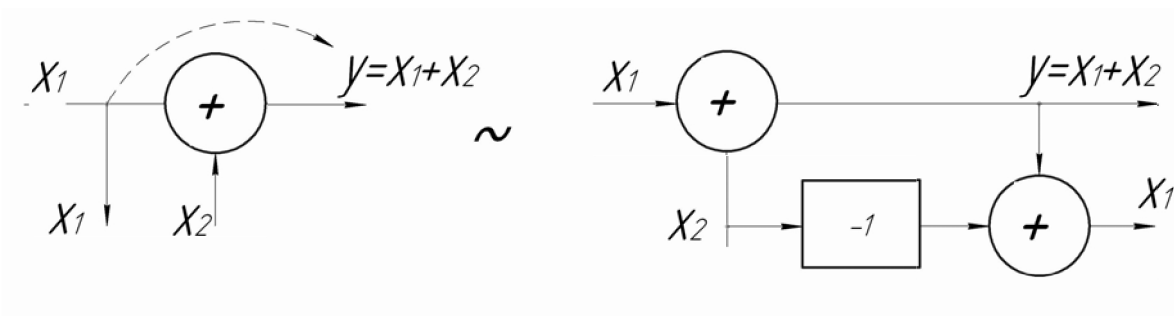
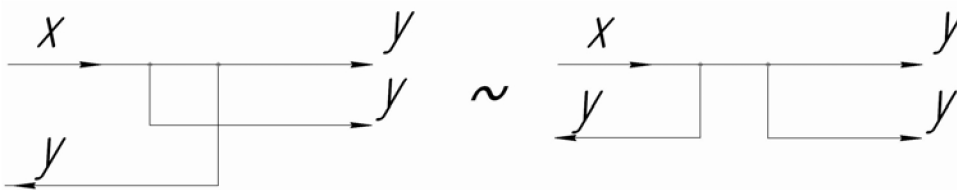
$$W(p) = \frac{y(p)}{x_1(p) - x_2(p)} = \frac{1}{\frac{x_1(p)}{y(p)} - \frac{x_2(p)}{y(p)}} = \frac{1}{\frac{1}{W_1(p)} - W_2(p)} = \frac{W_1(p)}{1 - W_1(p) \cdot W_2(p)}$$

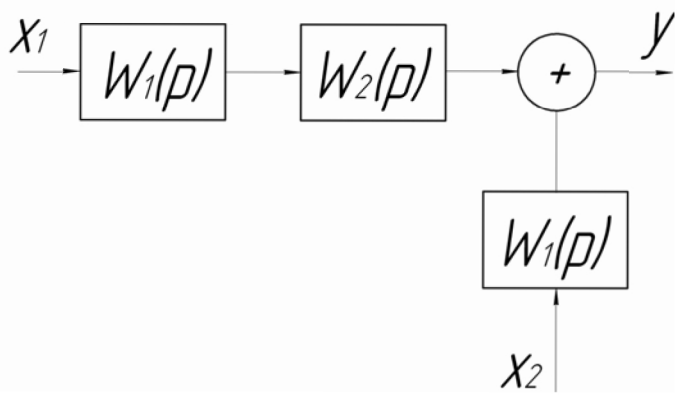
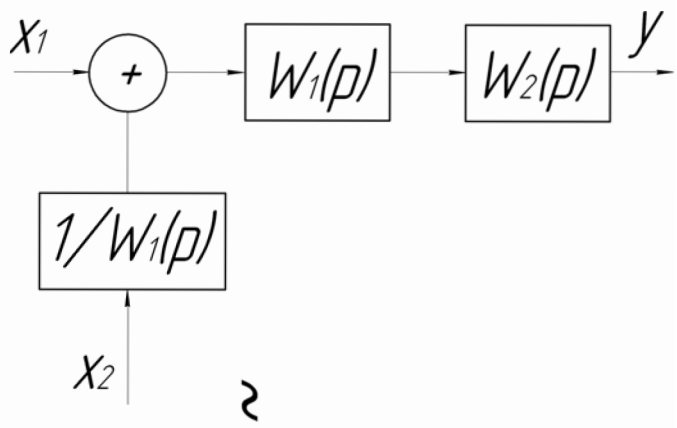
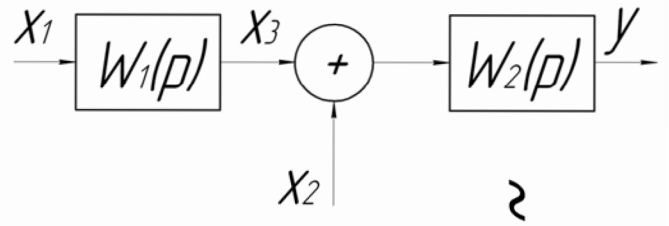
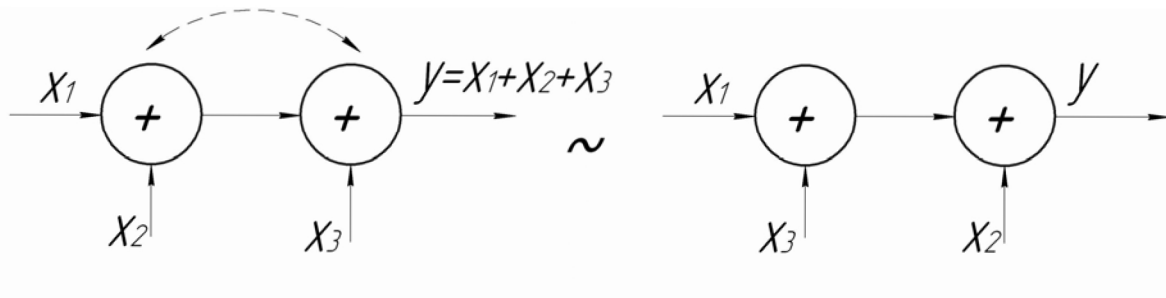
$$W(p) = \frac{W_1(p)}{1 - W_1(p) \cdot W_2(p)}$$

— передаточная функция для положительной обратной связи.

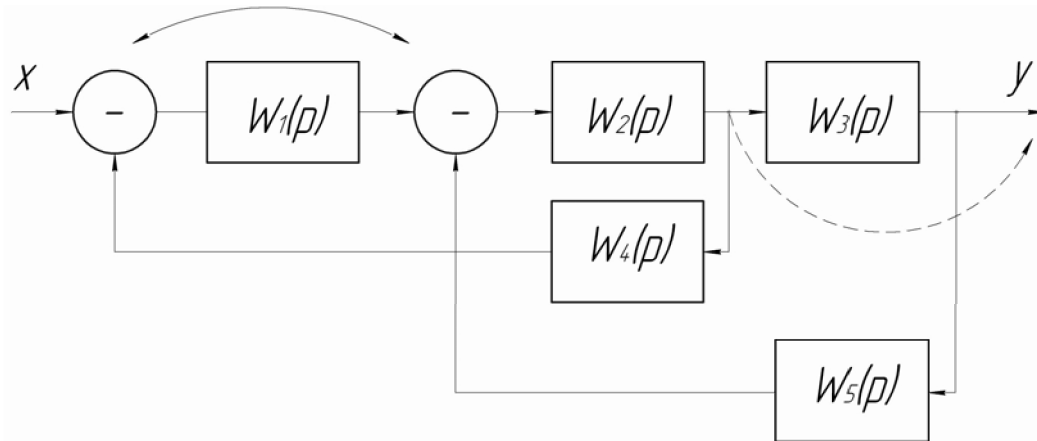
### Эквивалентные структурные преобразования

Пример:

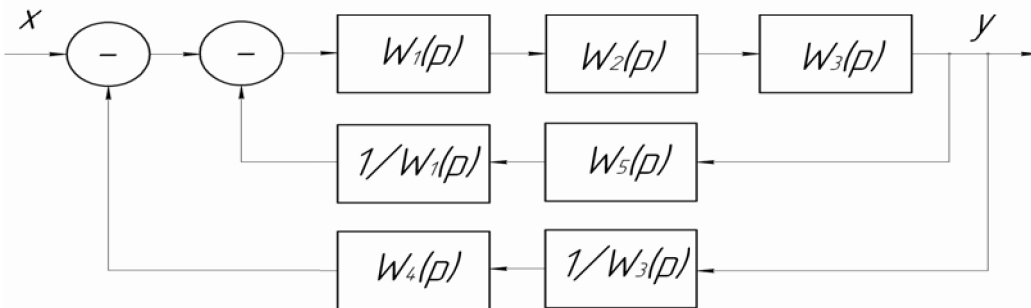




## Свертывание структурных схем



Определим передаточную функцию представленной схемы. Т.е.  $W(p) = ?$



$$W_{13}(p) = W_1(p) \cdot W_2(p) \cdot W_3(p);$$

$$W_{15}(p) = \frac{W_5(p)}{W_1(p)}; \quad W_{43}(p) = \frac{W_4(p)}{W_3(p)}.$$

## Устойчивость линейных САУ

**Понятие устойчивости. Необходимое условие устойчивости.**

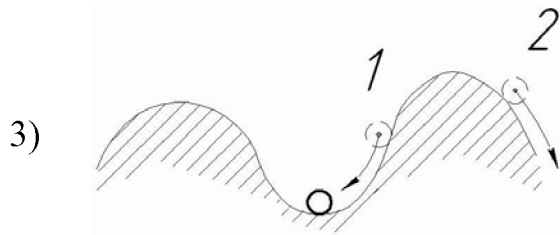
Рассмотрим физическую трактовку понятия устойчивости

- |    |  |                      |
|----|--|----------------------|
| 1) |  | Неустойчивая система |
| 2) |  | Устойчивая система   |

**Устойчивость** - свойство системы (шар - поверхность) вернуться в исходное состояние после прекращения действия возмущения.

Устойчивость линейных систем не зависит от величины начального

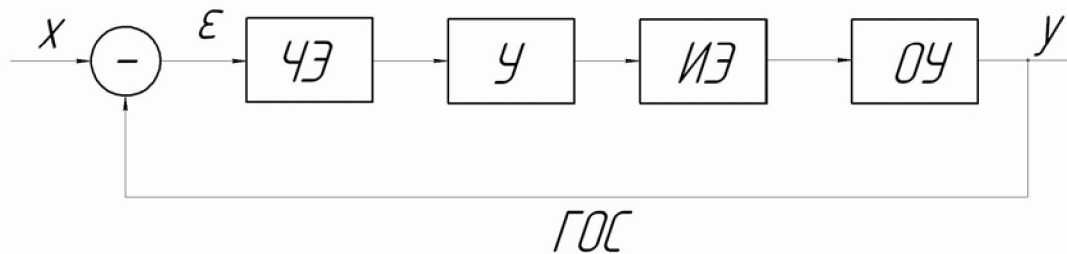
отклонения.



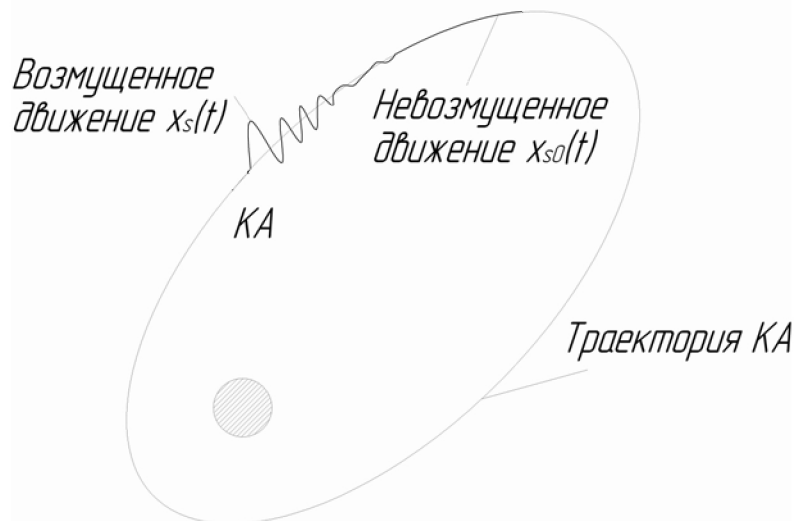
Система устойчивая в малом и неустойчивая в большом

В качестве исходного состояния необязательно брать состояние покоя. В общем виде за исходное состояние обычно принято состояние невозмущенного движения. (Движение КА по орбите можно принять в качестве невозмущенного, а все отклонения — возмущенными.)

Характерной особенностью САУ является то, что эти системы являются замкнутыми, то есть входной сигнал подается на вход системы, где действительное и заданное значения сравниваются друг с другом. В нормально функционирующей системе эта разность, как правило, уменьшается. Но бывает и наоборот.



### Математическая оценка устойчивости



**Математическая устойчивость** по характеру возмущенного движения относительно невозмущенного движения после прекращения действия возмущения.

Физическая трактовка понятия «устойчивости»: если выведенная из состояния равновесия, а далее предоставленная самой себе система вновь приходит в исходное положение — **это устойчивая система**.

Впервые математически устойчивость систем впервые была сформулирована в диссертации Ляпуновым А.М., «О прочности движения» в 1922г.

Так как выводы, сделанные Ляпуновым для механических систем описаны дифференциальными уравнениями, то определение устойчивости по Ляпунову справедливо для любых систем (механические, гидравлические и т.д.)

Невозмущенная система является устойчивой, если можно подобрать такое положительное число  $\varepsilon$ , для которого справедливо условие:

$$|\Delta x_S(t)| < r(\varepsilon), \quad |\Delta x_S(0)| < \varepsilon(t).$$

$x_S(t)$  — возмущенное движение;

$x_{S0}(t)$  — невозмущенное движение;

$$\Delta x_S(t) = x_{S0}(t) - x_S(t), \quad S = \overline{0, n-1}.$$

$$(1) \quad a_n \cdot \frac{d^n \Delta x}{dt^n} + a_{n-1} \cdot \frac{d^{n-1} \Delta x}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \cdot \frac{d \Delta x}{dt} + a_0 \Delta x = 0 \quad \text{— однородное ДУ.}$$

$$\frac{d^k \Delta x(0)}{dt^k} = \Delta x^{(k)}(0) \rightarrow \text{НУ (начальные условия)}$$

Для оценки устойчивости необходимо решить ДУ (1), без правой части, с НУ. Решение этого ДУ представляет собой сумму гармоник:

$$\Delta x(t) = \sum_{k=1}^n C_k e^{P_k t},$$

где  $P_k$  — корни характеристического уравнения, их  $n$ .

$$a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + \dots + a_1 \cdot p + a_0 = 0 \quad (2) \quad \text{- характеристическое уравнение.}$$

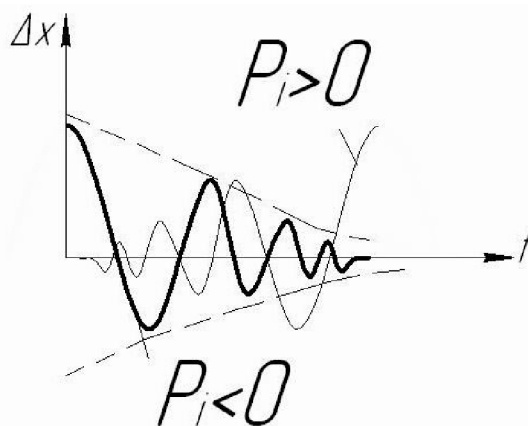
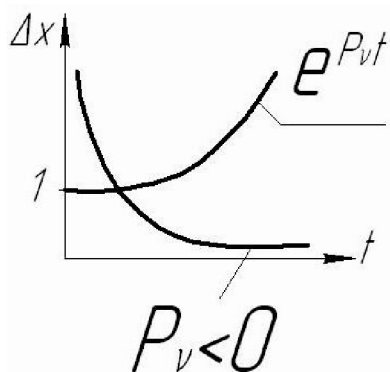
$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n C_k e^{P_k t} = 0.$$

Пусть в этой системе  $S$  вещественных (действительных) корней, тогда  $(n-S)$  — комплексно-сопряженные корни.

$$\Delta x(t) = \sum_{\nu=1}^S C_\nu e^{P_\nu t} + \sum_{i=1}^{\frac{n-S}{2}} C_i e^{P_i t}.$$

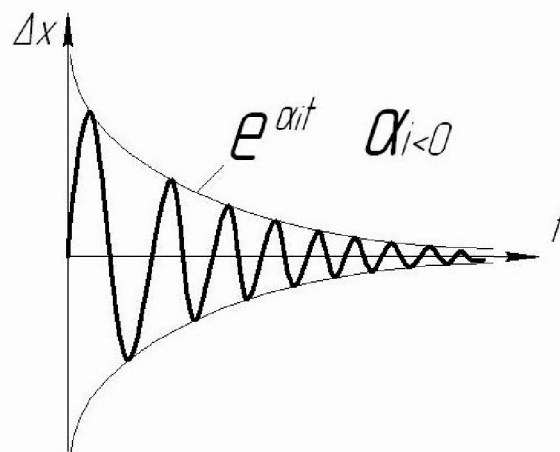
$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{\nu=1}^S C_\nu e^{P_\nu t} + \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{\frac{n-S}{2}} C_i e^{P_i t} = 0 \quad \text{- условие}$$

устойчивости.



$$p_i = \alpha_i \pm j\omega;$$

$$\Delta x(t) = A_i e^{\alpha_i t} (\cos \omega t + \sin \omega t).$$



**Вывод: Определение устойчивости по корням характеристического уравнения:** для устойчивости системы необходимо и достаточно, чтобы корни характеристического уравнения (2) имели отрицательную вещественную часть, или же вещественная часть комплексно-сопряженного корня  $\alpha_i < 0$ .

Определение устойчивости по корням характеристического уравнения для 3-го и 4-го порядка затруднительно, а для 5-го и более высокого порядка уравнений аналитически не решается, для определения устойчивости есть так называемые критерии устойчивости, которые позволяют, не решая ДУ, определить устойчивость. Эти критерии определяют знак корней характеристического уравнения, не вычисляя их численного значения. Положительные корни указывают на неустойчивость системы, а отрицательные — на устойчивость.

Все критерии устойчивости делятся на алгебраические и частотные. К алгебраическим критериям относятся критерии Гурвица, Рауса, Вышнеградского и др. К частотным критериям относятся критерии Михайлова, Найквиста. Частотные критерии основаны на ЛЧХ.

### Критерий устойчивости Гурвица

Предложен Гурвицем в 1895г.

Для того чтобы корни характеристического уравнения (1)

$a_0 \cdot p^n + a_1 \cdot p^{n-1} + \dots + a_{n-1} \cdot p + a_n = 0$  имели отрицательную вещественную часть, а система была устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы при  $a_0 > 0$  диагональные определители таблиц, составленных из коэффициентов уравнения (1), были больше нуля.

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} a_0 > 0 \\ \Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0, \Delta_n > 0 - \\ \text{— диагональные определители} \end{array}$$

Условие устойчивости

**Правило составления таблицы:**

1. По главной диагонали записываются коэффициенты с нарастающими индексами, начиная с  $a_1$ .
2. Каждый из столбцов заполняется вверх коэффициентами с нарастающими индексами, вниз — с убывающими индексами.
3. На место отсутствующих коэффициентов проставляются нули.

**Примеры:**

1)  $a_0 \cdot p + a_1 = 0, a_0 > 0.$

$$\Delta_1 > 0; [a_1] \quad \Delta_1 = a_1 > 0.$$

$$a_0 > 0, a_1 > 0$$

2)  $a_0 \cdot p^2 + a_1 \cdot p + a_2 = 0, a_0 > 0.$

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ a_0 & a_2 \end{bmatrix}; \quad \Delta_1 = a_1 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot a_2 > 0.$$

$$a_0 > 0, a_1 > 0, a_1 \cdot a_2 > 0$$

3)  $a_0 \cdot p^3 + a_1 \cdot p^2 + a_2 \cdot p + a_3 = 0, a_0 > 0.$

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{bmatrix}; \quad \Delta_1 = a_1 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = (a_1 \cdot a_2 - a_0 \cdot a_3) > 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = a_3 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_3 \cdot (a_1 \cdot a_2 - a_0 \cdot a_3) > 0.$$

$$a_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0, (a_1 \cdot a_2 - a_0 \cdot a_3) > 0$$

Необходимым, но недостаточным условием устойчивости системы является положительность коэффициентов характеристического уравнения. Пропуск хотя бы одного из слагаемых в характеристическом уравнении говорит о неустойчивости (граница устойчивости).

Вывод: критерий Гурвица целесообразно использовать для систем не выше 5-го порядка. С повышением порядка уравнения  $n \geq 5$  трудность вычислений настолько увеличивается, что критерий Гурвица становится нецелесообразно использовать.

Сложно оценить влияние каждого коэффициента на устойчивость. Иногда это вовсе не удается.

### Критерий устойчивости Вышнеградского

Предложен в 1876г. для случая уравнения 3-го порядка.

Условие устойчивости: 1) Положительность всех коэффициентов характеристического уравнения; 2)  $a_0 \cdot p^3 + a_1 \cdot p^2 + a_2 \cdot p + a_3 = 0$ .

$$a_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0, (a_1 \cdot a_2 - a_0 \cdot a_3) > 0.$$

$$\frac{a_1 \cdot a_2}{a_0 \cdot a_3} > 1, A = \frac{a_1}{\sqrt[3]{a_0^2 \cdot a_3}}, B = \frac{a_2}{\sqrt[3]{a_0 \cdot a_3^2}}, A \cdot B > 1.$$

### Критерий Рауса

Пусть характеристическое уравнение системы имеет вид:

$$a_0 \cdot p^n + a_1 \cdot p^{n-1} + \dots + a_{n-1} \cdot p + a_n = 0 \quad (1)$$

Чтобы корни (1) имели отрицательную вещественную часть, а система была устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты первого столбца таблицы Рауса были положительны.

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots & a_n \\ a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots & 0 \\ b_1 & b_3 & b_5 & b_7 & \dots & 0 \\ c_1 & c_3 & c_5 & c_7 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ K & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \text{ — таблица Рауса.}$$

Коэффициенты таблицы Рауса определяются по следующим формулам:

$$b_1 = -\frac{\begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix}}{a_1} = \frac{a_1 \cdot a_2 - a_0 \cdot a_3}{a_1};$$

$$b_3 = -\frac{\begin{vmatrix} a_0 & a_4 \\ a_1 & a_5 \end{vmatrix}}{a_1} = \frac{a_1 \cdot a_4 - a_0 \cdot a_5}{a_1};$$

$$b_5 = -\frac{\begin{vmatrix} a_0 & a_6 \\ a_1 & a_7 \end{vmatrix}}{a_1} = \frac{a_1 \cdot a_6 - a_0 \cdot a_7}{a_1}.$$

$$c_1 = -\frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{b_1} = \frac{b_1 \cdot a_3 - a_1 \cdot b_3}{b_1};$$

$$c_3 = -\frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_5 \\ b_1 & b_5 \end{vmatrix}}{b_1} = \frac{b_1 \cdot a_5 - a_1 \cdot b_5}{b_1}$$

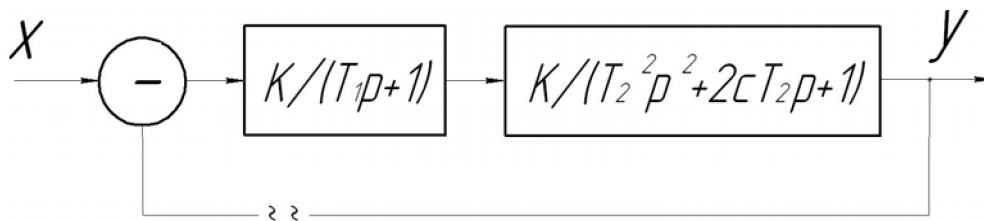
Таким образом, должно выполняться условие:

$$a_0 > 0, a_1 > 0, b_1 > 0, c_1 > 0, \dots K > 0$$

Число нарушений этого правила равно числу коэффициентов с положительной вещественной частью.

Критерий Рауса целесообразно использовать для систем высокого порядка.

Пример:



$$T_1 = 0,1 \text{ с};$$

$$T_2 = 1,0 \text{ с};$$

$$c = 0,5.$$

$$W_{раз}(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{K}{(T_1 p + 1) \cdot (T_2^2 p^2 + 2c T_2 p + 1)} = \frac{K}{(0,1 p + 1) \cdot (p^2 + p + 1)} =$$

$$= \frac{K}{0,1 p^3 + 0,1 p^2 + 0,1 p + p^2 + p + 1} = \frac{K}{0,1 p^3 + 1,1 p^2 + 1,1 p + 1}.$$

$$W_{зам}(p) = \frac{W_{раз}(p)}{1 + W_{раз}(p)} = \frac{\frac{K}{0,1 p^3 + 1,1 p^2 + 1,1 p + 1}}{1 + \frac{K}{0,1 p^3 + 1,1 p^2 + 1,1 p + 1}} =$$

$$= \frac{K}{0,1 p^3 + 1,1 p^2 + 1,1 p + 1 + K} = \frac{y(p)}{x(p)}.$$

$$(0,1 p^3 + 1,1 p^2 + 1,1 p + 1 + K) \cdot y(p) = K \cdot x(p).$$

$0,1p^3 + 1,1p^2 + 1,1p + 1 + K = 0$  — характеристическое уравнение.

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{bmatrix};$$

$$a_0 = 0,1 > 0;$$

$$\Delta_1 = |a_1| = a_1 = 1,1 > 0;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1,1 & 1+K \\ 0,1 & 1,1 \end{vmatrix} = 1,1^2 - 0,1 \cdot (1+K) > 0;$$

$$1,21 > 0,1 \cdot (1+K); (1+K) < 12,1; K < 11,1.$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1,1 & 1+K & 0 \\ 0,1 & 1,1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+K \end{vmatrix} = (1+K) \cdot [1,21 - 0,1 \cdot (1+K)] > 0.$$

$a_0 > 0, a_1 > 0, (1+K) > 0, K > -1$  — условие устойчивости системы.

### Критерий устойчивости Михайлова

Разработан в 1935г. Относится к группе частотных методов.

Необходимо определить условия, при которых корни характеристического уравнения имеют отрицательную вещественную часть.

Рассмотрим полином  $F(p) = a_0 \cdot p^n + a_1 \cdot p^{n-1} + \dots + a_{n-1} \cdot p + a_n$  (1),

который соответствует характеристическому уравнению

$$a_0 \cdot p^n + a_1 \cdot p^{n-1} + \dots + a_{n-1} \cdot p + a_n = 0 \quad (2)$$

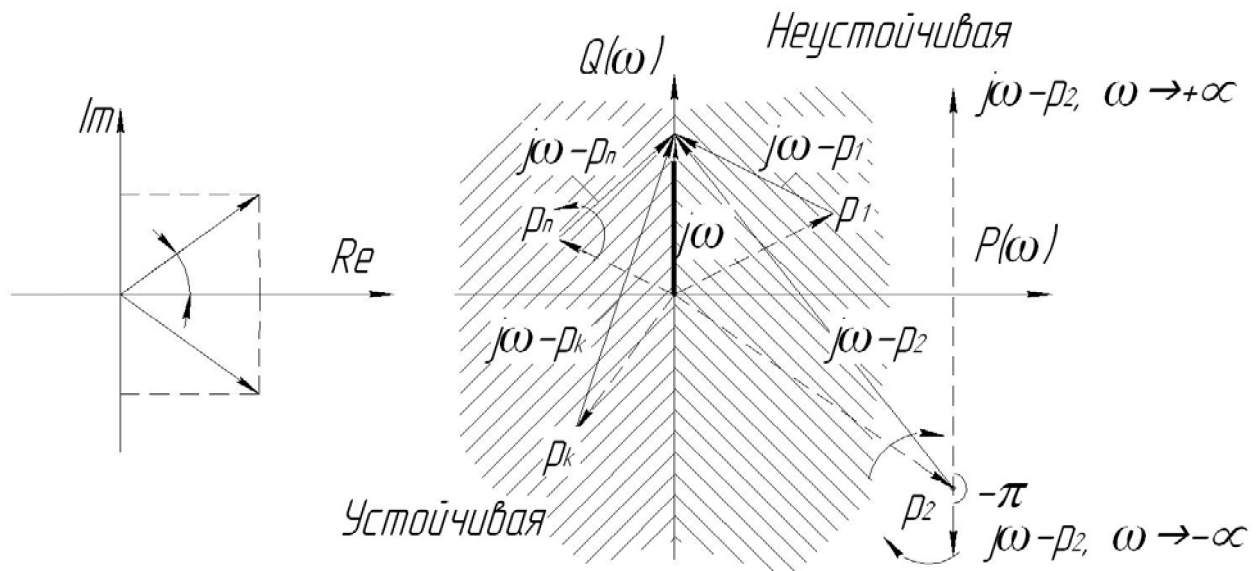
Выразим полином через корни уравнения:

$$F(p) = a_0 \cdot (p - p_1) \cdot (p - p_2) \cdot \dots \cdot (p - p_n),$$

где  $p_1, p_2, p_n$  — корни характеристического уравнения.

Каждый из корней  $p_1, p_2, p_n$  можно представить на комплексной плоскости в виде точки, вещественная часть которой определяется по оси абсцисс, а мнимая — по оси ординат. Кроме того, каждая точка может быть определена в виде вектора, модуль которого равен произведению модулей отдельных сомножителей, а аргумент — сумме аргументов отдельных сомножителей.

$$p = j\omega, F(j\omega) = a_0 \cdot (j\omega - p_1) \cdot (j\omega - p_2) \cdot \dots \cdot (j\omega - p_n)$$



Так как корни  $p_1, p_2, p_n$  — вектора,  $j\omega$  — вектор, следовательно,  $(j\omega - p_k)$  — тоже вектор.

Предположим, что в левой полуплоскости, соответствующей устойчивости, располагается  $m$  корней. Тогда в правой полуплоскости будет  $(n - m)$  корней, где  $n$  — порядок характеристического уравнения. Предположим, что  $\omega = -\infty \div +\infty$ . каждый из разностных векторов сходится в одной точке.

При изменении  $\omega = -\infty \div +\infty$   $m$  разностных векторов, соответствующих устойчивой системе и расположенных в левой полуплоскости, повернутся против часовой стрелки (положительное направление) на угол  $+\pi$ , а  $(n - m)$  разностных векторов, расположенных в правой полуплоскости, повернутся по часовой стрелке (отрицательное направление) на угол  $-\pi$ .

Так как аргумент сомножителя равен сумме аргументов отдельных сомножителей. Тогда суммарный угол поворота определяется таким образом:

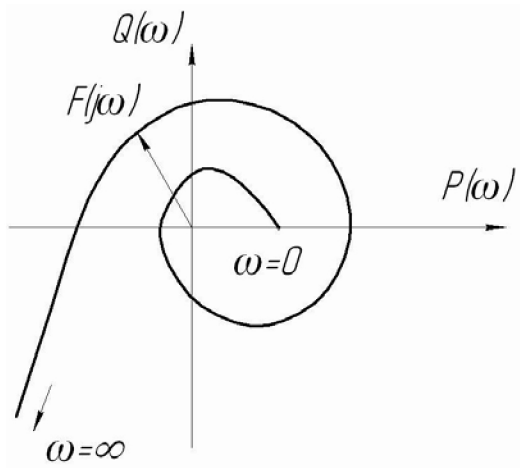
$\alpha_1 = m \cdot \pi$  — в левой полуплоскости;  $\alpha_2 = -(n - m) \cdot \pi$  — в правой полуплоскости.

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = m \cdot \pi - (n - m) \cdot \pi = (2m - n) \cdot \pi .$$

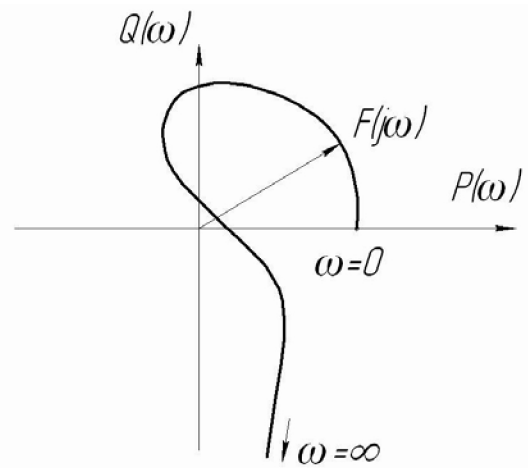
Если бы все корни уравнения (2) располагались в левой полуплоскости, что соответствовало бы устойчивой системе, тогда суммарный угол поворота был бы  $\alpha = n \cdot \pi$  (устойчивая САУ). Следовательно, об устойчивости можно судить по углу поворота вектора.

При изменении  $\omega = 0 \div \infty$  конец вектора  $F(j\omega)$  описывает кривую, которая называется кривой Михайлова (характеристическая кривая). Она симметрична относительно оси  $OX$ .

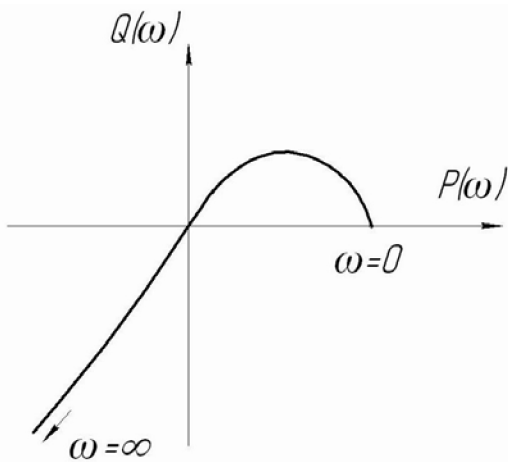
**Критерий Михайлова:** если при изменении  $\omega = 0 \div \infty$  характеристическая кривая проходит последовательно  $n$  квадрантов в положительном направлении, то такая система устойчива ( $n$  - степень характеристического уравнения).



Устойчивая САУ  
 $n=7$



Неустойчивая САУ  
(порядок обхода нарушен)  
 $n=4$

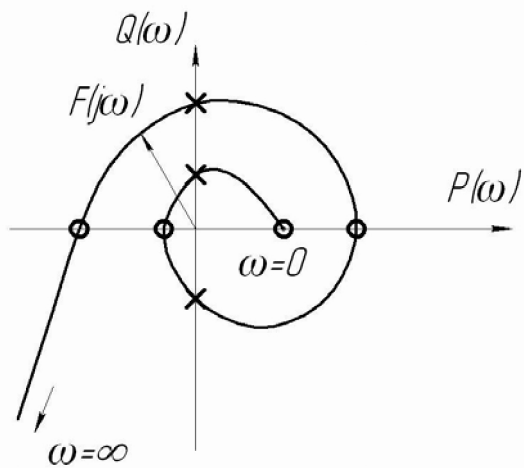


Граница устойчивости САУ  
 $n=3$

Для построения характеристической кривой:

$$\begin{aligned}
 p = j\omega, \quad F(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega) &= a_0 \cdot (j\omega)^n + a_1 \cdot (j\omega)^{n-1} + \dots + a_{n-1} \cdot (j\omega) + a_n = \\
 &= \underbrace{a_n - a_{n-2} \cdot \omega^2 + a_{n-4} \cdot \omega^4 - \dots + a_{n-1} \cdot j\omega - a_{n-3} \cdot j\omega^3 + a_{n-5} \cdot j\omega^5 - \dots}_{P(\omega)} + \underbrace{\dots}_{jQ(\omega)}
 \end{aligned}$$

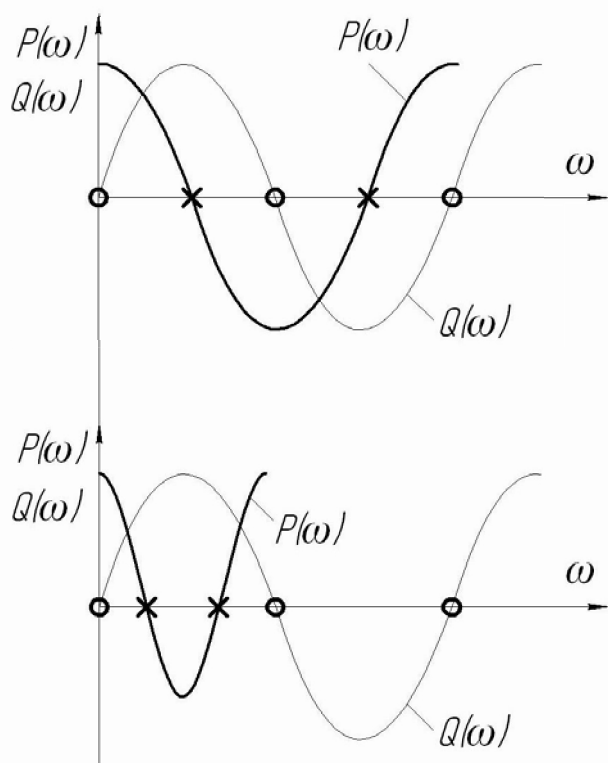
**Критерий перемежаемости (частный случай критерия Михайлова)**



При некоторых значениях частот  $\omega$  вещественная часть обращается в нуль. При других значениях частот мнимая часть обращается в нуль.

$$(3) \begin{cases} P(\omega) = 0 - \text{частоты, при которых} \\ \text{вещественная часть равна нулю} \\ Q(\omega) = 0 - \text{частоты, при которых} \\ \text{мнимая часть равна нулю} \end{cases}$$

При последовательном обходе  $\omega \rightarrow$ , корни уравнения (3) чередуются между собой.



*Устойчивая САУ*

*Неустойчивая САУ  
(порядок чередования  
корней нарушен)*

**П**

**ри**  
**ме**  
**р:**  
Уст  
рой  
ств  
о  
гир  
оск  
опи  
чес  
кой  
ста  
бил  
иза  
ци  
и.

$$P \cdot (1 + T_1 P) \cdot (1 + T_2 P) + K = 0. \quad T_1 = 0,01 \text{ с}; \quad T_2 = 1 \text{ с}; \quad K = 120.$$

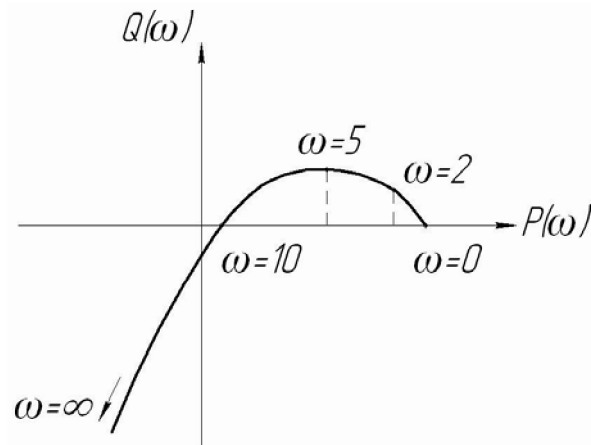
$$a_0 \cdot p^3 + a_1 \cdot p^2 + a_2 \cdot p + a_3 = 0 \quad p = j\omega$$

$$-a_0 \cdot j\omega^3 - a_1 \cdot \omega^2 + a_2 \cdot j\omega + a_3 = \underbrace{a_3 - a_1 \cdot \omega^2}_{P(\omega)} + j \cdot \underbrace{(a_2 \cdot \omega - a_0 \cdot \omega^3)}_{Q(\omega)}$$

$$F(j\omega) = 120 - \omega^2 + j\omega \cdot (1 - 0,01 \cdot \omega^2).$$

$\omega$	0	2	5	10	20	$\infty$
----------	---	---	---	----	----	----------

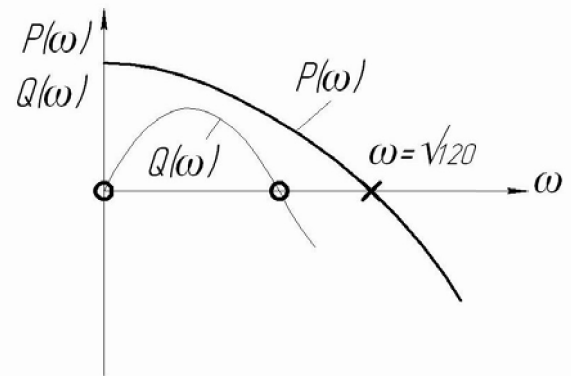
$P(\omega)$	120	116	95	20	-280	$-\infty$
$Q(\omega)$	0	1,92	3,75	0	-60	$\infty$



*Система неустойчива*

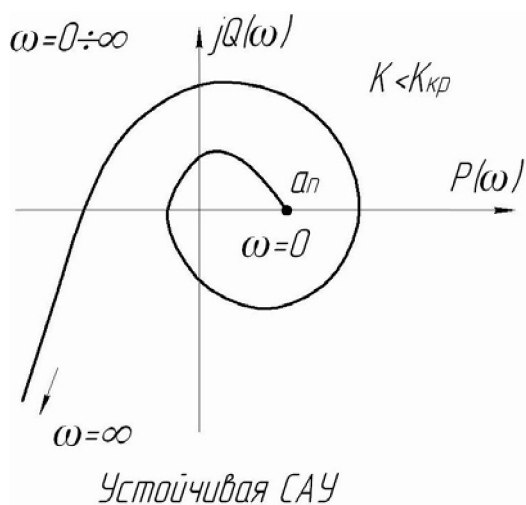
Критерий перемежаемости:

$$\begin{cases} P(\omega) = 120 - \omega^2 = 0; \\ Q(\omega) = \omega \cdot (1 - 0,01 \cdot \omega^2) = 0. \end{cases}$$



*Неустойчивая САУ  
(порядок чередования  
корней нарушен)*

## Критический коэффициент усиления



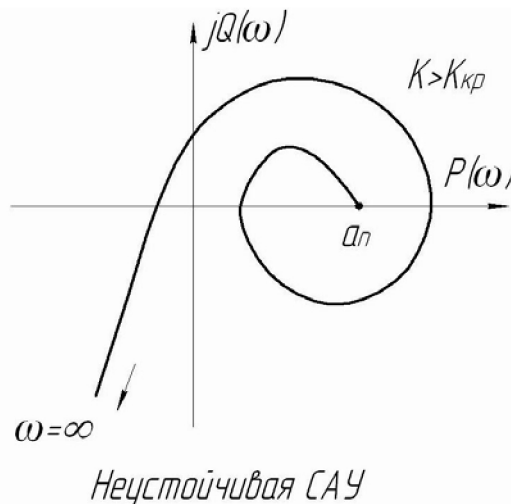
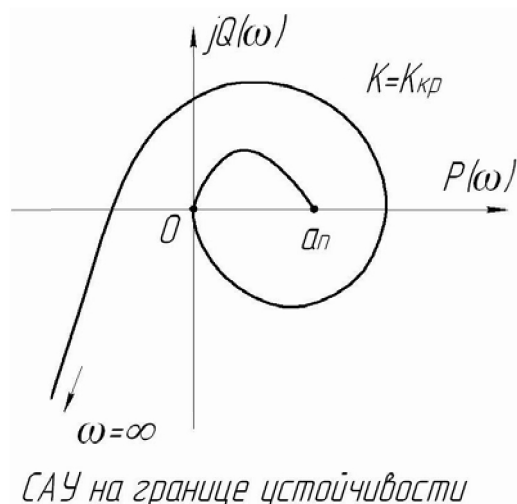
Величина свободного члена в характеристическом уравнении определяет точку на оси  $P(\omega)$ .

$$a_0 \cdot p^n + a_1 \cdot p^{n-1} + \dots + a_{n-1} \cdot p + a_n = 0, \text{ где } a_n \text{ — свободный член.}$$

Для статических систем  $a_n = K$  — коэффициент усиления.

Для астатических систем  $a_n = K + 1$ .

При увеличении коэффициента усиления характеристическая кривая начнет перемещаться параллельно самой себе по оси абсцисс. Может случиться, что кривая займет одно из положений:

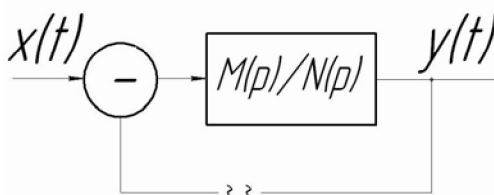


П  
ред  
ель  
ное  
зна  
чен  
ие  
коэ  
фф  
иц  
иен  
та

усиления, при котором система находится в устойчивом состоянии, называется критическим коэффициентом усиления  $K_{кр}$ .

## Передаточная функция и дифференциальные уравнения разомкнутой и замкнутой систем

Любые САУ можно привести к виду:



Для разомкнутой системы:

$$W_p(p) = \frac{M(p)}{N(p)} = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0}{c_n p^n + \dots + c_1 p + c_0} \quad (1)$$

Для замкнутой системы:

$$W_3(p) = \frac{W_p(p)}{1 + W_p(p)} = \frac{M(p)/N(p)}{1 + M(p)/N(p)} = \frac{M(p)}{N(p) + M(p)}$$

$M(p)$  — полином степени  $m$ ;

$N(p)$  — полином степени  $n$ ;

$m \leq n$  — в реальных системах САУ.

(1) представим в виде:

$$(b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0) \cdot X(p) = (c_n p^n + \dots + c_1 p + c_0) \cdot Y(p) \quad (2)$$

Берем обратное преобразование по Лапласу для (2)

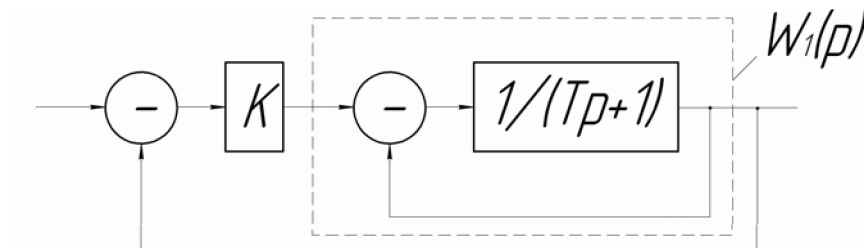
$$c_n \frac{d^n y}{dt^n} + \dots + c_1 \frac{dy}{dt} + c_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x \quad \text{— дифференциальное}$$

уравнение разомкнутой системы.

$$W_p(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0}$$

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x \quad \text{— дифференциальное}$$

уравнение замкнутой системы.



$W_p(p)$  — ?;  $W_3(p)$  — ?      ДУ разомкнутой САУ?    ДУ замкнутой САУ?

$$W_1(p) = \frac{1}{1 + \frac{1}{Tp+1}} = \frac{1}{Tp+2}; \quad W_p(p) = \frac{K}{Tp+2} = \frac{Y(p)}{X(p)}$$

$T \frac{dy}{dt} + 2y = Kx$  — дифференциальное уравнение разомкнутой системы.

$$W_3(p) = \frac{\frac{K}{Tp+2}}{1 + \frac{K}{Tp+2}} = \frac{K}{Tp+2+K} = \frac{Y(p)}{X(p)}.$$

$$(Tp+2+K) \cdot y(p) = K \cdot x(p) \quad (3)$$

Взяв обратное преобразование по Лапласу, получим:

$T \frac{dy(t)}{dt} + (2+K)y(t) = Kx(t)$  — дифференциальное уравнение замкнутой системы.

### Частотный критерий устойчивости Найквиста

Этот критерий предложен в 1932г.

Этот критерий основан на поведении замкнутой системы по поведению в разомкнутом состоянии. В основе его лежит уже не характеристическое уравнение замкнутой системы, а передаточная функция разомкнутой системы.

Рассмотрим полином, соответствующий характеристическому уравнению замкнутой системы:  $N(p) + M(p) = 0$ .

Полином, соответствующий характеристическому уравнению разомкнутой системы:  $N(p) = 0$ .

$$L(p) = \frac{N(p) + M(p)}{N(p)} = 1 + W_p(p) \quad (4)$$

Корни характеристического уравнения замкнутой системы:  $p_1, p_2, \dots, p_n$ .

Корни характеристического уравнения разомкнутой системы:  $p_1', p_2', \dots, p_n'$ .

$$L(p) = \frac{a_n \cdot (p - p_1) \cdot (p - p_2) \cdot (p - p_n)}{c_n \cdot (p - p_1') \cdot (p - p_2') \cdot (p - p_n')}, \quad p = j\omega.$$

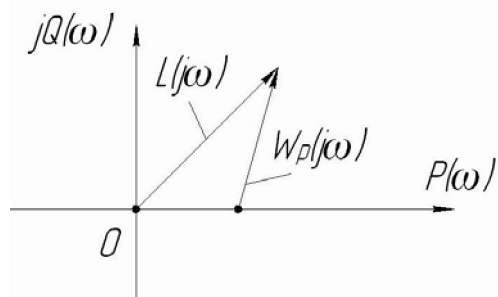
$$L(p) = \frac{a_n \cdot (j\omega - p_1) \cdot (j\omega - p_2) \cdot (j\omega - p_n)}{c_n \cdot (j\omega - p_1') \cdot (j\omega - p_2') \cdot (j\omega - p_n')} = \frac{D(j\omega)}{N(j\omega)}.$$

Предположим, что замкнутая система устойчива. Тогда амплитудно-фазовая характеристика (АФХ) замкнутой системы при изменении  $\omega = -\infty \div +\infty$  должна повернуться на угол  $\pi \cdot n$ . При устойчивости разомкнутой системы вектор АФХ тоже поворачивается на угол  $\pi \cdot n$ .

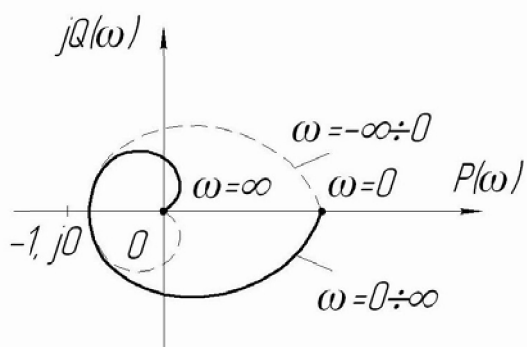
Так как аргумент частного равен разности аргументов:

$\arg L(j\omega) = \arg D(j\omega) - \arg N(j\omega) = 0$ , следовательно, при изменении  $\omega$  АФХ не должна охватывать начало координат.

Из формулы (4) следует, что при любом значении  $\omega$  концы векторов  $L(j\omega)$  и  $W_p(j\omega)$  совпадают.

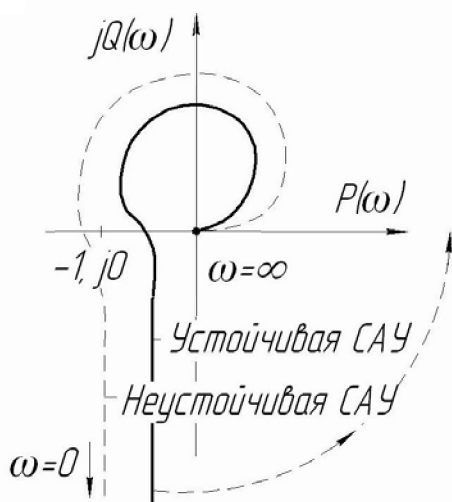


Следовательно, судить об устойчивости можно по вектору  $W_p(j\omega)$ , соответствующему разомкнутой системе. Для этого смещают начало координат в точку  $(-1, j0)$ .



Устойчивая САУ

Для критерия устойчивости Найквиста: для устойчивости замкнутой системы, устойчивой в разомкнутом состоянии, необходимо и достаточно, чтобы характеристическая кривая при  $\omega = 0 \div +\infty$  не охватывала критической точки с координатами  $(-1, j0)$ .

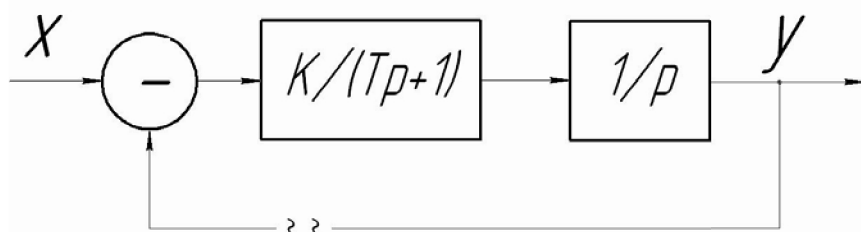


Устойчивая САУ

Неустойчивая САУ

Для систем, имеющих интегрирующее звено характеристическая кривая при  $\omega = 0$  уходит в бесконечность. Чтобы определить, охватывает ли кривая точку  $(-1, j0)$ , необходимо кривую мысленно совместить с положительной осью  $P(\omega)$ .

Лекция 9



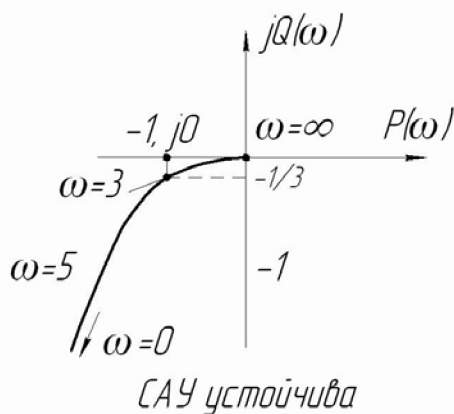
$$W_p(p) = \frac{K}{(Tp+1) \cdot p} = \frac{K}{Tp^2 + p}, \quad p = j\omega$$

$$W_p(j\omega) = \frac{K}{-T\omega^2 + j\omega} = \frac{K(T\omega^2 + j\omega)}{(j\omega - T\omega^2) \cdot (j\omega + T\omega^2)} = \frac{K(T\omega^2 + j\omega)}{-\omega^2 - T^2\omega^4} =$$

$$= -\frac{KT}{1+T^2\omega^2} - j\frac{K}{\omega+T^2\omega^3}$$

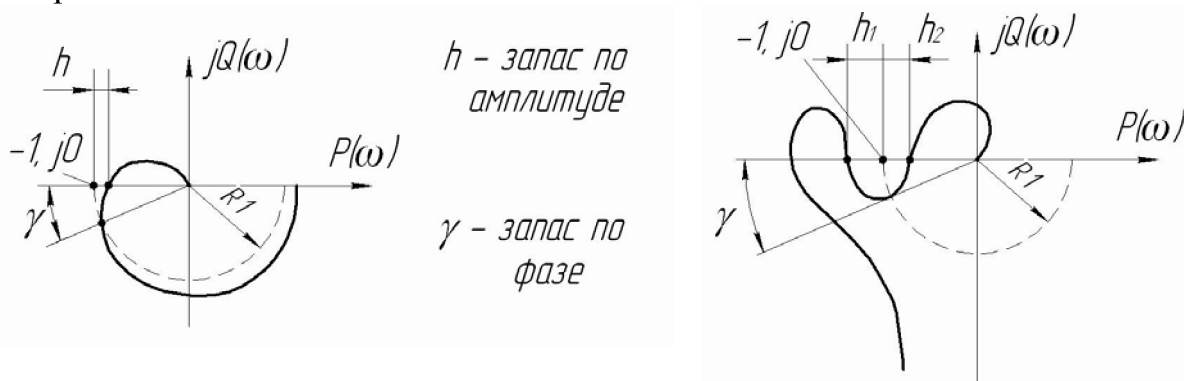
$\omega = 0 \div \infty, K = 10, T = 1.$

$\omega$	0	1	3	10	$\infty$
$P(\omega)$	-10	-5	-1	-0,1	0
$Q(\omega)$	$-\infty$	-5	$-\frac{1}{3}$	-	0



### Запас устойчивости системы

Если АФХ разомкнутой системы проходит через критическую точку, то такая система находится на границе устойчивости. Такую систему принято считать неработоспособной, так как в процессе изготовления и эксплуатации параметры могут изменить свое значение. Система должна обладать запасом устойчивости. Запас устойчивости можно оценить степенью удаленности АФХ от критической точки.



### Определение устойчивости по ЛЧХ разомкнутой системы

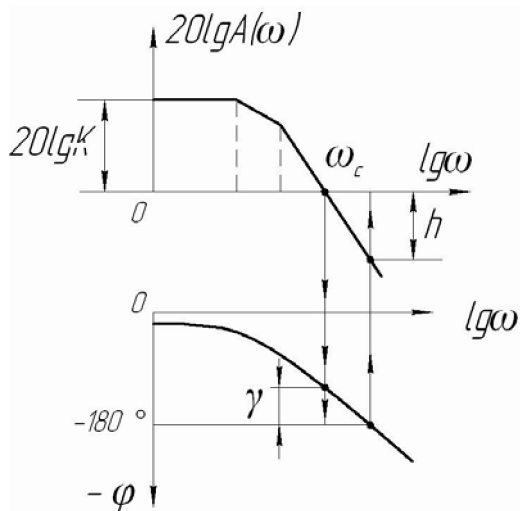
Если АФХ пересекает вещественную ось левее критической точки, то это означает, что амплитуда выходного сигнала будет больше амплитуды входного сигнала, а сдвиг по фазе составит  $-\pi$ . При замыкании этой системы возникнут колебания с нарастающей амплитудой. Если АФХ пересекает вещественную ось правее критической точки, то амплитуда выходного сигнала будет меньше амплитуды входного сигнала, и при замыкании схемы колебания начнут затухать.

Метод ЛЧХ является основным методом анализа и синтеза САУ.

При последовательном соединении:

$$20\lg A_i(\omega) = 20\lg A_1(\omega) + 20\lg A_2(\omega) + \dots$$

$$\varphi_i(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) + \dots$$



$\gamma$  — запас устойчивости по фазе;

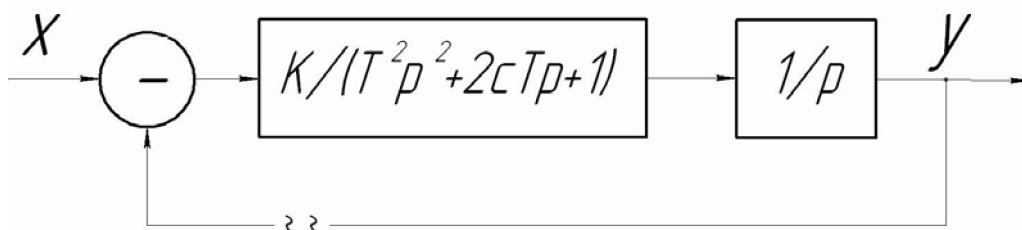
$h$  — амплитудный запас устойчивости;

$\omega_{\text{среза}} = \omega_c$  — частота среза, где ЛАЧХ пересекается с осью частот ( $\lg \omega$ ).

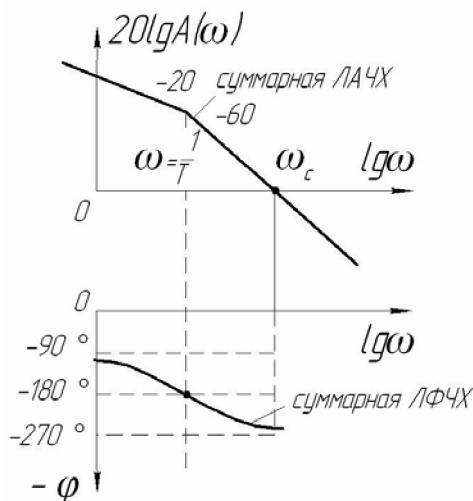
**Вывод:** если ЛАЧХ пересекает ось частот раньше, чем фазовая характеристика со значением  $-180^\circ$ , то такая система устойчива. Иначе — неустойчива.

Обычно рекомендуется запас по фазе выбирать не менее  $30^\circ$ , а по амплитуде —  $6$  дБ.

**Пример:**



$$W(p) = \frac{K}{T^2 p^2 + 2cTp + 1}, \quad W(p) = \frac{K}{p}$$



### Определение областей устойчивости. Метод Д-разбиения

Все рассмотренные до сих пор методы позволяют определять устойчивость при каких-то значениях параметров. Построение области при изменении какого-либо параметра связано с большой трудоемкостью. Эти методы не позволяют выделить область измененных параметров, при которых система устойчива.

Метод Д-разбиения позволяет выделить целую область изменяемых параметров, при которых система устойчива.

Д-разбиение – это линия, которая делит плоскость параметров на различные области, в которых имеются корни с различными значениями в вещественной части.

### Определение устойчивости при изменении одного из параметров системы

Пусть система описывается дифференциальным уравнением, характеристическое уравнение которого:

$$\left( a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + \dots + a_1 \cdot p + a_0 \right) = 0 \quad (1)$$

$a_0, a_1, \dots, a_n$  — параметры, характеризующие свойства системы.

Пусть  $\tau$  — изменяемый параметр в уравнении (1). Пусть  $\tau$  линейно входит в уравнение (1).  $p = j\omega$ . Тогда (1) предстанет в виде:

$$P(\omega) + \tau \cdot Q(\omega) = 0.$$

$$\tau = -\frac{P(\omega)}{Q(\omega)} = C(\omega) + jB(\omega).$$

$C(\omega), B(\omega)$  — комплексная плоскость (плоскость параметров).

Кривая Д-разбиения — кривая, которая разбивает плоскость на несколько областей. Кривая Д-разбиения, построенная в плоскости

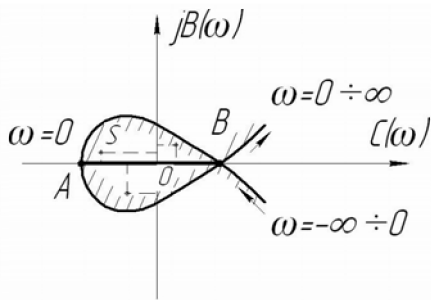


Рисунок 2

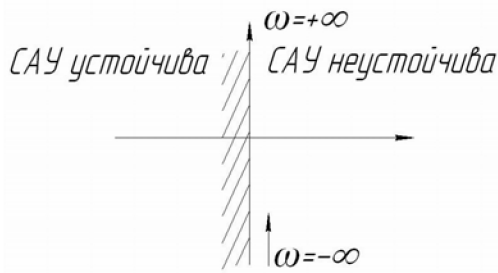


Рисунок 1

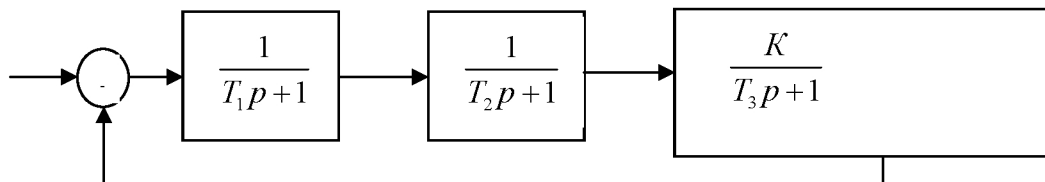
параметров, соответствует оси мнимых корней уравнения (см. рисунок 1). А так как при изменении  $\omega = -\infty \div \infty$  корни уравнения, соответствующие устойчивой САУ, располагаются слева относительно оси мнимых корней, то при построении Д – разбиения область устойчивости штрихуется слева. Эта кривая разделяет область параметров на несколько областей, соответствующих различным значениям корней характеристического уравнения. Наиболее вероятным претендентом на устойчивость является область  $S$ . Чтобы удостовериться в этом, в уравнении (1) численные значения параметра  $\tau$  задают из области  $S$ . Если система окажется устойчивой при этом значении фиксированного параметра, то  $S$  является

областью устойчивости. Так как физические параметры системы не комплексные, а вещественные, численное значение  $\tau$  выбирается от  $A$  до  $B$  по вещественной оси  $C(\omega)$ .

Пример:

**Построить границу Д-разбиения при изменении параметра  $k$**

$$(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)(1 + T_3 p) + K = 0 \quad (1)$$



$$T_1 = 0,1 \text{ с};$$

$$T_2 = 0,2 \text{ с};$$

$$T_3 = 0,5 \text{ с};$$

$$K = \text{var};$$

$$T_1 T_2 T_3 p^3 + (T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3) p^2 + (T_1 + T_2 + T_3) p + K + 1 = 0,$$

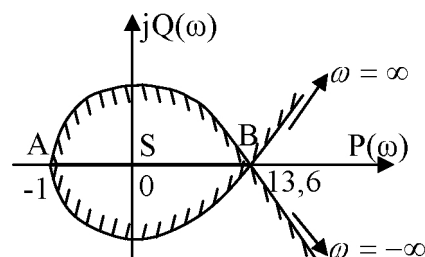
– характеристическое уравнение замкнутой системы.

$$0,01 p^3 + 0,17 p^2 + 0,8 p + K + 1 = 0,$$

$$K = -0,01 p^3 - 0,17 p^2 - 0,8 p - 1,$$

$$p = j\omega, \quad K = -0,01 j\omega^3 - 0,17 j\omega^2 - 0,8 j\omega - 1 = 0,17\omega^2 - 1 + j(0,1\omega^3 - 0,8\omega) = P(\omega) + Q(\omega)$$

$\omega$	0	2	4	6	9	12	20	$\infty$
$P(\omega)$	-1	-0,72	1,88	5,48	13,6	25	72	$+\infty$
$Q(\omega)$	0	-1,52	-2,58	-2,64	0	7,7	64	$+\infty$



При  $\omega = -\infty \div +\infty$  кривая Д-разбиения штрихуется слева.

Область  $S$  является претендентом на область устойчивости. Чтобы убедиться в этом, возьмем какую-либо точку из этой области, например  $(0, j0)$  – начало координат. Это соответствует  $K=0$ .

$$(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)(1 + T_3 p) = 0$$

$$p_1 = -\frac{1}{T_1}; \quad p_2 = -\frac{1}{T_2}; \quad p_3 = -\frac{1}{T_3}.$$

Все корни отрицательны, следовательно, САУ устойчива и вся область  $S$  является областью устойчивости системы.

В реальной системе величина коэффициента усиления является действительным значением, поэтому областью устойчивости является отрезок АВ.

Отрицательный коэффициент  $K=0 \div -1$  соответствует положительной обратной связи в системе.

#### 7.14 Определение области устойчивости при изменении двух параметров

Во многих случаях при исследовании на устойчивость возникает необходимость определения устойчивости при изменении двух параметров.

Пусть изменяемыми параметрами являются  $\nu$  и  $\tau$ . Постановка задачи: определить область устойчивости при изменении двух параметров.

Представим характеристический полином в виде:

$$P(p)\nu + Q(p)\tau + R(p) = 0 \quad (2)$$

$Q(p)$  - полином, который содержит варьируемый параметр  $\tau$ ;

$P(p)$  - полином, который содержит варьируемый параметр  $\nu$ ;

$R(p)$  - полином, который не содержит ни  $\tau$ , ни  $\nu$ ;

Полагаем, что  $\tau$  и  $\nu$  входят линейно в уравнение (2).  $\underline{p = j\omega}$ .

$$\begin{cases} P(j\omega) = P_1(\omega) + jP_2(\omega), \\ Q(j\omega) = Q_1(\omega) + jQ_2(\omega), \\ R(j\omega) = R_1(\omega) + jR_2(\omega); \end{cases} \quad (4)$$

$$P(j\omega)\nu + Q(j\omega)\tau + R(j\omega) = 0 \quad (3)$$

Подставляя (4) в (3), получаем два уравнения:

$$\begin{cases} \text{вещественное уравнение:} \\ P_1(\omega)\nu + Q_1(\omega)\tau + R_1(\omega) = 0, \\ \text{мнимое уравнение:} \\ P_2(\omega)\nu + Q_2(\omega)\tau + R_2(\omega) = 0. \end{cases} \quad (5)$$

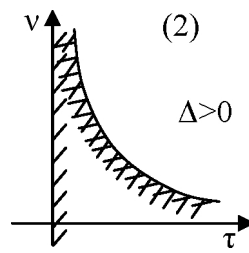
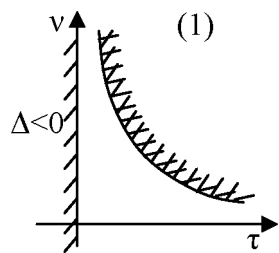
Имея два уравнения с двумя неизвестными можно найти параметры  $\tau$  и  $\nu$

$$\nu = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad \tau = \frac{\Delta_2}{\Delta}.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} P_1(\omega) & Q_1(\omega) \\ P_2(\omega) & Q_2(\omega) \end{vmatrix},$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -R_1(\omega) & Q_1(\omega) \\ -R_2(\omega) & Q_2(\omega) \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} P_1(\omega) & -R_1(\omega) \\ P_2(\omega) & -R_2(\omega) \end{vmatrix}$$



При некоторых значениях  $\omega$  главный определитель  $\Delta$  может обратиться в нуль. Если одновременно будет  $\Delta_1 = 0$  и  $\Delta_2 = 0$ , то в этом случае на плоскости параметров будет отображаться не точка, а прямая, которая называется особой прямой. Это бывает при  $\omega=0$  или  $\omega = \infty$ .

И в уравнении (5) каждое из уравнений отличается на постоянный множитель (система вырождается).

Штриховка особой прямой проводится таким образом, чтобы заштрихованные части были направлены друг к другу (2) или друг от друга (1).

Пример:

$$T_1 = \nu;$$

$$T_2 = 1 \text{ с};$$

$$T_3 = 10 \text{ с};$$

$$K+1 = \tau;$$

Необходимо определить область устойчивости, когда два параметра  $\tau$  и  $\nu$  варьируются.

$$10\nu p^3 + (11\nu + 10)p^2 + (\nu + 11)p + \tau = 0,$$

$$p = j\omega,$$

$$-10j\nu\omega^3 - (11\nu + 10)\omega^2 + (\nu + 11)j\omega + \tau = 0;$$

$$\begin{cases} -11\nu\omega^2 + \tau - 10\omega^2 = 0, \\ -10\nu\omega^3 + \nu\omega + 11\omega = 0; \end{cases}$$

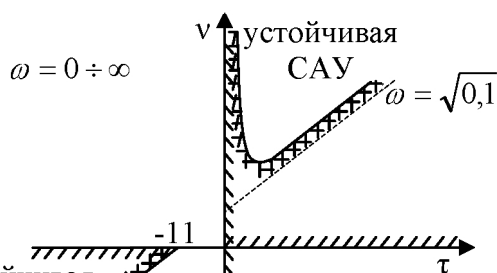
$$\Delta = \begin{vmatrix} -10\omega^2 & 1 \\ -10\omega^3 + \omega & 0 \end{vmatrix} = 10\omega^3 - \omega,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -10\omega^2 & 1 \\ -11\omega & 0 \end{vmatrix} = 11\omega,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -11\omega^2 & 10\omega^2 \\ -(10\omega^3 - \omega) & -11\omega \end{vmatrix} = 121\omega^3 + 10\omega^2(10\omega^3 - \omega) = 121\omega^3 + 100\omega^5 - 10\omega^3 = 111\omega^3 + 100\omega^5$$

$$\nu = \frac{11\omega}{10\omega^3 - \omega} = \frac{11}{10\omega^2 - 1};$$

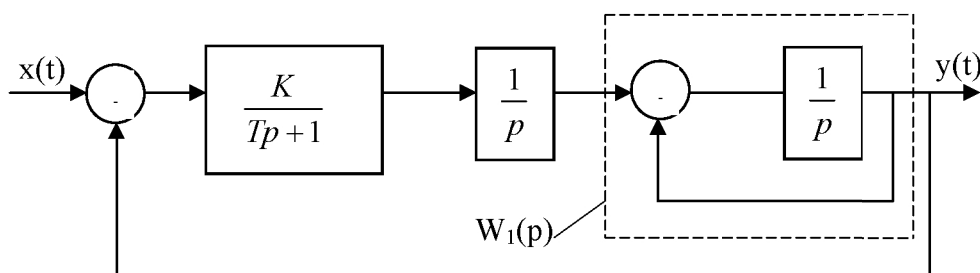
$$\tau = \frac{111\omega^3 + 100\omega^5}{10\omega^3 - \omega} = \frac{100\omega^4 + 111\omega^2}{10\omega^2 - 1}.$$



$$\begin{aligned} \omega=0, \quad v=-11, \quad \tau=0. \\ \omega=\infty, \quad v=0, \quad \tau=\infty. \end{aligned}$$

### 7.15 Структурно-устойчивые и структурно-неустойчивые системы

Если систему можно за счет изменения элементов системы сделать устойчивой, она называется **структурно-устойчивой**.



$$W_1(p) = \frac{\frac{1}{p}}{1 + \frac{1}{p}} = \frac{1}{p+1};$$

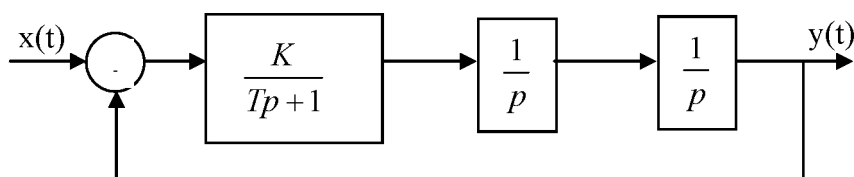
$$W_p(p) = \frac{K}{Tp+1} \cdot \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{p+1};$$

$$W_3(p) = \frac{W_p(p)}{1+W_p(p)} = \frac{K}{(Tp+1)p(p+1)+K};$$

$Tp^3 + (T+1)p^2 + p + K = 0$  - х.у. замкнутой системы.

Эту систему можно сделать устойчивой за счет подбора коэффициентов  $K$  и  $T$ .

$(T+1) \cdot 1 > K \cdot T$  - условие устойчивости по Гурвицу.



$$W_p(p) = \frac{K}{Tp+1} \cdot \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{p+1};$$

$$W_3(p) = \frac{K}{(Tp+1)p^2 + K};$$

$Tp^3 + p^2 + 0 \cdot p + K = 0$  - х.у. замкнутой системы.

$a_1=0$  – Система неустойчива не при каких значениях параметров.

Система называется **структурно-неустойчивой**, если её невозможно сделать устойчивой за счет изменения параметров.

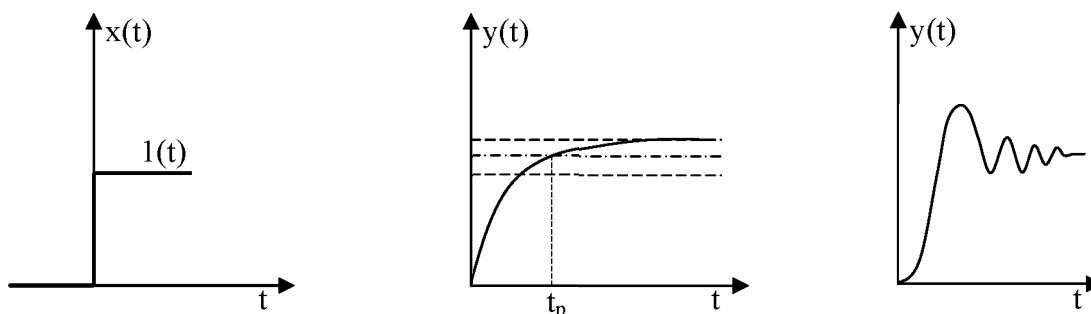
Для обеспечения устойчивости такой системы, необходимо ввести в систему корректирующие звенья или обратные связи, как в первом примере.

## 8 Качество процесса управления. Коррекция систем управления. Показатели качества переходного процесса

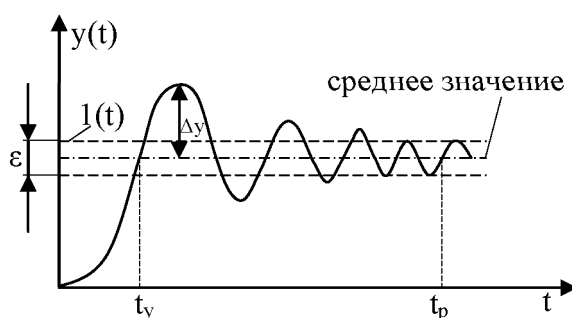
Основное требование, предъявляемое к системе – устойчивость. Но даже устойчивая система может оказаться неработоспособной. Она должна удовлетворять некоторым показателям качества. В установившемся режиме качество процесса управления характеризуется статической ошибкой, ошибкой по фазе, ошибкой по амплитуде. В переходном режиме качество процесса управления характеризуется по переходному процессу.

### 8.1 Характеристики переходного процесса:

#### 1) Характер переходного процесса (монотонный и колебательный).



#### 2) Время регулирования.



$t_p$  – время регулирования.

### 3) Статическая ошибка:

$$\varepsilon = y(t) - x(t),$$

$$\varepsilon = 3...5\%.$$

### 4) Максимальное перерегулирование:

$$\Delta y = \frac{y_{\max} - y_{уст}}{y_{уст}} \cdot 100\% - \text{характеризует колебательные системы.}$$

$$\Delta y < 20...30\%.$$

$\Delta y$  влияет на колебательность системы, что в ряде случаев для мех. систем приводит к большим инерционным перегрузкам, что нежелательно.

В химической промышленности переходный процесс должен носить монотонный характер. Иначе он может привести к порче компонентов.

5)  $t_y$  - время установления первого согласования  $y(t)=x(t)$ . Основные качественные показатели  $\omega$  и  $T$ .

Переходный процесс может быть получен тремя способами:

1. расчетный;
2. экспериментальный;
3. моделирование.

## 8.2 Анализ качества переходного процесса по корням характеристического уравнения

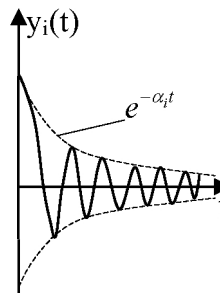
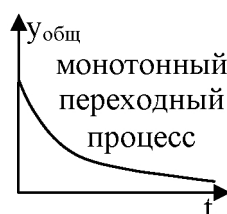
Этот способ применяется в том случае, если имеются в наличии корни х.у. системы. Известно общее решение системы в виде:

$$y_{\text{общ}}(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{p_i t}, \quad p_i - \text{корни х.у.}$$

а)  $p_{i, i+1} = -\alpha_i \pm j\omega_i$  - если имеются комплексно-сопряженные корни.

$$y_{\text{общ}}(t) = \sum_{i=1}^n e^{-\alpha_i t} (C_i \cos \omega_i t + C_{i+1} \sin \omega_i t).$$

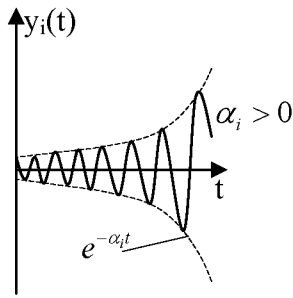
б)  $\omega_i = 0$



$$\mu_k = \frac{\omega_k}{\alpha_k} - \text{показатель колебательности k-ой составляющей.}$$

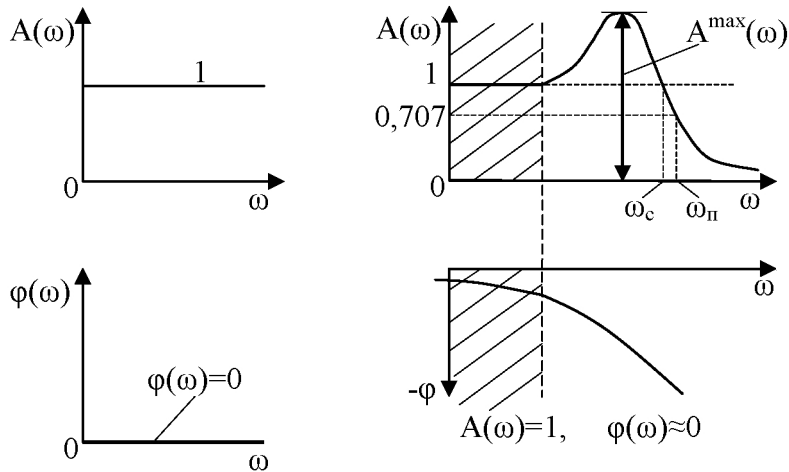
При  $\omega_k = 0$ ,  $\mu_k = 0$  - процесс будет монотонным.

$f_k = \frac{2\pi}{\omega_k}$  - частота k-ой составляющей.



### 8.3 Анализ качества переходного процесса по частотным характеристикам

Для идеального звена частотная характеристика имеет вид:



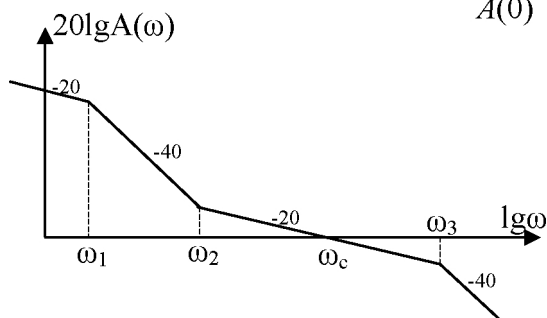
$0 < \omega < \omega_{II}$  - частота пропускания.

$$\omega_{II} = \frac{A(0)}{\sqrt{2}} = 0,707.$$

$\omega_c$  - частота среза.

Чем шире полоса пропускания, тем лучше, т.е. без искажений, проходит и входной сигнал. Однако также будут хорошо проходить и помехи. Вводим

показатель колебательности  $M = \frac{A^{max}(\omega)}{A(0)}$ .



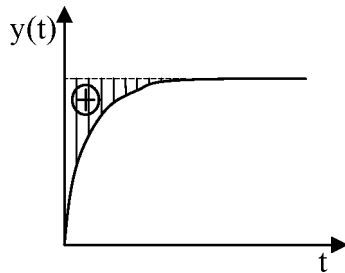
$$t_p \approx \frac{2\pi}{\omega_c}$$

$\omega_c, \omega_1, \omega_2, \omega_3 \rightarrow t_p, M, \varepsilon$  можно найти по этим параметрам.

### 8.4 Интегральные оценки качества переходного процесса.

Все рассмотренные до сих пор показатели переходного процесса дают одностороннюю оценку.

Возникает вопрос, можно ли оценить качество переходного процесса каким-либо одним обобщенным показателем. Это возможно.



$$\varepsilon(t) = y(t) - x(t)$$

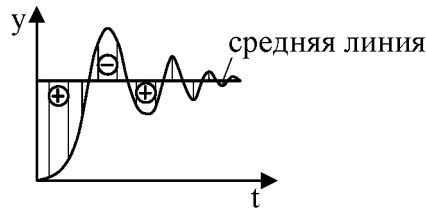
Вводится так называемая линейная интегральная оценка:

$$I_{00} = \int_0^{\infty} \varepsilon(t) dt = \int_0^{\infty} [y(t) - x(t)] dt .$$

Чем меньше значение этого интеграла, тем реальная система ближе к идеальной.

$I_{00}$  справедлива только для монотонных процессов.

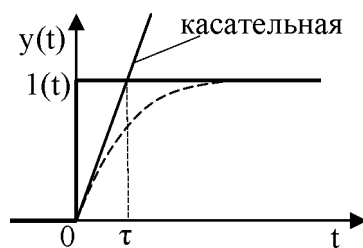
$$I_{01} = \int_0^{\infty} |\varepsilon(t)| dt$$



$$I_0 = \int_0^{\infty} \varepsilon^2(t) dt - \text{квадратичная интегральная оценка.}$$

$$I_0 = \int_0^{\infty} [\varepsilon^2(t) + \tau^2 \dot{\varepsilon}^2(t)] dt - \text{интегральная оценка, учитывающая производные от}$$

ошибки.



Существуют интегральные оценки, учитывающие первые, вторые и более высокие производные.

И степень приближения реальной системы оценивается к монотонному процессу степенью приближения.

## 9 Коррекция систем АУ

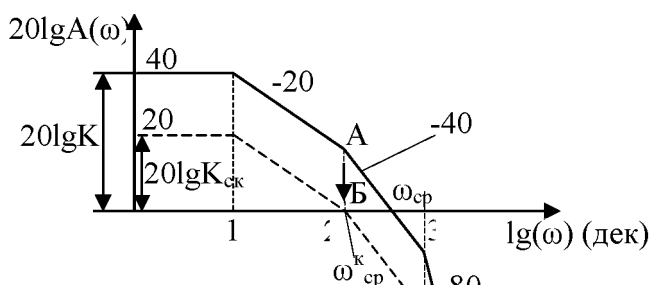
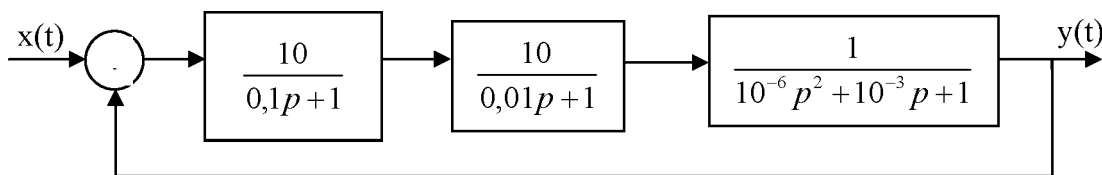
Коррекция САУ производится с целью обеспечения устойчивости, получения необходимых показателей качества, статической ошибки и т.д.

Проще всего коррекции проводить по ЛАЧХ, с дальнейшим уточнением расчетов на ЭВМ.

**Коррекция проводится тремя способами:**

1. Коррекция за счет изменения коэффициента усиления разомкнутой системы.
2. Коррекция за счет последовательного корректирующего контура.
3. Коррекция за счет параллельного корректирующего контура.

**9.1 Коррекция за счет изменения коэффициента усиления разомкнутой системы.**



$$20 \lg K = 20 \lg 100 = 40$$

$$\omega_1 = \frac{1}{T_1} = \frac{1}{0,1} = 10, \quad \lg 10 = 1 \text{дек}$$

$$\omega_2 = \frac{1}{T_2} = \frac{1}{0,01} = 100, \quad \lg 100 = 2 \text{дек}$$

$$\omega_3 = \frac{1}{T_3} = \frac{1}{0,001} = 1000, \quad \lg 1000 = 3 \text{дек}$$

Предположим, что к данной системе предъявляется требование монотонности переходного процесса.

**Процесс будет монотонным**, если выше оси частот ЛАЧХ имеет наклон более -20дБ/дек.

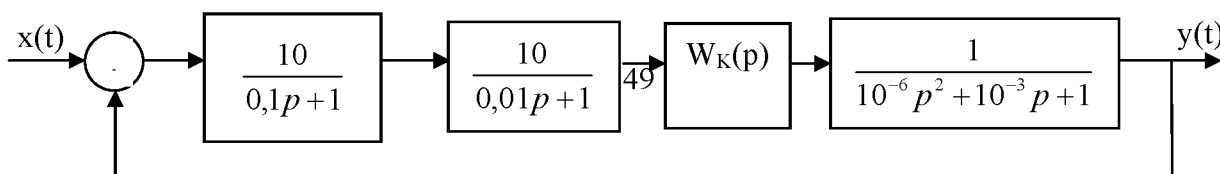
$$20 \lg K_{ск} = 20, \quad \lg K_{ск} = 1, \quad K_{ск} = 10.$$

**Вывод:** для коррекции необходимо, чтобы точка А стремилась в точку Б путем снижения коэффициента усиления, отсюда  $K_{ск}=10$  (коэффициент усиления скорректированной системы).

$$t_p \approx \frac{2\pi}{\omega_{cp}}$$

С уменьшением коэффициента усиления добились монотонности переходного процесса, но другие показатели качества, например, быстродействие, ухудшилось (время регулирования  $t_p$  увеличилось).

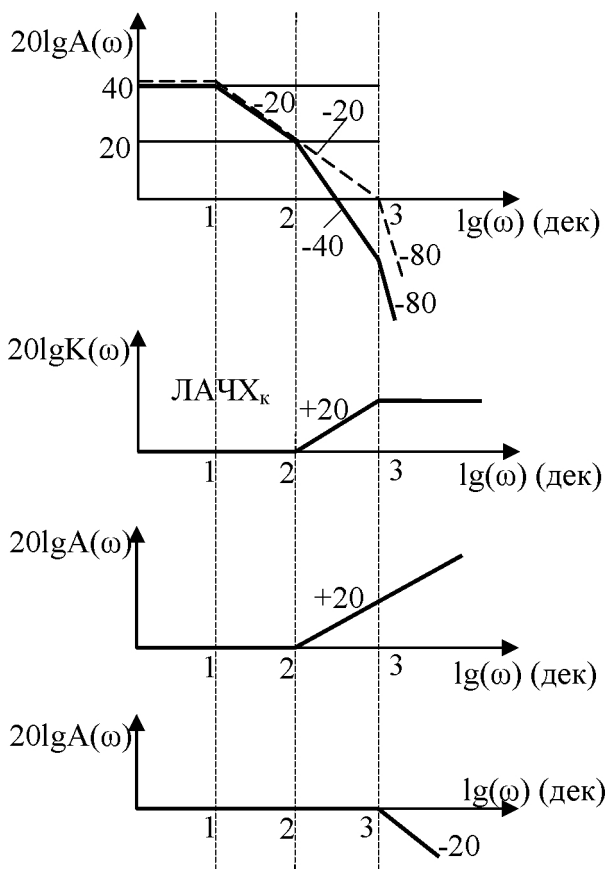
**9.2 Коррекция за счет последовательного корректирующего контура**



**Требования к системе:**

1. Монотонность;
2.  $t_p \leq 0,006c$ .

При последовательном соединении элементов передаточная функция разомкнутой системы равна произведению отдельных элементов и корректирующего контура. Следовательно, ЛАЧХ равно сумме всех составляющих элементов и корректирующего контура.



$$\text{ЛАЧХ}_{\text{жел}} - \text{ЛАЧХ}_{\text{исх}} = \text{ЛАЧХ}_k$$

$$W(p) = K(Tp + 1)$$

$$W(p) = \frac{K}{Tp + 1}$$

Коррекция последовательным корректирующим контуром осуществляется в три этапа:

1. Строится желаемая ЛАЧХ, исходя из требований по качеству управления.
2. Из желаемой ЛАЧХ вычитается ЛАЧХ исходной системы и определяется ЛАЧХ корректирующего контура.

3. По ЛАЧХ корректирующего контура определяется передаточная функция корректирующего контура. И по нему определяется техническая реализация.

Процесс монотонный, если выше оси частот ЛАЧХ имеет наклон не более -20дБ/дек. Определяем  $\omega_{cp} = \frac{2\pi}{t_p} = \frac{2\pi}{0,006} \approx 1000$ ,  $\lg 1000 = 3 \text{дек}$ .

Для обеспечения предъявленных требований по качеству необходимо в области частот, которые существенно влияют на качество, строим желаемую характеристику ЛАЧХ (пунктирная линия).

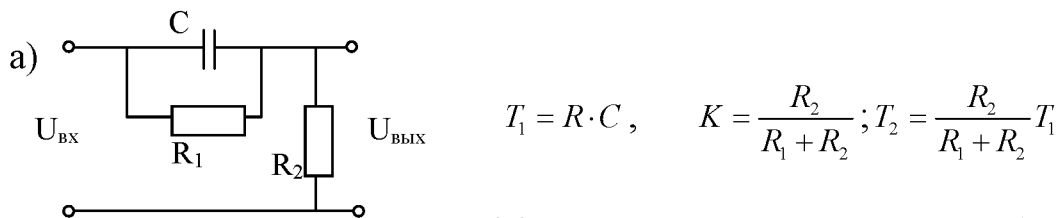
$$W_K(p) = \frac{0,01p+1}{0,001p+1} = W_{K1}(p) \cdot W_{K2}(p)$$

$$2 \text{дек} = 100;$$

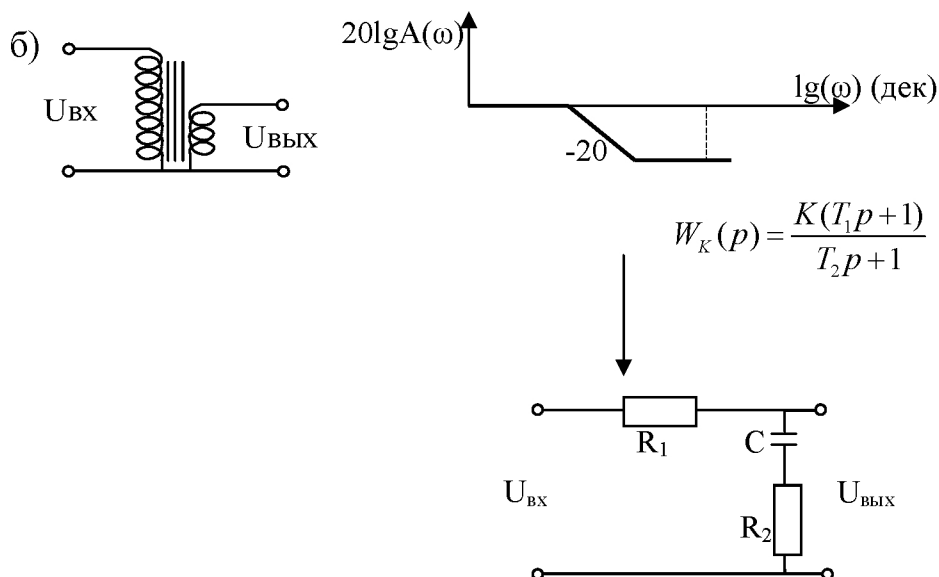
$$\omega_1 = \frac{1}{T_1}, \quad T_1 = \frac{1}{100};$$

$$\omega_2 = \frac{1}{T_2}, \quad T_2 = \frac{1}{1000};$$

Пример технической реализации корректирующего звена



Интерпретация интегродифференцирующего звена (техническая реализация) (



### Недостатки последовательного корректирующего контура

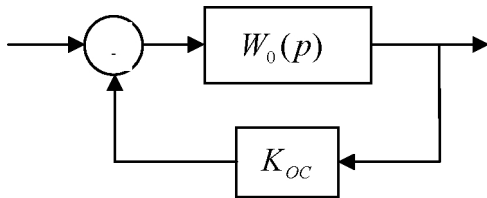
1. Наличие громоздких конденсаторов;
2. Помехи и шумы.

### 9.3 Коррекция за счет параллельных корректирующих элементов

Параллельно корректирующие контура обеспечивают большую устойчивость к шумам и помехам.

В параллельно корректирующий контур может быть установлен статический элемент. В этом случае система называется с жесткой обратной связью (ОС). Если в ОС стоит идеальный дифференцирующий элемент, то в этом случае система называется с гибкой обратной связью.

#### I Коррекция жесткой ОС



$$W_{oc}(p) = K_{oc}$$

Оценим, каким образом  $K_{oc}$  влияет на характеристики САУ (ни рисунке).

$$1. \quad W_o(p) = \frac{K_0}{T_0 p + 1}.$$

$$W(p) = \frac{W_o(p)}{1 + W_o(p)W_{oc}(p)} = \frac{\frac{K_0}{T_0 p + 1}}{1 + \frac{K_0}{T_0 p + 1} \cdot K_{oc}} = \frac{K_0}{T_0 p + 1 + K_0 \cdot K_{oc}} = \frac{K}{T p + 1};$$

$$K = \frac{K_0}{1 + K_0 K_{oc}}, \quad T = \frac{T_0}{1 + K_0 K_{oc}}.$$

**Вывод:** При обхвате апериодического звена жесткая ОС получается апериодическое звено с постоянной времени и коэффициентом усиления, меньшими, чем исходном звене.

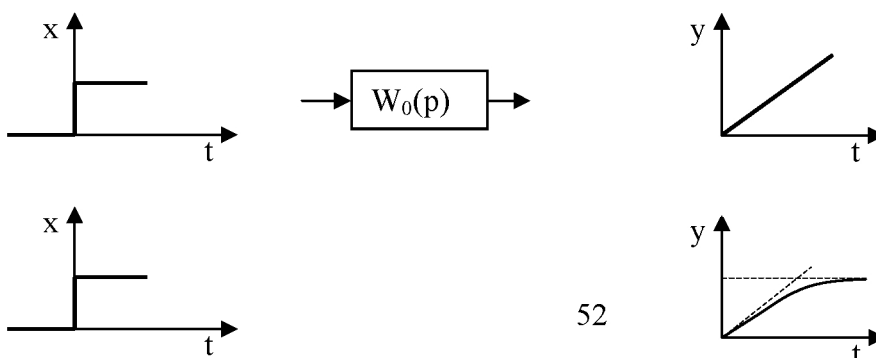
При обхвате колебательного звена уменьшается колебательность.

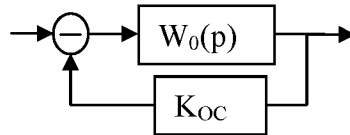
$$2. \quad W_o(p) = \frac{K_0}{p}.$$

$$W(p) = \frac{\frac{K_0}{p}}{1 + \frac{K_0}{p} \cdot K_{oc}} = \frac{K_0}{p + K_0 \cdot K_{oc}} = \frac{K}{T p + 1};$$

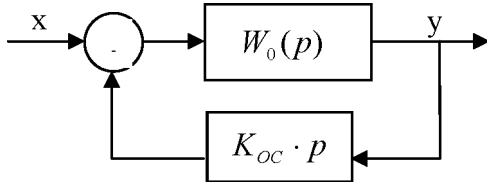
$$K = \frac{1}{K_{oc}}, \quad T = \frac{1}{K_0 K_{oc}}.$$

**Вывод:** При обхвате интегрирующего звена жесткой ОС, оно преобразовалось в апериодическое. Это благотворно влияет на устойчивость и качественные характеристики.





## 2 Коррекция гибкой ОС



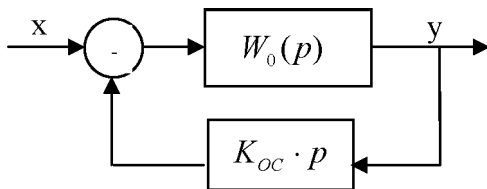
1.  $W_o(p) = \frac{K_0}{T_0 p + 1}$ .

$$W(p) = \frac{W_o(p)}{1 + W_o(p)W_{oc}(p)} = \frac{\frac{K_0}{T_0 p + 1}}{1 + \frac{K_0}{T_0 p + 1} \cdot K_{oc} \cdot p} = \frac{K_0}{1 + (K_0 \cdot K_{oc} + T_0)p} = \frac{K}{T p + 1};$$

$$K = K_0, \quad T = T_0 + K_0 K_{oc}.$$

**Вывод:** В результате обхвата с ГОС получилось апериодическое звено с тем же коэффициентом усиления  $K_0$ , а постоянная времени увеличилась.

В случае положительной ОС постоянная времени уменьшается.

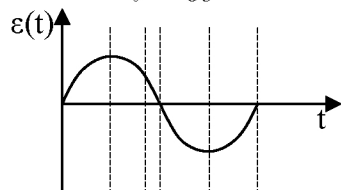


$$W(p) = \frac{W_o(p)}{1 - W_o(p)W_{oc}(p)};$$

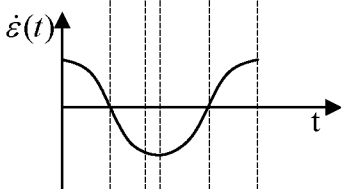
1.  $W_o(p) = \frac{K_0}{p}$ .

$$W(p) = \frac{\frac{K_0}{p}}{1 + \frac{K_0}{p} \cdot K_{oc} \cdot p} = \frac{K_0}{p(1 + K_0 \cdot K_{oc})} = \frac{K}{p};$$

$$K = \frac{K_0}{1 + K_0 \cdot K_{oc}}.$$



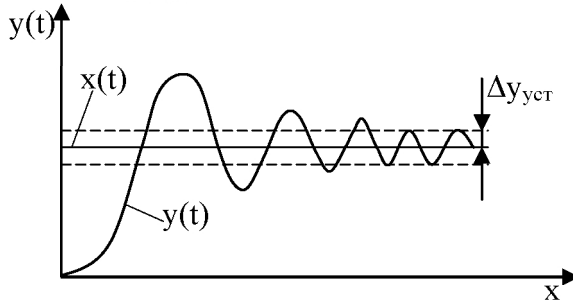
Сигнал ошибки ( $\varepsilon(t)$ )



$$\varepsilon(t) + \dot{\varepsilon}(t)$$

## Производная от сигнала ошибки ( $\dot{\varepsilon}(t)$ )

$\Delta y_{уст} = \frac{x}{1+K}$  - статическая ошибка в статической системе.



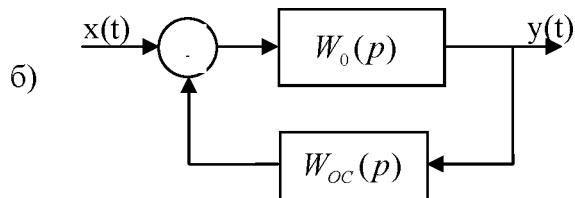
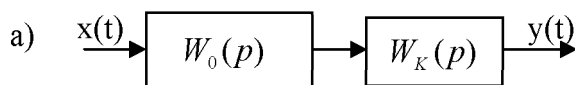
В статической системе точность зависит от коэффициента усиления. Уменьшая коэффициент усиления, можем обеспечить устойчивость, но время регулирования увеличивается, статическая ошибка так же увеличивается.

**Статическая система** – система, в которой статическая ошибка зависит от величины входного воздействия. В противном случае система – **астатическая**.

$\Delta y_{уст} = 0$  - астатическая САУ.

$\Delta y_{уст} \neq 0$  - статическая САУ.

В линейных системах коррекция последовательным и параллельным корректирующими контурами эквивалентны.



Под эквивалентностью понимается неизменность входных и выходных сигналов.

а)  $W(p) = W_0(p) \cdot W_k(p)$ ;

б)  $W(p) = \frac{W_0 p}{1 + W_0(p) \cdot W_{oc}(p)}$ .

а) и б) – эквивалентны.

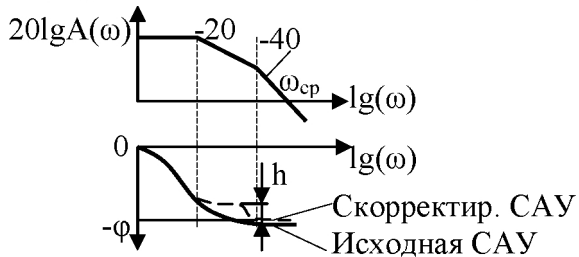
$$W_0(p) \cdot W_k(p) = \frac{W_0 p}{1 + W_0(p) \cdot W_{oc}(p)}$$

$$W_k(p) = \frac{1}{1 + W_0(p) \cdot W_{oc}(p)}$$

$$W_{oc}(p) = \frac{1 - W_k(p)}{W_o(p) \cdot W_k(p)}$$

**Вывод:** коррекция системы представляет собой творческую работу, которая во многом зависит от творчества и интуиции исполнителя. При этом приходится включать последовательный корректирующий контур с охватом одного или нескольких звеньев ОС и с изменением коэффициента усиления всей системы.

Обычно включают такие звенья, которые существенно влияют на качество управления. Обычно это в районе частоты среза.



$$W_k(p) = \frac{T_1 p + 1}{T_2 p + 1}$$

$h$  – запас устойчивости по амплитуде у скорректированной системы.

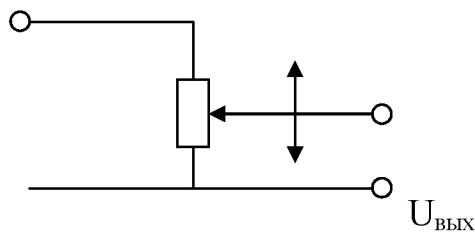
## 10 Нелинейные САУ и методы их исследования

### Общие сведения о нелинейных системах

Система называется нелинейной, если связь между выходными и входными величинами описывается нелинейными уравнениями (чаще  $d/y$ ).

Все реальные системы являются нелинейными. В природе не существует линейных систем и элементов.

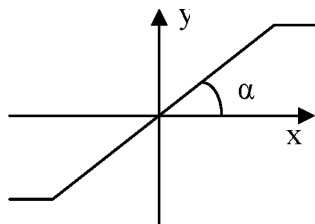
Нелинейные уравнения довольно часто заменяют линейными. Например, если зона нечувствительности элемента мала в сравнении с конечными отклонениями выходной величины, можно пренебречь петлей гистерезиса в электромашинном преобразователе и т.д.



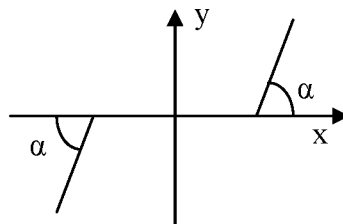
Потенциометр

Примером существенной нелинейности является двухпозиционное реле.

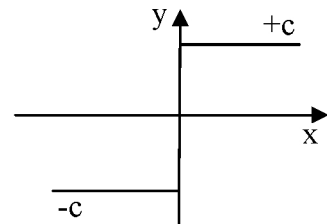
### Примеры типовых нелинейных звеньев



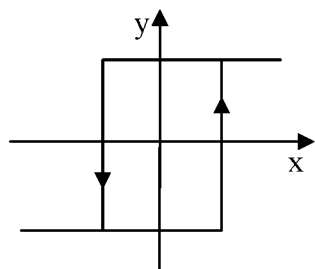
Звено с ограничением (насыщением)



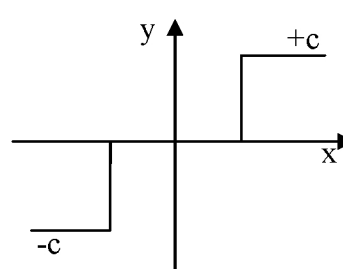
Звено с зоной нечувствительности



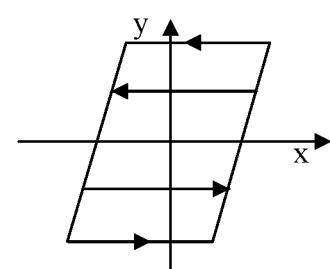
Идеальное двухпозиционное реле



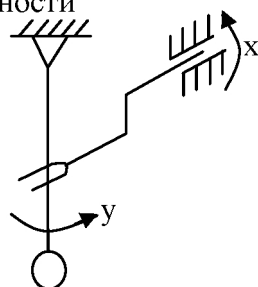
Двухпозиционное звено с зоной нечувствительности



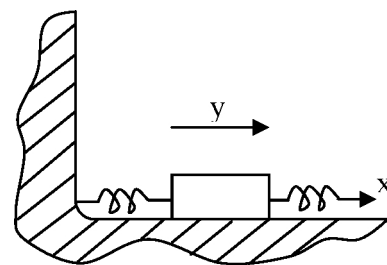
Трехпозиционное звено



Характеристика типа сухого трения



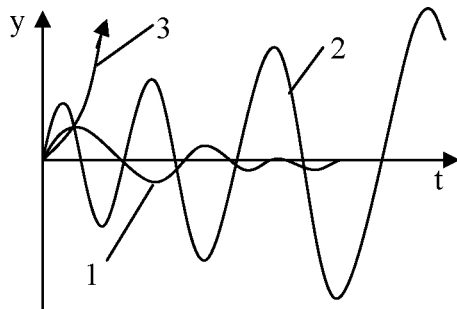
Пример звена с зоной нечувствительности



Физическая интерпретация типа сухого трения

Нелинейность существенно усложняет исследование систем, так как не существует общих методов решения нелинейных  $d/y$ .

Нелинейности оказывают как полезное, так и вредное воздействие. В отличие от линейных систем устойчивость, точность и качество переходного процесса зависит от величины внешнего воздействия. Так, одна и та же система при малых воздействиях является устойчивой, а при больших воздействиях неустойчивой.



*САУ в устойчивом и неустойчивом состоянии:*

1 – устойчивая система;  
2, 3 – неустойчивая система.

**Устойчивость в малом** – устойчивость системы при б.м. отклонениях от исходного режима.

**Устойчивость в большом** – устойчивость при конечных отклонениях, допустимых при работе САУ.

**Устойчивость в целом** – устойчивость при любых отклонениях, когда отклонения не оговорены.

Для анализа нелинейные системы разделяют линейную часть и нелинейную часть. Если система имеет хоть один нелинейный элемент, то методы исследования этих систем должны быть применены нелинейные.

## 10.1 Методы устойчивости по Ляпунову

**Теорема 1.** Если линеаризованная система устойчива, то устойчива и исходная нелинейная система.

**Теорема 2.** Если линеаризованная система неустойчива, то и неустойчива и исходная нелинейная система.

**Теорема 3.** Если линеаризованная система находится на границе устойчивости, то вопрос об устойчивости исходной нелинейной системе подлежит дополнительному исследованию по нелинейным уравнениям исходной системы.

Теорема Ляпунова позволяет судить об устойчивости нелинейной системы по линейным уравнениям.

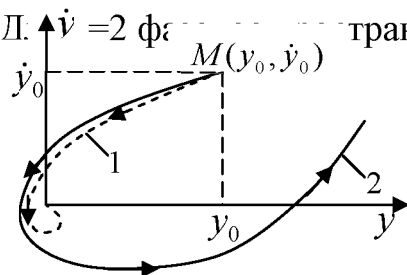
## 10.2 Метод фазовых траекторий

Этот метод позволяет судить об устойчивости нелинейных систем. Его отличает геометрическая наглядность. Пусть система (это суть метода) описывается д/у n-го порядка. Её состояние оценивается n числами, например значение функции и (n-1)-ых производных. Если система описывается д/у второго порядка:

$(a_2 p^2 + a_1 p + a_0)y(t) = x(t)$ , то состояние системы оценивается значением функции и её производной ( $y$  и  $\dot{y}$ ).

n-мерное пространство обычно называют **фазовым пространством**.

Д.  $\dot{y} = 2 \phi \varepsilon$  пространство определяется плоскостью.



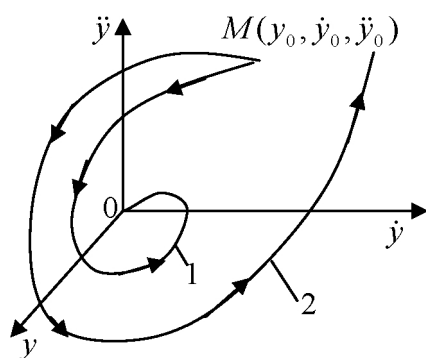
1 – изображающая тонкая;  
2 – фазовая траектория.

При изменении состояния системы изображающая точка на плоскости начинает перемещаться и описывать так называемую фазовую траекторию.

Состояние системы в каждый момент времени определяет изображающая точка.

$$(a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0)y(t) = x(t)$$

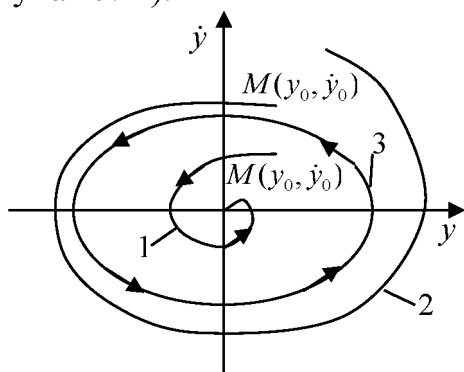
n=3 фазовое пространство является трехмерным.



Метод фазовых траекторий позволяет определить состояние системы без временной переменной, и его характеризует простая геометрическая наглядность. Этот метод является основным для исследования систем второго порядка.

В качестве начала координат фазового пространства выбирается исходный режим или невозмущенное движение (траектория движения КА).

По характеру фазовой траектории можно судить об устойчивости. Если фазовая траектория «стягивается» в начало координат, то такая система устойчива (случай устойчивости САУ №1). Иначе, система неустойчива (случай №2).

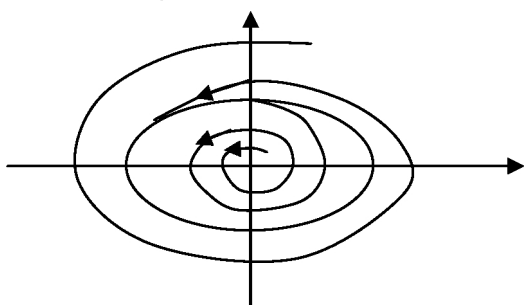


Если фазовая траектория имеет замкнутый вид, то такой процесс называется **предельный цикл** (случай №3). Такой системе соответствуют колебания с незатухающей амплитудой.

Изображающая точка движется всё время по одной траектории. Если фазовая траектория стремится в начало координат (случай 1), то САУ устойчива. В случае 2 – САУ неустойчива. САУ устойчива в малом (случай 2), и не устойчива - (случай 3) – предельный цикл.

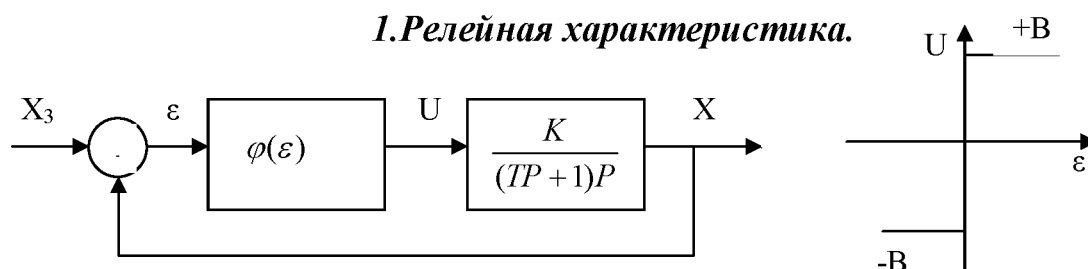
В линейной системе не удастся получить устойчивые незатухающие колебания. Малейшее изменение одного из параметров приведет либо к затуханию колебаний, либо к их увеличению.

В нелинейной системе автоколебания, как правило, устойчивы. Система устойчива в большом и неустойчива в малом.



### Пример. Фазовые траектории нелинейных систем.

#### 1. Релейная характеристика.



$$(TP + 1)PX = KU,$$

$$U = \varphi(\varepsilon),$$

$$\varepsilon = X_3 - X.$$

$(TP + 1)PX = K \cdot \varphi(X_3 - X)$  - получаем, исключив промежуточные переменные  $U$  и  $\varepsilon$ .

Произведем замену  $x = X - X_3$ ,  $PX = y$ .

$$(TP + 1)y = -y - K \cdot \varphi(x).$$

$$(1) \begin{cases} T \frac{dy}{dt} = -y - K\varphi(x) & (1)' \\ \frac{dx}{dt} = y & (2)' \end{cases}$$

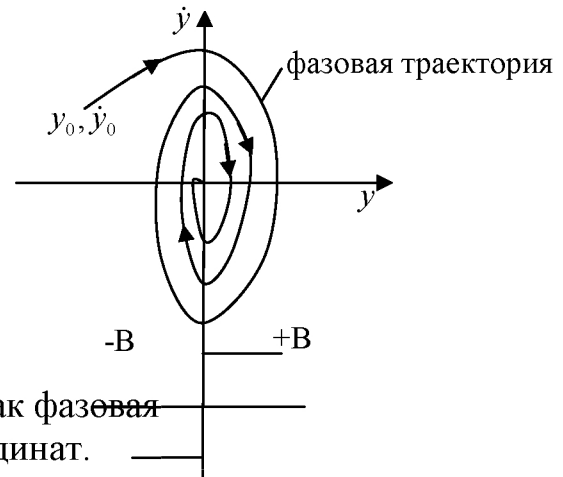
Теперь  $\frac{(1)'}{(2)'}$  и исключим время.

$$(2) T \frac{dy}{dx} = -1 - K \frac{\varphi(x)}{y} - d/y, \text{ в которой исключено время.}$$

На различных участках нелинейные характеристики  $\varphi(\varepsilon)$  д/у (2) распадается на два линейных д/у.

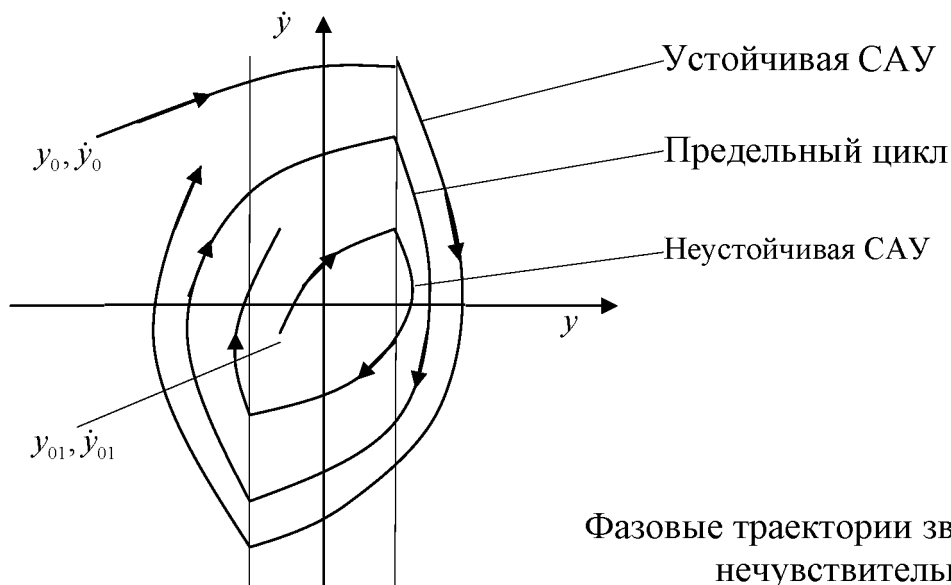
$$x = -T[y + K\varphi \ln(y - K\varphi)] + C_1,$$

$$C_1 = T[y_0 + K\varphi \ln(y - K\varphi)] + x_0.$$



Система является устойчивой, так как фазовая траектория «стягивается» в начало координат.

## 2. Возьмем другую нелинейность (зона нечувствительности).

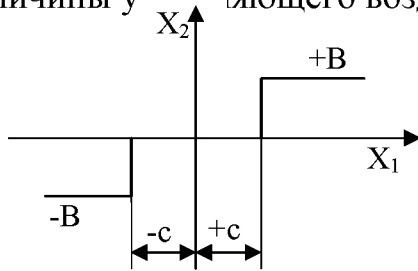


Фазовые траектории звена с зоной нечувствительности  
 Фазовая траектория соответствующая второму случаю (зона нечувствительности) соответствует: при начальных условиях  $y_0, \dot{y}_0$  соответствует устойчивой системе; при начальных условиях  $y_{01}, \dot{y}_{01}$

соответствует неустойчивой САУ (неустойчива в малом). Замкнутая фазная траектория – предельный цикл – соответствует незатухающим колебаниям, которые называются автоколебания.

### 10.3 Способы подавления автоколебаний в релейных системах\

Возникновение автоколебаний в релейных системах связано с тем, что исполнительный орган движется с постоянной скоростью независимо от величины управляющего воздействия.



При  $|x_1| > C$  исполнительный орган вследствие своей инерции проходит нейтральное положение и движется в противоположную сторону. Поэтому процесс будет повторяться.

Рис.1

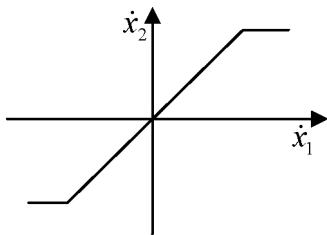


Рис.2

- 1) Для устранения автоколебаний необходимо, чтобы скорость перемещения исполнительного органа была линейной (рис.2). Т.е. необходима линеаризация нелинейного элемента.
- 2) Автоколебания можно исключить, если увеличить зону нечувствительности. Но это ухудшает точность и эксплуатационные характеристики системы.

3) Устранить автоколебания можно путем линеаризации релейного элемента. В этом случае на входе нелинейного элемента подаются высокочастотные колебания (ВЧК).

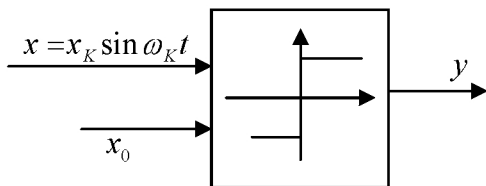


Рис.3

$\omega_k$  - частота ВЧК.

$x_k$  - амплитуда ВЧК.

$\omega_k$  выбирается таким образом, чтобы последующие звенья не пропускали высокую частоту, т.е. звенья являются фильтрами нижних частот и отсекают высокие частоты.

$$y_0 = \frac{T_1 C_1 - T_2 C_2}{T_1 + T_2} = 0 \quad (\text{к рис.4})$$

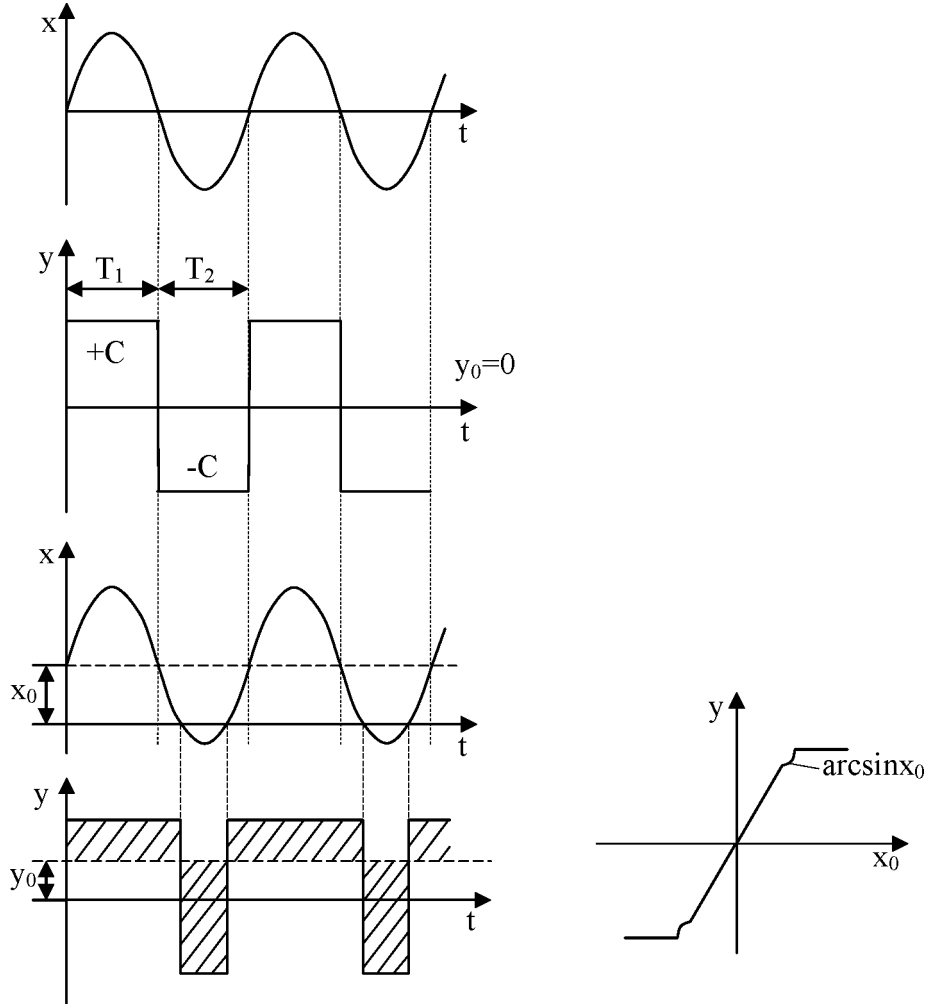
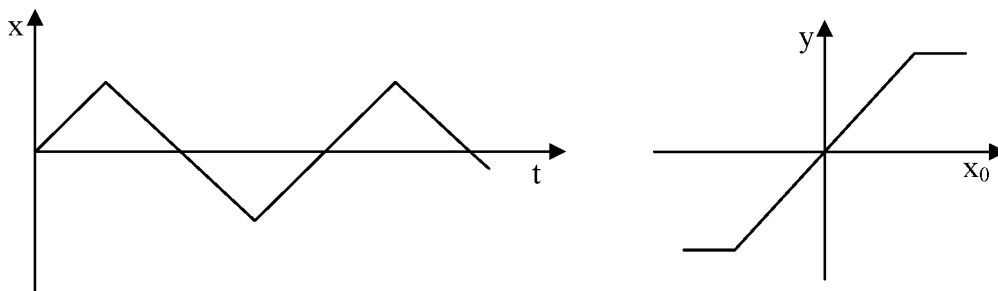


Рис.4

В результате подачи на НЭ (нелинейный элемент) ВЧК статическая характеристика НЭ будет почти линейной (рис. 4). Если на НЭ подать пилообразные колебания, то статическая характеристика НЭ будет иметь линейный характер.



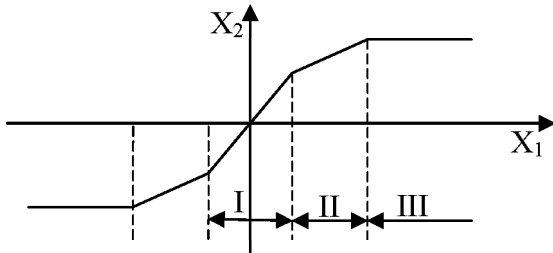
Операция по замене статической характеристики нелинейного элемента линейной статической характеристикой называется **вибрационной линейризацией**. Она значительно улучшает качественные характеристики по устойчивости, точности системы.

$$\frac{f_x}{f_{x_0}} \geq 3, \quad f_x - \text{частота [Гц]}.$$

## 10.4 Метод припасовывания

Это метод решения нелинейных д/у. Суть метода заключается в следующем:

проводиться линейная аппроксимация нелинейности, и на каждом из этих линейных участков д/у является линейным. При переходе к другому участку конечные условия для первого участка являются начальными для второго участка. При переходе к третьему участку конечные значения переменных второго участка являются начальными условиями для третьего участка и т.д. Метод чрезвычайно громоздкий и трудоёмкий.

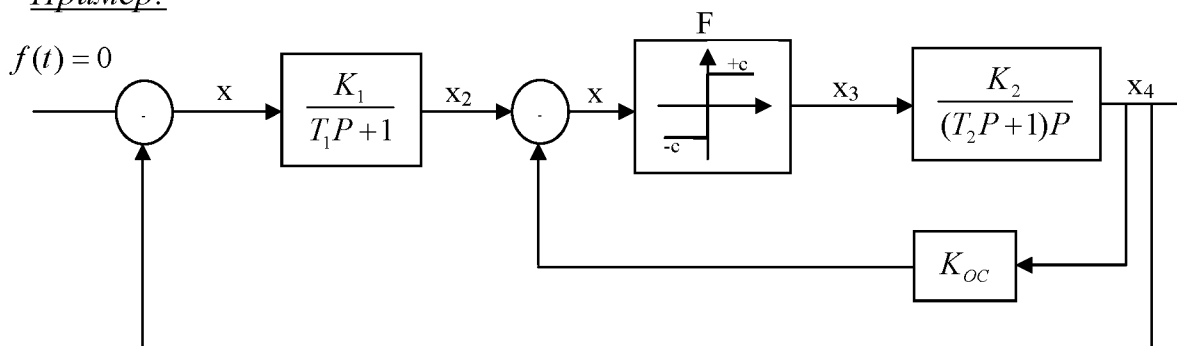


## 10.5 Метод гармонической линеаризации

Это основной метод (приближенный) исследования нелинейных элементов. Он справедлив для системы любого порядка. Основа этого метода заложена Боголюбовым.

Этот метод позволяет определить параметры предварительного цикла соответствующего автоколебательному режиму. Этот предельный цикл разделяет систему на переходные процессы устойчивые и неустойчивые.

Пример:



Составляем математическое описание этой системы.

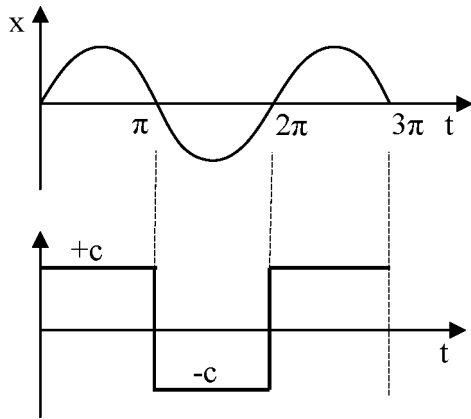
$$(T_1P + 1)x_2 = -K_1x_4,$$

$$x = x_2 - K_{oc}x_4,$$

$$x_3 = F(x),$$

$$(T_2P + 1)Px_4 = K_2x_3 \quad (0)$$

Метод гармонической линеаризации основан на предположении, что в системе действует синусоидальный сигнал (немного от него отличается).



Всякое периодическое движение можно разложить в ряд Фурье. В этом случае

$$x_3(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{K=1}^{\infty} (A_K \cos K\Omega t + B_K \sin K\Omega t),$$

$A_K$ ,  $\Omega$  - амплитуда и частота  $K$ -той гармоники.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x_3(t) dt = 0.$$

$$A_K = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x_3(t) \cos K\Omega t d\Omega t = 0.$$

$$B_K = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x_3(t) \sin K\Omega t d\Omega t \neq 0.$$

$$x = A \sin \Omega t \quad (1)$$

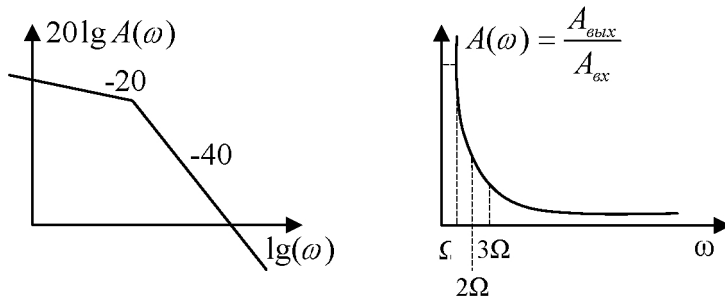


Рис.\*

После нелинейного звена идут инерционные звенья (апериодическое и интегральное звенья), которые хорошо пропускают низкие частоты и не пропускают высокие (это фильтр высоких частот – см. рис.\*).

Поэтому можно ограничиться в разложении Фурье первым слагаемым.

$$x_3(t) = B_1 \sin \Omega t + B_3 \sin 3\Omega t + \dots, \quad K=1,3,5\dots$$

$$x_3(t) = B_1 \sin \Omega t \quad (3);$$

из (1) можно записать:

$$\sin \Omega t = \frac{x}{A} \quad (4);$$

$$x_3(t) = B_1 \frac{x}{A} = \frac{B_1}{A} x(t) = qx,$$

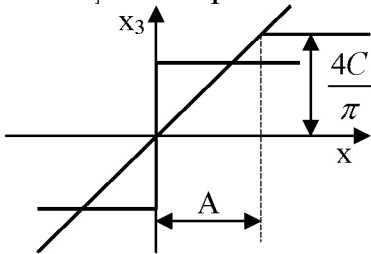
где  $q$  – гармонический коэффициент усиления.

$$\frac{B_1}{A} = \frac{1}{A\pi} \int_0^{2\pi} F(A \sin \Omega t) \sin \Omega t d\Omega t = \frac{1}{\pi A} \left( \int_0^{\pi} C \sin \Omega t d\Omega t + \int_0^{2\pi} (-C) \sin \Omega t d\Omega t \right) = \frac{4C}{\pi A}.$$

$$x_3(t) = qx, \quad \text{где } q = \frac{4C}{\pi A}.$$

В результате преобразований нелинейное звено преобразовано в линейное, коэффициент усиления которого зависит от величины амплитуды колебаний. Эта операция по замене нелинейного звена линейным называется **гармонической линейризацией**.

$q$  – коэффициент гармонической линейризации. Он показывает усиление по первой гармонике колебаний.



В исходное уравнение производим подстановку  $x_3 = qx$ .

Перейдем к х.у. этой системы

$$T_1 T_2 P^3 + (T_1 + T_2) P^2 + (1 + T_1 K_2 K_{oc} q) P + (K_1 + K_{oc}) K_2 q = 0 \quad (5)$$

Определим периодическое движение для (5):

$$P = j\omega;$$

$$P(\Omega) + jQ(\Omega) = 0;$$

$$-T_1 T_2 j\Omega^3 - (T_1 + T_2)\Omega^2 + (1 + T_1 K_2 K_{oc} q)j\Omega + (K_1 + K_{oc})K_2 q = 0;$$

$$(K_1 + K_{oc})K_2 q - (T_1 + T_2)\Omega^2 + j\Omega(1 + T_1 K_2 K_{oc} q) - T_1 T_2 j\Omega^3 = 0;$$

$$(K_1 + K_{oc})K_2 q - (T_1 + T_2)\Omega^2 = 0;$$

$$(1 + T_1 K_2 K_{oc} q)\Omega - T_1 T_2 \Omega^3 = 0;$$

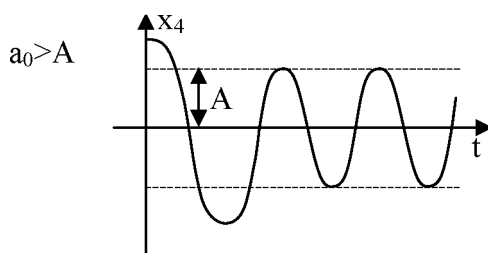
$$\Omega^2 = \frac{(K_1 + K_{oc})K_2 q}{T_1 + T_2}; \quad q = \frac{4C}{\pi A};$$

$$A = \frac{4CK_2(T_2 K_1 - T_1 K_{oc})}{\pi(T_1 + T_2)}.$$

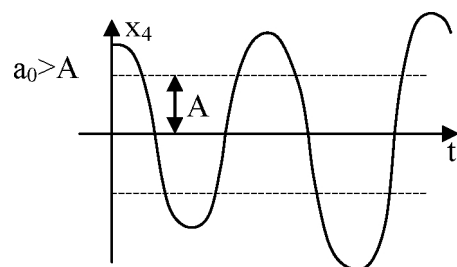
Необходимо определить, что эти периодические колебания являются устойчивыми. Для этого в уравнении (5) делаем подстановку  $q = \frac{4C}{\pi A}$ .

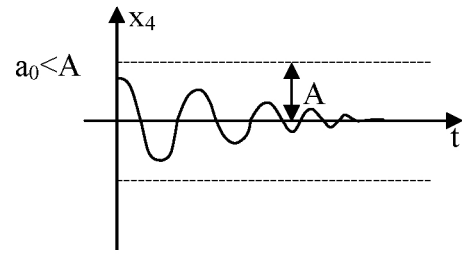
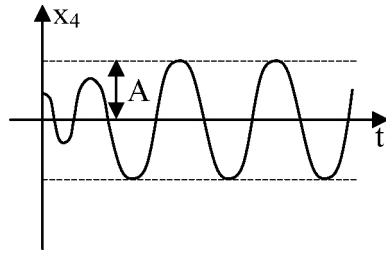
По критерию Гурвица убеждаемся, что система устойчива.

Устойчивые колебания  
(автоколебания)



Неустойчивые колебания





При начальных условиях  $a_0 > A$  переходный процесс расходится, а при  $a_0 < A$  начинает сходиться, то автоколебаний не будет.

Эту проверку лучше проводить по критерию Гурвица.

В справочной литературе приведены коэффициенты гармонической линеаризации для различных нелинейностей (трёхпозиционное звено, с ограничением, двухпозиционное звено и т.д.)

## 11 Импульсные системы автоматического управления. Принцип работы импульсных САУ

Сигналы, действующие в системах можно разделить на: непрерывные (аналоговые) и дискретные.

В соответствии с этим подразделяют системы непрерывного действия и системы дискретного действия. В дискретной системе сигналы меняются скачкообразно.

Преобразование непрерывного сигнала в дискретный называется **квантованием**.

Существует два вида квантования: квантование по уровню и квантование по времени.

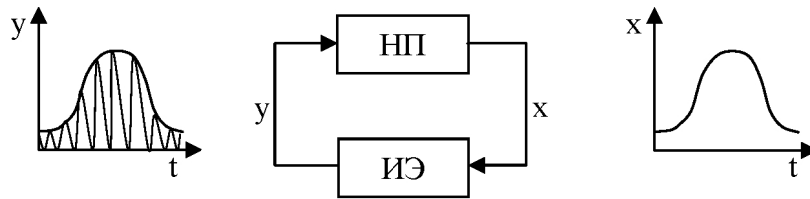


$$\Omega = \frac{2\pi}{T_n} \text{ В общем виде частота квантования может быть переменной.}$$

В зависимости от квантования системы можно разделить релейные (квантование по уровню), импульсные (квантование по времени) и цифровые (квантование по уровню и по времени).

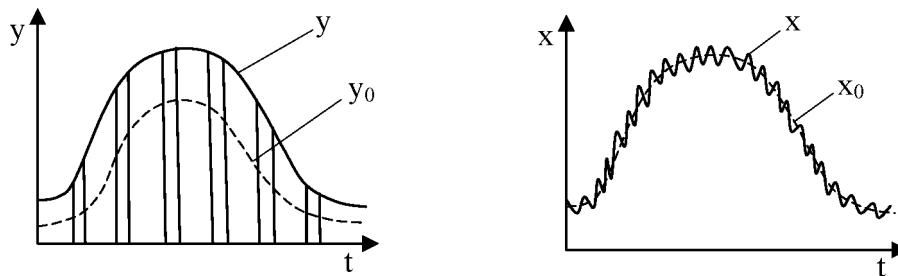
## 11.1 Классификация и особенности работы ИСАУ

ИСАУ можно представить в виде непрерывной части и импульсного элемента.



Импульсный сигнал поступает в непрерывную часть системы, сглаживается и на выходе получает вид:

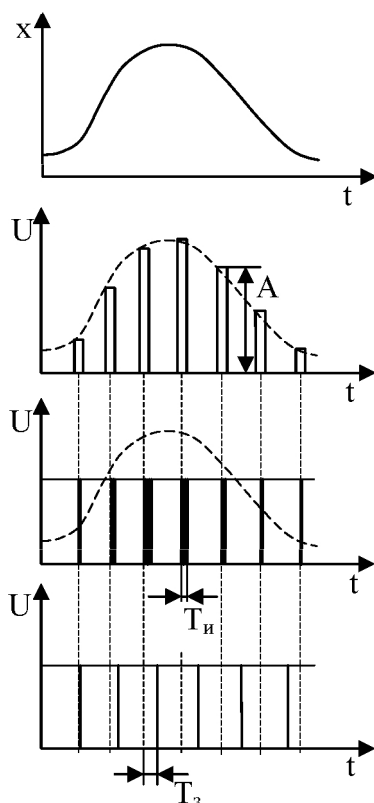
ИСАУ можно представить как непрерывную, в которой прерывание сигнала осуществляется ключом. Это прерывание вызывает в системе высокочастотную составляющую сигнала.



Преобразование непрерывного сигнала в дискретный называется импульсной модуляцией.

Существует три вида импульсной модуляции:

- 1) амплитудно-импульсная модуляция (АИМ);
- 2) широтно-импульсная модуляция (ШИМ);
- 3) фазоимпульсная модуляция (ФИМ).



$A$  – амплитуда импульса является модулируемым параметром.

Ширина импульса  $T_{и}$  – модулируемый параметр.

$T_з$  – время запаздывания – модулируемый параметр.

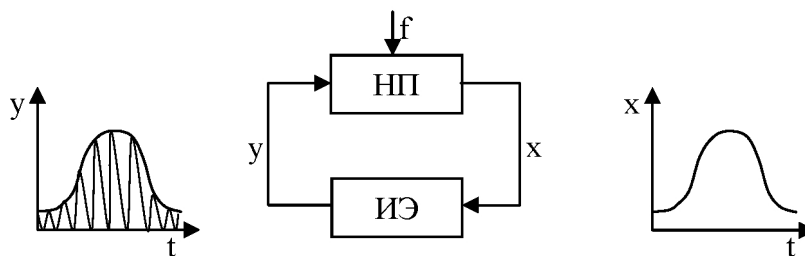
Наибольшее распространение получила АИМ, затем ШИМ.

ИСАУ обладает повышенной помехозащищенностью, так как она работает только в момент повторения импульсов, в остальное время она закрыта от помех.

Импульсные системы бывают линейные и нелинейные. Мы рассматриваем только линейные системы с АИМ. Особенность линейных систем в недопустимости переноса ИЭ через непрерывную часть.

## 11.2 Математическое описание ИСАУ

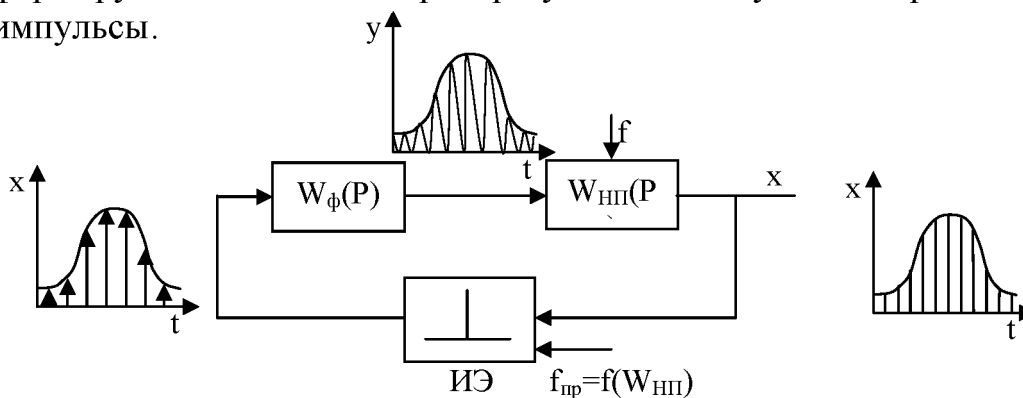
Описание сводится к описанию непрерывной части, методы которой нам известны, и к описанию ИЭ.



### Эта схема образуется в три этапа:

- 1) ИЭ представляется в виде идеального элемента и формирующего элемента.
- 2) Внешнее воздействие  $f$  переносится на вход ИЭ.
- 3) Непрерывный сигнал, действующий в непрерывной части (НЧ) заменяется импульсными сигналами.

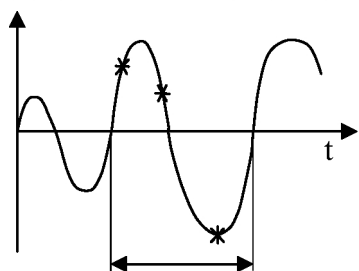
**Первый этап:** ИЭ представляет собой два последовательных звена. На входе идеального элемента возникают идеальные мгновенные импульсы, а формирующий элемент преобразует эти импульсы в реально действующие импульсы.



**Идеальные мгновенные импульсы** – это импульсы б/м ширины и б/б величины, но значение которых конечны и численно равны значению входного сигнала.

**Второй этап:** Внешнее воздействие  $f$  переносим на вход ИЭ по формуле  $f_{\text{пр}} = fW_{\text{ИП}}$ . Непрерывный сигнал  $x$  заменяется импульсным, величина которого равна значению  $x$  в момент повторения импульсов.

**Третий этап:** В период повторения импульсов (частота опроса) должна удовлетворять теореме Котельникова: чтобы передать непрерывный сигнал с помощью дискретной последовательности импульсов, необходимо за период колебаний иметь не менее трех посылок, в этом случае мы не потеряем сигнал.

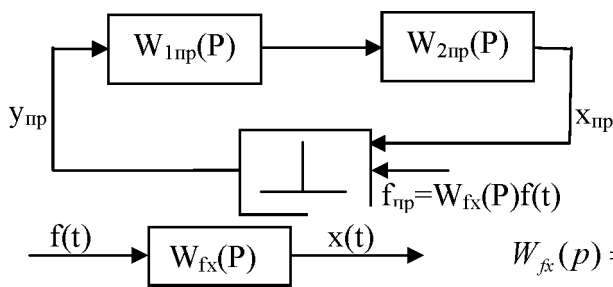


$$\frac{f_M}{f_c} > 3 \text{ - по теореме Котельникова;}$$

$$\frac{f_M}{f_c} > 5 \div 7 \text{ - на практике.}$$

Заменим непрерывный сигнал на его входе дискретным сигналом, значение которого численно равно входному сигналу в период повторения импульсов  $T_n$ , а в остальное время равно нулю. Такая функция называется **решетчатой функцией**.

Непрерывная функция является огибающей решетчатой функцией.



В преобразованной системе все сигналы являются дискретными. В дискретном сигнале  $x[nT]$ ,  $T = \dots$ ,  $n=1,2,3,\dots$   
 $\bar{t} = t/T$ .

$$W_{fx}(p) = \frac{X(p)}{f(p)}$$

$$\Delta x[n] = x[n+1] - x[n]$$

Аналогом производной в непрерывных системах для дискретных систем является разность первого порядка.

Разность второго порядка:

$$\Delta^2 x[n] = \Delta x[n+1] - \Delta x[n] = x[n+2] - 2x[n+1] + x[n].$$

$$\Delta^m x[n] = \Delta^{m-1} x[n+1] - \Delta^{m-1} x[n]$$

В результате:

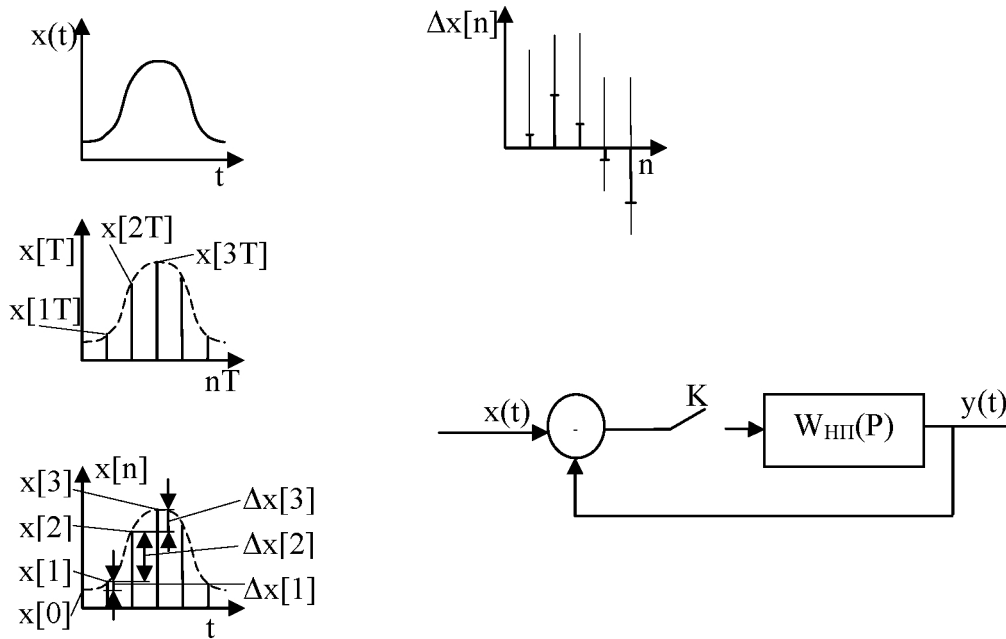
$$a_m \Delta^m y[n] + a_{m-1} \Delta^{m-1} y[n] + \dots + a_1 \Delta y[n] + a_0 y[n] = b_k \Delta^k x[n] + b_{k-1} \Delta^{k-1} x[n] + \dots + b_1 \Delta x[n] + b_0 x[n] \quad (1)$$

Это уравнение – линейное неоднородное разностное уравнение.

Оно описывает дискретные системы, в которых сигналы представлены в виде решетчатых функций.

$a_i, b_i$  - постоянные коэффициенты.

$x[n], y[n]$  - входное воздействие и выходной сигнал.



Решать уравнение (1) можно обычным классическим способом разностных уравнений. Но решение значительно упрощается, если используется, как и для непрерывных систем, преобразование Лапласа.

Для систем, в которых сигналы представлены в виде решетчатых функций, целесообразно использовать дискретное преобразование по Лапласу.

Для непрерывных систем преобразование Лапласа:

$$X(P) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-Pt} dt .$$

Дискретное преобразование Лапласа:

$$X^*(P) = \sum_{n=0}^{\infty} x[nT]e^{-PnT} ,$$

$\sum_{m=0}^{n-1} x[m]$  - аналог интеграла в дискретных системах.

$$X^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n} , \quad \text{где } z = e^{PT} \quad (2)$$

$z$  – преобразование (модификационное преобразование по Лапласу);

$x(t)$  – оригинал;

$X(P)$  – изображение.

Используя дискретное преобразование по Лапласу, производим подстановку уравнения (2) в (1). Получим его изображение (1). Используя специальные таблицы дискретного преобразования по Лапласу, определяем исходную функцию  $y[n]$ .

### 11.3 Передаточные функции ИСАУ

В импульсной системе автоматического управления определяют с передаточными функциями, а не с д/у или разностными уравнениями.

$W^*(P) = \frac{Y(P)}{X(P)}$  - передаточная функция системы – отношение в смысле

дискретного преобразования по Лапласу выходных величин к входным величинам при нулевых начальных условиях.

Z-преобразование:  $W^*(z) = \frac{Y^*(z)}{X^*(z)}$ .

$$W(z) = \frac{b_k z^k + b_{k-1} z^{k-1} + \dots + b_1 z + b_0}{a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \dots + a_1 z + a_0}$$

$$[a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \dots + a_1 z + a_0]Y(z) = [b_k z^k + b_{k-1} z^{k-1} + \dots + b_1 z + b_0]X(z)$$

### 11.4 Устойчивость импульсных САУ

В математическом плане устойчивость оценивается как решение д/у:

$$[a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \dots + a_1 z + a_0]y = [b_k z^k + b_{k-1} z^{k-1} + \dots + b_1 z + b_0]x \quad (1)$$

Чтобы определить устойчивость системы, необходимо решить д/у (1).

Решение

д/у (1) может быть представлено как:

$$y = y_c(t) + y_e(t), \text{ где } y_c(t) - \text{собственное колебание; } y_e(t) - \text{вынужденное}$$

колебание.

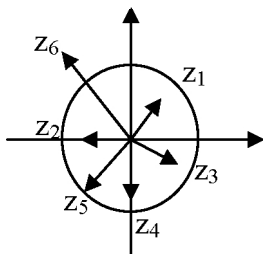
Устойчивость можно оценить по номиналу без правой части:

$$M(z) = a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0 \quad (2)$$

Собственное движение ИСАУ определяется как решение алгебраического уравнения (2).

Для  $m \geq 3$  аналитически решить д/у невозможно, и алгебраическое уравнение тоже.

$$z = e^{PT}$$



Например:  $P_1 = 0, \quad |z_1| = 1.$

$$P_2 < 0, \quad |z_2| < 1.$$

$z_1, z_2, z_3, z_4$  – устойчивая ИСАУ;

$z_5$  – граница устойчивости;

$z_6$  – ИСАУ неустойчива.

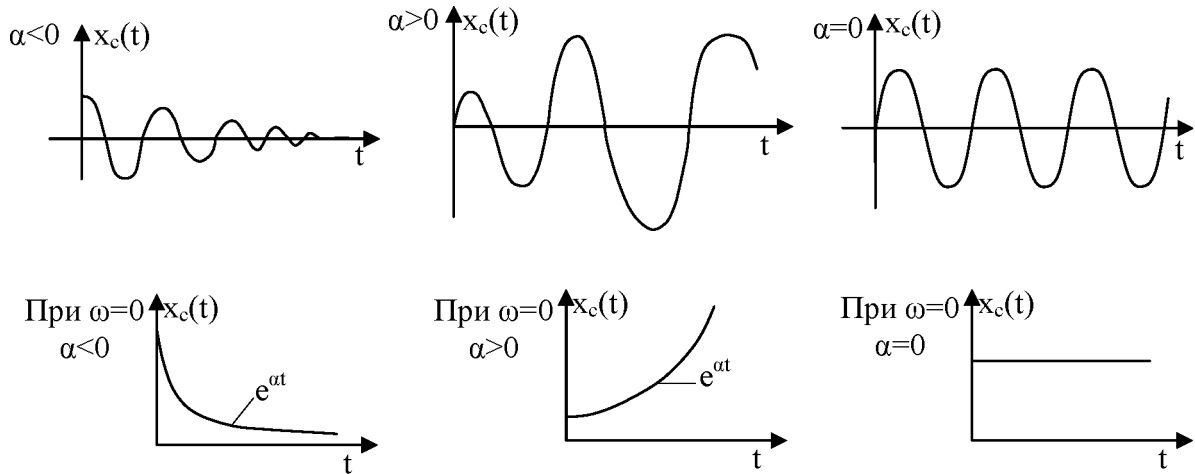
ИСАУ будет устойчива если корни х.у.

(2) расположены в круге радиуса  $|z_i| < 1.$

Для оценки устойчивости, как и для непрерывных систем, для ИСАУ можно использовать критерии устойчивости, которые позволяют, не решая уравнение (2), оценить устойчивость.

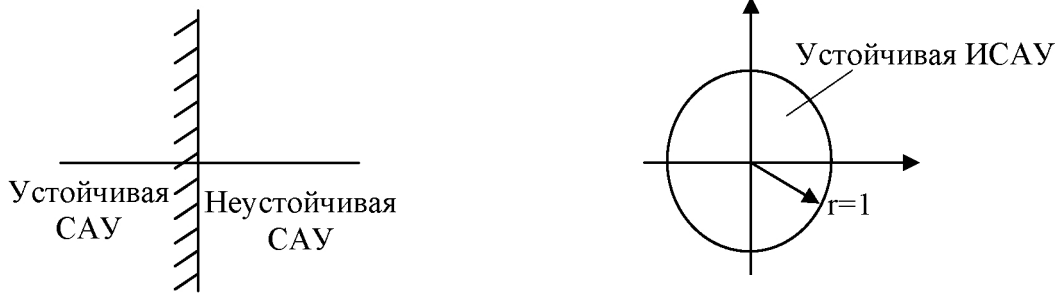
Критерий устойчивости – это правило, позволяющее определить знак корня или вещественную часть х.у.

$$x_c(t) = Ce^{Pt}, \quad P = \alpha \pm j\omega$$



$t=nT$  – число, кратное импульсам – времени.

Для определения устойчивости ИСАУ применимы все критерии устойчивости, которые мы рассматриваем для непрерывных систем: Гурвица, Михайлова, Найквиста, метод ЛЧХ и т.д. Но для ИСАУ применение их имеет ряд особенностей.



Необходимо сделать преобразование  $z = \frac{1+W}{1-W}$ .

Данное преобразование позволяет единичный круг в плоскости  $z$ , соответствующий устойчивой системе, преобразовать в любую полуплоскость. В этом случае уравнение (2) примет вид:

$$M(W) = C_m W^m + C_{m-1} W^{m-1} + \dots + C_1 W + C_0 = 0 \quad (3)$$

Пример 1:

1)  $a_1 z + a_0 = 0$  - таким уравнением описывается ИСАУ.

Делаем замену

$$a_1 \left( \frac{1+W}{1-W} \right) + a_0 = 0;$$

$$a_1(1+W) + a_0(1-W) = 0;$$

$$(a_1 - a_0)W + a_1 + a_0 = 0.$$

$a_1 - a_0 > 0$ ,  $a_1 + a_0 > 0$  - условия устойчивости по Гурвицу для ИСАУ.

Пример 2

2)  $a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0$ . – характеристическое уравнение 2-го порядка.

$$a_2 \left( \frac{1+W}{1-W} \right)^2 + a_1 \left( \frac{1+W}{1-W} \right) + a_0 = 0;$$

$$a_2 \left( \frac{1+2W+W^2}{1-2W+W^2} \right) + a_1 \left( \frac{1+W}{1-W} \right) + a_0 = 0;$$

$$a_2(1-2W+W^2)(1-W) + a_1(1+W)(1-2W+W^2) + a_0(1-W)(1-2W+W^2) = 0;$$

$$a_2(1-2W+W^2) + a_1(1-W)^2 + a_0(1-2W+W^2) = 0;$$

$$(a_2 - a_1 + a_0)W^2 + (2a_2 - 2a_0)W + (a_2 + a_1 + a_0) = 0.$$

Условие устойчивости по Гурвицу:

$$(a_2 - a_1 + a_0) > 0; \quad (2a_2 - 2a_0) > 0; \quad (a_2 + a_1 + a_0) > 0.$$

3)  $a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0$ .

$$a_3 \left( \frac{1+W}{1-W} \right)^3 + a_2 \left( \frac{1+W}{1-W} \right)^2 + a_1 \left( \frac{1+W}{1-W} \right) + a_0 = 0;$$

$$C_3 W^3 + C_2 W^2 + C_1 W + C_0 = 0;$$

$$C_i = f(a_i).$$

Условие устойчивости:

$$C_0 > 0; \quad C_1 > 0; \quad C_2 > 0; \quad C_3 > 0. \quad C_2 C_1 > C_3 C_0.$$



