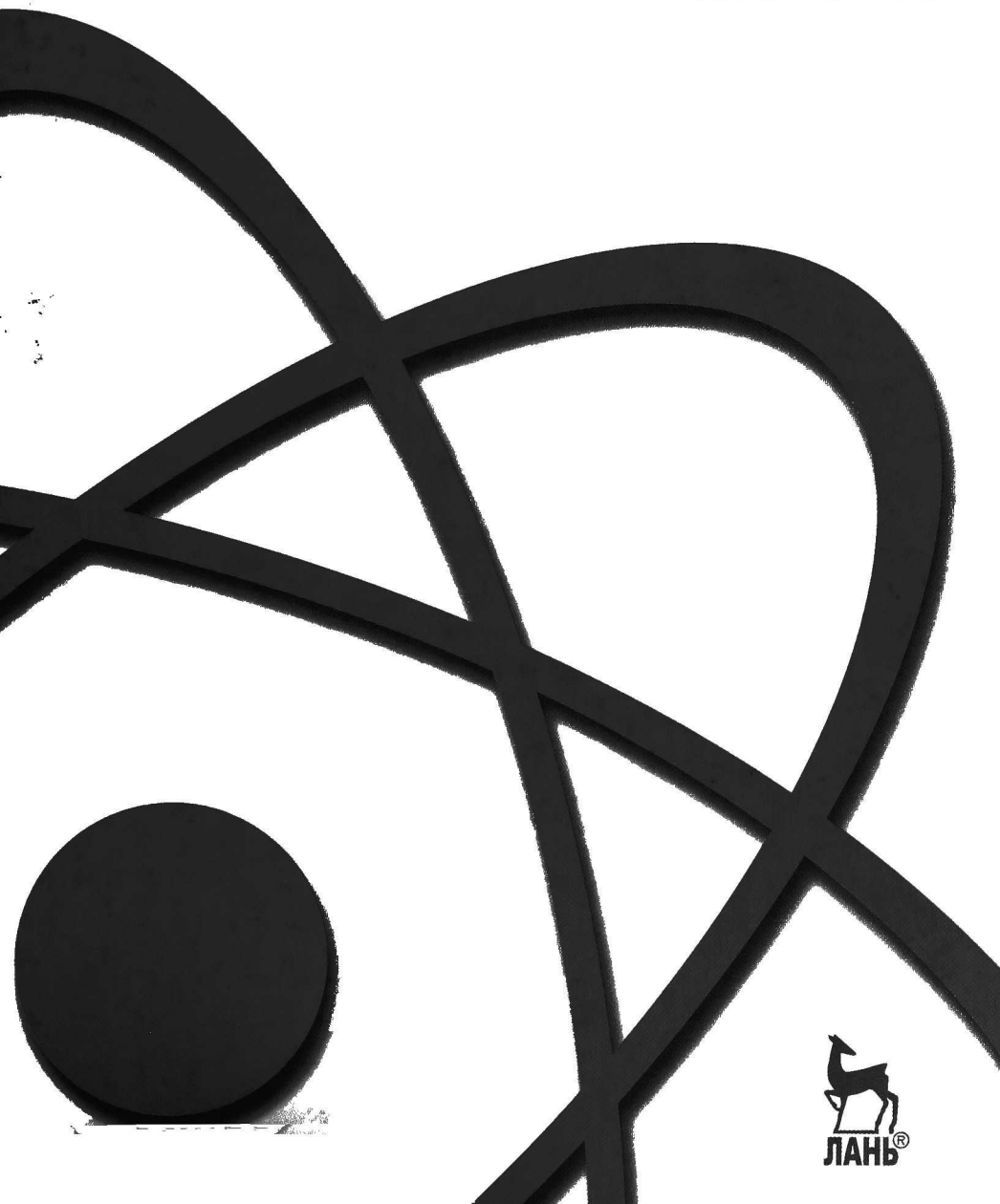
# КУРС ФИЗИКИ

Н. М. РОГАЧЕВ



ЛАНЬ®

Н. М. РОГАЧЕВ

# КУРС ФИЗИКИ

*Допущено Министерством образования и науки Российской Федерации в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся в области техники и технологий*

Самарский Государственный аэрокосмический университет
№ 731700
Научно-техническая библиотека

ЛАНЬ®
· САНКТ-ПЕТЕРБУРГ · МОСКВА · КРАСНОДАР
2008

ББК 22.3я73
Р 59

**Рогачев Н. М.**

**Р 59** Курс физики: Учебное пособие. — СПб.: Издательство «Лань», 2008. — 448 с.: ил. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

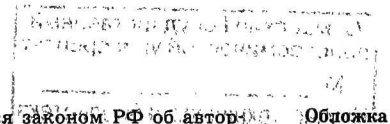
**ISBN 978-5-8114-0856-6**

Учебное пособие содержит теоретический материал курса общей физики, а также примеры решения типовых физических задач. Особенностью пособия является лаконичное изложение материала, что позволило подчеркнуть физические закономерности, лежащие в основе изучаемых объектов и явлений.

Предназначается для студентов высших учебных заведений, обучающихся по техническим и технологическим направлениям.

ББК 22.3я73

**Рецензенты:**
кафедра общей физики и методики обучения физике Самарского государственного педагогического университета (заведующий кафедрой, д-р пед. наук, проф. *В. А. БЕТЕВ*); канд. физ.-мат. наук, проф., заведующий кафедрой общей и теоретической физики Самарского государственного университета *А. А. БИРЮКОВ*



Охраняется законом РФ об авторском праве. Воспроизведение всей книги или любой ее части запрещается без письменного разрешения издателя. Любые попытки нарушения закона будут преследоваться в судебном порядке.

**Обложка**
*А. Ю. ЛАПШИН*

© Издательство «Лань», 2008
© Н. М. Рогачев, 2008
© Издательство «Лань»,
художественное оформление, 2008

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие соответствует теоретическим разделам примерных программ дисциплины «Физика» и требованиям к минимуму содержания и уровню подготовки бакалавров и дипломированных специалистов, обучающихся по техническим и технологическим направлениям.

Изложение курса физики как единой науки опирается на фундаментальные законы и обобщает множество опытных данных. Приоритет отдается рассмотрению внутреннего единства физической картины мира, обсуждению строгости и точности определений физических понятий, типичных условий проявления основных физических закономерностей. Материал в пособии излагается кратко, что позволило подчеркнуть основные физические закономерности изучаемых объектов и явлений. Каждая глава заканчивается примерами решения задач, тексты которых взяты из стандартных задачников: А. Г. Чертов, А. А. Воробьев. Задачник по физике. М.: Высшая школа, 1981; В. С. Волькенштейн. Сборник задач по общему курсу физики. М.: Наука, 1980.

Пособие написано с учетом изменений школьных программ по физике и математике. Считаем, что учащиеся освоили простейшие физические понятия и владеют элементами высшей математики. Однако, учитывая специфику обучения, мы повторили некоторые наиболее важные понятия и определения курса элементарной физики.

Автор выражает глубокую признательность профессорам В. А. Бетеву и А. А. Бирюкову за рецензирование пособия, а также доктору физико-математических наук, профессору СПбГПУ Н. М. Кожевникову и доктору физико-математических наук, профессору СПбГПУ В. В. Козловскому за полезные советы и замечания.

## ВВЕДЕНИЕ

Физика наряду с другими естественными науками изучает объективные свойства окружающего нас мира.

Весь мир, все существующее вокруг нас представляет собой *материю*. Материя имеет множество форм со своими характерными свойствами и является объективной реальностью, существующей вне и независимо от нашего сознания. Неотъемлемым свойством материи и формой ее существования является *движение*. Материя и движение неотделимы друг от друга. Не может быть ни материи без движения, ни движения без материи.

Известны два вида материи: *вещество* (атомы, молекулы, тела) и *поле* (электромагнитное, гравитационное и др.). Различные виды материи могут превращаться друг в друга (электрон и позитрон, например, могут превращаться в фотон).

Материя существует и движется в пространстве и во времени.

*Пространство* — это форма сосуществования материальных объектов и процессов, характеризующая структурность и протяженность материальных систем.

*Время* — это форма последовательной смены явлений и состояний материи, которая характеризует длительность их бытия. Пространство и время не существуют в отрыве от материи.

В классической физике пространству и времени приписывается абсолютный характер: линейные размеры и промежутки времени сохраняются неизменными при переходе от одной системы отсчета к другой.

Физика — наука точная, изучающая количественные закономерности явлений и процессов. Теория и опыт являются основными методами исследования в физике. Законы физики устанавливают связь между физическими величинами, которые необходимо измерять. Для этого разработаны единицы физических величин, объединенные в системы единиц. В настоящее время обязательна к применению в нашей стране Система Единиц Интернациональная (СИ). Система СИ состоит из основных, дополнительных и производных единиц.

*Основными* называются единицы нескольких разнородных физических величин, произвольно выбранных при построении системы. В СИ основными единицами являются: единица длины — метр (м); массы — килограмм (кг); времени — секунда (с); силы электрического тока — ампер (А), термодинамической температуры — кельвин (К), количества вещества — моль (моль), силы света — кандела (кд).

*Метр* — единица длины, равная расстоянию, проходимому в вакууме плоской электромагнитной волной за 1/299792458 доли секунды.

*Килограмм* — единица массы, равная массе международного прототипа килограмма.

*Секунда* — единица времени, равная 9192631770 периодам излучения, соответствующего переходу между двумя сверхтонкими уровнями основного состояния атома цезия-133.

*Ампер* — сила неизменяющегося тока, который, проходя по двум параллельным прямолинейным проводникам бесконечной длины и ничтожно малой площади кругового поперечного сечения, расположенным на расстоянии 1 м друг от друга в вакууме, вызвал бы между этими проводниками силу, равную $2 \cdot 10^{-7}$ Н на каждый метр длины.

*Кельвин* — единица термодинамической температуры, равная 1/273,16 термодинамической температуры тройной точки воды.

*Моль* — единица количества вещества, равная количеству вещества системы, в которой содержится столько же структурных элементов (атомов, молекул, ионов, электронов и других частиц), сколько содержится атомов в углероде-12 массой 0,012 кг.

*Кандела* — единица силы света, равная силе света в данном направлении от источника, испускающего монохроматическое излучение частотой $540 \cdot 10^{12}$ Гц, сила излучения которого в этом направлении составляет 1/683 Вт/ср.

В СИ кроме основных введены две *дополнительные* единицы — радиан (рад) и стерадиан (ср).

*Радиан* — угол между двумя радиусами окружности, длина дуги между которыми равна радиусу.

*Стерадиан* — телесный угол с вершиной в центре сферы, вырезающий на поверхности сферы площадь, равную площади квадрата со стороной, по длине равной радиусу этой сферы.

*Производными* называются единицы, устанавливаемые через другие единицы данной системы на основании физических законов, выражающих взаимосвязь между соответствующими физическими величинами.

На примере единицы скорости рассмотрим схему введения определения производной единицы измерения. При определении производной

единицы договариваются о выборе определенной формулы и названии единицы. Для равномерного прямолинейного движения значение скорости может быть определено как отношение пути $S$ ко времени $t$:

$$v = S / t.$$

Положив в данном уравнении $S = 1$ м, $t = 1$ с, получим единицу скорости

$$[v] = 1 \text{ м} / 1 \text{ с} = 1 \text{ м/с}.$$

Запишем это в виде выражения:

$$\left.\begin{matrix} S = 1 \text{ м} \\ t = 1 \text{ с} \end{matrix}\right\} > v = 1 \text{ м/с}.$$

Читая его справа налево и заменив слово *равно* словом *это*, можно сформулировать словесное определение единицы скорости: один метр в секунду — это скорость равномерного прямолинейного движения, в котором материальная точка за 1с проходит путь в 1м.

В табл. 1 даются приставки для образования десятичных и дольных единиц СИ.

Таблица 1

| Наименование | Обозначение приставки | | Множитель |
|---|---|---|---|
| | русское | международное | |
| экса | Э | E | $10^{18}$ |
| пета | П | P | $10^{15}$ |
| тера | Т | T | $10^{12}$ |
| гига | Г | G | $10^{9}$ |
| мега | М | M | $10^{6}$ |
| кило | к | k | $10^{3}$ |
| гекто | г | h | $10^{2}$ |
| дека | да | da | 10 |
| деци | д | d | $10^{-1}$ |
| санти | с | c | $10^{-2}$ |
| милли | м | m | $10^{-3}$ |
| микро | мк | μ | $10^{-6}$ |
| нано | н | n | $10^{-9}$ |
| пико | п | p | $10^{-12}$ |
| фемто | ф | f | $10^{-15}$ |
| атто | а | a | $10^{-18}$ |

# ЧАСТЬ 1
# ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ

*Механика* изучает закономерности механического движения.

*Классическая механика* подразделяется на ньютоновскую, в основе которой лежат законы Ньютона[1] , и релятивистскую. *В классической механике* Ньютона изучается движение макроскопических тел, имеющих скорости гораздо меньшие, чем скорость света в вакууме. Тела, состоящие из большого числа атомов, называются макроскопическими телами.

*Релятивистская механика основана на теории относительности,* справедлива и при скоростях, сравнимых со скоростью света в вакууме.

*В квантовой механике* изучаются специфические особенности движения микроскопических тел (атомов и элементарных частиц).

Механика подразделяется на кинематику, статику и динамику.

## Глава 1
## КИНЕМАТИКА

*Кинематика* – раздел механики, в котором исследуется движение тел без выяснения причин, его вызвавших.

*Движение* – это любое изменение состояния системы и ее параметров (координат точки, температуры, напряженности электрического поля и т. д.). Из всех видов движения материи самым простым является механическое движение.

### § 1. Механическое движение. Кинематическое уравнение движения

*Механическое движение* – это изменение положения тела или отдельных его частей относительно других тел с течением времени.

*Поступательным* называется движение, при котором отрезок прямой, соединяющей любые две точки тела, остается при его движении параллельным самому себе. При поступательном движении все точки тела имеют одинаковые скорости и ускорения и движутся по одинаковым траекториям, сдвинутым параллельно относительно друг друга.

*Материальной точкой* (частицей) называется тело, размерами которого при решении данной задачи можно пренебречь. Одно и то же тело

[1] Исаак Ньютон (1643–1727) — выдающийся английский ученый, основатель классической физики.

в одних случаях может рассматриваться как материальная точка, а в других — как тело, имеющее размеры и форму.

*Абсолютно твердым* называется тело, состоящее из материальных точек, расстояние между которыми всегда остается неизменным.

Все тела существуют и движутся в пространстве и во времени. Пространство *однородно*, т. е. в нем нет точек, обладающих особыми свойствами; пространство *изотропно*, т. е. все направления движения равноценны.

Время также является *однородным*, т. е. любые явления, происходящие в одних и тех же условиях, но в разные моменты времени, протекают *одинаково*.

Так как пространство однородно и изотропно, то нельзя определить положение какого-либо тела относительно пространства. Однако положение одного тела можно определить относительно другого тела.

Тело, относительно которого рассматривается изменение положения движущегося тела, называется *телом отсчета*. Тело отсчета, связанная с ним система координат и прибор для измерения времени (часы), образуют *систему отсчета*.

Положение материальной точки $A$ в пространстве в данный момент времени $t$ (рис. 1) можно определить *тремя координатами* $x, y, z$ или *радиусом-вектором* $\vec{r}$, проведенным из начала координат в данную точку.

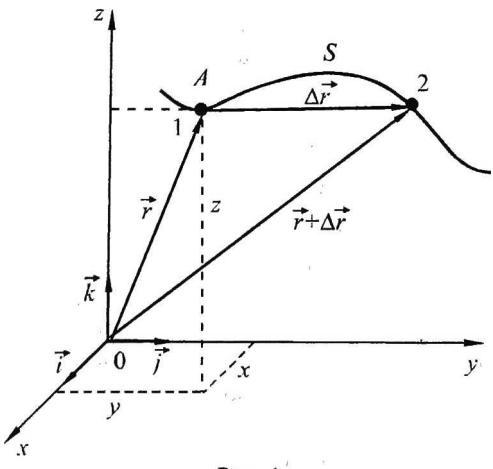


Рис. 1

Радиус-вектор точки $A$ можно разложить по базису $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ следующим образом:

$$\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z, \quad (1.1)$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — единичные вектор-орты системы координат.

Модуль вектора

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

При движении материальной точки ее координаты и радиус- вектор изменяются с течением времени. Вектор $\Delta\vec{r}$, соединяющий начальное положение 1 движущейся материальной точки с последующим ее положением 2, называется *перемещением* точки.

Линия, описываемая в пространстве концом радиуса-вектора $\vec{r}$ при движении материальной точки относительно выбранной системы отсчета, называется *траекторией*. По форме траектории движение делится на прямолинейное и криволинейное.

*Путь* — это расстояние, отсчитываемое вдоль траектории движения. Длина участка траектории $S$ называется *длиной пути*. В случае прямолинейного движения в одном направлении длина пути $S$ равна модулю перемещения $|\Delta\vec{r}|$.

При движении по замкнутой траектории, когда точка возвращается в исходное положение, путь равен длине траектории, а перемещение — нулю. Путь и перемещение в системе СИ измеряются в метрах (м).

Функции, описывающие изменения координат или радиуса-вектора материальной точки с течением времени, называются *кинематическими уравнениями движения:*

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$$

или

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \qquad (1.2)$$

## § 2. Скорость движения

*Равномерным прямолинейным движением* называется такое движение, при котором материальная точка, двигаясь по прямой линии, за любые равные сколь угодно малые промежутки времени $\Delta t$ совершает одинаковые перемещения $\Delta\vec{r}$.

*Скоростью* равномерного прямолинейного движения называется векторная физическая величина, равная отношению перемещения к промежутку времени, в течение которого было совершено это перемещение:

$$\vec{\mathrm{v}} = \Delta\vec{r}/\Delta t\ .$$

При малых приращениях функции и аргумента

$$\vec{\mathrm{v}} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \qquad (1.3)$$

Скорость при равномерном прямолинейном движении является величиной постоянной:

$$\vec{\mathrm{v}} = \mathrm{const}.$$

По модулю скорость

$$|\vec{\mathrm{v}}| = |\Delta\vec{r}|/\Delta t = S/\Delta t, \qquad (1.4)$$

так как $S = |\Delta\vec{r}|$. Используя уравнения (1.1) и (1.3), получим

$$\vec{v} = \vec{i}\frac{dx}{dt} + \vec{j}\frac{dy}{dt} + \vec{k}\frac{dz}{dt} = \vec{i}v_x + \vec{j}v_y + \vec{k}v_z, \qquad (1.5)$$

откуда

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2},$$

где $v_x, v_y$ и $v_z$ — проекции вектора скорости $\vec{v}$ на координатные оси $x$, $y$ и $z$.

Из формулы (1.4) устанавливается единица скорости в системе СИ — метр на секунду (м/с) и формула пути равномерного прямолинейного движения:

$$S = v \cdot \Delta t.$$

Используя данное уравнение, можно записать кинематическое уравнение для равномерного прямолинейного движения, т. е. найти выражение для координаты материальной точки, движущейся равномерно вдоль оси x:

$$x = x_0 + v_x\Delta t. \qquad (1.6)$$

Если материальная точка начинает движение из начала координат, то $x_0 = 0$ и координата $x = v_x\Delta t$.

Если за равные промежутки времени материальная точка, двигаясь по прямой, проходит разные пути, то такое движение называется *переменным*.

Пусть материальная точка, двигаясь неравномерно, за время $\Delta t$ переместилась из положения *1* в положение *2* (см. рис.1). *Средней скоростью* движения материальной точки называется векторная физическая величина, равная отношению перемещения $\Delta\vec{r}$ ко времени $\Delta t$, за которое оно произошло:

$$\langle\vec{v}\rangle = \Delta\vec{r}/\Delta t. \qquad (1.7)$$

*Средней путевой скоростью* движения материальной точки называется *скалярная* величина, равная отношению пути $S$ к промежутку времени $\Delta t$, за которое этот путь пройден:

$$\langle v\rangle_S = S/\Delta t. \qquad (1.8)$$

Переменное движение характеризуется также мгновенной скоростью (скоростью в данный момент времени). Мгновенную скорость можно определить как предел отношения $\Delta\vec{r}/\Delta t$ при $\Delta t \to 0$:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} (\Delta \vec{r} / \Delta t) = d\vec{r} / dt . \qquad (1.9)$$

Таким образом, *мгновенная скорость* движения материальной точки есть векторная физическая величина, равная первой производной радиуса-вектора движущейся точки по времени. Скорость $\vec{v}$ направлена по касательной к траектории в направлении движения.

## § 3. Ускорение

Быстрота изменения скорости по времени при переменном движении характеризуется ускорением:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta \vec{v} / \Delta t = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} . \qquad (1.10)$$

*Ускорение* — это векторная физическая величина, равная первой производной скорости по времени или второй производной радиуса-вектора движущейся точки по времени.

В системе СИ ускорение измеряется в метрах на секунду в квадрате (м/с$^2$).

Используя уравнения (1.1) и (1.10), запишем ускорение через его составляющие по осям прямоугольной декартовой системы координат:

$$\vec{a} = \vec{i}\frac{d^2x}{dt^2} + \vec{j}\frac{d^2y}{dt^2} + \vec{k}\frac{d^2z}{dt^2} = \vec{i}\,a_x + \vec{j}a_y + \vec{k}a_z , \qquad (1.11)$$

где $a_x$, $a_y$ и $a_z$ — проекции вектора ускорения на координатные оси $x$, $y$ и $z$.

Модуль вектора ускорения

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} . \qquad (1.12)$$

Вектор ускорения $\vec{a}$ принято раскладывать на две составляющие (рис. 2):

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n , \qquad (1.13)$$

где $|\vec{a}_\tau| = \frac{dv}{dt}$ — *тангенциальное ускорение*, направленное по касательной к траектории движения, $|\vec{a}_n| = \frac{v^2}{R}$ — *нормальное (центростремительное)*

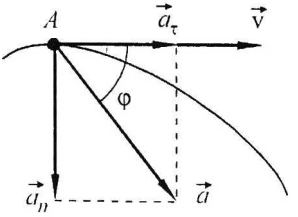



Рис. 2

*ускорение,* направленное перпендикулярно скорости $\vec{v}$, $R$ — *радиус кривизны траектории* (радиус окружности, сливающийся с траекторией на бесконечно малом ее участке).

Тангенциальное ускорение характеризует быстроту изменения модуля скорости, а нормальное — изменение скорости по направлению.

Квадрат модуля ускорения:

$$a^2 = a_\tau^2 + a_n^2,$$

отсюда ускорение

$$a = \sqrt{\left(\frac{d\,\mathrm{v}}{dt}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{v}^2}{R}\right)^2}. \qquad (1.14)$$

При равнопеременном прямолинейном движении $a_\tau = \mathrm{const} \neq 0$, а $a_n = 0$, т. е. ускорение $a = a_\tau = d\,\mathrm{v}/dt$. Отсюда $d\,\mathrm{v} = a\,dt$. Интегрируя данное выражение, получим формулу скорости равнопеременного прямолинейного движения:

$$\int_{\mathrm{v}_0}^{\mathrm{v}} d\,\mathrm{v} = a\int_0^t dt, \quad \mathrm{v} = \mathrm{v}_0 + at, \qquad (1.15)$$

если $\mathrm{v}_0 = 0$, то

$$\mathrm{v} = at. \qquad (1.16)$$

Здесь $\mathrm{v}_0$, v — скорости в моменты времени $t = 0$ и $t$ соответственно.

Так как скорость $\mathrm{v} = dS/dt$, то $dS = \mathrm{v}dt$. Подставляя в данное выражение уравнение (1.15), после интегрирования получим формулу пути равнопеременного прямолинейного движения:

$$\int_0^S dS = \mathrm{v}_0\int_0^t dt + a\int_0^t t dt,$$

$$S = \mathrm{v}_0 t + at^2/2. \qquad (1.17)$$

Если $\mathrm{v}_0 = 0$, то

$$S = at^2/2. \qquad (1.18)$$

При равноускоренном движении в формулах (1.15)–(1.18) ускорение $a$ берется со знаком плюс, при равнозамедленном — со знаком минус.

## § 4. Движение тела, брошенного под углом к горизонту

Рассмотрим движение тела, брошенного под углом $\alpha$ к горизонту с начальной скоростью $\vec{v}_0$. При отсутствии сопротивления воздуха движение будет происходить по параболе, изображенной на рис. 3.

Движение данного тела можно представить как результат наложения двух одновременных прямолинейных движений по осям $ox$ и $oy$, направленных вдоль поверхности Земли и по нормали к ней.

По оси $ox$ движение равномерное с постоянной скоростью

$$v_x = v_{0x} = v_0 \cos\alpha.$$

Воспользовавшись формулой (1.5) для равномерного прямолинейного движения, запишем уравнение движения тела вдоль оси $ox$:

$$x = v_{0x} t = v_0 t \cos\alpha, \qquad (1.19)$$

где $t$ — время движения.

По оси $oy$ движение равнопеременное с ускорением $a_y = -g$ и с начальной скоростью

$$v_{0y} = v_0 \sin\alpha.$$

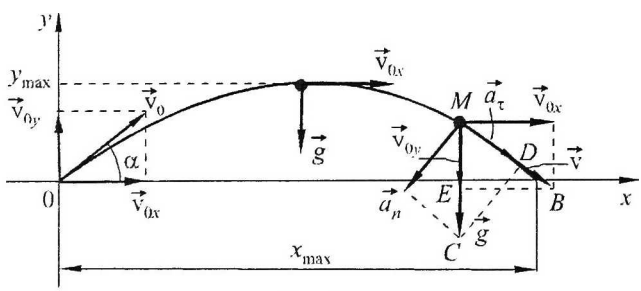



Рис. 3

Для равнопеременного движения согласно уравнениям (1.15) и (1.17) запишем:

$$v_y = v_{0y} - gt = v_0 \sin\alpha - gt, \qquad (1.20)$$

$$y = v_{0y} t - gt^2/2 = v_0 t \sin\alpha - gt^2/2. \qquad (1.21)$$

Исключив время $t$ из уравнений движения (1.19) и (1.21), найдем уравнение траектории:

$$y = x \cdot \operatorname{tg}\alpha - gx^2 / \left(2v_0^2 \cos^2 \alpha\right). \qquad (1.22)$$

Это уравнение *параболы.*

В момент падения тела на Землю координата $y = 0$. Приравняв $y$ нулю, из уравнения (1.21) найдем *время полета:*

$$t\left(v_0 \sin\alpha - gt/2\right) = 0,$$

$$t_1 = 0, \quad t_2 = \left(2v_0/g\right)\sin\alpha.$$

Значение времени $t_1 = 0$ соответствует точке бросания тела. Таким образом, время полета тела

$$t_п = 2v_0 \sin\alpha / g. \qquad (1.23)$$

При подъеме тела значение скорости $v_y$ уменьшается и при $y_{max}$ превращается в ноль. Из уравнения (1.20), приняв $v_y = 0$, находится *время подъема* тела на максимальную высоту:

$$0 = v_0 \sin\alpha - gt_{под},$$

откуда

$$t_{под} = v_0 \sin\alpha / g. \qquad (1.24)$$

Сопоставляя выражения (1.23) и (1.24), видим, что время подъема тела на высоту $y_{max}$ равно времени спуска его с этой высоты.

Подставив время подъема $t_{под}$ в формулу (1.21), найдем *максимальную высоту* подъема тела:

$$y_{max} = v_0^2 \sin^2 \alpha / (2g).$$

*Дальность полета* $x_{max}$ определяется, если в уравнение (1.19) вместо $t$ подставить время полета:

$$x_{max} = v_0 t_п \cos\alpha = v_0^2 \sin 2\alpha / g.$$

Дальность полета максимальна, когда значение $\sin 2\alpha$ максимально:

$$\sin 2\alpha_0 = 1, \quad 2\alpha_0 = 90°, \quad \alpha_0 = 45°.$$

Из подобия треугольников *MCD* и *MEB* (см. рис. 3) запишем:

$$\frac{EB}{MB} = \frac{DC}{MC} \text{ или } \frac{v_{0x}}{v} = \frac{a_n}{g},$$

откуда

$$a_n = \mathrm{v}_{0x} \cdot g / \mathrm{v}; \qquad (1.25)$$

$$\frac{ME}{MB} = \frac{MD}{MC} \text{ или } \frac{\mathrm{v}_y}{\mathrm{v}} = \frac{a_\tau}{g},$$

откуда

$$a_\tau = \mathrm{v}_y \cdot g / \mathrm{v}. \qquad (1.26)$$

*Радиус кривизны траектории* $R$ в произвольной точке $M$ определяется с использованием формулы

$$a_n = \mathrm{v}^2 / R.$$

## § 5. Вращение тела вокруг неподвижной оси

*Вращательным* называется движение, при котором все точки тела описывают окружности, центры которых лежат на одной прямой, называемой осью вращения.

Пусть тело за промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$ повернулось на угол $\Delta\varphi$, перейдя из положения 1 в положение 2 (рис. 4). Вектор $\Delta\vec{\varphi}$, направленный вдоль оси вращения перпендикулярно плоскости, в которой происходит вращение, называется *вектором углового перемещения*. Модуль вектора $\Delta\vec{\varphi}$ равен углу поворота $\Delta\varphi$, выраженному в радианах, а ориентация вектора определяется по правилу *правого винта* (если смотреть из конца вектора $\Delta\vec{\varphi}$, то вращение тела происходит против часовой стрелки).

Отношение $\frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t} = \langle\vec{\omega}\rangle$ называется *средней угловой скоростью*, а предел отношения

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} = \vec{\omega} \qquad (1.27)$$

называется *угловой скоростью*.

Угловая скорость — это векторная физическая величина, равная первой производной углового перемещения по времени.

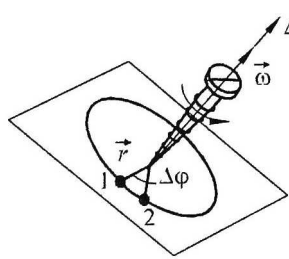



Рис. 4

Угловая скорость измеряется в радианах в секунду (рад/с). Вектор угловой скорости направлен по оси вращения, и ориентация его определяется правилом правого винта.

Если угловая скорость $\vec{\omega}$ за промежуток времени $\Delta t$ изменяется на $\Delta\vec{\omega}$, то для характеристики такого вращательного движения вводится понятие углового ускорения. *Угловым ускорением* называется векторная физическая величина, равная первой производной угловой скорости по времени или второй производной углового перемещения по времени:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2}. \qquad (1.28)$$

Если $\vec{\omega}$ изменяется только по модулю, то векторы $\vec{\omega}$ и $\vec{\varepsilon}$ коллинеарны и направлены в одну и ту же сторону, когда вращение ускоренное, и в противоположные стороны, когда вращение замедленное.

Угловое ускорение измеряется в радианах на секунду в квадрате (рад/с$^2$).

Время одного полного оборота тела $T$ называется *периодом обращения*, величина, обратная периоду $\frac{1}{T} = \nu$, называется *частотой.* Период измеряется в секундах (с), а частота — в герцах (Гц).

За один период обращения радиус-вектор $\vec{r}$ описывает угол, равный $2\pi$ рад, поэтому $2\pi = \omega T$, откуда $\omega = 2\pi/T = 2\pi\nu$.

Вращательное движение, при котором угловая скорость $\vec{\omega} = \text{const} \neq 0$, называется *равномерным вращением.*

По модулю $|\vec{\omega}| = \frac{|d\vec{\varphi}|}{dt}$, откуда $d\varphi = \omega dt$. Интегрируя данное выражение:

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \omega \int_0^t dt,$$

получим формулу для определения модуля углового перемещения:

$$\varphi - \varphi_0 = \omega t,$$

или

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t. \qquad (1.29)$$

Вращательное движение, при котором угловое ускорение $\vec{\varepsilon} = \text{const} \neq 0$, называется *равнопеременным вращением.* Так как

$$|\vec{\varepsilon}| = \frac{|d\vec{\omega}|}{dt},$$

то $d\omega = \varepsilon dt$ и $\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \varepsilon \int_0^t dt$.

Откуда

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t. \qquad (1.30).$$

Получили формулу для определения угловой скорости при равнопеременном вращении.

Угловая скорость

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt},$$

откуда

$$d\varphi = \omega dt.$$

После интегрирования данного выражения с учетом формулы (1.30)

$$\int_0^{\varphi} d\varphi = \omega_0 \int_0^t dt + \varepsilon \int_0^t t dt$$

получим формулу для определения модуля углового перемещения при равнопеременном вращении:

$$\varphi = \omega_0 t + \varepsilon t^2 / 2. \qquad (1.31)$$

При равноускоренном вращении в уравнениях (1.30) и (1.31) угловое ускорение ε берется со знаком плюс, при равнозамедленном — со знаком минус.

Найдем *связь между линейными и угловыми величинами.* Пусть тело из положения 1 (рис. 5) переходит в положение 2 за малый промежуток времени *dt*, совершая бесконечно малое угловое перемещение $d\vec{\varphi}$. Из рис. 5 видно, что

$$|d\vec{r}| = R d\varphi,$$

а $R = |\vec{r}| \sin\alpha$,

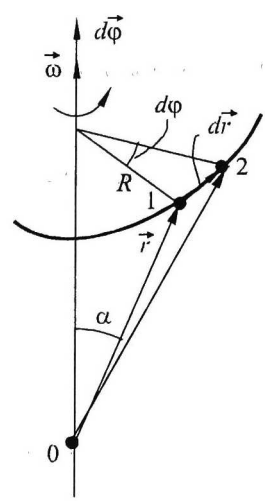



Рис. 5

где $R$ — радиус окружности.

Откуда

$$dr = rd\varphi \sin\alpha .$$

Полученное выражение запишем в виде векторного произведения:

$$d\vec{r} = [d\vec{\varphi}\vec{r}]. \qquad (1.32)$$

Поделим правую и левую части уравнения (1.32) на $dt$:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \left[\frac{d\vec{\varphi}}{dt}\vec{r}\right] = [\vec{\omega}\vec{r}],$$

откуда

$$\vec{v} = [\vec{\omega}\vec{r}], \qquad (1.33)$$

так как

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}, \text{ а } \frac{d\vec{\varphi}}{dt} = \vec{\omega}.$$

Следовательно, модули векторов связаны соотношением

$$|\vec{v}| = \omega r \sin\alpha = \omega R .$$

Дифференцируя по времени уравнение (1.33), получим

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt}\vec{r}\right] + \left[\vec{\omega}\frac{d\vec{r}}{dt}\right]$$

или с учетом выражения (1.28) запишем:

$$\vec{a} = [\vec{\varepsilon}\vec{r}] + [\vec{\omega}\vec{v}] = [\vec{\varepsilon}\vec{r}] + [\vec{\omega}[\vec{\omega}\vec{r}]].$$

Если заменить вектор ускорения

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n ,$$

то

$$|\vec{a}_\tau| = |[\vec{\varepsilon}\vec{r}]| = \varepsilon r \sin\alpha = \varepsilon R, \qquad (1.34)$$

$$\text{а } |\vec{a}_n| = \omega\omega r \sin\alpha = \omega^2 R. \qquad (1.35)$$

Тогда модуль полного ускорения

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} .$$

## ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

**Задача 1.** Скорость прямолинейно движущегося тела изменяется по закону

$$v = v_0 + \alpha t + \beta t^2 ,$$

где $\alpha = 2\frac{м}{с^2}$, $\beta = 3\frac{м}{с^3}$, $v_0 = 1\frac{м}{с}$.

Найти среднюю путевую скорость за промежуток времени от $t_1 = 1с$ до $t_2 = 10с$.

**Дано:**

$v = v_0 + \alpha t + \beta t^2$

$\alpha = 2 м/с^2$

$\beta = 3 м/с^3$

$v_0 = 1 м/с$

$t_1 = 1с$

$t_2 = 10с$

---

$\langle v \rangle_S = ?$

**Решение.**

Среднюю путевую скорость найдем, используя формулу (1.8):

$$\langle v \rangle_S = \Delta S / \Delta t \text{, где } \Delta t = t_2 - t_1 .$$

Путь определяем следующим образом:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} (v_0 + \alpha t + \beta t^2)dt =$$

$$= \left(v_0 t + \frac{\alpha t^2}{2} + \frac{\beta t^3}{3}\right)\Bigg|_{t_1}^{t_2} = v_0(t_2 - t_1) +$$

$$+ \frac{\alpha}{2}(t_2^2 - t_1^2) + \frac{\beta}{3}(t_2^3 - t_1^3).$$

Вычислим среднюю скорость:

$$\langle v \rangle_S = \frac{v_0(t_2 - t_1) + \frac{\alpha}{2}(t_2^2 - t_1^2) + \frac{\beta}{3}(t_2^3 - t_1^3)}{t_2 - t_1} = v_0 + \frac{\alpha}{2}(t_2 + t_1) +$$

$$+ \frac{\beta}{3}(t_2^2 + t_1 t_2 + t_1^2).$$

Подставив числовые значения, получаем

$$\langle v \rangle_S = 123 м/с.$$

**Ответ:** $\langle v \rangle_S = 123 м/с.$

**Задача 2.** Материальная точка движется по закону

$\vec{r}(t) = \alpha \sin(5t)\vec{i} + \beta \cos^2(5t)\vec{j}$, где $\alpha = 2$ м, $\beta = 3$ м.

Определить вектор скорости, вектор ускорения и траекторию движения материальной точки.

**Дано:**

$\vec{r}(t) = \alpha \sin(5t)\vec{i} + \beta \cos^2(5t)\vec{j}$

$\alpha = 2$ м, $\beta = 3$ м.

$\vec{v}(t) = ?$, $\vec{a}(t) = ?$,

$y(x) = ?$

**Решение.**

Запишем закон движения в координатной форме, используя уравнения (1.1) и (1.2) :

$$\begin{cases} x(t) = \alpha \sin(5t), \\ y(t) = \beta \cos^2(5t). \end{cases} \quad (1)$$

Определим проекции вектора скорости:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 5\alpha \cos(5t);$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = -\beta 2 \cos(5t)\sin(5t)5 = -5\beta \sin(10t).$$

Тогда выражение для вектора скорости согласно формуле (1.5) будет иметь вид

$$\vec{v} = 5\alpha \cos(5t)\vec{i} + (-5\beta)\sin(10t)\vec{j}. \quad (2)$$

Аналогично определим проекции вектора ускорения:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -25\alpha \sin(5t);$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = -50\beta \cos(10t).$$

Выражение для вектора ускорения согласно формуле (1.11) примет вид

$$\vec{a} = -25\alpha \sin(5t)\vec{i} + (-50\beta)\cos(10t)\vec{j}. \quad (3)$$

Для определения траектории движения исключим из системы уравнений (1) время $t$. Представим для этого систему уравнений в виде

$$\begin{cases} \sin(5t) = \dfrac{x}{\alpha}, \\ \cos^2(5t) = \dfrac{y}{\beta}. \end{cases} \tag{4}$$

Возведя левую и правую части первого уравнения в системе уравнений (4) в квадрат и сложив их, получим

$$\sin^2(5t) + \cos^2(5t) = \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y}{\beta}. \tag{5}$$

Левая часть уравнения (5) равна 1, тогда

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y}{\beta} = 1. \tag{6}$$

Уравнение (6) является уравнением параболы:

$$y = \frac{\alpha^2\beta - \beta x^2}{\alpha^2}. \tag{7}$$

Подставив данные из условия задачи в уравнение (7), найдем траекторию движения:

$$y = 3 - \frac{3}{4}x^2.$$

При $y \geq 0$ траектория имеет вид параболы, расположенной выше оси $x$. Точка совершает колебательное движение по ней.

**Ответ:** $\vec{v}(t) = 10\cos(5t)\vec{i} - 15\sin(10t)\vec{j}$,

$\vec{a}(t) = -50\sin(5t)\vec{i} - 150\cos(10t)\vec{j}$,

$y = 3 - \frac{3}{4}x^2$.

**Задача 3.** Твердое тело начинает вращаться вокруг неподвижной оси с угловым ускорением

$$\varepsilon = \alpha t,$$

где $\alpha = 2 \cdot 10^{-2}$ рад/с$^3$.

Через сколько времени после начала вращения вектор полного ускорения произвольной точки тела будет составлять угол $\varphi = 60°$ с ее вектором скорости?

**Дано:**

$\varepsilon = \alpha t$

$\alpha = 2 \cdot 10^{-2}$ рад/с$^3$

$\varphi = 60°$

---

$t = ?$

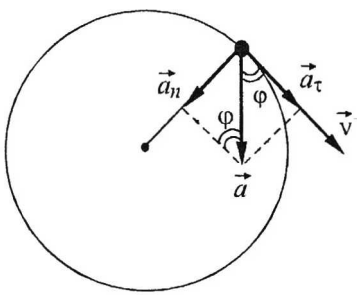



Рис. к задаче 3

**Решение.**

Разложим вектор полного ускорения $\vec{a}$ (см. рисунок) на составляющие: $\vec{a}_n$ и $\vec{a}_\tau$. Тогда

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{a_n}{a_\tau}. \qquad (1)$$

Используя уравнение (1.34), найдем

$$a_\tau = \varepsilon \cdot R = \alpha t R. \qquad (2)$$

С другой стороны по определению:

$$a_\tau = \frac{d\mathrm{v}}{dt}. \qquad (3)$$

Из уравнений (2), (3) запишем:

$$\alpha t R = \frac{d\mathrm{v}}{dt}. \qquad (4)$$

Разделим переменные в уравнении (4) и проинтегрируем его:

$$\alpha t R dt = d\mathrm{v}, \quad \int_0^t \alpha t R dt = \int_0^{\mathrm{v}} d\mathrm{v}, \quad \mathrm{v} = \alpha R \frac{t^2}{2}. \qquad (5)$$

Нормальное ускорение

$$a_n = \frac{\mathrm{v}^2}{R} = \frac{\alpha^2 R t^4}{4}. \qquad (6)$$

Подставим в формулу (1) уравнения (2) и (6):

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\alpha t^3}{4}. \qquad (7)$$

Из уравнения (7) найдем время вращения тела:

$$t = \sqrt[3]{\frac{4\operatorname{tg}\varphi}{\alpha}}.$$

Подставив числовые значения, получим

$$t = 7 \text{ с}.$$

**Ответ:** $t = 7$ с.

**Задача 4.** Камень, брошенный с высоты $h$ = 2,1 м под углом $\alpha = 45^0$ к горизонту, падает на расстоянии $S = 42$ м (по горизонтали) от места бросания. Найти начальную скорость $v_0$ камня, время полета $\tau$, максимальную высоту $H$ полета над уровнем Земли, радиусы кривизны траектории в верхней точке $R_A$ и в точке падения камня на Землю $R_B$. Сопротивление воздуха не учитывать.

**Дано:**

$h = 2{,}1$ м

$\alpha = 45^\circ$

$S = 42$ м

---

$v_0 = ?\ \ H = ?$

$\tau = ?\ \ R_A = ?$

$R_B = ?$

**Решение.**

Камень можно рассматривать как материальную точку, движение которой происходит по параболе. Это сложное движение представим как сумму двух независимых движений. Для этого выберем систему координат $XOY$ так, как показано на рисунке, а начало отсчета поместим в точку бросания 0. В горизонтальном направлении сумма сил, действующих на камень, равна нулю. Поэтому движение камня вдоль оси $OX$ — равномерное со скоростью $v_x$, равной горизонтальной составляющей начальной скорости $v_0$:

$$v_x = v_0 \cos\alpha.$$

По вертикали на камень действует сила тяжести, поэтому движение камня вдоль оси $OY$ будет равнопеременным (является равнозамедленным до точки А и равноускоренным после точки $A$) с постоянным ускорением $\vec{g}$, направленным вертикально вниз. Скорость $v_{oy}$ равна вертикальной составляющей начальной скорости $v_0$:

$$v_{oy} = v_0 \sin\alpha.$$

Законы движения вдоль осей $OX$ и $OY$ имеют вид

$$x = v_0 t \cos\alpha, \quad (1)$$

$$y = v_0 t \sin\alpha - g\frac{t^2}{2}. \quad (2)$$

В конечной точке $B$ траектории движения

$$t = \tau, \quad x = S, \quad y = -h.$$

Поэтому:

$$S = v_0 \tau \cos\alpha, \quad (3)$$

$$-h = v_0 \tau \sin\alpha - g\frac{\tau^2}{2}. \quad (4)$$

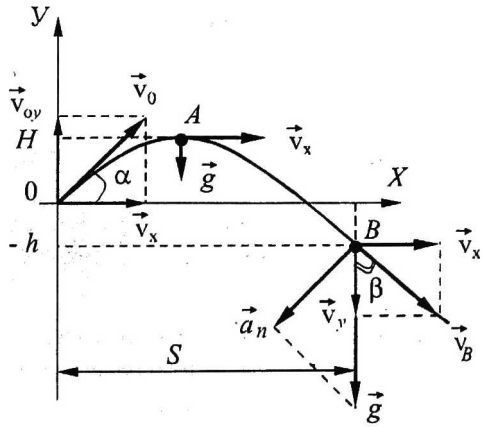



Рис. к задаче 4

Решение системы уравнений (3)–(4) дает время полета и начальную скорость:

$$\tau = \sqrt{\frac{2(h + S\,tg\alpha)}{g}}, \quad (5)$$

$$v_0 = \frac{S}{\tau \cos\alpha}. \quad (6)$$

Используя уравнение (2), найдем

$$v_y = \frac{dy}{dt} = v_0 \sin\alpha - gt. \quad (7)$$

В точке $A$ траектории $v_y = 0$, тогда время полета камня до этой точки

$$t_1 = (v_0 \sin\cdot\alpha)/g.$$

Подставляя время $t_1$ в формулу (1), найдем максимальную высоту траектории над осью $OX$:

$$y_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}, \quad (8)$$

а над Землей:

$$H = h + \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}. \qquad (9)$$

Радиус кривизны траектории определяется из соотношения

$$R = \frac{v^2}{a_n}.$$

В точке $A$

$$v = v_A = v_X, \quad an = g,$$

поэтому

$$R_A = \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g}. \qquad (10)$$

В точке $B$

$$R_B = \frac{v_B^2}{a_n}.$$

Из рисунка видно, что $a_n = g \sin \beta$, $\sin \beta = \frac{v_X}{v_B}$, тогда

$$R_B = \frac{v_B^3}{g v_0 \cos \alpha}. \qquad (11)$$

Здесь:

$$v_B = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 \cos^2 \alpha + (v_0 \sin \alpha - g\tau)^2}.$$

**Ответ:** $\tau = 3$с, $v_0 = 20$м/с, $H = 12$м, $v_B = 20{,}8$м/с,

$R_A = 20$м, $R_B = 67$м.

# Глава 2

# ДИНАМИКА ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Динамика изучает движение тел под действием приложенных к ним сил.

## § 6. Законы И. Ньютона

### *Первый закон Ньютона* (закон инерции)

*Существуют такие системы отсчета, относительно которых поступательно движущееся тело сохраняет свою скорость постоянной, если на него не действуют другие тела или действия их скомпенсированы.* Такие системы отсчета называются *инерциальными.*

Явление сохранения скорости тел постоянной называется *инерцией.*

Действие одних тел на другие характеризуется силой.

*Сила* — это мера взаимодействия двух тел, в результате которого тела приобретают ускорение или деформируются. Сила — векторная величина.

Свойство тел сохранять при отсутствии внешнего воздействия состояние покоя или равномерного и прямолинейного движения называют *инертностью.* Инертность тел характеризуется скалярной величиной, постоянной для данного тела (в классической механике Ньютона), называемой *массой* тела.

### *Второй закон Ньютона*

*В инерциальной системе отсчета ускорение* $\vec{a}$, *с которым движется тело, прямо пропорционально силе* $\vec{F}$, *действующей на тело, и обратно пропорционально массе тела m:*

$$\vec{a} = \vec{F} / m . \qquad (1.36)$$

Направление ускорения совпадает с направлением силы.

Если на тело действует несколько сил (*n*, например), то второй закон Ньютона можно записать в виде

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = m\vec{a} .$$

В системе СИ сила измеряется в ньютонах (Н), 1 Н = 1 кг·м/с$^2$.

Уравнение (1.36), записанное в дифференциальном виде:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} ,$$

называют основным уравнением динамики материальной точки. В зависимости от постановки задачи решение основного уравнения динамики проводится в векторной форме или в проекциях на координатные оси.

Различают основную и обратную задачи динамики. В основной задаче по заданным силам и начальным условиям определяется состояние механической системы. Содержанием обратной задачи является определение закона движения по заданному параметру движения и начальным условиям.

### *Третий закон Ньютона*

*При взаимодействии двух тел возникают две силы, которые равны по модулю, направлены в противоположные стороны вдоль прямой, соединяющей тела:*

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}, \qquad (1.37)$$

где $\vec{F}_{12}$ — сила, с которой первое тело действует на второе;

$\vec{F}_{21}$ — сила, с которой второе тело действует на первое.

Эти силы не уравновешиваются, так как приложены к разным телам.

*Принцип независимости действия сил: если на материальную точку массой $m_i$ одновременно действует несколько сил, то каждая из них сообщает материальной точке ускорение $\vec{a}_i = \vec{F}_i / m_i$ так, как будто другие силы не действуют.*

По современным представлениям все явления, протекающие во Вселенной, обусловлены четырьмя видами *фундаментальных взаимодействий:* сильными, электромагнитными, слабыми и гравитационными. *Сильные взаимодействия* обеспечивают существование атомных ядер и проявляются в действии ядерных сил. *Электромагнитные взаимодействия* обусловливают существование атомов, молекул и макротел. *Слабые взаимодействия* характерны для элементарных частиц. *Гравитационные взаимодействия* проявляются в виде сил всемирного тяготения.

Силы, рассматриваемые в классической механике, имеют электромагнитную (силы упругости, силы трения) и гравитационную природу (силы тяготения, силы тяжести).

В механике Ньютона состояние материальной точки в момент времени $t$ определяется из решения основного уравнения динамики по известным в начальный момент времени координатам и проекциям скорости. Это положение называется *механическим детерминизмом.*

## § 7. Силы в механике

В динамике при изучении движения тел необходимо знать силы, действующие на тело, и их зависимость от различных величин.

*Силы тяготения* (гравитационные силы) возникают в результате взаимного притяжения тел и подчиняются закону всемирного тяготения:

$$F = Gm_1m_2/r^2. \qquad (1.38)$$

*Сила взаимного притяжения F двух материальных точек прямо пропорциональна произведению их масс, обратно пропорциональна квадрату расстояния r между ними и направлена вдоль прямой, соединяющей материальные точки.*

В уравнении (1.38) $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ м$^3/(\text{кг} \cdot \text{с})^2$ — гравитационная постоянная.

*Силой тяжести* материальной точки называется сила $m\vec{g}$, равная векторной сумме силы $\vec{F}$ тяготения этой материальной точки к Земле и центробежной силы инерции $\vec{F}_{\text{ц}}$, обусловливающей участие материальной точки в суточном вращении Земли. Под действием силы тяжести все тела падают с постоянным для данной местности ускорением свободного падения $\vec{g}$. Ускорение свободного падения не зависит от массы падающего тела и изменяется с широтой местности в пределах от 9,78 м/с$^2$ на экваторе до 9,83 м/с$^2$ на полюсах.

*Весом тела* $\vec{P}$ называется сила, с которой тело, вследствие его притяжения к Земле, действует на опору или подвес. Вес тела приложен к опоре или подвесу.

*Невесомость* — это состояние системы, при котором отсутствует давление частей системы друг на друга. В состоянии невесомости тела не оказывают давления на окружающие их тела. Например, при свободном падении тело находится в состоянии невесомости. Состояние невесомости тела может наступить при движении в лифте, если кабина лифта опускается с ускорением, равным $g$.

*Силы упругости* возникают при деформации тел.

*Деформация* — это изменение формы или объема тела под действием силы.

*Упругими* называются деформации, которые полностью исчезают после прекращения действия деформирующих сил.

Для небольших упругих деформаций справедлив *закон Р. Гука*[1]: *сила упругости F прямо пропорциональна величине деформации x*:

$$F = -kx, \tag{1.39}$$

где $k$ — коэффициент упругости (жесткость), $[k]$ = Н/м.

*Сила трения скольжения* возникает при относительном перемещении двух соприкасающихся тел. Она не зависит от площади поверхностей соприкосновения трущихся тел и пропорциональна силе нормального давления $N$, прижимающей поверхности друг к другу:

$$F_{тр} = \mu N, \tag{1.40}$$

где $\mu$ — коэффициент трения скольжения, зависящий от состояния соприкасающихся поверхностей.

Сила трения направлена по касательной к трущимся поверхностям в сторону, противоположную движению тела.

Сила трения возникает не только при скольжении одной поверхности по другой, но и при попытках вызвать такое скольжение. В этом случае она называется силой трения покоя.

*Сила трения покоя* $F_{тр.\,п}$ равна по модулю внешней силе, которую прикладывают к телу, пытаясь сдвинуть его с места. Она может принимать любые значения от нуля до силы трения скольжения $F_{тр}$:

$$0 \le F_{тр.п} \le F_{тр}.$$

## § 8. Импульс тела. Закон сохранения импульса

Рассмотрим движение тела массой $m$ под действием внешних сил. По второму закону Ньютона $\vec{F} = m\vec{a}$, где $\vec{F}$ — геометрическая сумма внешних сил, $\vec{a}$ — ускорение, сообщаемое телу. Так как ускорение $\vec{a} = d\vec{v}/dt$, то

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{d\vec{p}}{dt}. \tag{1.41}$$

В уравнении (1.41) произведение массы тела на его скорость ($m\vec{v}$) называется *импульсом тела* $\vec{p}$. Согласно уравнению (1.41) второй закон Ньютона сформулируется следующим образом: *скорость изменения импульса*

[1] Роберт Гук (1635–1703) — английский физик.

*тела равна силе, действующей на тело.* Это наиболее общая формулировка основного закона динамики поступательного движения.

Импульс тела — величина векторная. Вектор импульса совпадает по направлению с вектором скорости.

Единица измерения импульса в системе СИ килограмм-метр в секунду (кгм/с).

Рассмотрим механическую систему, состоящую из $n$ поступательно движущихся тел. Используя второй закон Ньютона (1.41), запишем систему уравнений:

$$\frac{d(m_1\vec{v}_1)}{dt} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + ... + \vec{F}_{1n} + \vec{F}_1 ,$$

$$\frac{d(m_2\vec{v}_2)}{dt} = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} + ... + \vec{F}_{2n} + \vec{F}_2 ,$$

. . . . . .

$$\frac{d(m_n\vec{v}_n)}{dt} = \vec{F}_{n1} + \vec{F}_{n2} + ... + \vec{F}_{n(n-1)} + \vec{F}_k .$$

Силы $\vec{F}_{12}, \vec{F}_{13}, \vec{F}_{1n}, \vec{F}_{21}, ..., \vec{F}_{n(n-1)}$, возникающие в результате взаимодействия между телами данной системы, называются *внутренними*. Силы $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ...\vec{F}_k$, с которыми на тела данной системы действуют тела других систем, называются *внешними.*

Сложив левые и правые части уравнений, получим

$$\sum \frac{d(m_i\vec{v}_i)}{dt} = \sum \vec{F}_{\text{внутр}} + \sum \vec{F}_{\text{внеш}}$$

или

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F}_{\text{внутр}} + \sum \vec{F}_{\text{внеш}},$$

где $\frac{d\vec{p}}{dt}$ — изменение импульса системы,

$\sum \vec{F}_{\text{внутр}}$ — сумма внутренних сил,

$\sum \vec{F}_{\text{внеш}}$ — сумма внешних сил.

На основании третьего закона Ньютона $\sum \vec{F}_{\text{внутр}} = 0$, поэтому данное уравнение запишем в виде $d\vec{p}/dt = \sum \vec{F}_{\text{внеш}}$.

*Изменение импульса системы тел определяется суммой внешних сил, действующих на систему.* Это закон *изменения импульса системы тел.*

Если система замкнута, то $\sum \vec{F}_{\text{внеш}} = 0$ и уравнение примет вид $d\vec{p}/dt = 0$ или $d\vec{p} = 0$.

А это значит, что

$$\vec{p} = \text{const}. \qquad (1.42)$$

Получен *закон сохранения импульса системы тел: полный (суммарный) импульс замкнутой системы тел остается постоянным по величине и направлению.*

Закон сохранения импульса справедлив лишь в замкнутой системе, когда на тела не действуют внешние силы. Однако его можно применять: 1) если сумма внешних сил, действующих на систему тел, не равна нулю, т. е $\sum \vec{F}_i \neq 0$, но равна нулю сумма проекций всех внешних сил на какую-либо ось (например, ось *x*), тогда проекция импульса системы на эту ось $p_x = \text{const}$; 2) если $\sum \vec{F}_i \neq 0$, а взаимодействие тел кратковременно и импульс внешних сил существенно не изменяет импульса тела.

Закон сохранения импульса связан с о*днородностью пространства* и является фундаментальным законом природы.

## § 9. Центр масс. Закон движения центра масс

Точка С (рис. 6), положение которой можно определить радиусом-вектором

$$\vec{r}_c = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \ldots + m_n\vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i, \qquad (1.43)$$

называется *центром масс* системы. Масса *i*-й частицы системы обозначена $m_i$, $\vec{r}_i$ — радиус-вектор, определяющий положение *i*-й частицы, *m* — масса системы.

Дифференцируя по времени уравнение (1.43), найдем скорость движения центра масс:

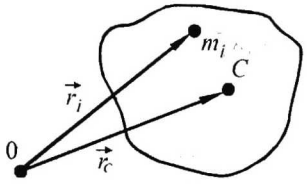



Рис. 6

$$\vec{v}_c = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = \frac{\vec{p}}{m}, \qquad (1.44)$$

где $\vec{v}_i$ — скорость; $\vec{p}_i$ — импульс $i$-й частицы; $\vec{p}$ — импульс системы.

Из уравнения (1.44) следует, что импульс системы равен произведению ее массы на скорость движения центра масс:

$$\vec{p} = m\vec{v}_c. \qquad (1.45)$$

Подставив выражение (1.45) в уравнение (1.41), получим уравнение движения центра масс:

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}_c) = m\frac{d\vec{v}_c}{dt} = m\vec{a}_c = \vec{F}, \qquad (1.46)$$

где $\vec{a}_c$ — ускорение центра масс.

Из уравнения (1.46) можно сделать вывод, что *центр масс системы движется так же, как материальная точка, масса которой равна массе данной системы, и на которую действует сила, равная результирующей всех внешних сил, приложенных к системе.* Для замкнутой системы результирующая сила $\vec{F} = 0$, значит, $\vec{a}_c = 0$, т. е. центр масс замкнутой системы движется прямолинейно и равномерно или покоится.

## § 10. Энергия, работа, мощность

Универсальной количественной мерой движения и взаимодействия всех видов материи является *энергия*.

Различают виды энергии: механическая, внутренняя, электро-магнитная, ядерная и др. В процессе взаимодействия тел энергия может переходить из одного вида в другой. Например, при трении тела нагреваются, при этом механическая энергия переходит во внутреннюю. Изменение вида энергии связано с совершением работы.

*Механическая работа* — это физическая величина, равная скалярному произведению двух векторов, силы $\vec{F}$ и перемещения $\vec{S}$. Для элементарной работы можно записать выражение

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{S} = F \cdot dS \cos\alpha = F_S dS, \qquad (1.47)$$

где $F_S$ — проекция силы на направление перемещения, $\alpha$ — угол между векторами силы и перемещения.

Если $\alpha = 0$, то $dA = FdS$ — максимальная величина; если $\alpha = 90°$, то $A = 0$; если $\alpha = 180°$, то $dA = -FdS$ — работа отрицательная (работа сил сопротивления).

Работа, совершаемая внешними силами над системой, считается положительной; работа, совершаемая самой системой, считается отрицательной.

Для расчета работы при перемещении частицы от $S_1$ до $S_2$ надо проинтегрировать уравнение (1.47):

$$A = \int_{S_1}^{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{S}. \qquad (1.48)$$

Работа на отрезке пути от точки 1 до точки 2 численно равна площади фигуры $012C$ (рис. 7).

В системе СИ работа и энергия измеряются в джоулях (Дж), 1 Дж = 1 Н·м.

*Консервативной* называют силу, работа которой определяется начальным и конечным положением тела и не зависит от пути, по которому оно двигалось.

Консервативными являются силы тяготения, силы упругости. Системы, в которых действуют только консервативные силы, называются *консервативными* или *потенциальными системами*.

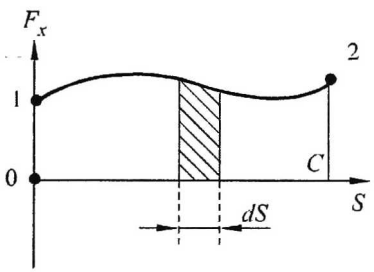


Рис. 7

Силы, приводящие к рассеиванию энергии, называются *диссипативными* (силы трения, силы сопротивления и т. д.), а системы, в которых действуют диссипативные силы, называются *диссипативными системами*.

Вычислим работу упругой силы, действующей, например, при растяжении пружины. Сила упругости $F$ и удлинение пружины $x$ связаны зависимостью, определяемой законом Гука (1.39):

$$F = -kx.$$

Элементарная работа $dA$ при бесконечно малом удлинении пружины $dx$ будет равна

$$dA = \vec{F}d\vec{x} = |\vec{F}||d\vec{x}|\cos 180° = -|\vec{F}||d\vec{x}| = -kx\,dx. \qquad (1.49)$$

Интегрируя уравнение (1.49), найдем работу, совершаемую упругой силой при растяжении пружины:

$$A = -\int_{x_1}^{x_2} kx dx = -\left(\frac{kx_2^2}{2} - \frac{kx_1^2}{2}\right). \qquad (1.50)$$

Из выражения (1.50) следует, что работа сил упругости зависит только от начального $x_1$ и конечного $x_2$ положений пружины, а значит, силы упругости являются консервативными.

Согласно уравнению (1.50) работа, совершаемая внешней силой при растяжении пружины на величину $x$, равна

$$A = \frac{kx^2}{2}, \qquad (1.51)$$

если принять $x = 0$ у недеформированного тела.

*Мощностью N* называется физическая величина, равная работе, совершаемой в единицу времени:

$$N = \frac{dA}{dt} = \frac{\vec{F} d\vec{S}}{dt} = \vec{F}\frac{d\vec{S}}{dt} = \vec{F}\,\vec{\mathrm{v}}. \qquad (1.52)$$

Мощность равна скалярному произведению двух векторов: силы $\vec{F}$ и скорости перемещения частицы $\vec{\mathrm{v}}$.

В системе СИ мощность измеряется в ваттах (Вт), 1 Вт = 1 Дж/с.

## § 11. Кинетическая и потенциальная энергия

*Кинетическая энергия* $E_к$ — это физическая скалярная величина, являющаяся мерой механического движения тел.

Пусть тело массой $m$ движется под действием внешней силы $\vec{F}$ с ускорением $\vec{\mathrm{a}} = d\vec{\mathrm{v}} / dt$.

Сила $\vec{F} = m\vec{a} = m\dfrac{d\vec{\mathrm{v}}}{dt}$, а элементарная работа данной силы на перемещение $d\vec{S}$ равна

$$dA = \vec{F} d\vec{S} = m\frac{d\vec{\mathrm{v}}}{dt} d\vec{S} = m d\vec{\mathrm{v}} \frac{d\vec{S}}{dt} = m\vec{\mathrm{v}}\, d\vec{\mathrm{v}}.$$

Так как $d\left(\frac{m\vec{v}^2}{2}\right)=\frac{1}{2}m\cdot 2\vec{v}d\vec{v}=m\vec{v}d\vec{v}$, то $dA=d\left(\frac{mv^2}{2}\right)$.

Интегрируем полученное выражение:

$$\int_1^2 dA=\int_{v_1}^{v_2} d\left(\frac{mv^2}{2}\right),\quad A_{12}=\frac{mv_2^2}{2}-\frac{mv_1^2}{2}.$$

Здесь

$$\frac{mv^2}{2}=E_к \tag{1.53}$$

— кинетическая энергия тела.

Таким образом, работа внешней силы $\vec{F}$ идет на увеличение кинетической энергии тела.

Отметим, что приращение кинетической энергии (в отличие от импульса) определяется работой не только внешних, но и внутренних сил.

Механическая энергия, зависящая от взаимного расположения тел или отдельных его частей и их положения во внешнем силовом поле, называется *потенциальной энергией.*

Мерой потенциальной энергии является работа потенциальных сил, осуществляющих взаимодействие между телами или частями тел.

Рассмотрим перемещение частицы массой $m$ в поле силы тяжести из точки 1 в точку 2 (рис. 8). Работа $A_{12}$, согласно (1.47), равна

$$A_{12}=\vec{F}_т\vec{S}_{12}=m\vec{g}\vec{S}_{12},$$

где $\vec{F}_т=m\vec{g}$ — сила тяжести.

Проекция вектора перемещения $\vec{S}_{12}$ на направление силы тяжести равна разности высот $(h_1-h_2)$:

$$A_{12}=mg\,(h_1-h_2)=-mgh. \tag{1.54}$$

Величина $mgh=E_p$ называется потенциальной энергией силы тяжести.

Таким образом, тело, поднятое на высоту $h$, обладает потенциальной энергией $E_p$, которая определяется начальным и конечным положениями тела. Высота $h$ отсчитывается от нулевого уровня, выбираемого произвольно. Из соотно-

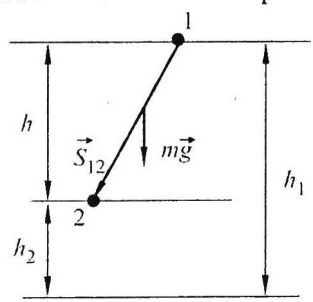



Рис. 8

шения (1.54) следует, что работа силы тяжести равна убыли потенциальной энергии системы, т. е. $dA = -dE_p$.

Потенциальной энергией обладают упругодеформированные тела (растянутый или сжатый стержень, сжатая или растянутая пружина).

В этом случае потенциальная энергия зависит от взаимного расположения частей тела.

Чтобы растянуть пружину на величину $x$ согласно формуле (1.51), нужно совершить работу

$$A = \frac{kx^2}{2}.$$

Эта работа идет на увеличение потенциальной энергии пружины

$$E_p = kx^2/2. \qquad (1.55)$$

Установим *связь между потенциальной энергией и силой.*

Пусть имеется консервативная система, в которой материальная точка движется в направлении оси $x$. При перемещении точки на величину $dx$ силы поля совершают работу:

$$dA = F_x dx,$$

которая равна убыли потенциальной энергии, т. е. $dA = -dE_p$.

Таким образом, $F_x dx = -dE_p$, откуда $F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x}$. Для компонент силы по осям $y$ и $z$ можно аналогично записать

$$F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y}, \qquad F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z}.$$

Так как вектор силы $\vec{F} = \vec{i}F_x + \vec{j}F_y + \vec{k}F_z$, получим

$$\vec{F} = -\left(\vec{i}\frac{\partial E_p}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial E_p}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial E_p}{\partial z}\right) = -\nabla E_p = -grad\, E_p, \qquad (1.56)$$

где $\nabla$ — оператор У. Гамильтона[1] (оператор набла).

---

[1] Уильям Роуан Гамильтон — ирландский математик.

Вектор с компонентами $\partial E_p / \partial x$, $\partial E_p / \partial y$, $\partial E_p / \partial z$, где $E_p$ — скалярная функция координат x, y, z, называется *градиентом* потенциальной энергии и обозначается grad $E_p$.

Направление вектора градиента совпадает с направлением оси, вдоль которой скалярная функция (в данном случае $E_p$) возрастает с наибольшей скоростью.

Следовательно, *консервативная сила равна градиенту потенциальной энергии, взятому со знаком минус.*

## § 12. Закон сохранения энергии

*Полная механическая энергия* системы $E$ равна сумме кинетической и потенциальной энергий:

$$E = E_к + E_p. \tag{1.57}$$

Рассмотрим случай, когда в замкнутой системе действуют только консервативные силы. Элементарная работа этих сил $dA$ сопровождается изменением кинетической $dE_к$ и одновременно равным по значению, но противоположным по знаку изменением потенциальной энергии $dE_p$ системы:

$$dA = dE_к = -dE_p.$$

Отсюда

$$dE_к + dE_p = d(E_к + E_p) = dE = 0,$$

так как для замкнутых систем $dA = 0$. Следовательно,

$$d(E_к + E_p) = 0,$$

или

$$E = E_к + E_p = \text{const}. \tag{1.58}$$

*В замкнутой системе, в которой действуют только консервативные силы, полная механическая энергия со временем не изменяется*. Это *закон сохранения энергии в механике*. При наличии в системе диссипативных сил полная механическая энергия системы уменьшается, переходя во внутреннюю энергию тел системы.

Закон сохранения механической энергии можно применять и для не замкнутых систем, когда: а) суммарная работа внешних сил, действующих на тела системы, равняется нулю; б) уменьшение энергии системы, связанное с преодолением диссипативных сил, компенсируется увеличением энергии за счет работы внешних сил. Отметим, что при свободном падении тело также нельзя считать замкнутой системой, так как на него действует внешняя сила — сила тяжести. В этом случае удобно рассматривать движение

в системе отсчета «тело–Земля», которую можно считать замкнутой. Практически это не приводит к ошибкам, так как потенциальная энергия тела в гравитационном поле Земли является энергией взаимодействия тела и Земли, то есть характеризует энергию всей системы. Изменением же кинетической энергии Земли при ее взаимодействии с падающим телом можно пренебречь.

Все процессы преобразования энергии подчиняются *закону сохранения и превращения энергии: энергия системы может переходить из одного вида в другой, перераспределяться между телами системы, но полная энергия замкнутой консервативной системы всегда остается постоянной.*

Закон сохранения механической энергии связан с *однородностью времени* и является фундаментальным законом природы.

## § 13. Соударение тел

*Ударом* называется совокупность явлений, возникающих за очень короткий промежуток времени при столкновении тел. Удар называется *абсолютно упругим*, если после соударения тела сами восстанавливают свою форму и размеры. Если после удара тела не восстанавливают свою первоначальную форму, то такой удар называется *абсолютно неупругим*.

Удар называется *прямым* и *центральным*, если тела при соударении двигались вдоль прямой, проходящей через их центры.

Рассмотрим соударение двух однородных шаров, двигающихся поступательно при отсутствии действия внешних сил.

### *Абсолютно неупругий прямой центральный удар двух шаров*

Пусть шары массами $m_1$ и $m_2$ имели до удара скорости $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$. Запишем закон сохранения импульса:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{u}, \qquad (1.59)$$

где $\vec{u}$ — скорость шаров после удара. При абсолютно неупругом ударе закон сохранения механической энергии не выполняется, т. к. часть механической энергии во время удара переходит во внутреннюю энергию или другие формы энергии. Закон сохранения энергии для этого случая можно записать в виде

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \left(\frac{m_1 + m_2}{2}\right)u^2 + E_{\text{деф}}, \qquad (1.60)$$

где $E_{\text{деф}}$ — потеря механической энергии тел при деформации.

Из уравнений (1.59) и (1.60) найдем скорость шаров после соударения:

$$\vec{u} = \left(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2\right)/\left(m_1 + m_2\right) \qquad (1.61)$$

и энергию, затраченную на деформацию шаров:

$$E_{\text{деф}} = \frac{m_1 m_2}{2\left(m_1 + m_2\right)}\left(v_1 - v_2\right)^2. \qquad (1.62)$$

Если скорость $v_2 = 0$, то $u = m_1 v_1/(m_1 + m_2)$, а

$$E_{\text{деф}} = m_1 m_2 v_1^2/2(m_1 + m_2),$$

и если при этом $m_2 >> m_1$, то энергия деформации $E_{\text{деф}}$ приблизительно равна кинетической энергии ударяющего тела:

$$E_{\text{деф}} = \frac{m_1 v_1^2}{2}.$$

Таким образом, для получения наибольшей деформации, например при ковке детали, масса наковальни (неподвижного тела) должна быть гораздо больше массы молота.

***Абсолютно упругий прямой центральный удар двух шаров***

При таком ударе кинетическая энергия переходит полностью или частично в потенциальную энергию упругой деформации. Затем тела восстанавливают первоначальную форму, отталкивая друг друга. В итоге потенциальная энергия упругой деформации снова переходит в кинетическую энергию и тела разлетаются со скоростями, величина и направление которых определяется законом сохранения энергии и законом сохранения импульса:

$$m_1 v_1^2/2 + m_2 v_2^2/2 = m_1 u_1^2/2 + m_2 u_2^2/2, \qquad (1.63)$$

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2, \qquad (1.64)$$

где $m_1$ и $m_2$ — массы шаров; $v_1$ и $v_2$ — скорости шаров до удара; $u_1$ и $u_2$ — скорости шаров после удара.

Уравнения (1.63) и (1.64) приведем к виду

$$m_1\left(\vec{v}_1 - \vec{u}_1\right) = m_2\left(\vec{u}_2 - \vec{v}_2\right), \qquad (1.65)$$

$$m_1\left(v_1^2 - u_1^2\right) = m_2\left(u_2^2 - v_2^2\right),$$

или $m_1(v_1 + u_1)(v_1 - u_1) = m_2(u_2 + v_2)(u_2 - v_2)$.

Так как все векторы, входящие в уравнение (1.65) коллинеарны, после преобразований запишем $\vec{v}_2 + \vec{u}_2 = \vec{v}_1 + \vec{u}_1$, откуда $\vec{u}_2 = \vec{v}_1 + \vec{u}_1 - \vec{v}_2$. Решая совместно полученное уравнение и уравнение (1.65), находим

$$\vec{u}_1 = [2m_2\vec{v}_2 + (m_1 - m_2)\vec{v}_1]/(m_1 + m_2), \qquad (1.66)$$

$$\vec{u}_2 = [2m_1\vec{v}_1 + (m_2 - m_1)\vec{v}_2]/(m_1 + m_2). \qquad (1.67)$$

Рассмотрим частные случаи.

1. Массы соударяющихся шаров равны: $m_1 = m_2$, из уравнений (1.66) и (1.67) следует, что $\vec{u}_1 = \vec{v}_2$ и $\vec{u}_2 = \vec{v}_1$, т. е. шары при соударении обмениваются скоростями, и если один (например, второй) до соударения покоился, то после удара он будет двигаться с той же скоростью, с которой двигался первый шар, а первый шар после удара останавливается.

2. Шар массой $m_1$ налетает на неподвижную стенку. Массу стенки можно считать бесконечно большой, тогда шар меняет свою скорость на противоположную.

**Задача 5.** Невесомый блок закреплен на вершине наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол α. Через блок перекинута нерастяжимая нить, к концам которой прикреплены тела 1 и 2 массами $m_1$ и $m_2$. Коэффициент трения между телом 1 и наклонной плоскостью равен μ. Массы блока и нити пренебрежимо малы, трения в блоке нет. Считая, что в начальный момент тела 1 и 2 неподвижны, найти отношение масс $m_2 / m_1$, при котором тело 2 начнет опускаться.

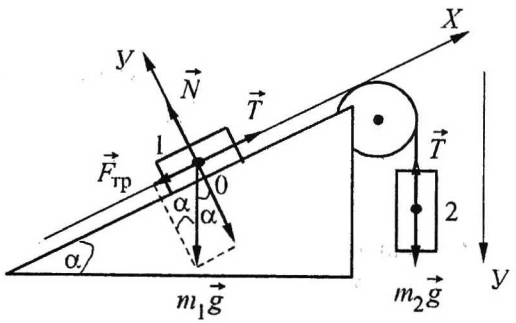



Рис. к задаче 5

**Дано:**
α, μ
$m_1, m_2$

$\frac{m_2}{m_1} = ?$

**Решение.**

Рассмотрим силы, действующие на тела 1 и 2. Спроектируем их на выбранные координатные оси и запишем второй закон Ньютона в виде системы скалярных уравнений.

*Для тела 1*

$$0X: T - F_{тр} - m_1 g \sin\alpha = m_1 a_{1x}, \quad (1)$$

$$0Y: N - m_1 g \cos\alpha = 0. \quad (2)$$

*Для тела 2*

$$0Y: m_2 g - T = m_2 a_{2y}. \quad (3)$$

При этом необходимо учесть, что

$$a_{1x} = a_{2y} = a,$$

так как нить нерастяжима.

$$F_{тр} = \mu N = \mu m_1 g \cos\alpha. \quad (4)$$

Решая систему (1)–(4), находим:

$$a = g\frac{(m_2 - \mu m_1 \cos\alpha - m_1 \sin\alpha)}{m_1 + m_2}. \quad (5)$$

Разделим в формуле (5) числитель и знаменатель на $m_1$.
Тогда

$$a = g\frac{\left[\frac{m_2}{m_1} - \mu\cdot\cos\alpha - \sin\alpha\right]}{1+\frac{m_2}{m_1}}. \qquad (6)$$

Очевидно, чтобы тело 2 опускалось, ускорение должно быть положительным. Это будет выполняться, когда в формуле (6)

$$\frac{m_2}{m_1} > (\sin\alpha + \mu\cos\alpha).$$

**Ответ:** $\frac{m_2}{m_1} > (\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$.

**Задача 6.** Частица движется вдоль оси $X$ по закону: $x = \alpha t^2 - \beta t^3$, где $\alpha$ и $\beta$ — положительные постоянные. В момент $t = 0$ сила, действующая на частицу, равна $F_0$. Найти значения силы $F_x$ в точках поворота и в момент, когда частица окажется в точке $x = 0$.

| **Дано:** | **Решение.** |
|---|---|
| $x = \alpha t^2 - \beta t$<br>$F_0$ | Запишем второй закон Ньютона: $F_x = m a_x$. (1) |
| $F_1 = ?,\ F_2 =$ | Для нахождения силы необходимо определить ускорение $a_x$: |

$$\mathrm{v}_x = \frac{dx}{dt} = 2\alpha t - 3\beta t^2,$$

$$a_x = \frac{d\mathrm{v}_x}{dt} = 2\alpha - 6\beta t. \qquad (2)$$

Перепишем уравнение (1) с учетом уравнения (2):

$$F_x = m(2\alpha - 6\beta t). \qquad (3)$$

Используя начальные условия, когда $t = 0$ и $F_x = F_0$, найдем массу частицы:

$$F_0 = m2\alpha \Rightarrow m = \frac{F_0}{2\alpha}\,. \qquad (4)$$

а) В точке поворота скорость частицы равна

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 0,$$

т. е. $$2\alpha t - 3\beta t^2 = 0\,.$$

Это соответствует времени:

$$t_1 = \frac{2\alpha}{3\beta}\,. \qquad (5)$$

Подставим вместо $t$ выражение для $t_1$ в формулу (3):

$$F_1 = m(2\alpha - 6\beta t_1) = \frac{F_0}{2\alpha}\left(2\alpha - 6\beta\frac{2\alpha}{3\beta}\right) = -F_0\,.$$

б) В точке $x = 0$ частица будет находиться в момент времени $t_2$, которое определим из закона движения:

$$x = \alpha t_2^2 - \beta t_2^3 = 0\,,$$

$$t_2^2(\alpha - \beta t_2) = 0\,.$$

Отсюда

$$t_2 = \frac{\alpha}{\beta}\,. \qquad (6)$$

Подставив время $t_2$ в формулу (3), получим

$$F_2 = m(2\alpha - 6\beta t_2) = \frac{F_0}{2\alpha}\left(2\alpha - 6\beta\frac{\alpha}{\beta}\right) = -2F_0\,.$$

**Ответ:** $F_1 = -F_0$; $F_2 = -2F_0$.

**Задача 7.** Небольшое тело $A$ начинает скользить с вершины гладкой сферы радиусом $R$. Найти угол а между вертикалью и радиусом-вектором, характеризующим положение тела А относительно центра сферы в момент отрыва от нее, а также скорость тела в момент отрыва.

**Дано:**

$R$

$v = ?$

$a = ?$

**Решение.** На тело в точке $C$ действует сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции опоры $\vec{N}$. По второму закону Ньютона

$$m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}, \qquad (1)$$

где $\vec{a} = \dfrac{v^2}{R}$ — центростремительное ускорение. Проектируя уравнение (1) на нормаль $\vec{n}$ к траектории в данной точке, запишем:

$$mg\cos\alpha - N = m\frac{v^2}{R}. \qquad (2)$$

Направление орты $\vec{n}$ выбираем к центру кривизны траектории в данной точке. В момент отрыва $N = 0$, тогда уравнение (2) будет иметь вид

$$mg\cos\alpha = m\cdot\frac{v^2}{R},$$

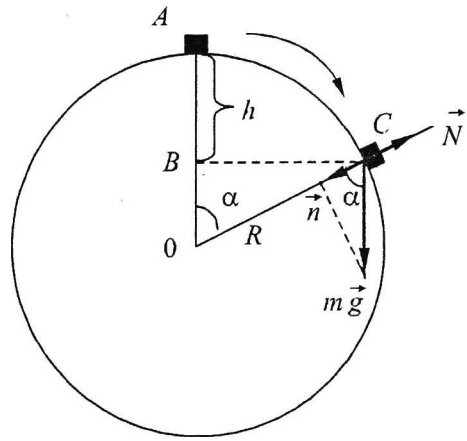



Рис. к задаче 7

$$g\cos\alpha = \frac{v^2}{R}. \qquad (3)$$

Значения скорости v в точке $C$ определим из закона сохранения энергии:

$$mgh = \frac{mv^2}{2}, \qquad v^2 = 2gh. \qquad (4)$$

Из треугольника $OBC$ найдем $h$:

$$\frac{OB}{R} = \cos\alpha,$$

где $OB = R - h$,

$$\frac{R-h}{R} = \cos\alpha,$$

откуда

$$h = R(1 - \cos\alpha). \qquad (5)$$

Подставив уравнение (5) в (4), получим

$$v^2 = 2gR \cdot (1 - \cos\alpha). \qquad (6)$$

Из уравнений (3) и (6) найдем угол $\alpha$:

$$g\cos\alpha = \frac{v^2}{R} = 2g(1 - \cos\alpha),$$

$$3\cos\alpha = 2, \quad \alpha = \arccos\left(\frac{2}{3}\right). \qquad (7)$$

Скорость в момент отрыва определим из уравнений (6) и (7):

$$v = \sqrt{2gR(1 - \cos\alpha)} = \sqrt{\frac{2}{3}gR}.$$

**Ответ:** $v = \sqrt{\frac{2gR}{3}}$, $\alpha = \arccos\left(\frac{2}{3}\right)$.

**Задача 8.** Брусок массой $m$ = 1,5 кг тянут за нить так, что он движется с постоянной скоростью по горизонтальной плоскости с коэффициентом трения $\mu$ = 0,2. Найти угол $\alpha$, при котором натяжение нити $F$ будет наименьшим. Чему оно равно?

**Дано:**

$m = 1{,}5$ кг

$\mu = 0{,}2$

---

$\alpha = ?$

$F_{min} = ?$

**Решение.**

Поскольку тело движется с постоянной скоростью, то согласно первому закону Ньютона:

$$\vec{N} + \vec{F} + m\vec{g} + \vec{F}_{тр} = 0, \qquad (1)$$

где $m\vec{g}$ — сила тяжести, $\vec{N}$ — сила реакции плоскости, $\vec{F}_{тр}$ — сила трения скольжения и $\vec{F}$ — сила, с которой тянут брусок. Спроектируем уравнение (1) на оси $X$ и $Y$.

$OX$: $$F\cos\alpha - F_{тр} = 0, \qquad (2)$$

$OY$: $$N + F\sin\alpha - mg = 0, \qquad (3)$$

где $F_{тр} = \mu \cdot N$.

Решая уравнения (2) и (3), получим

$$F = \frac{\mu mg}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}. \qquad (4)$$

Чтобы определить угол α, при котором натяжение нити будет наименьшим, найдем производную $\frac{dF}{d\alpha}$ и приравняем ее нулю:

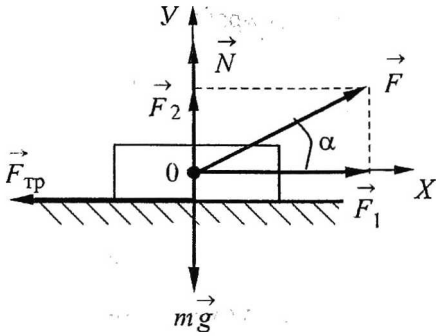


Рис. к задаче 8

$$\frac{dF}{d\alpha} = \left(\frac{\mu mg}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}\right)' = \frac{\mu mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)^2} = 0,$$

$$\sin\alpha - \mu\cos\alpha = 0, \qquad \mu = \operatorname{tg}\alpha,$$

$$\alpha = \operatorname{arctg}\mu, \quad \alpha = 11°20'.$$

Подставив α и данные задачи в уравнение (4), найдем

$$F_{\min} = 2{,}9\,\text{Н}.$$

**Ответ:** $\alpha = 11°20'$, $F_{\min} = 2{,}9\,\text{Н}$.

**Задача 9.** Частица 1 массой *m*, летящая со скоростью v, сталкивается с неподвижной частицей 2 массой 4*m*. После соударения частица 1 движется в противоположном направлении, а 1/4 часть ее первоначальной энергии уходит на нагревание и деформацию. Найти скорости частиц $v_1$ и $v_2$ после соударения.

**Решение** Запишем законы сохранения импульса (1.42) и энергии (1.58) для удара частицы:

$$\begin{cases} mv = -mv_1 + 4mv_2, & (1) \\ \dfrac{mv^2}{2} = \dfrac{mv_1^2}{2} + \dfrac{4mv_2^2}{2} + \dfrac{1}{4}\dfrac{mv^2}{2}, & (2) \end{cases}$$

где $\frac{1}{4}\frac{m\cdot v^2}{2}$ — потенциальная энергия деформации.

Система уравнений (1) и (2) содержит два неизвестных. Выразим $v_1$ из уравнения (1) и подставим в уравнение (2):

$$v_1 = 4v_2 - v, \tag{3}$$

$$v^2 = (4v_2 - v)^2 + 4v_2^2 + \frac{1}{4}v^2,$$

$$v^2 = 16v_2^2 - 8v_2 v + v^2 + 4v_2^2 + \frac{1}{4}v^2,$$

$$20v_2^2 - 8vv_2 + 0{,}25v^2 = 0. \tag{4}$$

Решая квадратное уравнение (4), находим:

$$v_2 = 0{,}36v.$$

Подставляя $v_2$ в формулу (3), определим:

$$v_1 = 0{,}44v.$$

**Ответ:** $v_2 = 0{,}36v$; $v_1 = 0{,}44v$.

**Задача 10.** В стальной кубик массой $M$ = 1 кг, находившийся в покое на горизонтальной поверхности, попадает стальной шарик массой $m$=10 г, летевший горизонтально со скоростью $v_1 = 10^3$ м/с, и упруго отражается обратно. Определить, какой путь $L$ после удара пройдет кубик до остановки, если коэффициент трения между кубиком и горизонтальной поверхностью $\mu = 0{,}2$.

**Дано:**

$M = 1$ кг

$m = 10^{-2}$ кг

$v_1 = 10^3$ м/с

$\mu$=0,2

$L = ?$

**Решение.**

Запишем закон сохранения импульса в проекции на ось *OX:*

$$mv_1 = -mv_2 + Mv. \tag{1}$$

Так как удар абсолютно упругий, применим закон сохранения энергии:

$$\frac{mv_1^2}{2} = \frac{mv_2^2}{2} + M\frac{v^2}{2}. \tag{2}$$

Учитывая, что $m << M$, и решая систему уравнений (1) и (2), находим:

$$v_2 = v_1;$$

$$v = \frac{2mv_1}{M+m} \approx \frac{2mv_1}{M}. \quad (3)$$

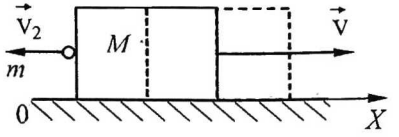



Рис. к задаче 10

Кубик массой $M$ движется с начальной скоростью v по горизонтальной поверхности и вследствие действия сил трения останавливается. Применяя второй закон Ньютона, найдем ускорение $a$ и путь $L$, который проходит кубик:

$$Ma = \mu \cdot Mg,$$

откуда ускорение $a = \mu g$, а путь $L = \frac{v^2}{2a} = \frac{4m^2 v_1^2}{M^2 2\mu \cdot g}$.

Подставив числовые значения, найдем $L$ = 100 м.

**Ответ:** $L$ = 100 м.

**Задача 11.** Два шара массами $m_1$ = 10 кг и $m_2$ = 15 кг подвешены на нитях длиной $L$ = 2 м так, что они соприкасаются между собой. Шар массой $m_1$ был отклонен на угол $\alpha = 60°$ и выпущен. Определить высоту, на которую поднимутся шары после удара. Удар считать неупругим.

**Дано:**

$m_1 = 10$ кг

$m_2 = 15$ кг

$L = 2$ м

$\alpha = 60^o$

---

$h_2 = ?$

**Решение.**

При отклонении шара *1* на угол $\alpha$ ему была сообщена потенциальная энергия:

$$E_{p1} = m_1 g h_1, \quad (1)$$

где $h_1 = L(1 - \cos\alpha)$.

Перед столкновением с шаром *2* он будет обладать кинетической энергией

$$E_{k1} = \frac{m_1 v_1^2}{2}. \quad (2)$$

По закону сохранения энергии

$$E_{p1} = E_{k1}.$$

Согласно уравнениям (1), (2) получим

$$m_1 g L(1 - \cos\alpha) = \frac{m_1 v_1^2}{2}. \quad (3)$$

Отсюда определим скорость первого шара до удара:

$$v_1 = \sqrt{2gL(1-\cos\alpha)}\,. \qquad (4)$$

После неупругого соударения оба шара получают одинаковую скорость $v_2$, которую определим из закона сохранения импульса:

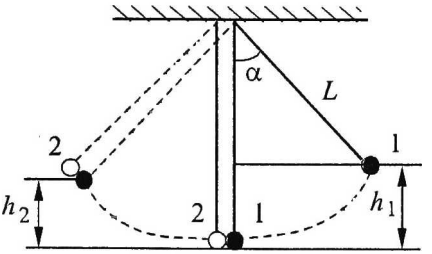



Рис. к задаче 11

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2)v_2\,,$$

$$v_2 = \frac{m_1\sqrt{2gL(1-\cos\alpha)}}{m_1 + m_2}\,. \qquad (5)$$

Кинетическая энергия шаров в нижнем положении перейдет в потенциальную энергию при их поднятии (по закону сохранения энергии):

$$E_{k2} = E_{p2}\,,$$

$$\frac{(m_1 + m_2)v_2^2}{2} = (m_1 + m_2)gh_2\,.$$

Отсюда

$$h_2 = \frac{v_2^2}{2g} = \frac{Lm_1^2(1-\cos\alpha)}{(m_1 + m_2)^2}\,.$$

После соответствующих вычислений получаем

$$h_2 = 0{,}16\,\text{м}\,.$$

**Ответ**: $h_2 = 0{,}16\,\text{м}$.

# Глава 3
# ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

## § 14. Момент силы. Момент импульса. Закон сохранения момента импульса

Сила $\vec{F}$, приложенная к телу в точке $A$ (рис. 9), положение которой задается радиусом-вектором $\vec{r}$, создает *момент силы* $\vec{M}$ относительно точки $o$:

$$\vec{M} = \left[\vec{r}\,\vec{F}\right]. \tag{1.68}$$

Направление вектора $\vec{M}$ определяется правилом правого винта. Раскрыв векторное произведение (1.68), получим

$$M = Fr\cdot\sin\alpha = Fl, \tag{1.69}$$

где $l = r\cdot\sin\alpha$ — плечо силы (кратчайшее расстояние от точки $o$ до линии действия силы).

*Моментом силы* относительно неподвижной оси $z$ называется скалярная величина $M_z$, равная проекции на эту ось момента силы $\vec{M}$ относительно какой-либо точки $o$, лежащей на данной оси $z$:

$$M_z = \left[\vec{r}\,\vec{F}\right]_z. \tag{1.70}$$

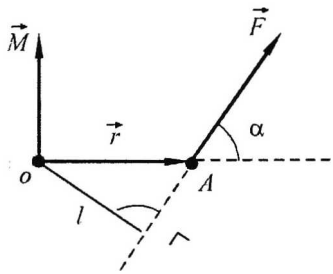


Рис. 9

Аналогично выражению (1.68) определяется *момент импульса* материальной точки $\vec{L}_i$ относительно точки 0:

$$\vec{L}_i = \left[\vec{r}, m_i\vec{v}_i\right] = \left[\vec{r}\;\vec{p}_i\right], \tag{1.71}$$

где $\vec{p}_i = m_i\vec{v}_i$ — импульс материальной точки, $\vec{r}$ — радиус-вектор.

Проекция момента импульса $\vec{L}_i$ на ось $z$, проходящую через точку $o$, называется моментом импульса относительно оси $z$:

$$L_{iz} = \left[\vec{r}\;\vec{p}_i\right]_z.$$

Модуль момента импульса можно определить, раскрыв векторное произведение (1.71):

$$L_i = p_i r\sin\alpha = lp_i, \tag{1.72}$$

где $l_i = r\sin\alpha$ — плечо вектора импульса $\vec{p}_i$.

В системе СИ единицей измерения момента силы является ньютон на метр (Нм), а единицей момента импульса — килограмм-метр в квадрате на секунду (кг·м$^2$/с).

Момент импульса системы, состоящей из *n* материальных точек:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i = \sum_{i=1}^{n} [\vec{r}\,\vec{p}_i]. \qquad (1.73)$$

Дифференцируя по времени уравнение (1.73), получим

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \left( \left[ \frac{d\vec{r}}{dt}\vec{p}_i \right] + \left[ \vec{r}\frac{d\vec{p}_i}{dt} \right] \right) = \sum_{i=1}^{n} \left( [\vec{v}\,\vec{p}_i] + [\vec{r}\vec{F}_i] \right) = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i = \vec{M}, \qquad (1.74)$$

где $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$, а $\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_i$, $\vec{M}$ — результирующий момент внешних сил.

Сумма $\sum_{i=1}^{n} [\vec{v}\,\vec{p}_i] = 0$, так как векторы $\vec{v}$ и $\vec{p}_i$ направлены по одной прямой в одну сторону.

Выражение (1.74) $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$ называется *уравнением моментов*: производная по времени от момента импульса системы относительно какой-либо точки равна моменту результирующей внешних сил относительно той же точки.

Если система замкнута, то момент внешних сил $\vec{M} = 0$ и $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$, т. е.

$$\vec{L} = \text{const}. \qquad (1.75)$$

*Момент импульса замкнутой системы со временем не изменяется.* Будет оставаться постоянным со временем и момент импульса системы относительно произвольной оси *z*, проходящей через точку *o*.

Уравнение (1.75) выражает *закон сохранения момента импульса системы*. Этот закон можно вывести, опираясь на второй закон Ньютона и свойство симметрии пространства: его изотропность.

Закон сохранения момента импульса является фундаментальным законом природы. Его можно применять к любой системе, если результирующий момент всех внешних сил, приложенных к системе, равен нулю.

## § 15. Момент инерции. Кинетическая энергия вращающегося тела

Рассмотрим тело массой $m$, вращающееся вокруг неподвижной оси $z$ (рис. 10). Мысленно разобьем его на систему материальных точек.

Пусть материальная точка $A$ массой $m_i$ отстоит от оси вращения на расстоянии $r_i$. Скалярная физическая величина $J_i$, равная произведению массы материальной точки на квадрат расстояния от нее до оси вращения, называется *моментом инерции материальной точки:*

$$J_i = m_i r_i^2 . \qquad (1.76)$$

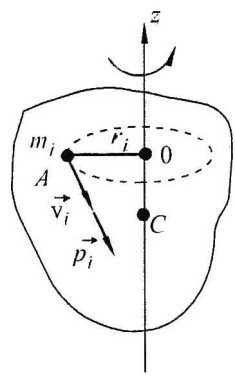


Рис. 10

*Момент инерции* тела равен сумме моментов инерций всех материальных точек, из которых состоит тело:

$$J = \sum m_i r_i^2 .$$

При непрерывном распределении массы в теле данная сумма сводится к интегралу:

$$J = \int\limits_{(m)} r^2 dm = \int\limits_{(V)} \rho r^2 dV , \qquad (1.77)$$

где $\rho$ — плотность тела; $dV$ — объем малого элемента тела массой $dm$, отстоящего от оси вращения на расстоянии $r$.

В СИ момент инерции измеряется в килограммах на метр в квадрате (кгм$^2$).

Кинетическая энергия материальной точки определяется по формуле

$$E_{ki} = \frac{m_i v_i^2}{2} ,$$

где $v_i$ — линейная скорость движения точки.

Если просуммировать кинетические энергии всех $n$ материальных точек, из которых состоит тело, то найдем кинетическую энергию тела:

$$E_к = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i v_i^2}{2} .$$

Заменив в данном выражении линейную скорость через угловую: $v_i = \omega r_i$, получим формулу для определения кинетической энергии вращающегося тела:

$$E_к = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i r_i^2 \omega^2}{2} = \sum_{i=1}^{n} J_i \frac{\omega^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^{n} J_i = J \frac{\omega^2}{2}, \quad (1.78)$$

где $J_i$ — момент инерции материальной точки, $J$— момент инерции тела, $\omega$ — угловая скорость вращения.

В случае, когда тело совершает одновременно поступательное и вращательное движение (например, шар катится по плоскости), его кинетическая энергия равна сумме кинетических энергий поступательного и вращательного движений:

$$E_k = E_k^{\text{пост}} + E_k^{\text{вращ}} = \frac{m\text{v}^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}.$$

## § 16. Моменты инерции некоторых тел

**1. Обруч.** Ось вращения обруча 00 проходит через центр масс — точку $C$ (рис.11).

Выделим на обруче материальную точку массой $m_i$, отстоящую на расстоянии $R$, равном радиусу обруча, от точки $C$.

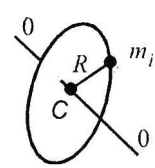


Рис. 11

Момент инерции материальной точки согласно уравнению (1.76) равен

$$J_i = m_i R^2.$$

Момент инерции обруча равен сумме моментов инерции материальных точек, из которых состоит обруч:

$$J = \sum_{i=1}^{n} J_i = R^2 \sum_{i=1}^{n} m_i = mR^2, \quad (1.79)$$

где $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$ — масса обруча.

**2. Диск.** Рассмотрим однородный диск (плотность $\rho$ = const), имеющий радиус $R$, массу $m$ и толщину $a$, ось вращения 00 которого проходит через центр масс — точку $C$ (рис. 12).

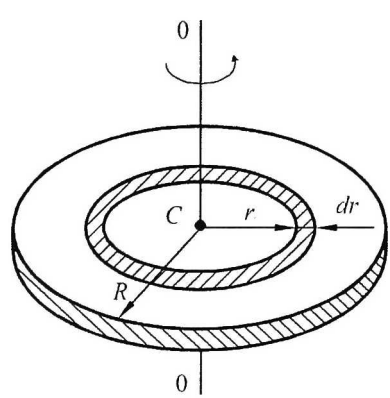


Рис. 12

Разобьем мысленно диск на малые концентрические цилиндры бесконечно малой толщины $dr$ с внутренним радиусом $r$ и внешним радиусом $(r + dr)$. По формуле (1.77) найдем момент инерции диска как сумму моментов инерции малых цилиндров:

$$J = \rho \int\limits_{(V)} r^2 dV = \rho \int\limits_{(r)} r^2 2\pi r dr \cdot a = 2\pi a \rho \int\limits_0^R r^3 dr,$$

где $2\pi r dr \cdot a$ — объем малого полого цилиндра.

Интегрируя данное выражение, получим

$$J = 2\pi a \rho \frac{r^4}{4}\Big|_0^R = \frac{1}{2}\pi a \rho R^4 = \frac{1}{2} m R^2. \qquad (1.80)$$

Далее без вывода запишем формулы для вычисления моментов инерции некоторых однородных тел, имеющих массу $m$, когда ось вращения проходит через центр масс.

**3. Шар.** $J = 0{,}4 m R^2,$ (1.81)

где $R$ — радиус шара.

**4. Прямой тонкий стержень.**

$$J = m l^2/12, \qquad (1.82)$$

где $l$ — длина стержня.

Если ось вращения проходит через конец стержня, то

$$J = m l^2/3. \qquad (1.83)$$

Момент инерции тела относительно оси, не проходящей через его *центр масс, определяется по теореме Я. Штейнера*[1]:

*Момент инерции тела J относительно произвольной оси равен сумме момента инерции этого тела $J_c$ относительно параллельной оси, проходящей через центр масс, и произведения массы тела m на квадрат расстояния a между осями:*

$$J = J_c + m a^2. \qquad (1.84)$$

[1] Якоб Штейнер (1763–1863) — швейцарский математик.

## § 17. Основной закон динамики вращательного движения. Работа и мощность при вращательном движении

Рассмотрим вращение твердого тела вокруг неподвижной оси (см. рис. 10). Мысленно разобьем тело на материальные точки массой $m_i$, находящиеся от оси вращения на расстоянии $\vec{r}_i$. Траекториями движения материальных точек являются окружности с радиусом $\vec{r}_i$. Определим модуль момента импульса материальной точки $A$ относительно оси вращения:

$$L_{iz} = r_i p_i \sin\frac{\pi}{2} = r_i p_i = m_i \mathrm{v}_i r_i .$$

Так как скорость $\mathrm{v}_i = \omega r_i$, то

$$L_{iz} = m_i \omega r_i^2 = J_{iz}\omega ,$$

где $J_{iz}$ — момент инерции материальной точки относительно оси $z$, $\omega$ — угловая скорость вращения тела.

Момент импульса тела относительно оси $z$ запишется в виде

$$L_z = \sum_{i=1}^{n} J_{iz}\omega = \omega \sum_{i=1}^{n} J_{iz} = J_z \omega , \qquad (1.85)$$

где $J_z$ — момент инерции тела относительно оси $z$, $n$ — число материальных точек.

Вектор момента импульса совпадает по направлению с вектором угловой скорости.

Согласно (1.85) закон сохранения момента импульса запишется в виде

$$J\omega = \text{const} \text{ или } J_1\omega_1 = J_2\omega_2. \qquad (1.86)$$

Если у тела, совершающего вращательное движение, под действием внутренних сил увеличивается момент инерции, то это приводит к уменьшению его угловой скорости вращения, и наоборот.

Законы сохранения момента импульса можно иллюстрировать с помощью *скамьи Жуковского*[1] (см. рис. 13). На платформу, которая может вращаться вокруг вертикальной оси, встает человек и вытягивает в стороны руки. Платформа приводится во вращательное движение. При опускании

[1] Жуковский Николай Егорович (1847–1921) — русский ученый, основоположник аэродинамики.

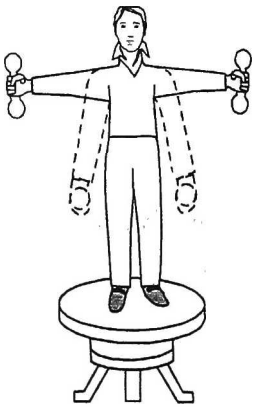


Рис. 13

рук вниз уменьшается момент инерции человека ($J_2 < J_1$), а следовательно, увеличивается угловая скорость вращения ($\omega_2 > \omega_1$), так как произведение

$$J\omega = \text{const}.$$

Продифференцируем по времени уравнение (1.85): $\dfrac{dL_z}{dt} = J_z \dfrac{d\omega}{dt}$.

Согласно (1.83) $\dfrac{dL_z}{dt} = M$, а по формуле (1.28) $\dfrac{d\omega}{dt} = \varepsilon$, откуда угловое ускорение

$$\varepsilon = M / J_z. \qquad (1.87)$$

Уравнение (1.87) называется *основным законом динамики вращательного движения: угловое ускорение при вращательном движении твердого тела прямо пропорционально моменту внешних сил, действующих на тело, и обратно пропорционально моменту инерции тела.*

Найдем формулы для вычисления работы и мощности при вращении тела.

При неподвижной оси вращения потенциальная энергия вращающегося твердого тела не изменяется и работа внешних сил идет на приращение кинетической энергии тела. Используя уравнение (1.78), для элементарной работы, запишем:

$$dA = d\left(\frac{J\omega^2}{2}\right) = \frac{1}{2} J \cdot 2 \cdot \omega d\omega = J\omega d\omega.$$

Согласно (1.85) $J\,d\omega = dL$, то $dA = \omega\, dL$, но $dL = M\,dt$ (уравнение (1.74), следовательно, $dA = M\omega\, dt = Md\varphi$, т. к. $\omega\, dt = d\varphi$. Отсюда находится работа при вращательном движении:

$$A = \int M\, d\varphi. \qquad (1.88)$$

Мощность $$N = \frac{dA}{dt} = M\frac{d\varphi}{dt} = M\omega. \qquad (1.89)$$

Следовательно, мощность при вращательном движении равна произведению момента внешних сил на угловую скорость вращения.

## § 18. Гироскопы

Оси вращения твердых тел, не изменяющие своей ориентации в пространстве без воздействия внешних сил, называются *свободными осями.* Свободными осями могут служить три взаимно перпендикулярных оси, проходящие через центр инерции твердого тела. Их также называют *главными осями инерции тела.*

При вращении вокруг любой из главных осей момент импульса $\vec{L}$ тела имеет одинаковое направление с угловой скоростью $\vec{\omega}$ тела и определяется формулой (1.85): $\vec{L} = J\vec{\omega}$. Причем вектор $\vec{L}$ не зависит от выбора точки на оси вращения.

*Гироскопом (волчком)* называют массивное симметричное тело, вращающееся с большой скоростью вокруг оси симметрии. Рассмотрим движение волчка, один конец оси вращения которого шарнирно закреплен (точка *O* на рис.14). Опыт показывает, что при некоторой угловой скорости вращения ω волчок совершает *прецессионное* движение: ось волчка описывает конус вокруг вертикали $OO'$ с угловой скоростью $\omega' << \omega$. В результате этого возникает добавочный момент импульса $\vec{L}'$, обусловленный прецессией. Поскольку $\omega' << \omega$, моментом импульса $\vec{L}'$ в ряде случаев можно пренебречь. Тогда характер движения волчка определяется поведением вектора $\vec{L} = J\vec{\omega}$. Согласно уравнению моментов (1.74) вектор $\vec{L}$ относительно точки *O* за время $dt$ получает приращение $d\vec{L}$ (рис.14):

$$d\vec{L} = \vec{M}dt,$$

где $\vec{M}$ — момент силы тяжести $m\vec{g}$ относительно той же точки. Вектор $d\vec{L}$ совпадает по направлению с вектором $\vec{M}$ и перпендикулярен вектору $\vec{L}$. В результате

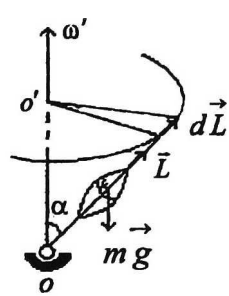


Рис. 14

вектор $\vec{L}$, а значит, и ось волчка будут поворачиваться вокруг вертикали $OO'$, совершая прецессию.

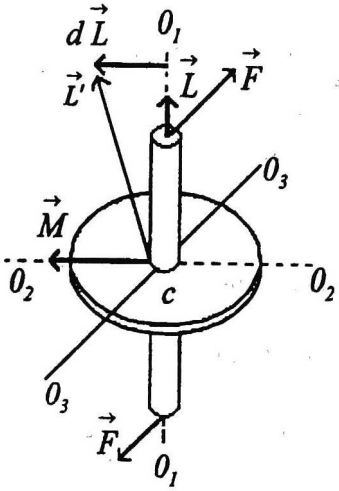



Рис. 15

Рассмотрим случай, когда на вращающийся гироскоп действует пара внешних сил $\vec{F}$ (рис.15), создающая относительно центра масс гироскопа $c$ момент $\vec{M}$. Момент сил направлен вдоль прямой $O_2O_2$ и за время $dt$ момент импульса гироскопа $\vec{L}$ получит приращение $d\vec{L} = \vec{M}dt$ (заметим, что $d\vec{L}$ и $\vec{M}$ сонаправлены) и станет равным $\vec{L}' = \vec{L} + d\vec{L}$. Новое положение оси гироскопа будет совпадать с направлением вектора $\vec{L}'$, т. е. ось вращения гироскопа повернется вокруг прямой $O_3O_3$ (а не $O_2O_2$, как кажется). Данное явление получило название *гироскопический эффект*.

Чтобы ось гироскопа могла свободно поворачиваться в пространстве, её закрепляют в карданном подвесе. При этом гироскоп приобретает три степени свободы. Свойство гироскопа сохранять направление своей оси в пространстве используется в устройствах автоматического управления движением самолетов (автопилот), ракет, торпед и т. д. Свойство гироскопа прецессировать под действием приложенных сил используется в навигационных приборах: гирокомпасах, гировертикалях и т. д.

Навигационные гироскопические системы и приборы обладают высокой надежностью и помехоустойчивостью.

## ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

**Задача 12.** К концам невесомой и нерастяжимой нити, перекинутой через блок, прикреплены грузы $m_1 = 300$ г и $m_2 = 200$ г. Блок, укреплен-ный на горизонтальной оси, считать однородным диском массой $m_0 = 300$ г. Найти линейное ускорение грузов.

**Дано:**

$m_1 = 300\,\text{г} = 0{,}3\,\text{кг}$

$m_2 = 200\,\text{г} = 0{,}2\,\text{кг}$

$m_0 = 300\,\text{г} = 0{,}3\,\text{кг}$

$a = ?$

**Решение.**

Заданная система состоит из трех тел, каждое из которых следует рассматривать отдельно. На рисунке к задаче показаны силы, действующие на грузы $m_1$ и $m_2$. Тогда второй закон Ньютона для каждого из грузов может быть записан следующим образом:

$$m_1\vec{a} = \vec{T}_1 + m_1\vec{g}, \qquad (1)$$

$$m_2\vec{a} = \vec{T}_2 + m_2\vec{g}. \qquad (2)$$

Ускорения грузов считаем равными, но направленными в противоположные стороны. В проекциях на координатную ось $OY$ уравнения (1) и (2) примут вид

$$m_1 a = m_1 g - T_1, \qquad (3)$$

$$-m_2 a = m_2 g - T_2. \qquad (4)$$

Так как масса блока соизмерима с массой грузов, нельзя предположить, что силы, с которыми нить действует на грузы $m_1$ и $m_2$, равны между собой. Вращение блока вызывается действием сил натяжения нити:

$$T_1' = T_1,\ T_2' = T_2.$$

Запишем основное уравнение динамики вращательного движения (1.87) в применении к блоку, считая направление вращения блока против часовой стрелки за положительное:

$$J\varepsilon = T_1' r - T_2' r. \qquad (5)$$

В силу того, что нить нерастяжима и, следовательно, линейное ускорение грузов и

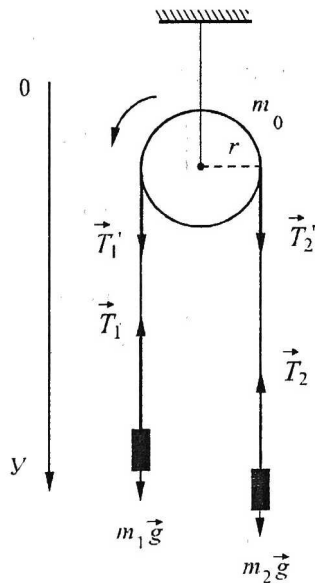



Рис. к задаче 12

всех точек нити одинаково равно (при отсутствии проскальзывания нити) касательному ускорению крайних точек обода, справедливо равенство

$$\varepsilon = \frac{a}{r}. \tag{6}$$

Перепишем уравнение (5):

$$\frac{Ja}{r} = T_1 r - T_2 r, \tag{7}$$

где момент инерции диска $J = \dfrac{m_0 r^2}{2}$.

Решая совместно уравнения (3), (4) и (7), находим

$$a = \frac{g(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2 + \dfrac{m_0}{2}}.$$

**Ответ:** $a = 1{,}5$ м/с$^2$.

**Задача 13.** Однородный шар массой $m$ скатывается по наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha$ с горизонтом. Определить ускорение $a_c$ центра масс.

**Дано:**
$m$
$\alpha$
$a_c - ?$

**Решение.** Скатывающееся тело обладает симметрией вращения относительно точки $C$. Будем предполагать, что при движении не возникает скольжения. Это означает, что скорость тела в точке $A$ равна нулю. На скатывающееся тело действуют сила нормального давления $\vec{N}$, касательная сила трения $\vec{F}_\tau$ и сила тяжести шара $m\vec{g}$. При отсутствии скольжения (чистое качение) сила $\vec{F}_\tau$ есть сила трения покоя или сила трения сцепления. Она может принимать любые значения от 0 до $\mu N$. Если $\vec{F}_\tau > \mu N$, то чистое качение невозможно — оно будет сопровождаться скольжением.

Решим задачу двумя способами.

**Способ 1.** Применим основное уравнение динамики вращательного движения относительно мгновенной оси вращения. При отсутствии скольжения мгновенная ось проходит через точку касания $A$. Так как

гновенная ось и ось, проходящая через ентр масс $C$, движутся параллельно руг другу, то основное уравнение инамики имеет форму

$$\frac{J_A d\omega}{dt} = M_A, \qquad (1)$$

или, в соответствии с рисунком:

$$\frac{J_A d\omega}{dt} = mgr\sin\alpha \ . \qquad (2)$$

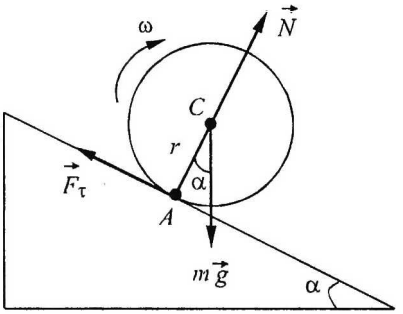



Рис. к задаче 13

Сила $N$ выпадает из уравнения, так как она проходит через ось $A$, и ее момент относительно этой оси равен нулю. Линейная скорость точки $C$ связана со скоростью точки $A$ соотношением

$$v_C = v_A + \omega r \ .$$

При отсутствии скольжения $v_A = 0$, а поэтому

$$v_C = \omega r \ .$$

Ускорение центра масс

$$a_C = \frac{d v_C}{dt} = \frac{r d\omega}{dt} \ . \qquad (3)$$

Из уравнений (2), (3) получаем

$$a_C = \frac{mgr^2 \sin\alpha}{J_A} \ . \qquad (4)$$

По теореме Штейнера

$$J_A = J_C + mr^2 , \qquad (5)$$

где $J_C$ — момент инерции шара относительно оси, проходящей через его центр.

Окончательно получаем

$$a_C = \frac{5g\sin\alpha}{7} , \qquad (6)$$

т. к. $J_C = \frac{2}{5} m r^2 .$

**Способ 2.** Применим закон сохранения энергии:

$$\frac{1}{2}J_A\omega^2 = mgh, \tag{7}$$

где $h$ — высота, с которой опустился шар при скатывании из состояния покоя; $\frac{1}{2}J_A\omega^2$ — кинетическая энергия шара.

Пусть $x$ — путь шара вдоль наклонной плоскости, тогда $h = x \cdot \sin\alpha$ и, следовательно,

$$\frac{J_A\omega^2}{2} = \frac{J_A v^2}{2r^2} = mgx\sin\alpha. \tag{8}$$

Найдем из уравнения (8) v:

$$v = \sqrt{\frac{2r^2 mgx\sin\alpha}{J_A}}. \tag{9}$$

Учитывая, что $v = \frac{dx}{dt}$, и разделив переменные, интегрируем соотношение (9):

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{2r^2 mg\sin\alpha}{J_A}} \int_0^t dt,$$

$$2\sqrt{x} = t\sqrt{\frac{2r^2 mg\sin\alpha}{J_A}}. \tag{10}$$

Возведем обе части уравнения (10) в квадрат и найдем $x$:

$$x = \frac{r^2 mgt^2\sin\alpha}{2J_A}. \tag{11}$$

Сравнивая формулу (11) с уравнением равноускоренного движения $x = \frac{at^2}{2}$, получаем

$$a_C = \frac{r^2 mg\sin\alpha}{J_A} = \frac{g\sin\alpha}{1+\frac{J_C}{mr^2}} = \frac{5g\sin\alpha}{7}.$$

**Ответ:** $a_C = \frac{5}{7} g\sin\alpha$.

**Задача 14.** На однородный сплошной цилиндр массой $M$ и радиусом $R$ плотно намотана легкая нить, к концу которой прикреплен груз массой $m$. В момент времени $t = 0$ система пришла в движение. Пренебрегая трением, найти зависимость от времени модуля угловой скорости цилиндра; кинетической энергии всей системы.

**Дано:**

$M, R, m$

$\omega = ?$

$E_k = ?$

**Решение.** Запишем систему уравнений для падающего груза $m$ и вращающегося сплошного цилиндра $M$:

$$\begin{cases} \vec{T}\,R = J\vec{\varepsilon}, \\ m\vec{g} + \vec{T} = m\vec{a}. \end{cases} \qquad (1)$$

Спроектируем уравнения (1) на ось $OY$:

$$\begin{cases} T\,R = J\,\varepsilon, \\ mg - T = ma, \end{cases} \qquad (2)$$

где $J = \frac{MR^2}{2}$, а $\varepsilon = \frac{a}{R}$.

Из решения системы уравнений (2) находится угловое ускорение:

$$\varepsilon = \frac{2mg}{R(2m+M)}; \qquad (3)$$

где $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$.

Перепишем уравнение (3):

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{2mg}{R(2m+M)}. \qquad (4)$$

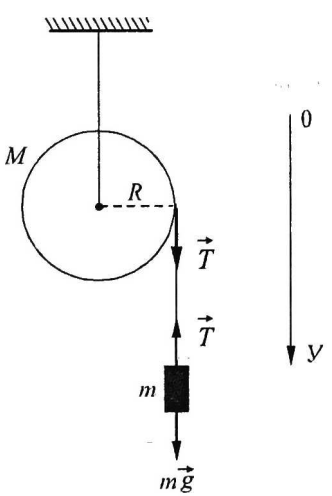



Рис. к задаче 14

Проинтегрировав уравнение (4), находим модуль угловой скорости:

$$\int_0^{\omega} d\omega = \frac{2mg}{R(2m+M)} \cdot \int_0^{t} dt,$$

$$\omega = \frac{2mgt}{R(2m+M)}. \qquad (5)$$

Кинетическая энергия системы представляет собой сумму кинетической энергии вращающегося цилиндра и кинетической энергии поступательного движения падающего груза:

$$E_k = \frac{J\omega^2}{2} + \frac{m\mathrm{v}^2}{2}. \qquad (6)$$

Произведем в уравнении (6) замену: $\omega$ по формуле (5) и $\mathrm{v} = \omega R$. Окончательное выражение для кинетической энергии всей системы будет:

$$E_k = \frac{MR^2}{2} \cdot \frac{4m^2g^2t^2}{R^2(2m+M)^2} + \frac{mR^2}{2} \cdot \frac{4m^2g^2t^2}{R^2(2m+M)^2} = \frac{m^2g^2t^2}{2m+M}.$$

**Задача 15.** На скамье Жуковского (см. рис.13) стоит человек и держит на вытянутых руках гири по 10 кг каждая. Расстояние от каждой гири до оси вращения скамьи $l_1 = 75$ см. Скамья вращается, делая $n_1 = 1$ об/с. Определить скорость вращения скамьи и работу, которую произведет человек, если он сожмет руки так, что расстояние от каждой гири до оси уменьшится до $l_2 = 20$ см. Момент инерции скамьи с человеком относительно оси вращения

$$J_0 = 2{,}5 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

**Дано:**

$m$ = 10 кг

$l_1$ = 0,75 м

$l_2$ = 0,2 м

$n_1$ = 1 с$^{-1}$

$J_0$ = 2,5 кг·м$^2$

---

$n_2$ = ?

$A$ = ?

**Решение.** При перемещении гирь относительно оси вращения на систему «человек–скамья–гири» будут действовать внешние силы — силы реакции опоры, линия действия которых проходит через ось вращения. Момент этих сил равен нулю. Следовательно, для данной системы тел будет выполняться закон сохранения моментов импульса. Момент силы тяжести относительно оси скамьи равен нулю. Работу сила тяжести не совершает (гири не смещаются по высоте).

Поскольку момент инерции гирь, а следовательно, всей системы, будет уменьшаться, скорость вращения скамьи будет возрастать, возрастает и кинетическая энергия системы.

Увеличение кинетической энергии происходит за счет работы человека. До перемещения гирь момент импульса системы

$$L_1 = \left(J_0 + 2ml_1^2\right)\omega_1,$$

после перемещения

$$L_2 = \left(J_0 + 2ml_2^2\right)\omega_2,$$

$$\omega = 2\pi n.$$

По закону сохранения момента импульса $L_1 = L_2$, следовательно,

$$\left(J_0 + 2ml_1^2\right)2\pi n_1 = \left(J_0 + 2ml_2^2\right)2\pi n_2. \qquad (1)$$

Из уравнения (1) находим

$$n_2 = \frac{n_1\left(J_0 + 2ml_1^2\right)}{J_0 + 2ml_2^2}.$$

Работа человека равна приращению кинетической энергии системы

$$A = E_{k2} - E_{k1}. \qquad (2)$$

Так как начальная кинетическая энергия системы

$$E_{k1} = \frac{1}{2}\left(J_0 + 2ml_1^2\right)\omega_1^2,$$

конечная кинетическая энергия системы

$$E_{k2} = \frac{1}{2}\left(J_0 + 2ml_2^2\right)\omega_2^2,$$

то $A = 2\pi^2\left[\left(J_0 + 2ml_2^2\right)n_2^2 - \left(J_0 + 2ml_1^2\right)n_1^2\right].$

**Ответ:** $A = 870$ Дж;

$n_2 = 4{,}2\ \text{с}^{-1}$.

# Глава 4
# ГРАВИТАЦИЯ

Взаимное притяжение тел называется гравитационным взаимодействием или *гравитацией*. Гравитация — это универсальное взаимодействие между любыми видами материи.

## § 19. Законы Кеплера. Гравитационное поле

И. Кеплер[1], основываясь на астрономических наблюдениях, установил три закона:

1. *Все планеты двигаются вокруг Солнца по замкнутым кривым, представляющим собой эллипс, в одном из фокусов которого находится Солнце.*

2. *Радиус-вектор $\vec{r}$, проведенный от Солнца С к планете М* (рис. 16), *за равные промежутки времени описывает равные площади.*

На рис. 16 эти площади заштрихованы.

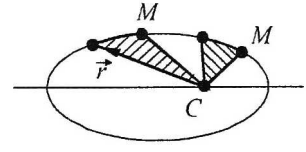


Рис. 16

3. *Квадраты периодов Т обращения двух планет вокруг Солнца относятся как кубы больших полуосей их орбит:*

$$T_1^2 / T_2^2 = r_1^3 / r_2^3 . \qquad (1.90)$$

Всякое тело изменяет свойства окружающего пространства — создает вокруг себя гравитационное поле. Под *гравитационным полем* понимают материальный объект природы, который осуществляет взаимодействие тел по закону всемирного тяготения (1.38).

Если в гравитационное поле, образованное телом массой $m$ (рис. 17), внести материальную точку массой $m_0$, то на нее будет действовать сила притяжения

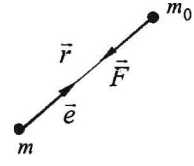


Рис. 17

$$\vec{F} = -G\frac{mm_0}{r^2}\cdot\vec{e} ,$$

где $\vec{e}$ — орт радиуса-вектора $\vec{r}$. Знак минус показывает, что $\vec{F}$ и $\vec{e}$ направлены в разные стороны.

Физическая величина $\vec{g}$, равная отношению силы притяжения $\vec{F}$ к массе материальной точки $m_0$, называется *напряженностью гравитационного поля:*

---

[1] Иоганн Кеплер (1571–1630) — немецкий астроном.

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m_0} = -G\frac{m}{r^2}\cdot\vec{e}\,. \qquad (1.91)$$

Напряженность — векторная величина, являющаяся силовой характеристикой гравитационного поля. Вектор $\vec{g}$ совпадает по направлению с силой, действующей на материальную точку массой $m_0$. Напряженность измеряется в метрах на секунду в квадрате (м/с$^2$).

Поле *однородно*, если напряженность во всех точках поля одинакова.

Найдем работу, совершаемую силами гравитационного поля, по перемещению материальной точки $m_0$ из положения *1*, определяемого $\vec{r}_1$, в положение *2* с радиусом-вектором $\vec{r}_2$ (рис. 18). Элементарная работа

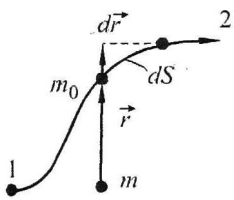


Рис. 18

$$dA = -\vec{F}d\vec{S} = -\vec{F}d\vec{r} = -G\frac{mm_0}{r^2}dr\,.$$

Знак минус указывает, что сила и перемещение противоположны по направлению. Тогда

$$A_{1-2} = -Gmm_0\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2} = G\frac{mm_0}{r_2} - G\frac{mm_0}{r_1}\,. \qquad (1.92)$$

Из формулы (1.92) видно, что работа сил гравитационного поля не зависит от того, каким путем осуществляется процесс перехода из положения *1* в положение *2*, а определяется координатами начального и конечного положений точки. Следовательно, гравитационное поле потенциально и работа $A_{1-2}$ равна убыли потенциальной энергии системы:

$$E_{p1} - E_{p2} = -\left(G\frac{mm_0}{r_1} - G\frac{mm_0}{r_2}\right).$$

Если $r_2 \to \infty$, то $E_{p2} = 0$. Таким образом, потенциальная энергия

$$E_p = -Gmm_0/r\,. \qquad (1.93)$$

Скалярная физическая величина φ, равная отношению потенциальной энергии $E_p$ к массе материальной точки $m_0$, называется *потенциалом гравитационного поля:*

$$\varphi = E_p/m_0 = -Gm/r\,. \qquad (1.94)$$

Потенциал — энергетическая характеристика поля.

В системе СИ потенциал гравитационного поля измеряется в джоулях на килограмм (Дж/кг).

Установим связь между напряженностью и потенциалом гравитационного поля. Из выражений (1.91) и (1.94) следует, что $\vec{F} = m_0\vec{g}$, а $E_p = m_0\varphi$.

Так как $\vec{F} = -\nabla E_p$ (1.56), то $m_0\vec{g} = -m_0\nabla\varphi$,

откуда $\vec{g} = -\nabla\varphi$. Таким образом,

$$\vec{g} = -\left(\vec{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) = -\text{grad}\,\varphi. \qquad (1.95)$$

Напряженность гравитационного поля равна *градиенту потенциала* поля, взятому с противоположным знаком.

Знак минус в уравнении (1.95) показывает, что вектор напряженности гравитационного поля $\vec{g}$ направлен в сторону убывания потенциала $\varphi$.

## § 20. Космические скорости

Для того чтобы тело стало спутником Земли, оно должно иметь вполне определенную скорость, называемую *первой космической скоростью* $v_1$.

При движении спутника на него действует сила притяжения к Земле:

$$F = GmM / R^2,$$

где $m$ — масса спутника; $M$, $R$ — масса и радиус Земли соответственно.

Эта сила сообщает спутнику центростремительное ускорение

$$a_ц = v_1^2 / R.$$

Применяя второй закон Ньютона, запишем:

$$GmM / R^2 = ma_ц \text{ и } GM / R^2 = v_1^2 / R.$$

Отсюда

$$v_1 = \sqrt{GM / R}. \qquad (1.96)$$

Подставив в уравнение (1.96) выражение для $G$, найденное из (1.38), и учитывая, что $F = mg$, получим значение первой космической скорости:

$$v_1 = \sqrt{gR} \approx 8 \cdot 10^3 \text{ м/с}.$$

*Вторая космическая скорость* $v_2$ — это наименьшая скорость, которую надо сообщить телу, чтобы оно преодолело земное притяжение и стало

спутником Солнца. Для этого необходимо, чтобы кинетическая энергия тела была равна работе, совершаемой против сил притяжения Земли:

$$\frac{mv_2^2}{2} = \int_R^\infty G\frac{mM}{r^2}dr = GmM/R,$$

откуда

$$v_2 = \sqrt{2GM/R} = \sqrt{2Rg} \approx 11\,\text{км/с}. \qquad (1.97)$$

*Третья космическая скорость* $v_3$ — это скорость, которую необходимо сообщить телу, чтобы оно вышло за пределы Солнечной системы. Она определяется из соотношения

$$\frac{mv_3^2}{2} = G\frac{mM_c}{R_0},$$

где $M_c$ — масса Солнца, $R_0$ — радиус орбиты Земли.

$$v_3 = \sqrt{2GM_C/R_0} \approx 42\ \text{км/с}. \qquad (1.98)$$

С учетом того, что Земля вращается вокруг своей оси со скоростью 30 км/с, значения третьей космической скорости зависят от направления запуска ракет и изменяются в пределах от 17 до 73 км/с.

## § 21. Неинерциальные системы отсчета

*Неинерциальными* называются *системы отсчета* (*НИСО*), движущиеся с ускорением относительно инерциальных систем отсчета (*ИСО*). Пусть имеются две системы отсчета (СО) (рис. 19): $K$ — инерциальная *СО*, а $K'$ — неинерциальная *СО*.

Рассмотрим движение материальной точки массой $m_0$ в системах $K$ и $K'$.

Из рис. 19 видно, что

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}'. \qquad (1.99)$$

Дифференцируя дважды по времени уравнение (1.99), получим

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2\vec{R}}{dt^2} + \frac{d^2\vec{r}'}{dt^2},$$

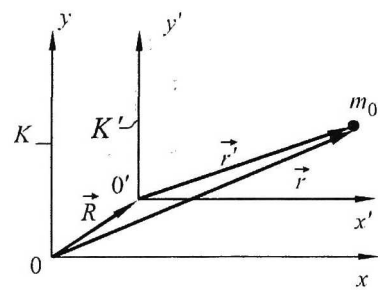



Рис. 19

или

$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}', \qquad (1.100)$$

где $\vec{a}$ — ускорение материальной точки в *ИСО*, $\vec{a}_0$ — ускорение точки *0′* (начала координат системы *K′*) относительно *ИСО*, $\vec{a}'$ — ускорение материальной точки в *НИСО*.

Умножим на массу $m_0$ правую и левую части уравнения (1.100):

$$m_0\vec{a} = m_0\vec{a}_0 + m_0\vec{a}',$$

или

$$\vec{F} = m_0\vec{a}_0 + m_0\vec{a}',$$

откуда

$$m_0\vec{a}' = \vec{F} - m_0\vec{a}_0, \qquad (1.101)$$

где $\vec{F} = m_0\vec{a}$ — сила, с которой действуют на материальную точку тела других систем.

Таким образом, относительно *НИСО* материальная точка ведет себя так, как если бы кроме внешней силы $\vec{F}$ на нее действовала бы еще одна сила: $\vec{F}_i = -m_0\vec{a}_0$, названная *силой инерции*. Сила инерции обусловлена неинерциальностью *СО*.

В итоге получим

$$m_0\vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}_i. \qquad (1.102)$$

Уравнение (1.102), аналогичное по форме второму закону Ньютона, справедливо в *НИСО*.

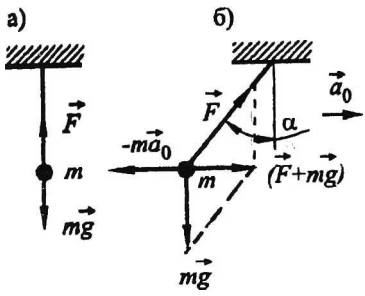



Рис. 20

*Пример 1.* Шар массой *m* подвешен на нити к потолку вагона. Если вагон покоится или движется равномерно и прямолинейно, то нить занимает вертикальное положение, так как сила тяжести шара $m\vec{g}$ уравновешивается силой реакции нити $\vec{F}$ (рис. 20, а). Как только вагон начнет двигаться поступательно с ускорением $\vec{a}_0$ (рис. 20, б), нить с шаром отклонится от

вертикали в противоположную направлению движения сторону на угол α. При этом сила $\vec{R} = \vec{F} + m\vec{g}$, действующая на шар, уравновешивается *силой инерции* $\vec{F}_i = -m\vec{a}_0$, и относительно вагона шар покоится.

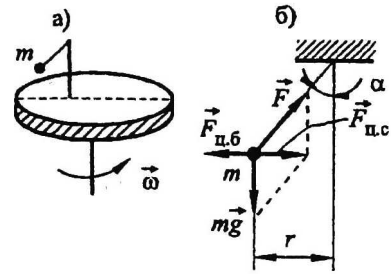


Рис. 21

*Пример 2.* Маятник, представляющий собой шарик массой *m*, подвешен на нити к штанге, установленной на вращающемся диске (рис. 21, а). При вращении диска шарик отклоняется от вертикали на некоторый угол α (рис. 21, б). В *ИСО* (относительно пола, на котором закреплен диск) на шарик действует центростремительная сила

$$F_{\text{ц.с.}} = m\omega^2 r = m\text{v}^2 / r,$$

перпендикулярная оси вращения, являющаяся равнодействующей силы тяжести $m\vec{g}$ и реакции нити $\vec{F}$, т. е. $\vec{R} = m\vec{g} + \vec{F}$.

В *НИСО* (относительно диска) шарик покоится. Сила $\vec{R}$ уравновешена *центробежной силой* $\vec{F}_{\text{ц.б.}}$, которая является силой инерции.

При решении задач часто принимается Земля за ИСО. Однако наша планета не является ИСО, т. к. вращается вокруг своей оси. Поэтому при проведении точных расчетов в таких случаях необходимо учитывать центробежную силу инерции.

## ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

**Задача 16.** Метеорит падает на Солнце с очень большого расстояния, которое можно считать бесконечно большим. Начальная скорость метеорита пренебрежимо мала. Какую скорость будет иметь метеорит в момент, когда его расстояние от Солнца равно среднему расстоянию Земли от Солнца?

**Дано:**

$l_0 = \infty$

$l = R = 1{,}49 \cdot 10^{11}$ м

$M = 1{,}98 \cdot 10^{30}$ кг

---

v = ?

**Решение.** Обозначим начальное расстояние от метеорита до Солнца через $l_0$. По закону всемирного тяготения (1.38) найдем силу $F$, с которой метеорит притягивается к Солнцу, находясь на расстоянии $x$ от него

$$F = G\frac{mM}{x^2}, \qquad (1)$$

где $m$ — масса метеорита, а $M$ — масса Солнца.

При движении метеорита расстояние $x$ уменьшается, следовательно, сила $F$ тоже уменьшается. Найдем работу силы притяжения $dA$ на элементарном перемещении $dx$:

$$dA = G\frac{mM}{x^2}dx. \qquad (2)$$

Работа $dA$ равна убыли потенциальной энергии $E_p$:

$$dA = -dE_p. \qquad (3)$$

Тогда

$$E_p = -\int_{\infty}^{R} G\frac{mM}{x^2}dx = -GmM\int_{\infty}^{R}\frac{dx}{x^2} = G\frac{mM}{R}. \qquad (4)$$

По закону сохранения энергии

$$E_p = E_k = \frac{m\mathrm{v}^2}{2}. \qquad (5)$$

Из уравнений (4) и (5) определяется скорость движения метеорита:

$$\frac{m\mathrm{v}^2}{2} = G\frac{mM}{R}, \quad \mathrm{v} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}, \quad \mathrm{v} = 42{,}1 \text{ км/с}$$

**Ответ:** v = 42,1 км/с.

**Задача 17.** Частица массой $m$ в некоторый момент времени находится в точке $A$ на оси длинного тонкого стержня массой $M$ и длиной $l$ на расстоянии $a$ от одного из его концов (см. рисунок к зад. 17). Определите напряженность $g$ и потенциал $\varphi$ гравитационного поля стержня в точке $A$, а также силу, действующую на частицу в рассматриваемый момент времени.

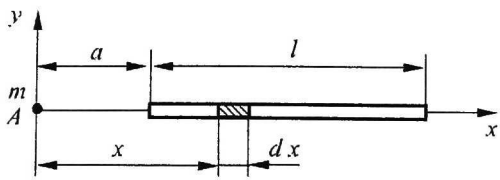



Рис. к задаче 17

**Дано:**
$m$
$M$
$l$
$a$

$g = ?\ \varphi = ?$
$F = ?$

**Решение.** Выберем инерциальную систему отсчета, связанную с точкой $A$. Стержень нельзя считать за материальную точку. Разобьем стержень на бесконечно малые элементы длиной $dx$, каждый из которых можно принимать за материальную точку.

Выделенный элемент $dx$ имеет массу $dM = Mdx/l$. Найдем напряженность $dg$ и потенциал $d\varphi$ в точке $A$ от выделенного элемента стержня, используя выражение (1.91) и (1.94):

$$dg = G\frac{dM}{x^2} = G\frac{M}{l}\frac{dx}{x^2}, \qquad (1)$$

$$d\varphi = -G\frac{dM}{x} = -G\frac{M}{l}\frac{dx}{x}. \qquad (2)$$

Для определения $g$ и $\varphi$ воспользуемся принципом суперпозиции. Так как все элементарные векторы $d\vec{g}$ направлены в одну сторону (вдоль оси $x$), а $d\varphi$ величина скалярная, то, интегрируя уравнения (1) и (2), получим

$$g = G\frac{M}{l}\int_a^{a+l}\frac{dx}{x^2} = GM/[a(a+l)],$$

$$\varphi = -G\frac{M}{l}\int_a^{a+l}\frac{dx}{x} = G\frac{M}{l}\ln\left(1+\frac{l}{a}\right).$$

Сила $F = mg = GMm/[a(a+l)]$ и направлена по $\vec{g}$, т. е. совпадает с направлением оси $x$.

**Ответ:** $g = GM/[a(a+l)]$,

$$\varphi = G\frac{M}{l}\ln\left(1+\frac{l}{a}\right),$$

$$F = GMm/[a(a+l)].$$

**Задача 18.** Тело массой $m$ находится на вершине наклонной плоскости и удерживается силой трения. За какое время $t$ тело спустится с наклонной плоскости, если плоскость станет двигаться в горизонтальном направлении с ускорением $a_0 = 1$ м/с$^2$?

Длина плоскости $l = 1$ м, угол наклона к горизонту $\alpha = 30^0$, коэффициент трения между телом и плоскостью $\mu = 0{,}3$.

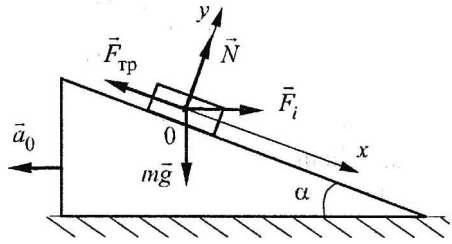



Рис. к задаче 18

**Дано:**

$a_0 = 1$ м/с$^2$

$l = 1$ м

$\alpha = 30°$

$\mu = 0{,}3$

---

$t = ?$

**Решение.** Задачу решаем в системе отсчета $XOY$, связанной с наклонной плоскостью. На тело действуют три силы: сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции наклонной плоскости $\vec{N}$ и сила трения покоя $\vec{F}_{тр}$, которые уравновешивают друг друга, и тело покоится.

Как только наклонная плоскость начнет двигаться с ускорением $\vec{a}_0$, указанная система отсчета будет неинерциальной, появится сила инерции $\vec{F}_i = -m\vec{a}_0$ и тело начнет двигаться вниз с ускорением $\vec{a}$.

Время движения

$$t = \sqrt{2l/a}\,. \qquad (1)$$

Для нахождения ускорения $a$ запишем второй закон Ньютона (1.102):

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}} + \vec{F}_i = m\vec{a}\,. \qquad (2)$$

Проектируя все векторы уравнения (2) на оси $x$ и $y$, получим

*OX:* $$mg\sin\alpha - F_{\text{тр}} + ma_0\cos\alpha = ma\,, \qquad (3)$$

*OY:* $$-mg\cos\alpha + N + ma_0\sin\alpha = 0\,. \qquad (4)$$

Решая систему уравнений (3), (4) с учетом выражения $F_{\text{тр}} = \mu N$, определим ускорение:

$$a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) + a_0(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)\,. \qquad (5)$$

Из уравнений (1) и (5) найдем время движения тела

$$t = \sqrt{2l/\left[g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) + a_0(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)\right]},\ \ t = 0{,}77\ \text{с}.$$

**Ответ:** $t = 0{,}77$ с.

# Глава 5

# ЭЛЕМЕНТЫ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

## § 22. Преобразования Галилея. Сложение скоростей в классической механике

Принцип относительности Г. Галилея[1], справедливый в классической механике, гласит: *все механические процессы протекают одинаково во всех ИСО, или никакими механическими опытами, проведенными внутри ИСО, невозможно установить, движется система равномерно и прямолинейно или покоится.*

Законы динамики не изменяют своего вида при преобразованиях Галилея, т. е. они инвариантны к преобразованиям Галилея.

Для доказательства этого рассмотрим две *ИСО*, из которых одна (система $K$) покоится, а другая (система $K'$) движется относительно первой равномерно и прямолинейно с постоянной скоростью $(\vec{v})$. В момент времени $t = 0$ начала координат обеих систем совмещены (точки 0 и 0' совпадают).

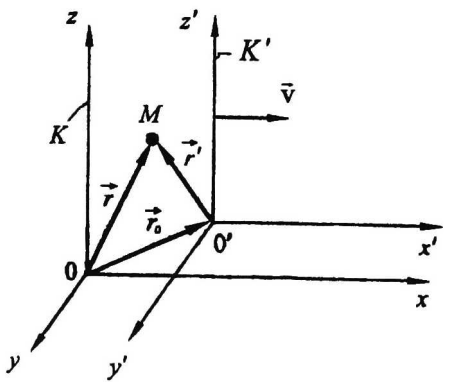


Рис. 22

Найдем связь между координатами произвольно взятой материальной точки $M$ в рассматриваемых *СО* (рис. 22):

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{r}_0 = \vec{r}' + \vec{v}t. \quad (1.103)$$

Запишем уравнение (1.103) в проекциях на оси координат:

$$x = x' + v_x t,$$
$$y = y' + v_y t,$$
$$z = z' + v_z t$$

и

$$t = t'$$

или

$$x' = x - v_x t,$$
$$y' = y - v_y t,$$
$$z' = z - v_z t \quad (1.104)$$
$$t' = t.$$

[1] Галилео Галилей (1564–1642) — итальянский физик и астроном.

Систему уравнений (1.104) называют *преобразованиями координат Галилея.* Если система $K'$ движется вдоль положительного направления оси $x$, то уравнения (1.104) примут вид

$$x = x' + \mathrm{v}t,$$
$$y = y',$$
$$z = z'$$

или

$$x' = x - \mathrm{v}t,$$
$$y' = y, \qquad (1.105)$$
$$z' = z.$$

Принято добавлять к уравнениям (1.105) еще одно уравнение: $t = t'$, так как в классической механике считается, что время не зависит от движения СО.

Дифференцируя по времени уравнение (1.103), найдем *правило сложения скоростей в классической механике:*

$$\vec{u} = \vec{u}' + \vec{\mathrm{v}}.$$

Взяв вторую производную по времени от уравнения (1.103), получим, что ускорение материальной точки $M$ в системах $K$ и $K'$ одинаково:

$$\vec{a} = \vec{a}'.$$

Таким образом, если на материальную точку не действуют внешние силы ($\vec{a} = 0$), то и $\vec{a}' = 0$, т. е. материальная точка движется равномерно и прямолинейно или покоится.

А это означает, что система $K'$ также является *ИСО.*

Тем самым подтверждается механический принцип относительности: при переходе от одной *ИСО* к другой законы динамики не изменяют своего вида.

## § 23. Относительность одновременности

По классическим представлениям взаимодействие тел осуществляется мгновенно, т. е. соблюдается *принцип дальнодействия.* Если в различных точках на поверхности Земли происходят два события одновременно, то они должны протекать одновременно в любых точках Вселенной.

Из астрономических наблюдений известно, что свет, улавливаемый телескопами от различных звезд, излучался ими десятки, а то и миллионы лет

тому назад. Следовательно, событие, происходящее на Звезде и воспринимаемое нами, не является одновременным, так как любой сигнал распространяется с конечной скоростью. Мы не знаем, что происходит в момент приема сигнала на Звезде (может, она давно потухла). Чтобы определить, в какое время произошло событие, надо сверить часы на Звезде с земными часами, т. е. провести *синхронизацию часов.* В повседневной жизни мы периодически проводим синхронизацию часов, сверяя их с сигналами точного времени, передаваемыми по радио из Москвы. И хотя до Самары сигналы точного времени приходят с запаздыванием на 0,003 с, такие погрешности для нас несущественны. Когда же расстояния имеют космические масштабы, эти поправки приобретают большое значение. Если синхронизировать часы в данной системе координат, то такая синхронизация будет справедлива только для данной системы. Однако оказывается невозможным установление времени, одинакового для всех систем координат. Согласно теории Эйнштейна для каждой ИСО, находящейся в относительном движении, существует лишь *собственное время.* Это время показывают часы, покоящиеся в данной системе. Абсолютной одновременности не существует.

## § 24. Постулаты специальной теории относительности (*СТО*). Преобразования Лоренца

При рассмотрении движения частиц со скоростью, сравнимой со скоростью света в вакууме ($c \approx 3 \cdot 10^8$ м/с), классическая механика Ньютона оказывается неприменимой.

В 1881 г. американские ученые А. Майкельсон и Э. Морли опытным путем установили, что скорость света остается одинаковой, если свет распространяется в направлении движения Земли или в направлении, ему противоположном или перпендикулярном. Из опыта следовал вывод, что свет распространяется во всех направлениях с одинаковой скоростью независимо от движения источника света и наблюдателя. Это оказалось в противоречии с классическим законом сложения скоростей и преобразованиями Галилея, лежащими в основе механики Ньютона. *В СТО* классические преобразования координат (преобразования Галилея), позволяющие переходить от одной инерциальной системы отсчета к другой, были заменены преобразованиями Лоренца[1].

В основе СТО лежат два постулата:

1) *все физические процессы протекают одинаково во всех инерциальных системах отсчета;* этот постулат называется *принципом относительности А. Эйнштейна*;

[1] Хендрик Антон Лоренц (1853–1928) — нидерландский физик.

2) *скорость света в вакууме одинакова для всех инерциальных систем отсчета и не зависит от движения источника и приемника света.*

Кроме того, в СТО перешли многие постулаты классической физики: однородность пространства и времени, изотропность пространства, обратимость времени и др.

Из постулатов теории относительности вытекают преобразования Лоренца. При выводе их накладывается еще одно условие: преобразования должны быть линейными. Это условие следует из однородности пространства–времени: все точки пространства и все моменты времени равноценны.

Пусть система координат $x', y', z', t'$ движется относительно системы $x, y, z, t$ (см. рис. 23) со скоростью $\bar{\mathrm{v}}$, направленной вдоль общей для систем оси $OX$. Определим координаты $x', y', z'$ и время $t'$ некоторого события относительно системы $K'$, если известны координаты $x, y, z$ и время $t$ этого события в системе $K$. Допустим, что при $t = 0$ точки $O$ и $O'$ совпадают.

Поскольку движение вдоль осей $y$ и $z$ не происходит, то $y' = y$, $z' = z$.

Из рис. 23 следует, что точка $O'$ с координатой $x' = 0$ в системе $K'$ движется вдоль оси $x$ системы $K$ со скоростью $\bar{\mathrm{v}}$, то есть координата точки в системе $K$ изменяется по закону $x = \mathrm{v}t$. Условие эквивалентно $x - \mathrm{v}t = 0$.

Учитывая этот факт и линейность преобразований координат, связь между $x'$ и $x$ должна иметь вид

$$x' = \gamma(x - \mathrm{v}t), \tag{1.106}$$

где $\gamma$ — коэффициент, зависящий от скорости.

С другой стороны, координата $x = 0$ системы $K$ в системе $K'$ изменяется по закону $x' = -\mathrm{v}t'$ Выражение $x' + \mathrm{v}t$ должно обращаться в нуль одновременно с координатой $x$. Для этого преобразование запишется в виде

$$x = \gamma(x' + \mathrm{v}t'). \tag{1.107}$$

Так как системы $K$ и $K'$ равноправны, то коэффициент $\gamma$ один и тот же.

Для определения $\gamma$ воспользуемся вторым постулатом теории относительности. Предположим, что в момент $t = t' = 0$, когда начала координат $O$ и $O'$совпадают, посылается вдоль осей $x$ и $x'$ световой сигнал, который вызывает вспышку света на экране. В системе $K$вспышка характеризуется координатой $x$ и временем $t$, а в системе $K'$ — координатой $x'$ и временем $t'$.

Так как скорость света $c$ одинакова в обеих системах, то получим уравнения: $x = ct$, $x' = ct'$. Подставим эти уравнения в формулы (1.106), (1.107):

$$ct = \gamma(ct' + \mathrm{v}t') = \gamma t'(c + \mathrm{v}),$$
$$ct' = \gamma(ct + \mathrm{v}t) = \gamma t(c + \mathrm{v}).$$

Перемножив правые и левые части уравнений и поделив их на $tt'$, получим

$$c^2 = \gamma^2\left(c^2 - \mathrm{v}^2\right).$$

Отсюда $\gamma = 1/\sqrt{1 - \mathrm{v}^2/\mathrm{c}^2}$.

Подставив значение $\gamma$ в (1.106–1.107), получим преобразование координат:

$$x = \frac{x' + \mathrm{v}t'}{\sqrt{1 - \mathrm{v}^2/c^2}}, \quad x' = \frac{x - \mathrm{v}t}{\sqrt{1 - \mathrm{v}^2/c^2}}.$$

Для нахождения формул преобразования времени исключим из уравнений преобразования координат $x'$, подставив во второе уравнение значение $x'$, следующее из первого. Получим уравнение, определяющее зависимость $t'$ от t и $x$: $t' = \dfrac{t - \mathrm{v}x/c^2}{\sqrt{1 - \mathrm{v}^2/c^2}}$.

Аналогично, подставляя значение $x$ из второго уравнения в первое, находим выражение $t$ через $t'$ и $x'$:

$$t = \frac{t' + \mathrm{v}x'/c^2}{\sqrt{1 - \mathrm{v}^2/c^2}}.$$

Выпишем полученные формулы, которые называются *преобразованиями Лоренца:*

$$\begin{aligned}
&x = \left(x' + \mathrm{v}t'\right)/\sqrt{1 - \mathrm{v}^2/c^2}, && x' = \left(x - \mathrm{v}t\right)/\sqrt{1 - \mathrm{v}^2/c^2},\\
&y = y', && y' = y,\\
&z = z', && z' = z,\\
&t = \left(t' + x'\mathrm{v}/c^2\right)/\sqrt{1 - \mathrm{v}^2/c^2}, && t' = \left(t - x\mathrm{v}/c^2\right)/\sqrt{1 - \mathrm{v}^2/c^2}.
\end{aligned} \tag{1.108}$$

Из (1.105) и (1.108) видно, что при скорости движения, которая намного меньше скорости света, отношение $v^2/c^2 << 1$ и преобразования Лоренца переходят в классические преобразования Галилея. Таким образом, законы механики Ньютона не отвергаются, они рассматриваются как частный случай движения тел с малыми скоростями.

Из преобразований Лоренца (1.108) вытекает ряд следствий.

**1.** ***Сокращение длины движущегося тела***

Допустим, что вдоль оси $x'$ в движущейся системе $K'$ покоится стержень. Наблюдатель, находящийся в системе $K'$, определяет длину этого стержня $l'_0$ (собственная длина) как разность координат его концов:

$$l'_o = x'_2 - x'_1.$$

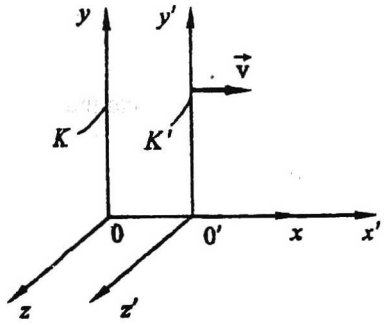


Рис. 23

Определим длину этого стержня $l$ в системе отсчета $K$, относительно которой стержень движется со скоростью $\vec{v}$.

Используя преобразования Лоренца (1.108), запишем:

$$x'_1 = \left(\frac{x_1 - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right), \qquad x'_2 = \left(\frac{x_2 - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right),$$

откуда $l'_o = x'_2 - x'_1 = \dfrac{(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \dfrac{l}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$,

так как $l = x_2 - x_1$.

$$l'_o = \frac{l}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \text{ или } l = l'_o\sqrt{1 - v^2/c^2}. \qquad (1.109)$$

Стержень, движущийся относительно наблюдателя, кажется ему более коротким, чем в случае, когда стержень относительно него покоится.

Релятивистское сокращение длины, происходящее только в направлении относительного движения, становится заметным при очень больших скоростях. Если, например, тело движется со скоростью v, равной 0,8 скорости света, то согласно формуле (1.109) оно укорачивается до 60% от длины в состоянии покоя.

Сокращение длины движущегося тела носит относительный характер. Если стержень покоится в системе $K$, то его длина в системе $K'$ выражается формулой (1.109). Поэтому, когда в системах $K$ и $K'$ покоятся одинаковые стержни, то нельзя ставить вопрос: какой из них на самом деле короче? Все зависит от системы отсчета.

***2. Замедление хода часов***

Пусть часы и наблюдатель находятся в точках $x'$ в движущейся системе отсчета $K'$. Наблюдатель посылает световой сигнал. Начало светового сигнала $t_1'$ и конец сигнала $t_2'$ он фиксирует по своим часам. Длительность сигнала $\Delta t' = t_2' - t_1'$.

Наблюдатель, находящийся в системе $K$, принимает этот сигнал в течение промежутка времени $\Delta t = t_2 - t_1$, фиксируя начало и конец сигнала по своим часам. Так как система $K'$ движется, наблюдатель системы $K$ фиксирует начало и конец светового сигнала в различных точках пространства, т. е. $t_1 \neq t_2$, т. к. $x_1 \neq x_2$. Воспользовавшись преобразованиями Лоренца (1.108), сравним интервалы времени $\Delta t'$ и $\Delta t$:

$$t_1 = \frac{t_1' + \mathrm{v}x_1'/c^2}{\sqrt{1-\mathrm{v}^2/c^2}},\ t_2 = \frac{t_2' + \mathrm{v}x_2'/c^2}{\sqrt{1-\mathrm{v}^2/c^2}},$$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{(t_2' - t_1') + (x_2' - x_1')\mathrm{v}/c^2}{\sqrt{1-\mathrm{v}^2/c^2}}.$$

Так как $x_2' = x_1' = x'$ (сигнал посылается из одной точки), то

$$\Delta t = \frac{t_2' - t_1'}{\sqrt{1-\mathrm{v}^2/c^2}} \text{ или } \Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\mathrm{v}^2/c^2}}. \qquad (1.110)$$

Итак, покоящиеся часы дают более длинный интервал времени между событиями, происходящими в движущейся системе отсчета, чем часы, движущиеся вместе с этой системой. Как и изменение длины, это сокращение носит относительный характер.

***3. Релятивистский закон сложения скоростей***

Предположим, что в системе $K'$ вдоль оси $x'$ движется материальная точка со скоростью $u' = \dfrac{dx'}{dt'}$.

Найдем скорость этой точки $u = \dfrac{dx}{dt}$ в системе $K$. Используя преобразование Лоренца (1.108), запишем:

$$dx = \frac{dx' + \mathrm{v}dt'}{\sqrt{1 - \mathrm{v}^2/c^2}}, \quad dt = \frac{dt' + (\mathrm{v}^2/c^2)dx'}{\sqrt{1 - \mathrm{v}^2/c^2}}.$$

Тогда $u = \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{dx' + \mathrm{v}dt'}{dt' + (\mathrm{v}/c^2)dx'}$.

Поделив числитель и знаменатель правой части уравнения на $dt'$, получим релятивистский закон сложения скоростей:

$$u = \frac{dx'/dt' + \mathrm{v}}{1 + (\mathrm{v}/c^2)(dx'/dt')} = \frac{u' + \mathrm{v}}{1 + \mathrm{v}u'/c^2}. \qquad (1.111)$$

Из формулы (1.111) видно, что в случае, когда $\mathrm{v} << c$, релятивистский закон сложения скоростей переходит в классический: $u = u' + \mathrm{v}$.

Если $u' = c$, то $u = (c + \mathrm{v})/(1 + \mathrm{v}/c) = c$.

## § 25. Энергия релятивистской частицы. Закон взаимосвязи массы и энергии

В СТО вводится релятивистская масса частицы $m$, зависящая от скорости ее движения v:

$$m = m_0 \Big/ \sqrt{1 - \mathrm{v}^2/c^2}, \qquad (1.112)$$

где $m_0$ — масса частицы, находящейся в покое.

С возрастанием скорости движения частицы, как следует из формулы (1.112), масса тоже увеличивается. Если скорость частицы v стремится к скорости света $c$, то масса частицы стремится к бесконечности. При малых скоростях, когда $\mathrm{v} << c$, массы движущейся и покоящейся частиц приблизительно одинаковы.

Основное уравнение релятивистской динамики имеет такой же вид, как и в классической механике Ньютона:

$$\vec{F} = d\vec{p}/dt = d(m\vec{\mathrm{v}})/dt, \qquad (1.113)$$

только в этом уравнении масса — переменная величина. Здесь $\vec{F}$ — сила, действующая на частицу, $\vec{p}$ — импульс частицы.

Выведем соотношение между массой и энергией (знаменитую формулу А. Эйнштейна). Как известно из классической физики, работа силы $\vec{F}$ на элементарном перемещении $d\vec{r}$ равна приращению кинетическй энергии тела: $dE_к = \vec{F}\,d\vec{r} = \vec{F}\,\vec{\mathrm{v}}\,dt$, где $\vec{\mathrm{v}}$ — скорость.

Подставив в данное выражение основное уравнение релятивистской динамики (1.113) и преобразовав его с учетом того, что $\vec{\mathrm{v}}d\vec{\mathrm{v}} = \mathrm{v}d\mathrm{v}$, и формулы (1.112), получим

$$dE_к = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_o\vec{\mathrm{v}}}{\sqrt{1-\mathrm{v}^2/c^2}}\right)\vec{\mathrm{v}}dt = \vec{\mathrm{v}}\,d\left(\frac{m_o\vec{\mathrm{v}}}{\sqrt{1-\mathrm{v}^2/c^2}}\right).$$

Интегрируем полученное выражение, считая, что кинетическая энергия покоящейся частицы равна нулю, а ее масса равна $m_o$:

$$\begin{aligned} E_к &= \frac{m_o\mathrm{v}^2}{\sqrt{1-\mathrm{v}^2/c^2}} - m_o\int_0^{\mathrm{v}}\frac{\mathrm{v}d\mathrm{v}}{\sqrt{1-\mathrm{v}^2/c^2}} = \\ &= \frac{m_o\mathrm{v}^2}{\sqrt{1-\mathrm{v}^2/c^2}} + m_oc^2\sqrt{1-\mathrm{v}^2/c^2}\Big|_0^{\mathrm{v}} = \\ &= \frac{m_o\mathrm{v}^2}{\sqrt{1-\mathrm{v}^2/c^2}} - m_oc^2 = mc^2 - m_oc^2. \end{aligned} \qquad (1.114)$$

Выражение $E = mc^2$ назвали полной энергией тела, а $E_o = m_oc^2$ — энергией покоя. Если тело покоится и его $E_к = 0$, оно тем не менее обладает энергией покоя.

Запишем уравнение (1.114) с учетом введенных обозначений

$$E_к = E - E_o,$$

где

$$E = mc^2, \qquad (1.115)$$

$$E_o = m_oc^2. \qquad (1.116)$$

Таким образом, кинетическая энергия релятивистской частицы $E_к$ равна разности полной энергии $E$ и энергии покоя частицы $E_0$. При скорости движения v << $c$ уравнение (1.114) переходит в классическое $E_к \approx m\mathrm{v}^2/2$.

Энергия покоя $E_0 = m_0 c^2$ представляет собой внутреннюю энергию тела и включает в себя энергию покоя частиц, из которых состоит тело, кинетическую энергию частиц, обусловленную их движением относительно центра масс и энергию их взаимодействия друг с другом.

Согласно Эйнштейну полная энергия тела, из каких бы видов она не состояла (кинетической, химической, электрической и т. д.), связана с массой этого тела соотношением $E = mc^2$.

Связь между полной энергией и релятивистской массой является фундаментальным законом природы. Изменение энергии тела сопровождается эквивалентным изменением его массы: $\Delta m = \Delta E/c^2$ и наоборот, изменение массы сопровождается изменением его энергии: $\Delta E = c^2 \Delta m$. Это *закон взаимосвязи релятивистской массы и энергии.*

Если в классической механике масса тела является мерой инертности или гравитационного действия, то релятивистская масса выступает как мера *энергосодержания* тела.

Закон взаимосвязи массы и энергии подтвержден экспериментами в ядерной физике. Например, при образовании атомного ядра из составляющих его нуклонов наблюдается уменьшение массы, которое связано с выделением энергии. Выделившейся энергии связи $E_{св}$ соответствует масса $\Delta m = E_{св}/c^2$, называемая *дефектом масс.*

Релятивистская теория тяготения, удовлетворяющая принципу относительности А. Эйнштейна, развита в общей теории относительности.

## ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

**Задача 19.** Космический корабль движется с постоянной скоростью $v = \frac{24}{25}c$ по направлению к центру Земли. Какое расстояние в системе отсчета, связанной с Землей, пройдет корабль за промежуток времени $\Delta t' =$ $= 7$ с, отсчитанный по корабельным часам? Вращение Земли и ее орбитальное движение не учитывать.

**Дано:**

$v = \frac{24}{25}c$

$\Delta t' = 7$ с

$S = ?$

**Решение.** Если на корабле отсчитан промежуток собственного времени $\Delta t'$, то по земным часам согласно уравнению (1.110) будет отсчитан промежуток

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}.$$

Поэтому $S = v\Delta t$,

$$S = \frac{24}{25}\frac{c\Delta t}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{24}{25}\frac{c\Delta t'}{\sqrt{1-\left(\frac{24}{25}\right)^2}}.$$

здесь

$$c = 3\cdot 10^8 \ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

**Ответ:** $S = 72$ м.

**Задача 20.** В ускорителе протоны ускоряются до скоростей, отличающихся на 0,01% от скорости света. Во сколько раз релятивистская масса таких протонов превышает их массу покоя?

**Дано:**

$\left(\frac{c-\mathrm{v}}{c}\right)100\ \% = 0{,}01\%$

$\frac{m}{m_0} = ?$

**Решение.** При скоростях движения v, соизмеримых со скоростью света, масса зависит от скорости движения по формуле (1.112):

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad (1)$$

где $\beta = \frac{\mathrm{v}}{c}$; $m_0$ — масса покоя.

Так как $\left(\frac{c-\mathrm{v}}{c}\right)100\% = 0{,}01\%$ (по условию), то

$$1-\frac{\mathrm{v}}{c} = 10^{-4},$$

$$1-\beta = 10^{-4},$$

$$\beta = 1-10^{-4} \approx 1,$$

т. е. мало отличается от единицы. Подкоренное выражение в формуле (1) можно представить в виде

$$1-\beta^2 = (1-\beta)(1+\beta) \approx 2(1-\beta).$$

Тогда

$$\frac{m}{m_0} \approx \frac{1}{\sqrt{2(1-\beta)}} \approx 70.$$

**Ответ:** $\frac{m}{m_0} \approx \frac{1}{\sqrt{2(1-\beta)}} \approx 70.$

**Задача 21.** Из астрономических наблюдений установлено, что количество энергии, которое приносит на Землю солнечное излучение за 1 с на площадку 1 м$^2$, перпендикулярную солнечным лучам, составляет около $1{,}4\cdot 10^3 \frac{\text{Дж}}{(\text{с}\cdot\text{м}^2)}$. Какую массу ежесекундно теряет Солнце?

**Дано:**

$\frac{\Delta E}{S} = 1{,}4 \cdot 10^3 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$

$\frac{\Delta m}{m} = ?$

**Решение.** Суммарная энергия, излучаемая Солнцем за 1 с:

$$\Delta E = 1{,}4 \cdot 10^3 \cdot 4\pi \cdot R^2,$$

где $R = 1{,}49 \cdot 10^{11}$ м — расстояние от Земли до Солнца. Согласно формуле (1.115) Солнце ежесекундно теряет массу

$$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2} = 1{,}4 \cdot 10^3 \frac{4\pi R^2}{c^2}.$$

Вычисления дают

$$\Delta m = 4{,}4 \cdot 10^9 \frac{\text{кг}}{\text{с}}.$$

Величина грандиозная с точки зрения земных масштабов, однако по сравнению с массой Солнца эта потеря ничтожно мала и составляет

$$\frac{\Delta m}{m} = 2 \cdot 10^{-21}$$ — за одну секунду.

Здесь $m$ — масса Солнца.

**Ответ:** $\frac{\Delta m}{m} = 2 \cdot 10^{-21}$.

**Задача 22.** Какую работу необходимо совершить, чтобы увеличить скорость частицы с массой покоя $m_0$ от 0,6 до 0,8 с? Сравнить полученный результат со значением, вычисленным по классической формуле.

**Дано:**

$v_1 = 0{,}6$ с

$v_2 = 0{,}8$ с

$A = ?$

**Решение.** Искомая работа равна изменению кинетической энергии:

$$A = E_{k2} - E_{k1},$$

где $E_{k1} = m_0 c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_1^2}} - 1 \right)$,

$$E_{k2} = m_0 c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1-\beta_2^2}} - 1 \right),$$

а $\beta_1 = \frac{v_1}{c}; \quad \beta_2 = \frac{v_2}{c}.$

Подставляя данные из условия задачи, получим

$$A = m_0 c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1-\beta_2^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-\beta_1^2}} \right) = 0{,}42 m_0 c^2 . \qquad (1)$$

Соответствующая же работа по классической формуле

$$A = \frac{m_0 v_2^2}{2} - \frac{m_0 v_1^2}{2} = 0{,}14 m_0 c^2 . \qquad (2)$$

Из уравнений (1) и (2) видно, что значение работы, рассчитанное по формулам релятивистской механики, оказывается в 3 раза больше значения работы, которое мы получили бы при расчете по формулам классической механики.

# Глава 6
# МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

## § 26. Гармонические колебания

*Колебаниями* называются движения или процессы, точно или приблизительно повторяющиеся во времени. По способу воздействия на колеблющуюся систему колебания делятся на свободные (собственные), вынужденные, автоколебания и параметрические.

*Свободными* называются колебания системы, предоставленной самой себе после того, как она была выведена из положения равновесия, и не подверженной действию переменных внешних сил.

*Вынужденными* называются колебания, при которых система подвергается воздействию внешней периодически изменяющейся силы. Если при этом система сама управляет внешним воздействием, то такие вынужденные колебания называются *автоколебаниями*.

Колебания, при которых колеблющаяся величина изменяется со временем по закону синуса или косинуса, называются *гармоническими*.

Любую колебательную систему принято называть *осциллятором*.

Рассмотрим свободные колебания тела на пружине (пружинный маятник). Тело массой $m$, подвешенное на абсолютно упругой пружине длиной $l$ (рис. 24), и жесткостью $k$ способно совершать колебания в вертикальной плоскости. Допустим, что силы сопротивления при колебаниях пренебрежимо малы.

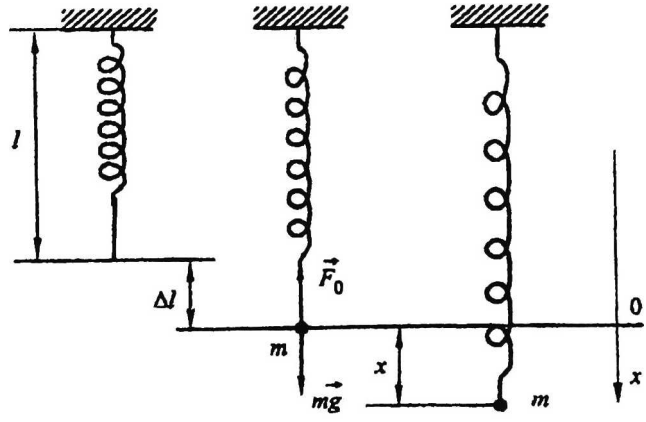



Рис. 24

В положении равновесия сила тяжести тела $m\vec{g}$ уравновешивается силой упругости пружины $F_o = k\Delta l$, т. е.

$$mg = k\Delta l, \tag{1.117}$$

где $\Delta l$ — удлинение пружины после подвески тела. Если внешней силой растянуть пружину на $x$, то ее удлинение станет равным $(x + \Delta l)$. Тогда проекция результирующей силы $F$ на направление $x$ с учетом выражения (1.117) будет равна

$$F = mg - k(x + \Delta l) = F_o - k(\Delta l + x) = k\Delta l - k(\Delta l + x) = -kx. \tag{1.118}$$

Знак минус в уравнении (1.118) показывает, что смещение $x$ и сила $F$, действующая на тело, противоположны по направлению.

По второму закону Ньютона сила $F = ma$. Приравняв правую часть уравнения (1.118) к $ma$, получим

$$ma = -kx$$

или

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0. \tag{1.119}$$

Введем обозначение: отношение $k/m = \omega_0^2$.

С учетом обозначения уравнение (1.119) примет вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0, \tag{1.120}$$

где $\omega_0$ — циклическая частота.

Это соотношение представляет собой однородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка, решением которого являются уравнения вида

$$x = A \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \tag{1.121}$$

или

$$x = A \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi_0), \tag{1.122}$$

где $A$ – *амплитуда колебаний* (максимальное смещение колеблющегося тела от положения равновесия), $(\omega_0 t + \varphi_0)$ — фаза колебаний, $\varphi_0$ — начальная фаза в момент времени $t = 0$.

*Фаза колебаний* — это физическая величина, определяющая положение колеблющейся системы в данный момент времени. Фаза колебаний измеряется в радианах (рад). Таким образом, колебания пружинного маятника осуществляются по закону синуса или косинуса, т. е. являются гармоническими.

Различные состояния системы, совершающей гармонические колебания, повторяются через промежуток времени $T$, называемый *периодом колебаний*, за который фаза колебаний получает приращение $2\pi$, т. е.

$$[(\omega_0(t+T)+\varphi_0)-(\omega_0 t+\varphi_0)]=2\pi.$$

Отсюда

$$\omega_0 = 2\pi/T. \qquad (1.123)$$

*Циклическая частота* $\omega_0$ — есть физическая величина, определяющая число колебаний, происходящих за $2\pi$ секунд. Здесь $T$ — период колебаний.

Величина, обратная периоду: $\nu = 1/T$, называется *частотой колебаний* (число колебаний, совершаемых в единицу времени).

Период колебаний измеряется в секундах (с), а частота — в герцах (1 Гц = 1/с = $1\text{с}^{-1}$).

В дальнейшем при исследовании гармонических колебаний будем пользоваться уравнением (1.121).

*Скорость* колеблющегося тела находится как первая производная смещения $x$ (1.121) по времени $t$:

$$\text{v} = \frac{dx}{dt} = -A\omega_0 \cdot \sin(\omega_0 t+\varphi_0) = A\omega_0 \cos\left(\omega_0 t+\varphi_0+\frac{\pi}{2}\right), \qquad (1.124)$$

а *ускорение* — как вторая производная смещения по времени:

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d\text{v}}{dt} = -A\omega_0^2 \cdot \cos(\omega_0 t+\varphi_0) = \\ = A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t+\varphi_0+\pi) = -\omega_0^2 x. \qquad (1.125)$$

Зависимости $x$, v и $a$ от времени $t$ графически представлены на рис. 25.

Из уравнений (1.121), (1.124) и (1.125) следует, что скорость и ускорение изменяются также по гармоническому закону и с той же циклической частотой $\omega_0$, фаза скорости колебаний отличается от фазы смещения на $\pi/2$, а фаза ускорения — на $\pi$.

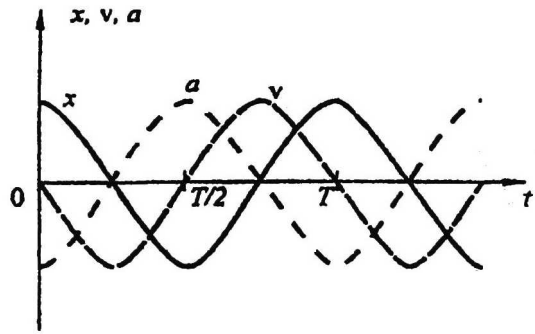



Рис. 25

Для определения энергии колеблющейся системы воспользуемся выражениями для потенциальной энергии деформированной пружины (1.55) и кинетической энергии движущегося груза (1.53):

$$E_p = kx^2/2 = k \cdot A^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)/2, \qquad (1.126)$$

$$E_k = mv^2/2 = m\omega_0^2 \cdot A^2 \sin^2(\omega_o t + \varphi_0)/2. \qquad (1.127)$$

Суммируя уравнения (1.126) и (1.127) и учитывая выражение $\omega_0^2 = k/m$, найдем полную энергию системы:

$$E = E_p + E_k = A^2 m\omega_0^2/2. \qquad (1.128)$$

Из формулы (1.128) следует, что полная механическая энергия не изменяется при гармонических колебаниях.

## § 27. Физический и математический маятники

*Физическим маятником* называется твердое тело, имеющее ось вращения, не проходящую через центр масс. На рис. 26 изображен физический маятник, отклоненный на угол α от положения равновесия.

Разложим силу тяжести маятника $\vec{mg}$ на составляющие $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$.

Сила $\vec{F}_1 = mg\sin\alpha$ создает вращательный момент

$$M = F_1 l = -mgl\sin\alpha \approx -mgl\alpha, \qquad (1.129)$$

стремящийся вернуть маятник в положение равновесия.

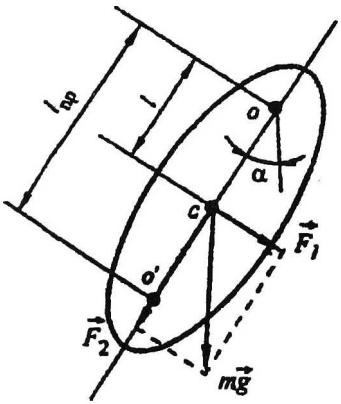



Рис. 26

Знак минус в выражении (1.129) показывает, что смещение и сила противоположны по направлению. При малых углах отклонений $\sin\alpha \approx \alpha$.

Согласно уравнениям (1.28) и (1.87) для углового ускорения $\varepsilon$ запишем:

$$\varepsilon = \frac{d^2\alpha}{dt^2} \text{ и } \varepsilon = M / J,$$

или

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \frac{M}{J}, \qquad (1.130)$$

где $J$ — момент инерции маятника относительно оси вращения.

Из выражений (1.129) и (1.130) получим дифференциальное уравнение колебаний физического маятника при малых отклонениях его от положения равновесия:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{mgl}{J}\alpha = 0$$

или

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \omega_0^2\alpha = 0,$$

где $\omega_0^2 = \frac{mgl}{J}$ — циклическая частота колебаний маятника.

Так как согласно (1.123) $\omega_0 = 2\pi / T$, то период колебаний физического маятника

$$T = 2\pi\sqrt{J/(mgl)}. \qquad (1.131)$$

Таким образом, при малых углах отклонений физический маятник совершает гармонические колебания с периодом, определяемым формулой (1.131).

*Математическим маятником* называется материальная точка, подвешенная на невесомой и нерастяжимой нити. Пусть масса точки *m*, а длина

нити $l$. Используя уравнение (1.131), найдем период колебаний $T_M$ математического маятника:

$$T_M = 2\pi\sqrt{ml^2/(mgl)} = 2\pi\sqrt{l/g}\,. \qquad (1.132)$$

*Приведенной длиной* $l_{пр}$ физического маятника называется длина такого математического маятника, период колебаний которого равен периоду колебаний данного физического маятника. Из сопоставления формул (1.131) и (1.132) для приведенной длины можно получить выражение: $l_{пр} = J/(ml)$.

Точку $O'$ (рис. 26), отстоящую от оси вращения на расстоянии приведенной длины, называют *центром качания* физического маятника. При переносе оси вращения в центр качания период колебаний физического маятника не изменяется.

## § 28. Сложение гармонических колебаний одного направления

Сложение колебаний выполним с помощью *векторной диаграммы.*

Пусть вектор $\vec{A}$ равномерно вращается с угловой скоростью $\omega_0$ относительно точки $o$ (рис. 27), при этом угол $\varphi$ между осью $ox$ и вектором непрерывно изменяется со временем:

$$\varphi = \omega_0 t + \varphi_0,$$

где $\varphi_0$ — начальный угол при $t = 0$.

При вращении проекция конца вектора $\vec{A}$ на ось $ox$ совершает гармонические колебания:

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

при которых модуль вектора $|\vec{A}|$ является амплитудой, угловая скорость вращения $\omega_0$ — циклической частотой, а угол $\varphi_0$ — начальной фазой колебаний.

Рассмотрим несколько случаев сложения двух гармонических колебаний.

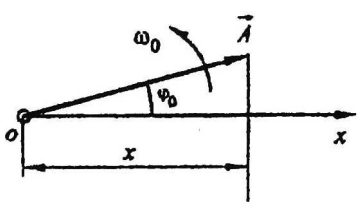



Рис. 27

1. Складываемые колебания имеют амплитуды $A_1$ и $A_2$, циклические частоты одинаковы $\omega_{01} = \omega_{02} = \omega_0$, а начальные фазы равны $\varphi_1$ и $\varphi_2$ соответственно:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1),$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_2).$$

Используя векторную диаграмму, в результате сложения получим гармонические колебания, описываемые уравнением

$$x = x_1 + x_2 = A\cos(\omega_0 t + \varphi), \qquad (1.133)$$

где

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)},$$

$$tg\varphi = \frac{AC}{OC} = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$$

определяются из векторной диаграммы (рис.28).

а) Пусть $(\varphi_2 - \varphi_1) = 2k\pi$, где $k$ = 0, 1, 2, 3, … т. е. разность начальных фаз складываемых колебаний равна нулю или кратна $2\pi$.

Тогда $A = A_1 + A_2$,

$$tg\varphi = tg\varphi_1 = tg\varphi_2.$$

Результирующие колебания будут происходить с амплитудой, равной сумме амплитуд складываемых колебаний, и начальной фазой, равной начальной фазе любого из складываемых колебаний.

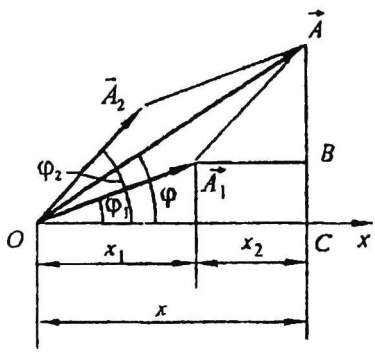



Рис. 28

б) Пусть $(\varphi_2 - \varphi_1) = (2k+1)\pi$,

где $k = 0,1,2,3,...$, а $|A_2| > |A_1|$.

Тогда

$$A = |A_2 - A_1|,\ tg\varphi = tg\varphi_2.$$

Амплитуда результирующих колебаний будет равна разности амплитуд складываемых колебаний и направлена в сторону большей амплитуды, а начальная фаза равна начальной фазе того из колебаний, амплитуда которого больше.

2. Складываются два колебания, циклические частоты которых $\omega_{01} \neq \omega_{02}$, но разность частот $\Delta\omega_0 = \omega_{02} - \omega_{01}$ очень мала по сравнению с $\omega_{01}$ и $\omega_{02}$:

$$x_1 = A\cos\omega_{01}t,$$

$$x_2 = A\cos\omega_{02}t.$$

В результате сложения получим колебания, называемые *биениями*:

$$x = x_1 + x_2 = A\cos\omega_{01}t + A\cos\omega_{02}t = 2A\cos\frac{\omega_{02} - \omega_{01}}{2}t\cos\frac{\omega_{02} + \omega_{01}}{2}t$$

или

$$x = A_{\text{рез}}\cos\omega_{\text{рез}}t, \qquad (1.134)$$

где

$$A_{рез} = \left|2A\cos\frac{\omega_{02} - \omega_{01}}{2}t\right|, \quad \omega_{рез} = \frac{\omega_{02} + \omega_{01}}{2}.$$

Результирующие колебания можно рассматривать как приблизительно гармонические с средней частотой $\omega_{\text{рез}}$ и амплитудой $A_{\text{рез}}$, медленно меняющейся по гармоническому закону (рис. 29). Сплошной линией на рис. 29 изображены результирующие колебания, а пунктирной линией — медленно изменяющиеся со временем амплитуды колебаний.

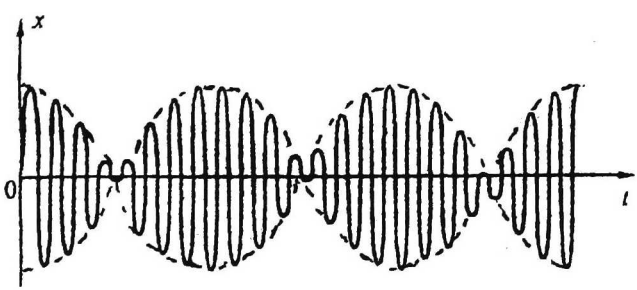



Рис. 29

Частота биений тем меньше, чем меньше разность $\Delta\omega_0$, поэтому наблюдение биений позволяет с большой точностью определять равенство частот двух колебаний в момент, когда частота биений падает до нуля. В таком виде метод биений используется для настройки музыкальных инструментов с помощью камертона.

## § 29. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний

Рассмотрим сложение двух гармонических колебаний, имеющих одинаковую циклическую частоту $\omega_0$, происходящих во взаимно перпендикулярных направлениях:

$$x = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1),$$

$$y = A_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_2).$$

В результате сложения получаются колебания, траектории которых описываются уравнением эллипса (вывод уравнения опускается):

$$\frac{x^2}{A_1^2} - 2\frac{xy}{A_1 A_2}\cos(\varphi_2 - \varphi_1) + \frac{y^2}{A_2^2} = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1). \qquad (1.135)$$

Ориентация осей эллипса относительно координат $x$ и $y$ зависит от амплитуд $A_1$ и $A_2$ и разности фаз $(\varphi_2 - \varphi_1)$.

Рассмотрим несколько частных случаев.

1. Разность начальных фаз складываемых колебаний равна нулю или кратна четному числу $\pi$:

$(\varphi_2 - \varphi_1) = 2k\pi$, где $k = 0, 1, 2, 3, \ldots \ldots$

После подстановки в (1.135) получим

$$\frac{x}{A_1} - \frac{y}{A_2} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{x}{A_1} = \frac{y}{A_2},$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}, \quad tg\varphi = \frac{A_2}{A_1}. \qquad (1.136)$$

Точка будет совершать гармонические колебания, направленные вдоль прямой, лежащей в первой и третьей четвертях (рис. 30а), амплитуда и начальная фаза которых определяются выражениями (1.136).

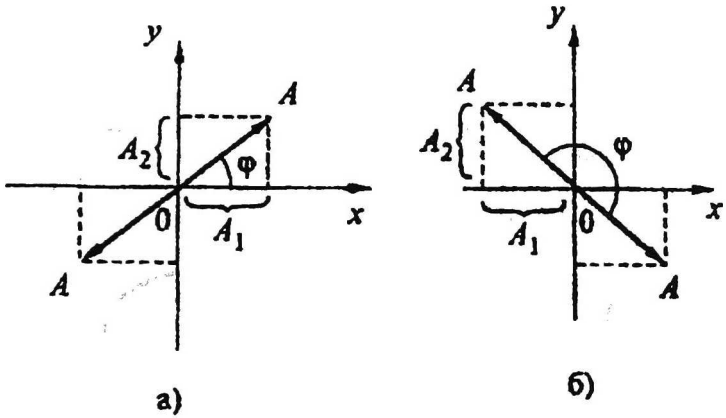



Рис. 30

2. Разность начальных фаз складываемых колебаний кратна нечетному числу $\pi$:

$(\varphi_2 - \varphi_1) = (2k+1)\pi$, где $k$ = 0, 1, 2, 3, ... ... Из уравнения (1.135) получим

$$\frac{x}{A_1} + \frac{y}{A_2} = 0 \text{ или } \frac{x}{A_1} = -\frac{y}{A_2},$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}, \quad tg\varphi = \frac{A_2}{A_1}.$$

Колебания точки будут совершаться вдоль прямой, лежащей во второй и четвертой четвертях (рис. 30б).

Изображенные на рис. 30 колебания называются *линейно поляризованными.*

Если разность фаз складываемых колебаний

$$(\varphi_2 - \varphi_1) = (2k+1)\pi/2,$$

где $k$ = 0, 1, 2, 3, ... ..., а амплитуды одинаковы: $A_1 = A_2 = A$, то уравнением движения точки будет окружность с радиусом, равным амплитуде А складываемых колебаний: $x^2 + y^2 = A^2$.

Такие колебания называются *циркулярно поляризованными.*

В результате сложения взаимно перпендикулярных колебаний с разными циклическими частотами

$$x = A_1 \cos(p\omega_0 t + \varphi_1),$$

$$y = A_2 \cos(g\omega_0 t + \varphi_2)$$

траекториями точек являются сложные замкнутые кривые, получившие название *кривых Лиссажу.*

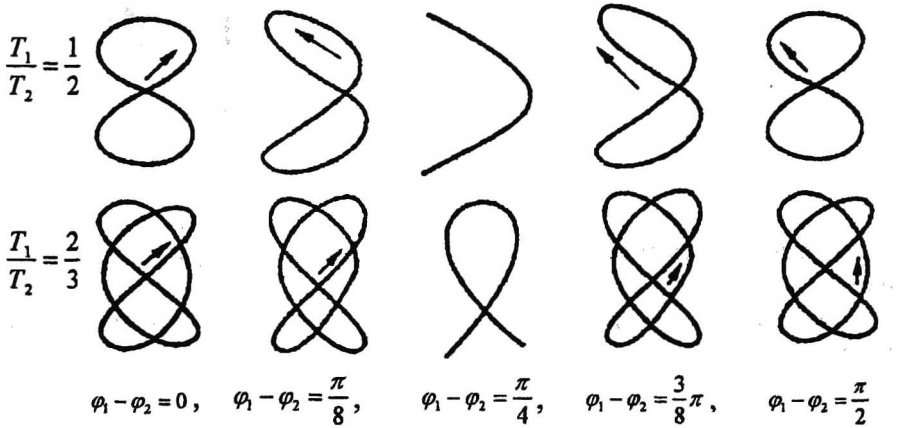



Рис.31

На рис. 31 показаны фигуры Лиссажу для некоторых частных случаев.

## § 30. Затухающие колебания

В реальных условиях на колеблющуюся систему действуют силы сопротивления (трение, например) и колебания со временем затухают.

При небольших скоростях движения сила сопротивления $F_c$ прямо пропорциональна скорости v и направлена в сторону, противоположную движению:

$$F_c = -r\mathrm{v} = -r\frac{dx}{dt}.$$

С учетом силы сопротивления дифференциальное уравнение колебаний пружинного маятника примет вид

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{r}{m}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{k}{m}x=0$$

или

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\beta\cdot\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=0, \qquad (1.137)$$

где $r$ – коэффициент сопротивления, $\beta=r/(2m)$ — коэффициент затухания.

Уравнение (1.137) имеет решение при $\beta^2<<\omega_0^2$:

$$x=Ae^{-\beta t}\cos(\omega t+\varphi)=A_t\cos(\omega t+\varphi), \qquad (1.138)$$

где $\omega=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}$ — циклическая частота, $A_t=A\cdot e^{-\beta t}$ — амплитуда затухающих колебаний, $A$ — начальная амплитуда.

На рис. 32 показана зависимость (1.138).

Период затухающих колебаний

$$T=2\pi/\omega=2\pi/\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}.$$

Натуральный логарифм отношения амплитуд двух последовательных колебаний, отличающихся по времени на один период, называется *логарифмическим декрементом затухания:*

$$\delta=\ln\frac{A_t}{A_{(t+T)}}=\ln\frac{Ae^{-\beta t}}{Ae^{-\beta(t+T)}}=\ln e^{\beta T}=\beta T.$$

Пусть $\tau$ — время, в течение которого амплитуда колебаний уменьшается в $e$ раз (*время релаксации*). Тогда $\ln e=\beta\tau$ или $\beta\tau=1$, а $\beta=1/\tau$.

Таким образом, *коэффициент затухания* $\beta$ — это физическая величина, обратная промежутку времени, в течение которого амплитуда колебаний уменьшается в $e$ раз. Здесь $e$ — основание натурального логарифма.

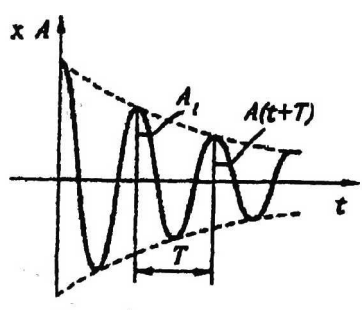


Рис. 32

*Логарифмический декремент затухания* $\delta$ — это физическая величина, обратная числу колебания $N$, совершаемых системой за время уменьшения амплитуды в $e$ раз:

$$\delta = \beta T = T/\tau = 1/N.$$

## § 31. Вынужденные колебания

Колебания пружинного маятника будут незатухающими, если на него воздействовать внешней вынуждающей силой $F$, изменяющейся, например, по гармоническому закону:

$$F = F_0 \cos \omega t,$$

где ω — частота вынуждающей силы, $F_0$ — максимальное значение вынуждающей силы.

Применяя второй закон Ньютона, запишем:

$$ma + rv + kx = F_0 \cos \omega t,$$

откуда получим дифференциальное уравнение вынужденных колебаний:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos \omega t, \qquad (1.139)$$

где $\beta = r/(2m)$ — коэффициент затухания, $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ собственная циклическая частота.

Выражение (1.139) является линейным неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка. Решение данного уравнения состоит из двух слагаемых: общего решения (1.138) однородного уравнения (1.137), играющего существенную роль только в начальной стадии при установлении колебаний, и частного решения данного неоднородного уравнения:

$$x = A\cos(\omega t - \varphi), \qquad (1.140)$$

где амплитуда колебаний $A$ и сдвиг фаз $\varphi$ равны:

$$A = F_0 / \left( m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2} \right), \qquad (1.141)$$

$$tg\varphi = 2\beta\omega / \left(\omega_0^2 - \omega^2\right).$$

Вынужденные колебания отстают по фазе на угол $\varphi$ от вынуждающей силы.

Найдем условие, при котором амплитуда колебаний $A$ имеет максимальное значение, т. е. определим максимум функции (1.141) (минимум ее подкоренного выражения):

$$\frac{d}{d\omega}\left[\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\beta^2\omega^2\right]=0.$$

После дифференцирования данного уравнения получим

$$\omega^2-\omega_0^2+2\beta^2=0,$$

откуда

$$\omega=\pm\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}\,.$$

Частота колебаний ω не имеет отрицательных значений, тогда для резонансной частоты, при которой амплитуда колебаний достигает максимума, имеем выражение

$$\omega_{рез}=\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}\,. \qquad (1.142)$$

Явление возрастания амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты вынуждающей силы ω к резонансной частоте $\omega_{рез}$ называется *механическим резонансом*.

Подставляя выражение (1.142) в уравнение (1.141), найдем резонансную амплитуду:

$$A_{рез}=F_0/\left(2m\beta\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}\right).$$

На рис. 33 показаны резонансные кривые при $\beta_1<\beta_2<\beta_3$:

1) если $\omega=0$, то $A=F_0/(m\omega_0^2)$;

2) если $\beta=0$ и $\omega=\omega_0$, то амплитуда бесконечно возрастает;

3) при $\omega\to\infty$ амплитуда колебаний стремится к нулю;

4) с увеличением коэффициента затухания $\beta$ амплитуда колебаний уменьшается.

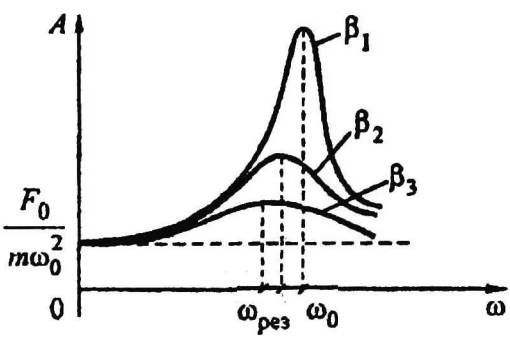



Рис. 33

## § 32. Механические волны в упругой среде

Механические колебания могут распространяться в упругих средах: в твердых телах, в жидкостях и газах.

*Волной* называется распространение колебаний вещества или поля, происходящее периодически в пространстве и во времени.

При волновом процессе передается состояние колебаний, перенос энергии осуществляется без переноса вещества.

*Сплошной* называется среда, в которой вещество распределено непрерывно. В упругой среде распространяются упругие колебания, образуя упругие волны: *поперечные* или *продольные*.

*Гармонической* называется волна, в которой изменение состояния колеблющейся системы происходит по закону синуса или косинуса.

Если в упругой сплошной среде возбудить колебания ее частиц, то вследствие взаимодействия между частицами колебания будут передаваться от одной частицы к другой с некоторой скоростью v. Такая волна называется *бегущей*. При этом частицы среды не вовлекаются волной в поступательное движение, а совершают колебания около своих положений равновесия. В поперечной волне частицы колеблются в направлении, перпендикулярном к направлению распространения волны. Скорость распространения поперечной волны определяется по формуле

$$v_n = \sqrt{G/\rho},$$

где $G$ — модуль сдвига, $\rho$ — плотность среды.

В продольной волне частицы вещества колеблются вдоль направления распространения волны. Скорость распространения продольной волны рассчитывается по формуле

$$v_{пр} = \sqrt{E/\rho},$$

где $E$ — модуль Юнга.

На рис. 34, а показана кривая смещения $s$ из положения равновесия точек с различными значениями координаты $x$ в некоторый момент времени $t$.

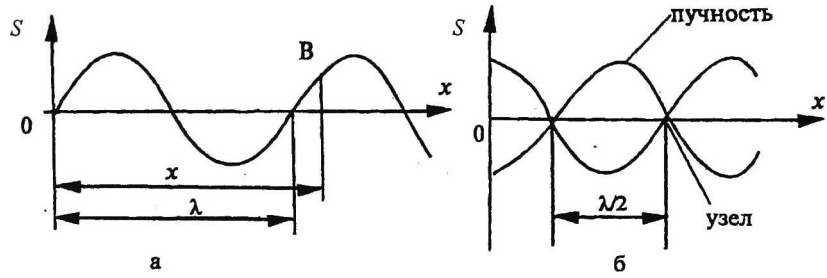



Рис. 34

Физическая величина, равная расстоянию между двумя ближайшими частицами, колеблющимися в одинаковой фазе, называется *длиной волны*. Длина волны равна расстоянию, на которое распространяется волна за время, равное периоду T, т. е.

$$\lambda = \mathrm{v}T = \mathrm{v}/\nu,$$

где $\nu$ – частота колебаний.

*Волновой поверхностью* называется геометрическое место точек, колеблющихся в одинаковой фазе. По форме волновой поверхности волны подразделяются на плоские, сферические и цилиндрические.

*Волновой фронт* – это геометрическое место точек, до которых доходят колебания в данный момент времени.

## §33. Уравнение плоской бегущей волны. Волновое уравнение

Рассмотрим бегущую волну, у которой колебания точек в плоскости $x = 0$ имеют вид

$$s_0 = A\cos(\omega t + \varphi).$$

Пусть $\tau$ — время, за которое колебания дойдут до плоскости, где расположена точка B (рис. 34, а): $\tau = x/\mathrm{v}$. Колебания частиц в точке B будут отставать по времени на величину $\tau$ от колебаний в плоскости $x = 0$ и, следовательно, имеют вид

$$s_x = A\cos[\omega(t-\tau)+\varphi]. \qquad (1.143)$$

Если волна распространяется в сторону, противоположную $x$, то уравнение запишется в виде

$$s_x = A\cos[\omega(t+\tau)+\varphi]. \qquad (1.144)$$

Заменив в уравнениях (1.143) и (1.144) $\tau$ на $x/\mathrm{v}$, получим уравнение плоской бегущей волны: .

$$s_x = A\cos\left[\omega\left(t \mp \frac{x}{\mathrm{v}}\right)+\varphi\right]. \qquad (1.145)$$

Уравнение бегущей волны принято также записывать с использованием волнового числа $k = 2\pi/\lambda$. Так как $\lambda = \mathrm{v}T$, то $k = 2\pi/(\mathrm{v}T) = \omega/\mathrm{v}$.

Тогда уравнение (1.145) примет вид

$$s_x = A\cos(\omega t \mp kx + \varphi). \qquad (1.146)$$

Допустим, что фаза волны постоянна, т. е.

$$\left[\omega\left(t-\frac{x}{\mathrm{v}}\right)+\varphi\right]^{-\mathrm{v}}=\text{const.} \tag{1.147}$$

Дифференцируя по времени выражение (1.147), получим

$$dt-\frac{dx}{\mathrm{v}}=0,$$

откуда

$$dt=\frac{dx}{\mathrm{v}},\ \mathrm{v}=\frac{dx}{dt}.$$

Таким образом, скорость распространения волны v есть скорость перемещения фазы волны. Поэтому ее называют *фазовой скоростью.* Скорость волны определяется физическими свойствами среды, в которой она распространяется. Если имеется зависимость скорости волны от частоты (явление называется *дисперсией* волн), то фазовые скорости волн неодинаковы.

Дифференцируя дважды — по времени $t$ и по координате $x$ уравнение (1.146) — имеем:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}=-\omega^2 s, \tag{1.148}$$

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}=-k^2 s. \tag{1.149}$$

Выразив $s$ из уравнения (1.148) и подставив его в (1.149) с учетом выражения $k = \omega/\mathrm{v}$, получим волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}=\frac{1}{\mathrm{v}^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}. \tag{1.150}$$

В уравнении (1.150) $s$ — физическая величина, которая характеризует возмущение, распространяющееся со скоростью v.

В общем случае, когда смещение s является функцией $x$, $y$, $z$ и $t$, волновое уравнение (1.150) имеет вид

$$\Delta s = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}, \qquad (1.151)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — оператор П. Лапласа.[1]

## § 34. Стоячие волны

Стоячие волны образуются при наложении двух бегущих навстречу друг другу волн, имеющих одинаковые частоты и амплитуды:

$$s_1 = A\cos(\omega t - kx),$$
$$s_2 = A\cos(\omega t + kx). \qquad (1.152)$$

Сложив уравнения (1.152) и учитывая, что $k = 2\pi/\lambda$, получим *уравнение стоячей волны*:

$$s = s_1 + s_2 = 2A\cos kx\cos\omega t = 2A\cos(2\pi x/\lambda)\cos\omega t. \qquad (1.153)$$

Из уравнения (1.153) видно, что колебания в стоячей волне имеют ту же частоту ω, а амплитуда $A_{ст}$ изменяется по гармоническому закону и является функцией координаты x:

$$A_{ст} = 2A\cos(2\pi x/\lambda).$$

Амплитуда $A_{ст}$ достигает максимальных значений в точках, имеющих координаты:

$$\frac{2\pi x}{\lambda} = \pm\pi m, \quad (m = 0, 1, 2, ...), \qquad (1.154)$$

которые называются *пучностями* стоячей волны (рис. 34б).

В точках пространства, имеющих координаты

$$\frac{2\pi x}{\lambda} = \pm\left(m + \frac{1}{2}\right)\pi, \qquad (1.155)$$

амплитуда минимальна. Эти точки называются *узлами* стоячей волны. Из сопоставления выражений (1.154) и (1.155) следует, что расстояние между соседними узлами и соседними пучностями одинаковы и равны $\lambda/2$.

---

[1] Пьер Симон Лаплас (1749–1827) — французский ученый.

## § 35. Энергия и интенсивность волны

Предположим, что плоская волна распространяется в упругой среде в направлении оси $x$. Согласно формуле (1.146) запишем уравнение волны:

$$s = A\cos(\omega t - kx + \varphi).$$

Выделим в среде элементарный объем $dV$ и найдем кинетическую энергию, которой он обладает:

$$dE_k = dm\frac{\mathrm{v}^2}{2} = \frac{dm}{2}A^2\omega^2\sin^2(\omega t - kz + \varphi), \qquad (1.156)$$

где $$\mathrm{v} = \frac{ds}{dt} = -A\omega\sin(\omega t - kx + \varphi).$$

Так как элементарная масса объема $dm = \rho\, dV$, то из уравнения (1.156) получим

$$dE_k = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2 dV\sin^2(\omega t - kx + \varphi),$$

где $\rho$ — плотность вещества среды.

Если в выделенном объеме действуют только напряжения растяжения–сжатия, то величина потенциальной энергии $dE_p$ будет равна кинетической энергии $dE_k$, т. е. $dE_p = dE_k$. Тогда для потенциальной энергии запишем:

$$dE_p = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2 dV\sin^2(\omega t - kx + \varphi).$$

Полная энергия

$$dE = dE_k + dE_p = \rho A^2\omega^2 dV\sin^2(\omega t - kx + \varphi).$$

Отношение $dE/dV$ называется *плотностью энергии*:

$$u = \frac{dE}{dV} = \rho A^2\omega^2\sin^2(\omega t - kx + \varphi). \qquad (1.157)$$

В СИ плотность энергии измеряется в джоулях на метр в кубе (Дж/м$^3$).

Из формулы (1.157) видно, что плотность энергии в разных точках среды в каждый момент времени различна. Среднее по времени значение плотности энергии равно

$$\langle u\rangle = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2, \qquad (1.158)$$

так как среднее значение

$$\sin^2(\omega t - kx + \varphi) = \frac{1}{2}.$$

*Потоком энергии* Ф называется скалярная величина, равная количеству энергии, переносимому волной через выделенную поверхность в единицу времени:

$$\Phi = dE / dt \cdot \qquad (1.159)$$

В системе СИ поток энергии измеряется в ваттах (Вт).

*Плотностью потока энергии волны* $\vec{j}$ называется векторная величина, равная потоку энергии, переносимому через единичную площадку, перпендикулярно направлению распространения волны:

$$\left|\vec{j}\right| = \frac{d\Phi}{dS} = \frac{dE}{dSdt}. \qquad (1.160)$$

Вектор $\vec{j}$ направлен в сторону переноса энергии. В системе СИ плотность потока энергии измеряется в ваттах на квадратный метр (Вт/м$^2$).

Среднее по времени значение плотности потока энергии называется *интенсивностью волны* в данной точке среды.

Пусть плоская волна распространяется со скоростью v. Выделим на пути распространения волны элементарную площадку *dS*, перпендикулярную направлению распространения волны и отстоящую от фронта волны на расстоянии, равном длине волны $\lambda$. Найдем среднее значение плотности потока энергии через выделенную площадку:

$$\left|\left\langle \vec{j} \right\rangle\right| = \frac{dE}{dS \cdot dt} = \frac{\langle u \rangle \cdot dV}{dS \cdot dt} = \frac{\langle u \rangle \cdot dS \cdot \lambda}{dS \cdot T} = \langle u \rangle \mathrm{v}, \qquad (1.161)$$

где $T$ — период колебаний.

Выражение (1.161), записанное в векторной форме:

$$\left\langle \vec{j} \right\rangle = \langle u \rangle \vec{\mathrm{v}}, \qquad (1.162)$$

называют *уравнением Н. Умова.*[1]

Формула (1.162) справедлива для плоской, сферической и цилиндрической волн.

---

[1] Николай Алексеевич Умов (1846–1915) — русский физик.

## § 36. Звуковые волны

*Звуковыми волнами* (звуком) называют упругие волны, распространяющиеся в средах и имеющие частоту в пределах от 20 до 20000 Гц. Если частота упругих волн меньше 20 Гц, то такие волны называют *инфразвуком,* если больше 20 кГц, то — *ультразвуком.* Инфра- и ультразвуки человеческое ухо не слышит. Звуковая волна, распространяясь в среде, переносит энергию. *Интенсивностью звука* $I$ называется физическая величина, равная средней энергии, переносимой звуковой волной за единицу времени сквозь единицу площади поверхности, расположенной нормально к направлению распространения волны:

$$I=E/(St), \qquad (1.163)$$

где $E$ — средняя по времени величина энергии волны; $S$ — площадь поверхности, $t$ — время.

Единица измерения интенсивности звука – ватт на квадратный метр (Вт/м$^2$).

Человеческое ухо имеет различную чувствительность к звукам разных частот. Для каждой частоты существуют наименьшая и наибольшая интенсивности звука, которые воспринимаются человеческим ухом. Минимальную интенсивность называют *порогом слышимости*, а максимальную — *порогом болевого ощущения*.

Графики зависимости этих интенсивностей приведены на рис. 35.




Рис. 35

*Громкость* звука возрастает с увеличением амплитуды колебаний. Уровень громкости звука L, имеющего интенсивность I, оценивается формулой

$$L = 10\lg(I / I_0), \qquad (1.164)$$

где $I_0 = 10^{-12}\, Вт / м^2$ — интенсивность звука на пороге слышимости. Уровень громкости измеряют в децибелах (дБ). Тихий разговор составляет по уровню громкости 40 дБ, крик — 80 дБ, шум реактивного двигателя (120–130) дБ.

Реальные звуки возникают в результате наложения большого числа колебаний разных частот, т. е. обладают *акустическим спектром*. Различают сплошной и линейчатый акустические спектры. При *сплошном спектре* волны частоты простых синусоидальных волн, входящие в ее состав, образуют непрерывную последовательность. Если волна представляет собой набор простых синусоидальных волн с дискретными частотами, то спектр такой волны *является линейчатым*.

Колебания с линейчатым спектром называются *тональными*. Их характеризуют высотой. *Высота* звука определяется наименьшей частотой в спектре. При этом относительная интенсивность других частот (обертонов) определяет *тембр* звука.

Скорость звука в различных средах различна. Так, в воздухе при нормальных условиях она чуть меньше средней скорости теплового движения молекул и составляет 340 м/с, в воде (при 20° С) —1480 м/с, в железе – 5850 м/с.

## ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

**Задача 23**. Частица совершает прямолинейные гармонические колебания по закону синуса. При смещении частицы от положения равновесия на $x_1 = 2{,}6$ см ее скорость $v_1 = 2{,}9$ см/с, а при смещении на $x_2 = 3{,}4$ см скорость частицы $v_2 = 1{,}9$ см/с. Найдите амплитуду и циклическую частоту колебаний частицы.

**Дано:**
$x_1 = 2{,}6$ см
$v_1 = 2{,}9$ см/с
$x_2 = 3{,}4$ см
$v_2 = 1{,}9$ см/с

$A = ?\quad \omega_0 = ?$

**Решение.** По условию задачи запишем два уравнения, используя формулу (1.122) и принимая $\varphi_0 = 0$:

$$x_1 = A\sin\omega_0 t_1, \qquad (1)$$

$$x_2 = A\sin\omega_0 t_2.$$

Найдем скорости колебаний

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= dx_1/dt_1 = A\omega_0\cos\omega_0 t_1, \\ v_2 &= dx_2/dt_2 = A\omega_0\cos\omega_0 t_2. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Представим систему уравнений (1), (2) в виде:

$$x_1/A = \sin\omega_0 t_1, \qquad (3)$$

$$x_2/A = \sin\omega_0 t_2, \qquad (4)$$

$$v_1/A\omega_0 = \cos\omega_0 t_1, \qquad (5)$$

$$v_2/A\omega_0 = \cos\omega_0 t_2. \qquad (6)$$

Уравнения (3) и (5) возведем в квадрат и сложим, аналогичную операцию проделаем с уравнениями (4) и (6):

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{x_1}{A}\right)^2 + \left(\frac{v_1}{A\omega_0}\right)^2 &= \sin^2(\omega_0 t_1) + \cos^2(\omega_0 t_1) = 1 \\ \left(\frac{x_2}{A}\right)^2 + \left(\frac{v_2}{A\omega_0}\right)^2 &= 1. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Решая систему уравнений (7), находим амплитуду

$$A = \sqrt{\frac{v_1^2 x_2^2 - v_2^2 x_2^2}{v_1^2 - v_2^2}}$$

и циклическую частоту

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{v_1^2 - v_2^2}{x_2^2 - x_1^2}}.$$

**Ответ:** A = 3,9 см, $\omega_0 \approx 1 с^{-1}$.

**Задача 24.** Амплитуда гармонических колебаний материальной точки A = = 2см, полная энергия колебаний E = $3 \cdot 10^{-7}$Дж. При каком смещении от положения равновесия на колеблющуюся точку действует сила F = $2{,}25 \cdot 10^{-5}$Н?

**Дано:**
E = $3 \cdot 10^{-7}$Дж
A = $2 \cdot 10^{-2}$м
F = $2{,}25 \cdot 10^{-5}$Н
---
$x$ = ?

**Решение.** Полная энергия гармонических колебаний определяется формулой (1.128):

$$E = \frac{1}{2} m A^2 \omega_0^2, \qquad (1)$$

а ускорение формулой (1.125):

$$a = -\omega_0^2 x.$$

Применив второй закон Ньютона, найдем силу, действующую на точку:

$$F = ma = m\left(-\omega_0^2 x\right). \qquad (2)$$

Произведение $\left(m\omega_0^2\right)$ найдем из уравнения (1) и подставим в уравнение (2):

$$F = -x\left(m\omega_0^2\right) = -x\frac{2E}{A^2}.$$

Знак «–» указывает на то, что квазиупругая сила $F$ направлена противоположно смещению $x$.

По модулю $$x = \frac{FA^2}{2E}.$$

**Ответ:** $x = 1{,}5 \cdot 10^{-2}$м.

**Задача 25.** Амплитуда затухающих колебаний математического маятника за 1 минуту уменьшилась вдвое. Во сколько раз она уменьшится за 3 минуты?

**Дано:**

$\frac{A_n}{A_m} = 2$

$\tau_1 = 60\text{c}$

$\tau_2 = 180\text{c}$

$x = ?$

**Решение.** Амплитуда затухающих колебаний изменяется по закону (1.138): $A = A_0 e^{-\beta t}$. Таким образом, можно записать систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} A_n &= A_0 e^{-\beta t}, \\ A_m &= A_0 e^{-\beta(t+\tau_1)}, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где $\tau_1$ – время, в течение которого амплитуда колебаний уменьшилась вдвое. Разделив в этой системе первое уравнение на второе, получим

$$\frac{A_n}{A_m} = \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+\tau_1)}} = e^{\beta\tau_1},$$

$$2 = e^{\beta\tau_1}. \qquad (2)$$

Прологарифмировав уравнение (2), можно определить коэффициент затухания:

$$\ln 2 = \beta\tau_1, \quad \beta = \frac{\ln 2}{\tau_1}. \qquad (3)$$

Аналогично запишем вторую систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} A_n &= A_0 e^{-\beta t}, \\ A_k &= A_0 e^{-\beta(t+\tau_2)}, \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

где $\tau_2$ – время, за которое амплитуда колебаний уменьшится в $x$ раз. Разделив в системе (4) первое уравнение на второе:

$$\frac{A_n}{A_k} = \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+\tau_2)}} = e^{\beta\tau_2},$$

можно определить:

$$x = e^{\beta\tau_2}. \qquad (5)$$

Из формул (3) и (5) окончательно получим

$$x = e^{\frac{\tau_2 \ln 2}{\tau_1}}.$$

**Ответ:** $x = 8$.

**Задача 26.** В U — образной трубке находится столбик жидкости длиной $l$, отсчитываемой по оси трубки. При кратковременном изменении давления жидкости в одном из колен уровни жидкости сместились и столбик начал колебаться. Определить частоту колебаний. Трением о стенки пренебречь.

**Дано:**
$l$

$\omega_0 = ?$

**Решение.** Колебания жидкости начнутся под действием силы давления столба жидкости высотой $2x$ (см. рисунок).

$$F = pS = 2\rho g x S \qquad (1)$$

где $S$ — площадь поперечного сечения трубки, $p$ — давление, $\rho$ — плотность жидкости. По второму закону Ньютона

$$ma = -2\rho g S x. \qquad (2)$$

Знак минус в уравнении (2) берется потому, что сила давления направлена в сторону, противоположную смещению.

Масса жидкости

$$m = \rho l S. \qquad (3)$$

Тогда из уровня (2) и (3) получим

$$a = -\left(\frac{2 \cdot g}{l}\right)x, \qquad (4)$$

где $a$ — ускорение (вторая производная смещения $x$ по времени $t$). Уравнение можно записать:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{2g}{l}x = 0.$$

Получим дифференциальное уравнение гармонических колебаний, в котором

$$\left(\frac{2g}{l}\right) = \omega_0^2,$$

откуда

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2g}{l}}.$$

**Ответ:** $\omega_0 = \sqrt{\frac{2g}{l}}$.

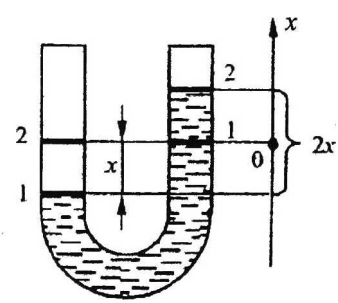



Рис. к задаче 26.

# ЧАСТЬ 2
# ОСНОВЫ МОЛЕКУЛЯРНОЙ ФИЗИКИ И ТЕРМОДИНАМИКИ

## Глава 7
## ОСНОВЫ МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

### § 37. Понятия и определения

В молекулярной физике и термодинамике изучаются процессы, происходящие в макроскопических телах. *Макроскопическими* называются тела, состоящие из большого числа частиц: молекул и атомов.

Существуют два метода исследования макроскопических тел: статистический и термодинамический. *Статистический метод* изучает макроскопические тела, исследуя свойства частиц, из которых они состоят, и их взаимодействия. В этом методе для описания тел используются усредненные значения динамических характеристик частиц.

*Термодинамический метод* базируется на трех опытных законах (началах). При этом методе исследования не используются представления о строении тела и характере движения частиц, входящих в него.

*Термодинамической системой* называется совокупность макроскопических тел, обменивающихся энергией как между собой, так и с внешними телами или системами.

Физические величины, характеризующие термодинамическую систему, называются *параметрами состояния*. Давление, температура, объем, плотность и т. д. являются параметрами состояния системы.

*Температура* — это физическая величина, характеризующая состояние равновесия системы. Понятие температуры имеет смысл только для равновесных состояний. *Равновесным* называется состояние термодинамической системы, имеющей постоянные во времени параметры при неизменных внешних условиях.

Температура в любой части системы, находящейся в равновесном состоянии, одинакова.

В молекулярной физике и термодинамике для измерения температуры пользуются *абсолютной шкалой* (шкалой Кельвина)[1].

Между абсолютной температурой $T$ и температурой $t$, измеряемой по шкале Цельсия, существует линейная связь:

$$T = t + 273 \text{ К}.$$

Температура, равная –273°С (точнее –273,16°С), называется *абсолютным нулем*. Абсолютный нуль — самая низкая температура. В термодинамике доказывается, что охладить тело до абсолютного нуля невозможно.

Термодинамическая система называется *изолированной*, если она не обменивается с внешней средой ни энергией, ни веществом. Термодинамическая изолированная система находится в равновесном состоянии, если параметры системы при постоянных внешних условиях с течением времени не изменяются.

Реальные процессы не являются равновесными, но могут приближаться к ним, если они достаточно медленные.

Переход термодинамической системы из одного состояния в другое называется *термодинамическим процессом*. Термодинамический процесс сопровождается изменением параметров состояния.

## § 38. Основные положения молекулярно-кинетической теории

1. *Любое вещество состоит из мельчайших частиц — молекул и атомов.* Одним из доказательств этого положения является то, что некоторые молекулы можно увидеть в электронный микроскоп.

2. *Молекулы и атомы в веществе находятся в состоянии непрерывного теплового движения*, причем скорость их движения пропорциональна корню квадратному из абсолютной температуры:

$$v \sim \sqrt{T}\ .$$

3. *Между молекулами вещества существуют силы взаимодействия (притяжения $F_п$ и отталкивания $F_о$), называемые молекулярными силами.*

Радиус действия молекулярных сил порядка $10^{-9}$ м.

---

[1] Уильям Томсон (лорд Кельвин) (1824–1907) — английский физик.

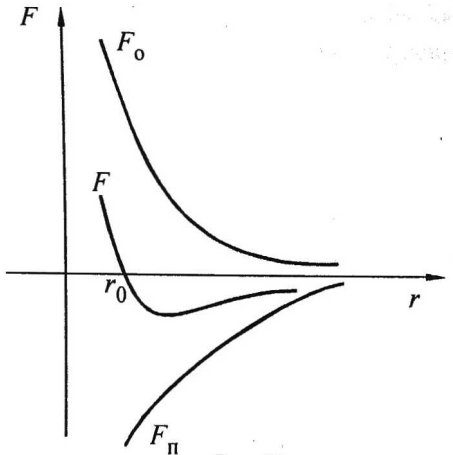


Рис. 36

Силы притяжения с уменьшением расстояния $r$ между молекулами увеличиваются пропорционально $1/r^7$, а силы отталкивания — пропорционально $1/r^{13}$.

На расстоянии $r_0$, примерно равном сумме радиусов двух молекул, $F = 0$, т. к. сила притяжения равна по модулю силе отталкивания.

На расстояниях, превышающих $r_0$, между молекулами действуют силы притяжения, а на расстояниях меньше $r_0$ — силы отталкивания (рис. 36).

Явлениями, подтверждающими основные положения и выводы молекулярно-кинетической теории, являются, например, броуновское движение и диффузия.

## § 39. Количество вещества. Масса и размеры молекул

*Количеством вещества* ν называется физическая величина, равная отношению числа молекул $N$, содержащихся в веществе, к постоянной Авогадро $N_A$:

$$\nu = N/N_A. \qquad (2.1)$$

*Моль* — единица количества вещества, в котором содержится столько же структурных элементов, сколько содержится атомов в 0,012 кг изотопа углерода $^{12}C$.

*В одном моле любого вещества содержится одно и то же число атомов или молекул.* Это число называется *постоянной* или *числом А. Авогадро*[1]*:*

$$N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}.$$

*Молярной массой* называется масса вещества, взятого в количестве одного моля.

Молярная масса равна произведению постоянной Авогадро на массу молекулы $m_0$:

$$\mu = m_0 \cdot N_A. \qquad (2.2)$$

[1] Амедео Авогадро (1776–1856) — итальянский физик.

Единица измерения молярной массы — килограмм на моль (кг/моль).

Число молекул $N$ любого вещества массой $m$ согласно формулам (2.1) и (2.2) равно

$$N = \nu N_A = mN_A/\mu. \qquad (2.3)$$

*Закон Авогадро: моли любых газов при одинаковых температуре и давлении занимают одинаковые объемы.* При нормальных условиях ($p_0$ = = 1,01325 · $10^5$ Па, $T_0$ = 273 К) объем моля равен

$$V_\mu = 22{,}41 \cdot 10^{-3}\ \text{м}^3/\text{моль}.$$

Размеры молекул и атомов очень малы. Оценим размер молекул воды. Допустим, что молекулы плотно прилегают друг к другу и образуют кубическую ячейку. Тогда объем, занимаемый молекулой $V_0 = d^3$, а линейный размер молекулы $d = \sqrt[3]{V_0}$. Один моль воды имеет массу 18 · $10^{-3}$ кг и занимает объем $V_\mu$ = 18 · $10^{-6}$ м$^3$/моль. Разделив объем моля $V_\mu$ на число Авогадро $N_A$, получим объем, занимаемый молекулой:

$$V_0 = V_\mu / N_A \approx 30 \cdot 10^{-30}\ \text{м}^3.$$

Отсюда линейный размер молекулы

$$d = \sqrt[3]{V_0} \approx 0{,}3\ \text{нм}.$$

Молекулы других веществ имеют такой же порядок величины.

## § 40. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеального газа

Газ, состоящий из молекул, размерами и взаимодействием которых можно пренебречь (за исключением моментов столкновений), называется *идеальным.*

Мысленно выделим в идеальном газе цилиндрический объем с площадью оснований $\Delta S$ (рис. 37). Вычислим давление, оказываемое молекулами газа на площадку $\Delta S$. Будем считать, что соударения молекул абсолютно упругие.

В идеальном газе любые направления движения молекул *равновероятны.* Хаотическое движение молекул в выделенном объеме будем рассматривать как движение вдоль координатных осей $x$, $y$, $z$. Вдоль каждой оси движется 1/3 молекул, половина которых, т. е. 1/6 часть, движется в

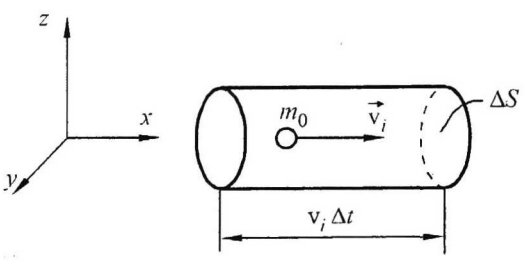



Рис. 37

положительном направлении оси координат, а вторая половина — в противоположном.

Молекула массой $m_0$, двигаясь в положительном направлении оси $x$ со скоростью $v_i$, ударяется о площадку $\Delta S$ и передает ей импульс

$$\Delta p_i = m_0 v_i - (-m_0 v_i) = 2m_0 v_i. \qquad (2.4)$$

За промежуток времени $\Delta t$ о площадку $\Delta S$ ударяется 1/6 часть молекул, которые заключены в объеме цилиндра с площадью оснований $\Delta S$ и образующей, равной $v_i \Delta t$. Число таких молекул

$$N_i = \Delta S\, v_i\, \Delta t\, n / 6, \qquad (2.5)$$

где $n = N / V$ — число молекул в единице объема.

Из уравнений (2.4) и (2.5) найдем величину импульса, передаваемого площадке:

$$\Delta p = \Delta p_i N_i = 2m_0 v_i \Delta S\, v_i \Delta t\, n / 6 = m_0\, n\, v_i^2 \Delta S\, \Delta t / 3. \qquad (2.6)$$

По второму закону Ньютона изменение импульса тела равно импульсу силы $F\Delta t$, т. е.

$$\Delta p = F \Delta t. \qquad (2.7)$$

Так как давление $p = F / \Delta S$, учитывая уравнения (2.6) и (2.7), найдем искомую величину давления газа:

$$p = \Delta p / (\Delta S\, \Delta t) = m_0\, n\, v_i^2 / 3. \qquad (2.8)$$

Из уравнения (2.8) видно, что *давление газа на стенку сосуда определяется величиной импульса, приходящегося в единицу времени на единицу площади, и зависит от числа ударов молекул о стенку.*

Молекулы газа в рассматриваемом объеме движутся с разными скоростями: $v_1, v_2, \ldots, v_N$, поэтому в уравнении (2.8) вместо скорости $v_i$ следует записывать среднюю квадратичную скорость:

$$\langle v \rangle_{кв} = \sqrt{(v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_N^2)/N} = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{N} v_i^2\right)/N}, \qquad (2.9)$$

которая определяет коллективное действие молекул.

Из уравнений (2.8) и (2.9) получим

$$p = n m_0 \langle v \rangle^2_{кв} / 3. \qquad (2.10)$$

Уравнение (2.10) можно представить в виде

$$pV = \frac{2}{3}\langle E \rangle, \qquad (2.11)$$

где $\langle E \rangle = m\langle v \rangle^2_{кв} / 2$ — кинетическая энергия поступательного движения всех молекул, $m$ — масса газа.

Выражение (2.11) называется *основным уравнением молекулярно-кинетической теории идеального газа: Произведение давления идеального газа на его объем равно 2/3 кинетической энергии поступательного движения молекул газа.*

## § 41. Уравнение состояния идеального газа

Уравнение, определяющее связь между параметрами состояния *p, V, T,* называется *уравнением состояния.*

Опытным путем была установлена зависимость

$$p\,V / T = \text{const}. \qquad (2.12)$$

Уравнение (2.12) называют *законом Клапейрона*[1]. Используя данное уравнение для одного моля газа $V_\mu$, взятого при нормальных условиях ($p_0$ = = 101,325 кПа, $T_0$ = 273 К, $V_{0\mu} = 22{,}41 \cdot 10^{-3}$ м$^3$/моль), можно записать:

$$\text{const} = p_0 V_{0\mu} / T_0.$$

Обозначив постоянную величину за $R$ и подставив в уравнение (2.12) параметры газа при нормальных условиях, найдем ее значение:

$$R = p_0 V_{0\mu} / T_0 = 8{,}31 \text{ Дж/(моль·К)}.$$

Величина $R$ называется *универсальной газовой постоянной.*

Таким образом, для одного моля газа можно записать: $pV_\mu = RT$. Умножив данное уравнение на число молей $\nu = m / \mu$, получим уравнение состояния для произвольной массы газа — *уравнение Клапейрона-Менделеева*[2].

$$pV = mRT/\mu \qquad (2.13)$$

или

$$pV = \nu RT. \qquad (2.14)$$

Уравнение (2.14) применимо и для смеси газов, то есть является более общим, чем уравнение (2.13).

Поскольку отношение $m/V$ есть плотность газа $\rho$, то уравнение (2.13) можно записать:

$$p = \rho RT/\mu. \qquad (2.15)$$

---

[1] Б. П. Клапейрон (1799–1864) — французский физик.

[2] Дмитрий Иванович Менделеев (1834–1907) — русский химик.

Если умножить и поделить правую часть уравнения (2.13) на число Авогадро и учесть, что $R/N_A = k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К — постоянная Больцмана, а выражение $mN_A / V_\mu = n$ — число молекул в единице объема, то получим уравнение состояния идеального газа в виде

$$p = nkT. \tag{2.16}$$

Запишем уравнение состояния (2.13) для одного моля газа:

$$pV_\mu = RT.$$

Подставив вместо $p$ его значение из уравнения (2.11) $p = 2n\langle E\rangle / 3$ и расписав $n = N_A / V_\mu$, получим выражение для средней кинетической энергии поступательного движения одной молекулы идеального газа:

$$\langle E_к \rangle_o = 3kT/2. \tag{2.17}$$

Как видно из уравнения (2.17), *средняя кинетическая энергия движения молекулы прямо пропорциональна абсолютной температуре.*

*Закон Д. Дальтона.*[1] Пусть имеется смесь газов:

$$n = n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_N, \tag{2.18}$$

где $n$ число молекул в единице объема смеси, $n_1, n_2, \ldots n_N$ — число молекул в единице объема первого, второго, ... $N$-го газов, составляющих смесь.

Используя уравнение (2.16) и (2.18), запишем:

$$p = nkT = kT(n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_N) =$$

$$= kTn_1 + kTn_2 + kTn_3 + \ldots + kTn_N = p_1 + p_2 + p_3 + \ldots p_N,$$

где $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_N$ — парциальные давления газов в смеси.

*Парциальным* называется давление, которое производил бы газ, входящий в смесь, если бы он один занимал объем, в котором находится смесь, при той же температуре. Таким образом, *давление смеси газов равно сумме парциальных давлений, составляющих данную смесь (закон Дальтона).*

## § 42. Закон распределения молекул по скоростям (закон Д. Максвелла)[2]

Молекулы газа, испытывая взаимные столкновения, имеют различные скорости движения. Однако найти число молекул, обладающих определенной скоростью, невозможно, так как число различных значений скоростей

[1] Дж. Дальтон (1766–1844) — английский ученый.

[2] Джеймс Клерк Максвелл (1831–1879) — великий английский физик.

бесконечно велико, а число молекул конечно. Поэтому в статистической физике задача ставится по-иному: определяется число молекул, скорости которых находятся в заданном интервале значений скоростей.

Выберем прямоугольную систему координат, вдоль осей которой отложим проекции скоростей молекул $v_x, v_y, v_z$. Получим трехмерное пространство скоростей (рис. 38). Всякой молекуле в этом пространстве скоростей соответствует точка, которая изображает ее скорость $\mathrm{v} = (v_x, v_y, v_z)$. Интервалу $(v_x, v_x + dv_x)$, $(v_y, v_y + dv_y)$, $(v_z, v_z + dv_z)$ соответствует элементарный объем $dV = dv_x dv_y dv_z$ пространства скоростей, имеющий форму куба. Число точек $dN$ в объеме $dV$ пространства скоростей равно этому объему, умноженному на плотность точек внутри него. Обозначим через $Nf(v_x, v_y, v_z)$ число точек, приходящихся на единицу объема пространства скоростей (среднюю плотность точек). Здесь $N$ — общее число молекул газа. Тогда

$$dN = Nf(v_x, v_y, v_z)dv_x dv_y dv_z . \qquad (2.19)$$

Другими словами, $dN$ — это число молекул, проекции скоростей которых лежат в интервале значений от $v_x$ до $v_x + dv_x$, от $v_y$ до $v_y + dv_y$, от $v_z$ до $v_z + dv_z$.

Из математики известно, что вероятность какого-либо события $dP$ равна отношению числа событий с ожидаемым исходом к общему числу возможных событий, если общее число событий сколь угодно велико.

Вероятность того, что проекции скоростей находятся в выбранном интервале скоростей, равна отношению числа молекул с заданным значением скорости к общему числу молекул, т. е.

$$dP = \frac{dN}{N} = f(v_x, v_y, v_z)dv_x dv_y dv_z ,$$

где $f(v_x, v_y, v_z)$ — *функция распределения молекул по скоростям*, представляющая собой *плотность вероятности.* Под плотностью вероятности понимается отношение вероятности к единичному объему пространства скоростей.

Согласно Максвеллу функция распределения $f(v_x, v_y, v_z)$ определяется отношением кинетической энергии молекулы

$$E_o = \frac{m_o v^2}{2} = \frac{m_0}{2}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$$

к средней энергии его теплового движения $\langle E \rangle = \kappa T$, и имеет вид

$$f(\mathrm{v}_x, \mathrm{v}_y, \mathrm{v}_z) == A \cdot e^{-\frac{m_o \mathrm{v}^2}{2\kappa T}},$$

где $m_0$ — масса молекулы,

$T$ — температура газа,

$\kappa$ — постоянная Больцмана,

$e$ — основание натурального логарифма.

Постоянная величина $A$, не зависящая от скорости, находится из условия нормировки

$$\int_0^\infty f(\mathrm{v}_x, \mathrm{v}_y, \mathrm{v}_z) d\mathrm{v} = 1.$$

По расчетам $A = \left( \frac{m_o}{2\pi\kappa T} \right)^{3/2}$.

Вычислив постоянную $A$, запишем уравнение для среднего числа частиц, находящихся в заданном интервале:

$$dN = N \left( \frac{m_0}{2\pi\kappa T} \right)^{3/2} e^{\frac{m_0 \mathrm{v}^2}{2\kappa T}} d\mathrm{v}_x d\mathrm{v}_y d\mathrm{v}_z. \qquad (2.20)$$

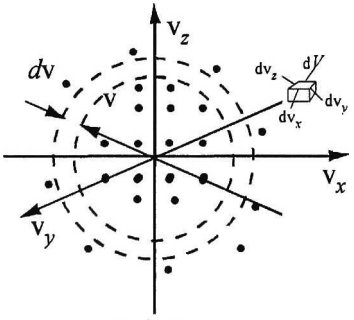


Рис. 38

На рис. 38 штриховыми линиями выделен шаровой слой радиуса v и толщиной $dv$. Найдем число молекул, находящихся в шаровом слое и обладающих скоростями, модули которых лежат в интервале от v до v + $dv$.

Для этого в выражении (2.19) объем $dV = d\mathrm{v}_x d\mathrm{v}_y d\mathrm{v}_z$ заменим на объем шарового слоя $4\pi\mathrm{v}^2 d\mathrm{v}$, получим

$$dN = Nf(\mathrm{v}) 4\pi\mathrm{v}^2 d\mathrm{v} = N \left( \frac{m_o}{2\pi\kappa T} \right)^{3/2} e^{-\frac{m_o \mathrm{v}^2}{2\kappa T}} 4\pi\mathrm{v}^2 d\mathrm{v}.$$

Отсюда находится функция распределения молекул по скоростям — *распределение Максвелла:*

$$f(\mathrm{v}) = \frac{dN}{Ndv} = 4\pi\left(\frac{m_o}{2\pi\kappa T}\right)^{3/2} e^{-\frac{m_o \mathrm{v}^2}{2\kappa T}} \mathrm{v}^2. \qquad (2.21)$$

Полученное распределение молекул по скоростям является статистическим законом, который реализуется в определенных условиях.

Из уравнения (2.21) видно, что вид функции зависит от температуры и рода газа. Отношение $\frac{dN}{N}$ находится из формул (2.20) и (2.21):

$$\frac{dN}{N} = 4\pi\left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2} \cdot e^{-\frac{m_0 \mathrm{v}^2}{2\kappa T}} \cdot \mathrm{v}^2 d\mathrm{v}. \qquad (2.22)$$

Графики функций $f(\mathrm{v})$ для различных температур показаны на рис. 39. При повышении температуры $T_3 > T_2 > T_1$ вся кривая смещается вправо и становится положе, т. е. увеличивается число молекул с большими скоростями. Функция обращается в ноль при $\mathrm{v} = 0$ и при $\mathrm{v} \to \infty$: в газе отсутствуют неподвижные молекулы и нет молекул с бесконечно большими скоростями. Функция $f(\mathrm{v})$ имеет максимум при скорости, равной $\mathrm{v}_в$, которая называется *наиболее вероятной скоростью*. Наиболее вероятная скорость определяется из условия экстремума функции $f(\mathrm{v})$:

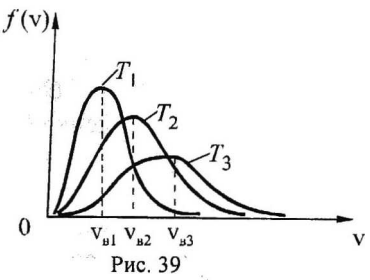


Рис. 39

$$\frac{d}{d\mathrm{v}}\left(\mathrm{v}^2 e^{-\frac{m_0 \mathrm{v}^2}{2kT}}\right) = 2\mathrm{v}\left(1 - \frac{m_0 \mathrm{v}^2}{2kT}\right) \cdot e^{-\frac{m_0 \mathrm{v}^2}{2kT}} = 0.$$

Значения $\mathrm{v} = 0$ и $\mathrm{v} = \infty$ соответствуют минимуму функции. Для наиболее вероятной скорости получим

$$\mathrm{v}_в = \sqrt{2kT/m_0} = \sqrt{2RT/\mu}. \qquad (2.23)$$

Следует заметить, что количество молекул в рассматриваемом объеме не остается постоянным, а испытывает колебания около некоторого среднего значения. Такие случайные, хаотические изменения числа молекул и других физических величин называются *флуктуациями*. Флуктуациями плотности воздуха в атмосфере Земли объясняется, например, голубой цвет неба.

Используя распределение Максвелла (2.22), можно найти среднюю арифметическую скорость движения молекул:

$$\langle v \rangle = \sqrt{8kT/(\pi m_0)} = \sqrt{8RT/(\pi\mu)}, \qquad (2.24)$$

среднюю квадратичную скорость:

$$\langle v \rangle_{кв} = \sqrt{3kT/m_0} = \sqrt{3RT/\mu}. \qquad (2.25)$$

Введем обозначение: $u = v/v_в$, тогда $du = \frac{dv}{v_в}$, а $v^2 = u^2 v_в =$

$= 2RTu^2/m_0$. Подставляя данные выражения в формулу (2.22), получим *закон распределения Максвелла в приведенном виде:*

$$\frac{dN}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} u^2 du. \qquad (2.26)$$

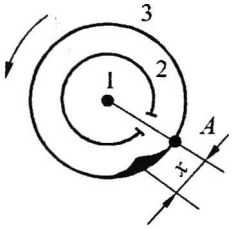


Рис. 40

*Опыт О. Штерна.* Опытная проверка распределения Максвелла и определение скоростей движения молекул были выполнены физиком Штерном в 1920 году. На рис. 40 показана схема экспериментальной установки. Платиновая проволока *1*, натянутая вдоль оси цилиндра *2*, покрывалась тонким слоем серебра. По проволоке пропускался электрический ток. При этом проволока нагревалась, атомы серебра испарялись и, вылетая через щель в цилиндре *2*, попадали на внутреннюю поверхность цилиндра *3*, давая на ней изображение щели *A*. Воздух из цилиндров заранее откачивался. При вращении цилиндров *2* и *3* вокруг общей оси атомы серебра осаждались на некотором расстоянии *x* от точки *A*, давая размытое изображение щели.

По толщине слоя серебра, осажденного на цилиндре *2*, проводилась оценка распределения молекул по скорости.

Зная радиусы цилиндров *2* и *3*, угловую скорость их вращения, измеряя температуру проволоки и расстояние *x*, рассчитывались скорости движения атомов серебра.

Опыт Штерна подтвердил достоверность распределения Максвелла.

### § 43. Барометрическая формула. Распределение Л. Больцмана

Мысленно выделим в атмосфере Земли вертикальный столб (рис. 41). Молекулы воздуха в выделенном объеме, двигаясь хаотически, испытывают воздействие гравитационного поля Земли. В результате чего давление газа с высотой уменьшается. Предположим, что плотность воздуха

$\rho = \text{const}$, температура газа постоянная, а гравитационное поле однородно. Пусть на высоте $h = 0$ давление $p_0$, на высоте $h$ давление $p$, на высоте $h + dh$ давление равно $p - dp$ (так как давление с высотой убывает).

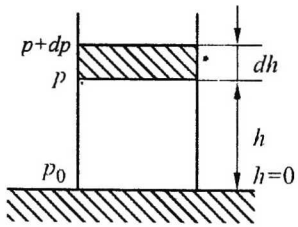


Рис. 41

По закону Б. Паскаля[1] давление $dp$ в тонком слое воздуха равно

$$dp = -\rho g\, dh. \qquad (2.27)$$

Из уравнения состояния (2.15) найдем плотность газа: $\rho = p\mu/(RT)$ и, подставив в формулу (2.27), получим

$$dp = -\frac{p\mu g}{RT} dh,$$

откуда после разделения переменных запишем

$$-\frac{dp}{p} = \frac{\mu g}{RT} dh.$$

Возьмем интеграл от полученного выражения:

$$-\int_{p_0}^{p} \frac{dp}{p} = \frac{\mu g}{RT} \int_0^h dh, \qquad \ln\frac{p}{p_0} = -\frac{\mu g}{RT} h$$

или

$$p = p_0 e^{-\frac{\mu g h}{RT}}. \qquad (2.28)$$

Уравнение (2.28) называется *барометрической формулой*. С помощью барометрической формулы можно определить давление атмосферы на известной высоте $h$, зная температуру и давление у поверхности Земли. В авиации эта формула используется для определения высоты полета

$$h = \frac{RT \ln p_0 / p}{\mu g}.$$

Воспользовавшись уравнением (2.16), барометрическую формулу приведем к виду

$$n = n_0 e^{-\mu g h/(RT)}, \qquad (2.29)$$

[1] Блез Паскаль (1623–1662) — французский ученый.

где $n$ и $n_0$ концентрации молекул на высоте $h$ и у поверхности Земли соответственно.

По формуле (2.2) $\mu = m_0 N_A$, а $R = kN_A$, то

$$n = n_0 e^{-m_0 gh/(kT)}. \qquad (2.30)$$

Так как $m_0 gh = E_p$ — потенциальная энергия в гравитационном поле, то формулу (2.30) запишем в виде

$$n = n_0 e^{-E_p/(kT)}.$$

Получили распределение молекул (частиц) во внешнем потенциальном поле, называемое *распределением Больцмана*[1]: *в состоянии теплового равновесия плотность газа (концентрация молекул), подверженного действию внешнего поля, больше там, где меньше потенциальная энергия его молекул.*

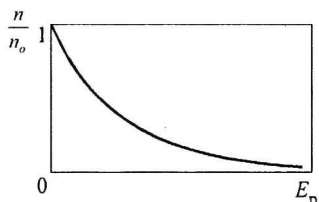


Рис. 42

Больцмановское распределение молекул по энергиям изображено графически на рис. 42.

Распределение Больцмана является универсальным законом. Оно справедливо для любых частиц, находящихся в потенциальном силовом поле.

[1] Людвиг Больцман (1844–1906) — австрийский физик.

## ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

**Задача 27.** Посередине откачанной и запаянной с обеих сторон горизонтальной трубки длиной 1 м находится столбик ртути длиной 20 см. Если трубку поставить вертикально, то столбик ртути переместится вниз на расстояние 10 см. До какого давления откачана трубка?

**Дано:**

$L = 1\,\text{м}$

$L_0 = 0{,}2\,\text{м}$

$\Delta L = 0{,}1\,\text{м}$

$p_1 = ?$

**Решение.** На рисунке показаны два положения трубки:

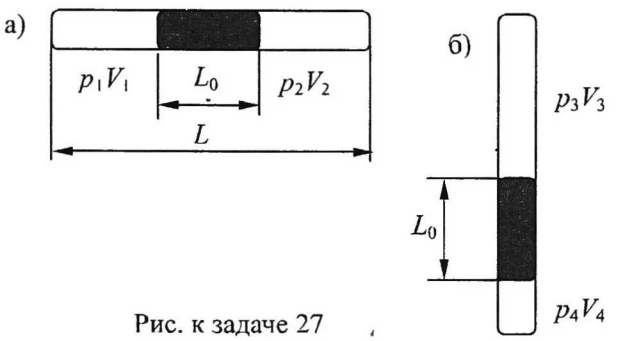



Рис. к задаче 27

а) горизонтальное, б) вертикальное.

Температура воздуха не меняется, т. е. имеем дело с изотермическим процессом ($T$ = const):

$(p_1V_1)$ и $(p_2V_2)$ — начальные состояния газа (рис. а);

$(p_3V_3)$ и $(p_4V_4)$ — соответственно конечные состояния газа (рис. б).

По закону Бойля–Мариотта запишем:

$$(p_1V_1) = (p_3V_3), \tag{1}$$

$$(p_2V_2) = (p_4V_4). \tag{2}$$

В положении (а) ртуть находится в равновесии, расположена симметрично относительно трубки, поэтому можно записать еще одно уравнение:

$$(p_1V_1) = (p_2V_2). \tag{3}$$

Тогда

$$(p_3V_3) = (p_4V_4), \tag{4}$$

где $$V_3 = \left(\frac{L - L_0}{2} + \Delta L\right) S = 0{,}5S;$$

$$V_4 = \left(\frac{L - L_0}{2} - \Delta L\right) S = 0{,}3S,$$

где $V$ — объем трубки, $S$ — площадь ее сечения.

Давление $p_4$ равно сумме давлений: $p_3$, создаваемого верхним столбиком воздуха (рис. б), и давления столбика ртути высотой $L_0$:

$$p_4 = p_3 + \rho g L_0,$$

где ρ — плотность ртути.

Подставим $V_3$, $V_4$ и $p_4$ в уравнение (4):

$$p_3 0{,}5S = (p_3 + \rho g L_0) 0{,}3S.$$

Откуда получим

$$p_3 = \frac{3}{2} \rho g L_0. \qquad (5)$$

По формуле (1) определим:

$$p_1 = \frac{p_3 V_3}{V_1}, \qquad (6)$$

где $$V_1 = \frac{L - L_0}{2} S = 0{,}4S.$$

Подставляя $p_3$, $V_3$, $V_1$ в уравнение (6), вычислим первоначальное давление:

$$p_1 = \left(\frac{15}{8}\right) \rho g L_0,$$

$$p_1 = \left(\frac{15}{8}\right) \cdot 13{,}6 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 0{,}2 = 0{,}05 \cdot 10^6,$$

$$[p] = \left[\frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot \text{м}\right] = \left[\frac{\text{Н}}{\text{м}^2}\right] = \text{Па}.$$

**Ответ:** $p_1 = 0{,}05$ МПа.

**Задача 28.** В баллоне емкостью 110 л помещено $m_1 = 0{,}8$ г водорода и $m_2 = 1{,}6$ г кислорода. Определить давление смеси на стенки сосуда, если температура окружающей среды $t = 27^\circ\text{C}$.

**Дано:**

$V = 110 \cdot 10^{-3}$ м$^3$

$m_1 = 0{,}8 \cdot 10^{-3}$ кг

$m_2 = 1{,}6 \cdot 10^{-3}$ кг

$T = 273 + 27 = 300$ К

$p_{см} = ?$

**Решение.** Согласно закону Дальтона давление смеси равно сумме парциальных давлений:

$$p_{см} = p_1 + p_2 .$$

Из уравнения (2.13) Менделеева–Клапейрона найдем $p_1$ — парциальное давление водорода:

$$p_1 = \frac{m_1}{V\mu_1} RT \qquad (1)$$

и $p_2$ — парциальное давление кислорода:

$$p_2 = \frac{m_2}{V\mu_2} RT . \qquad (2)$$

Молярные массы водорода $\mu_1 = 2 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$, кислорода $\mu_2 = 32 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$. Используя уравнения (1) и (2), получим:

$$p_{см} = \frac{RT}{V}\left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2}\right),$$

$$[p] = \left[\frac{\text{Дж}}{(\text{моль} \cdot \text{К})} \cdot \text{К} \cdot \frac{1}{\text{м}^3} \cdot \text{моль}\right] = \left[\frac{\text{Н}}{\text{м}^2}\right] = \text{Па} .$$

Произведем вычисления:

$$p_{см} = \frac{8{,}31 \cdot 300}{110 \cdot 10^{-3}}\left(\frac{0{,}8 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-3}} + \frac{1{,}6 \cdot 10^{-3}}{32 \cdot 10^{-3}}\right) = 1{,}02 \cdot 10^4 .$$

**Ответ:** $1{,}02 \cdot 10^4$ Па.

**Задача 29.** Азот находится под давлением $p = 1$ атм при температуре $T =$ $= 300$ К. Найти относительное число молекул азота, модули скоростей которых лежат в интервале скоростей от $\langle \mathrm{v} \rangle$ до $\langle \mathrm{v} \rangle + d\mathrm{v}$, где $d\mathrm{v} = 1 \frac{\text{м}}{\text{с}}$. Внешние силы отсутствуют.

**Дано:**

$p = 10^5$ Па

$T = 300$ К

$d\mathrm{v} = 1$ м/с

$dN/N = ?$

**Решение.** При давлении $p = 1$ атм и температуре $T =$ $= 300$ К азот можно считать идеальным газом. В отсутствии внешних сил молекулы идеального газа подчиняются закону распределения Максвелла (2.21):

$$f(\mathbf{v}) = \frac{dN}{Nd\mathrm{v}} = 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \mathrm{v}^2 \cdot e^{-\frac{m_0 \mathrm{v}^2}{2 \cdot kT}}.$$

Таким образом, относительное число молекул азота, модули скоростей которых лежат в интервале скоростей $\langle \mathrm{v} \rangle$ до $\langle \mathrm{v} \rangle + d\mathrm{v}$, можно определить по формуле (2.22)

$$\frac{dN}{N} = 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi\, kT}\right)^{\frac{3}{2}} \mathrm{v}^2 \cdot e^{-\frac{m_0 \cdot \mathrm{v}^2}{2kT}} \cdot d\mathrm{v}. \qquad (1)$$

Выражение (1) справедливо, если интервал скоростей $d\mathrm{v}$ столь мал, что изменением функции распределения $f(\mathrm{v})$ на этом интервале скоростей можно пренебречь, считая ее приближенно постоянной. В нашем случае интервал $d\mathrm{v} = 1$ м/с мал по сравнению со значением средней арифметической скорости (2.24):

$$\langle \mathrm{v} \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} \approx 475 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Подставив в (1) значение средней арифметической скорости (2.24), получаем решение задачи в общем виде:

$$\frac{dN}{N} = \frac{8\sqrt{2}}{\pi} \left(\frac{m_0}{\pi kT}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{4}{\pi}} \cdot d\mathrm{v}. \qquad (2)$$

Массу молекулы азота определим по формуле

$$m_0 = \frac{\mu}{N_A},$$

где $\mu = 28 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$; $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}\,\text{моль}^{-1}$.

Произведя вычисления по формуле (2), получим

$$\frac{dN}{N} = 1{,}9 \cdot 10^{-3}.$$

**Ответ:** 0,19 %.

**Задача 30.** Барометр в кабине летящего самолета все время показывает одинаковое давление $p = 80\,\text{кПа}$, благодаря чему летчик считает высоту полета $h$ неизменной. Однако температура воздуха изменилась на $\Delta T = 1\,\text{K}$. Какую ошибку $\Delta h$ в определении высоты допустил летчик? Считать, что температура не зависит от высоты и что у поверхности Земли давление $p_0 = 100\,\text{кПа}$.

**Дано:**

$p_0 = 10^5\,\text{Па}$

$p = 8 \cdot 10^4\,\text{Па}$

$\Delta T = 1\,\text{K}$

$\mu = 29 \cdot 10^{-3}\,\text{кг/моль}$

---

$\Delta h = ?$

**Решение.** Воспользуемся барометрической формулой (2.28):

$$p = p_0 \cdot e^{-\frac{\mu g h}{RT}}.$$

Барометр в самолете может показывать неизменное давление $p$ при различных температурах $T_1$ и $T_2$ за бортом только в том случае, если самолет находится на различных высотах $h_1$ и $h_2$. Запишем барометрическую формулу для этих двух случаев:

$$\begin{aligned} p &= p_0 \cdot e^{-\frac{\mu g h_1}{RT_1}}, \\ p &= p_0 \cdot e^{-\frac{\mu g h_2}{RT_2}}. \end{aligned} \qquad (1)$$

Найдем отношение давлений $\frac{p_0}{p}$ в уравнениях (1), и обе части полученных равенств прологарифмируем:

$$\ln\frac{p_0}{p}=\frac{\mu g h_1}{RT_1},$$
$$\ln\frac{p_0}{p}=\frac{\mu g h_2}{RT_2}. \qquad (2)$$

Из соотношений (2) выразим высоты $h_1$ и $h_2$ и найдем их разность:

$$\Delta h = h_2 - h_1 = \frac{R\ln\left(\frac{p_0}{p}\right)}{\mu g}(\Delta T).$$

Произведем вычисления:

$$\Delta h = \frac{8{,}3\cdot\ln\left(\frac{10^5}{8\cdot10^4}\right)}{29\cdot10^{-3}\cdot10}\cdot 1 = 6{,}5.$$

Сделаем проверку размерности:

$$[\Delta h]=\frac{[R]\cdot[T]}{[\mu]\cdot[g]}=\frac{\frac{\text{Дж}}{(\text{моль}\cdot\text{К})}\cdot\text{К}}{\frac{\text{кг}}{\text{моль}}\cdot\frac{\text{м}}{\text{с}^2}}=\frac{\text{Дж}\cdot\text{К}\cdot\text{моль}\cdot\text{с}^2}{\text{моль}\cdot\text{К}\cdot\text{кг}\cdot\text{м}}=\frac{\text{Дж}}{\text{Н}}=\text{м}.$$

**Ответ:** $\Delta h$ = 6,5 м.

# Глава 8
# Явления переноса в газах

## § 44. Средняя длина свободного пробега молекул

Молекулы газа, находясь в тепловом хаотическом движении, непрерывно сталкиваются друг с другом. Под *столкновением* молекул понимается процесс, при котором скорости движения молекул изменяются по модулю и по направлению. Кратчайшее расстояние между центрами молекул при их столкновении называется *эффективным диаметром молекул* $\sigma$.

От одного столкновения до другого молекулы проходят некоторое расстояние, называемое *длиной свободного пробега* молекулы $\lambda$. Так как эти расстояния различны, то принято говорить о *средней длине свободного пробега молекулы* $\langle\lambda\rangle$.

Пусть молекулы представляют собой шарики с диаметром, равным $\sigma$. Мысленно выделим в газе цилиндрический объем с радиусом $r = \sigma$ и длиной образующей, равной средней арифметической скорости движения молекул $\langle v\rangle$ (рис. 43). Допустим, что все молекулы в выделенном объеме неподвижны и только одна молекула движется по оси цилиндра со скоростью $\langle v\rangle$.

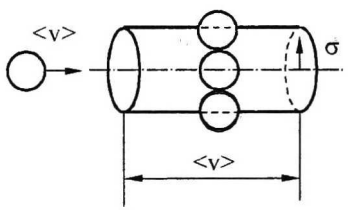


Рис. 43

За 1 секунду эта молекула пройдет путь, равный $\langle v\rangle$. Тогда объем выделенного цилиндра $V = \pi\sigma^2\langle v\rangle$. Движущаяся молекула ударит те молекулы, центры которых лежат в выделенном объеме, т. е. $\langle z\rangle = \pi\sigma^2\langle v\rangle n$, где $n$ — число молекул в единице объема, а $\langle z\rangle$ — среднее число столкновений молекулы в единицу времени. Поскольку реально все молекулы движутся, то вместо $\langle v\rangle$ в полученное выражение следует подставить $v_{отн} = \sqrt{2}\langle v\rangle$, т. е.

$$\langle z\rangle = \sqrt{2}\pi\sigma^2\langle v\rangle n. \qquad (2.31)$$

Разделив средний путь, проходимой молекулой за 1 секунду, на число столкновений $\langle z\rangle$, получим среднюю длину свободного пробега

$$\langle\lambda\rangle = \frac{\langle v\rangle}{\langle z\rangle} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 n}. \qquad (2.32)$$

Найдем $n$ из уравнения состояния (2.16) и подставим его значение в формулу (2.32):

$$n = p/(kT),$$

$$\langle\lambda\rangle = kT/\left(\sqrt{2}\pi\sigma^2 p\right). \qquad (2.33)$$

Как видно из выражения (2.33), с увеличением температуры газа $\langle\lambda\rangle$ тоже возрастает, так как увеличивается число молекул с большими скоростями. С ростом давления $\langle\lambda\rangle$ уменьшается, поскольку возрастает число соударений молекул.

## § 45. Опытные законы явлений переноса

Особые *необратимые* процессы, возникающие в термодинамически неравновесных системах, называются явлениями *переноса.* К ним относятся: *диффузия* (перенос массы), *теплопроводность* (перенос энергии) и *вязкость* или *внутреннее трение* (перенос импульса).

1. *Диффузией* называется явление проникновения соприкасающихся веществ друг в друга. Процесс диффузии возникает в веществе — газе, жидкости или твердом теле.

Для однородного газа в одномерном процессе явление диффузии описывается законом А. Фика[1]:

$$dm = -D\frac{d\rho}{dx}dSdt, \qquad (2.34)$$

где $dm$ — масса газа, переносимого за время $dt$ через площадку $dS$ в направлении нормали $x$ к площадке, $d\rho/dx$ — градиент плотности, $D$ — коэффициент диффузии. Знак минус в уравнении (2.34) показывает, что перенос массы происходит в направлении убывания плотности, т. е. направление переноса массы и направление градиента плотности противоположны.

Молекулярно-кинетическая теория газов для коэффициента диффузии дает следующее выражение:

$$D = \frac{1}{3}\langle\lambda\rangle\langle v\rangle.$$

[1] Адольф Фик (1829–1901) — немецкий ученый.

Так как $\langle\lambda\rangle = kT/\left(\sqrt{2}\pi\sigma^2 p\right)$, а $\langle v\rangle = \sqrt{8RT/(\pi\mu)}$, получаем, что коэффициент диффузии $D \sim T^{3/2}/\left(p\sqrt{\mu}\right)$. Таким образом, с увеличением температуры диффузия в газах ускоряется, с ростом давления — замедляется. Диффузия в газах с тяжелыми молекулами протекает медленнее.

2. *Теплопроводностью* называется явление переноса внутренней энергии из одного слоя газа в другой. Процесс теплопроводности возникает при наличии разности температур в различных слоях газа.

Для одномерного процесса справедлив закон Ж. Фурье[1]:

$$dQ = -\gamma \frac{dT}{dx} dS\, dt, \tag{2.35}$$

где $dQ$ — количество энергии, переносимое за время $dt$ через площадку $dS$ в направлении нормали $x$ к этой площадке в сторону уменьшения температуры; $\gamma$ — коэффициент теплопроводности, $dT/dx$ — градиент температуры. Знак минус показывает, что направление переноса энергии противоположно направлению градиента температуры ($\frac{dT}{dx}$ направлен в сторону увеличения $T$).

Из молекулярно-кинетической теории для коэффициента теплопроводности можно получить следующее выражение:

$$\gamma = \frac{1}{3}\langle\lambda\rangle\langle v\rangle c_v \rho,$$

где $\rho$ — плотность газа, $c_v$ — удельная теплоемкость газа при постоянном объеме. Анализ данного выражения показывает, что с увеличением температуры теплопроводность газа возрастает и не зависит от давления.

3. *Внутреннее трение (вязкость)* возникает между двумя слоями газа или жидкости, перемещающимися параллельно друг другу с разными по модулю скоростями. Причиной внутреннего трения в газах является перенос импульса из одного слоя в другой.

В случае одномерного процесса явление вязкости описывается законом И. Ньютона:

$$dF = \eta \frac{du}{dx} dS, \tag{2.36}$$

---

[1] Жан Батист Жозеф Фурье (1768–1830) — французский ученый.

где $dF$ — сила внутреннего трения, действующая на площадку $dS$, $du/dx$ — градиент скорости движения слоев в направлении $x$, перпендикулярном площадке $dS$, $\eta$ — коэффициент динамической вязкости.

Согласно молекулярно-кинетической теории

$$\eta = \frac{1}{3}\langle\lambda\rangle\langle v\rangle\rho,$$

где $\langle v\rangle$ — средняя скорость теплового движения молекул, $\langle\lambda\rangle$ — средняя длина свободного пробега молекул, $\rho$ — плотность газа.

Коэффициент динамической вязкости не зависит от давления газа. Вязкость газов растет с повышением температуры пропорционально $\sqrt{T}$.

**Примечание.** Вязкость жидкости с увеличением температуры уменьшается. В жидкости вязкость определяется силами взаимодействия молекул.

Коэффициенты $D$, $\gamma$ и $\eta$ связаны соотношениями $\eta = \rho D$, $\gamma = \eta c_v$.

По численным значениям коэффициентов переноса можно приблизительно оценить среднюю длину свободного пробега молекул газа при различных условиях.

## ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

**Задача 31.** При температуре 0° С и некотором давлении средняя длина свободного пробега молекул кислорода равна $9{,}5\cdot10^{-8}$ м. Чему равно среднее число столкновений в 1 секунду молекул кислорода, если сосуд откачать до 0,01 первоначального давления? Температура остается неизменной.

**Дано:**

$T = 273\,\text{K}$

$\langle\lambda_1\rangle = 9{,}5\cdot10^{-8}\,\text{м}$

$p_2 = 0{,}01\,p_1$

---

$\langle z\rangle = ?$

**Решение.** Среднее число столкновений в секунду молекул кислорода находится по формуле

$$\langle z\rangle = \frac{\langle \text{v}\rangle}{\langle\lambda\rangle}, \qquad (1)$$

где $\langle \text{v}\rangle = \sqrt{\dfrac{8RT}{\pi\mu}}$;

$$\langle\lambda\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 n}. \qquad (2)$$

Запишем среднюю длину свободного пробега $\langle\lambda\rangle$ для двух состояний. Для этого из формулы (2.16) найдем число молекул в единице объема $n$ и подставим в уравнение (2):

$$\langle\lambda_1\rangle = \frac{kT_1}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 p_1}, \qquad (3)$$

$$\langle\lambda_2\rangle = \frac{kT_1}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 p_2}. \qquad (4)$$

Разделив уравнение (3) на уравнение (4), получим

$$\langle\lambda_2\rangle = \langle\lambda_1\rangle\cdot\left(\frac{p_1}{p_2}\right).$$

Тогда по формуле (1) найдем

$$\langle z\rangle = \frac{\langle v\rangle}{\langle \lambda_2\rangle} = \frac{\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}}{\langle \lambda_1\rangle \frac{p_1}{p_2}}. \qquad (5)$$

По условию: $\frac{p_1}{p_2} = 100; \quad \mu = 32\cdot 10^{-3}\ \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$.

Подставляя данные в (5), получим

$$\langle z\rangle = \frac{\sqrt{\frac{8\cdot 8{,}3\cdot 273}{3{,}14\cdot 32\cdot 10^{-3}}}}{9{,}5\cdot 10^{-8}\cdot 100} = 4{,}5\cdot 10^{7}\cdot$$

Проверим размерность:

$$[z] = \frac{[R]^{\frac{1}{2}}\cdot[T]^{\frac{1}{2}}\cdot[\mu]^{-\frac{1}{2}}}{[\lambda]} = \left[\frac{\text{Дж}\cdot\text{К}}{(\text{моль}\cdot\text{К})}\right]^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{\left[\frac{\text{кг}}{\text{моль}}\right]^{-\frac{1}{2}}}{\text{м}} = \frac{\sqrt{\frac{\text{Дж}}{\text{кг}}}}{\text{м}} = \frac{1}{\text{с}} = \text{с}^{-1}.$$

**Ответ:** $4{,}5\cdot 10^{7}\ \text{с}^{-1}$.

**Задача 32.** Углекислый газ и азот находятся при одинаковых давлениях и температурах. Найдите для этих газов отношения: а) коэффициентов диффузии; б) вязкостей; в) теплопроводностей. Диаметры молекул газов считать одинаковыми.

**Дано:**

$\mu_1 = 44\cdot 10^{-3}\ \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$

$\mu_2 = 28\cdot 10^{-3}\ \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$

$i_1 = 6, \quad i_2 = 5$

$D_1/D_2 = ?$

$\eta_1/\eta_2 = ?$

$\gamma_1/\gamma_2 = ?$

**Решение.** а) Коэффициент диффузии

$$D = \frac{1}{3}\langle v\rangle\langle\lambda\rangle = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}\cdot\frac{kT}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 p}.$$

Так как диаметры молекул $\sigma_1 = \sigma_2$, то

$$\frac{D_1}{D_2} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}} = 0{,}8.$$

б) Коэффициент динамической вязкости

$$\eta = \frac{1}{3}\langle v\rangle\langle\lambda\rangle\rho,$$

где $\rho = p\mu/(RT)$.

Тогда $$\eta = D\cdot\frac{p\mu}{RT},$$

$$\frac{\eta_1}{\eta 2} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}}\cdot\frac{\mu_1}{\mu_2} = \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}} = 1{,}25.$$

в) Коэффициент теплопроводности

$$\gamma = \frac{1}{3}\langle v\rangle\langle\lambda\rangle\rho c_v = \eta c_v,$$

где $c_v = \frac{i}{2}\frac{R}{\mu}$ — удельная теплоемкость газа, $i$ — число степеней свободы молекул (см. § 49).

Таким образом,

$$\gamma = \eta c_v = \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}}\cdot\frac{i_1}{i_2}\cdot\frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{i_1}{i_2}\sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}} = 0{,}96.$$

**Ответ:** 0,8; 1,25; 0,96.

# Глава 9
# ПЕРВОЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ

## § 46. Внутренняя энергия идеального газа

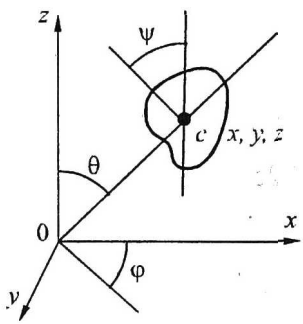


Рис. 44

Под *числом степеней свободы* $i$ понимается число независимых параметров, определяющих положение тела в пространстве. Так, положение материальной точки в пространстве определяется координатами $x, y, z$, следовательно, материальная точка имеет три степени свободы. Все три степени свободы — поступательные. Положение твердого тела в пространстве определяется координатами его центра масс $x, y, z$ и углами $\varphi, \theta, \psi$ (рис. 44). Следовательно, твердое тело имеет шесть степеней свободы: три поступательные $(x, y, z)$ и три вращательные $(\varphi, \theta, \psi)$.

Система, состоящая из $n$ материальных точек, не связанных друг с другом, имеет $3n$ степеней свободы. Две жестко связанные между собой материальные точки имеют пять степеней свободы: три поступательные $x$, $y$, $z$, определяющие положение центра масс (точка $c$, рис. 45) и две вращательные (вокруг осей $y$ и $z$). Вращение материальных точек вокруг оси $x$ лишено смысла. Следовательно, каждая жесткая связь уменьшает число степеней свободы на единицу: без жесткой связи система двух материальных точек имеет шесть степеней свободы: $3n = 3 \cdot 2 = 6$, с одной жесткой связью — пять степеней свободы.

При определении числа степеней свободы молекул атомы, из которых они состоят, рассматриваются как материальные точки.

Каждая молекула независимо от общего числа ее степеней свободы имеет три поступательные степени свободы. Согласно формуле (2.17) на все три поступательные степени свободы приходится энергия $\langle E \rangle = 3kT/2$. Следовательно, на одну степень свободы приходится энергия в три раза меньше, т. е. $1/2\ kT$. Таким образом, *на каждую степень свободы, будь то поступательная, вращательная или колебательная, в среднем приходится одинаковая кинетическая энергия, равная* $1/2\ kT$. Данное утверждение называется *законом равнораспределения энергии по степеням свободы.*

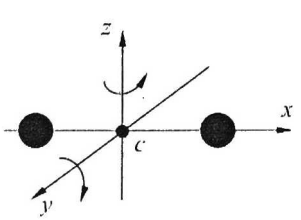


Рис. 45

Тогда средняя энергия молекул

$$\langle E\rangle = \frac{i}{2}kT, \tag{2.37}$$

где $i = i_{\text{пост}} + i_{\text{вращ}} + 2i_{\text{кол}}$ — суммарное число степеней свободы молекулы, состоящее из поступательных, вращательных и колебательных степеней. Заметим, что число колебательных степеней в этой сумме удваивается, так как колебательное движение связано с наличием как кинетической, так и потенциальной энергии, т. е. обладает удвоенной энергоемкостью.

*Внутренняя энергия тела* — это физическая величина, равная сумме кинетических энергий беспорядочного движения всех частиц тела (молекул, атомов и т. д.) и потенциальных энергий частиц, обусловленных силами их межмолекулярного взаимодействия.

Во внутреннюю энергию не входят энергия движения тела как целого (его кинетическая энергия) и потенциальная энергия, которой может обладать тело в каком-либо силовом поле (гравитационном, магнитном и т. д.).

Для идеального газа внутренняя энергия представляет собой кинетическую энергию хаотического теплового движения его молекул.

Используя выражение (2.37), для внутренней энергии одного моля идеального газа запишем:

$$U_{\mu} = \langle E\rangle \cdot N_{\text{A}} = \frac{i}{2}kT \cdot N_{\text{A}} = \frac{i}{2}RT,$$

где $N_{\text{A}}$ — число Авогадро, $R$ — универсальная газовая постоянная.

Внутренняя энергия $U$ произвольно взятой массы идеального газа $m$ определяется формулой

$$U = \frac{m}{\mu}\frac{i}{2}RT,$$

а изменение внутренней энергии

$$dU = \frac{m}{\mu}\frac{i}{2}R\,dT. \tag{2.38}$$

Внутренняя энергия является *однозначной функцией состояния системы*, т. е. зависит только от параметров состояния $p$, $V$, $T$ и т. д. и не зависит от способа, каким это состояние достигнуто.

Внутренняя энергия возрастает при увеличении температуры тела, так как при этом возрастает кинетическая энергия частиц. Если холодное тело

соприкасается с горячим, то внутренняя энергия холодного тела увеличивается, а горячего — уменьшается. Этот процесс происходит до тех пор, пока температуры тел не сравняются.

*Количеством теплоты* называется физическая величина, равная внутренней энергии, перешедшей от одного тела к другому при их контакте или излучении.

Количество теплоты измеряется в джоулях (Дж).

Внутреннюю энергию тела можно увеличить, если телу передать какое-либо количество теплоты или над телом совершить работу. При нагревании тела массой $m$ от температуры $t_1$ до $t_2$ ему необходимо передать количество теплоты

$$Q = cm(t_2 - t_1), \tag{2.39}$$

где $c$ — удельная теплоемкость.

*Удельной теплоемкостью* называется физическая величина, равная количеству теплоты, которое нужно сообщить 1 кг вещества для изменения его температуры на 1К. Удельная теплоемкость измеряется в джоулях на килограмм-кельвин (Дж / (кг·К)).

*Теплоемкостью тела* называется физическая величина $C$, равная отношению количества теплоты, сообщаемой телу, к изменению температуры тела:

$$C = Q / \Delta T. \tag{2.40}$$

Теплоемкость тела измеряется в джоулях на кельвин (Дж/К).

Энергия, переданная термодинамической системе внешними телами при их силовом взаимодействии, называется *работой.* В процессе совершения работы от одного тела к другому передается энергия *упорядоченного движения.* При передаче теплоты энергия *хаотического движения* одной системы переходит к другой системе.

## § 47. Работа в термодинамике

При расширении газа совершается работа. Допустим, что газ заключен в сосуд, отделен от окружающего пространства невесомым поршнем и занимает объем $V_1$ (рис. 46). Давление газа в сосуде уравновешено давлением атмосферы $p$ (процесс изобарный). Повысим температуру газа под поршнем. Тогда газ, расширяясь, поднимет поршень на величину $\Delta h$, совершая работу

$$A = F\Delta h,$$

где $F = pS$ — сила давления атмосферы, $S$ — площадь поршня. Следовательно, работа

$$A = pS\Delta h = p\Delta V,$$

где $\Delta V = V_2 - V_1$ — изменение объема газа при нагревании.

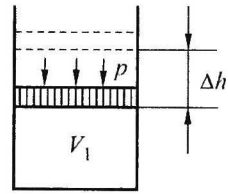


Рис. 46

Если поршень передвигается на бесконечно малое расстояние $dh$, то при этом производится работа $dA = pdV$. Полная работа, совершаемая газом при изменении его объема от $V_1$ до $V_2$, определяется интегрированием:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p\,dV. \qquad (2.41)$$

Давление $p$ — величина всегда положительная. При расширении газа $dV > 0$, газ совершает положительную работу. Если газ сжимается, то $dV < 0$ и работа $A < 0$. В этом случае положительную работу над газом совершают внешние силы.

## § 48. Первое начало термодинамики

Первый закон (начало) термодинамики является законом сохранения и превращения энергии в тепловых процессах.

При переходе системы из одного состояния в другое внутренняя энергия системы изменяется. Это изменение (в общем случае) происходит за счет теплообмена с другими системами или при совершении работы.

Первый закон термодинамики гласит: *изменение внутренней энергии системы $\Delta U$ при ее переходе из одного состояния в другое равно сумме работы $A'$ внешних сил и количества теплоты $Q$, переданного системе:*

$$\Delta U = A' + Q.$$

Если вместо работы $A'$ внешних сил рассматривать работу системы над внешними телами $A = -A'$, то первый закон термодинамики примет вид

$$Q = \Delta U + A. \qquad (2.42)$$

*Количество теплоты, переданное системе, расходуется на увеличение внутренней энергии системы и на совершение системой работы над внешними телами.*

В дифференциальной форме выражение (2.42) будет иметь вид

$$d'Q = dU + d'A, \qquad (2.43)$$

где $dU$ — бесконечно малое изменение внутренней энергии, $d'A$ — элементарная работа, $d'Q$ — бесконечно малое изменение количества теплоты.

Если $dU$ является полным дифференциалом, то $d'A$ и $d'Q$ не являются полными дифференциалами (поэтому символы $dQ$ и $dA$ снабжены штрихами).

Интеграл $\int_1^2 dU = U_2 - U_1$ равен разности значений функции $U$ в состояниях 2 и 1 и не зависит от пути совершения процесса. Интегралы $\int_1^2 d'A = A_{1-2}$ и $\int_1^2 d'Q = Q_{1-2}$ зависят от того, по какому пути протекает процесс, т. е. $A_{1-2}$ не равно $A_2 - A_1$ и $Q_{1-2}$ не равно $Q_2 - Q_1$.

Если термодинамическая система возвращается в первоначальное состояние, то $dU = 0$ и согласно первому началу термодинамики (2.43) $d'Q = d'A$, т. е. *невозможно создать вечный двигатель первого рода, который совершал бы большую работу, чем количество энергии, подведенное извне к системе.*

## § 49. Кинетическая теория теплоемкостей

В § 46 дано понятие теплоемкости тела и удельной теплоемкости.

Однако при расчете процессов в газах чаще пользуются понятием молярной теплоемкости. *Молярной теплоемкостью* называется физическая величина $c^{\mu}$, равная отношению количества теплоты, полученного веществом, к числу молей этого вещества и изменению его температуры:

$$c^{\mu} = dQ \Big/ \left( \frac{m}{\mu} \cdot dT \right). \qquad (2.44)$$

Молярные и удельные теплоемкости связаны соотношением: $c^{\mu} = c\mu$, где $\mu$ — молярная масса.

Различают молярную теплоемкость при постоянном объеме $c_V$ и молярную теплоемкость при постоянном давлении $c_p$.

Пусть имеется один моль газа при постоянном объеме, т. е. $V$ = const. Запишем первое начало термодинамики:

$$d'Q = dU + d'A.$$

Так как $d'A = pdV$, а $dV = 0$, то $d'Q = dU$. Согласно (2.38) $d'Q = \frac{i}{2} R\,dT$, по формуле (2.44) определим молярную теплоемкость при постоянном объеме:

$$c_V = \frac{d'Q}{dT} = \frac{i}{2}R. \qquad (2.45)$$

Пусть имеется один моль газа при постоянном давлении, т. е. $p$ = const. Тогда

$$d'Q = dU + d'A = \frac{i}{2}R\,dT + p\,dV = \frac{i}{2}R\,dT + R\,dT,$$

$$c_p = \frac{d'Q}{dT} = \frac{i}{2}R + R = c_V + R. \qquad (2.46)$$

Сопоставляя выражения (2.45) и (2.46), получим уравнение Ю. Р. Майера[1]:

$$c_p = c_V + R. \qquad (2.47)$$

Молярная теплоемкость измеряется в джоулях на моль-кельвин (Дж / (моль·К)).

Из выражений (2.45) и (2.46) следует, что молярные теплоемкости зависят только от числа степеней свободы молекул и не зависят от температуры. Данное утверждение справедливо в широком диапазоне температур только для одноатомного идеального газа.

## § 50. Изопроцессы в газах

*Изопроцессами* называются равновесные процессы, при протекании которых один из основных параметров состояния остается постоянным.

*Изотермический процесс* подчиняется закону Бойля–Мариотта: *в изотермическом процессе, протекающем при постоянной температуре* ($T$ = const), *произведение давления $p$ данной массы газа на его объем $V$ есть величина постоянная:*

$$p_1V_1 = p_2V_2 = \ldots = p_0V_0 \quad \text{или}$$

$$pV = \text{const}.$$

Графиком процесса в $p$, $V$ координатах является гипербола (рис. 47), которую в физике называют *изотермой*. С повышением температуры газа изотерма удаляется от начала координат.

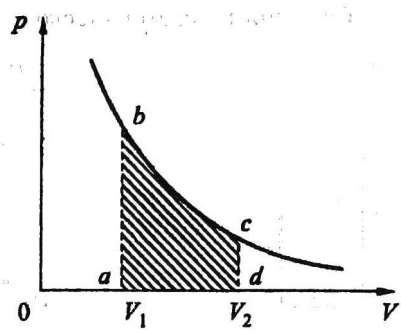


Рис. 47

[1] Юлиус Роберт Майер (1814–1878) — немецкий врач.

Применим первое начало термодинамики к изотермическому процессу:

$$d'Q = dU + d'A,$$

но $dU = \frac{m}{\mu} c_V dT$.

При $T = \text{const}$ $dU = 0$, следовательно, $d'Q = d'A$. Все тепло, подведенное к термодинамической системе в изотермическом процессе, идет на совершение системой работы против внешних сил.

Найдем работу изотермического расширения газа, используя уравнение (2.13), (2.43):

$$A_{1-2} = \int_1^2 p\,dV = \int_1^2 \frac{m}{\mu} RT \frac{dV}{V} = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{p_2}{p_1}. \quad (2.48)$$

На графике (см. рис. 47) работа изображается площадью заштрихованной фигуры *abcd*.

Все медленно протекающие процессы приближенно можно считать изотермическими.

*Изохорический процесс* подчиняется закону Шарля: *в изохорическом процессе, протекающем при постоянном объеме* ($V = \text{const}$), *отношение давления данной массы газа к его абсолютной температуре есть величина постоянная:*

$$p_1 / T_1 = p_2 / T_2 = \ldots = p_0 / T_0 \quad \text{или } p / T = \text{const}.$$

На рис. 48 представлены графики изохорического процесса в различных координатах.

Применим к изохорическому процессу первое начало термодинамики:

$$d'Q = dU + d'A.$$

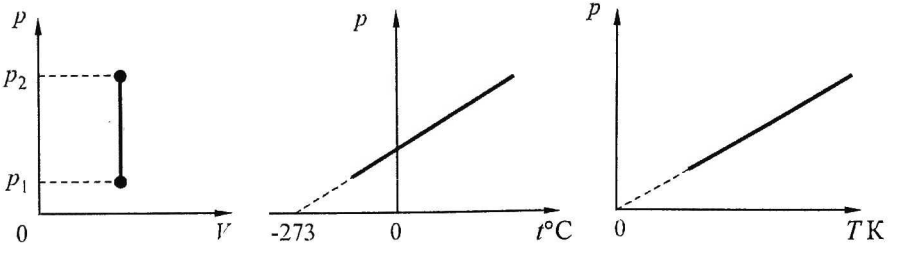



Рис. 48

Так как $V = \text{const}$,

$$d'A = p\,dV = 0\,.$$

В изохорическом процессе газ работу над внешними телами не совершает. Сообщаемая газу теплота идет на увеличение внутренней энергии:

$$d'Q = dU\,.$$

Но $dU = \dfrac{m}{\mu} c_V dT$, интегрируя данное выражение, получим

$$U_2 - U_1 = \frac{m}{\mu} c_V (T_2 - T_1). \qquad (2.49)$$

Используя уравнение Майера (2.47), представим $c_V$ в виде

$$\frac{c_V R}{R} = \frac{c_V R}{c_p - c_V} = \frac{R}{\gamma - 1},$$

где $\gamma = c_p / c_V$ — показатель адиабаты. Тогда из уравнения (2.49) для изменения внутренней энергии запишем:

$$U_2 - U_1 = \frac{m}{\mu}\frac{R}{\gamma - 1}(T_2 - T_1) = \frac{p_2 V - p_1 V}{\gamma - 1} = \frac{V}{\gamma - 1}(p_2 - p_1).$$

*Изобарический процесс* подчиняется закону Гей-Люссака: *в изобарическом процессе, протекающем при постоянном давлении* ($p$ = const), *отношение объема данной массы газа к его абсолютной температуре есть величина постоянная:*

$$V_1 / T_1 = V_2 / T_2 = \ldots V_0 / T_0$$

или

$$V / T = \text{const}.$$

Графики изобарического процесса изображены на рис. 49.

Применим к изобарическому процессу первое начало термодинамики:

$$d'Q = dU + d'A = dU + pdV = d(U + pV)^*$$

---

* Функцию состояния $H = U + pV$ называют *энтальпией* (тепловой функцией).

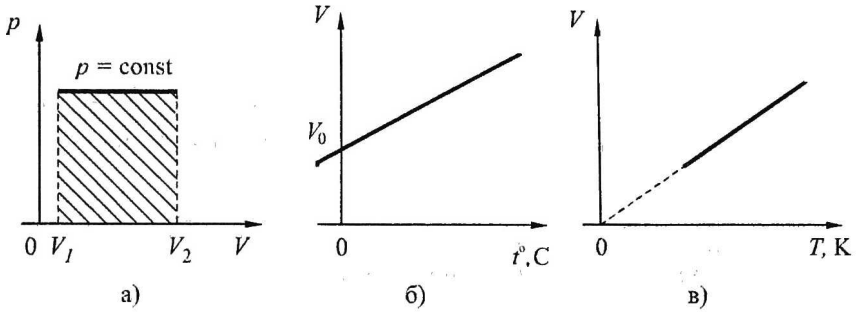



Рис. 49

или

$$d'Q = \frac{m}{\mu} c_V \, dT + p \, dV \, .$$

Количество подведенной теплоты

$$Q_{1-2} = \frac{m}{\mu} c_V (T_2 - T_1) + p(V_2 - V_1) = \frac{m}{\mu} c_V (T_2 - T_1) + \frac{m}{\mu} R(T_2 - T_1) =$$

$$= \frac{m}{\mu}(T_2 - T_1)(c_V + R) = \frac{m}{\mu} c_p (T_2 - T_1) \, .$$

Работа газа в изобарическом процессе $d'A = p \, dV$ или $A_{1-2} = pV_2 - pV_1$ и определяется площадью заштрихованного прямоугольника (рис. 49, а).

Применив уравнение состояния (2.13), получим

$$A_{1-2} = \frac{m}{\mu} R(T_2 - T_1). \qquad (2.50)$$

Если разность температур $(T_2 - T_1) = 1$ К, то для одного моля газа $\left(\frac{m}{\mu} = 1\right)$ работа $A_{1-2} = R$.

Отсюда вытекает физический смысл $R$: *универсальная газовая постоянная численно равна работе изобарического расширения одного моля идеального газа при его нагревании на один кельвин.*

*Адиабатический процесс* подчиняется уравнению Пуассона. Процесс, протекающий без теплообмена с внешней средой, называется адиабатическим. Все быстро протекающие процессы приближенно можно считать адиабатическими. В отсутствие теплообмена с внешней средой $d'Q = 0$.

Запишем первое начало термодинамики:

$$d'Q = dU + d'A\,.$$

Подставим в него выражения для внутренней энергии $dU = \frac{m}{\mu} c_V dT$ и работы $d'A = p\,dV$:

$$d'Q = \frac{m}{\mu} c_V dT + p\,dV\,,\ \text{т. к. } d'Q = 0\,,\ \text{то}$$

$$p\,dV = -\frac{m}{\mu} c_V dT\,. \qquad (2.51)$$

Возьмем дифференциал от обеих частей уравнения состояния идеального газа

$$pV = \frac{m}{\mu} RT\,,$$

получим

$$p\,dV + V\,dp = \frac{m}{\mu} R\,dT\,. \qquad (2.52)$$

Просуммируем уравнения (2.51) и (2.52), предварительно умножив (2.51) на $R/c_V$, получим

$$p\,dV + V\,dp + \frac{p\,dV\,R}{c_V} = 0$$

или

$$p\,dV\left(1 + \frac{R}{c_V}\right) + V\,dp = 0\,. \qquad (2.53)$$

Используя уравнение Майера (2.47), преобразуем выражение

$$1 + \frac{R}{c_V} = 1 + \frac{c_p - c_V}{c_V} = \frac{c_p}{c_V} = \gamma\,.$$

С учетом этого выражение (2.53) запишется в виде

$$\gamma p\,dV + V\,dp = 0\,.$$

Поделим полученное уравнение на произведение $pV$:

$$\gamma\frac{dV}{V} + \frac{dp}{p} = 0\,.$$

Интегрируя данное уравнение в пределах от $V_1$ до $V_2$ и от $p_1$ до $p_2$, а затем потенцируя его, получим *уравнение Пуассона:*

$$p_1V_1^{\gamma} = p_2V_2^{\gamma}$$

или

$$pV^{\gamma} = \text{const}\,. \qquad (2.54)$$

Применив уравнение состояния, выражение (2.54) можно привести к виду

$$TV^{\gamma-1} = \text{const}\,,\quad Tp^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = \text{const}\,. \qquad (2.55)$$

На рис. 50 представлены две кривые: *1* — адиабата, *2* — изотерма. Как видно из рисунка, адиабата идет круче, чем изотерма.

Согласно первому началу термодинамики работа в адиабатическом процессе $d'A = -dU$, так как $d'Q = 0$. Тогда

$$A_{1-2} = -\frac{m}{\mu}c_V(T_2 - T_1) = \frac{m}{\mu}\frac{R}{\gamma-1}(T_1 - T_2) = \frac{p_1V_1 - p_2V_2}{\gamma-1} =$$

$$= \frac{p_1V_1}{\gamma-1}\left(1 - \frac{p_2V_2}{p_1V_1}\right) = \frac{p_1V_1}{\gamma-1}\left[1 - \frac{p_2V_2^{\gamma}}{p_1V_1^{\gamma}}\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right] = \frac{p_1V_1}{\gamma-1}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right].$$

По уравнению состояния $p_1V_1 = \frac{m}{\mu}RT_1$, следовательно, работа

$$A_{1-2} = \frac{m}{\mu}\frac{RT_1}{\gamma-1}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right]. \qquad (2.56)$$

Работа в адиабатическом процессе совершается за счет уменьшения внутренней энергии газа. Если над газом производят работу внешние силы, сжимая его, то внутренняя энергия и температура газа возрастают.

Работа в $p$–$V$ координатах определяется площадью фигуры $abcd$, заштрихованной на рис. 50.

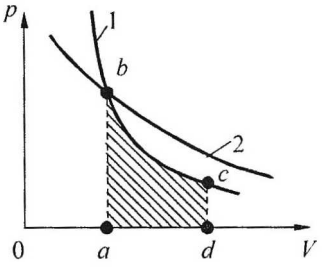



Рис. 50

## ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

**Задача 33.** Найти среднюю кинетическую энергию $\langle E_{\text{В}} \rangle$ вращательного движения одной молекулы кислорода при температуре $T = 350\,\text{К}$, а также кинетическую энергию $E_K$ вращательного движения всех молекул кислорода, масса которого $m = 4$ г.

**Дано:**

$\mu = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль

$T = 350\text{К}$

$m = 4 \cdot 10^{-3}$ кг

$\langle E_{\text{В}} \rangle = ?\quad E_{\text{К}} = ?$

**Решение.** На каждую степень свободы молекулы газа приходится одинаковая средняя энергия $E_1 = \frac{1}{2}kT$. Так как вращательному движению двухатомной молекулы (молекула кислорода — двухатомная) соответствуют две степени свободы, то средняя энергия вращательного движения молекулы кислорода

$$\langle E_{\text{В}} \rangle = 2\frac{1}{2}kT = kT. \qquad (1)$$

Кинетическая энергия вращательного движения всех молекул заданного количества газа

$$E_{\text{К}} = \langle E_{\text{В}} \rangle N, \qquad (2)$$

где $N$ — число молекул газа, которое можно определить по формуле

$$N = N_{\text{А}} \frac{m}{\mu}.$$

Тогда $$E_{\text{К}} = N_{\text{А}} \frac{m}{\mu} \langle E_{\text{В}} \rangle .$$

Произведем вычисления:

$$\langle E_{\text{В}} \rangle = kT = 1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 350\,\text{Дж} = 4{,}83 \cdot 10^{-21}\ \text{Дж},$$

$$E_{\text{К}} = 6{,}02 \cdot 10^{23} \cdot \frac{4 \cdot 10^{-3}}{32 \cdot 10^{-3}} \cdot 4{,}83 \cdot 10^{-21}\,\text{Дж} = 364\ \text{Дж}.$$

**Ответ:** $\langle E_{\text{В}} \rangle = 4{,}83 \cdot 10^{-21}$ Дж, $E_{\text{К}} = 364\,\text{Дж}$.

**Задача 34.** 12 г идеального газа занимают объем $4 \cdot 10^{-3}$ м$^3$ при температуре 7° С. После нагревания газа при постоянном давлении его плотность стала равна $6 \cdot 10^{-4}$ г/см$^3$. До какой температуры нагрели газ?

**Дано:**

$m = 12 \cdot 10^{-3}$ кг

$V_1 = 4 \cdot 10^{-3}$ м$^3$

$T_1 = 273 + 7 = 280$ К

$\rho_2 = 0{,}6$ кг/м$^3$

$T_2 = ?$

**Решение.** Запишем уравнение Менделеева–Клапейрона для двух состояний газа:

$$\begin{cases} p_1 V_1 = \dfrac{m}{\mu} R T_1, \\ p_2 V_2 = \dfrac{m}{\mu} R T_2. \end{cases} \qquad (1)$$

Процесс изобарный ($p_1 = p_2 = p$ = const), а плотность газа после нагревания

$$\rho_2 = \frac{m}{V_2}. \qquad (2)$$

С учетом уравнения (2) приведем систему уравнений (1) к виду

$$\begin{cases} pV_1 = \dfrac{m}{\mu} R T_1, \\ p = \dfrac{m}{V_2} \dfrac{RT_2}{\mu}, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} pV_1 = \dfrac{m}{\mu} R T_1, \\ p = \rho_2 R \dfrac{T_2}{\mu}. \end{cases} \qquad (3)$$

Из уравнений (3) найдем

$$T_2 = \frac{m T_1}{V_1 \rho_2}.$$

Произведем вычисления и проверку размерности:

$$T_2 = \frac{12 \cdot 10^{-3} \cdot 280}{4 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}6} = 1400,$$

$$[T] = \left[ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot \text{К} \cdot \frac{\text{м}^3}{\text{кг}} \right] = \text{К}.$$

**Ответ:** 1400 К.

**Задача 35.** Кислород массой $m = 2$ кг занимает объем $V_1 = 1$ м$^3$ и находится под давлением $p_1 = 0{,}2$ МПа. Газ был нагрет сначала при постоянном давлении до объема $V_2 = 3$ м$^3$, а затем при постоянном объеме до давления $p_3 = 0{,}5$ МПа. Найти изменение $\Delta U$ внутренней энергии газа, совершенную им работу $A$ и теплоту $Q$, переданную газу. Построить график процесса.

**Дано:**

$m = 2$ кг

$V_1 = 1$ м$^3$

$p_1 = 0{,}2 \cdot 10^6$ Па

$V_2 = 3$ м$^3$

$p_3 = 0{,}5 \cdot 10^6$ Па

$\mu = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль

$i = 5$ (двухатомный газ)

$\Delta U = ?\ \ A = ?\ \ Q = ?$

**Решение.** График процесса приведен на рисунке к задаче. Изменение внутренней энергии газа, согласно формуле (2.38), можно определить:

$$\Delta U = \frac{i}{2}\frac{m}{\mu} R \Delta T, \qquad (1)$$

где $\Delta T = T_3 - T_1$ — разность температур газа в конечном и начальном состояниях.

Эти температуры найдем из уравнения Менделеева–Клапейрона:

$$\begin{cases} T_1 = \dfrac{p_1 V_1 \mu}{mR}, \\ T_3 = \dfrac{p_3 V_2 \mu}{mR}. \end{cases} \qquad (2)$$

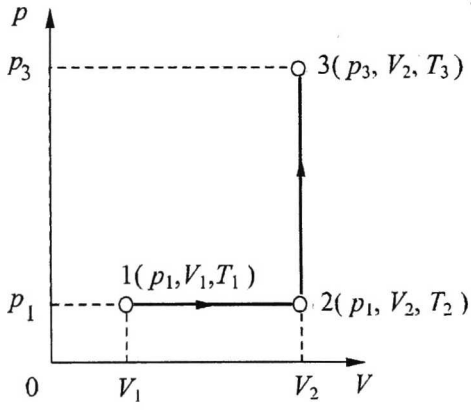



Рис. к задаче 35

Из уравнений (2) найдем $\Delta T$ и подставим в уравнение (1):

$$\Delta U = \frac{i}{2}\frac{m}{\mu} R\left(p_3 V_2 - p_1 V_1\right)\frac{\mu}{mR}$$

или $\Delta U = \dfrac{i}{2}\left(p_3 V_2 - p_1 V_1\right).$

Произведем вычисления:

$$\Delta U = \frac{5}{2} \cdot \left(0{,}5 \cdot 10^6 \cdot 3 - 0{,}2 \cdot 10^6 \cdot 1\right)\text{Дж} = 3{,}24 \cdot 10^6\ \text{Дж} = 3{,}24\ \text{МДж}.$$

Полная работа газа, совершаемая на участке 1–2–3:

$$A = A_{1-2} + A_{2-3}.$$

Работа газа, нагреваемого при постоянном объеме, равна нулю, т. е.

$$A_{2-3} = 0.$$

Следовательно, полная работа, совершаемая газом:

$$A = A_{1-2} = p_1(V_2 - V_1). \qquad (3)$$

После вычислений получим

$$A = 0{,}2 \cdot 10^6 (3-1)\ \text{Дж} = 0{,}4 \cdot 10^6\ \text{Дж} = 0{,}4\ \text{МДж}.$$

Согласно первому началу термодинамики (2.42) теплота $Q$, переданная газу, равна

$$Q = \Delta U + A.$$

Таким образом:

$$Q = (3{,}24 + 0{,}4)\ \text{МДж} = 3{,}64\ \text{МДж}.$$

**Ответ:** $\Delta U = 3{,}24$ МДж, $A = 0{,}4$ МДж, $Q = 3{,}64$ МДж.

# Глава 10
# ВТОРОЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ

## § 51. Круговые обратимые и необратимые процессы. Цикл Карно

*Круговыми* называются процессы (циклы), при которых термодинамическая система после ряда изменений возвращается в исходное состояние. В координатах $p$–$V$ круговые процессы изображаются в виде замкнутых кривых.

Круговой процесс называется *обратимым*, если система, выведенная из какого-либо состояния, вновь возвращается в это состояние и при этом не происходит никаких изменений в окружающей среде. Процесс, не удовлетворяющий этим условиям, называется *необратимым*. Любой равновесный процесс является обратимым.

Работа газа за цикл в координатах $p$–$V$ определяется площадью, охватываемой замкнутой кривой. Цикл называется *прямым*, если эта работа положительна. Прямой цикл используется в тепловых машинах. Если работа за цикл отрицательна, то цикл называется *обратным*. Обратный цикл используется в холодильных машинах.

*Тепловым двигателем* называют устройство, преобразующее теплоту в работу. К тепловым двигателям относятся паровые турбины, двигатели внутреннего сгорания, реактивные и ракетные двигатели.

Тепловой двигатель состоит из нагревателя, рабочего тела и холодильника (рис. 51). К рабочему телу подводится теплота $Q_1$ от нагревателя, имеющего температуру $T_н$. Газ, нагреваясь, расширяется. При этом совершается положительная работа $A$. Однако далеко не вся теплота $Q_1$ превращается в работу. Значительная ее часть $Q_2$ выбрасывается в

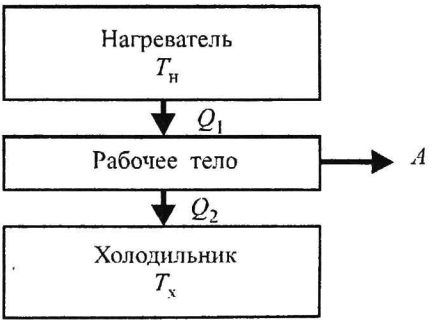



Рис. 51

холодильник, который имеет температуру $T_x$. Роль нагревателя в двигателях внутреннего сгорания выполняет цилиндр, в котором происходит сгорание топлива, а роль холодильника — окружающая атмосфера, куда выбрасываются выхлопные газы.

Согласно закону сохранения энергии работа, совершаемая тепловым двигателем, равна

$$A = Q_1 - Q_2.$$

*Коэффициентом полезного действия* $\eta$ теплового двигателя называется физическая величина, равная отношению работы $A$, совершаемой двигателем, к количеству теплоты $Q_1$, полученному от нагревателя:

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}. \qquad (2.57)$$

Французский физик С. Карно[1] показал, что наиболее экономным является идеальный обратимый цикл, состоящий из двух изотерм и двух адиабат, получивший название *цикла Карно*. Рассмотрим прямой цикл Карно, в котором в качестве рабочего тела используется идеальный газ (рис. 52). На кривых стрелками показано направление процесса.

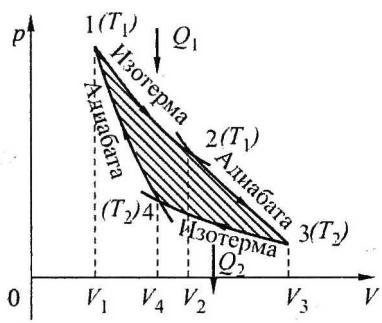


Рис. 52

Кривая *1–2* — изотермическое расширение газа ($T_1$ = const).

Чтобы поддерживать в процессе расширения температуру $T_1$ постоянной, к газу подводится теплота $Q_1$.

Кривая *2–3* — адиабатическое расширение газа. Согласно уравнению Пуассона (2.55) запишем:

$$T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1}. \qquad (2.58)$$

Кривая *3–4* — изотермическое сжатие, протекающее при температуре $T_2$ = const. Чтобы поддерживать температуру $T_2$ постоянной, от газа отбирается теплота $Q_2$.

Кривая *4–1* — адиабатическое сжатие газа, определяется уравнением (2.55):

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_4^{\gamma-1}. \qquad (2.59)$$

[1] Никола Леонар Сади Карно (1796–1833) — французский физик.

Используя формулы (2.48) и (2.56), найдем работу $A$, совершаемую газом в цикле Карно:

$$A = A_{1-2} + A_{2-3} + A_{3-4} + A_{4-1} = \frac{m}{\mu} RT_1 \ln\frac{V_2}{V_1} + \frac{m}{\mu} c_V (T_1 - T_2) +$$

$$+ \frac{m}{\mu} RT_2 \ln\frac{V_4}{V_3} - \frac{m}{\mu} c_V (T_1 - T_2) = \frac{m}{\mu} RT_1 \ln\frac{V_2}{V_1} + \frac{m}{\mu} RT_2 \ln\frac{V_4}{V_3}. \quad (2.60)$$

Поделив уравнения (2.58) на (2.59), получим

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}.$$

Тогда выражение (2.60) примет вид

$$A = \frac{m}{\mu} RT_1 \ln\frac{V_2}{V_1} - \frac{m}{\mu} RT_2 \ln\frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{\mu} R(T_1 - T_2)\ln\frac{V_2}{V_1}. \quad (2.61)$$

Таким образом, работа газа в цикле Карно определяется разностью температур нагревателя и холодильника и зависит от расширения газа.

Согласно первому началу термодинамики количество теплоты $Q_1$, подведенное от нагревателя, равно работе расширения газа в изотермическом процессе *1–2* :

$$Q_1 = A_{1-2} = \frac{m}{\mu} RT_1 \ln\frac{V_2}{V_1}. \quad (2.62)$$

Подставив выражения (2.61) и (2.62) в формулу (2.57), найдем КПД цикла Карно:

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{A}{A_{1-2}} = \frac{\frac{m}{\mu} R(T_1 - T_2)\ln\frac{V_2}{V_1}}{\frac{m}{\mu} RT_1 \ln\frac{V_2}{V_1}} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}.$$

(2.63)

Таким образом, КПД цикла Карно определяется только температурами нагревателя и холодильника: с увеличением температуры нагревателя или с уменьшением температуры холодильника коэффициент полезного действия тепловой машины возрастает.

## § 52. Неравенство Клаузиуса. Энтропия

Напомним, что внутренняя энергия $dU$ в отличие от работы газа $d'A$ является функцией состояния.

При рассмотрении цикла Карно отмечалось, что не вся теплота $Q_1$, подведенная к системе, превращается в работу. Значительная ее часть $Q_2$ передается холодильнику.

Прямой и обратный переходы в цикле Карно сопровождаются неодинаковыми количествами поглощенного и выделенного тепла, т. е. количество теплоты зависит от способа осуществления перехода. Таким образом, количество теплоты, так же как и работа, не является функцией состояния системы.

Количество теплоты $Q_1$ не равно $Q_2$, но отношения этих теплот к температурам, при которых они были подведены или отведены, численно равны друг другу, только имеют противоположные знаки:

$$\left|\frac{Q_1}{T_1}\right| = \left|\frac{Q_2}{T_2}\right| \quad \text{или} \quad \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0 .$$

Отношение $\dfrac{Q}{T}$ называют *приведенной теплотой.*

Для обратимого цикла Карно алгебраическая сумма приведенных теплот равна нулю. Это положение справедливо для любого обратимого кругового процесса. В общем случае сумму приведенных теплот можно записать в виде

$$\oint_{\text{обр}} \frac{d'Q}{T} \equiv 0 .$$

Если интеграл, взятый по замкнутому контуру, равен нулю, то выражение $d'Q/T$, стоящее под знаком интеграла, представляет собой полный дифференциал некоторой функции $S$, не зависящей от пути протекания процесса, т. е.

$$\left(\frac{d'Q}{T}\right)_{\text{обр}} = dS . \qquad (2.64)$$

Функцию $S$ впервые ввел Р. Клаузиус[1] и назвал ее *энтропией.*

[1] Рудольф Юлиус Эмануэль Клаузиус (1822–1888) — немецкий физик.

В системе СИ энтропия измеряется в джоулях на кельвин (Дж/К).

Если в термодинамической системе выполняется необратимый круговой процесс, то

$$\oint\limits_{\text{необр}} \frac{d'Q}{T} < 0, \qquad (2.65)$$

т. е. энтропия системы возрастает.

Выражение (2.65) называют *неравенством Клаузиуса.*

*Свойства энтропии:*

1) энтропия является функцией состояния, так как зависит только от начальных и конечных параметров состояния системы и не зависит от пути протекания процесса;

2) энтропия определяется с точностью до произвольной постоянной;

3) энтропия $S$ системы, состоящей из $n$ частей, равна алгебраической сумме энтропий $S_i$ каждой части, т. е.

$$S = \sum_{i=1}^{n} S_i ;$$

4) в теплоизолированной системе при протекании обратимого процесса энтропия не меняется. Поэтому равновесные адиабатические процессы называют *изоэнтропийными процессами;*

5) при постоянном объеме энтропия является непрерывно возрастающей функцией внутренней энергии системы.

Из первого начала термодинамики при $dV = 0$ следует: $d'Q = dU$. Тогда $dS = \frac{dU}{T}$, но температура всегда положительна. Значения приращений $dS$ и $dU$ имеют одинаковые знаки;

6) энтропия замкнутой теплоизолированной системы, в которой протекают реально осуществляемые необратимые тепловые процессы, всегда возрастает.

Рассмотрим для примера изменение энтропии при изотермическом ($T$= const) расширении идеального газа. Из первого начала термодинамики следует:

$$d'Q = dU + d'A = pdV, \quad \text{т. к.} \quad dU = 0.$$

Выразим давление газа $p$ из уравнения Менделеева–Клапейрона: $p = mRT/(\mu V)$ и подставим в уравнение первого начала термодинамики:

$$d'Q = \frac{m}{\mu} RT \frac{dV}{V}.$$

Тогда $dS = \frac{d'Q}{T} = \frac{m}{\mu} R \frac{dV}{V}$.

После интегрирования найдем изменение энтропии:

$$S_2 - S_1 = \frac{m}{\mu} R \ln \frac{V_2}{V_1},$$

где индекс *1* относится к первоначальному состоянию газа, а *2* — к состоянию после расширения. Так как при расширении газа $V_2 > V_1$, то и $S_2 > S_1$, т. е. при протекании изотермического расширения газа (необратимого процесса) энтропия возрастает.

Возрастание энтропиии приводит к росту внутреннего беспорядка в системе. До расширения газ занимал малую часть пространства и скорости движения молекул были до некоторой степени упорядочены. После расширения скорости молекул распределяются хаотически.

Таким образом, беспорядок возникает самопроизвольно и ему соответствует большая энтропия.

## § 53. Энтропия и вероятность

Под *термодинамической вероятностью состояния* $\omega_i$ понимается число микросостояний, соответствующих данному *i*-му состоянию макросистемы. Отношение $\omega_i$ к полному числу возможных микросостояний макросистемы называют вероятностью (математической) *i*-го состояния:

$$P_i = \frac{\omega_i}{\sum \omega_i}.$$

Пусть в замкнутом объеме, имеющем проницаемую перегородку, делящую объем на две равные части, находятся четыре молекулы. Обозначим их цифрами: *1*, *2*, *3* и *4* молекула. Составим таблицу 2 возможных состояний системы четырех молекул с указанием путей реализации этих состояний.

Наиболее вероятным является состояние, когда в рассматриваемом объеме справа и слева будет находиться по две молекулы, т. е. состояние с наибольшей гермодинамической вероятностью (в рассматриваемом примере $\omega = 6$).

В статистической физике доказывается, что

$$S = k \ln \omega, \qquad (2.66)$$

где $k$ — постоянная Больцмана.

| Состояние системы | | Пути реализации состояний | | Термодинамическая вероятность ω |
|---|---|---|---|---|
| Число молекул слева | Число молекул справа | Номера молекул слева | Номера молекул справа | |
| 0 | 4 | - | 1, 2, 3, 4 | 1 |
| 1 | 3 | 1<br>2<br>3<br>4 | 2, 3, 4<br>1, 3, 4<br>1, 2, 4<br>1, 2, 3 | 4 |
| 2 | 2 | 1,2<br>1,3<br>1,4<br>2,3<br>2,4<br>3,4 | 3,4<br>2,4<br>2,3<br>1,4<br>1,3<br>1,2 | 6 |
| 3 | 1 | 2, 3, 4<br>1, 3, 4<br>1, 2, 4<br>1, 2, 3 | 1<br>2<br>3<br>4 | 4 |
| 4 | 0 | 1, 2, 3, 4 | | 1 |

Таким образом, энтропия характеризует вероятность состояния системы. Состояние системы, осуществляемое небольшим числом способов, называется *упорядоченным*, а многими способами — *беспорядочным*.

Поскольку в реальных необратимых процессах энтропия возрастает, то ее называют *мерой беспорядка* в системе.

При абсолютном нуле температуры должна наблюдаться максимальная степень упорядоченности в системе, т. е. термодинамическая вероятность $\omega = 1$, значит, согласно (2.66) энтропия $S = 0$. *При стремлении к нулю температуры тела энтропия его также стремится к нулю.* Данное утверждение является *теоремой В. Нернста*[1] *(третьим началом термодинамики).*

[1] Вальтер Нернст (1864–1941) — немецкий ученый.

## § 54. Второе начало термодинамики

Все реальные процессы, протекающие в природе, сопровождаются теплообменом и трением, а поэтому являются необратимыми.

Второй закон термодинамики определяет направление процессов, выражая тем самым их необратимость. Существует несколько формулировок второго закона термодинамики. Приведем некоторые из них: «*Невозможен процесс, единственным результатом которого является передача теплоты от холодного тела к горячему*» (Р. Клаузиус).

Не следует думать, что второе начало термодинамики совсем запрещает переход теплоты от холодного тела к горячему. Конечно, нет. Примером являются холодильные установки, в которых наблюдается такой процесс. Только данный переход не является *единственным* результатом процесса, так как при этом компрессор холодильника совершает работу над рабочей жидкостью — фреоном.

У. Томсон дал следующую формулировку второго начала термодинамики: «*Невозможен процесс, единственным результатом которого является совершение работы за счет охлаждения одного тела*».

Формулировка Л. Больцмана: «*В макроскопической замкнутой системе процессы протекают таким образом, что вероятность конечного состояния не может быть меньше вероятности начального состояния*».

Может показаться, что эта формулировка противоречит процессу изотермического расширения газа, при котором вся теплота, полученная от нагревателя, превращается в работу. Однако это превращение не является *единственным* результатом процесса, так как газ изменяет объем.

Закон возрастания энтропии — *энтропия изолированной термодинамической системы возрастает* — также является одной из формулировок второго начала термодинамики.

Второй закон термодинамики имеет статистический смысл: он выполняется только для систем, имеющих большое число частиц. При малом числе частиц наблюдаются существенные отклонения от этого закона.

## § 55. Реальные газы. Уравнение Ван-дер-Ваальса

Уравнение состояния Менделеева–Клапейрона (2.13) выводилось без учета объемов молекулы (молекулы идеального газа принимались за материальные точки) и их взаимодействия друг с другом и малопригодно для реальных газов.

Голландский физик Я. Ван-дер-Ваальс[1] предложил уравнение состояния реального газа, введя в уравнение (2.13) поправки, учитывающие собственный объем молекул и силы межмолекулярного взаимодействия:

[1] Ян Дидерик Ван-дер-Ваальс (1837–1923) — нидерландский физик.

$$\left(p+\frac{a}{V_\mu^2}\right)\left(V_\mu-b\right)=RT, \qquad (2.67)$$

где $V_\mu$ — объем моля газа, $a$ и $b$ — поправки Ван-дер-Ваальса, определяемые экспериментально для каждого реального газа, $p$ — давление газа, $T$ — абсолютная температура.

Поправка $b$ учитывает наличие сил отталкивания молекул (их собственный объем), поправка $a$ — действие сил притяжения между молекулами, что приводит к появлению добавочного внутреннего давления.

Для произвольной массы газа уравнение (2.67) преобразуется к виду

$$\left(p+\frac{\nu^2 a}{V^2}\right)\left(\frac{V}{\nu}-b\right)=RT \text{ или } \left(p+\nu^2 a/V^2\right)\left(V-\nu b\right)=\nu RT, \qquad (2.68)$$

где $\nu = m/\mu$ — количество вещества, $V$ — объем газа.

Заметим, что уравнение Ван-дер-Ваальса также является приближенным. Это уравнение пригодно лишь для грубой оценки состояния реального газа.

## § 56. Изотермы реальных газов. Фазовые переходы

Раскрыв скобки в уравнении (2.67) и умножив его на $V_\mu^2$, получим кубическое уравнение относительно молярного объема:

$$pV_\mu^3-\left(pb+RT\right)V_\mu^2+aV_\mu-ab=0. \qquad (2.69)$$

Коэффициенты уравнения (2.69) зависят от давления, температуры и природы газа. В зависимости от их значений уравнение имеет один или три действительных корня. На рис. 53 представлены изотермы Ван-дер-Ваальса ($T_1 < T_2 < T_к < T_3$).

При температуре $T < T_к$ каждому значению давления $p$ соответствуют три различных изотермических состояния. С увеличением температуры точки *1*, *2* и *3* на изотермах сближаются и при температуре $T_к$, называемой *критической*, сливаются в одну точку $K$.

Касательная к изотерме в точке $K$ параллельна оси абсцисс. Из уравнения Ван-дер-Ваальса можно получить значения параметров состояния в критической точке:

$$V_{\mu,к} = 3b,\ p_к = a / (27b^2),$$

$$T_к = 8a / (27bR).$$

Впервые опытным путем изотермы реального газа (углекислоты) были получены английским физиком Т. Эндрюсом. Эти кривые имеют существенные различия с теоретическими изотермами Ван-дер-Ваальса только в области *1–2–3* (рис. 53). На опытных изотермах волнообразные теоретические кривые сменились прямолинейными участками, параллельными оси абсцисс, соединяющими точки *1*, *2* и *3*. Участок кривой *3′–3* соответствует состоянию ненасыщенного пара, *3–2′* — пересыщенного пара.

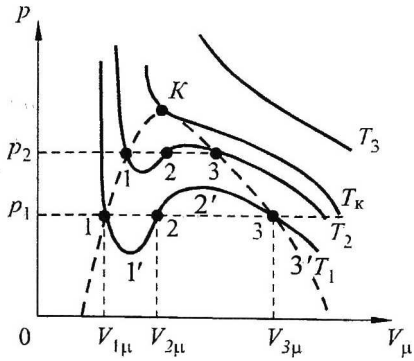



Рис. 53

Эти участки, а также участок *1–1′* при известных условиях можно получить опытным путем. И только участок кривой *1′–2′*, на котором с увеличением давления объем растет, в действительности не наблюдается.

Колоколообразная кривая (рис. 53, 54), проведенная через точки *1*, *3* и *K*, ограничивает области двухфазных состояний вещества. *Фазой* в термодинамике называется совокупность частей системы, имеющих одинаковые свойства.

На рис. 54 показаны области равновесных состояний вещества «ж–п» — область двухфазных состояний: жидкость–пар. Буквой «ж» обозначена область однородных жидких состояний, «п» — область пара, «г» — газообразное состояние.

Состояние пара отличается от газообразного тем, что при изотермическом сжатии вещество данного состояния претерпевает процесс ожижения.

При температурах, равных критической и выше, вещество становится вновь однородным при любых давлениях. Если температура выше критической, то вещество нельзя перевести в жидкое состояние.

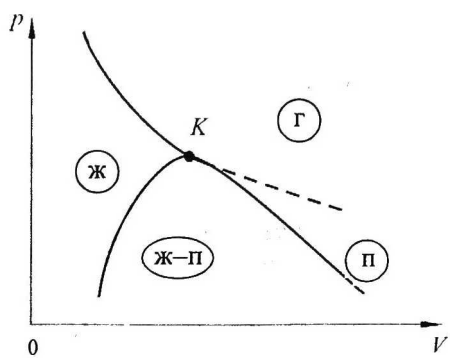



Рис. 54

## ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

**Задача 36.** Тепловая машина с идеальным газом в качестве рабочего вещества совершает обратимый цикл, состоящий из изобары *1–2*, адиабаты *2–3* и изотермы *3–1* (см. рисунок к задаче). Найти КПД машины как функцию максимальной $T_1$ и минимальной $T_2$ температуры рабочего вещества, используемого в этом цикле.

**Дано:**

$T_1$

$T_2$

---

$\eta = ?$

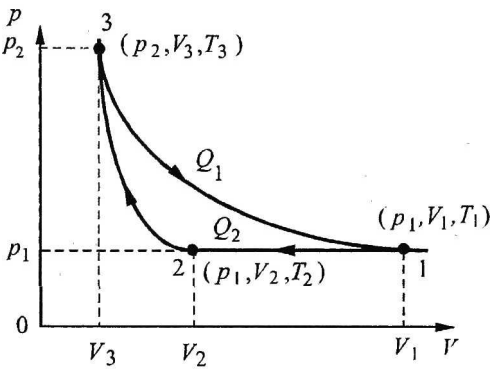



Рис. к задаче 36

**Решение.** Так как участок *3–1* — изотерма, то температура $T_3 = T_1$. Коэффициент полезного действия (КПД) цикла (2.57)

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}. \qquad (1)$$

На участке *3–1* рабочее вещество получает количество теплоты

$$Q_1 = \frac{m}{\mu} R T_1 \ln\left(\frac{V_1}{V_3}\right). \qquad (2)$$

На участке *1–2* происходит изобарное сжатие, рабочее вещество отдает количество теплоты холодильнику:

$$Q_2 = \frac{m}{\mu} c_P (T_2 - T_1) = -\frac{m}{\mu} c_P (T_1 - T_2). \qquad (3)$$

На этом участке объем газа уменьшается от $V_1$ до $V_2$. Согласно закону Гей-Люссака для изобарного процесса температура тоже уменьшается, т. е. $T_2 < T_1$.

Для определения КПД цикла подставим выражения (2) и (3) в формулу (1):

$$\eta = \frac{\frac{m}{\mu} RT_1 \ln\left(\frac{V_1}{V_3}\right) - \frac{m}{\mu} c_P (T_1 - T_2)}{\frac{m}{\mu} RT_1 \ln\left(\frac{V_1}{V_3}\right)}. \qquad (4)$$

Температуры и объемы газа, совершающего изобарный процесс, связаны между собой соотношением

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2}, \qquad (5)$$

а при адиабатном процессе соотношением (2.55):

$$\frac{V_2}{V_3} = \left(\frac{T_3}{T_2}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}. \qquad (6)$$

Перемножим левые и правые части уравнений (5) и (6):

$$\frac{V_1}{V_3} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}. \qquad (7)$$

Подставим выражение (7) в формулу (4):

$$\eta = \frac{RT_1 \ln\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - c_P (T_1 - T_2)}{RT_1 \ln\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}$$

или $$\eta = 1 - \frac{c_P(T_1 - T_2)}{RT_1\left(\frac{\gamma}{\gamma - 1}\right)\ln\left(\frac{T_1}{T_2}\right)}. \qquad (8)$$

Формулу (8) можно упростить, заменив $\gamma = \frac{c_P}{c_V}$ и используя уравнение (2.47) Майера:

$$\eta = 1 - \frac{T_1 - T_2}{T_1 \ln\left(\frac{T_1}{T_2}\right)},$$

**Ответ:** $$\eta = \frac{T_1 \ln\left(\frac{T_1}{T_2}\right) - (T_1 - T_2)}{T_1 \ln\left(\frac{T_1}{T_2}\right)}.$$

**Задача 37.** Найти изменение энтропии $\Delta S$, если 30 г льда превращают в пар. Начальная температура льда –40° С, а температура пара 100° С. Теплоемкости воды и льда считать постоянными, а все процессы — происходящими при атмосферном давлении.

**Дано:**

$m = 3 \cdot 10^{-2}$ кг

$T_0 = 233$ K, $T_n = 373$ K

$c_л = 2{,}1 \cdot 10^3 \frac{\text{Дж}}{(\text{кг} \cdot \text{K})}$

$c_в = 4{,}2 \cdot 10^3 \frac{\text{Дж}}{(\text{кг} \cdot \text{K})}$

$\lambda = 3{,}35 \cdot 10^5 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}}$

$r = 22{,}6 \cdot 10^5 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}}$

$\Delta S = ?$

**Решение.** Найдем отдельно изменение энтропии — при нагревании льда от –40° С до 0°С, плавлении льда, при нагревании образовавшейся изо льда воды до 100° С, превращении воды в пар при 100° С.

Полное изменение энтропии выразится суммой изменений энтропии $\Delta S_i$ для каждого из перечисленных процессов.

Изменение энтропии определяется формулой (2.65):

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{d'Q}{T}. \qquad (1)$$

При бесконечно малом изменении $dT$ температуры нагреваемого тела затрачивается количество теплоты

$$dQ_1 = cmdT, \tag{2}$$

где $c$ — удельная теплоемкость; $m$ — масса тела.

Найдем формулу для вычисления изменения энтропии при нагревании льда, подставив уравнение (2) в (1):

$$\Delta S_1 = \int_{T_0}^{T_1} \frac{c_л m dT}{T} = c_л m \ln\left(\frac{T_1}{T_0}\right),$$

где $T_1 = 273$ К.

После вычислений получим

$$\Delta S_1 = 2{,}1 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 10^{-2} \cdot \ln\left(\frac{273}{233}\right) \frac{\text{Дж}}{\text{К}} = 0{,}998 \cdot 10 \frac{\text{Дж}}{\text{К}} = 9{,}98 \frac{\text{Дж}}{\text{К}}. \tag{3}$$

При вычислении по формуле (1) изменения энтропии во время таяния льда температура $T$ выносится за знак интеграла как постоянная величина:

$$dQ_2 = \lambda m,$$

где $\lambda$ — удельная теплота плавления льда.

$$\Delta S_2 = \int_1^2 \frac{dQ_2}{T_1} = \frac{Q_2}{T_1} = \frac{m\lambda}{T_1}.$$

Произведем вычисления:

$$\Delta S_2 = \frac{3 \cdot 10^{-2} \cdot 3{,}35 \cdot 10^5}{273} \frac{\text{Дж}}{\text{К}} = 36{,}8 \frac{\text{Дж}}{\text{К}}. \tag{4}$$

Найдем следующую формулу для вычисления изменения энтропии при нагревании воды, полученной из льда, до 100° С.

$$\Delta S_3 = \int_{T_1}^{T_n} dQ_3 = \int_{T_1}^{T_n} \frac{c_в m dT}{T} = c_в m \ln\left(\frac{T_n}{T_1}\right),$$

где $T_n = 373$ К.

Проведем вычисления:

$$\Delta S_3 = 4{,}2 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 10^{-2} \cdot \ln\left(\frac{373}{273}\right) \frac{\text{Дж}}{\text{К}} = 39{,}3 \frac{\text{Дж}}{\text{К}}. \qquad (5)$$

Превращение воды в пар происходит при постоянной температуре, поэтому при вычислении изменения энтропии в формуле (1) выносим $T$ за знак интеграла:

$$Q_4 = rm,$$

где $r$ — удельная теплота испарения воды.

$$\Delta S_4 = \int_1^2 \frac{dQ_4}{T_n} = \frac{Q_4}{T_n} = \frac{rm}{T_n}.$$

Вычислим $\Delta S_4$:

$$\Delta S_4 = \frac{22{,}6 \cdot 10^5 \cdot 3 \cdot 10^{-2}}{373} \frac{\text{Дж}}{\text{К}} = 180 \frac{\text{Дж}}{\text{К}}. \qquad (6)$$

Полное изменение энтропии :

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3 + \Delta S_4,$$

$$\Delta S = 266 \frac{\text{Дж}}{\text{К}}.$$

**Ответ:** $266 \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$.

# Глава 11
# ЖИДКОЕ И ТВЕРДОЕ СОСТОЯНИЯ

## § 57. Поверхностное натяжение жидкости

Согласно молекулярно-кинетической теории каждая молекула жидкости испытывает притяжение со стороны других молекул. При удалении молекул друг от друга силы притяжения быстро уменьшаются. На расстоянии порядка $\sim 10^{-9}$ м, называемом *радиусом молекулярного действия* $r$, силами молекулярного притяжения можно пренебречь ввиду их малости.

Рассмотрим отдельную молекулу $A$ (рис. 55), находящуюся внутри жидкости. Если провести вокруг этой молекулы сферу радиусом $r$, то силы притяжения со стороны молекул, заключенных в данной сфере, будут направлены в разные стороны и их равнодействующая будет равна нулю.

Выделим молекулу $B$, находящуюся на расстоянии меньше $r$ от поверхности жидкости. Снова проведем сферу радиусом $r$ вокруг молекулы. Как видно из рис. 55, часть этой сферы выйдет за пределы жидкости.

В связи с тем, что концентрация молекул газа над жидкостью мала, равнодействующая сил молекулярного притяжения $\vec{F}$, действующих на молекулу $B$, не будет равна нулю. Эта равнодействующая направлена внутрь жидкости. Таким образом, молекулы поверхностного слоя жидкости оказывают на жидкость давление, которое называют *молекулярным давлением*. Жидкость оказывается сжатой. Поэтому жидкости малосжимаемы при внешнем воздействии.

Молекулы жидкости в поверхностном слое за счет сил межмолекулярного взаимодействия обладают большей потенциальной энергией по сравнению с другими молекулами. Чтобы молекула из глубины жидкости переместилась к ее поверхности, необходимо совершить работу против сил, действующих в поверхностном слое. Эта работа совершается за счет уменьшения кинетической энергии теплового движения молекулы и расходуется на увеличение ее потенциальной энергии.

Итак, молекулы в поверхностном слое жидкости обладают дополнительной поверхностной энергией $\Delta E$. Величина энергии $\Delta E$ тем больше, чем больше поверхность жидкости.

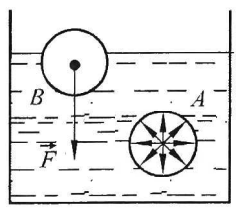



Рис. 55

Для увеличения поверхности жидкости необходимо совершить работу $\Delta A$ против сил поверхностного натяжения:

$$\Delta A = \sigma \Delta S,$$

откуда

$$\sigma = \frac{\Delta A}{\Delta S}, \tag{2.70}$$

где $\Delta S$ — приращение площади поверхностного слоя жидкости.

*Поверхностное натяжение* $\sigma$ равно отношению работы, которую необходимо совершить, чтобы увеличить поверхность жидкости площадью $\Delta S$, к площади этой поверхности.

Если поверхность жидкости ограничена каким-либо замкнутым контуром, то на нее будут действовать силы, стремящиеся сократить эту поверхность. Эти силы называются *силами поверхностного натяжения.*

*Поверхностным натяжением* $\sigma$ называется физическая величина, равная отношению силы $F$, действующей на участок контура поверхности, к длине $l$ этого участка:

$$\sigma = F / l. \tag{2.71}$$

Поверхностное натяжение измеряется в джоулях на квадратный метр (Дж/м$^2$) или в ньютонах на метр (Н/м).

## § 58. Смачивание. Капиллярные явления

Можно наблюдать, как легко капля воды растекается по поверхности стола, прилипая к нему, а капля ртути свободно перекатывается с одного места на другое, образуя шарик. При этом молекулы ртути преодолевают не только силу тяжести, но и силу притяжения к молекулам стола. Следовательно, силы притяжения молекул ртути друг к другу сильнее, чем к молекулам стола.

В первом случае жидкость *смачивает* поверхность твердого тела, а во втором — *не смачивает.* Без каких-либо внешних воздействий капелька ртути принимает сферическую форму. Стремление поверхности жидкости к сокращению приводит к тому, что давление под выпуклой поверхностью больше, а под вогнутой меньше, чем под плоской. Силы поверхностного натяжения создают *добавочное давление* $p$ (в случае выпуклой поверхности — положительное, а при вогнутой — отрицательное). Вычислим давление $p$ для сферической поверхности.

Пусть радиус сферы $r$ увеличивается на малую величину $\Delta r$. При этом поверхность сферы увеличивается на величину $\Delta S = 8\pi r \Delta r$, а объем — на величину $\Delta V = 4\pi r^2 \Delta r$. Найдем работу $\Delta A$ по увеличению объема:

$$\Delta A = p\Delta V = 4\pi r^2 p\Delta r.$$

Для образования новой поверхности $\Delta S$ требуется совершить работу

$$\Delta A_1 = \Delta S \cdot \sigma = 8\pi r \sigma \Delta r.$$

Приравнивая $\Delta A$ и $\Delta A_1$, найдем величину добавочного давления:

$$p = 2\sigma / r. \qquad (2.72)$$

Для поверхности любой формы добавочное давление можно рассчитать по формуле П. Лапласа:

$$p = \sigma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right),$$

где $R_1$ и $R_2$ — радиусы кривизны поверхности.

Жидкость может смачивать поверхность одного тела и не смачивать поверхность другого. Например, вода смачивает стекло, дерево, но не смачивает парафин. Ртуть смачивает поверхности металлов, но не смачивает стекло, дерево и т. д.

Если опустить в воду тонкие стеклянные трубки разного диаметра (капилляры), то жидкость в капиллярах поднимется на разную высоту. Чем тоньше капилляр, тем на большую высоту поднимется жидкость. Если взять жидкость, не смачивающую трубку, например ртуть, то уровень жидкости в капилляре будет ниже уровня жидкости в сосуде (рис. 56, а). Наблюдаемые явления изменения высоты уровней жидкости в капиллярах получили название *капиллярных явлений*.

Если жидкость смачивает трубку (рис. 56, б), то поверхность жидкости в трубке (мениск) имеет вогнутую форму, если не смачивает — выпуклую (рис. 56, а). Под вогнутой поверхностью образуется отрицательное добавочное давление, и жидкость поднимается вверх по капилляру до тех пор, пока это давление не уравновесится высотой столба жидкости в капилляре (гидростатическим давлением).

Найдем высоту подъема жидкости $h$ в капилляре. Пусть жидкость смачивает капилляр радиусом $r$ (рис. 56), образуя вверху вогнутый мениск. Наименьший радиус кривизны мениска $\approx r$. Как

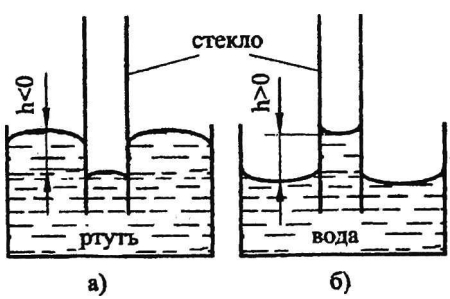



Рис. 56

следует из уравнения (2.72), добавочное давление $p \approx 2\sigma / r$. Тогда величина направленной вверх силы

$$F = 2\sigma S / r,$$

где $S$ — площадь поперечного сечения трубки.

Эта сила уравновешивается силой тяжести столбика жидкости $mg = h\rho gS$, т. е. $F = mg$ или

$$2\sigma S / r = h\rho gS, \tag{2.73}$$

где $\rho$ — плотность жидкости.

Из уравнения (2.73) находим

$$h = 2\sigma / (\rho r g). \tag{2.74}$$

Для несмачивающей жидкости мениск выпуклый и добавочное давление дает силу, направленную вниз. Уровень жидкости в капиллярной трубке при этом будет ниже уровня жидкости в сосуде на величину $h$, определяемую формулой (2.74).

## § 59. Элементы динамики жидкостей и газов. Уравнение неразрывности

Жидкости и газы являются текучими средами: если на частицы жидкости или газа действуют сдвигающиеся внешние силы, то частицы будут перемещаться до тех пор, пока не исчезнут или не уравновесятся эти силы. Внутренние силы не могут остановить это движение, но могут его замедлять. Тормозящие силы, возникающие между слоями движущейся жидкости или газа, называются *силами вязкого трения.*

Жидкость, в отличие от газа, считается средой несжимаемой, иногда и газ до определенных границ можно рассматривать как несжимаемый.

Рассмотрим течение жидкости по трубе с переменным сечением. Уравнение неразрывности выводится на основании закона сохранения массы и невозможности разрыва жидкости и образования в ней пустот (отсюда происходит название закона).

Рассмотрим жидкость в объеме $V$ между сечениями $S_1$ и $S_2$ (рис. 57).

Так как жидкость несжимаемая и в ней не могут образовываться пустоты, то масса жидкости между сечениями $S_1$ и $S_2$ не может измениться. За время $\Delta t$ жидкость пройдет через сечение $S_1$ и переместится на расстояние

$$l_1 = \mathrm{v}_1 \Delta t\,.$$

В объем $V$ втечет жидкость, имеющая объем

$$V_1 = l_1 S_1 = S_1 \mathrm{v}_1 \Delta t, \tag{2.75}$$

масса которой

$$m_1 = \rho V_1 = \rho S_1 \mathrm{v}_1 \Delta t\,. \tag{2.76}$$

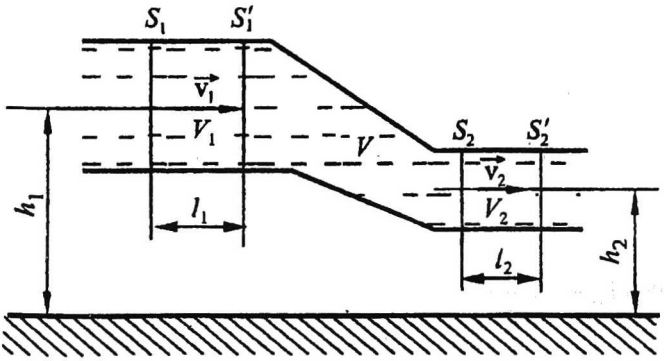



Рис. 57

Здесь ρ — плотность жидкости, $v_1$ — ее скорость в сечении $S_1$.

Аналогично для сечения $S_2$ получим

$$V_2 = l_2 S_2 = S_2 v_2 \Delta t, \tag{2.77}$$

$$m_2 = \rho V_2 = \rho S_2 v_2 \Delta t. \tag{2.78}$$

Так как масса жидкости в объеме $V$ не может измениться, то

$$m_1 = m_2. \tag{2.79}$$

Подставив в (2.79) уравнения (2.75)–(2.78), получим

$$S_1 l_1 = S_2 l_2, \tag{2.80}$$

т. е.

$$V_1 = V_2, \tag{2.81}$$

$$S_1 v_1 = S_2 v_2 = \text{const}. \tag{2.82}$$

Соотношение (2.82) называется *уравнением неразрывности* для несжимаемой жидкости: *произведение скорости течения несжимаемой жидкости на ее поперечное сечение есть величина постоянная.*

## § 60. Уравнение Бернулли

Уравнение Д. Бернулли[1] выводится из закона сохранения энергии для *идеальной* (без вязкости) жидкости для стационарных течений. *Стационарным* называется течение, при котором скорость жидкости в каждой точке течения не меняется со временем. Для реальных жидкостей уравнением Бернулли можно пользоваться, если у них малая вязкость.

[1] Даниил Бернулли (1700–1782) — швейцарский ученый.

Рассмотрим жидкость, движущуюся по трубе между сечениями $S_1$ и $S_2$ (рис. 57). Так как течение стационарное, то кинетическая энергия жидкости в объеме $V$ между сечениями $S_1$ и $S_2$ не изменится. А так как труба неподвижная, то не изменится и потенциальная энергия жидкости в этом объеме. Таким образом, полная механическая энергия рассматриваемого объема жидкости в момент времени $t$ будет равна

$$E_1 = E_V + m_1 g h_1 + m_1 v_1^2/2, \qquad (2.83)$$

а в конце промежутка времени $\Delta t$

$$E_2 = E_V + m_2 g h_2 + m_2 v_2^2/2, \qquad (2.84)$$

где $E_V$ — энергия жидкости в объеме $V$. В сечении $S_1$ жидкость, которая находится слева от этого сечения, совершит работу

$$A_1 = p_1 S_1 l_1 = p_1 V_1, \qquad (2.85)$$

которая пойдет на увеличение энергии жидкости между сечениями $S_1$ и $S_2$. В свою очередь, эта жидкость совершит работу в сечении $S_2$

$$A_2 = p_2 S_2 l_2 = p_2 V_2, \qquad (2.86)$$

что уменьшит ее энергию на эту величину. Здесь $p_1$ и $p_2$ — давления жидкости в объемах $V_1$ и $V_2$ соответственно. В результате получим

$$E_2 - E_1 = A_1 - A_2 \text{ или } E_2 + A_2 = E_1 + A_1. \qquad (2.87)$$

Подставив в уравнение (2.87) соотношения (2.83)–(2.86), получим

$$E_V + m_2 g h_2 + m_2 v_2^2/2 + p_2 V_2 = E_V + m_1 g h_1 + m_1 v_1^2/2 + p_1 V_1. \qquad (2.88)$$

Учитывая, что $m_1 = m_2$, и поделив уравнение (2.88) на $V_1 = V_2$, получим уравнение Бернулли:

$$\rho v_2^2/2 + \rho g h_2 + p_2 = \rho v_1^2/2 + \rho g h_1 + p_1. \qquad (2.89)$$

Оно выполняется для любых точек стационарного течения идеальной жидкости.

В технике величина $\rho g h$ называется *гидростатическим напором* (давлением); $\rho v^2/2$ — *гидродинамическим* (скоростным) напором; $p$ — *статическим давлением*, а их сумма $\rho v^2/2 + \rho g h + p$ — *полным давлением*.

Частные случаи.

1. Пусть жидкость покоится, т. е. $v_1 = v_2 = 0$. Тогда из уравнения (2.89) получим

$$p_2 = p_1 + \rho g (h_1 - h_2);$$

$$p_2 - p_1 = \Delta p,$$

отсюда

$$\Delta p = \rho g(h_1 - h_2) = \rho g h. \qquad (2.90)$$

*В покоящейся жидкости изменение статического давления равно гидростатическому напору.* Так как в неподвижной жидкости силы вязкости отсутствуют, то уравнение (2.90) верно и для реальных жидкостей.

2. Пусть труба, по которой течет жидкость, горизонтальная, т. е. $h_1 = h_2$. Тогда из уравнения (2.89) имеем

$$\rho v_2^2/2 + p_2 = \rho v_1^2/2 + p_1. \qquad (2.91)$$

Пусть $v_2 > v_1$, тогда $p_2 < p_1$. *В горизонтальной трубе давление меньше там, где скорость потока больше* (сужение трубы). Уравнение Бернулли используется для объяснения явлений в различных технических устройствах.

## § 61. Применение уравнения Бернулли

### *1. Подъемная сила крыла самолета*

Происхождение подъемной силы крыла самолета было объяснено выдающимся русским ученым Н. Е. Жуковским. В деталях теория довольно сложна. Приведем ее в упрощенном виде.

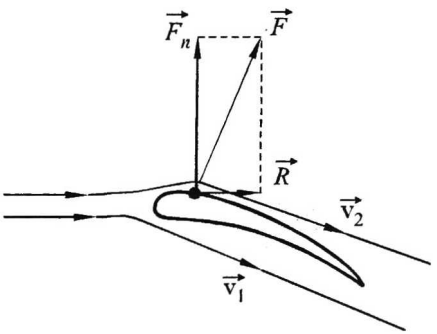


Рис. 58

Профиль крыла самолета (рис. 58) имеет такую форму, что скорость обтекающего потока воздуха относительно крыла внизу меньше, а вверху больше: $v_2 > v_1$. Поэтому давление под крылом больше, чем над крылом: $p_1 > p_2$. Это приводит к избыточной силе $\vec{F}$, которую можно разложить на две составляющие: подъемную силу $\vec{F}_{\text{п}}$ и силу сопротивления $\vec{R}$.

Таким же образом объясняется происхождение подъемной силы у кораблей на подводных крыльях.

### *2. Измерение скорости течения жидкости и газа*

Рассмотрим схему, изображенную на рис. 59. Применив уравнение Бернулли для впаянных в трубу *1* тонких вертикальных трубок *2* и *3*, получим для каждой из них:

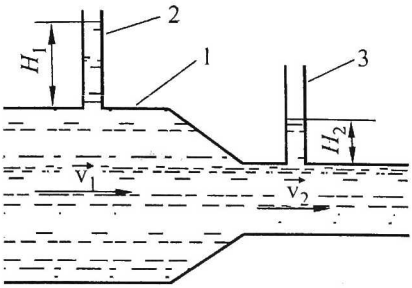



Рис. 59

$$p_1 = \rho g H_1,$$
$$p_2 = \rho g H_2. \qquad (2.92)$$

В широкой части давление больше, поэтому и высота поднятия жидкости больше.

Используя уравнение Бернулли для горизонтальной трубы (2.91) и уравнение (2.92), получим

$$v_2^2 - v_1^2 = 2(p_1 - p_2)/\rho = 2g(H_1 - H_2). \qquad (2.93)$$

Таким образом, если известна скорость течения в одной точке (пусть $v_1$), то, измерив манометром разность давлений или разность высот жидкости в трубках, которые и являются в этом случае манометрами, по формуле (2.93) можно определить скорость течения $v_2$.

Подобным методом можно измерять скорость самолета относительно воздуха (рис. 60).

За борт самолета выводится тонкая трубка, называемая трубкой А. Пито[1]. Трубка Пито присоединяется к дифференциальному манометру, измеряющему разность давлений: полного — с помощью внутреннего канала *1* и статического — с помощью канала *2*. Разность этих давлений есть динамический напор $\rho v^2/2$.

Если манометр проградуировать в величинах скорости, учитывая изменение плотности воздуха, то получим прибор для измерения скорости полета самолета.

## § 62. Твердые тела. Кристаллические и аморфные тела

Твердые тела, в которых молекулы, атомы и ионы расположены упорядоченно, образуя периодически повторяющуюся структуру, называются *кристаллами*. Кристаллические тела *анизотропны*, т. е. их физические свойства — сжимаемость (упругость), теплопроводность, электропроводность и т. д. — зависят от направления в кристалле. Анизотропия свойств кристаллических тел обусловлена упорядоченным расположением частиц, из которых они состоят. При таком расположении частиц межатомные расстояния и силы взаимодействия между частицами разные.

[1] Анри Пито (1695–1771) — французский геометр и инженер.

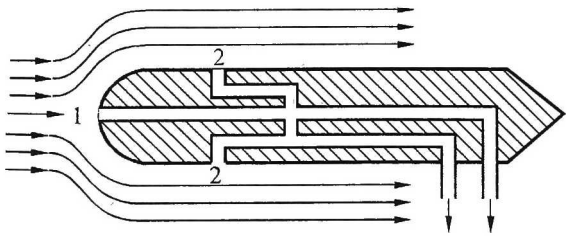



Рис. 60

Кристаллические тела чаще всего встречаются в виде *поликристаллов,* представляющих собой множество беспорядочно ориентированных, сросшихся воедино кристалликов. В целом твердом поликристалле анизотропия, присущая отдельному кристаллику, не обнаруживается.

При некоторых специальных условиях кристаллизации можно получить большие однородные кристаллы — *монокристаллы*. Монокристалл имеет периодически повторяющуюся внутреннюю структуру во всем объеме.

Мельчайшие частицы вещества — атомы, ионы, молекулы — в кристалле размещаются в узлах пространственной решетки, состоящей из большого числа *элементарных кристаллических ячеек.* В этом смысле говорят о *дальнем порядке* в твердых телах. Размещение частиц в элементарной ячейке зависит от действующих на них межатомных сил.

Кристаллическая решетка, образованная положительными и отрицательными ионами (ионная решетка), показана на рис. 61. Связь между частицами в решетке в основном обусловлена силами кулоновского взаимодействия.

Кристаллическая решетка обладает различными видами симметрии. *Симметрией решетки* называют ее свойство совмещаться с собой при некоторых пространственных перемещениях. Существует 14 типов решеток, различающихся по виду симметрии.

Твердые тела, физические свойства которых одинаковы по всем направлениям, называются *аморфными телами* (стекло, янтарь, смола и т. д.). Аморфные тела *изотропны*, что объясняется беспорядочностью расположения частиц, составляющих тела.

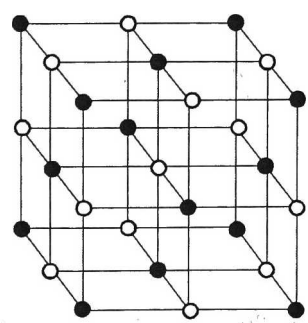


Рис. 61

## § 63. Механические свойства твердых тел

*Деформацией* называется изменение объема или формы твердых тел при нагревании или при воздействии внешних сил. При деформации в телах возникают внутренние силы, препятствующие смещению частиц тела и стремящиеся возвратить его в первоначальное состояние.

Деформации называются *упругими*, если они исчезают после прекращения действий внешних сил. Деформации, в результате которых происходит необратимая перестройка кристаллической решетки, называются *пластическими*.

Пусть $l$ — первоначальная величина, характеризующая размер тела (например, его длину), а $\Delta l$ — абсолютное изменение этой величины. Отношение $\Delta l/l = \varepsilon$ является мерой деформации и называется *относительной деформацией тела.*

На рис. 62 показан график зависимости нормального напряжения $\sigma = F/S$ от относительного удлинения $\varepsilon = \Delta l / l$ при растяжении тела. Здесь $F$ — растягивающая сила, $S$ — площадь поперечного сечения.

В области *0–1* упругие деформации подчиняются закону Р. Гука: напряжение $\sigma$, возникающее под действием внешних сил, прямо пропорционально относительной деформации $\varepsilon$:

$$\sigma = E\varepsilon = E\Delta l / l ,$$

где $E$ — модуль Юнга.

Максимальное напряжение $\sigma_{max}$, после снятия которого тело еще способно восстановить первоначальную форму и объем, называется *пределом упругости*. Пределу упругости на графике соответствует точка *2*.

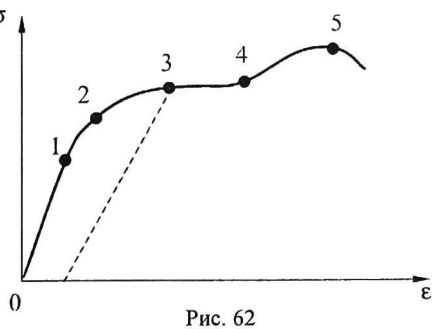


Рис. 62

При дальнейшем увеличении напряжения возникают остаточные деформации (участок *2–3*), затем удлинение деформированного тела происходит без увеличения внешней нагрузки (участок *3–4*). Точка *3* на графике соответствует *пределу текучести.*

Наибольшее напряжение, которое выдерживает тело, не разрушаясь, называется *пределом прочности* (точка *5*). На практике, чтобы избежать разрушения какой-либо детали, ее проектируют с запасом прочности.

Отношение

$$\sigma_{\text{проч}} / \sigma_{\text{доп}} = n \qquad (2.94)$$

называется *запасом прочности*. Здесь $\sigma_{\text{проч}}$ — предел прочности материала, $\sigma_{\text{доп}}$ — допустимое напряжение.

При растяжении и сжатии тел происходит изменение их поперечных размеров.

Диаграмма напряжений (рис. 62) для реальных твердых тел зависит от многих факторов. Например, при кратковременном действии сил твердое тело может проявлять себя как хрупкое, а при длительном воздействии слабых сил является текучим.

# ЧАСТЬ 3
# ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

## Глава 12
## ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ

### § 64. Электрический заряд. Закон Кулона

*Электростатика* — это раздел электродинамики, в котором изучается взаимодействие покоящихся электрических зарядов и их полей.

*Электрический заряд* — это физическая величина, определяющая интенсивность электромагнитных взаимодействий заряженных частиц. Электрический заряд не может меняться непрерывно как угодно малыми порциями. Наименьшая величина электрического заряда равна $e_0 = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл. Этот заряд называется *элементарным зарядом*. Элементарный электрический заряд равен заряду протона и по абсолютной величине — заряду электрона.

Электрические заряды бывают двух видов: *положительные и отрицательные*. Одноименные заряды отталкиваются, а разноименные — притягиваются. Электрический заряд аддитивен: заряд любой системы равен сумме зарядов, находящихся на телах системы. Электрический заряд в системе СИ измеряется в кулонах (Кл). 1 Кл — это количество электричества, протекающее через поперечное сечение проводника в 1 с при силе тока в 1 А.

Закон сохранения электрического заряда:

*В замкнутой системе алгебраическая сумма зарядов всех частиц остается постоянной:*

$$\sum_{i=1}^{n} q_i = const,$$

где $n$ — число зарядов в системе; $q_i$ — заряд $i$-й частицы.

*Закон Кулона.* В 1785 г. Кулон[1] экспериментально установил закон, который определяет силу взаимодействия точечных зарядов. *Точечным зарядом* называется заряженное тело, размерами которого можно пренебречь по сравнению с расстоянием от этого тела до других заряженных тел. Кулон измерил силу взаимодействия двух заряженных шариков на крутильных весах.

[1] Шарль Огюстен Кулон (1736–1806) — французский физик и инженер.

Закон Кулона гласит: *сила взаимодействия двух неподвижных точечных зарядов, находящихся в вакууме, прямо пропорциональна произведению модулей зарядов и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними:*

$$|\vec{F}| = k\frac{q_1 q_2}{r^2},$$

где $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9\cdot 10^9 \dfrac{\text{Н}\cdot\text{м}^2}{\text{Кл}^2}$,

$$\text{или } |\vec{F}| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}, \qquad (3.1)$$

где $\vec{F}$ — сила, действующая на заряд, к которому обращен вектор $\vec{r}$, проведенный от данного заряда к другому заряду (рис. 63); $r$ — расстояние между зарядами $q_1$ и $q_2$; $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot 10^{-12} \dfrac{\text{Кл}^2}{\text{Н}\cdot\text{м}^2}$ — электрическая постоянная.

Сила Кулона действует вдоль прямой, соединяющей заряды, а ее направление зависит от знаков взаимодействующих зарядов.

Из экспериментов установлено, что сила электростатического взаимодействия зарядов зависит от свойств среды, в которой они находятся.

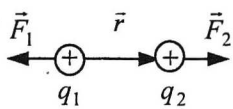


Рис. 63

Безразмерная физическая величина $\varepsilon$, равная отношению модуля силы взаимодействия двух точечных зарядов в вакууме $F_0$ к модулю силы их взаимодействия в веществе $F$, называется *диэлектрической проницаемостью вещества*:

$$\varepsilon = \frac{|F_0|}{|F|}.$$

Для любой среды, кроме вакуума (для вакуума $\varepsilon = 1$), закон Кулона имеет вид

$$|\vec{F}| = k\frac{q_1 q_2}{\varepsilon r^2}. \qquad (3.2)$$

## § 65. Электростатическое поле. Напряженность электростатического поля

Если в пространство, где имеется электрический заряд, внести другой заряд, то на него будет действовать сила Кулона. Следовательно, в окружаемом электрический заряд пространстве существует силовое электростатическое поле.

*Электростатическое поле* — это форма материи, осуществляющая взаимодействия между неподвижными заряженными телами.

Силовой характеристикой электростатического поля является вектор напряженности $\vec{E}$.

*Напряженностью поля* в данной точке называется физическая величина, равная отношению силы, действующей на заряд, внесенный в данную точку поля (пробный заряд), к величине этого заряда:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}.$$

Единицей напряженности в системе СИ является ньютон на кулон ($\frac{\text{Н}}{\text{Кл}}$) или вольт на метр ($\frac{\text{В}}{\text{м}}$).

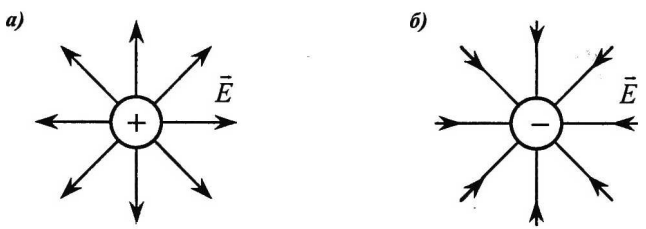



Рис. 64

Направление вектора напряженности совпадает с направлением силы, действующей на пробный положительный заряд, внесенный в данную точку поля. Электростатическое поле принято изображать графически с помощью силовых линий.

*Силовой линией* (линией напряженности) электростатического поля называется линия, в каждой точке которой вектор напряженности касателен к ней. Линии напряженности поля точечного заряда — это прямые, начинающиеся на положительном заряде и уходящие в бесконечность (рис. 64,а) или начинающиеся в бесконечности и заканчивающиеся на отрицательном заряде (рис. 64,б).

Поле называется *однородным*, если вектор $\vec{E}$ не зависит от координат пространства ($\vec{E} = \text{const}$). Силовые линии однородного поля — эквидистантные параллельные прямые. Например, поле, создаваемое двумя параллельными бесконечными плоскостями (рис. 65,а), является однородным.

Поле точечного заряда является *центральным*, т. к. силовые линии поля пересекаются в одной точке (рис. 65,б). Найдем напряженность поля в точке А на расстоянии $\vec{r}$ от точечного заряда $q$. Мысленно внесем в эту точку пробный заряд $q_{\text{пр}}$. На этот заряд будет действовать кулоновская

сила

$$F = k\frac{|qq_{\text{пр}}|}{r^2}.$$

По определению напряженность

$$E_{\text{A}} = \frac{F}{|q_{\text{пр}}|} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q|}{r^2}. \qquad (3.3)$$

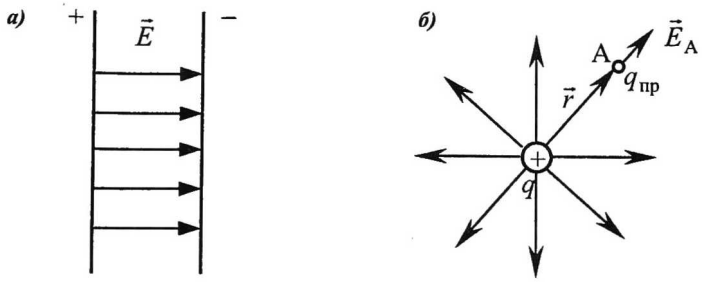



Рис. 65

Если электростатическое поле создано системой точечных зарядов, то напряженность поля можно определить по *принципу суперпозиции: результирующая напряженность* $\vec{E}$ *в какой-либо точке поля, создаваемого несколькими зарядами, равна векторной сумме напряженностей* $\vec{E}_i$, *создаваемых в этой точке отдельными зарядами* $q_i$ *:*

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + ... + \vec{E}_n = \sum_{i=1}^{n}\vec{E}_i\,. \qquad (3.4)$$

## § 66. Поток вектора напряженности. Теорема Гаусса

*Потоком вектора напряженности* через элементарную площадку $dS$ называется физическая величина $d\Phi$, равная произведению модуля вектора напряженности электростатического поля $E$ на площадь площадки и на косинус угла $\alpha$ между нормалью к площадке $\vec{n}$ и вектором $\vec{E}$ (рис. 66).

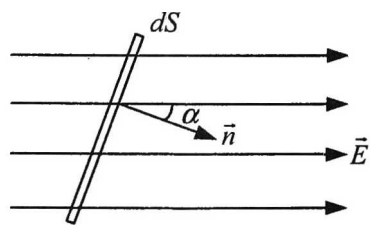



Рис. 66

Выражение для потока вектора $\vec{E}$ можно записать в виде скалярного произведения:

$$d\Phi = \vec{E}d\vec{S} = EdS\cos\alpha = E_n dS\,, \qquad (3.5)$$

где $E_n = E\cos\alpha$ — проекция вектора $\vec{E}$ на нормаль $\vec{n}$ к площадке $dS$; $d\vec{S}$ — вектор, модуль которого равен $dS$, а направление совпадает с нормалью $\vec{n}$.

Поток вектора напряженности $\Phi$ — скалярная величина. Знак потока зависит от выбора направления нормали. В системе СИ поток напряженности измеряется в вольт-метрах (В·м).

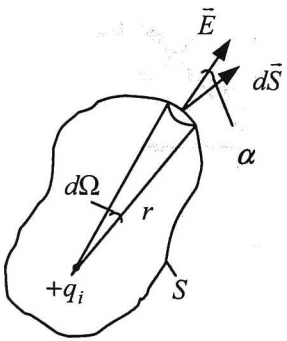


Рис. 67

Итак, поток вектора напряженности $\vec{E}$ сквозь произвольную поверхность S равен

$$\Phi = \int_S \vec{E}d\vec{S}. \qquad (3.6)$$

Подсчитаем поток вектора напряженности $\vec{E}$ для поля одного точечного заряда $q_i$, находящегося внутри произвольной замкнутой поверхности $S$ (рис. 67).

Выделим на поверхности элемент $d\vec{S}$, находящийся на расстоянии $r$ от заряда. Пусть заряд $q_i$ положительный.

Запишем поток вектора $\vec{E}$ сквозь элемент $d\vec{S}$:

$$d\Phi = \vec{E}d\vec{S} = EdS\cos\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{r^2}dS\cos\alpha = \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0}d\Omega,$$

где $d\Omega$ — телесный угол.

Интегрируя полученное выражение по всему телесному углу, получим

$$\Phi = \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{4\pi} d\Omega = \frac{q_i}{\varepsilon_0}. \qquad (3.7)$$

Если электрическое поле создается системой точечных зарядов $q_1$, $q_2$ и т. д., находящихся внутри замкнутой поверхности, то поток вектора напряженности можно записать следующим образом:

$$\oint \vec{E}d\vec{S} = \oint(\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + ...)d\vec{S} = \oint \vec{E}_1 d\vec{S} + \oint \vec{E}_2 d\vec{S} + ... = \Phi_1 + \Phi_2 + ...$$

Согласно (3.7), $\oint \vec{E}_1 d\vec{S} = \frac{q_1}{\varepsilon_0}$, $\oint \vec{E}_2 d\vec{S} = \frac{q_2}{\varepsilon_0}$ и т. д. Следовательно,

$$\oint \vec{E}d\vec{S} = \frac{q_1}{\varepsilon_0} + \frac{q_2}{\varepsilon_0} + ... = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} q_i, \qquad (3.8)$$

где $n$ — число точечных зарядов.

Формула (3.8) известна под названием теоремы Гаусса[1]: *Поток вектора напряженности электростатического поля сквозь произвольную замкнутую поверхность $S$ равен алгебраической сумме зарядов $\sum q_i$, находящихся внутри этой поверхности, деленной на $\varepsilon_0$.*

Если электрические заряды распределены неравномерно с *объемной плотностью заряда* $\rho = \dfrac{dq}{dV}$, то теорема Гаусса примет вид

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int \rho dV .$$

Когда заряд $q$ находится вне замкнутой поверхности, то поток вектора $\vec{E}$ через нее равен нулю.

## § 67. Потенциал электростатического поля. Циркуляция вектора напряженности

Допустим, что электростатическое поле создано неподвижным положительным точечным зарядом $q$. В любой точке этого поля на точечный пробный заряд $q_{\text{пр}}$ (рис. 68) действует переменная по величине и направлению сила Кулона. Найдем работу, совершаемую силами поля, по перемещению заряда $q_{\text{пр}}$ из точки 1 в точку 2.

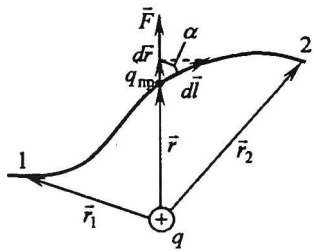



Рис. 68

Как известно из механики, работа переменной силы определяется интегралом от скалярного произведения силы $\vec{F}$ на элементарное перемещение $d\vec{l}$:

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F} d\vec{l} = \int_1^2 F dl \cos\alpha . \qquad (3.9)$$

По закону Кулона сила $F = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{qq_{\text{пр}}}{r^2}$, а $dl\cos\alpha = dr$ (см. рис. 68), тогда выражение (3.9) можно представить в виде

$$A_{12} = \frac{qq_{\text{пр}}}{4\pi\varepsilon_0} \int_1^2 \frac{dr}{r^2} = \frac{qq_{\text{пр}}}{4\pi\varepsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \qquad (3.10)$$

[1] Карл Фридрих Гаусс (1777–1855) — немецкий физик и математик.

Уравнение (3.10) показывает, что работа сил электростатического поля не зависит от формы траектории, а зависит от начального и конечного положения заряда $q_{\text{пр}}$. Силы, производящие такую работу, называются *потенциальными (или консервативными).*

Из механики известно, что работа консервативных сил равна убыли потенциальной энергии системы:

$$A_{12} = W_1 - W_2 = -\Delta W_p. \tag{3.11}$$

Таким образом, работа сил электростатического поля равна убыли потенциальной энергии заряда в рассматриваемом поле.

Сопоставляя уравнения (3.10) и (3.11), приходим к выводу, что потенциальная энергия заряда $q_{\text{пр}}$ в электростатическом поле равна

$$W_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_{\text{пр}}}{r}. \tag{3.12}$$

Если уравнение (3.12) разделить на $q_{\text{пр}}$, то получим физическую величину, которая характеризует только поле и не зависит от величины пробного заряда.

Физическая величина

$$\varphi = \frac{W_p}{q_{\text{пр}}}$$

называется *потенциалом поля* в данной точке и является энергетической характеристикой поля. Это величина скалярная.

Уравнение (3.10) можно переписать в виде

$$A_{12} = q_{\text{пр}}(\varphi_1 - \varphi_2). \tag{3.13}$$

Эта формула справедлива при расчетах работы в любых электростатических полях, а не только в поле точечного заряда.

По определению потенциал поля точечного заряда

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_{\text{пр}}}{r}\frac{1}{q_{\text{пр}}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}. \tag{3.14}$$

Если поле создается системой точечных зарядов, то по принципу суперпозиции результирующий потенциал в данной точке равен *алгебраической сумме потенциалов*, создаваемых в этой точке поля каждым зарядом в отдельности:

$$\varphi = \sum \varphi_i.$$

В уравнении (3.13) обозначим: $\varphi_1 - \varphi_2 = \Delta\varphi$ — разность потенциалов между двумя точками поля:

$$\Delta\varphi = \frac{A_{12}}{q_{\text{пр}}}.$$

*Разностью потенциалов* между двумя точками поля называется физическая величина, равная отношению работы по перемещению пробного заряда между этими точками к величине пробного заряда.

В системе СИ разность потенциалов измеряется в вольтах (В).

1 В — это разность потенциалов между такими точками электростатического поля, при перемещении между которыми заряда в 1 Кл силы поля совершают работу в 1 Дж.

Согласно формуле (3.3) сила

$$F = Eq_{\text{пр}}.$$

Тогда работа, совершаемая силами поля над зарядом $q_{\text{пр}}$ при движении его по замкнутому контуру, равна

$$A = \oint_l q_{\text{пр}} E_l dl,$$

где $E_l = E\cos\alpha$ — проекция вектора $\vec{E}$ на направление элементарного перемещения $d\vec{l}$.

Из уравнения (3.10) видно, что работа потенциальных (консервативных) сил на замкнутом пути равна нулю, значит

$$\oint_l q_{\text{пр}} E_l dl = 0. \qquad (3.15)$$

Поскольку $q_{\text{пр}} \neq 0$, то из соотношения (3.15) следует:

$$\oint_l E_l dl = 0. \qquad (3.16)$$

Интеграл $\oint_l E_l dl$ называется *циркуляцией вектора напряженности.*

*Циркуляция вектора $\vec{E}$ в любом электростатическом поле равна нулю.* Это утверждение называют *теоремой о циркуляции вектора напряженности $\vec{E}$.*

Выражение (3.16) является математическим критерием потенциальности поля.

## § 68. Связь между напряженностью электростатического поля и потенциалом

Из сравнения формул (3.12) и (3.14) получаем, что потенциальная энергия заряда

$$W_p = q_{\text{пр}}\varphi . \tag{3.17}$$

Сила, действующая на заряд $q_{\text{пр}}$ в электростатическом поле, равна

$$\vec{F} = \vec{E}q_{\text{пр}} . \tag{3.18}$$

Из механики известна связь между силой и потенциальной энергией (1.56):

$$\vec{F} = -grad\,W_p \text{ или } -\text{grad}\left(q_{\text{пр}}\varphi\right) = \vec{E}q_{\text{пр}} .$$

Поскольку заряд $q_{\text{пр}}$ не зависит от координат точек поля, то

$$\text{grad}\left(q_{\text{пр}}\varphi\right) = q_{\text{пр}}\,\text{grad}\,\varphi . \text{ Тогда}$$

$$\vec{E} = -\text{grad}\,\varphi . \tag{3.19}$$

Проекции вектора $\vec{E}$ на оси координат запишутся в виде

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y},\quad E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} .$$

Представим вектор $\vec{E}$ через компоненты $E_x$, $E_y$, $E_z$:

$$\vec{E} = E_x\vec{i} + E_y\vec{j} + E_z\vec{k} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\right) = -\text{grad}\,\varphi . \tag{3.20}$$

Согласно формуле (3.20) напряженность электростатического поля равна градиенту потенциала, взятому со знаком минус. Знак минус означает, что вектор $\vec{E}$ направлен в сторону убывания потенциала $\varphi$.

При перемещении точечного заряда вдоль произвольного направления $r$ связь между напряженностью и потенциалом имеет вид

$$E = -\frac{\partial\varphi}{\partial r},$$

откуда разность потенциалов между двумя точками поля

$$\varphi_1 - \varphi_2 = -\int_1^2 Edr . \tag{3.21}$$

Поверхность, описываемая уравнением

$$\varphi(x,y,z) = \text{const},$$

во всех точках которой потенциал $\varphi$ имеет одно и то же значение, называется *эквипотенциальной поверхностью*. Можно показать, что вектор $\vec{E}$

перпендикулярен к эквипотенциальной поверхности и направлен в сторону уменьшения потенциала $\varphi$.

## § 69. Применение теоремы Гаусса к расчету электростатических полей

Для нахождения напряженности и потенциала электростатических полей используются два метода.

В основе первого метода лежит принцип суперпозиции полей. Любая система зарядов может быть разбита на бесконечно большое число элементарных зарядов $dq$, каждый из которых создает электростатическое поле напряженностью

$$d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3}$$

и потенциалом

$$d\varphi = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

Результирующее значение напряженности и потенциала находится по принципу суперпозиции:

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\vec{r}}{r^3}dq,\ \varphi = \int d\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\int\frac{dq}{r}. \qquad (3.22)$$

В основе второго метода лежит теорема Гаусса, с помощью которой можно рассчитать напряженность и потенциал поля для заряженных тел, когда поле обладает известной нам симметрией.

Рассмотрим несколько примеров.

*1. Поле равномерно заряженной бесконечно протяженной плоскости.*

Распределение заряда на плоскости будем характеризовать *поверхностной плотностью заряда* $\sigma = \frac{dq}{dS}$. Поверхностная плотность заряда измеряется в кулонах на квадратный метр ($Кл/м^2$).

Допустим, что $\sigma > 0$. Из условия симметрии следует, что силовые линии вектора $\vec{E}$ параллельны друг другу и перпендикулярны заряженной плоскости $P$ (рис. 69).

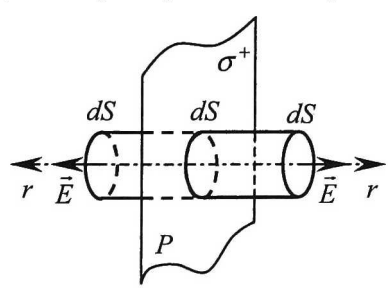


Рис. 69

Мысленно выделим бесконечно узкий прямой цилиндр с основаниями $dS$ и образующими, параллельными силовым линиям поля (рис. 69).

Поток вектора $\vec{E}$ сквозь боковую поверхность этого цилиндра равен нулю.

Согласно теореме Гаусса полный поток

$$\int \vec{E} d\vec{S} = \frac{\sum q_i}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma dS}{\varepsilon_0}.$$

Учитывая, что цилиндр имеет два основания с площадью $dS$ каждое, получим

$$EdS + EdS = \frac{\sigma dS}{\varepsilon_0}.$$

Отсюда

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}. \qquad (3.23)$$

Из формулы (3.23) следует, что $\vec{E}$ не зависит от расстояния до плоскости. Это означает, что электростатическое поле бесконечной плоской поверхности однородно.

Используя связь между $\vec{E}$ и $\varphi$, найдем разность потенциалов $\Delta\varphi$ между точками, лежащими на расстояниях $r_1$ и $r_2$ от заряженной плоскости:

$$d\varphi = -\int_1^2 E dr = -\int_1^2 \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} dr \text{, откуда}$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(r_2 - r_1). \qquad (3.24)$$

График зависимости $E$ от $r$ для $\sigma > 0$ показан на рис. 70. Из него видно, что при переходе через плоскость вектор напряженности скачком изменяет свое направление на противоположное.

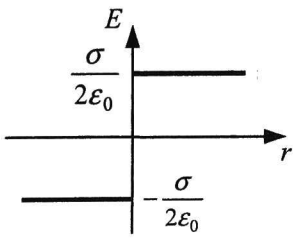


Рис. 70

*2. Поле двух параллельных бесконечно протяженных плоскостей с поверхностной плотностью заряда $+\sigma$ и $-\sigma$.*

На рис. 71 силовые линии поля положительно заряженной плоскости показаны сплошными прямыми, отрицательно заряженной — пунктирными.

Из условия симметрии следует, что силовые линии параллельны друг другу и перпендикулярны плоскостям. Как видно из рис. 71, в областях 1 и 3 электростатические поля взаимно унич-

тожаются, так как их векторы напряженности $\vec{E}_+$ и $\vec{E}_-$ численно равны и направлены в противоположные стороны. Между плоскостями (область 2)

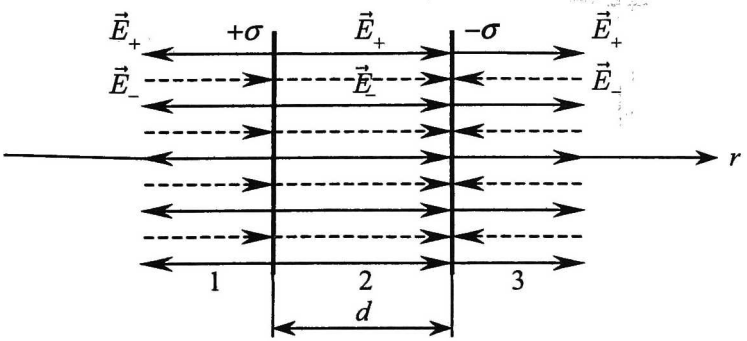



Рис. 71

оба вектора имеют одинаковые направления, и поэтому результирующая напряженность $\vec{E}$ численно равна их сумме:

$$E = E_+ + E_- = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \qquad (3.25)$$

Соответственно разность потенциалов между плоскостями:

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}(r_2 - r_1),.$$

$$\text{или } U = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} d, \qquad (3.26)$$

где $d = r_2 - r_1$; $U = \varphi_1 - \varphi_2$ — напряжение между плоскостями.

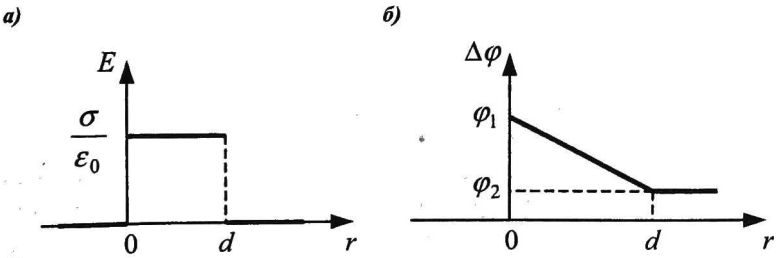



Рис. 72

Графики зависимостей $E$ и $\Delta\varphi$ показаны на рис. 72. При построении графика 72,*б* потенциал положительно заряженной плоскости принимался за $\varphi_1$.

*3. Поле равномерно заряженного бесконечно протяженного цилиндра радиуса R (нити).*

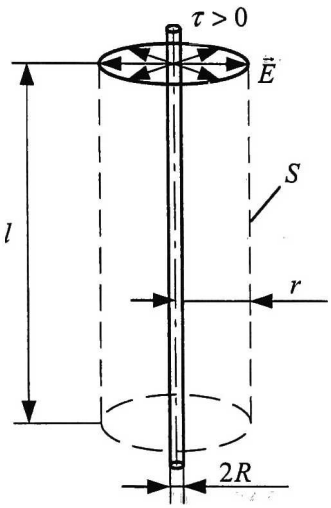


Рис. 73

Распределение заряда на цилиндре будем характеризовать *линейной плотностью заряда* $\tau = \frac{dq}{dl}$. Линейная плотность заряда измеряется в кулонах на метр $\left(\frac{\text{Кл}}{\text{м}}\right)$. Так как поле осесимметрично, то его силовые линии перпендикулярны поверхности цилиндра и направлены радиально от оси цилиндра, если $\tau > 0$ (рис. 73). Чтобы найти напряженность поля $E$ на произвольном расстоянии $r$ от оси цилиндра, охватим данный цилиндр вспомогательной цилиндрической поверхностью $S$, коаксиальной с заряженным цилиндром и имеющей конечную длину $l$.

Поток вектора $\vec{E}$ сквозь основания поверхности $S$ равен нулю, так как линии напряженности параллельны основаниям цилиндров.

По теореме Гаусса найдем поток вектора $\vec{E}$ через образующую вспомогательного цилиндра радиуса $r$:

$$\oint \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int \tau \, dl \text{, так как } S = 2\pi r l \text{, то}$$

$$E \cdot 2\pi r l = \frac{1}{\varepsilon_0} \tau l \text{, отсюда}$$

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}. \qquad (3.27)$$

Если $r = R$, то $E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 R}$ — напряженность поля на поверхности заряженного цилиндра. При $r < R$ $E = 0$, поскольку внутри цилиндра радиуса $R$ зарядов нет. Используя формулу связи (3.21) между потенциалом и напряженностью, найдем разность потенциалов между двумя точками, лежащими вне заряженного цилиндра на расстояниях $r_1$ и $r_2$ от его оси:

$$\int_1^2 d\varphi = -\int_1^2 E dr = -\int_1^2 \frac{\tau dr}{2\pi\varepsilon_0 r}, \text{ откуда}$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}. \qquad (3.28)$$

График зависимости $E$ от $r$ представлен на рис. 74.

*4. Поле равномерно заряженной сферы радиуса $R$ с поверхностной плотностью заряда $\sigma > 0$* (рис. 75).

Силовые линии поля заряженной сферы направлены радиально. Выделим для расчета две области:

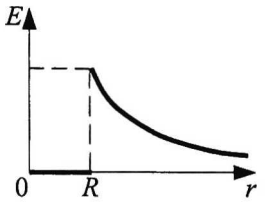


Рис. 74

I область — внутри сферы, когда $r < R$. Внутри сферы $\sum q_i = 0$ и, следовательно, $E_{\text{I}} = 0$. А так как $d\varphi = -\int_1^2 E_{\text{I}} dr = 0$, получаем $\varphi_1 = \text{const}$.

Потенциал сферы при $r = R$:

$$\varphi_{\text{сф}} = \frac{\sigma 4\pi R^2}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}, \quad \varphi_{\text{сф}} = \frac{q_{\text{сф}}}{C}, \tag{3.29}$$

где $\sigma = \frac{q_{\text{сф}}}{4\pi R^2}$, C — емкость сферы

II область — вне сферы (рис. 75), когда $r > R$. Охватим заряженную сферу вспомогательной замкнутой сферической поверхностью $S$ и применим теорему Гаусса:

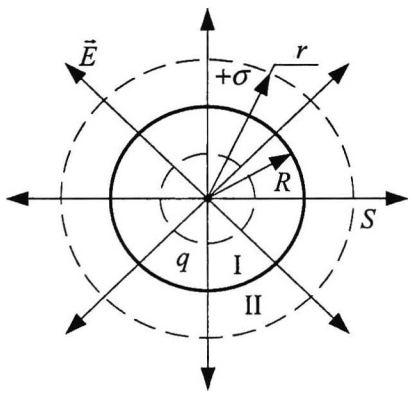


Рис. 75

$$\oint E_2 dS = \frac{\sigma 4\pi R^2}{\varepsilon_0}.$$

Тогда

$$E_2 4\pi r^2 = \frac{\sigma 4\pi R^2}{\varepsilon_0}, \quad E_2 = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2}. \tag{3.30}$$

Если учесть, что $\sigma = \frac{q_{\text{сф}}}{4\pi R^2}$, то

$$E_2 = \frac{q_{\text{сф}}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}. \tag{3.31}$$

Сфера при $r > R$ имеет поле, аналогичное полю, создаваемому точечным зарядом. При $r = R$

$$E_{\text{сф}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}, \tag{3.32}$$

а разность потенциалов:

$$\int_1^2 d\varphi = -\int_1^2 E_2 dr = -\int_1^2 \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2} dr ,$$

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}. \qquad (3.33)$$

Графики зависимостей $E$ и $\Delta\varphi$ показаны на рис. 76.

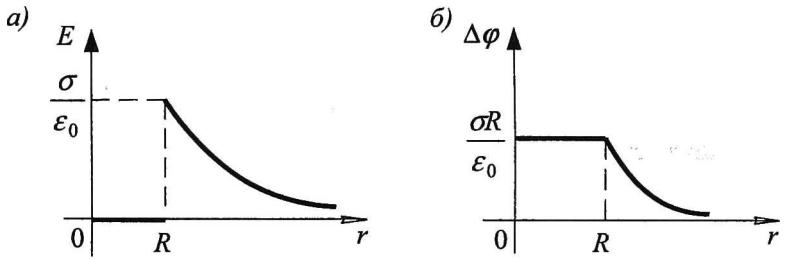



Рис. 76

Из рассмотренных примеров можно сделать следующие выводы:

1) при переходе через заряженную поверхность напряженность электрического поля изменяется скачкообразно;

2) потенциал поля является непрерывной функцией координаты.

# Глава 13
# ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ВЕЩЕСТВЕ

## § 70. Электрический диполь

Молекулы большинства диэлектриков по своим электрическим свойствам подобны диполям.

*Электрическим диполем* называют систему двух равных по величине и противоположных по знаку зарядов $+q$ и $-q$, расстояние $l$ между которыми мало по сравнению с расстоянием до рассматриваемых точек поля (рис. 15).

*Плечом диполя* называют вектор, направленный по оси диполя от отрицательного заряда к положительному и численно равный расстоянию между ними.

Произведение положительного заряда диполя $+q$ на плечо $\vec{l}$ называют *электрическим моментом диполя* (дипольным моментом):

$$\vec{p} = q\vec{l}\,. \qquad (3.34)$$

Электрический момент диполя совпадает по направлению с вектором $\vec{l}$ и имеет размерность кулон на метр, $[\vec{p}] = \text{Кл} \cdot \text{м}$.

По принципу суперпозиции полей напряженность в произвольной точке поля диполя равна

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-,$$

где $\vec{E}_+$, $\vec{E}_-$ — напряженности полей, образованных положительным и отрицательным зарядами соответственно.

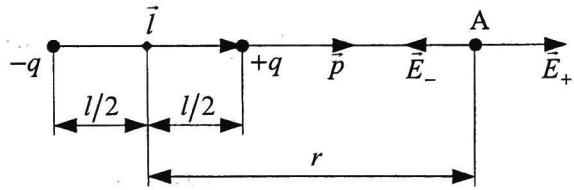



Рис. 77

Рассмотрим частные случаи.

1. Точка А расположена на оси диполя (рис. 77).

Модули напряженностей в точке А от положительного $E_+$ и отрицательного $E_-$ зарядов:

$$E_+ = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{(r - l/2)^2},$$

$$E_- = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{(r+l/2)^2}.$$

По принципу суперпозиции суммарная напряженность поля в точке $A$:

$$E_A = E_+ - E_- = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{(r-l/2)^2} - \frac{q}{(r+l/2)^2}\right).$$

После преобразования и учитывая, что $\frac{l^2}{4} << r^2$ (по определению диполя), получим

$$E_A = \frac{2ql}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{2p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}. \qquad (3.35)$$

Вектор $\vec{E}_A$ совпадает по направлению с электрическим вектором $\vec{p}$, а само поле убывает пропорционально $1/r^3$.

2. Найдем выражение для напряженности поля диполя в точке B, расположенной на перпендикуляре, восстановленном к оси диполя из его середины (рис. 78).

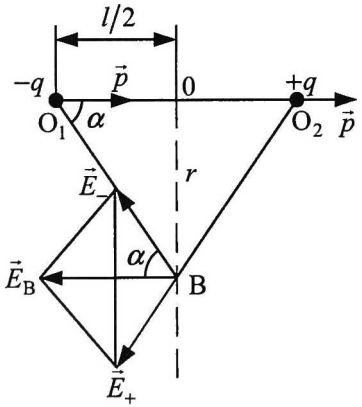



Рис. 78

В силу симметрии напряженность $|\vec{E}_-| = |\vec{E}_+|$ и равна

$$|\vec{E}_+| = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0(O_1B)^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\left(r^2 + l^2/4\right)}.$$

Треугольники $\Delta O_1O_2B$ и $\Delta E_-BE_+$ равнобедренные, а так как отрезок $BO_2$ параллелен $\vec{E}_+$ и $BO_1$ параллелен $\vec{E}_-$, то $\vec{E}_B$ параллелен и противоположно направлен вектору $\vec{p}$:

$$E_B = E_+\cos\alpha + E_-\cos\alpha, \text{ где}$$

$$\cos\alpha = (l/2)\Big/\sqrt{r^2 + l^2/4}.$$

Поэтому $E_B = \dfrac{2ql}{4\pi\varepsilon_0\left(r^2 + l^2/4\right)\cdot 2\cdot\left(\sqrt{r^2 + l^2/4}\right)}$.

С учетом того, что $\frac{l^2}{4} << r^2$, окончательно получаем

$$E_B = \frac{ql}{4\pi\varepsilon_o r^3} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_o r^3}. \qquad (3.36)$$

В общем случае, когда рассматриваемая точка лежит на расстоянии $\vec{r}$ от середины оси диполя и радиус-вектор $\vec{r}$ образует с осью диполя произвольный угол $\theta$, напряженность поля

$$E = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\sqrt{3\cos^3\theta + 1}. \qquad (3.37)$$

Если $\theta = 0$, то из формулы (3.37) получим формулу (3.35), если $\theta = \frac{\pi}{2}$, то формулу (3.36).

## § 71. Электрические свойства диэлектриков

По способности проводить электрический ток вещества делятся на *проводники, полупроводники* и *диэлектрики.*

*Диэлектрики* – это вещества, которые при обычных условиях не проводят электрический ток. Это объясняется тем, что в диэлектриках практически отсутствуют сторонние электрические заряды. Молекулы диэлектрика электрически нейтральны, так как положительный суммарный заряд ядер атомов равен по абсолютной величине заряду всех электронов, которые связаны с атомами и не могут пееремещаться по всему объему диэлектрика.

Все диэлектрики делятся на диэлектрики с неполярными молекулами и диэлектрики с полярными молекулами.

В молекулах некоторых диэлектриков ($H_2$, $N_2$, $O_2$, $CO_2$ и др.) электроны расположены симметрично вокруг ядра. Электрический момент молекулы в отсутствие внешнего электрического поля равен нулю. Поэтому молекулы таких диэлектриков называются *неполярными.*

Если неполярную молекулу диэлектрика поместить во внешнее электрическое поле, то происходит смещение орбиты электронов, а следовательно и центра тяжести отрицательных зарядов. Таким образом, под действием внешнего поля в молекуле индуцируется электрический момент

$$\vec{p} = \varepsilon_0 \beta \vec{E}, \qquad (3.38)$$

где $\vec{E}$ — напряженность внешнего электростатического поля.

Здесь

$$\beta = 4\pi r^2$$

— множитель, пропорциональный объему атома, он называется *поляризуемостью атома.*

В молекулах других диэлектриков ($H_2O$, $NH_3$, HCl, $CH_3Cl$ и др.) электроны расположены несимметрично относительно ядра. В таких молекулах центры тяжести положительных и отрицательных зарядов не совпадают, т. е. молекулы обладают электрическим моментом $\vec{p}$. Молекулы этих диэлектриков подобны *жесткому диполю*, так как плечо диполя $l$ не зависит от того, действует на молекулу внешнее электростатическое поле или нет. Молекулы указанного типа называются *полярными.* К ним не применима формула (3.38).

Если жесткий диполь поместить во внешнее однородное электростатическое поле (рис. 79), то на него будет действовать пара сил: $\vec{F}_1 = q\vec{E}$ и $\vec{F}_2 = -q\vec{E}$, создающая вращающий момент

$$M = qEl\sin\varphi = pE\sin\varphi .$$

Вектор момента $\vec{M}$ равен векторному произведению

$$\vec{M} = \left[\vec{p}, \vec{E}\right]. \qquad (3.39)$$

Момент пары сил стремится повернуть диполь так, чтобы направления векторов $\vec{p}$ и $\vec{E}$ совпадали.

Если жесткий диполь находится в неоднородном электростатическом поле, то помимо вращающего момента на диполь будет действовать сила $\vec{F}$, равная векторной сумме сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ Под действием силы $\vec{F}$ диполь одновременно с вращением будет втягиваться в область электростатического поля, имеющего бóльшую напряженность.

## § 72. Поляризация диэлектрика. Напряженность поля в диэлектрике

*Поляризацией диэлектрика* называется возникновение суммарного дипольного электрического момента молекул в любом малом объеме диэлектрика при внесении его во внешнее электрическое поле.

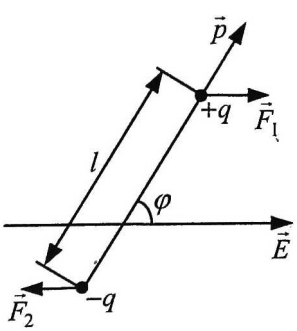


Рис. 79

Различают два типа поляризации:

*деформационная поляризация* диэлектрика с неполярными молекулами, заключающаяся в возникновении у атомов индуцированного дипольного момента за счет деформации электронных орбит;

*ориентационная поляризация* диэлектрика с полярными молекулами, заключающаяся в ориентации имеющихся дипольных моментов по полю.

В результате поляризации на поверхности диэлектрика и в его объеме появляются нескомпенсированные электрические заряды, называемые *связанными зарядами*. Обозначим их $q'$. *Сторонние* заряды, не входящие в состав молекул диэлектрика, обозначим $q$.

Количественной мерой поляризации диэлектрика служит вектор поляризации (*поляризованность диэлектрика*):

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i / \Delta V , \qquad (3.40)$$

равный сумме дипольных моментов молекул, содержащихся в единице объема диэлектрика. Здесь $\vec{p}_i$ — дипольный момент $i$-й молекулы, $n$ — число молекул в объеме $\Delta V$. В СИ вектор поляризации измеряется в кулонах на квадратный метр (Кл/м$^2$).

При внесении диэлектрика во внешнее электростатическое поле напряженностью $\vec{E}_0$ вследствие поляризации внутри него образуется поле связанных зарядов напряженностью $\vec{E}'$. По принципу суперпозиций напряженность поля в диэлектрике

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}' .$$

Опыт показывает, что вектор поляризации для всех изотропных диэлектриков пропорционален напряженности поля $\vec{E}$:

$$\vec{P} = \chi \varepsilon_0 \vec{E} , \qquad (3.41)$$

где $\chi$ — безразмерная физическая величина, называемая *диэлектрической восприимчивостью.*

Установим связь между поверхностной плотностью связанных зарядов $\sigma'$ и вектором поляризации $\vec{P}$. Пусть пластина из однородного диэлектрика находится в однородном электростатическом поле напряженностью $\vec{E}_0$ (рис. 80).

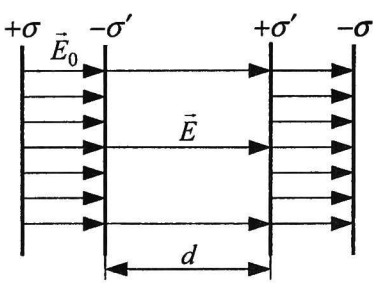


Рис. 80

В результате поляризации происходит смещение зарядов в диэлектрике: на одной грани образуется избыток положительных зарядов с поверхностной плотностью связанных зарядов $+\sigma'$, на другой — избыток отрицательных зарядов с поверхностной плотностью $-\sigma'$. Таким образом, в диэлектрике появляется поле связанных зарядов, вектор напряженности которого $\vec{E}'$ направлен в сторону, противоположную $\vec{E}_0$. По принципу суперпозиций напряженность поля в диэлектрике

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$$

или по модулю

$$E = E_0 - E'.$$

Согласно формуле (3.25)

$$E' = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0},$$

тогда

$$E = E_0 - \frac{\sigma'}{\varepsilon_0}. \qquad (3.42)$$

Найдем суммарный дипольный момент пластины по формуле (3.40):

$$\sum p_i = PV = PSd, \qquad (3.43)$$

где $S$ – площадь грани пластины; $d$ – ее толщина.

С другой стороны, согласно (3.34), суммарный дипольный момент равен произведению связанного заряда $q' = \sigma' S$ на толщину пластины $d$, т. е.

$$\sum p_i = \sigma' S d. \qquad (3.44)$$

Из выражений (3.43) и (3.44) следует, что

$$P = \sigma'. \qquad (3.45)$$

Подставим в (3.42) выражения (3.45) и (3.41), получим

$$E = E_0 - \chi E,$$

откуда

$$E = \frac{E_0}{1+\chi} = \frac{E_0}{\varepsilon}. \qquad (3.46)$$

Безразмерная физическая величина $\varepsilon = 1 + \chi$ называется *относительной диэлектрической проницаемостью* или просто *диэлектрической проницаемостью вещества*. Из (3.46) следует, что

$$\varepsilon = E_0 / E,$$

т. е. диэлектрическая проницаемость показывает, во сколько раз напряженность поля в диэлектрике меньше, чем напряженность поля в вакууме.

## § 73. Вектор электрического смещения. Теорема Гаусса для диэлектриков

Для описания поля в диэлектрике помимо вектора напряженности вводится *вектор электрического смещения*

$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E}. \qquad (3.47)$$

В системе СИ единицей электрического смещения является кулон на метр в квадрате (Кл/м$^2$). Вектор электрического смещения не зависит от

свойств среды и вводится как вспомогательный вектор, упрощающий изучение поля в диэлектрике.

Аналогично напряженности, электростатическое поле можно изображать *линиями электрического смещения*. Как видно из рис. 80, линии вектора $\vec{E}_0$ на границе с диэлектриком претерпевают разрыв. Они могут начинаться и заканчиваться как на сторонних, так и на связанных зарядах. Линии вектора $\vec{D}$ начинаются и заканчиваются только на сторонних зарядах. В диэлектриках, где находятся связанные заряды, линии вектора электрического смещения не прерываются.

Для электростатического поля вектора $\vec{D}$ применим принцип суперпозиции полей:

$$\vec{D} = \sum_{i=1}^{n} \vec{D}_i \, .$$

Вычислим поток вектора $\vec{D}$, образованный точечным электрическим зарядом $q$, сквозь сферическую поверхность радиуса $r$:

$$\Phi_D = \oint \vec{D} d\vec{S} = \frac{q}{4\pi r^2} \cdot 4\pi r^2 = q \, .$$

Если электростатическое поле образовано системой зарядов

$$q = \sum q_i \, , \text{ то}$$

$$\Phi_D = \oint_S \vec{D} d\vec{S} = \sum_{i=1}^{n} q_i \, . \qquad (3.48)$$

Уравнение (3.48) является теоремой Гаусса для диэлектрика: *поток вектора электрического смещения сквозь произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме сторонних зарядов, заключенных внутри данной поверхности.*

## § 74. Условия на границе раздела двух диэлектриков

Рассмотрим условия, которым удовлетворяют векторы напряженности электрического поля $\vec{E}$ и электрического смещения $\vec{D}$ на границе раздела двух однородных и изотропных диэлектриков.

Пусть граница плоская, а диэлектрическая проницаемость первого диэлектрика $\varepsilon_1$ меньше диэлектрической проницаемости второго диэлектрика $\varepsilon_2$. Обозначим $\vec{E}_1$ — напряженность поля, $\vec{D}_1$ — вектор электрического смещения в первом диэлектрике, $\vec{E}_2$ и $\vec{D}_2$ — соответственно во втором диэлектрике. Выделим на границе раздела диэлектриков небольшой

прямоугольный контур *abcd* (рис. 81,а), в котором стороны *ab* и *cd* пренебрежимо малы по сравнению с $l$. Применим теорему о циркуляции вектора $\vec{E}$ (3.16), считая вклад в циркуляцию на участках *ab* и *cd* пренебрежимо малым:

$$-E_{1\tau}l + E_{2\tau}l = 0 \text{ или } E_{1\tau} = E_{2\tau}, \qquad (3.49)$$

где $E_{1\tau}$ и $E_{2\tau}$ — проекции вектора $\vec{E}$ на направление обхода контура $\vec{\tau}$, указанное на рис. 81,а стрелками.

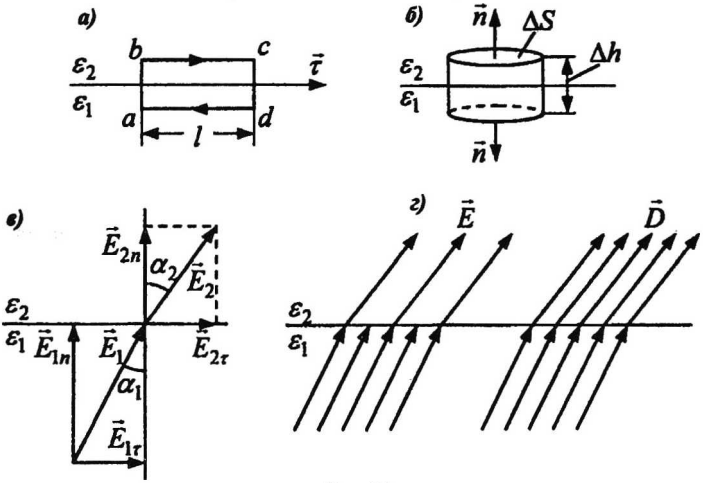



Рис. 81

Из уравнения (3.49) следует, что тангенциальные составляющие векторов $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ одинаковы по обе границы раздела диэлектриков, а нормальная составляющая $E_{1n} \neq E_{2n}$.

Выделим на границе раздела диэлектриков замкнутую цилиндрическую поверхность с малой высотой $\Delta h$ и площадью основания $\Delta S$ (рис. 81,б) и применим теорему Гаусса для вектора $\vec{D}$ (3.48), считая, что сторонние заряды в выделенном объеме отсутствуют:

$$-D_{1n}\Delta S + D_{2n}\Delta S = 0 \text{ или } D_{1n} = D_{2n}, \qquad (3.50)$$

где $D_{1n}$ и $D_{2n}$ — проекции вектора $\vec{D}$ на внешнюю нормаль $\vec{n}$. Потоком вектора $\vec{D}$ через боковую поверхность цилиндра ввиду малости пренебрегаем.

Из уравнения (3.50) следует, что нормальные составляющие векторов $\vec{D}_1$ и $\vec{D}_2$ одинаковы. Следовательно, тангенциальная составляющая

$$D_{1\tau} \neq D_{2\tau}.$$

Таким образом, при переходе границы раздела диэлектриков $E_\tau$ и $D_n$ изменяются непрерывно, а $E_n$ и $D_\tau$ изменяются скачком, т. е. претерпевают разрыв.

Разложим векторы $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ на нормальную и тангенциальную составляющие. Поскольку $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$, то из (3.49) и (3.50) запишем: $E_{1\tau} = E_{2\tau}$, $\varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}$. Поля векторов $\vec{E}$ и $\vec{D}$ на границе раздела двух диэлектриков показаны на рис. 81,в, из которого найдем соотношение

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{E_{1\tau}/E_{1n}}{E_{2\tau}/E_{2n}}, \text{ или с учетом предыдущих условий } \frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}.$$

Получили закон преломления линий $\vec{E}$ и $\vec{D}$.

Как видно из рис. 81,г, линии вектора напряженности электрического поля $\vec{E}$ на границе раздела двух диэлектриков не только преломляются, но и терпят разрыв (из-за наличия связанных зарядов), линии вектора электрического смещения $\vec{D}$ только преломляются. С увеличением диэлектрической проницаемости угол между нормалью к границе раздела диэлектриков и линиями векторов $\vec{E}$ и $\vec{D}$ также возрастает.

## § 75. Сегнетоэлектрики

*Сегнетоэлектрики* — это кристаллические диэлектрики ($NaKC_4H_4O_6 \cdot 4H_2O$ — сегнетова соль, $BaTiO_3$ — титанат бария и др.), обладающие *спонтанной* (самопроизвольной) поляризованностью в определенном интервале температур. Сегнетоэлектрики имеют следующие отличительные свойства.

1. Диэлектрическая проницаемость сегнетоэлектриков $\varepsilon$ велика и может равняться нескольким тысячам, в то время как у рассмотренных диэлектриков $\varepsilon$ порядка нескольких единиц ( или десятков единиц).

2. Диэлектрическая проницаемость сегнетоэлектриков зависит от напряженности поля $E$, т. е. не является постоянной величиной.

3. В сегнетоэлектриках наблюдается явление *диэлектрического гистерезиса* (гистерезис — от греч. запаздывать).

Как видно из рис. 82, с увеличением напряженности $E$ внешнего электростатического поля числовое значение вектора

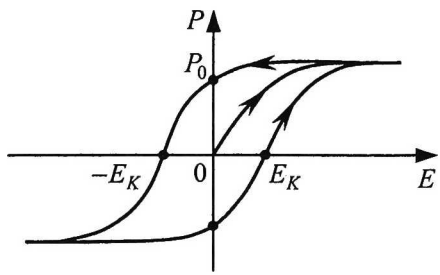


Рис. 82

поляризации $P$ увеличивается и достигает насыщения. Если затем постепенно напряженность $E$ уменьшать до нуля, то вектор поляризации уменьшится, достигнет значения $P_0$ (*остаточная поляризация*). Лишь при наложении $-E_K$ поляризация исчезает полностью. Величина $E_K$ называется *коэрцитивной силой*.

Большие значения $\varepsilon$ обусловлены особенностями процесса поляризации в сегнетоэлектриках. Монокристалл сегнетоэлектрика разбит на ряд самопроизвольно поляризованных областей — *доменов*. Спонтанная поляризация является результатом ориентации дипольных моментов всех молекул внутри домена в некотором определенном направлении. Однако при отсутствии внешнего поля области спонтанной поляризации располагаются так, что электрические моменты разных доменов компенсируют друг друга и средняя поляризация достаточно большого монокристалла равна нулю.

При внесении кристалла сегнетоэлектрика во внешнее электростатическое поле происходит переориентация электрических моментов доменов и кристалл оказывается поляризованным.

Спонтанная ориентация дипольных моментов, ведущая к образованию доменов, происходит в определенном температурном интервале, между так называемыми *точками Кюри* — верхней и нижней. Для сегнетовой соли $T_{\text{верх}} = 297\ \text{К}$, $T_{\text{ниж}} = 255\ \text{К}$.

Сегнетоэлектрики используют для изготовления конденсаторов большой электроемкости и малых размеров, для модуляций частоты электромагнитных колебаний и т. д.

Отметим еще одно явление, наблюдаемое в диэлектриках. При сжатии или расширении в определенных направлениях на гранях некоторых кристаллов (кварц, турмалин, сегнетова соль и др.) появляются электрические заряды подобные поляризационным. Это явление получило название *прямого пьезоэлектрического эффекта*, а кристаллы, у которых он наблюдается, называются *пьезоэлектриками*. При внесении пьезоэлектрика в электростатическое поле наблюдается механическая деформация кристалла — это *обратный пьезоэффект*.

Пьезоэлектрики широко применяются в технике.

## § 76. Проводники в электростатическом поле

При внесении проводника в электростатическое поле в нем происходит перераспределение носителей зарядов до тех пор, пока результирующая напряженность поля внутри проводника не станет равной нулю:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_i = 0,$$

а линии напряженности вне проводника — перпендикулярными его по-

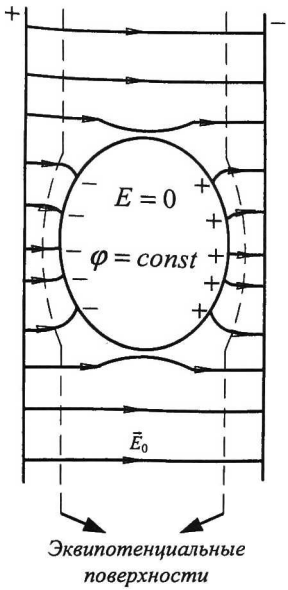



Рис. 83

верхности. Здесь $\vec{E}_0$ — напряженность внешнего поля, $\vec{E}_i$ — напряженность поля индуцированных зарядов.

Таким образом, нейтральный проводник, внесенный в электростатическое поле, разрывает часть силовых линий поля, так как они заканчиваются на отрицательных индуцированных зарядах проводника и вновь начинаются на положительных. Внутри проводника поле отсутствует, потенциал всех точек внутри проводника будет постоянным и равным потенциалу его поверхности (рис. 83):

$$\varphi = \varphi_{\text{пов}} = \text{const}.$$

Поверхность проводника становится *эквипотенциальной поверхностью*. Силовые линии поля будут перпендикулярны к эквипотенциальным поверхностям, так как работа по перемещению заряда вдоль поверхности проводника равна нулю. Следовательно, векторы напряженности $\vec{E}$ направлены по нормали к эквипотенциальным поверхностям.

Выделим небольшой цилиндрический объем с площадью оснований $\Delta S$, охватывающий часть поверхности проводника, несущей положительный заряд (рис. 84).

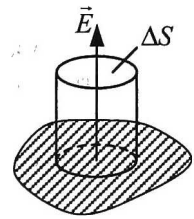



Рис. 84

Линии вектора напряженности поля $\vec{E}$ перпендикулярны поверхности. Применим для выделенного объема теорему Гаусса. Потоки вектора напряженности через боковую поверхность и внутреннее основание цилиндра равны нулю.

Поток вектора $\vec{E}$ через наружное основание цилиндра, если проводник граничит с вакуумом, равен:

$$E\Delta S = \frac{\sigma \Delta S}{\varepsilon_0},$$

где $\sigma$ — поверхностная плотность заряда на проводнике. Поделив правую и левую части на $\Delta S$, получим связь напряженности электрического поля непосредственно у поверхности с поверхностной плотностью заряда проводника: $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$.

Когда поверхностная плотность заряда $\sigma < 0$, то $|\vec{E}| < 0$, вектор напряженности $\vec{E}$ направлен к поверхности проводника.

*Электроемкостью уединенного проводника* называется физическая величина, равная отношению заряда проводника к его потенциалу:

$$C = \frac{q}{\varphi}. \tag{3.51}$$

Электроемкость проводника не зависит ни от заряда, ни от потенциала, а зависит от его размеров и формы, а также от относительной диэлектрической проницаемости среды, в которой находится проводник. В системе СИ электроемкость измеряется в фарадах (Ф). 1 Ф — это электроемкость такого уединенного проводника, при сообщении которому заряда 1 Кл его потенциал увеличивается на 1 В.

Найдем *электроемкость шара*. Потенциал поверхности шара можно определить по формуле потенциала поля точечного заряда, так как вне шара силовые линии поля совпадают с линиями поля точечного заряда, если бы заряд был расположен в центре шара. Поэтому

$$\varphi_{ш} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}, \tag{3.52}$$

где $r$ — радиус шара.

Подставив уравнение (3.52) в (3.51), получим

$$C_{ш} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{r}{q} q = 4\pi\varepsilon_0 r.$$

Электроемкость шара зависит от его радиуса. Если шар находится в среде с относительной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon$, то

$$C_{ш} = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r.$$

Электрическая емкость Земли составляет около 700 мкФ.

## § 77. Конденсаторы

*Конденсатором* называется устройство, состоящее из двух проводников, образующих квазизамкнутый объем, разделенных диэлектриком. Образующие конденсатор проводники называются *обкладками*. В зависимости от формы обкладок конденсаторы бывают плоские, сферические и цилиндрические.

Электроемкостью конденсатора называется физическая величина, равная отношению заряда одной из обкладок к разности потенциалов между обкладками. При отключенном источнике тока разность потенциалов равна напряжению ($U$) между обкладками:

$$C = \frac{q}{\Delta\varphi} = \frac{q}{U}.$$

*Плоский конденсатор* состоит из двух пластин, разделенных диэлектриком. Если размеры пластин гораздо больше расстояния между ними, то поле внутри такого конденсатора можно считать однородным.

По определению емкость конденсатора

$$C = \frac{q}{U}. \tag{3.53}$$

Заряд $q$ на обкладке конденсатора выразим через поверхностную плотность сторонних зарядов $\sigma$:

$$q = \sigma S, \tag{3.54}$$

где $S$ — площадь обкладки конденсатора.

Запишем связь напряженности с разностью потенциалов:

$$E = \frac{\Delta\varphi}{d} = \frac{U}{d}, \tag{3.55}$$

где $d$ — расстояние между обкладками.

Напряженность поля конденсатора связана с поверхностной плотностью зарядов соотношением (3.25), деленным на $\varepsilon$:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}, \tag{3.56}$$

где $\varepsilon$ — диэлектрическая проницаемость диэлектрика, находящегося между обкладками.

Подставив уравнения (3.54–3.56) в выражение (3.53), получим формулу электроемкости плоского конденсатора:

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}. \tag{3.57}$$

Электроемкость плоского конденсатора прямо пропорциональна площади обкладки, относительной диэлектрической проницаемости, и обратно пропорциональна расстоянию между обкладками.

*Цилиндрический конденсатор* представляет собой два коаксиальных цилиндра (рис. 85), имеющих общую ось симметрии, пространство между которыми заполнено диэлектриком.

Если длина $l >> R_2$, то поле такого конденсатора можно рассматривать как поле заряженного бесконечно длинного цилиндра, для которого согласно (3.27)

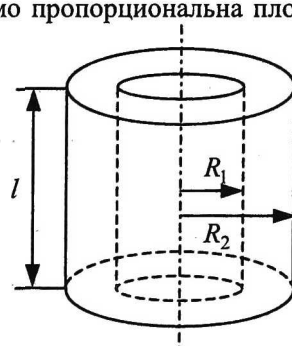


Рис. 85

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r} = \frac{q}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 rl},$$

где $\varepsilon$ — диэлектрическая проницаемость диэлектрика, заполняющего конденсатор.

По уравнению (3.28) найдем разность потенциалов между цилиндрами:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 l} \ln\frac{R_2}{R_1}.$$

Тогда емкость цилиндрического конденсатора

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 l}{\ln(R_2/R_1)}. \qquad (3.58)$$

*Сферический конденсатор* представляет собой две концентрические сферы с радиусами $R_1$ и $R_2$, разделенные слоем диэлектрика с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon$. Напряженность поля между обкладками сферического конденсатора найдем по формуле (3.31):

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q}{r^2},$$

а разность потенциалов по формуле (3.33):

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}.$$

Емкость сферического конденсатора

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}.$$

Для получения большой электрической емкости конденсаторы соединяются в батарею параллельно (рис. 86,а).

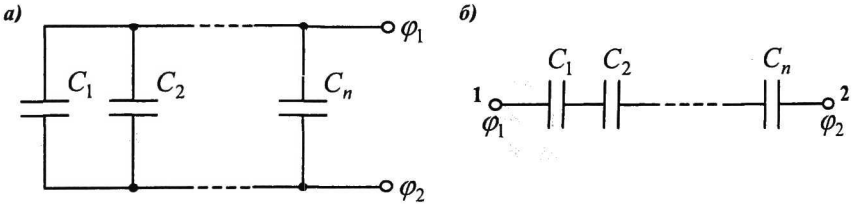



Рис. 86

На каждой из двух обкладок накапливается суммарный заряд

$$q = \sum_{i=1}^{n} q_i = \sum_{i=1}^{n} C_i(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Так как при параллельном соединении $\varphi_1 - \varphi_2 = \text{const}$ на обкладках всех конденсаторов, то

$$q = (\varphi_1 - \varphi_2)\sum_{i=1}^{n} C_i .$$

Емкость системы

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2},$$

следовательно,

$$C = \frac{(\varphi_1 - \varphi_2)\sum_{i=1}^{n} C_i}{(\varphi_1 - \varphi_2)} = \sum_{i=1}^{n} C_i . \qquad (3.59)$$

Электроемкость батареи при параллельном соединении конденсаторов равна сумме емкостей соединенных конденсаторов.

При последовательном соединении (рис. 86,б) заряд $q$ на пластинах каждого конденсатора одинаковый. А разность потенциалов между точками 1 и 2

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \sum_{i=1}^{n} \Delta\varphi_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{q}{C_i} = q\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i} .$$

С другой стороны,

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q}{C},$$

где $C$ — емкость батареи.

Тогда емкость батареи последовательно соединенных конденсаторов

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i} . \qquad (3.60)$$

При *последовательном* соединении конденсаторов электрическая емкость батареи меньше наименьшей из электроемкостей $C_i$, но *пробивное напряжение* батареи увеличивается.

## § 78. Энергия электростатического поля

*Энергия системы неподвижных точечных зарядов.* Рассмотрим систему двух неподвижных точечных зарядов $q_1$ и $q_2$, находящихся на расстоянии $r$ друг от друга. Каждый из этих зарядов в поле другого заряда обладает потенциальной энергией

$$W_1 = q_1\varphi_{12} \text{ и } W_2 = q_2\varphi_{21},$$

где $\varphi_{12}$ и $\varphi_{21}$ — соответственно потенциалы, создаваемые зарядом $q_2$ в точке нахождения заряда $q_1$, и зарядом $q_1$ в точке нахождения заряда $q_2$.

По определению потенциала, создаваемого точечным зарядом (в вакууме):

$$\varphi_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r} \text{ и } \varphi_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r},$$

поэтому

$$W_1 = W_2 = W,$$

т. е. роль каждого заряда во взаимодействии одинакова.

Окончательно можно записать:

$$W = q_1\varphi_{12} = q_2\varphi_{21} = \frac{q_1\varphi_{12} + q_2\varphi_{21}}{2} = \frac{W_{12} + W_{21}}{2}. \qquad (3.61)$$

Найдем далее энергию взаимодействия для системы, состоящей из трех точечных зарядов:

$$W = W_{12} + W_{13} + W_{23}.$$

Представим каждое слагаемое в симметричном виде аналогично формуле (3.61):

$$W = \frac{W_{12} + W_{21}}{2} + \frac{W_{13} + W_{31}}{2} + \frac{W_{23} + W_{32}}{2}.$$

Сгруппируем члены с одинаковыми первыми индексами:

$$W = \frac{(W_{12} + W_{13}) + (W_{21} + W_{23}) + (W_{31} + W_{32})}{2}.$$

Каждая сумма в круглых скобках — это энергия $W_i$ взаимодействия $i$-го заряда с остальными зарядами. Поэтому последнее выражение можно переписать в виде

$$W = \frac{W_1 + W_2 + W_3}{2} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} W_i. \qquad (3.62)$$

Обобщив выражение (3.62) на систему из произвольного числа зарядов $n$, получим энергию взаимодействия системы точечных зарядов:

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} W_i.$$

Поскольку

$$W_i = q_i\varphi_i,$$

где $q_i$ — $i$-й заряд системы; $\varphi_i$ — потенциал, создаваемый в месте нахождения $i$-го заряда всеми остальными зарядами системы, получим окончательное выражение для энергии взаимодействия системы точечных зарядов:

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i \varphi_i \,. \qquad (3.63)$$

*Энергия заряженного проводника и конденсатора.* Пусть проводник имеет заряд $q$ и потенциал $\varphi$. Поскольку значение $\varphi$ во всех точках, где имеется заряд, одинаково, то $\varphi$ можно вынести из-под знака суммы в формуле (3.63). Тогда оставшееся выражение есть не что иное, как заряд $q$ на проводнике, и

$$W = \frac{q\varphi}{2} = \frac{C\varphi^2}{2} = \frac{q^2}{2C} \,. \qquad (3.64)$$

По формуле (3.64) определяется энергия заряженного проводника.

Найдем выражение для энергии заряженного конденсатора.

Пусть $q$ и $\varphi$ — заряд и потенциал положительно заряженной обкладки конденсатора. Тогда выражение (3.64) можно разбить на две части — для положительно и отрицательно заряженных обкладок:

$$W = \frac{q_+\varphi_+ + q_-\varphi_-}{2} \,.$$

Так как

$$q_- = -q_+ \,,$$

то

$$W = \frac{1}{2} q_+ (\varphi_+ - \varphi_-) = \frac{1}{2} qU \,,$$

где $q = q_+$ — заряд конденсатора, U — напряжение на его обкладках. Приняв во внимание, что

$$C = \frac{q}{U} \,,$$

получим выражение для энергии конденсатора:

$$W = \frac{qU}{2} = \frac{CU^2}{2} = \frac{q^2}{2C} \,. \qquad (3.65)$$

*Энергия электростатического поля.* На примере поля плоского конденсатора найдем выражение для энергии электростатического поля. Согласно уравнению (3.65) энергия плоского конденсатора

$$W = \frac{CU^2}{2} \,,$$

где $C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}$ (см. 3.57), а $U = Ed$.

Тогда

$$W = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{2d} E^2 d^2 = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} V, \tag{3.66}$$

т. к. $S \cdot d = V$ — объем конденсатора.

Формула (3.66) справедлива для однородного поля. В случае неоднородного поля

$$W = \int_V \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} dV = \int_V \frac{ED}{2} dV, \tag{3.67}$$

где $\vec{D}$ — вектор электрического смещения.

Формула (3.67) показывает, что поле имеет энергию. Из формулы (3.66) найдем объемную плотность электрической энергии:

$$\omega = \frac{W}{V} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{ED}{2} = \frac{D^2}{2\varepsilon\varepsilon_0}. \tag{3.68}$$

Объемная плотность энергии электростатического поля измеряется в джоулях на кубический метр (Дж/м$^3$).

Зная плотность энергии поля в каждой точке, можно определить энергию, заключенную в произвольном объеме поля $V$:

$$W = \int_V \omega dV = \int_V \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} dV. \tag{3.69}$$

## ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

**Задача 38.** Тонкий очень длинный стержень равномерно заряжен с линейной плотностью заряда $\tau = 10$ мкКл/м. На перпендикуляре к оси стержня, восстановленном из конца его, находится точечный заряд $q = 10$ нКл. Расстояние заряда от конца стержня $a = 0{,}2$ м. Найти силу $F$ взаимодействия заряженного стержня и точечного заряда.

**Дано:**

$\tau = 10^{-5}$ Кл/м

$q = 10^{-8}$ Кл

$a = 0{,}2$ м

$F = ?$

**Решение.** Допустим, что стержень и заряд $q$ положительно заряжены. Выделим на стержне малый элемент длины $dl$, в силу чего заряд на нем $dq = \tau dl$ можно считать точечным (см. рисунок к задаче). По закону Кулона найдем силу взаимодействия зарядов $dq$ и $q$:

$$dF = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\tau dl}{r^2}. \qquad (1)$$

Так как

$$r = \frac{a}{\cos\alpha}, \qquad (2)$$

а $AC = rd\alpha = dl\cos\alpha$, то

$$dl = \frac{rd\alpha}{\cos\alpha} = \frac{ad\alpha}{\cos^2\alpha}. \qquad (3)$$

Подставив выражения (2) и (3) в (1), получим

$$dF = \frac{q\tau a\cos^2\alpha d\alpha}{4\pi\varepsilon_0 a^2\cos^2\alpha} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\tau d\alpha}{a}. \qquad (4)$$

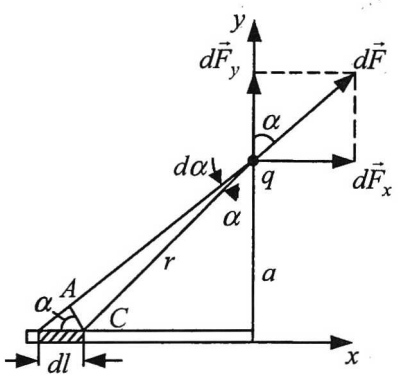



Рис. к задаче 38

Разложим вектор $d\vec{F}$ по взаимно перпендикулярным направлениям $x$ и $y$:

$$dF_x = dF\sin\alpha, \quad dF_y = dF\cos\alpha. \qquad (5)$$

Подставим в уравнение (5) выражение (4):

$$dF_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\tau\sin\alpha d\alpha}{a}, \qquad (6)$$

$$dF_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\tau\cos\alpha d\alpha}{a}. \qquad (7)$$

Интегрируя выражения (6) и (7) с пределами от 0 до $\pi/2$, найдем

$$F_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\tau}{a}\int_0^{\pi/2}\sin\alpha\, d\alpha = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\tau}{a}\cos\alpha\Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\tau}{a}, \qquad (8)$$

$$F_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\tau}{a}\int_0^{\pi/2}\cos\alpha\, d\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\tau}{a}. \qquad (9)$$

По теореме Пифагора определим неизвестную силу:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{\frac{1}{(4\pi\varepsilon_0)^2}\frac{(q^2\tau^2 + q^2\tau^2)}{a^2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sqrt{2}q\tau}{a}.$$

**Ответ**: $F = 6{,}36$ мН.

**Задача 39.** Расстояние $d$ между двумя длинными тонкими проволоками, расположенными параллельно друг другу, равно 16 см. Проволоки равномерно заряжены разноименными зарядами с линейной плотностью $|\tau| = 150$ мкКл/м. Какова напряженность $E$ поля в точке, удаленной на $r = 10$ см как от первой, так и от второй проволоки?

**Дано:**
$d = 16$ см
$|\tau| = 150 \frac{\text{мкКл}}{\text{м}}$
$r = 0{,}1$ м
$E = ?$

**Решение.** Каждая заряженная проволока создает в заданной точке электрическое поле напряженностью

$$|E_+| = |E_-| = \frac{|\tau|}{2\pi\varepsilon_0 r}. \qquad (1)$$

Согласно принципу суперпозиции электрических полей, результирующее поле имеет напряженность

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-.$$

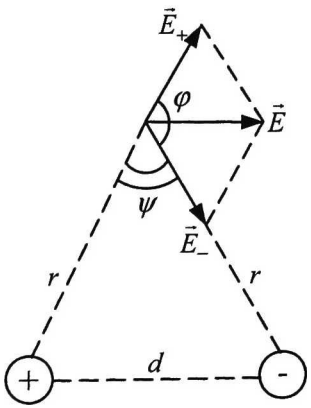


Рис. к задаче 39

По теореме косинусов

$$E = \sqrt{E_+^2 + E_-^2 + 2E_+E_-\cos\varphi}, \qquad (2)$$

где $\varphi$ – угол между векторами $\vec{E}_+$ и $\vec{E}_-$.

Угол $\varphi = 180° - \psi$. Угол $\psi$ найдем по теореме косинусов:

$$d^2 = r^2 + r^2 - 2rr\cos\psi,$$

$$\cos\psi = \frac{2r^2 - d^2}{2r^2}, \text{ тогда}$$

$$\cos\varphi = \cos(180° - \psi) = -\cos\psi = \frac{d^2 - 2r^2}{2r^2}. \qquad (3)$$

Подставив выражения (1) и (3) в уравнение (2), получим

$$E = \sqrt{\left(\frac{|\tau|}{2\pi\varepsilon_0 r}\right)^2 + \left(\frac{|\tau|}{2\pi\varepsilon_0 r}\right)^2 + 2\left(\frac{|\tau|}{2\pi\varepsilon_0 r}\right)^2 \frac{d^2 - 2r^2}{2r^2}} =$$

$$= \frac{|\tau|}{2\pi\varepsilon_0 r}\sqrt{1+1+2\frac{d^2-2r^2}{2r^2}} = \frac{|\tau| d}{2\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

**Ответ:** $E = 43{,}2 \dfrac{\text{МВ}}{\text{м}}$.

**Задача 40.** Шар радиусом $R_1 = 6$ см заряжен до потенциала $\varphi_1 = 300$ В, а шар радиусом $R_2 = 4$ см — до потенциала $\varphi_2 = 500$ В. Найдите потенциал шаров после того, как их соединили металлическим проводником. Емкостью соединительного проводника пренебречь.

**Дано:**
$R_1 = 6$ см
$\varphi_1 = 300$ В
$R_2 = 4$ см
$\varphi_2 = 500$ В

$\varphi = ?$

**Решение.** Определим заряд шаров до и после соединения их проводником. Электрическая емкость шара, с одной стороны,

$$C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R, \qquad (1)$$

с другой стороны, емкость

$$C = \frac{q}{\varphi}. \qquad (2)$$

Из уравнений (1), (2):

$$q = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R\varphi. \qquad (3)$$

Заряды шаров до соединения их проводником найдем по формуле (3):

$$\begin{cases} q_1 = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R_1\varphi_1, \\ q_2 = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R_2\varphi_2. \end{cases} \qquad (4)$$

После соединения проводником потенциалы шаров станут одинаковыми и равными $\varphi$, а их заряды $q_1'$ и $q_2'$ определятся по формуле (3):

$$\begin{cases} q_1' = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R_1\varphi, \\ q_2' = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R_2\varphi. \end{cases} \qquad (5)$$

По закону сохранения заряда

$$q_1 + q_2 = q_1' + q_2'. \qquad (6)$$

Подставив уравнения (4) и (5) в (6), получим

$$4\pi\varepsilon\varepsilon_0(R_1\varphi_1 + R_2\varphi_2) = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0(R_1 + R_2)\varphi,$$

$$\varphi = \frac{R_1\varphi_1 + R_2\varphi_2}{R_1 + R_2}; \varphi = 380\text{ В}.$$

**Ответ:** $\varphi = 380$ В.

**Задача 41.** Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено эбонитом, толщина которого $d = 5$ мм. Определите работу, необходимую для удаления диэлектрика из конденсатора, если поверхностная плотность зарядов на его пластинах $\sigma = 1{,}8\,\frac{\text{мкКл}}{\text{м}^2}$, а площадь пластины $S = 0{,}01\,\text{м}^2$.

**Дано:**

$d = 5 \cdot 10^{-3}$ м

$\sigma = 1{,}8\,\frac{\text{мкКл}}{\text{м}^2}$

$S = 0{,}01\,\text{м}^2$

$A = ?$

**Решение.** Согласно закону сохранения энергии, работа

$$A = W_2 - W_1,$$

где $W_2$ и $W_1$ — энергия поля конденсатора в начальном и конечном состояниях.

Так как $W_1 = \frac{q^2}{2C_1}$, $W_2 = \frac{q^2}{2C_2}$, $C_1 = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}$, $C_2 = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$, $q = \sigma S$, то выражения для энергии поля конденсатора примут вид

$$W_1 = \frac{1}{2}\frac{\sigma^2 S^2 d}{\varepsilon\varepsilon_0 S} = \frac{1}{2}\frac{\sigma^2 S d}{\varepsilon\varepsilon_0}, \qquad W_2 = \frac{1}{2}\frac{\sigma^2 S d}{\varepsilon_0}.$$

где $C_1$ и $C_2$ — начальная и конечная емкости конденсатора, $q$ — заряд пластины.

Тогда $A = \frac{1}{2}\frac{\sigma^2 S d}{\varepsilon_0}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right)$; $A = 6$ мкДж.

**Ответ:** $A = 6$ мкДж.

**Задача 42.** Сплошной парафиновый шар радиусом $R = 10$ см заряжен равномерно по объему с объемной плотностью заряда $\omega = 10\,\frac{\text{нКл}}{\text{м}^3}$. Опре-

делите энергию $W_1$ электрического поля, сосредоточенную в самом шаре, и энергию $W_2$ вне его.

**Дано:**
$R = 0{,}1$ м
$\omega = 10 \frac{\text{нКл}}{\text{м}^3}$
$\varepsilon_1 = 2$
$\varepsilon_2 = 1$
$W_1 = ?\ W_2 = ?$

**Решение.** Объемная плотность заряда

$$\omega = \frac{q}{V} = \frac{q}{(4/3)\pi R^3} = \frac{3q}{4\pi R^3},$$

где $V$ — объем шара; $q$ — заряд шара.

Электрическое поле, созданное заряженным шаром, не является однородным, т. е. энергия в диэлектрике (как в парафине, так и в воздухе) распределена неравномерно. Однако поле заряженного шара обладает сферической симметрией, поэтому объемная плотность энергии одинакова во всех точках, отстоящих на равных расстояниях от центра шара.

Выделим внутри шара тонкий сферический слой объемом

$$dV_1 = 4\pi r_1^2 dr, \qquad (1)$$

имеющий радиус $r_1$ и толщину $dr$.

Заряд внутри слоя $q_1 = \frac{4}{3}\pi r_1^3 \omega$. По теореме Гаусса запишем:

$$4\pi r_1^2 E_1 = \frac{q_1}{\varepsilon_1 \varepsilon_0} = \frac{4}{3}\frac{\pi r_1^3 \omega}{\varepsilon_1 \varepsilon_0}, \qquad (2)$$

откуда напряженность поля $E_1$, создаваемая зарядом $q_1$ в сферическом слое, равна

$$E_1 = \frac{1}{3}\frac{r_1 \omega}{\varepsilon_1 \varepsilon_0}. \qquad (3)$$

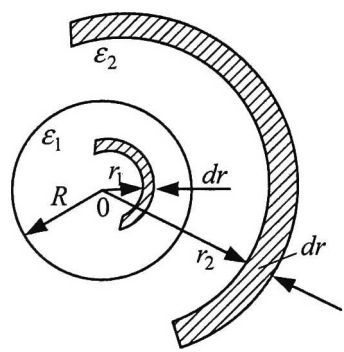


Рис. к задаче 42

Выразим энергию в элементарном сферическом слое объемом $dV_1$, используя уравнения (1)–(3):

$$dW_1 = \omega dV_1 = \frac{1}{2}\varepsilon_1 \varepsilon_0 E_1^2 dV_1 = \frac{2\pi\omega^2}{9\varepsilon_1 \varepsilon_0} r_1^4 dr. \qquad (4)$$

Полная энергия, сосредоточенная в парафиновом шаре, выразится интегралом

$$W_1 = \int \omega dV_1 = \frac{2\pi\omega^2}{9\varepsilon_1 \varepsilon_0}\int_0^R r_1^4 dr = \frac{2\pi\omega^2 R^5}{45\varepsilon_1 \varepsilon_0};\ W_1 = 7{,}88 \text{ нДж}.$$

Выделим вне шара тонкий сферический слой радиусом $r_2$, толщиной

$dr$ и объемом $dV_2 = 4\pi r_2^2 dr$, внутри которого находится электрический заряд $q_2 = \frac{4}{3}\pi R^3 \omega$ (заряд шара).

Проделав аналогичные операции, найдем

$$dW_2 = \frac{1}{2}\varepsilon_2 \varepsilon_0 E_2^2 dV_2,$$

где $E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_2\varepsilon_0}\frac{q_2}{r_2^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_2\varepsilon_0}\frac{4}{3}\frac{\pi R^3 \omega}{r_2^2} = \frac{R^3\omega}{3\varepsilon_2\varepsilon_0 r_2^2}$ — напряженность поля, создаваемая зарядом $q_2$ в точках сферического слоя радиусом $r_2$.

$$W_2 = 2\pi\varepsilon_2\varepsilon_0 \frac{R^6\omega^2}{9\varepsilon_2^2\varepsilon_0^2}\int_R^\infty \frac{dr}{r_2^2} = \frac{2}{9}\frac{\pi R^5\omega^2}{\varepsilon_2\varepsilon_0}; W_2 = 78{,}8 \text{ нДж}.$$

**Ответ**: $W_1 = 7{,}88$ нДж; $W_2 = 78{,}8$ нДж.

# Глава 14
# ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

## § 79. Условия возникновения электрического тока. Сила тока. Плотность тока

*Электрическим током* называется упорядоченное (направленное) движение заряженных частиц. Ток, образованный зарядами, движущимися по проводнику, называют *током проводимости*. В зависимости от природы носителей тока в проводнике различают проводимость электронную (в металлах), ионную (в электролитах), электронно-ионную (в газах), электронно-дырочную (в полупроводниках).

За направление тока принимается направление движения положительно заряженных частиц.

Для возникновения и существования тока проводимости в веществе необходимо, чтобы в нем имелись носители тока и электрическое поле, вызывающее и поддерживающее их упорядоченное движение.

Чтобы ток в проводнике был постоянным, необходимо на его концах поддерживать постоянное напряжение, а в проводнике неизменяющееся электрическое поле. Для этого в замкнутую цепь должен быть включен источник ЭДС.

Количественными характеристиками электрического тока являются сила тока $I$ и плотность тока $j$.

*Силой тока* называют скалярную величину, равную отношению заряда $dq$, переносимого через поперечное сечение проводника за интервал времени $dt$, к величине этого интервала:

$$I = \frac{dq}{dt}. \qquad (3.70)$$

За единицу силы тока в СИ принят ампер (А). Электрический ток, сила которого с течением времени не изменяется, называется *постоянным*.

Рассмотрим проводник, по которому течет ток.

За промежуток времени $dt$ через поперечное сечение $S$ проводника (рис. 87) пройдет число заряженных частиц $N$, находящихся в объеме, ограниченном сечениями 1 и 2:

$$N = nS\,v_н\,dt,$$

где $n$ — концентрация заряженных частиц, $v_н$ — скорость их направленного движения (дрейфа).

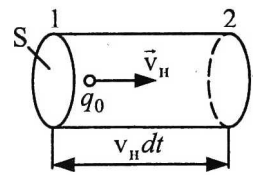


**Рис. 87**

Общий заряд этих частиц

$$dq = q_0 nS\,\mathrm{v}_{\text{н}}\,dt,$$

где $q_0$ — заряд частицы.

Тогда сила тока

$$I = \frac{dq}{dt} = q_0 nS\,\mathrm{v}_{\text{н}}. \tag{3.71}$$

Итак, сила тока зависит от заряда, переносимого каждой частицей, концентрации частиц, скорости их направленного движения и площади поперечного сечения проводника.

*Плотность тока* — это векторная физическая величина, совпадающая с направлением тока, равная отношению силы тока к площади поперечного сечения проводника, перпендикулярного направлению тока:

$$\vec{j} = \frac{I}{S}\vec{e},$$

где $\vec{e}$ — единичный вектор, совпадающий с направлением тока.

В СИ за единицу плотности тока принят ампер на квадратный метр ( $\text{А/м}^2$ ).

Приняв во внимание уравнение (3.71), получим плотность тока

$$j = q_0 n\,\mathrm{v}_{\text{н}}.$$

Вектор плотности тока по направлению совпадает с направлением движения положительно заряженных частиц:

$$\vec{j} = q_0 n\,\vec{\mathrm{v}}_{\text{н}}. \tag{3.72}$$

Для электролитов плотность тока

$$\vec{j} = \vec{j}^{+} + \vec{j}^{-} = q_0\left(n^{+}\vec{\mathrm{v}}_{\text{н}}^{+} + n^{-}\vec{\mathrm{v}}_{\text{н}}^{-}\right),$$

где $\vec{j}^{+}$, $\vec{j}^{-}$ — плотности тока положительных и отрицательных ионов; $n^{+}$, $n^{-}$ — концентрация положительных и отрицательных ионов; $\vec{\mathrm{v}}_{\text{н}}^{+}$, $\vec{\mathrm{v}}_{\text{н}}^{-}$ — скорости направленного движения положительных и отрицательных ионов.

Зная вектор плотности тока, можно найти силу тока, протекающего по проводнику:

$$I = \int_S \vec{j}\,d\vec{S}, \tag{3.73}$$

где $d\vec{S}$ — вектор бесконечно малой площадки в сечении проводника, перпендикулярном вектору $\vec{j}$.

## § 80. Электродвижущая сила и напряжение

В замкнутой электрической цепи на носители тока действует сила электростатического поля, вызывая их перемещение от точек с большим потенциалом к точкам с меньшим потенциалом (для положительных зарядов). Перемещение зарядов приведет к выравниванию потенциалов во всех точках электрической цепи и ток прекратится. Чтобы ток был постоянным, в цепи кроме электростатических сил должны действовать силы неэлектростатического происхождения, называемые *сторонними силами*.

Природа сторонних сил может быть различна. В источнике ЭДС происходит непрерывное превращение энергии неэлектрического происхождения в электрическую: в электрогенераторе — механической, в аккумуляторе — химической, в термобатарее — тепловой, в фотоэлементе — световой и т. д. За счет таких превращений в источнике происходит разделение разноименных зарядов, в результате которого на клеммах источника накапливаются заряды противоположных знаков и устанавливается постоянная разность потенциалов.

При подключении нагрузки к источнику ЭДС электростатическое поле разделенных зарядов совершает работу по перемещению заряда $q$ во внешней цепи. Затраты энергии электростатического поля во внешней цепи восполняются за счет работы сторонних сил по разделению электрических зарядов. Таким образом, полная работа в замкнутой цепи совершается за счет энергии сторонних сил, действующих внутри источника.

Физическая величина, равная отношению работы $A_{ст}$, совершаемой сторонними силами при перемещении заряда $q$ в электрической цепи, к значению этого заряда, называется *электродвижущей силой* (*ЭДС*) источника:

$$\mathscr{E} = \frac{A_{ст}}{q}.$$

Электродвижущую силу выражают в вольтах (В).

Работа сторонних сил по перемещению заряда $q$ по замкнутой цепи равна

$$A_{ст} = \oint \vec{F}_{ст} d\vec{l} = q \oint \vec{E}_{ст} d\vec{l}\ , \qquad (3.74)$$

где $\vec{F}_{ст}$ — сторонняя сила, $d\vec{l}$ — перемещение заряда, $\vec{E}_{ст}$ — напряженность поля сторонних сил.

Разделив уравнение (3.74) на величину перемещаемого заряда $q$, получим ЭДС, действующую в цепи:

$$\mathscr{E} = \frac{A_{ст}}{q} = \oint \vec{E}_{ст} d\vec{l}.$$

Таким образом, ЭДС, действующая в замкнутой цепи, равна циркуляции вектора напряженности поля сторонних сил.

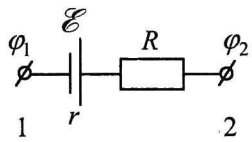


Рис. 88

Участок 1–2 электрической цепи (рис. 88) содержащий ЭДС, называется *неоднородным участком цепи.*

На заряд $q$ на данном участке цепи 1–2 действуют как сторонние силы $F_{ст}$, так и силы электростатического поля $F_e$:

$$\vec{F} = \vec{F}_{ст} + \vec{F}_e = q\left(\vec{E}_{ст} + \vec{E}\right).$$

Работа результирующей силы $\vec{F}$ на участке 1–2 равна

$$A_{12} = q\int_1^2 \vec{E}_{ст}d\vec{l} + q\int_1^2 \vec{E}d\vec{l} = q\mathscr{E} + q(\varphi_1 - \varphi_2). \qquad (3.75)$$

*Напряжением* (падением напряжения) $U_{12}$ на участке цепи 1–2 называется физическая величина, численно равная работе, совершаемой электрическими и сторонними силами по перемещению единичного положительного заряда:

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathscr{E}. \qquad (3.76)$$

*Однородным* называется участок электрической цепи, на котором не действуют сторонние силы. Напряжение $U_{12}$ на однородном участке цепи совпадает с разностью потенциалов на концах участка:

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2.$$

## § 81. Закон Ома для однородного участка цепи

Зависимость силы тока в проводнике от напряжения (рис. 89) записывается в виде уравнения

$$I = \frac{U}{R}, \qquad (3.77)$$

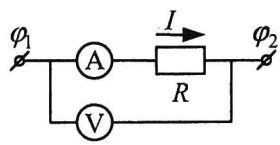


Рис. 89

которое выражает закон Ома[1] в интегральной форме для однородного участка цепи: *сила тока в проводнике прямо пропорциональна приложенному напряжению U и обратно пропорциональна сопротивлению проводника R.* Сопротивление измеряется в омах (Ом).

Сопротивление 1 Ом имеет такой проводник, в котором при напряжении 1 В течет ток силой 1 А.

[1] Георг Симон Ом (1787–1854) — немецкий физик.

Сопротивление металлического проводника зависит от его размеров и материала, из которого он изготовлен:

$$R = \rho \frac{l}{S}, \tag{3.78}$$

где $l$ — длина проводника; $S$ — площадь поперечного сечения; $\rho$ — удельное сопротивление.

Из уравнения (3.78) имеем

$$\rho = R \frac{S}{l}.$$

*Удельное сопротивление* — это физическая величина, равная сопротивлению проводника, изготовленного из данного материала, имеющего единичную длину и единичную площадь поперечного сечения.

Единицей удельного сопротивления в СИ является ом-метр (Ом·м).

Проводники, образующие электрическую цепь, могут быть соединенными между собой различными способами.

При *последовательном соединении* (рис. 90,а) проводники включаются в цепь поочередно друг за другом. Если последовательно соединено $n$ проводников, то сопротивление цепи $R$ равно сумме сопротивлений этих проводников:

$$R = \sum_{i=1}^{n} R_i.$$

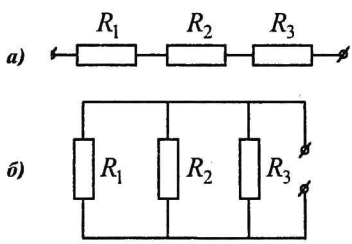



Рис. 90

При *параллельном соединении* $n$ проводников (рис. 90,б) сопротивление цепи рассчитывается по формуле

$$\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i},$$

где $R_i$ — сопротивление отдельно взятого проводника.

Подставив выражение (3.78) в закон Ома (3.77), получим

$$\frac{I}{S} = \frac{U}{\rho l}. \tag{3.79}$$

Физическая величина $\gamma = \frac{1}{\rho}$ называется *удельной электрической проводимостью* и измеряется в сименсах на метр (См/м). Так как $\frac{U}{l} = E$ — напряженность электрического поля в проводнике, а $\frac{I}{S} = j$ — плотность

тока, то формула (3.79) перепишется в виде

$$j = \gamma E \text{ или } \vec{j} = \gamma \vec{E}. \qquad (3.80)$$

Получили *закон Ома для однородного участка цепи в дифференциальной форме.*

## § 82. Работа и мощность тока. Закон Джоуля–Ленца

При упорядоченном движении заряженных частиц в проводнике силы электрического поля, действующие на заряды, совершают работу. Эту работу называют *работой тока.*

Пусть за промежуток времени $dt$ через поперечное сечение однородного проводника проходит заряд $dq$. Электрическое поле между точками проводника с напряжением $U$ совершает работу $dA = Udq$.

Так как сила тока $I = \dfrac{dq}{dt}$, то

$$dA = IUdt. \qquad (3.81)$$

Работа тока на участке цепи равна произведению силы тока, напряжения и времени, в течение которого совершалась работа.

Единица работы электрического тока — джоуль (Дж). С помощью закона Ома для участка цепи и формулы (3.81) можно получить эквивалентное уравнение для работы тока:

$$dA = IUdt = I^2 Rdt. \qquad (3.82)$$

Работа, совершаемая источником, ЭДС которого $\mathscr{E}$, равна

$$dA = \mathscr{E}Idt. \qquad (3.83)$$

*Мощность $P$ постоянного тока* — это физическая величина, равная отношению работы, совершаемой током за время $dt$, к этому интервалу времени:

$$P = \frac{dA}{dt}. \qquad (3.84)$$

Подставив формулу (3.81) в (3.84), получим

$$P = IU. \qquad (3.85)$$

Мощность тока выражается в ваттах (Вт).

Используя уравнение (3.82), получим для мощности:

$$P = I^2 R = \frac{U^2}{R}. \qquad (3.86)$$

На практике для измерения работы и энергии электрического тока часто используют внесистемную единицу — киловатт-час (кВт·ч); $1\,\text{кВт} \cdot \text{ч} = 3{,}6 \cdot 10^6$ Дж.

При прохождении электрического тока проводник нагревается. Закон, определяющий количество теплоты, выделившееся в проводнике, был экспериментально установлен английским ученым Джоулем[1] и русским ученым Ленцем[2].

Закон Джоуля–Ленца формулируется следующим образом: *количество теплоты, выделяемое проводником с током, равно произведению квадрата силы тока, сопротивления проводника и времени прохождения тока по проводнику*:

$$dQ = I^2 R dt\,. \tag{3.87}$$

Количество теплоты, выделяемое в проводнике, может быть рассчитано по любому выражению уравнения (3.82).

Выделим в проводнике элементарный объем

$$dV = dS \cdot dl\,,$$

сопротивление которого согласно выражению (3.78)

$$R = \rho \frac{dl}{dS}\,.$$

По формуле (3.87) закона Джоуля–Ленца найдем количество теплоты $dQ$, которое выделится в объеме $dV$ за промежуток времени $dt$:

$$dQ = I^2 R dt = I^2 \rho \frac{dl}{dS} dt = (jdS)^2 \rho \frac{dl}{dS} dt = \rho j^2 dV dt\,. \tag{3.88}$$

Используя закон Ома в дифференциальной форме $j = \gamma E$ и выражение $\gamma = \frac{1}{\rho}$, получим

$$dQ = \gamma E^2 dV dt. \tag{3.89}$$

Количество теплоты, выделяемое единицей объема проводника за единицу времени, называется *удельной тепловой мощностью тока*:

$$\omega = \frac{dQ}{dV dt} = \gamma E^2. \tag{3.90}$$

Уравнение (3.90) называется *законом Джоуля–Ленца в дифференциальной форме.*

---

[1] Джеймс Прескотт Джоуль (1818–1889) — английский физик.

[2] Эмилий Христианович Ленц (1804–1865) — русский физик и электротехник.

## § 83. Закон Ома для неоднородного участка цепи

Неоднородный участок цепи показан на рис. 88. Работа всех сил (сторонних и электрических), совершаемая при перемещении заряда на участке 1–2, определяется по формуле

$$dA_{12} = q\mathscr{E} + q(\varphi_1 - \varphi_2). \qquad (3.91)$$

По закону сохранения и превращения энергии данная работа $dA_{12}$ равна количеству теплоты $dQ$, выделяемой на этом участке:

$$dQ = I^2 Rdt = IR(Idt) = IRq, \qquad (3.92)$$

т. е. $dA_{12} = dQ$ или $IRq = q\mathscr{E} + q(\varphi_1 - \varphi_2)$, откуда получаем закон Ома для неоднородного участка цепи:

$$I = \frac{\mathscr{E} + (\varphi_1 - \varphi_2)}{R_1 + r}, \qquad (3.93)$$

где $R = R_1 + r$ — сопротивление всей цепи, где $r$ — внутреннее сопротивление источника, $R_1$ — сопротивление внешней цепи.

Если участок цепи замкнуть, то $\varphi_1 = \varphi_2$ и уравнение (3.93) запишется в виде

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R_1 + r}. \qquad (3.94)$$

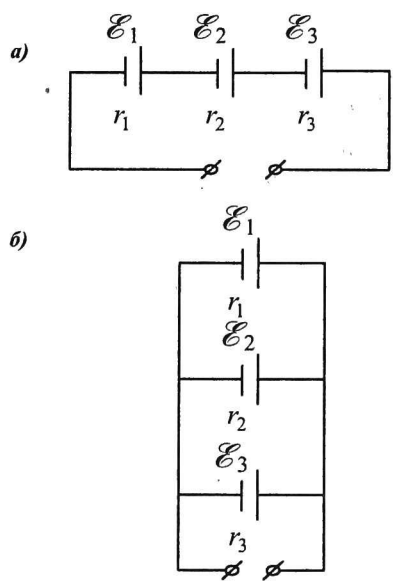



Рис. 91

Сила тока равна отношению ЭДС, действующей в электрической цепи, к полному сопротивлению цепи.

Уравнение (3.94) называется *законом Ома для полной цепи*. Различают последовательное и параллельное соединение источников в батареи.

*При последовательном соединении n источников* (рис. 91,а) ЭДС батареи $\mathscr{E}_б$ равна сумме ЭДС отдельных источников:

$$\mathscr{E}_б = \mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2 + \mathscr{E}_3 = \sum_{i=1}^{n} \mathscr{E}_i. \qquad (3.95)$$

Внутреннее сопротивление батареи равно сумме внутренних сопротивлений отдельных источников:

$$R_б = r_1 + r_2 + r_3 = \sum_{i=1}^{n} r_i. \qquad (3.96)$$

*При параллельном соединении источников* (рис. 91,б), если соединенные элементы имеют одинаковые ЭДС, то ЭДС батареи равна

$$\mathscr{E}_б = \mathscr{E}_1 = \mathscr{E}_2 = \mathscr{E}_3.$$

Если элементы имеют разные ЭДС, то электрическую цепь можно рассчитывать по правилам Кирхгофа (см. § 84). Сопротивление батареи определяется по формуле

$$\frac{1}{R_б} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}. \qquad (3.97)$$

Внутреннее сопротивление батареи $R_б$ из $n$ элементов, имеющих одинаковые внутренние сопротивления $r$, в $n$ раз меньше, чем сопротивление отдельного элемента:

$$R_б = \frac{r}{n}.$$

Закон Ома для $n$ одинаковых элементов с ЭДС, равной $\mathscr{E}$, и внутренним сопротивлением $r$ примет вид: $I_{посл} = \dfrac{\mathscr{E}n}{R + rn}$ — при последовательном соединении и $I_{парал} = \dfrac{\mathscr{E}}{R + \dfrac{r}{n}}$ — при параллельном соединении источников.

## § 84. Правила Кирхгофа. Расчет разветвленной электрической цепи

*Узлом электрической цепи* называется точка, в которой сходятся три и более проводника. В цепи, изображенной на рис. 92, имеется два узла A и B.

Первое правило Кирхгофа[1]: *алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю:*

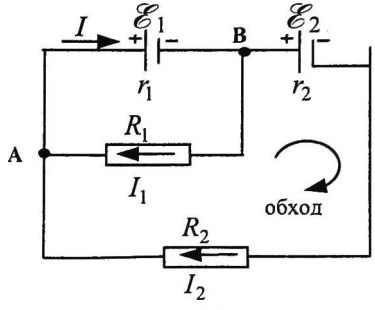


Рис. 92

$$\sum_{i=1}^{k} I_i = 0. \qquad (3.98)$$

Токи, притекающие к узлу, считают положительными, а оттекающие от узла — отрицательными. По правилу Кирхгофа можно записать $(k-1)$ уравнений, где $k$ — число узлов цепи. Произвольно выбирается и обозначается на схеме стрелками направление токов во всех участках цепи (участок — это часть цепи между соседними узлами).

[1] Густав Роберт Кирхгоф (1824–1887) — немецкий физик.

Для узла А первое правило Кирхгофа запишется в виде

$$I_1 + I_2 - I = 0\,. \tag{3.99}$$

Второе правило Кирхгофа: *в любом замкнутом контуре электрической цепи алгебраическая сумма произведений токов на сопротивления соответствующих участков контура равна алгебраической сумме ЭДС, действующих в данном контуре*:

$$\sum_{i=1}^{m} I_i R_i = \sum_{i=1}^{n} \mathscr{E}_i, \tag{3.100}$$

где $m$ — число участков, а $n$ — количество источников в контуре.

Число уравнений, записываемых по первому и второму правилам Кирхгофа, должно быть равно числу токов, текущих в разветвленной цепи.

При применении второго правила Кирхгофа необходимо выполнить следующее:

1) произвольно выбрать и обозначить на схеме направление обхода контура;

2) выделить замкнутые контуры таким образом, чтобы каждый новый контур имел не менее одного участка цепи, не входящего в уже рассмотренные контуры;

3) если направление обхода контура совпадает с направлением тока $I_i$, то произведение $I_i R_i$ в уравнении (3.100) запишется со знаком плюс, и наоборот; если направление тока от источника (ток течет по цепи от положительного полюса к отрицательному) совпадает с направлением обхода контура, то соответствующая ЭДС в уравнении (3.100) берется со знаком плюс, и наоборот.

В цепи, изображенной на рис. 30, три замкнутых контура. Применим для двух из них второе правило Кирхгофа (обход контура выбираем по ходу часовой стрелки):

$$Ir_1 + I_1 R_1 = -\mathscr{E}_1, \tag{3.101}$$

$$Ir_1 + I_2 (R_2 + r_2) = -\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2. \tag{3.102}$$

Допустим, что по условию задачи известны внутренние сопротивления источников $r_1$ и $r_2$, сопротивления нагрузки $R_1$ и $R_2$ и величины ЭДС $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$, то, решая уравнения (3.99), (3.101) и (3.102), можно определить токи на участках цепи: $I$, $I_1$, $I_2$. Если при решении сила тока получилась со знаком минус, то истинное направление тока противоположно выбранному.

## § 85. Электронная проводимость металлов

В начале XX века была создана электронная теория проводимости металлов. Согласно этой теории носителями тока в металлах являются электроны проводимости, т. е. электроны, слабосвязанные с ионами кристаллической решетки металла. Эти электроны между собой не взаимодейст-

вуют, а при своем движении сталкиваются с ионами решетки, т. е. электроны проводимости ведут себя подобно идеальному одноатомному газу.

В отсутствие внешнего электрического поля электроны проводимости совершают хаотическое тепловое движение со средней квадратичной скоростью, зависящей от температуры металла.

Когда к металлу приложено внешнее электрическое поле, то на хаотическое движение электронов накладывается их направленное движение, так называемый *дрейф электронов*, со средней скоростью, пропорциональной модулю напряженности этого поля. В процессе дрейфа электроны сталкиваются с ионами кристаллической решетки, обусловливая тем самым сопротивление проводника электрическому току.

Сопротивление металлических проводников зависит от температуры. При повышении температуры возрастает скорость хаотического теплового движения электронов, увеличивается амплитуда тепловых колебаний положительных ионов в узлах кристаллической решетки. Это приводит к более частым столкновениям электронов с решеткой и к уменьшению скорости дрейфа электронов. Чем меньше скорость дрейфа, тем меньший заряд переносится через поперечное сечение проводника, тем меньше сила тока в проводнике. А это, согласно закону Ома для участка цепи, свидетельствует об увеличении сопротивления проводника.

Пусть при 0°С сопротивление проводника $R_0$, а при температуре $t$ — $R$. Опытом установлено, что относительное изменение сопротивления прямо пропорционально изменению температуры:

$$R = R_0(1+\alpha t), \tag{3.103}$$

где $\alpha$ — температурный коэффициент сопротивления, характеризующий зависимость сопротивления вещества от температуры и численно равный относительному изменению сопротивления проводника при нагревании на 1 К.

Из формулы видно, что размерность $[\alpha] = \text{К}^{-1}$.

Для химически чистых металлов $\alpha \approx \frac{1}{273}\text{К}^{-1}$. Существуют сплавы, у которых температурный коэффициент сопротивления настолько мал, что их сопротивление практически не зависит от температуры. Эти сплавы используют для создания эталонных сопротивлений, шунтов и добавочных сопротивлений к измерительным приборам.

Используя уравнения (3.78) и (3.103), получим формулу, выражающую зависимость удельного сопротивления от температуры:

$$\rho = \rho_0(1+\alpha t).$$

Для чистых металлов при не слишком низких и не слишком высоких температурах $\alpha$ практически не зависит от температуры и температурная зависимость удельного сопротивления является линейной.

У некоторых металлов и сплавов при температурах, близких к абсолютному нулю, сопротивление скачком обращается в нуль (рис. 93). Впервые это явление, названное *сверхпроводимостью*, было обнаружено в 1911 г. голландским физиком Камерлинг-Оннесом[1] у ртути.

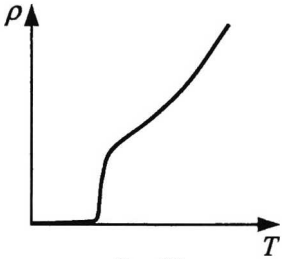


Рис. 93

Прохождение тока в сверхпроводнике происходит без потерь энергии. Для каждого сверхпроводника имеется своя *критическая температура* $T_{кр}$, при которой он переходит в сверхпроводящее состояние. Для ртути $T_{кр} = 4$ К.

В настоящее время достигнуты значительные успехи в получении высокотемпературной сверхпроводимости. На базе металлокерамики получены вещества, для которых температура перехода в сверхпроводящее состояние $T_{кр}$ превышает температуру сжижения азота ($T_{кр} = 77$ К).

## § 86. Электрический ток в газах. Самостоятельный и несамостоятельный разряды

В обычных условиях газы являются хорошими изоляторами, т. к. атомы и молекулы, из которых они состоят, электрически нейтральны, а концентрация носителей тока мала.

Чтобы газ стал проводящим, нужно добиться образования в нем подвижных заряженных частиц, т. е. *ионизировать* его. К ионизации газа могут привести его нагревание, воздействие излучений: ультрафиолетового, рентгеновского, радиоактивного.

При ионизации часть атомов газа распадается на положительно заряженные ионы и электроны. При этом в газе могут образоваться и отрицательные ионы вследствие захвата нейтральным атомом свободного электрона. После этого газ становится проводящим. Проводимость газов носит ионно-электронный характер.

Наряду с процессом ионизации в газе протекает процесс *рекомбинации* — воссоединения ионов в нейтральные атомы или молекулы. Если внешний ионизатор не будет действовать, проводимость газа уменьшится и газ перестанет быть проводником.

При неизменной мощности ионизатора между процессом ионизации и рекомбинации устанавливается динамическое равновесие, при котором число вновь образующихся пар заряженных частиц равно в среднем числу пар ионов, исчезающих вследствие рекомбинации.

---

[1] Хейке Камерлинг-Оннес (1853–1926) — нидерландский физик.

Электрический ток в газах называется *газовым разрядом*.

Электропроводимость газов, возникающая под действием внешнего ионизатора, называется *несамостоятельным газовым разрядом*.

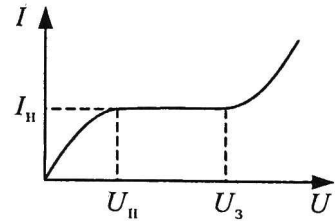


Рис. 94

Предположим, что на воздушный промежуток между обкладками конденсатора воздействует ультрафиолетовое излучение. Возникает газовый разряд. Если плавно увеличивать напряжение на конденсаторе, то сила тока будет увеличиваться до некоторого значения $I_н$, называемого током насыщения (рис. 94). Возрастание силы тока объясняется тем, что при увеличении напряжения возрастает количество ионов и электронов, движущихся к обкладкам.

При напряжении $U_н$, при котором все образовавшиеся в зазоре заряды достигают обкладок конденсатора, ток максимален при данной интенсивности ионизации (*ток насыщения*). Увеличение напряжения (до значения $U_з$) не вызовет увеличения тока.

Если источник ионизации перестает действовать, электрический ток через газ прекращается. Описанный процесс — несамостоятельный газовый разряд.

Если после достижения тока насыщения продолжить увеличивать напряжение (выше $U_з$), то сила тока резко возрастает. Такой разряд может продолжаться без внешнего ионизатора. При этом ионы и электроны, необходимые для поддержания электропроводности газа, создаются самим разрядом.

Газовый разряд, который продолжается после прекращения действия внешнего ионизатора, называют *самостоятельным газовым разрядом*.

Напряжение $U_з$, при котором возникает самостоятельный разряд, называют *напряжением зажигания газового разряда* или *напряжением пробоя*. Причиной резкого увеличения тока является возрастание числа заряженных частиц за счет ионизации молекул газа при столкновении их с электронами, разогнанными электрическим полем до больших скоростей. При этом кинетическая энергия электронов оказывается достаточной для того, чтобы они могли совершить работу по отрыву электронов от нейтральных атомов или молекул, т. е. *работу ионизации*. Произойдет ионизация электронным ударом, в результате которой возникает лавина электронов и ионов. Необходимость во внешнем ионизаторе для поддержания самостоятельного разряда отпадает. Однако только ионизация электронным ударом не может обеспечить длительный самостоятельный разряд. Необходимо, чтобы в газе протекал процесс воспроизведения электронов. Если газовый разряд горит между анодом и катодом, то эти электроны испускаются катодом при бомбардировке его положительными ионами, движущимися к катоду под действием электрического поля и вследствие фотоэффекта.

## § 87. Понятие о плазме

Под *плазмой* понимают сильно ионизированный газ, в котором концентрация электронов и отрицательных ионов равна концентрации положительных ионов. Плазма в целом является электрически нейтральным состоянием вещества.

Ионизация газа и образование плазмы могут быть вызваны нагреванием газа, а также различными излучениями или бомбардировкой атомов газа быстрыми заряженными частицами. В зависимости от условий степень ионизации плазмы может быть различной. Чем выше температура газа, тем больше ионов и электронов в плазме, тем меньше остается в ней нейтральных молекул.

В зависимости от степени ионизации газа различают частично или полностью ионизованную плазму. Плазма рассматривается как *четвертое состояние вещества*, т. к. имеет ряд отличительных свойств. Плазма обладает хорошей теплопроводностью. Поскольку электроны и ионы плазмы могут перемещаться под действием электрического поля, то по характеру электропроводимости плазма приближается к металлам. В отличие от металлов проводимость плазмы растет с увеличением температуры. При высокой температуре сопротивление плазмы становится исчезающе малым.

Световое излучение плазмы широко используется в лампах дневного света, газоразрядных лампах уличного освещения. Высокая температура плазмы позволяет использовать ее для резки, сварки и плавки металлов. Газоразрядную плазму используют в квантовых источниках света (лазерах).

## § 88. Электрический ток в вакууме. Электронная эмиссия

Под *вакуумом* подразумевают такую степень разрежения газа в сосуде, при которой молекулы газа успевают пролететь от одной стенки сосуда к другой, не сталкиваясь друг с другом. Чтобы в вакуумированном баллоне, имеющем два электрода — катод и анод, протекал электрический ток, необходим источник заряженных частиц. Действие такого источника основано на свойстве тел испускать электроны. Явление, заключающееся в испускании электронов металлами при сообщении им энергии, необходимой для преодоления работы выхода, называется *электронной эмиссией*. Испускание электронов нагретыми твердыми телами называется *термоэлектронной эмиссией*.

При повышении температуры металла увеличивается кинетическая энергия электронов и часть электронов получает возможность выйти за пределы металла. Получить в вакууме электроны можно и другими способами, например освещением катодов, изготовленных из щелочных металлов. Это так называемая *фотоэлектронная эмиссия*.

Наконец, с поверхности металла испускаются электроны, когда на нее попадают быстрые заряженные частицы (электроны, ионы и др.). Это *вторичная электронная эмиссия*.

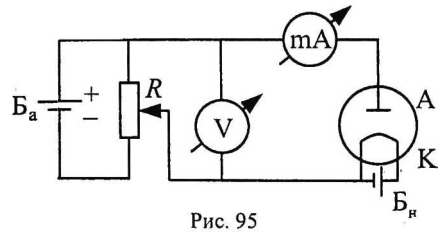


Рис. 95

Все виды эмиссии широко используются для получения электрического тока в вакууме.

В электронных лампах *диодах* (двухэлектродная электронная лампа), *триодах* (трехэлектродная лампа) и т. д. используется явление термоэлектронной эмиссии. Если диод включить в цепь (рис. 95), то при накаливании нити катода К от батареи накала $Б_н$ и подаче на анод А положительного (относительно катода) напряжения от батареи $Б_а$ в лампе возникает электрический ток. Изменяя сопротивление $R$ в цепи, можно получить зависимость анодного тока $I_а$ от анодного напряжения $U_а$ — *вольт-амперную характеристику* лампы (рис. 96).

Как видно из рис. 96, зависимость тока от напряжения не является линейной. В области малых положительных значений напряжений эта зависимость описывается *законом трех вторых* Ленгмюра[1]:

$$I = BU^{3/2}. \qquad (3.104)$$

Здесь $B$ – коэффициент, зависящий от формы, размеров электродов и их взаимного расположения.

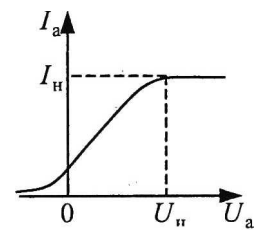


Рис. 96

При $U_а = U_н$ почти все электроны, вылетающие из катода, достигают анода, наступает *ток насыщения*. Плотность тока насыщения $j_н$ определяется формулой Ричардсона[2]–Дешмана:

$$j_н = cT^2 e^{-\frac{A}{kT}}, \qquad (3.105)$$

где $A$ — работа выхода электронов из катода; $T$ — термодинамическая температура; $c$ — постоянная, одинаковая для всех металлов; $k$ — постоянная Больцмана.

Явление термоэлектронной эмиссии широко используется в электронно-вакуумных приборах и устройствах — электронных лампах, электронно-лучевых и рентгеновских трубках, в электронных микроскопах и т. д.

[1] Ирвинг Ленгмюр (1881–1957) — американский физик.
[2] Оуэн Уилланс Ричардсон (1879–1959) — английский физик.

## ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

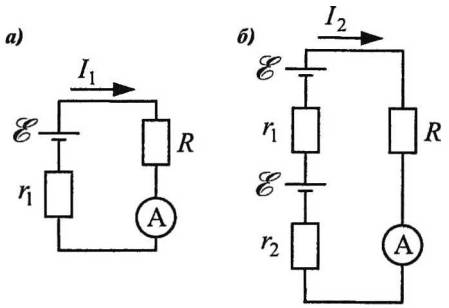



Рис. к задаче 43

**Задача 43.** К источнику с ЭДС $\mathscr{E} = 1{,}5$ В присоединили катушку с сопротивлением $R = 0{,}1$ Ом. Амперметр показал силу тока равную $I_1 = 0{,}5$ А. Когда к источнику присоединили последовательно еще один источник с такой же ЭДС, то сила тока $I_2$ в той же катушке оказалась равной 0,4 А. Определите внутренние сопротивления $r_1$ и $r_2$ первого и второго источников.

**Дано:**
$\mathscr{E} = 1{,}5$ В
$R = 0{,}1$ Ом
$I_1 = 0{,}5$ А
$I_2 = 0{,}4$ А

$r_1 = ?\ r_2 = ?$

**Решение.** Запишем для приведенных в задаче электрических цепей закон Ома для полной цепи:

$$I_1 = \frac{\mathscr{E}}{R + r_1}, \qquad (1)$$

$$I_2 = \frac{\mathscr{E} + \mathscr{E}}{R + r_1 + r_2} = \frac{2\mathscr{E}}{R + r_1 + r_2}. \qquad (2)$$

Получим два уравнения с неизвестными $r_1$ и $r_2$.

Из уравнения (1) находим

$$R + r_1 = \frac{\mathscr{E}}{I_1}. \qquad (3)$$

Подставив выражение (3) в (2), получим

$$I_2 = \frac{2\mathscr{E}}{r_2 + \dfrac{\mathscr{E}}{I_1}},\quad r_2 + \frac{\mathscr{E}}{I_1} = \frac{2\mathscr{E}}{I_2},\ \text{откуда}$$

$$r_2 = \frac{2\mathscr{E}}{I_2} - \frac{\mathscr{E}}{I_1} = \frac{\mathscr{E}}{I_1 I_2}(2I_1 - I_2);\quad r_2 = 4{,}5\ \text{Ом}.$$

Из уравнения (1): $r_1 = \dfrac{\mathscr{E}}{I_1} - R;\ r_1 = 2{,}9$ Ом. $[r] = \dfrac{\text{В}}{\text{А}} - \text{Ом} = \text{Ом}$.

**Ответ:** $r_1 = 2{,}9$ Ом; $r_2 = 4{,}5$ Ом.

**Задача 44.** Даны 12 элементов с ЭДС $\mathscr{E} = 1{,}5$ В и внутренним сопротивлением $r = 0{,}4$ Ом. Как нужно соединить эти элементы, чтобы получить от собранной из них батареи наибольшую силу во внешней цепи, имеющей сопротивление $R = 0{,}3$ Ом? Определить $I_{max}$.

**Дано:**

$\mathscr{E} = 1{,}5$ В

$R = 0{,}3$ Ом

$N = 12$

$r = 0{,}4$ Ом

$I_{max} = ?$

**Решение.** Предположим, что элементы собраны в батарею, состоящую из нескольких параллельно соединенных групп, содержащих по $n$ последовательно соединенных элементов.

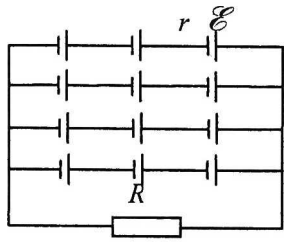


Рис. к задаче 44

Число параллельно соединенных групп $k = \dfrac{N}{n}$, ЭДС такой батареи равна $\mathscr{E}_0 = n\mathscr{E}$.

Внутреннее сопротивление этой батареи

$$\frac{1}{r_0} = \sum_k \frac{1}{nr} = \frac{k}{nr} \quad \Rightarrow \quad r_0 = \frac{n}{k} r = \frac{n^2}{N} r .$$

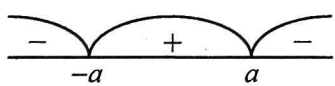
Согласно закону Ома для полной цепи

$$I = \frac{\mathscr{E}_0}{r_0 + R} = \frac{n\mathscr{E}}{R + \dfrac{n^2}{N} r} = \frac{N\mathscr{E}}{r} \cdot \frac{n}{n^2 + \dfrac{NR}{r}}.$$

Рассмотрим функцию $I(x) = A\dfrac{x}{x^2 + a^2}$, где $A = \dfrac{N\mathscr{E}}{r}$, $a = \sqrt{\dfrac{NR}{r}}$ и исследуем ее на экстремум:

$$\frac{dI(x)}{dx} = A\frac{x^2 + a^2 - 2x^2}{\left(x^2 + a^2\right)^2} = A\frac{a^2 - x^2}{\left(x^2 + a^2\right)^2} = A\frac{(a - x)(a + x)}{\left(x^2 + a^2\right)^2}.$$

Знак производной определяется знаком выражения $(a - x)(a + x)$, ко-




торый можно определить по методу интервалов: при переходе через точки $x = a = \sqrt{\dfrac{NR}{r}} = \sqrt{\dfrac{12 \cdot 0{,}3}{0{,}4}} = 3$ производная меняет знак с «+» на «–», поэтому эта точка максимума функции $I(x) = A\dfrac{x}{x^2 + a^2}$.

Следовательно, наибольшая сила тока достигается при условии, что эти элементы соединены в батарею, состоящую из параллельно соединенных групп, содержащих по $n = x_{max} = 3$ последовательно соединенных элементов. Общее число этих групп

$$k = \frac{N}{n} = \frac{12}{3} = 4.$$

Максимальная сила тока соответственно равна

$$I_{max} = A\frac{a}{a^2 + a^2} = \frac{A}{2a} = \frac{N\mathscr{E}}{2r}\cdot\sqrt{\frac{r}{NR}} = \frac{\mathscr{E}}{2}\cdot\sqrt{\frac{N}{rR}} = \frac{1{,}5}{3}\cdot\sqrt{\frac{12}{0{,}3\cdot 0{,}4}};\ I_{max} = 7{,}5\text{A}.$$

**Ответ:** вторая батарея состоит из 4 параллельно соединенных групп по 3 последовательно соединенных элемента в каждой группе; $I_{max} = 7{,}5$ А.

**Задача 45.** Сила тока в проводнике сопротивлением $R = 12$ Ом равномерно убывает от $I_0 = 5$ А до $I = 0$ А в течение $t = 10$ с. Какое количество теплоты $Q$ выделится в этом проводнике за указанный промежуток времени?

| **Дано:** |
|---|
| $R = 12$ Ом |
| $I_0 = 5$ А |
| $I = 0$ А |
| $t = 10$ с |
| $Q = ?$ |

**Решение.** Согласно закону Джоуля–Ленца в проводнике выделяется количество теплоты

$$dQ = I^2 R dt. \qquad (1)$$

Сила тока пропорциональна времени

$$I = Kt, \qquad (2)$$

где $K$ — коэффициент пропорциональности.

По условию задачи

$$K = \frac{I - I_0}{t}. \qquad (3)$$

Подставив выражение (2) в (1), получим

$$dQ = K^2 R t^2 dt.$$

Интегрируем полученное уравнение с учетом выражения (3):

$$Q = \int_0^t K^2 R t^2 dt = \frac{1}{3}K^2 R t^2 = \frac{1}{3}(I - I_0)^2 Rt;\ \ Q = 1000\ \text{Дж},$$

$$[Q] = \text{А}^2\cdot\text{Ом}\cdot\text{с} = \text{А}\cdot\text{А}\cdot\text{Ом}\cdot\text{с} = \text{А}\cdot\text{В}\cdot\text{с} = \text{Вт}\cdot\text{с} = \text{Дж}.$$

**Ответ:** $Q = 1000$ Дж.

**Задача 46.** ЭДС батареи аккумуляторов $\mathscr{E} = 12$ В, сила тока короткого замыкания равна $I_{кз} = 5$ А. Какую наибольшую мощность $P_{max}$ можно получить во внешней цепи, соединенной такой батареей?

**Дано:**
$\mathscr{E} = 12$ В
$I_{кз} = 5$ А
$P_{max} = ?$

**Решение.** Согласно закону Ома (3.94) сила тока в цепи

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R+r}.$$

Мощность, выделяющаяся во внешней цепи, найдем по закону Джоуля–Ленца (3.86):

$$P(R) = I^2 R = \mathscr{E}^2 \cdot \frac{R}{(R+r)^2}.$$

Исследуем эту функцию на экстремум:

$$\frac{dP(R)}{dR} = \mathscr{E}^2 \cdot \frac{(r+R)^2 - 2(r+R)R}{(r+R)^4} = \mathscr{E}^2 \cdot \frac{r+R-2R}{(r+R)^3} = 0$$

$$\Rightarrow \; r - R = 0.$$

Точка $R = r$ является точкой максимума функции $P(R)$, поскольку при переходе через эту точку производная $\frac{dP(R)}{dR}$ меняет знак с плюса на минус, поэтому

$$P_{max} = P(r) = \mathscr{E}^2 \cdot \frac{r}{4r^2} = \frac{\mathscr{E}^2}{4r}.$$

Учитывая, что наибольший ток в цепи соответствует короткому замыканию, при котором сопротивление внешней нагрузки равно нулю, согласно закону Ома получим

$$I_{max} = \frac{\mathscr{E}}{r}, \text{ тогда } P_{max} = \frac{\mathscr{E}}{4r} = \frac{I_{max}\mathscr{E}}{4}; \; P_{max} = 15 \text{ Вт}.$$

**Ответ:** $P_{max} = 15$ Вт.

**Задача 47.** Два источника с ЭДС и внутренними сопротивлениями $\mathscr{E}_1 = 8$ В, $r_1 = 2$ Ом, $\mathscr{E}_2 = 6$ В, $r_2 = 1{,}5$ Ом и реостат с сопротивлением $R = 10$ Ом соединены, как показано на рисунке. Вычислить силу тока $I$ текущего через реостат.

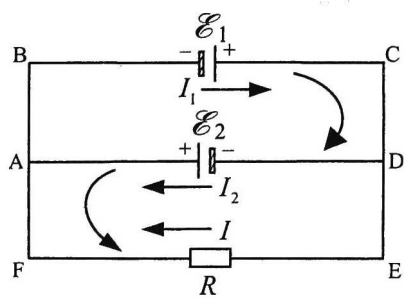


Рис. к задаче 47

**Дано:**
$\mathscr{E}_1 = 8$ В
$\mathscr{E}_2 = 6$ В
$r_1 = 2$ Ом
$r_2 = 1{,}5$ Ом
$R = 10$ Ом
$I = ?$

**Решение.** Произвольно выберем направление токов. Согласно первому правилу Кирхгофа для узла A запишем:

$$I_1 - I_2 - I = 0. \qquad (1)$$

Согласно второму правилу Кирхгофа для контура ABCDA:

$$I_1 r_1 + I_2 r_2 = \mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2, \qquad (2)$$

для контура AFEDA:

$$I_2 r_2 - IR = \mathscr{E}_2. \qquad (3)$$

Получим систему трех уравнений (1–3) с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} I_1 - I_2 - I = 0, \\ I_1 r_1 + I_2 r_2 = \mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2, \\ I_2 r_2 - IR = \mathscr{E}_2. \end{cases}$$

Приведем ее к виду, удобному для решения:

$$\begin{cases} I_1 - I_2 - I = 0, \\ 2 \cdot I_1 + 1{,}5 \cdot I_2 = 14, \\ 1{,}5 \cdot I_2 - 10 \cdot I = 6, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_1 - I_2 - I = 0, \\ 4 \cdot I_1 + 3 \cdot I_2 = 28, \\ 3 \cdot I_2 - 20 \cdot I = 12. \end{cases}$$

Решим систему по формулам Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -20 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 4 \\ 0 & 3 & -20 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-140 - 12) = -152.$$

$$\Delta I = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 14 \\ 0 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 14 \\ 0 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot (42 - 42) = 0.$$

$$I = \frac{\Delta I}{\Delta} = \frac{0}{-152} = 0.$$

**Ответ:** $I = 0$.

# Глава 15

# МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ

## § 89. Магнитное поле тока. Индукция магнитного поля

В 1820 г. Эрстед[1] обнаружил, что магнитная стрелка, расположенная рядом с проводником, отклоняется, когда по проводнику течет электрический ток (рис. 97). Магнитная стрелка, как известно, отклоняется в магнитном поле. Следовательно, вокруг проводника с током образуется магнитное поле. Тем самым была установлена связь между электричеством и магнетизмом.

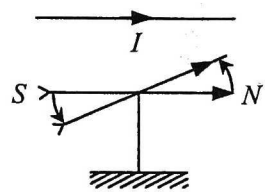


Рис. 97

*Магнитное поле* — это форма материи, которая создается движущимися электрическими зарядами.

Силовой характеристикой магнитного поля является *магнитная индукция* $\vec{B}$.

Индукция магнитного поля $\vec{B}$ определяется по действию поля на контур с током (рис. 98). За направление вектора индукции магнитного поля принимается направление нормали $\vec{n}$, ориентированной в поле контура с током. Контур должен быть достаточно малых размеров, чтобы в пределах его поле можно было считать однородным.

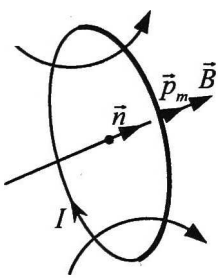


Рис. 98

*Положительной нормалью* $\vec{n}$ контура называется перпендикуляр, проведенный к его плоскости так, чтобы вращательное движение рукоятки буравчика совпадало с током в контуре, тогда поступательное движение буравчика укажет направление положительной нормали.

*Линией магнитной индукции* (силовой линией магнитного поля) называется линия, касательная к которой в каждой точке совпадает с направлением вектора индукции $\vec{B}$.

Если контур отклонить от положения равновесия, то на него будет действовать вращающий момент $M$, т. е. магнитное поле будет поворачивать контур. Вращающий момент максимален, когда нормаль к плоскости контура перпендикулярна вектору индукции. Через наибольшее значение вращающего момента определяется модуль индукции магнитного поля:

$$|\vec{B}| = \frac{M_{\max}}{IS} = \frac{M_{\max}}{|\vec{p}_m|}. \qquad (3.106)$$

[1] Ханс Кристиан Эрстед (1777–1851) — датский физик.

Произведение силы тока $I$ и площади контура $S$ называется *дипольным магнитным моментом контура* $\vec{p}_m$. Единицей дипольного магнитного момента является ампер-квадратный метр (А·м$^2$).

Итак, *магнитная индукция* — это векторная физическая величина, численно равная отношению максимального механического момента, действующего на контур с током в магнитном поле, к дипольному магнитному моменту контура. Единицей магнитной индукции является тесла. 1 Тесла — это магнитная индукция однородного магнитного поля, в котором на плоский контур с током с дипольным магнитным моментом 1 А·м$^2$ действует максимальный вращающий момент, равный 1 Н·м.

## § 90. Закон Био–Савара–Лапласа

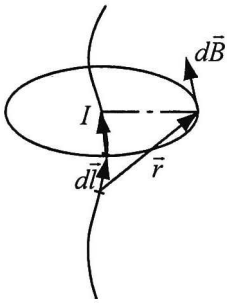


Рис. 99

Закон Био[1]–Савара[2]–Лапласа позволяет определить индукцию магнитного поля, созданного проводником с током. Пусть по проводнику произвольной формы течет ток $I$ (рис. 99).

Выделим бесконечно малый элемент проводника с током $d\vec{l}$, отстоящий на расстоянии радиуса-вектора $\vec{r}$ от точки $A$.

Согласно закону Био–Савара–Лапласа индукция магнитного поля $d\vec{B}$, обусловленная элементом тока длиной $d\vec{l}$ в данной точке $A$, равна

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I\left[d\vec{l},\vec{r}\right]}{4\pi r^3}, \qquad (3.107)$$

где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м — магнитная постоянная.

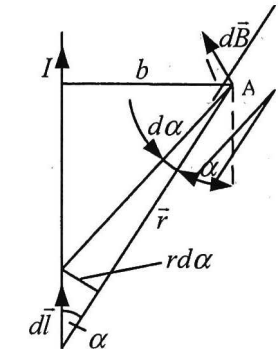


Рис. 100

Полную индукцию $\vec{B}$ в точке $A$ можно найти по принципу суперпозиций — векторным суммированием по всем элементам тока:

$$\vec{B} = \int d\vec{B}. \qquad (3.108)$$

Применим формулу (3.107) для вычисления поля, созданного бесконечно длинным прямолинейным проводником с током $I$ (рис. 100). Пусть точка А находится на расстоянии $b$ от проводни-

[1] Жан Батис Био (1774–1862) — французский физик.
[2] Фсликс Савар (1791–1841) — французский физик.

ка. Выделим элемент длины проводника $d\vec{l}$, находящийся на расстоянии $\vec{r}$ от точки $A$. Из рис. 100 видно, что

$$r = \frac{b}{\sin\alpha};\ dl = \frac{r\,d\alpha}{\sin\alpha} = \frac{b\,d\alpha}{\sin^2\alpha}.$$

Модуль вектора магнитной индукции согласно формуле (3.107) равен

$$dB = \frac{\mu_0 I dl \sin\alpha}{4\pi r^2}. \qquad (3.109)$$

Подставив выражения для $r$ и $dl$ в (3.109), получим

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{b}\sin\alpha d\alpha.$$

Поскольку вектора $d\vec{B}$ от всех элементов тока в точке $A$ направлены в одну сторону, то сложение векторов заменяется суммированием их модулей:

$$B = \int dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{b}\int_0^{\pi}\sin\alpha d\alpha = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2I}{b}. \qquad (3.110)$$

Интегрирование производится от 0 до $\pi$, так как угол $\alpha$ для всех элементов $d\vec{l}$, на которые разбивается бесконечно длинный проводник, изменяется от 0 до $\pi$.

Линии магнитной индукции поля прямолинейного проводника с током представляет собой концентрические окружности (рис. 101), по касательным к которым направлен вектор $\vec{B}$. Направление магнитных силовых линий определяется по *правилу буравчика (правого винта).*

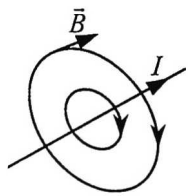


Рис. 101

В случае прямолинейного проводника конечной длины пределы интегрирования в выражении (3.110) будут от $\alpha_1$ до $\alpha_2$ (рис. 102) и магнитная индукция

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi b}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2). \qquad (3.111)$$

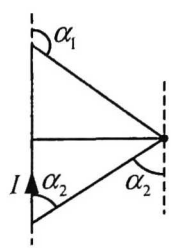


Рис. 102

Вычислим индукцию магнитного поля, созданного круглым витком радиуса $R$, по которому течет ток $I$ (см. рис. 103). Выделим элемент длины $d\vec{l}$ в верхней части витка, расположенный на расстоянии $r$ от точки $A$, в которой определяется магнитная индукция. Точка $A$ находится на оси витка на расстоянии $x$ от его центра.

Элемент витка $d\vec{l}$ с током $I$ создает в точке $A$ поле, модуль магнитной индукции которого согласно закона Био–Савара–Лапласа равен

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{dl}{r^2}. \qquad (3.112)$$

Разложим вектор $d\vec{B}$ на параллельную $d\vec{B}_{\parallel}$ и вертикальную $d\vec{B}_{\perp}$ составляющие. При суммировании по всем элементам $d\vec{l}$ перпендикулярные компоненты взаимно сократятся, т. е.

$$\sum d\vec{B}_{\perp} = 0 .$$

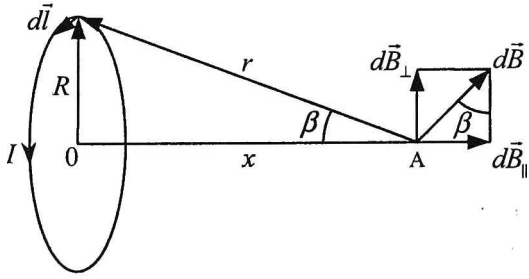



Рис. 103

Поэтому вектор индукции магнитного поля $\vec{B}$ будет направлен вдоль оси витка, а его значение равно

$$B = \int dB\cos\beta = \int dB\frac{R}{r} = \int dB\frac{R}{\sqrt{R^2+x^2}},$$

так как $r = \sqrt{R^2+x^2}$ .

Подставим данное выражение в уравнение (3.112) и проинтегрируем его по длине витка:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{R}{\left(R^2+x^2\right)^{3/2}} \int_0^{2\pi R} dl = \frac{\mu_0 I}{2}\frac{R^2}{\left(R^2+x^2\right)^{3/2}}. \qquad (3.113)$$

Запишем полученное уравнение в векторной форме:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi}\cdot\frac{\vec{p}_m}{\left(R^2+x^2\right)^{3/2}}, \qquad (3.114)$$

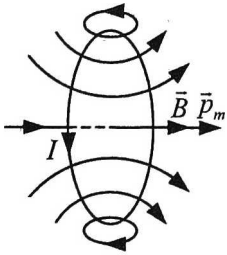



Рис. 104

где $\vec{p}_m$ — дипольный магнитный момент витка с током.

При $x = 0$ из формул (3.113) и (3.114) определяется магнитная индукция в центре витка:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}, \quad \vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi}\cdot\frac{\vec{p}_m}{R^3}. \qquad (3.115)$$

Изображение силовых линий индукции магнитного поля витка с током показано на рис. 104.

## § 91. Закон Ампера. Взаимодействие проводников с током

На проводник с током, помещенный в магнитное поле, действует сила, определяемая законом Ампера[1]:

$$d\vec{F} = I\left[d\vec{l}, \vec{B}\right], \tag{3.116}$$

где $I$ — сила тока в проводнике, $\vec{B}$ — магнитная индукция в месте расположения элемента проводника $d\vec{l}$. Модуль силы Ампера равен

$$dF = BIdl\sin\alpha, \tag{3.117}$$

где $\alpha$ — угол между векторами $d\vec{l}$ и $\vec{B}$.

Направление силы Ампера определяется по *правилу левой руки* (правило правого винта):

Левую руку следует располагать так, чтобы силовые линии магнитного поля входили в ладонь, четыре вытянутых пальца показывали направление тока в проводнике, тогда отогнутый на 90° большой палец покажет направление силы Ампера.

Магнитное поле называется *однородным,* если вектор индукции поля $\vec{B}$ не зависит от координат ($\vec{B} = \text{const}$). Для однородного магнитного поля закон Ампера имеет вид

$$F = BIl\sin\alpha,$$

где $l$ — длина проводника, находящаяся в поле, $\alpha$ — угол между вектором $\vec{B}$ и направлением тока.

Используя закон Ампера, найдем силу взаимодействия двух параллельных, бесконечно длинных, прямолинейных проводников с током $I_1$ и $I_2$, расположенных в вакууме на расстоянии $b$ друг от друга (рис. 105).

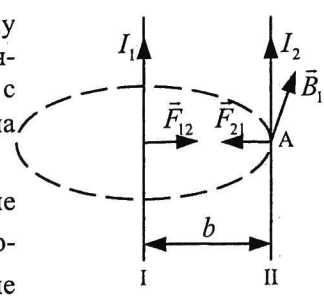


Рис. 105

Пусть проводник I создает магнитное поле с индукцией $\vec{B}_1$ в точке А, через которую проходит проводник II с током $I_2$. Направление индукции $\vec{B}_1$ определяется по правилу буравчика. На проводник II действует сила Ампера $\vec{F}_{21}$, направление которой определяется по правилу левой руки.

Из рис. 105 видно, что проводник II притягивается проводником I. Аналогично рассуждая, можно показать, что проводник I притягивается проводником II. Таким образом, если направления токов $I_1$ и $I_2$ совпадают,

[1] Андре Мари Ампер (1775–1836) — французский физик.

то проводники притягиваются друг к другу, если направления токов противоположны, то проводники отталкиваются друг от друга.

Подставив выражение (3.115) в (3.117) и учитывая, что угол $\alpha = 90°$, найдем силу, действующую на элемент тока $I_2$:

$$dF = I_2 B_1 dl = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi b} dl .$$

На единицу длины тока $I_2$ действует сила

$$\frac{dF}{dl} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi b} . \qquad (3.118)$$

Такая же сила действует на единицу длины тока $I_1$.

На основании соотношения (3.118) устанавливается единица силы тока в системе СИ — ампер (А). 1 А — это сила неизменяющегося тока, который, проходя по двум прямолинейным параллельным проводникам бесконечной длины и ничтожно малого кругового сечения, расположенным на расстоянии 1 м один от другого в вакууме, вызвал бы между проводниками силу, равную $2 \cdot 10^{-7}$ Н на каждый метр длины проводника.

## § 92. Рамка с током в магнитном поле

Рассмотрим прямоугольную рамку со сторонами $a$ и $b$, по которой течет ток $I$. Рамка находится в однородном магнитном поле, вектор магнитной индукции которой $\vec{B}$ составляет угол $\alpha$ с нормалью $\vec{n}$ к плоскости рамки. Рамка может вращаться относительно вертикальной оси $OO$ (рис. 106). Силы Ампера, действующие на горизонтальные стороны рамки, равны по величине, противоположны по направлению и уравновешиваются:

$$\left|\vec{F}_2\right| = \left|\vec{F}_4\right| = IBb .$$

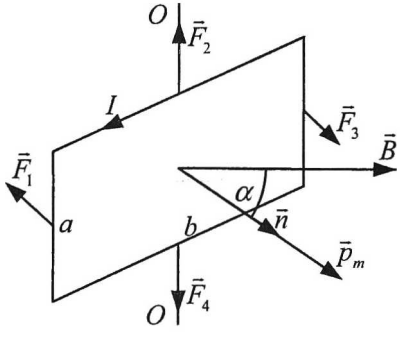


Рис. 106

Силы, действующие на вертикальные стороны рамки, также по модулю равны друг другу

$$\left|\vec{F}_1\right| = \left|\vec{F}_3\right| = IBa ,$$

противоположно направлены и образуют пару сил. Как известно из механики, пара сил создает вращающий момент

$$M = IaBb\sin\alpha = ISB\sin\alpha = p_m B\sin\alpha , \qquad (3.119)$$

где $S = ab$ — площадь рамки, $p_m = IS$ — магнитный момент рамки. Формулу (3.119) можно записать в векторной форме:

$$\vec{M} = \left[\vec{p}_m, \vec{B}\right]. \qquad (3.120)$$

Под действием момента $\vec{M}$ рамка может поворачиваться относительно оси $OO$.

Если магнитное поле неоднородно, то силы, действующие на рамку, не равны друг другу и кроме вращающего момента возникает результирующая сила, способная сообщить ей поступательное движение. Рамка будет втягиваться в область магнитного поля с большим значением магнитной индукции.

## § 93. Циркуляция вектора магнитной индукции. Теорема о циркуляции

Аналогично выражению (3.16) интеграл по замкнутому контуру от скалярного произведения вектора магнитной индукции $\vec{B}$ на элемент контура $d\vec{l}$, т. е. $\oint_l \vec{B}d\vec{l}$, называется *циркуляцией вектора магнитной индукции.*

Вычислим циркуляцию вектора $\vec{B}$ для поля прямолинейного проводника с током. Пусть ток $I$ течет по проводнику, расположенному перпендикулярно плоскости рис. 107, а замкнутый контур в виде окружности радиусом $R$ лежит в плоскости чертежа. Вектор $\vec{B}$ направлен по касательной к окружности. Выделим на окружности элемент контура $d\vec{l}$. Скалярное произведение

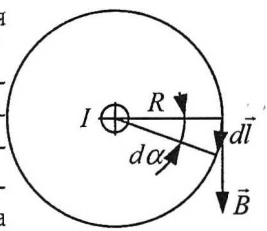


Рис. 107

$$\vec{B}d\vec{l} = Bdl_B,$$

где $dl_B$ — проекция $d\vec{l}$ на направление вектора $\vec{B}$. Ввиду малости угла $d\alpha$

$$dl_B = Rd\alpha,$$

тогда

$$\oint_l \vec{B}d\vec{l} = \oint_l RBd\alpha.$$

Согласно формуле (3.110)

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \quad \text{и} \quad \oint_l \vec{B}d\vec{l} = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 IR}{2\pi R} d\alpha = \mu_0 I. \qquad (3.121)$$

Если контур не охватывает проводник, то

$$\oint_l \vec{B}d\vec{l} = 0,$$

если контур охватывает $n$ проводников с токами $I_1$, $I_2$, ..., $I_n$, то

$$\oint_l \vec{B}d\vec{l} = \mu_0 \sum_{i=1}^{n} I_i. \qquad (3.122)$$

Уравнение (3.122) справедливо и для проводников произвольной формы, охватываемых любым контуром.

Знак циркуляции в уравнении (3.122) определяется направлением обхода контура. Если направление обхода и направление тока связаны правилом правого винта, то ток $I_i$ в $\sum I_i$ берется с плюсом, в противном случае — с минусом.

Формула (3.122) является алгебраическим выражением теоремы о циркуляции $\vec{B}$:

*Циркуляция вектора магнитной индукции по произвольному замкнутому контуру, охватывающему систему проводников с токами, равна алгебраической сумме токов в этих проводниках, умноженной на* $\mu_0$.

Напомним, что циркуляция вектора напряженности электростатического поля

$$\oint_l \vec{E}d\vec{l} = 0.$$

Электростатическое поле является *потенциальным*. Циркуляция вектора магнитной индукции

$$\oint_l \vec{B}d\vec{l} \neq 0$$

не равна нулю. Магнитное поле является *вихревым*.

## § 94. Магнитное поле соленоида и тороида

*Соленоидом* называется катушка, на которую намотано большое число витков провода. Магнитное поле внутри соленоида образуется суммированием полей, создаваемых каждым витком, и поэтому может быть весьма большим. Если длина соленоида $l$ намного больше его диаметра $d$ (т. е. $l >> d$), то соленоид называют длинным (в пределе — бесконечно длинным). Применим теорему о циркуляции вектора $\vec{B}$ для расчета магнитной индукции поля бесконечно длинного соленоида (рис. 108). Из опытов известно, что магнитное поле соленоида симметрично и линии вектора $\vec{B}$ внутри соленоида параллельны его оси.

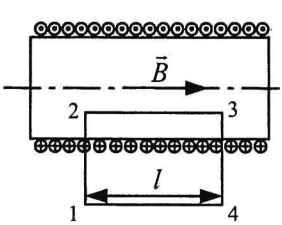


Рис. 108

В качестве замкнутого контура возьмем прямоугольник 1–2–3–4, проведенный вдали от концов соленоида. По формуле (3.122) запишем:

$$\oint_l \vec{B}d\vec{l} = \int_1^2 \vec{B}d\vec{l} + \int_2^3 \vec{B}d\vec{l} + \int_3^4 \vec{B}d\vec{l} + \int_4^1 \vec{B}d\vec{l} = \mu_0 NI,$$

где $I$ — ток в витке, $N$ — число витков, охватываемых контуром.

Интегралы $\int_1^2 \vec{B}d\vec{l}$ и $\int_3^4 \vec{B}d\vec{l}$ пренебрежимо малы, так как направление вектора $\vec{B}$ перпендикулярно сторонам 1–2 и 3–4. Интегралом $\int_4^1 \vec{B}d\vec{l}$ также можно пренебречь, поскольку индукция магнитного поля вне соленоида очень мала. Таким образом,

$$\oint \vec{B}d\vec{l} = \int_2^3 \vec{B}d\vec{l} = Bl = \mu_0 NI.$$

Если обозначить

$$n = \frac{N}{l}$$

число витков, приходящееся на единицу длины, то индукция магнитного поля внутри соленоида

$$B = \mu_0 nI. \qquad (3.123)$$

Итак, магнитное поле внутри бесконечно длинного соленоида однородно, вне соленоида поле отсутствует.

*Тороид* представляет собой соленоид, свернутый в кольцо (рис. 109). Пусть $R$ — средний радиус тороида, а $r$ — радиус произвольного замкнутого контура, охватывающего витки тороида. В силу симметрии магнитного поля вектор $\vec{B}$ направлен по касательной к окружности радиуса $r$. По формуле (3.122) запишем:

$$\oint_l \vec{B}d\vec{l} = B\int_0^{2\pi} dl = \mu_0 \sum I.$$

Сумма токов $\sum I = 2\pi RnI$, тогда

$$\oint_l \vec{B}d\vec{l} = 2\pi rB = 2\pi RnI\mu_0$$

откуда находится индукция магнитного поля внутри тороида:

$$B = \mu_0 nI\frac{R}{r}. \qquad (3.124)$$

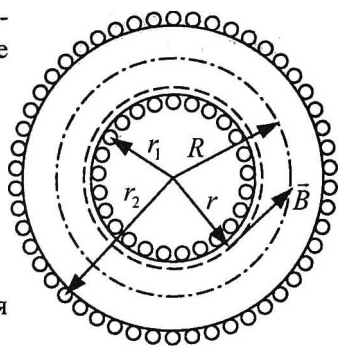


Рис. 109

При расчетах $r$ изменяется от $r_1$ до $r_2$.

Согласно формуле (3.124) магнитное поле внутри тороида не является однородным. Вне тороида магнитное поле отсутствует.

## § 95. Сила Лоренца. Движение заряженных частиц в магнитном поле

На частицу с электрическим зарядом $q$, движущуюся в магнитном поле со скоростью $\vec{v}$, направленной произвольным образом по отношению к вектору магнитной индукции $\vec{B}$, действует сила Лоренца $F$. Силу Лоренца можно найти из закона Ампера (3.117).

Для этого силу Ампера следует представить как сумму сил, действующих на каждый заряд в проводнике (рис. 110):

$$F_A = NF,$$

где $N$ — общее число зарядов в проводнике.

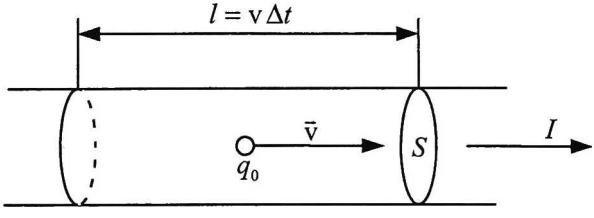



Рис. 110

Тогда

$$F = \frac{F_A}{N} = \frac{IBl\sin\alpha}{N}. \qquad (3.125)$$

Сила тока

$$I = \frac{q}{\Delta t}, \qquad (3.126)$$

где $q$ — заряд, проходящий через поперечное сечение проводника за время $\Delta t$:

$$q = q_0 n \mathrm{v} S \Delta t. \qquad 3.127)$$

Здесь $q_0$ — заряд свободной частицы, v — скорость ее упорядоченного движения, $n$ — концентрация частиц.

Число заряженных частиц

$$N = nSl. \qquad (3.128)$$

Подставив выражения (3.126) – (3.128) в (3.125), получим

$$F = q_0 B \mathrm{v}\sin\alpha, \text{ или } \vec{F} = q_0\left[\vec{v}, \vec{B}\right]. \qquad (3.129)$$

Сила Лоренца прямо пропорциональна величине заряда и векторному произведению скорости движения заряда на индукцию магнитного поля.

Направление силы Лоренца определяется по правилу левой руки, если заряд частицы положительный, и правой, если отрицательный.

Когда угол $\alpha$ между векторами $\vec{v}$ и $\vec{B}$ равен нулю или $\pi$, то сила Лоренца $F = 0$, т. е. магнитное поле на заряженные частицы не действует.

Если угол $\alpha = \frac{\pi}{2}$, то $F = q v B$ и сообщает частице центростремительное ускорение. В этом случае в однородном магнитном поле заряженная частица будет двигаться по окружности, радиус которой $R$ можно найти из соотношений

$$\frac{m v^2}{R} = q v B, \quad R = \frac{m v}{qB}, \tag{3.130}$$

где $m$ — масса, а $q$ — заряд частицы.

Период обращения частицы

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m v}{v qB} = \frac{2\pi m}{qB}. \tag{3.131}$$

Как видно из формулы (3.131), период обращения нерелятивистской частицы не зависит от скорости ее движения.

Если угол $\frac{\pi}{2} > \alpha > 0$, то заряженная частица в однородном магнитном поле будет двигаться по спирали (рис. 111) с радиусом

$$R = \frac{m v \sin\alpha}{qB}$$

и шагом

$$h = \frac{2\pi m v \cos\alpha}{qB}. \tag{3.132}$$

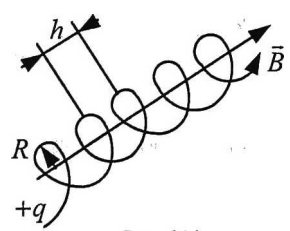


Рис. 111

## § 96. Эффект Холла[1]

По пластине из металла (или полупроводника) пропускается электрический ток, вектор плотности которого $\vec{j}$ (см. рис. 112).

Разность потенциалов между точками 1 и 2, расположенными на верхней и нижней гранях пластины, равна нулю. Пластина помещается в однородное магнитное поле, индукция которого $\vec{B}$. Между точками 1 и 2 появляется разность потенциалов $\Delta\varphi$.

[1] Эдвин Герберт Холл (1855–1938) — американский физик.

Явление возникновения разности потенциалов в поперечном сечении проводника (или полупроводника), по которому течет электрический ток, при помещении его в магнитное поле, перпендикулярное вектору плотности тока, называется *эффектом Холла*.

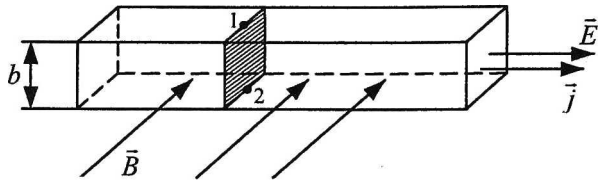



Рис. 112

Эффект Холла возникает в результате того, что на движущийся заряд $q$ действует сила Лоренца $F = q\,\mathrm{v}\,B$, отклоняя его (в зависимости от знака) к верхней или нижней грани пластины. Поэтому внутри пластины возникает электрическое поле напряженностью $\vec{E}$.

При стационарном процессе

$$q\,\mathrm{v}\,B = qE\,.$$

Среднюю скорость движения заряда v можно выразить по формуле (3.72):

$$\mathrm{v} = \frac{j}{qn}\,.$$

Тогда

$$\Delta\varphi = Eb = \frac{jBb}{nq}\,.$$

Введя обозначение

$$\frac{1}{nq} = R\,,$$

получим

$$\Delta\varphi = jRBb\,, \qquad (3.133)$$

где $R$ — постоянная Холла, зависящая от рода материала, из которого изготовлена пластина.

Из полученного выражения следует, что разность потенциалов $\Delta\varphi$ пропорциональна плотности тока и магнитной индукции. Зная $\Delta\varphi$, можно определить индукцию магнитного поля $B$.

По знаку (плюс или минус) постоянной Холла $R$ определяется вид проводимости в полупроводниках (электронная или дырочная).

## § 97. Магнитный поток. Теорема Гаусса для магнитного поля

*Магнитным потоком* через элементарную площадку $dS$ называется физическая величина $d\Phi$, равная скалярному произведению индукции магнитного поля на площадь площадки (рис. 113):

$$d\Phi = \vec{B}d\vec{S} \text{ или } d\Phi = BdS\cos\alpha. \qquad (3.134)$$

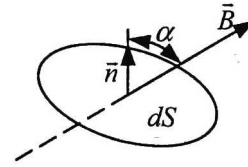


Рис. 113

Магнитный поток Ф — это скалярная величина, знак потока зависит от выбора направления нормали $\vec{n}$ к площадке $dS$.

В системе СИ магнитный поток измеряется в веберах (Вб). 1 Вб — это магнитный поток в однородном поле с индукцией 1 Тл через площадку 1 м$^2$, перпендикулярную вектору индукции поля.

Найдем магнитный поток через произвольную замкнутую поверхность $S$ (рис. 114). Поскольку линии вектора $\vec{B}$ замкнутые, то сколько магнитных силовых линий входит в поверхность $S$, столько их и выходит из нее, т. е. потоки $\Phi_1$ — на входе в поверхность и $\Phi_2$ — на выходе из нее — равны. Так как угол между внешней нормалью $\vec{n}$ и силовой линией магнитного поля на входе в поверхность тупой ($\cos\alpha_1$ имеет знак минус), а на выходе — острый ($\cos\alpha_2$ имеет знак плюс), то суммарный магнитный поток через замкнутую поверхность равен нулю:

$$\oint_S \vec{B}d\vec{S} = 0. \qquad (3.135)$$

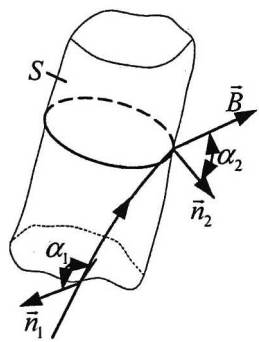


Рис. 114

Уравнение (3.135) является алгебраическим выражением теоремы Гаусса: *поток вектора магнитной индукции через произвольно взятую замкнутую поверхность равен нулю.*

Из формул (3.7) и (3.135) видно, что электрические и магнитные поля существенно различаются. Источниками электростатических полей являются электрические заряды, магнитные поля не имеют источников.

## § 98. Работа, совершаемая при перемещении проводника и контура с током в магнитном поле

Проводник $ab$ длиной $l$ может скользить по шинам 1 и 2, включенным параллельно в электрическую цепь (см. рис. 115). Движение проводника происходит под действием силы Ампера:

$$F_A = IBl,$$

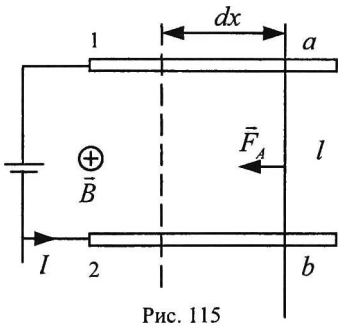


Рис. 115

где $B$ — модуль вектора индукции однородного магнитного поля, действующего на проводник; $I$ — ток в проводнике.

Пусть под действием этой силы проводник перемещается на расстояние $dx$. При этом совершается работа

$$dA = F_A dx = IBldx = IBdS = Id\Phi\,, \tag{3.136}$$

где $dS = ldx$ — площадь поверхности, описываемая проводником; $d\Phi = BdS$ — магнитный поток сквозь поверхность $dS$.

Определим работу, совершаемую при движении прямоугольного контура 1–2–3–4 с током $I$ в неоднородном магнитном поле (рис. 116). По правилу левой руки найдем направление сил Ампера, действующих на проводники, из которых состоит контур ($\vec{F}_{12}$, $\vec{F}_{23}$, $\vec{F}_{34}$ и $\vec{F}_{41}$).

Пусть сила $\left|\vec{F}_{34}\right| > \left|\vec{F}_{12}\right|$ и контур движется слева направо. Работа при этом

$$A = A_{12} + A_{23} + A_{34} + A_{41}\,.$$

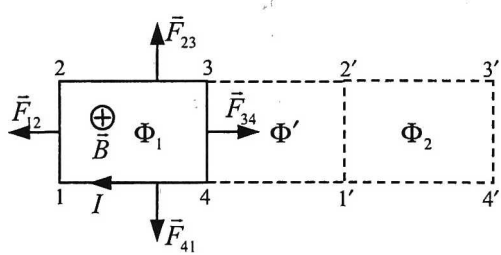


Рис. 116

Работа по перемещению проводников 2–3 и 1–4 равна нулю, так как действующие на них силы $\vec{F}_{23}$ и $\vec{F}_{41}$ перпендикулярны перемещению. Тогда работа, совершаемая при перемещении контура

$$A = A_{12} + A_{34}\,.$$

Воспользовавшись формулой (3.136), определим работу по перемещению проводников 1–2 и 3–4:

$$A_{12} = -I\left(\Phi_1 + \Phi'\right), \quad A_{34} = I\left(\Phi_2 + \Phi'\right),$$

где $\Phi_1$, $\Phi'$, $\Phi_2$ — магнитные потоки, пронизывающие контур в начальном, промежуточном и конечном положениях.

Знак минус показывает, что сила, действующая на проводник 1–2, направлена против движения. Тогда работа по перемещению контура

$$A = -I\Phi_1 - I\Phi' + I\Phi_2 + I\Phi' = I\left(\Phi_2 - \Phi_1\right) = I\Delta\Phi\,.$$

Основываясь на полученном выражении, для элементарной работы можно записать

$$dA = Id\Phi\,. \tag{3.137}$$

Работа по перемещению контура с током в магнитном поле равна про-

изведению силы тока $I$ в контуре на изменение магнитного потока $d\Phi$, сцепленного с контуром.

Выражение (3.137) справедливо для контура произвольной формы. Им можно пользоваться и в случае, если контур неподвижен, а изменяется вектор магнитной индукции $\vec{B}$.

В заключение отметим, что работа по перемещению проводника и контура с током осуществляется за счет энергии источника, поддерживающего ток в контуре.

## ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

**Задача 48.** По двум длинным проводам текут токи $I_1 = 50$ А и $I_2 = 100$ А в противоположных направлениях. Расстояние между проводами равно $d = 20$ см. Определить магнитную индукцию $B$ в точке, удаленной на $r_1 = 25$ см от первого и на $r_2 = 40$ см от второго провода.

**Дано:**
$I_1 = 50$ А
$I_2 = 100$ А
$d = 0{,}2$ м
$r_1 = 0{,}25$ м
$r_2 = 0{,}4$ м
$B = ?$

**Решение.** Силовые линии магнитного поля прямолинейного провода с током представляют собой окружности, центры которых лежат на оси провода. Вектора $\vec{B}_1$ и $\vec{B}_2$ касательны к окружностям, проведенным из центров проводов с радиусами $r_1$ и $r_2$. Направления $\vec{B}_1$ и $\vec{B}_2$ определены по правилу буравчика. Согласно принципу суперпозиции индукция магнитного поля в точке А равна

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2,$$

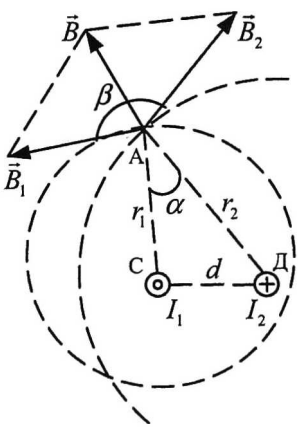


Рис. к задаче 48

где $\vec{B}_1$ — магнитная индукция в точке А, создаваемая током $I_1$; $\vec{B}_2$ — магнитная индукция, создаваемая в точке А током $I_2$. Модули этих индукций соответственно равны

$$\left.\begin{aligned} |\vec{B}_1| &= \frac{\mu\mu_0 \cdot I_1}{2 \cdot \pi \cdot r_1}, \\ |\vec{B}_2| &= \frac{\mu\mu_0 \cdot I_2}{2 \cdot \pi \cdot r_2}. \end{aligned}\right\}$$

Модуль вектора $\vec{B}$ определим по теореме косинусов:

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2 + 2 \cdot B_1 B_2 \cos\beta},$$

где $\beta$ — угол между векторами $\vec{B}_1$ и $\vec{B}_2$. Из рисунка видно, что угол $\beta = 180° - \alpha$. Поэтому $\cos\beta = \cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$.

Косинус угла $\alpha$ определим по теореме косинусов, решая треугольник АСД:

$$\cos\alpha = \frac{r_1^2 + r_2^2 - d^2}{2 \cdot r_1 \cdot r_2} = 0{,}9125,$$

следовательно

$$B=\frac{\mu\mu_0}{2\pi}\sqrt{\left(\frac{I_1}{r_1}\right)^2+\left(\frac{I_2}{r_2}\right)^2-2\left(\frac{I_1}{r_1}\right)\left(\frac{I_2}{r_2}\right)\cos\alpha}=$$

$$=\frac{\mu\mu_0}{2\pi}\sqrt{\left(\frac{I_1}{r_1}\right)^2+\left(\frac{2I_1}{r_2}\right)^2-2\left(\frac{I_1}{r_1}\right)\left(\frac{2\cdot I_1}{r_2}\right)\cos\alpha}=$$

$$=\frac{\mu\mu_0 I_1}{2\pi}\sqrt{\left(\frac{1}{r_1}\right)^2+\left(\frac{2}{r_2}\right)^2-4\left(\frac{1}{r_1}\right)\left(\frac{2}{r_2}\right)\cos\alpha};\ B=21{,}2\ \text{мкТл}.$$

**Ответ:** $B=21{,}2$ мкТл.

**Задача 49.** Катушка длиной $l=20$ см содержит $N=100$ витков. По обмотке катушки идет ток $I=5$ А. Диаметр катушки равен $d=20$ см. Определите магнитную индукцию $B$ в точке, лежащей на оси катушки на расстоянии $a=10$ см от ее конца.

**Дано:**
$l=0{,}2$ м
$N=100$
$I=5$ А
$d=0{,}2$ м
$a=0{,}1$ м
$B=?$

**Решение.** Согласно формуле (3.113) индукция магнитного поля на оси кругового тока

$$B=\frac{\mu_0 R^2 I}{2(R^2+x^2)^{3/2}},$$

где $R$ — радиус кругового тока; $x$ — расстояние от точки, в которой ищется индукция, до плоскости контура с током.

Применительно к данной задаче можно записать:

$$dB=\frac{\mu_0 R^2}{2}\cdot\frac{dI}{(R^2+x^2)^{3/2}},$$

где $dI=\frac{IN}{l}dx$ — элементарный круговой ток, текущий в элементе длины $dx$ витка катушки.

Для нахождения индукции поля всей катушки с током необходимо проинтегрировать $dB$ по $x$ от $x=a$ до $x=a+l$:

$$B=\int_a^{(a+l)}\frac{\mu_0 R^2}{2}\frac{IN}{l}\frac{dx}{(R^2+x^2)^{3/2}}=\frac{\mu_0 INR^2}{2l}\int_a^{(a+l)}\frac{dx}{(R^2+x^2)^{3/2}}. \qquad (1)$$

Заменим переменную: $x=R\operatorname{tg} z$, $dx=\frac{R}{\cos^2 z}dz$, тогда

$$(x^2+R^2)^{3/2}=(1+\operatorname{tg}^2 z)^{3/2}\cdot R^3=\frac{R^3}{\cos^3 z}. \qquad (2)$$

Решая интеграл (1) с учетом подстановки (2), получим

$$B=\frac{\mu_0 INR^2}{2l}\int\limits_{\operatorname{arctg}\frac{a}{R}}^{\operatorname{arctg}\frac{a+l}{R}}\frac{\frac{R}{\cos^2 z}dz}{\frac{R^3}{\cos^3 z}}=\frac{\mu_0 INR^2}{2l}\frac{1}{R^2}\int\limits_{\operatorname{arctg}\frac{a}{R}}^{\operatorname{arctg}\frac{a+l}{R}}\cos z dz=$$

$$=\frac{\mu_0 IN}{2l}\left(\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{a+l}{R}\right)-\sin\frac{a}{R}\right).$$

Так как $\sin\alpha=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$, то

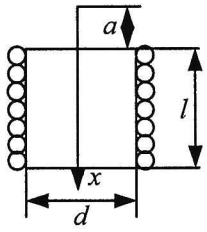


Рис. к задаче 49

$$B=\frac{\mu_0 IN}{2l}\left(\frac{\frac{a+l}{R}}{\sqrt{1+\left(\frac{a+l}{R}\right)^2}}-\frac{\frac{a}{R}}{\sqrt{1+\left(\frac{a}{R}\right)^2}}\right)=$$

$$=\frac{\mu_0 IN}{2l}\left(\frac{a+l}{\sqrt{R^2+(a+l)^2}}-\frac{a}{\sqrt{R^2+a^2}}\right).$$

Учтем, что радиус катушки равен половине диаметра, тогда

$$B=\frac{\mu_0 IN}{2l}\left(\frac{a+l}{\sqrt{\frac{d^2}{4}+(a+l)^2}}-\frac{a}{\sqrt{\frac{d^2}{4}+a^2}}\right);\ B=380\text{ мкТл}.$$

$$[\text{В}]=\frac{\frac{\text{Гн}}{\text{м}}\text{А}}{\text{м}}\frac{\text{м}}{\text{м}}=\frac{\text{Гн}\cdot\text{А}}{\text{м}^2}=\frac{\text{Вб}}{\text{м}^2}=\text{Тл}.$$

**Ответ:** $B=380$ мкТл.

**Задача 50.** Протон влетает в однородное магнитное поле под углом $\alpha=30°$ к направлению поля и движется по винтовой линии радиусом $R=1{,}5$ см. Индукция магнитного поля $B=0{,}1$ Тл. Найти кинетическую энергию протона $E_k$.

**Дано:**

$q = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл

$m = 1,67 \cdot 10^{-27}$ кг

$\alpha = 30°$

$R = 1,5 \cdot 10^{-2}$ м

$B = 0,1$ Тл

$E_k = ?$

**Решение.** На протон, движущийся в магнитном поле, действует сила Лоренца (3.129):

$$F = q\mathrm{v}B\sin\alpha,$$

где v — скорость, $q$ — заряд протона. Вектор силы Лоренца перпендикулярен вектору скорости и, следовательно, по второму закону Ньютона сообщает протону нормальное ускорение $a_n$:

$$F = ma_n = \frac{m\mathrm{v}^2}{R},$$

где $m$ — масса протона.

В итоге $q\mathrm{v}B\sin\alpha = \dfrac{m\mathrm{v}^2}{R}$, откуда

$$\mathrm{v} = \frac{qBR\sin\alpha}{m};\ \mathrm{v} = 72 \text{ км/с}. \qquad (1)$$

Так как скорость протона гораздо меньше скорости света, то кинетическую энергию протона определим по формуле

$$E_k = \frac{m\mathrm{v}^2}{2} \text{ или с учетом (1)}$$

$$E_k = \frac{m}{2}\frac{(qBR\sin\alpha)^2}{m^2} = \frac{(qBR\sin\alpha)^2}{2m};\ E_k = 4,3 \cdot 10^{-18} \text{ Дж}.$$

**Ответ:** $E_k = 4,3 \cdot 10^{-18}$ Дж.

**Задача 51.** Коаксиальный кабель представляет собой длинную металлическую тонкостенную трубку радиуса $R = 10$ мм, вдоль оси которой расположен тонкий провод. Силы токов $I$ в трубке и в проводе равны и противоположно направлены. Определите магнитную индукцию в точках 1 и 2 (см. рисунок к задаче), удаленных от оси кабеля на расстояния $r_1 = 5$ мм и $r_2 = 15$ мм, если сила тока $I = 0,5$ А.

**Дано:**

$R = 10^{-2}$ м

$I = 0,5$ А

$r_1 = 5 \cdot 10^{-3}$ м

$r_1 = 15 \cdot 10^{-3}$ м

$B_1 = ?\ B_2 = ?$

**Решение.** Магнитное поле коаксиального кабеля обладает цилиндрической симметрией, т. е. магнитные силовые линии имеют форму окружностей, центры которых лежат на оси кабеля, а плоскости перпендикулярны оси. Это значит, что во всех точках магнитной силовой линии модуль вектора $B$ одинаков. Для определения магнитной индукции применим теорему о циркуляции вектора $B$ (формула (3.122)):

$$\oint \vec{B}_l d\vec{l} = \oint B_l dl \cos\left(\vec{B}_l \wedge d\vec{l}\right) = B_l \oint dl = 2\pi r_l B_l = \mu\mu_0 I. \qquad (1)$$

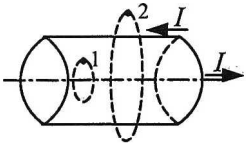


Рис. к задаче 51

В качестве контура интегрирования использовалась окружность, проходящая через точку 1. Так как $\vec{B}_1$ направлен по касательной к силовой линии, то $\cos(\vec{B} \wedge d\vec{l}) = 1$. Из выражения (1) найдем магнитную индукцию на расстоянии $r_1$ от оси кабеля:

$$B_1 = \frac{\mu\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r_1};\ B_1 \text{ мкТл.}$$

Аналогично найдем $B_2$, использовав в качестве контура интегрирования окружность, проходящую через точку 2:

$$\oint B_2 dl \cos\left(\vec{B}_2 \wedge d\vec{l}\right) = B_2 \int_0^{2\pi r_2} dl = 2\pi r_2 B_2 = \mu\mu_0 (I - I) = 0. \qquad (2)$$

Откуда $B_2 = 0$.

Так как контур интегрирования охватывает два равных и противоположно направленных тока, то алгебраическая сумма токов в уравнении (2) равна нулю.

**Ответ:** $B_1 = 20$ мкТл, $B_2 = 0$.

**Задача 52.** По прямому длинному проводу течет ток силой $I_1 = 10$ А. В одной плоскости с проводом расположена квадратная рамка с током $I = 5$ А и со стороной $a = 3$ см на расстоянии $x_0 = 5$ см от ближайшей стороны рамки до провода. Определите работу, затрачиваемую при удалении рамки из магнитного поля.

**Дано:**
$I_1 = 10$ А
$I = 5$ А
$a = 0{,}03$ м
$x_0 = 0{,}05$ м
$A = ?$

**Решение.** Вокруг длинного прямого провода с током образуется магнитное поле, индукция которого зависит от расстояния $x$ (от провода до точки поля):

$$B = \frac{\mu\mu_0}{2\pi}\frac{I_1}{x}. \qquad (1)$$

Таким образом, рамка находится в неоднородном магнитном поле. Для определения работы при перемещении рамки на $dx$ воспользуемся формулой (3.137):

$$dA = Id\Phi, \qquad (2)$$

где $d\Phi = Badx$.

С учетом выражения (1) для элементарной работы запишем

$$dA = \frac{\mu\mu_0}{2\pi}\frac{II_1}{x}adx. \qquad (3)$$

Работа сил магнитного поля:

$$A = \frac{\mu\mu_0}{2\pi} I I_1 a \int_{x_0}^{x_0+a} \frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{\mu\mu_0}{2\pi} I I_1 a \ln\frac{x_0 + a}{x_0}; \; A = 14 \text{ мкДж}.$$

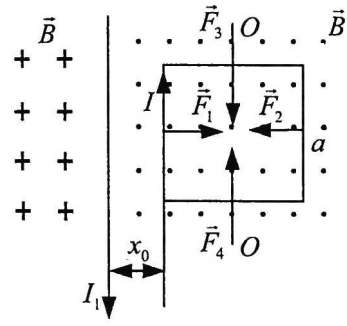


Рис. к задаче 52

Отметим, что в рассмотренной задаче рамка находится в положении неустойчивого равновесия: при малейшем повороте рамки вокруг оси $OO$ силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ создают вращающий момент и рамка повернется на угол $\pi$. После чего направление сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ изменится на противоположное и рамка начнет притягиваться к проводу с током.

**Ответ:** $A = 14$ мкДж.

# Глава 16
# МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВЕЩЕСТВЕ

## § 99. Магнитные моменты электронов и атомов. Атом в магнитном поле

Согласно теории Бора–Зоммерфельда электроны в атомах движутся по эллипсообразным траекториям. Допустим, что орбита электрона имеет форму окружности радиуса $r$ (рис. 117). Движущийся по орбите электрон обладает моментом импульса

$$L_i = mvr,$$

который получил название *орбитальный механический момент* электрона.

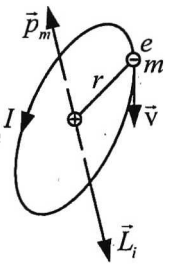


Рис. 117

Движущийся по орбите электрон эквивалентен круговому току

$$I = ev = \frac{e\mathrm{v}}{2\pi r},$$

где $e$ — заряд электрона; $\nu$ — частота вращения; v — скорость электрона. Направление тока и направление движения электрона противоположны, т. к. заряд электрона отрицательный.

Магнитный момент кругового тока

$$p_{mi} = IS = \frac{e\mathrm{v}\pi r^2}{2\pi r} = \frac{e\,\mathrm{v}\,r}{2},$$

назван *орбитальным магнитным моментом электрона*. Здесь $S$ — площадь орбиты.

Моменты $\vec{p}_{mi}$ и $\vec{L}_i$ перпендикулярны плоскости орбиты и направлены по одной прямой, проходящей через ее центр, в разные стороны. Отношение магнитного момента электрона к его механическому моменту называется *гиромагнитным отношением*:

$$\frac{p_{mi}}{L_i} = -\frac{e}{2m}. \qquad (3.138)$$

Векторами орбитального магнитного и механического моментов атомов $\vec{p}_m$ и $\vec{L}$ являются векторные суммы соответствующих моментов всех его электронов:

$$\vec{p}_m = \sum_{i=1}^{z} \vec{p}_{mi}, \quad \vec{L} = \sum_{i=1}^{z} \vec{L}_i,$$

где $z$ — порядковый номер атома в периодической системе элементов Менделеева[1].

[1] Дмитрий Иванович Менделеев (1834–1907) — русский химик.

При расчетах магнитных и механических орбитальных моментов атомов и молекул часто пренебрегают магнитным и механическим моментами ядра атома ввиду их малости.

Ряд закономерностей: распределение электронов по энергетическим уровням атома, тонкая структура спектральных линий возбужденных атомов и молекул и их расщепление в магнитных полях, природа ферромагнетизма и т. д. показывают, что помимо орбитальных моментов у электрона имеются собственные (спиновые) механический и магнитный моменты. *Спин электрона* — это его неотъемлемое свойство, как заряд и масса.

Допустим, что атом находится в однородном магнитном поле с индукцией $\vec{B}$. На электронные орбиты, которые представляют собой «ниточки тока» (микротоки) (рис. 118), действует механический момент, определяемый уравнением $\vec{M} = [\vec{p}_m, \vec{B}]$, или

$$M = p_m B \sin\alpha, \qquad (3.139)$$

где $p_m$ — орбитальный магнитный момент электрона; $\alpha$ — угол между векторами $\vec{p}_m$ и $\vec{B}$. В результате действия механического момента векторы $\vec{p}_m$ и $\vec{L}$ совершают прецессию. *Прецессией* называется равномерное вращение вектора (в данном случае векторов $\vec{p}_m$ и $\vec{L}$) вокруг неподвижной оси (вектора $\vec{B}$), при котором вектор описывает коническую поверхность с вершиной в точке $O$ и углом раствора $2\alpha$. За бесконечно малый промежуток времени $dt$ орбитальный механический момент $\vec{L}$ имеет приращение $d\vec{L}$, модуль которого согласно уравнению (1.74) равен

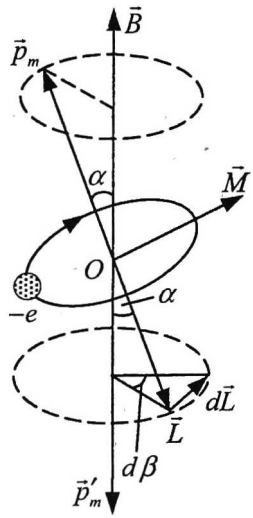


Рис. 118

$$\left|d\vec{L}\right| = Mdt\,. \qquad (3.140)$$

Векторы $d\vec{L}$ и $\vec{M}$ перпендикулярны плоскости, проходящей через $\vec{B}$ и $\vec{L}$. Из уравнений (3.139) и (3.140) выразим модуль вектора

$$dL = p_m B dt \sin\alpha\,. \qquad (3.141)$$

С другой стороны, как видно из рис. 118,

$$dL = L d\beta \sin\alpha\,. \qquad (3.142)$$

Отношение $\dfrac{d\beta}{dt} = \omega_L$ называют *угловой скоростью прецессии электронных орбит*. Найдем $\omega_L$ из выражений (3.141) и (3.142):

$$\omega_L = \frac{p_m B}{L} = \frac{eB}{2m}. \qquad (3.143)$$

Теорема Лармора[1] гласит: *единственным результатом воздействия магнитного поля на атом является прецессия его электронных орбит с угловой скоростью* $\omega_L$.

В результате прецессии электроны получают дополнительное движение, что приводит к образованию магнитного момента атома $\vec{p}'_m$, направленного согласно закону Ленца в сторону, противоположную вектору $\vec{B}$.

## § 100. Намагничивание вещества

Всякое вещество является *магнетиком,* так как при внесении его во внешнее магнитное поле оно намагничивается.

Пусть $\vec{B}_0$ — индукция магнитного поля в вакууме, $\vec{B}'$ — индукция дополнительного магнитного поля, создаваемого веществом.

По принципу суперпозиции результирующее магнитное поле в магнетике обладает индукцией

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'. \qquad (3.144)$$

Существуют три типа магнетиков: диамагнетики, парамагнетики и ферромагнетики.

Степень намагниченности магнетика принято характеризовать магнитным моментом единицы объема магнетика:

$$\vec{j} = \frac{\sum \vec{p}_m}{\Delta V},$$

где $\vec{p}_m$ — магнитный момент молекулы; $\Delta V$ — объем магнетика.

Векторная физическая величина $\vec{j}$ называется *намагниченностью магнетика.* Рассмотрим соленоид (см. рис. 108) с сердечником, изготовленным из какого-либо материала. При протекании тока $I$ по обмотке в соленоиде возникает магнитное поле с индукцией $\vec{B}$, определяемой выражением (3.144), где $\vec{B}_0$ — магнитная индукция, созданная током $I$, $\vec{B}'$ — индукция, обусловленная наличием сердечника. Распишем $B_0$ по формуле (3.123):

$$B_0 = \mu_0 nI = \frac{\mu_0 NI}{l},$$

где $N$ — число витков обмотки; $l$ — длина соленоида. Согласно гипотезе

[1] Джозеф Лармор (1857–1942) — английский физик.

Ампера в любом веществе циркулируют молекулярные токи, создающие вокруг себя магнитные поля. Эти токи обладают магнитными моментами $\vec{p}_m$. Результирующий эффект, создаваемый молекулярными токами, эквивалентен действию тока намагничивания $I'$, текущего по верхней поверхности цилиндрического сердечника и создающего индукцию $\vec{B}'$.

Вектор $\vec{B}'$ направлен противоположно $\vec{B}_0$ для диамагнетиков и совпадает по направлению с $\vec{B}_0$ для парамагнетиков. Если рассмотреть поперечное сечение сердечника (рис. 119), то внутри него молекулярные токи (на рисунке показаны стрелками) соседних атомов направлены навстречу друг другу и взаимно компенсируются. Не скомпенсированы лишь молекулярные токи на боковой поверхности, которые образуют ток $I'$.

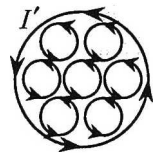


Рис. 119

Тогда аналогично выражению для $\vec{B}_0$ можно записать

$$\vec{B}' = \frac{\mu_0 N' I'}{l}, \qquad (3.145)$$

где $\frac{N'}{l}$ — эффективное число витков молекулярных токов на единице длины; $I'$ — сила молекулярного тока.

Выражение

$$\frac{N'I'S}{V} = \frac{N'I'S}{(Sl)} = \frac{N'I'}{l} = j$$

представляет собой намагниченность магнетика $j$, где $S$ — площадь поперечного сечения сердечника, $V = Sl$ — его объем.

Таким образом, $\vec{B}' = \mu_0 \vec{j}$ и формула (3.144) запишется в виде

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \mu_0 \vec{j}\,.$$

Применим теорему о циркуляции вектора магнитной индукции (3.122):

$$\oint_l \vec{B} d\vec{l} = \oint_l \left(\vec{B}_0 + \mu_0 \vec{j}\right) d\vec{l} = \mu_0 \left(I + I'\right),$$

где $I$ — суммарная сила тока в витках соленоида и $I'$ — ток намагничивания, охваченные контуром интегрирования.

Из полученного выражения и соотношения $\oint_l \vec{B}_0 d\vec{l} = \mu_0 I$, имеем

$$\oint_l \left( \frac{\vec{B} - \mu_0 \vec{j}}{\mu_0} \right) d\vec{l} = I. \qquad (3.146)$$

Обозначив $\vec{H} = \dfrac{\left(\vec{B} - \mu_0 \vec{j}\right)}{\mu_0}$, получим

$$\vec{B} = \mu_0 \left(\vec{H} + \vec{j}\right), \tag{3.147}$$

где $\vec{H}$ — напряженность магнитного поля.

Единицей намагниченности и напряженности магнитного поля является ампер на метр (А/м).

Для магнетиков, находящихся в не слишком сильных магнитных полях, намагниченность

$$\vec{j} = æ\vec{H},$$

где æ – магнитная восприимчивость (безразмерная физическая величина).

Тогда из формулы (3.147) запишем соотношение между индукцией магнитного поля $\vec{B}$ и напряженностью $\vec{H}$:

$$\vec{B} = \mu_0 \left(\vec{H} + æ\vec{H}\right) = \mu_0 \vec{H}\left(1 + æ\right) = \mu\mu_0 \vec{H}. \tag{3.148}$$

Безразмерная физическая величина $\mu = 1 + æ$ называется *магнитной проницаемостью вещества.*

Если использовать вектор $\vec{H}$, то равенство (3.122) примет вид

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = \sum I. \tag{3.149}$$

Выражение (3.149) называется законом полного тока: *циркуляция вектора напряженности магнитного поля по любому замкнутому контуру равна алгебраической сумме макротоков, охватываемых этим контуром.*

Вектор $\vec{H}$ обычно ассоциируют только с макротоками, вектор $\vec{j}$ — с микротоками (молекулярными токами), а вектор магнитной индукции $\vec{B}$ с теми и другими токами.

## § 101. Диа- и парамагнетизм

*Диамагнетизм* — это явление возникновения в магнетике, внесенном во внешнее магнитное поле, намагниченности, направленной в сторону, противоположную полю. В отсутствие внешнего магнитного поля все орбитальные и спиновые магнитные моменты атомов и молекул диамагнетика взаимно уравновешены, т. е. их векторная сумма равна нулю. При внесении диамагнетика во внешнее магнитное поле в результате прецессии электронных орбит индуцируется дополнительный магнитный момент $\vec{p}'_m$, пропорциональный магнитной индукции внешнего поля $\vec{B}$ и направленный в противоположную сторону. Поэтому магнитные восприимчивости диамагнетиков $æ \neq 0$ имеют отрицательные значения.

Стержень из диамагнетика, помещенный между полосами постоянного магнита, выталкивается из магнитного поля.

Итак, вещества, у которых магнитная восприимчивость æ имеет очень малые отрицательные значения, называются *диамагнетиками* (золото, цинк, висмут, ртуть, графит и т. д.). Магнитная восприимчивость диамагнетиков практически не зависит от температуры.

*Парамагнетизм* — это явление возникновения в магнетике, внесенном во внешнее магнитное поле, намагниченности, направленной по полю.

В отсутствие внешнего магнитного поля частицы парамагнетика имеют собственные магнитные моменты, отличные от нуля. Но за счет теплового хаотического движения суммарный магнитный момент атомов и молекул равен нулю. При внесении парамагнетика во внешнее магнитное поле магнитные моменты прецессируют с угловой скоростью $\omega_L$, а также происходит их ориентация в поле. В результате возникает магнитная восприимчивость $æ > 0$, т. е. намагниченность парамагнетика направлена по полю. Это означает, что парамагнетики, в отличие от диамагнетиков, полем не отталкиваются, а притягиваются.

Стержень из парамагнетика, внесенный в магнитное поле, устанавливается вдоль магнитных силовых линий поля.

С повышением температуры происходит разориентация магнитных моментов парамагнетиков. Для них справедлив закон Кюри[1]:

$$æ = \frac{C}{T},$$

где $C$ — постоянная Кюри; $T$ — термодинамическая температура.

Итак, вещества, магнитная восприимчивость которых имеет очень малые, но положительные значения, называются *парамагнетиками* (платина, алюминий, калий, натрий, литий и т. д.).

## § 102. Условия на границе раздела двух магнетиков

Рассмотрим условия, которым удовлетворяют векторы магнитной индукции $\vec{B}$ и напряженности магнитного поля $\vec{H}$ на границе раздела двух однородных магнетиков. Допустим, что граница плоская, а магнитная проницаемость первого магнетика $\mu_1$ меньше магнитной проницаемости второго магнетика $\mu_2$. Обозначим: $\vec{B}_1$ — индукция и $\vec{H}_1$ — напряженность магнитного поля в первом магнетике; $\vec{B}_2$ и $\vec{H}_2$ — соответственно во втором магнетике.

Выделим на границе раздела магнетиков замкнутую цилиндрическую

[1] Пьер Кюри (1859–1906) — французский физик.

поверхность с малой высотой $\Delta h$ и площадью основания $\Delta S$ (рис. 120,а) и применим теорему Гаусса для вектора $\vec{B}$ (3.135):

$$B_{2n}\Delta S - B_{1n}\Delta S = 0 \text{ или } B_{1n} = B_{2n}, \qquad (3.150)$$

где $B_{1n}$ и $B_{2n}$ — проекции вектора $\vec{B}$ на внешнюю нормаль $\vec{n}$.

Потоком вектора $\vec{B}$ через боковую поверхность цилиндра пренебрегаем ввиду его малости.

Из уравнения (3.150) следует, что нормальные составляющие векторов $\vec{B}_1$ и $\vec{B}_2$ одинаковы, т. е. изменяются только тангенциальные составляющие.

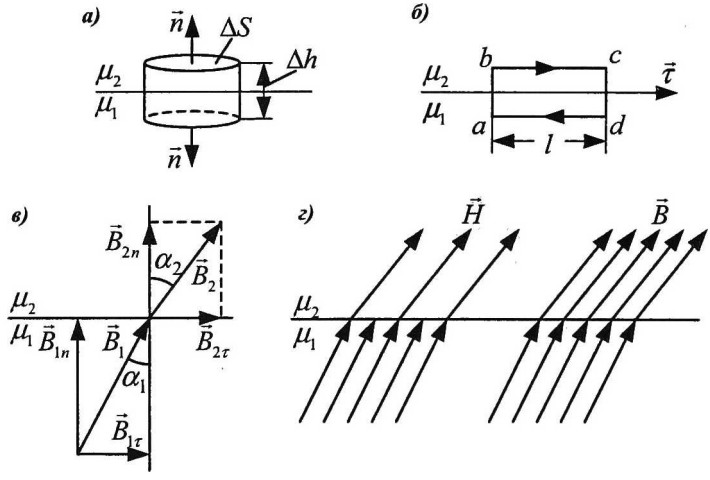



Рис. 120

Выделим на границе раздела магнетиков небольшой прямоугольный контур *abcd* (рис. 120,б), в котором стороны *ab* и *cd* пренебрежимо малы по сравнению с $l$. Применим теорему о циркуляции вектора $\vec{H}$ (3.149), пренебрегая вкладом в циркуляцию на участках контура *ab* и *cd*:

$$H_{2\tau} - H_{1\tau} = 0 \text{ или } H_{1\tau} = H_{2\tau}, \qquad (3.151)$$

где $H_{1\tau}$ и $H_{2\tau}$ — проекции векторов $\vec{H}_1$ и $\vec{H}_2$ на направление $\vec{\tau}$.

При написании уравнения (3.151) принимаем, что на границе раздела магнетиков токи проводимости отсутствуют.

Из уравнения (3.151) следует, что тангенциальные составляющие векторов $\vec{H}_1$ и $\vec{H}_2$ одинаковы по обе стороны границы раздела магнетиков.

Таким образом, при переходе границы раздела магнетиков $B_n$ и $H_\tau$ изменяются непрерывно, а $B_\tau$ и $H_n$ — скачком, претерпевая разрыв.

Поскольку $\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}$, то из уравнений (3.150) и (3.151) запишем:

$$B_{1n} = B_{2n}, \quad \frac{B_{1\tau}}{\mu_1} = \frac{B_{2\tau}}{\mu_2}.$$

Поля векторов $\vec{B}$ и $\vec{H}$ на границе раздела двух магнетиков показаны на рис. 120,в. Из рисунка найдем соотношение

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{B_{1\tau}/B_{1n}}{B_{2\tau}/B_{2n}},$$

или с учетом предыдущих условий

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}.$$

Получили закон преломления линий $\vec{B}$ и $\vec{H}$. Как видно из рис. 120,г, линии вектора напряженности $\vec{H}$ магнитного поля на границе раздела двух магнетиков не только преломляются, но и терпят разрыв (из-за поверхностных токов намагничивания), линии вектора магнитной индукции $\vec{B}$ только преломляются. С увеличением магнитной проницаемости угол между нормалью к границе раздела магнетиков и линиями векторов $\vec{B}$ и $\vec{H}$ также возрастает.

## § 103. Ферромагнетизм

*Ферромагнетизм* — это магнитоупорядоченное состояние макроскопических объемов вещества (ферромагнетиков), в котором магнитные моменты атомов параллельны и одинаково ориентированы. Ферромагнетики обладают спонтанной (самопроизвольной) намагниченностью даже в отсутствие внешнего намагничивающего поля.

Ферромагнетики, в отличие от слабомагнитных диа- и парамагнетиков, являются сильномагнитными средами. Магнитное поле, создаваемое ими, может в сотни и тысячи раз превосходить внешнее поле. У ферромагнетиков $\mu >> 1$ и может достигать десятков и сотен тысяч. Ферромагнетизм наблюдается у железа, кобальта, никеля и у их многочисленных сплавов.

Ферромагнетики обладают особыми свойствами благодаря доменной структуре строения. *Домен* — микрообласть размером порядка (1–10) мкм, в которой спиновые магнитные моменты отдельных атомов имеют одинаковое направление. Направления магнитных моментов для разных доменов различны, так что в отсутствие внешнего поля суммарный магнитный момент всего ферромагнетика равен нулю.

При внесении ферромагнетика в магнитное поле происходит его намагничивание. Намагничивание состоит, во-первых, в смещении границ доменов и росте размеров тех доменов, векторы магнитных моментов

которых близки по направлению к магнитной индукции внешнего намагничивающего поля $\vec{B}_0$ и, во-вторых, в повороте магнитных моментов целых доменов по направлению внешнего магнитного поля.

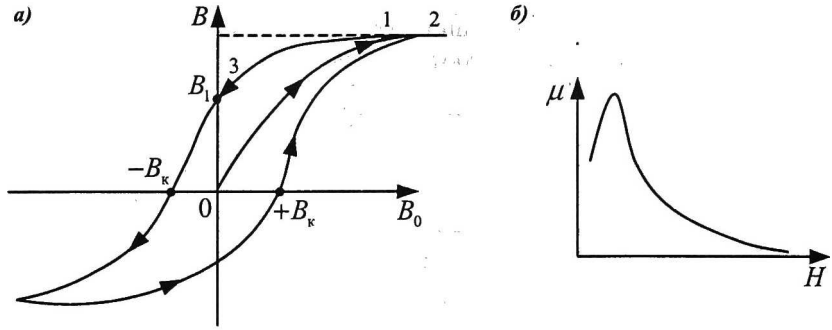



Рис. 121

В достаточно сильном магнитном поле достигается состояние насыщения, когда весь образец намагничен по полю (рис. 121,а, участок 1–2). На рис. 121,а изображена кривая намагничивания, получившая название *петли гистерезиса.* Намагничивание происходит по кривой 0–1. Если затем уменьшить $B_0$, то кривая пойдет по 1–3, т. е. происходит отставание изменения магнитного поля в веществе ($B$) по отношению к магнитному полю в вакууме ($B_0$); это явление запаздывания называется *гистерезисом.* При этом ферромагнетик остается намагниченным, когда $B_0 = 0$.

Чтобы размагнитить ферромагнетик, нужно изменить направление намагничивающего поля. Индукция $B_к$ называется *коэрцитивной силой* (коэрцитивной индукцией). Она характеризует способность ферромагнетика сохранять намагниченное состояние.

Большой коэрцитивной силой (широкой петлей гистерезиса) обладают *магнитотвердые ферромагнетики*, используемые для изготовления постоянных магнитов. Малую коэрцитивную силу (узкую петлю гистерезиса) имеют *магнитомягкие ферромагнетики*, используемые для сердечников трансформаторов, магнитных цепей и т. д.

Магнитная проницаемость $\mu$ ферромагнетиков является нелинейной функцией напряженности поля $H$ (рис. 121,б). При увеличении $H$ магнитная проницаемость сначала растет, достигая $\mu_{max}$, а затем убывает, асимптотически приближаясь к единице.

Остаточная намагниченность ферромагнетика нарушается при его сильном сотрясении или нагревании.

Для каждого ферромагнетика имеется определенная температура, при которой домены разрушаются и ферромагнетик превращается в парамагнетик. Эта температура называется *точкой Кюри.*

## ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

**Задача 53.** Соленоид с железным сердечником имеет длину $l = 0{,}3$ м и содержит $N = 300$ витков провода. Диаметр соленоида $d$ намного меньше его длины $l$. Определите магнитную проницаемость $\mu$ железа при силе тока $I = 0{,}4$ А.

**Дано:**
$l = 0{,}3$ м
$N = 300$
$I = 0{,}4$ А
$d \ll l$
$\mu = ?$

**Решение.** Магнитная проницаемость ферромагнетиков является функцией напряженности $H$ магнитного поля, поэтому для ее определения воспользуемся графиком зависимости индукции магнитного поля $B$ от $H$ (см. рисунок к задаче).

Из соотношения (3.148) выразим магнитную проницаемость:

$$\mu = \frac{B}{\mu_0 H}. \qquad (1)$$

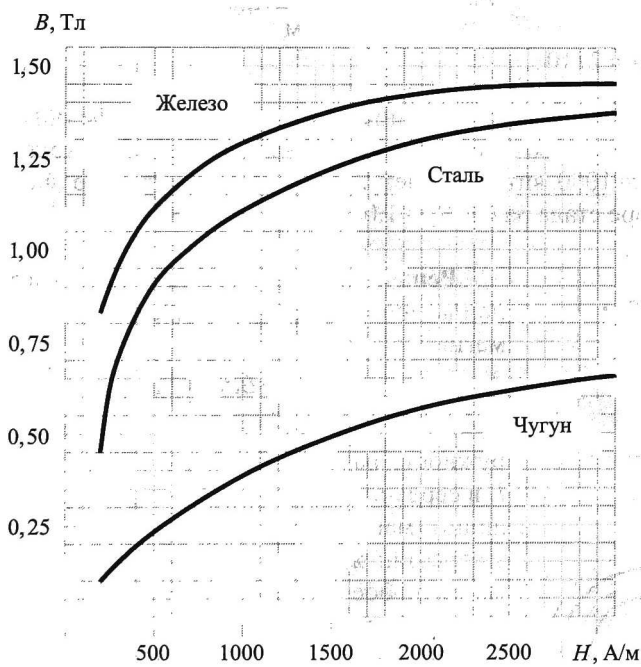



Рис. к задаче 53. Зависимость индукции $B$ в ферромагнетиках от напряженности магнитного поля $H$

Напряженность магнитного поля бесконечно длинного соленоида ( $d << l$ ) согласно формулам (3.123) и (3.148) определяется выражением

$$H = nI = \frac{N}{l} I , \qquad (2)$$

где $n = \frac{N}{l}$ — число витков, приходящихся на единицу длины соленоида.

Подставив в уравнение (2) численные значения величин и произведя вычисление, найдем $H = 400$ А/м.

По графику зависимости $B$ от $H$ для железа (см. рисунок) определим, что напряженности $H = 400$ А/м соответствует магнитная индукция $B = 1{,}06$ Тл.

Подставив найденные значения $B$ и $H$ в формулу (1), вычислим магнитную проницаемость:

$$\mu = \frac{B}{\mu_0 H} = \frac{1{,}06 \text{ Тл}}{4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Гн}}{\text{м}} \cdot 400 \frac{\text{А}}{\text{м}}} = 2110 .$$

**Ответ:** $\mu = 2110$.

**Задача 54.** Тороид с железным сердечником и средним радиусом $R = 15{,}92$ см имеет воздушный зазор $l_2 = 2$ мм. По обмотке тороида, содержащей N = 1000 витков, течет ток $I$, в результате чего магнитная индукция в зазоре стала равна $B_2 = 1{,}0$ Тл. Определите силу тока $I$.

**Дано:**

$R = 0{,}1592$ м

$l_2 = 2 \cdot 10^{-3}$ м

$N = 1000$

$B_2 = 1{,}0$ Тл

$I = ?$

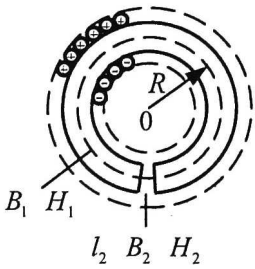



Рис. к задаче 54

**Решение.** Для расчета магнитного поля тороида используем теорему о циркуляции вектора магнитной индукции (3.122):

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu\mu_0 \sum I . \qquad (1)$$

В качестве замкнутого контура выберем окружность радиуса $R$. Поскольку воздушный зазор $l_2$ в сердечнике очень узкий, то можно считать, что линии магнитной индукции будут проходить в зазоре так же, как в сплошном сердечнике, т. е. через любое поперечное сечение тороида (в том числе и через сечение в воздушном зазоре) проходит одинаковый магнитный поток:

$$B_1 = B_2 = 1{,}0 \text{ Тл}.$$

Однако магнитные проницаемости железа и воздуха разные, поэтому и напряженности магнитного поля в железе $H_1$ и в зазоре $H_2$ различ-

ны. Учитывая, что $B = \mu\mu_0 H$, теорема о циркуляции вектора $H$ (закон полного тока (3.149)) запишется в виде

$$H_1 l_1 + H_2 l_2 = NI, \qquad (2)$$

где $l_1 = 2\pi R - l_2$; $l_1 = 15{,}9$ см.

Для воздуха $\mu = 1$ и $H_2 = \dfrac{B_2}{\mu_0} = \dfrac{1{,}0}{4\pi \cdot 10^{-7}}$; $H_2 = 8 \cdot 10^5 \dfrac{\text{А}}{\text{м}}$.

Значение $H_1$ найдем по кривой намагничивания железа, используя рис. к задаче 53: $H_1 = 200 \dfrac{\text{А}}{\text{м}}$.

Из уравнения (2) определим силу тока: $I = \dfrac{H_1 l_1 + H_2 l_2}{N}$; $I = 1{,}63$ А.

**Ответ:** $I = 1{,}63$ А.

# Глава 17
# ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

## § 104. Законы Фарадея и Ленца

Опыт Эрстеда показал, что электрический ток создает магнитное поле. А не может ли магнитное поле создавать электрический ток?

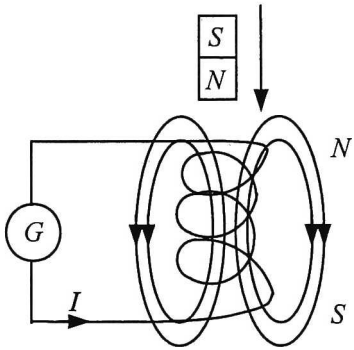



Рис. 122

После многолетней работы Фарадей[1] ответил на этот вопрос положительно. Рассмотрим один из многочисленных опытов Фарадея, позволяющий понять явление электромагнитной индукции. Концы металлической проволоки, навитой на катушку, подключались к гальванометру $G$ (рис. 122).

Внутрь катушки вводился постоянный магнит. При движении магнита стрелка гальванометра отклонялась. Это значит, что в витках катушки возбуждалась ЭДС и возникал электрический ток, названный Фарадеем *индукционным*. Если магнит выводить из катушки, то стрелка гальванометра отклонялась в противоположную сторону. При остановке магнита стрелка возвращалась в нулевое положение.

Тот же эффект можно наблюдать, если магнит держать неподвижно, а катушку двигать. При движении магнита или катушки изменяется магнитный поток, пронизывающий витки проволоки. Явление возникновения электрического тока в замкнутом проводящем контуре при изменении магнитного потока, охватываемого этим контуром, называется *электромагнитной индукцией.*

Фарадей открыл закон электромагнитной индукции:

$$\mathscr{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}. \qquad (3.152)$$

*ЭДС электромагнитной индукции, возникающая в замкнутом проводящем контуре, прямо пропорциональна скорости изменения магнитного потока, пронизывающего контур.*

Явление электромагнитной индукции наблюдается и при движении проводника в однородном магнитном поле или в неподвижном проводнике при изменении магнитного поля.

Ленц установил закон, позволяющий определить направление индукционного тока. Закон Ленца гласит: *индукционный ток имеет такое на-*

[1] Майкл Фарадей (1791–1867) — английский физик.

*правление, что его собственное магнитное поле противодействует изменению магнитного потока, вызвавшего индукционный ток.*

При определении направления индукционного тока в проводнике удобно пользоваться *правилом правой руки*: если силовые линии магнитного поля входят в ладонь, а отогнутый большой палец показывает направление движения проводника, то остальные четыре вытянутые в той же плоскости пальца показывают направление индукционного тока.

## § 105. Явление самоиндукции. Индуктивность

*Самоиндукцией* называется возникновение ЭДС индукции в катушке или контуре вследствие изменения в них электрического тока. Эта ЭДС называется *электродвижущей силой самоиндукции.*

По определению (3.134) магнитный поток Ф через площадку, охваченную контуром, пропорционален магнитной индукции $B$. По закону Био–Савара–Лапласа (3.107) индукция магнитного поля пропорциональна силе тока $I$, протекающего по контуру. Следовательно, магнитный поток

$$\Phi = LI. \tag{3.153}$$

Коэффициент пропорциональности $L$ называется *индуктивностью контура* (катушки, проводника). *Индуктивность* замкнутого контура — это скалярная физическая величина, равная отношению магнитного потока, сцепленного с контуром, к силе тока в контуре. Индуктивность контура зависит от его размеров, формы и магнитной проницаемости среды, в которой он находится.

Подставив выражение (3.152) в (3.153), получим (при $L = \text{const}$ )

$$\mathscr{E}_s = -\frac{dI}{dt}L. \tag{3.154}$$

*Электродвижущая сила самоиндукции $\mathscr{E}_S$ прямо пропорциональна скорости изменения силы тока в контуре.*

В СИ индуктивность измеряется в генри (Гн). 1 Гн — это индуктивность такой катушки (контура), в которой при равномерном изменении тока на 1 А за 1 с возникает ЭДС самоиндукции 1 В.

В качестве примера определим индуктивность длинного соленоида.

Если по соленоиду течет ток $I$, то согласно уравнению (3.153) полный магнитный поток сквозь соленоид (*потокосцепление* $\psi$ ) равен

$$\psi = LI, \tag{3.155}$$

где $L$ — индуктивность соленоида. С другой стороны,

$$\psi = N\Phi = NBS, \tag{3.156}$$

где $N$ — число витков соленоида; Ф — магнитный поток, пронизывающий каждый виток; $S$ — площадь поперечного сечения соленоида.

Согласно уравнению (3.123) магнитная индукция длинного соленоида

$$B = \mu\mu_0 nI, \tag{3.157}$$

где $n = \frac{N}{l}$ — число витков на единицу его длины; $\mu$ — магнитная проницаемость вещества, из которого изготовлен сердечник соленоида.

Из уравнений (3.155)–(3.157) получим

$$L = \mu\mu_0 NnS = \mu\mu_0 n^2 V, \tag{3.158}$$

где $V = Sl$ — объем соленоида.

Таким образом, индуктивность соленоида зависит от его длины $l$, площади сечения $S$, числа витков $N$ и магнитной проницаемости сердечника $\mu$.

Ток самоиндукции возникает в электрической цепи, содержащей сопротивление $R$ и индуктивность $L$. По закону Ленца индукционный ток противодействует изменению тока в контуре, замедляя его возрастание или убывание. Закон изменения тока $I$ в цепи с постоянной ЭДС, равной $\mathscr{E}$, при ее замыкании и размыкании имеет вид

$$I = I_0 e^{-t/\tau} + \frac{\mathscr{E}}{R\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}, \tag{3.159}$$

где $I_0$ — сила тока в начальный момент времени при $t = 0$; $\tau = \frac{L}{R}$ — постоянная, называемая *временем релаксации.*

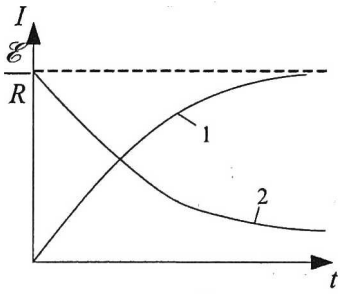


Рис. 123

На рис. 123 показаны кривые нарастания силы тока в цепи при ее замыкании (кривая 1 при $I = 0$, второе слагаемое формулы (3.159)) и убывания тока при размыкании цепи (кривая 2 при $\mathscr{E} = 0$, первое слагаемое формулы (3.159)).

Явление возникновения ЭДС индукции в одном из контуров при изменении тока в другом контуре, расположенном вблизи него, называется *взаимной индукцией.* Это явление используется, например, в трансформаторах.

## § 106. Энергия магнитного поля

На рис. 124 изображена электрическая цепь, содержащая батарею Б, электрическую лампочку Л, катушку индуктивности $L$ и ключ К. Если поставить ключ К в положение 1, то по катушке потечет электрический ток $I$. Переводом ключа $K$ в положение 2 отсоединим батарею от ка-

тушки. Образуется замкнутый контур цепи, включающей катушку и лампочку. Электрическая лампочка при этом вспыхивает, так как при размыкании цепи сила тока падает (рис. 123, кривая 2), возникает ЭДС самоиндукции:

$$\mathscr{E} = -L\frac{dI}{dt}.$$

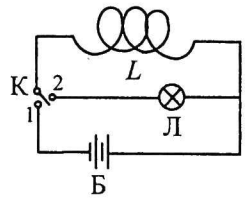


Рис. 124

Найдем работу по загоранию лампочки:

$$dA = \mathscr{E}Idt = -L\frac{dI}{dt}Idt = -LIdI.$$

Поскольку ток уменьшается от $I$ до нуля, то работа

$$A = -\int_{I}^{0} LIdI = \frac{LI^2}{2}.$$

Работа по загоранию лампочки совершается за счет энергии магнитного поля катушки. Следовательно, энергия магнитного поля

$$W = \frac{LI^2}{2}. \qquad (3.160)$$

Выразим энергию магнитного поля $W$ через величины, характеризующие поле. Рассмотрим однородное магнитное поле бесконечно длинного соленоида. Подставив в формулу (3.160) индуктивность из уравнения (3.158) и силу тока из уравнения (3.157), получим

$$W = \frac{1}{2}\frac{\mu\mu_0 n^2 VB^2}{\mu^2\mu_0^2 n^2} = \frac{1}{2}\frac{B^2 V}{\mu\mu_0}.$$

Объемная плотность энергии

$$\omega = \frac{W}{V} = \frac{B^2}{2\mu\mu_0}.$$

Следовательно, энергия магнитного поля $W = \omega V$, где $V$ — объем, занимаемый полем. Поскольку $B = \mu\mu_0 H$, то для объемной плотности энергии можно записать следующие выражения:

$$\omega = \frac{B^2}{2\mu\mu_0} = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2} = \frac{BH}{2}. \qquad (3.161)$$

Если магнитное поле неоднородно, то для определения энергии нужно вычислить интеграл:

$$W = \int\frac{1}{2}BHdV.$$

где $dV$ — элементарный объем магнитного поля, в пределах которого поле можно считать однородным.

## ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

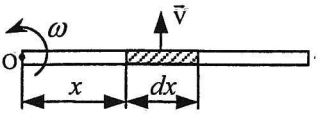


Рис. к задаче 55

**Задача 55.** Стержень длиной $l = 1$ м вращается в однородном магнитном поле с постоянной угловой скоростью $\omega = 30\ с^{-1}$. Ось вращения стержня параллельна магнитным силовым линиям поля и проходит через его конец. Определите ЭДС индукции, возникшую на концах стержня, если индукция магнитного поля $B = 2 \cdot 10^{-2}$ Тл.

**Дано:**
$l = 1$ м
$\omega = 30\ с^{-1}$
$B = 2 \cdot 10^{-2}$ Тл
$\mathscr{E} = ?$

**Решение.** Стержень движется перпендикулярно магнитным силовым линиям и в любом его бесконечно малом участке $dx$ (см. рис.) возникает элементарная ЭДС:

$$d\mathscr{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{BdS}{dt} = -B\,v\,dx.$$

Так как $v = \omega x$, то

$$d\mathscr{E} = -B\omega x dx. \qquad (1)$$

Интегрируя выражение (1) по длине стержня, получим

$$\mathscr{E} = -\int_0^l B\omega x dx = -B\omega \frac{x^2}{2}\Big|_0^l = -\frac{1}{2}B\omega l^2, \quad \mathscr{E} = -0{,}3\text{В}.$$

Знак минус определяет направление ЭДС индукции.
Ответ: $\mathscr{E} = -0{,}3$ В.

**Задача 56.** В однородном горизонтальном магнитном поле с магнитной индукцией $B$ по вертикально расположенным рельсам, замкнутым через последовательно соединенные резистор сопротивлением $R$ и источник с ЭДС $\mathscr{E}$, свободно скользит без нарушения контакта проводник $AC$ длиной $l$ и массой $m$ (см. рисунок к задаче). Найдите величину скорости движения проводника.

**Дано:**
$B$
$R$
$\mathscr{E}$
$l$
$m$
$v = ?$

**Решение.** Если проводник АС неподвижен, то на него действуют сила тяжести $mg$ и сила Ампера

$$F_{A1} = I_1 lB, \qquad (1)$$

где $I_1 = \frac{\mathscr{E}}{R}$.

По правилу левой руки сила $F_{A1}$ направлена вверх.
Возможны три случая:

1) $|m\vec{g}| < |\vec{F}_{A1}|$;

2) $|m\vec{g}| > |\vec{F}_{A1}|$;

3) $|m\vec{g}| = |\vec{F}_{A1}|$.

Случай третий нас не интересует, так как проводник будет находиться в равновесии.

Случай 1. Если $|m\vec{g}| < |\vec{F}_{A1}|$, то проводник начинает двигаться вверх с ускорением. В замкнутом контуре AMDC наводится ЭДС индукции. Согласно закону Фарадея (3.152)

$$\mathscr{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{BdS}{dt} = -B\mathrm{v}l, \tag{2}$$

где $S$ — площадь контура.

В контуре возникает индукционный ток

$$I_2 = \frac{\mathscr{E}}{R} = \frac{B\mathrm{v}l}{R}, \tag{3}$$

направленный от $C$ к $A$, чтобы сила $F_{A2}$, определенная по $I_2$, согласно правилу Ленца была направлена вниз. С увеличением скорости движения проводника возрастает и $\mathscr{E}$, что приводит к росту $I_2$ и $F_{A2}$. При установившемся движении должно выполняться условие:

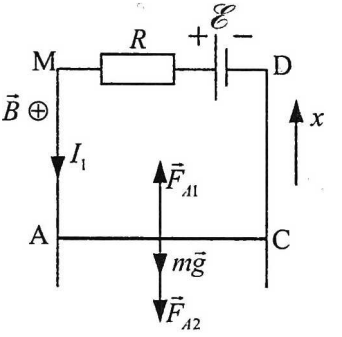


Рис. к задаче 56

$\vec{F}_{A1} + \vec{F}_{A2} + m\vec{g} = 0$, или в проекции на ось $x$:

$$F_{A1} - F_{A2} - mg = 0. \tag{4}$$

Модуль силы $F_{A2}$ найдем по закону Ампера:

$$F_{A2} = I_2 Bl.$$

С учетом уравнения (3)

$$F_{A2} = \frac{l^2 B^2 \mathrm{v}}{R}. \tag{5}$$

Таким образом, используя выражения (1), (2), (3) и (5), уравнение (4) примет вид

$$\frac{\mathscr{E}lB}{R} - \frac{l^2 B^2 \mathrm{v}}{R} - mg = 0, \text{ откуда}$$

$$\mathrm{v} = \frac{\mathscr{E}lB - mgR}{l^2 B^2}. \tag{6}.$$

Случай 2. Если $|m\vec{g}| > |\vec{F}_{A1}|$, то проводник $AC$ будет с ускорением двигаться вниз. По правилу Ленца сила индукционного тока $I_i$ будет направлена так, чтобы сила Ампера $F_{A2}$ (на рис. указана для случая 1) препятствовала движению проводника вниз, т. е. уравнение второго закона Ньютона для установившегося движения запишется в виде

$\vec{F}_{A1} + \vec{F}_{A2} + m\vec{g} = 0$, или в проекции на ось $x$:

$$mg - F_{A2} - F_{A1} = 0.$$

Откуда

$$mg - \frac{\mathscr{E}lB}{R} - \frac{l^2B^2\,\mathrm{v}}{R} = 0 \text{ и}$$

$$\mathrm{v} = \frac{mgR - \mathscr{E}lB}{l^2B^2}. \tag{7}$$

Объединяя выражения (6) и (7), получим $\mathrm{v} = \pm\frac{\mathscr{E}lB - mgR}{l^2B^2}$.

**Ответ:** $\mathrm{v} = \pm\frac{\mathscr{E}lB - mgR}{l^2B^2}$.

**Задача 57.** Соленоид длиной $l = 50$ см и площадью поперечного сечения $S = 2$ см$^2$ имеет индуктивность $L = 0{,}2$ мкГн. При каком токе $I$ объемная плотность энергии магнитного поля внутри соленоида $\omega = 1\,\frac{\text{мДж}}{\text{м}^3}$?

**Дано:**

$l = 0{,}5$ м

$S = 2 \cdot 10^{-4}$ м$^2$

$L = 2 \cdot 10^{-7}$ Гн

$\omega = 10^{-3}\,\frac{\text{Дж}}{\text{м}^3}$

$I = ?$

**Решение.** Объемная плотность энергии магнитного поля согласно уравнению (3.161) равна

$$\omega = \frac{B^2}{2\mu\mu_0}. \tag{1}$$

Индукция магнитного поля $B$ длинного соленоида определяется по формуле (3.157):

$$B = \frac{\mu\mu_0 IN}{l} \tag{2}$$

Число витков $N$ можно найти из выражения для индуктивности длинного соленоида (3.158): $L = \frac{\mu\mu_0 N^2 S}{l}$, т. е.

$$N = \sqrt{\frac{Ll}{\mu\mu_0 S}}. \tag{3}$$

Подставляя уравнение (3) в (2), получим

$$B = I\sqrt{\frac{\mu\mu_0 L}{lS}}. \tag{4}$$

Уравнение (1) с учетом выражения (4) примет вид

$$\omega = \frac{I^2 L}{2lS}, \text{ откуда } I = \sqrt{\frac{2lS\omega}{L}};\ I = 1\text{ А}.$$

**Ответ:** $I = 1$ А.

# Глава 18

# ОСНОВЫ ТЕОРИИ МАКСВЕЛЛА ДЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Обобщив экспериментальные данные по исследованию электрических и магнитных явлений, Максвелл создал теорию электромагнитного поля.

В основе теории Максвелла лежат два положения:

1) переменное магнитное поле порождает переменное электрическое поле (открытие, сделанное Фарадеем в 1831 г.);

2) переменное электрическое поле порождает вихревое магнитное поле (открытие, сделанное Максвеллом).

## § 107. Вихревое электрическое поле. Первое уравнение Максвелла

Если неподвижный проводящий контур поместить в переменное магнитное поле, то согласно закону Фарадея в нем наводится ЭДС индукции

$$\mathscr{E} = -\frac{d\Phi}{dt}. \tag{3.162}$$

По определению магнитный поток

$$d\Phi = BdS\cos\alpha = B_n dS, \tag{3.163}$$

где $B_n = B\cos\alpha$ — проекция вектора $\vec{B}$ на нормаль к контуру; $B$ — индукция магнитного поля, пронизывающего элемент контура площадью $dS$; $\alpha$ — угол между нормалью к контуру и вектором $\vec{B}$.

Выразим из уравнения (3.163) магнитный поток:

$$\Phi = \int_S B_n dS$$

и подставим его значение в закон Фарадея (3.162):

$$\mathscr{E} = -\frac{d}{dt}\left(\int_S B_n dS\right) = -\int_S \left(\frac{\partial B}{\partial t}\right)_n dS. \tag{3.164}$$

В уравнении (3.164) под знаком интеграла записана частная производная по времени, так как магнитная индукция $\vec{B}$ зависит не только от времени, но и от координат пространства.

С другой стороны, как отмечалось в § 80, ЭДС равна циркуляции вектора напряженности по данному контуру:

$$\mathscr{E} = \oint_l E_{Bl} dl, \tag{3.165}$$

где $E_{Bl}$ — проекция вектора напряженности электрического поля, порожденного переменным магнитным полем, на направление $dl$.

Максвелл предположил, что под действием переменного магнитного поля ЭДС индукции наводится в любой точке пространства независимо от того, имеется в этой точке проводящий контур или нет.

В самом общем случае в рассматриваемой точке пространства может находиться еще и неподвижный электрический заряд. Тогда по принципу суперпозиции суммарный вектор напряженности электрического поля

$$\vec{E} = \vec{E}_B + \vec{E}_q ,$$

где $\vec{E}_q$ — напряженность электрического поля неподвижного заряда.

Циркуляция вектора напряженности $\vec{E}$ по данному контуру равна

$$\oint_l E_l dl = \oint_l E_{Bl} dl + \oint_l E_{ql} dl = \oint_l E_{Bl} dl . \qquad (3.166)$$

Интеграл $\oint_l E_{ql} dl = 0$, так как поле неподвижного электрического заряда потенциально.

Согласно уравнениям (3.165) и (3.166)

$$\mathscr{E} = \oint_l E_l dl. \qquad (3.167)$$

Уравнение (3.167) показывает, что циркуляция вектора напряженности наведенного электрического поля по замкнутому контуру не равна нулю. Такое поле является *вихревым*, т. е. оно не имеет истоков и стоков, на которых бы начинались или заканчивались линии напряженности поля.

Подставив выражение (3.167) в (3.164), получим первое уравнение Максвелла в интегральной форме:

$$\oint_l E_l dl = -\int_S \left(\frac{\partial B}{\partial t}\right)_n dS . \qquad (3.168)$$

Итак, под воздействием переменного магнитного поля в любой точке пространства наводится вихревое электрическое поле. *Циркуляция вектора напряженности электрического поля по произвольному замкнутому контору пропорциональна скорости приращения магнитного потока сквозь поверхность, ограниченную данным контуром.*

## § 108. Токи смещения. Второе уравнение Максвелла

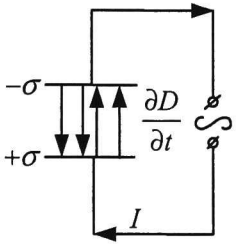


Рис. 125

Рассмотрим электрическую цепь переменного тока, содержащую конденсатор (рис. 125). От источника до пластин конденсатора протекает ток проводимости, плотность которого

$$j = \frac{i}{S} = \frac{dq}{dt \cdot S} = \frac{d}{dt}\left(\frac{q}{S}\right) = \frac{d\sigma}{dt}, \qquad (3.169)$$

где $i$ — сила тока в проводнике; $S$ — площадь; $q$ — заряд пластины; $\sigma$ — поверхностная плотность электрического заряда на пластине конденсатора.

Максвелл предположил, что линии вектора плотности тока проводимости $\vec{j}$, текущего по проводнику, между пластинами конденсатора переходят в линии вектора тока смещения $\vec{j}_{см}$, т. е.

$$\vec{j} = \vec{j}_{см}. \tag{3.170}$$

Так как напряженность электрического поля конденсатора

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0},$$

а модуль электрического смещения

$$D = \varepsilon\varepsilon_0 E,$$

то $D = \sigma$, и согласно уравнениям (3.169) и (3.170) можно записать

$$j_{см} = \frac{\partial\sigma}{\partial t} = \frac{\partial D}{\partial t}. \tag{3.171}$$

Уравнение (3.171) показывает, что вектор плотности тока смещения равен скорости изменения электрического смещения.

Полный ток в цепи $I$, равный сумме тока приводимости и тока смещения, можно представить в виде

$$I = \int_S \left(\vec{j}\right)_n dS + \int_S \left(\vec{j}_{см}\right)_n dS = \int_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)_n dS. \tag{3.172}$$

По закону полного тока (3.151) запишем

$$\oint_l H_l dl = \int_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)_n dS, \tag{3.173}$$

где $H$ — напряженность магнитного поля.

Уравнение (3.173) является вторым уравнением Максвелла в интегральной форме. Согласно (3.173) переменное электрическое поле порождает магнитное поле. *Циркуляция вектора напряженности магнитного поля по замкнутому контуру равна алгебраической сумме тока проводимости и тока смещения.*

## § 109. Полная система уравнений Максвелла

Уравнение (3.168) и теорема Гаусса для вектора магнитной индукции $\vec{B}$ образуют первую пару уравнений Максвелла:

$$\oint_l E_l dl = -\int_S \left(\frac{\partial B}{\partial t}\right)_n dS,$$

$$\oint_S B_n dS = 0. \tag{3.174}$$

Первое уравнение является выражением закона электромагнитной индукции, а второе уравнение указывает на отсутствие магнитных зарядов.

Уравнение (3.173) и теорема Гаусса для вектора электрического смещения $\vec{D}$ образуют вторую пару уравнений Максвелла:

$$\oint_l H_l dl = \int_S \left( \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right)_n dS ,$$

$$\oint_S D_n dS = \int_V \rho dV , \qquad (3.175)$$

где $\rho = \dfrac{dq}{dV}$ — объемная плотность сторонних электрических зарядов.

Первое уравнение устанавливает связь между полным током и порождаемым им магнитным полем, а второе уравнение показывает, что сторонние заряды плотностью ρ являются источниками вектора $\vec{D}$.

Приведенная система четырех уравнений Максвелла дополняется соотношениями, характеризующими свойства среды. Для изотропных, неферромагнитных и несегнетоэлектрических сред такими уравнениями являются выражения, устанавливающие связь между векторами $\vec{D}$ и $\vec{E}$, $\vec{B}$ и $\vec{H}$, $\vec{j}$ и $\vec{E}$:

$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E} , \quad \vec{B} = \mu\mu_o \vec{H} , \quad \vec{j} = \gamma \vec{E} ,$$

где $\varepsilon$, $\mu$ и $\gamma$— постоянные, характеризующие электрические свойства среды: $\varepsilon$ — диэлектрическая проницаемость, $\mu$ — магнитная проницаемость, $\gamma$— удельная проводимость.

С помощью теорем Стокса и Гаусса, известных из векторного анализа, интегральные уравнения Максвелла можно записать в дифференциальной форме:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} , \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0 ;$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} , \quad \operatorname{div} \vec{D} = \rho ; \qquad (3.176)$$

где

$$\operatorname{rot} \vec{E} = \vec{i} \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) + \vec{j} \left( \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) + \vec{k} \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right),$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} .$$

Из уравнений Максвелла следует, что электрические и магнитные поля являются проявлением *единого электромагнитного поля*.

Теория Максвелла предсказала: образование электромагнитных волн при ускоренном движении электрических зарядов; электромагнитные волны распространяются в пространстве со скоростью света.

Уравнения Максвелла выражают основные законы электромагнетизма. Они также фундаментальны, как законы Ньютона в механике.

# Глава 19

# ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

## § 110. Свободные электромагнитные колебания в контуре

*Электромагнитные колебания* — это повторяющиеся во времени изменения зарядов, токов и напряжений, энергии и напряженности электрического и магнитного полей.

Простейшая схема (колебательный контур), в котором могут происходить свободные электромагнитные колебания, состоит из конденсатора электроемкостью $C$ и катушки индуктивности $L$, присоединенной к его обкладкам (рис. 126).

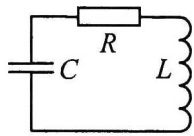


Рис. 126

Рассмотрим идеальный колебательный контур, активным сопротивлением $R$ которого будем пренебрегать. Пусть конденсатору был сообщен электрический заряд $q_0$, на его обкладках появляется напряжение $U_0$. При этом

$$q_0 = CU_0, \tag{3.177}$$

где $q_0$ и $U_0$ — амплитудные (максимальные) значения заряда и напряжения.

Полная энергия системы $W$ равна энергии электрического поля конденсатора:

$$W = W_{эл} = \frac{CU_0^2}{2} = \frac{q_0^2}{2C}. \tag{3.178}$$

Так как обкладки конденсатора замкнуты на катушку, конденсатор начинает разряжаться, его электрическое поле — уменьшается, в контуре возникает электрический ток. Вследствие явления самоиндукции разряд конденсатора происходит постепенно, и ток в катушке достигнет максимального значения $I_0$ через четверть периода $T$. При этом заряд конденсатора станет равным нулю, а энергия системы будет равна энергии магнитного поля катушки

$$W = W_{маг} = \frac{LI_0^2}{2}. \tag{3.179}$$

К моменту полного разряда конденсатора разность потенциалов на его обкладках становится равной нулю, ток в цепи прекратится. Однако возникающая электродвижущая сила самоиндукции будет поддерживать убывающий ток, что приведет к перезарядке конденсатора. Постепенно ток в цепи уменьшается до нуля и, таким образом, через промежуток времени $t = T/2$ энергия системы окажется снова сосредоточена в конденса-

торе, т. е. энергия магнитного поля катушки превращается в энергию электрического поля конденсатора. Затем конденсатор вновь начинает разряжаться, только ток через катушку потечет в обратном направлении. Через промежуток времени $t$, равный периоду $T$, система придет в исходное состояние, и далее процесс будет повторяться.

Периодические изменения заряда и напряжения на обкладках конденсатора, силы тока в катушке без потребления энергии от внешних источников называются *свободными электромагнитными колебаниями*. В процессе таких колебаний происходит периодически повторяющийся обмен энергией между конденсатором и катушкой индуктивности.

Полная энергия $W$ контура в любой момент времени равна сумме энергий магнитного и электрического полей контура:

$$W = \frac{Li^2}{2} + \frac{q^2}{2C}, \tag{3.180}$$

где $i$ и $q$ — мгновенные значения тока и заряда в контуре. Эта энергия не меняется с течением времени, если активное сопротивление $R$ контура равно нулю.

## § 111. Собственная частота колебаний в контуре. Формула Томсона

Напряжение на обкладках конденсатора в любой момент времени равно электродвижущей силе самоиндукции:

$$\frac{q}{C} = -L\frac{di}{dt} = -L\frac{d^2q}{dt^2}. \tag{3.181}$$

Из выражения (3.181) получим основное уравнение свободных электромагнитных колебаний в контуре:

$$\frac{d^2q}{dt^2} = -\frac{q}{LC}. \tag{3.182}$$

Уравнение (3.182) можно записать в виде

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0, \tag{3.183}$$

где $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ — *циклическая частота* свободных электромагнитных колебаний.

*Периодом колебаний* называют минимальный промежуток времени $T$, через который весь процесс в контуре повторяется, т. е. заряд или ток в контуре совершает полное колебание.

Поскольку период колебаний связан с циклической частотой формулой (1.123)

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0},$$

то для периода свободных электромагнитных колебаний, используя выражение $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, получим формулу Томсона[1]:

$$T = 2\pi\sqrt{LC}. \qquad (3.184)$$

Из решения уравнения (3.183) можно получить выражения, описывающие изменения заряда $q$, напряжения $U$ и тока $I$ в контуре со временем:

$$q = q_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \qquad (3.185)$$

$$U = \frac{q_0}{C} = U_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \qquad (3.186)$$

$$i = \frac{dq}{dt} = -q_0\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = -I_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0), \qquad (3.187)$$

где $I_0 = q_0\omega_0$, $U_0 = \frac{q_0}{C}$ — амплитудные значения силы тока и напряжения соответственно.

Из выражений (3.185)–(3.186) следует, что колебания заряда и напряжения сдвинуты по фазе на $\pi/2$ в сравнении с колебаниями тока. Ток имеет максимальное значение в момент времени, когда заряд и напряжение на обкладках конденсатора равны нулю.

## § 112. Затухающие электромагнитные колебания

Реальный колебательный контур имеет активное сопротивление $R$, при прохождении тока часть энергии, запасенной в контуре, превращается в теплоту и колебания затухают. В этом случае уравнение (3.181) примет вид

$$\frac{q}{C} + iR + L\frac{di}{dt} = 0 \qquad (3.188)$$

или

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = 0. \qquad (3.189)$$

Если ввести обозначения

$$\frac{1}{LC} = \omega_0^2, \quad \frac{R}{L} = 2\beta,$$

[1] Джозеф Джон Томсон (1856–1940) — английский физик.

то получим дифференциальное уравнение затухающих электромагнитных колебаний:

$$\frac{d^2q}{dt^2}+2\beta\frac{dq}{dt}+\omega_0^2 q=0, \tag{3.190}$$

где $\beta$ — коэффициент затухания.

Решением уравнения (3.190) является уравнение вида

$$q=q_0e^{-\beta t}\cos(\omega t+\varphi). \tag{3.191}$$

Уравнение (3.191) справедливо для случая, когда $\omega_0^2>\beta^2$. Из решения следует, что частота колебаний $\omega=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}$, а амплитуда колебаний $A_t=q_0e^{-\beta t}$ уменьшается со временем по экспоненциальному закону. Затухающие колебания принято характеризовать периодом

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}}=\frac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{1}{LC}-\dfrac{R^2}{4L^2}}}, \tag{3.192}$$

логарифмическим декрементом затухания

$$\delta=\ln\frac{A_t}{A_{(t+T)}}=\ln\frac{q_0e^{-\beta t}}{q_0e^{-\beta(t+T)}}=\beta T \tag{3.193}$$

и *добротностью* контура

$$Q=\frac{\pi}{\delta}=\frac{\pi}{\beta T}=\frac{\omega}{2\beta}. \tag{3.194}$$

## § 113. Вынужденные электромагнитные колебания

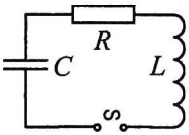


Рис. 127

*Вынужденными* называются колебания в цепи, происходящие под действием внешней электродвижущей силы, изменяющейся с течением времени. Рассмотрим колебательный контур, состоящий из конденсатора емкостью $C$, катушки индуктивности $L$, активного сопротивления $R$, имеющий переменную ЭДС (рис. 127), изменяющуюся по закону:

$$\mathscr{E}=\mathscr{E}_0\cos\omega t, \tag{3.195}$$

где $\omega$ — частота изменения ЭДС в контуре.

Уравнение вынужденных электромагнитных колебаний запишется в виде

$$L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{1}{C}q=\mathscr{E}_0\cos\omega t, \tag{3.196}$$

или, введя обозначения

$$\frac{1}{LC}=\omega_0^2,\quad \frac{R}{L}=2\beta,$$

получим

$$\frac{d^2q}{dt^2}+2\beta\frac{dq}{dt}+\omega_0^2 q=\frac{\mathscr{E}_0}{L}\cos\omega t. \tag{3.197}$$

Уравнение (3.197) аналогично уравнению вынужденных механических колебаний (1.139).

Частное решение данного неоднородного дифференциального уравнения имеет вид

$$q=q_m\cos(\omega t+\varphi), \tag{3.198}$$

где амплитуда заряда на конденсаторе

$$q_m=\frac{\mathscr{E}_0}{L\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\beta^2\omega^2}}, \tag{3.199}$$

а разность фаз $\operatorname{tg}\varphi=\dfrac{-2\beta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}.$

Подставив в уравнение (3.199) значение $\omega_0^2$ и $\beta$, получим

$$q_m=\frac{\mathscr{E}_0}{\omega\sqrt{R^2+\left(\omega L-\dfrac{1}{\omega C}\right)^2}}=\frac{\mathscr{E}_0}{\omega Z}, \tag{3.200}$$

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{R}{\omega L-\dfrac{1}{\omega C}},$$

где $Z=\sqrt{R^2+\left(\omega L-\dfrac{1}{\omega C}\right)^2}$ — полное сопротивление колебательного контура, состоящее из $R$ — активного сопротивления, $\omega L$ — индуктивного сопротивления, $\dfrac{1}{\omega C}$ — емкостного сопротивления.

Найдем из уравнений (3.198) и (3.200) колебания электрического заряда

$$q=\frac{\mathscr{E}_0}{\omega Z}\cos(\omega t+\varphi) \tag{3.201}$$

и напряжения на конденсаторе

$$U_C=\frac{q}{C}=\frac{\mathscr{E}_0}{\omega CZ}\cos(\omega t+\varphi).$$

Дифференцируя по времени уравнение (3.201), определим изменение силы тока в контуре:

$$i = \frac{dq}{dt} = -\frac{\mathscr{E}_0}{Z}\sin(\omega t + \varphi) = \frac{\mathscr{E}_0}{Z}\cos(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}). \qquad (3.202)$$

Из сопоставления уравнений (3.201) и (3.202) видно, что между силой тока $i$ и напряжением $U_C$ возникает сдвиг фаз, равный $\pi/2$.

## § 114. Резонанс в цепи переменного тока

В колебательном контуре, включенном в электрическую цепь переменного тока, возникнут вынужденные колебания, частота которых определяется частотой вынуждающей их переменной ЭДС $\omega$. Амплитуда колебаний силы тока зависит не только от параметров контура, т. е. $R$, $L$, $C$, но и от частоты вынуждающей ЭДС $\omega$.

Если величина полного сопротивления цепи $Z$ имеет наименьшее значение, то амплитуда колебаний силы тока $I_0$ максимальна. При малом активном сопротивлении $R$ это происходит, когда $L\omega - \frac{1}{\omega C} = 0$. Отсюда следует, что циклическая частота колебаний силы тока и вынуждающей ЭДС $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, т. е. совпадает с циклической частотой собственных незатухающих колебаний в контуре.

Явление резкого увеличения амплитуды вынужденных колебаний силы тока в контуре при приближении циклической частоты внешней ЭДС ω к циклической частоте собственных незатухающих колебаний $\omega_0$ называется *резонансом* в цепи переменного тока. Если источник внешней переменной ЭДС подключен к колебательному контору последовательно с его катушкой индуктивности и конденсатором (рис. 65), то при резонансе в данном контуре сдвиг фаз между колебанием внешней ЭДС и силой тока равен нулю. Амплитуды колебаний напряжения на катушке индуктивности и конденсаторе одинаковы: $\omega L I_0 = I_0/(\omega C)$.

При этом падение напряжения на катушке $U_L$ и конденсаторе $U_C$, всегда противоположные по фазе, оказываются равными друг другу, т. е. $U_L + U_C = 0$. Все внешнее напряжение приходится на активное сопротивление, создавая наибольшую силу тока в цепи, сдвиг по фазе не изменится:

$$Z = R, \quad I = U/R, \quad \varphi_C = 0.$$

Резонансные значения $U_L$ и $U_C$ могут значительно превышать приложенное напряжение $U$. Это явление получило название *резонанса на-*

*пряжений*. Если при этом активное сопротивление $R$ мало, то ток в нем достигает больших значений.

График зависимости $I_0$ от $\omega$ показан на рис. 128. Как видно из графика, чем меньше $R$, тем острее максимум резонансной кривой.

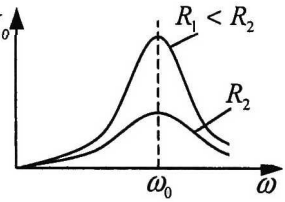


Рис. 128

При параллельном соединении индуктивного и емкостного сопротивлений, если циклическая частота вынуждающей ЭДС приближается к резонансной частоте, возникает резонанс токов, приводящий к резкому уменьшению силы тока во внешней цепи.

Явление электрического резонанса используется в радиотехнике при настройке приемника на частоту передающей радиостанции. При возникновении резонанса в электрической цепи может произойти пробой изолятора, разрушение проводов и т. п. в результате действия больших токов или напряжений.

## § 115. Электромагнитные волны

Если в окружающем пространстве возбудить переменное электрическое поле, то возникнет последовательность взаимных превращений электрического и магнитного полей, распространяемых от одной точки пространства к другой. Этот периодический процесс представляет собой электромагнитную волну. *Электромагнитная волна — это распространяющееся в пространстве переменное электромагнитное поле.* Существование электромагнитных волн вытекает из уравнений Максвелла. Пусть имеется электронейтральная ($\rho = 0$), неэлектропроводная ($j = 0$) среда с постоянными проницаемостями ($\varepsilon = \text{const}$, $\mu = \text{const}$). Запишем систему уравнений Максвелла в дифференциальном виде:

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \qquad \operatorname{rot}\vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t},$$

$$\operatorname{div}\vec{D} = 0, \qquad \operatorname{div}\vec{B} = 0,$$

$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}, \qquad \vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}.$$

Решая данные уравнения, можно получить дифференциальное уравнение электромагнитной волны:

$$\nabla\vec{E} = \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}, \qquad \nabla\vec{H} = \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}, \qquad (3.203)$$

где $\nabla = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа.

Из механики известно (см. § 33), что уравнение вида

$$\nabla s = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$$

называется *волновым уравнением*. Из сравнения уравнения (3.203) с волновым уравнением (1.151) следует, что

$$\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 = \frac{1}{v^2},$$

где v — фазовая скорость волны. Подсчитаем скорость распространения электромагнитной волны в вакууме ($\varepsilon = 1$, $\mu = 1$):

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{8.85\cdot 10^{-12}\,\frac{\Phi}{м}\cdot 4\pi\cdot 10^{-7}\,\frac{Гн}{м}}} = 3\cdot 10^8\,\frac{м}{с} = c,$$

где $c$ — скорость света в вакууме.

Скорость распространения электромагнитной волны в вакууме равна скорости распространения света в вакууме.

Основываясь на вычислениях скорости электромагнитной волны, Максвелл сделал важное открытие: *свет — это электромагнитная волна.* Итак, фазовая скорость электромагнитной волны $v = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$. Следовательно, электромагнитные поля могут существовать в виде электромагнитных волн, распространяющихся со скоростью v.

Абсолютный показатель преломления света

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\varepsilon\mu}\,. \qquad (3.204)$$

Формула (3.204) связывает электрические свойства вещества с его оптическими свойствами.

Решая систему уравнений (3.203), можно получить уравнение плоской электромагнитной волны:

$$\begin{aligned} E &= E_0\cos(\omega t - kx), \\ H &= H_0\cos(\omega t - kx), \end{aligned} \qquad (3.205)$$

где $E_0$ и $H_0$ — амплитуды векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$; $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ — волновое число; $x$ — текущая координата пространства.

Мгновенные значения $\vec{E}$ и $\vec{H}$ связаны соотношением

$$E\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0} = H\sqrt{\mu\mu_0}\,. \qquad (3.206)$$

При распространении электромагнитных волн в каждой точке пространства происходят периодически повторяющиеся изменения электрического и магнитного полей, которые можно представить в виде колеба-

ний векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$. Эти вектора взаимно перпендикулярны и лежат в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны, т. е. перпендикулярно вектору скорости $\vec{\mathrm{v}}$ в рассматриваемой точке поля (рис. 129). Это означает, что электромагнитные волны являются *поперечными волнами.* Векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ в бегущей волне колеблются в одинаковой фазе: они одновременно обращаются в нуль и одновременно достигают максимального значения. *Длина электромагнитной волны* $\lambda$ есть расстояние между двумя ближайшими точками, совершающими колебания в одинаковых фазах, и определяется по формуле

$$\lambda = \mathrm{v}T = \frac{\mathrm{v}}{\nu},$$

где $T$ — период колебаний, а $\nu$ — их частота.

*Фазовой скоростью* электромагнитной волны v называется скорость распространения данной фазы колебаний, например, скорость перемещения максимума напряженности электрического поля $\vec{E}$.

Впервые электромагнитную волну в лабораторных условиях получил Г. Герц[1]. В опытах он применил *вибратор,* состоящий из двух металлических стержней 1 (рис. 130), к которым подводилось переменное напряжение высокой частоты от индуктора 2. В момент образования искры в искровом промежутке вибратора возникали электромагнитные колебания и в окружающее пространство излучались электромагнитные волны.

Аналогичные стержни (резонатор 3) были использованы для приема волн. Экспериментально Герц показал, что электромагнитные волны, подобно свету, отражаются металлическими поверхностями и преломляются на границе раздела двух диэлектрических сред.

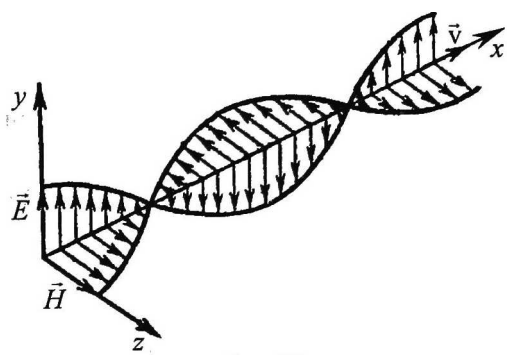



Рис. 129

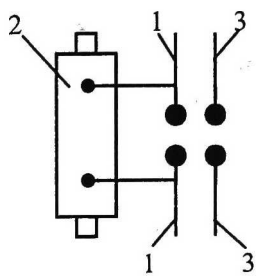



Рис. 130

[1] Генрих Рудольф Герц (1857–1894) — немецкий физик.

При наложении электромагнитных волн двух когерентных источников наблюдается явление интерференции, при прохождении их через малые отверстия или щели — явление дифракции.

С помощью металлического зеркала Герц получил стоячую волну, что позволило рассчитать скорость электромагнитных волн. Она оказалась равной скорости света.

Распространение электромагнитных волн связано с переносом энергии электромагнитного поля, что позволяет осуществлять радиосвязь.

## § 116. Энергия электромагнитных волн

Энергия электромагнитной волны заключена в распространяющихся в пространстве электрическом и магнитном полях. Объемная плотность энергии электромагнитных волн равна

$$\omega = \omega_э + \omega_м = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu\mu_0 H^2}{2},$$

где $\omega_э$, $\omega_м$ — объемная плотность энергии электрического и магнитного полей соответственно.

Поскольку $\omega_э = \omega_м$, то

$$\omega = 2\omega_э = \varepsilon\varepsilon_0 E^2. \qquad (3.207)$$

Согласно выражению (3.206) $E\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0} = H\sqrt{\mu\mu_0}$ и уравнение (3.207) примет вид

$$\omega = \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}\,EH = \frac{1}{\mathrm{v}}EH,$$

отсюда $EH = \omega\mathrm{v}$. Здесь v — фазовая скорость распространения волны.

Обозначив произведение $\omega\mathrm{v} = S$, получим

$$S = EH, \qquad (3.208)$$

где $S$ — модуль вектора плотности потока энергии.

Так как векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ взаимно перпендикулярны, то уравнение (3.208) можно записать в виде векторного произведения:

$$\vec{S} = \left[\vec{E}\vec{H}\right]. \qquad (3.209)$$

Полученное выражение (3.209) называется уравнением Умова–Пойнтинга[1], а вектор $\vec{S}$ — вектором Умова–Пойнтинга. Вектор $\vec{S}$ совпадает по направлению со скоростью $\vec{\mathrm{v}}$ распространения волны и модуль его равен энергии, переносимой волной через единичную площадку, перпендикулярную вектору $\vec{\mathrm{v}}$, в единицу времени. Единицей измерения вектора плотности энергии является ватт на метр в квадрате ($\text{Вт/м}^2$).

[1] Джон Генри Пойнтинг (1852–1914) — английский физик.

## § 117. Шкала электромагнитных волн

В зависимости от длины волны $\lambda$ (или частоты $\nu$) электромагнитные волны подразделяют на несколько видов: радиоволны, оптическое излучение, рентгеновское излучение и $\gamma$ — излучение.

Электромагнитные волны, имеющие длину волны от нескольких километров до $10^{-3}$ метра, относятся к диапазону *радиоволн*. С их помощью осуществляется радиосвязь, радиолокация и телевидение. *Инфракрасное излучение* с длиной волны примерно от 0,1 мм до 800 нм лежит в диапазоне между радиоволнами и видимым светом. Очень узкий участок шкалы с длиной волны примерно от 800 нм до 400 нм занимает *видимый свет*, включающий область от красного до фиолетового излучения. *Ультрафиолетовое излучение* имеет длину волны примерно от 400 до 1 нм. Еще более короткие длины волн присущи *рентгеновским лучам*, лежащим в диапазоне примерно от 1 до 0,001 нм. Электромагнитное излучение, испускаемое атомными ядрами и возникающее в результате взаимодействий элементарных частиц, называют *$\gamma$-излучением*. Оно имеет длину волны $\lambda \leq 10^{-13}$ м.

## ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

**Задача 58**. Колебательный контур состоит из конденсатора электроемкостью $C = 405$ нФ, катушки с индуктивностью $L = 10$ мГн и сопротивлением $R = 2$ Ом. Во сколько раз уменьшится напряжение на обкладках конденсатора за время, равное двум периодам колебаний?

**Дано:**
$C = 405 \cdot 10^{-9}$ Ф
$L = 10^{-2}$ Гн
$R = 2$ Ом
$t = 2T$
$I = ?$

**Решение.** Коэффициент затухания $\beta = \dfrac{R}{2L}$.

Подставив числовые значения, получим

$$\beta = \frac{2 \text{ Ом}}{2 \cdot 10^{-2} \text{ Гн}} = 100.$$

Период незатухающих колебаний в контуре равен $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$; $T_0 = 0{,}004$ с.

Так как затухание за один период колебаний мало, то период затухающих колебаний приблизительно равен периоду незатухающих колебаний. Тогда за два периода амплитуда колебаний уменьшится в $k$ раз:

$$k = \frac{U(t)}{U(t+T)} = e^{\beta 2T}; \; k = 2{,}2 \text{ раза}.$$

**Ответ:** $k = 2{,}2$.

**Задача 59**. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью $C = 7$ мкФ и катушки с индуктивностью $L = 0{,}23$ Гн и сопротивлением $R = 40$ Ом. Найти логарифмический декремент затухания.

**Дано:**
$C = 7 \cdot 10^{-6}$ Ф
$L = 0{,}23$ Гн
$R = 40$ Ом
$\delta = ?$

**Решение.** Логарифмический декремент затухания

$$\delta = \beta T. \qquad (1)$$

Коэффициент затухания

$$\beta = \frac{R}{2L}. \qquad (2)$$

Период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \qquad (3)$$

где

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}, \qquad (4)$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \qquad (5)$$

Подставим уравнения (5) и (2) в (4):

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}. \qquad (6)$$

Подставив выражения (2)–(6) в (1), получим: $\delta = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{4L}{CR^2 - 1}}}$.

**Ответ:** $\delta = 0,7$.

**Задача 60**. В однородной изотропной среде с $\varepsilon = 2$, $\mu = 1$ распространяется плоская электромагнитная волна. Найти фазовую скорость волны и амплитудное значение напряженности магнитного поля волны, если амплитуда напряженности электрического поля волны $E_0 = 24$ В/м.

**Дано:**
$\varepsilon = 2$
$\mu = 1$
$E_0 = 24$ В/м
---
$\mathrm{v} = ?$ $H_0 = ?$

**Решение.** Фазовая скорость распространения волны

$$\mathrm{v} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}. \qquad (1)$$

Связь между мгновенными значениями $E$ и $H$ в бегущей волне устанавливается соотношением (3.206):

$$\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon}E = \sqrt{\mu_0\mu}H. \qquad (2)$$

Используя формулу (2), для амплитудных значений $E_0$ и $H_0$ запишем:

$$\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon}E_0 = \sqrt{\mu_0\mu}H_0, \text{ отсюда } H_0 = \frac{\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon}}{\sqrt{\mu_0\mu}}E_0. \qquad (3)$$

Вычисляя по формулам (1) и (3), получим

$$\mathrm{v} = \frac{3\cdot 10^8}{\sqrt{2\cdot 1}} \text{ м/с} = 2,12\cdot 10^8 \text{ м/с};$$

$$H_0 = \frac{\sqrt{8,85\cdot 10^{-12}\cdot 2}}{\sqrt{4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 1}}\cdot 24 \text{ А/м} = 90\cdot 10^{-3} \text{ А/м}.$$

**Ответ:** $\mathrm{v} = 2,12\cdot 10^8$ м/с, $H_0 = 90$ мА/м.

**Задача 61**. Чему равно отношение энергии магнитного поля колебательного контура к энергии его электрического поля в момент времени $t = T/8$.

**Дано:**

$t = \dfrac{T}{8}$

$\dfrac{W_м}{W_э} = ?$

**Решение.** Энергия магнитного и электрического поля определяется по формулам

$$W_м = \frac{LI^2}{2}, \quad (1)$$

$$W_э = \frac{CU^2}{2}. \quad (2)$$

Напряжение в контуре меняется по закону

$$U = U_0 \cos \omega t, \quad (3)$$

а сила тока

$$I = \frac{dq}{dt} = C\frac{dU}{dt}. \quad (4)$$

Подставим уравнение (3) в уравнение (4) и продифференцируем:

$$I = -CU_0 \omega \sin \omega t. \quad (5)$$

Подставив уравнения (3) и (5) в соответствующие формулы энергии (1) и (2), получим

$$W_м = \frac{LC^2U_0^2\omega^2 \sin^2 \omega t}{2}; \; W_э = \frac{CU_0^2 \cos^2 \omega t}{2}.$$

Если $t = \dfrac{T}{8}$, $\sin \omega t = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ и $\cos \omega t = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $LC = \dfrac{T^2}{4\pi^2} = \dfrac{1}{\omega^2}$,

то

$$\frac{W_м}{W_э} = \frac{\sin^2 \omega t}{\cos^2 \omega t} = 1.$$

**Ответ:** $\dfrac{W_м}{W_э} = \dfrac{\sin^2 \omega t}{\cos^2 \omega t} = 1.$

# ЧАСТЬ 4

# ОПТИКА

## Глава 20

## ЭЛЕМЕНТЫ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКИ

### § 118. Законы геометрической оптики

Линии, перпендикулярные волновым поверхностям, вдоль которых распространяется свет, называются *световыми лучами*. При прохождении света в неоднородной среде световые лучи искривляются.

В основу геометрической оптики положен принцип Ферма[1]: *световой луч распространяется по такому пути, на прохождение которого требуется минимальное время.*

Закон прямолинейного распространения света: *свет в оптически однородной среде распространяется прямолинейно*. Это справедливо до тех пор, пока длина световой волны мала по сравнению с размерами препятствий (щелей, отверстий), через которые проходит свет.

Скорость света в вакууме является предельной скоростью распространения каких-либо физических возмущений и входит в формулы многих физических законов. По современным данным, скорость света в вакууме $c = (299792456,2 \pm 1,1)$ *м/с*, $c \approx 3 \cdot 10^8$ *м/с*.

В различных прозрачных средах свет распространяется с разной скоростью. Отношение скоростей распространения света в вакууме $c$ и в среде v называется *абсолютным показателем преломления среды*:

$$n = \frac{c}{\mathrm{v}}. \tag{4.1}$$

Законы отражения: *отраженный луч лежит в одной плоскости с падающим лучом и перпендикуляром, проведенным к границе раздела двух сред в точке падения; угол отражения* $i'$ *равен углу падения* $i$:

$$i' = i. \tag{4.2}$$

Законы преломления: *луч падающий, луч преломленный и перпендикуляр, проведенный к границе раздела в точке падения, лежат в одной плоскости; отношение синуса угла падения к синусу угла преломления есть величина постоянная для данных сред*:

---

[1] Пьер Ферма (1601–1665) — французский математик и физик.

$$\frac{\sin i}{\sin r} = n_{12} = \frac{n_2}{n_1}, \qquad (4.3)$$

где $n_{12}$ — *относительный показатель преломления второй среды относительно первой*; $n_1$ и $n_2$ — абсолютные показатели преломления первой и второй среды соответственно.

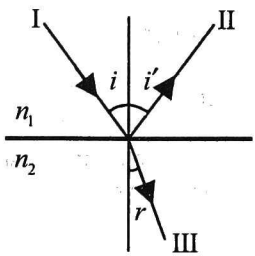


Рис. 131

Если обратить луч III (рис. 131), заставив его падать на границу раздела под углом $r$, то преломленный луч в первой среде будет распространяться под углом $i$, т. е. пойдет в обратном направлении вдоль луча I. В этом заключается свойство *обратимости светового луча*.

Если свет распространяется из среды с большим показателем преломления $n_1$ (оптически более плотной) в среду с меньшим показателем преломления $n_2$ (оптически менее плотной $n_1 > n_2$), например из стекла в воду, то преломленный луч удаляется от нормали и угол преломления $r$ больше, чем угол падения $i$ (рис. 132). С увеличением угла падения увеличивается и угол преломления до тех пор, пока при некотором угле падения ($i = \gamma$) угол преломления не окажется равным 90°. Угол $\gamma$ называется *предельным углом*. При углах $i > \gamma$ весь свет полностью отражается. Это явление называется *полным отражением*. Предельный угол полного отражения определяется по формуле

$$\sin\gamma = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}. \qquad (4.4)$$

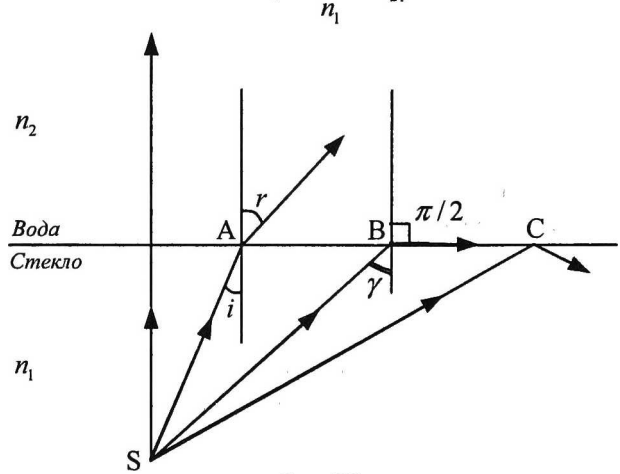


Рис. 132

## § 119. Линзы. Формулы тонкой линзы

*Линзы* представляют собой прозрачные тела, ограниченные двумя поверхностями (одна из них чаще сферическая, а вторая — сферическая или плоская), преломляющими световые лучи.

По оптическим свойствам линзы делятся на *собирающие и рассеивающие*. Линза называется *тонкой*, если ее толщина (расстояние между ограничивающими поверхностями) значительно меньше радиусов поверхностей, ограничивающих линзу. Прямая, проходящая через центры кривизны поверхностей линзы, называется *главной оптической осью. Оптическим центром* линзы называется точка, лежащая на главной оптической оси и обладающая тем свойством, что лучи проходят сквозь нее без преломления. Всякая прямая, проходящая через оптический центр линзы под углом к главной оптической оси, называется *побочной осью*.

Если на линзу направить пучок лучей параллельно главной оптической оси, то они или их продолжения пересекутся в одной точке, расположенной на главной оптической оси линзы. Эта точка называется *главным фокусом линзы*. Расстояние от главного фокуса до оптического центра линзы называется *фокусным расстоянием* линзы. Плоскость, проходящая через фокус линзы, перпендикулярная к ее главной оптической оси, называется *фокальной плоскостью*. *Оптической силой* линзы в воздухе $D$ называется величина, обратная фокусному расстоянию:

$$D = \frac{1}{F}. \qquad (4.5)$$

Оптическая сила измеряется в диоптриях. За одну диоптрию принята оптическая сила такой линзы, фокусное расстояние которой равно одному метру: $1\ \text{дптр} = 1/\text{м}$.

Оптическую силу собирающей линзы считают *положительной*, а рассеивающей — *отрицательной*. Оптическая сила $D$ системы двух линз, составленных вместе, равна алгебраической сумме оптических сил обеих линз:

$$D = D_1 + D_2.$$

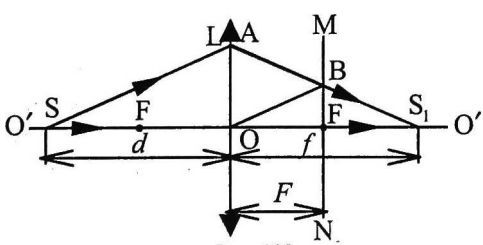


Рис. 133

В среде, оптически более плотной по сравнению с материалом линзы, выпуклые линзы становятся рассеивающими, а вогнутые собирающими.

Рассмотрим изображение светящейся точки S, расположенной на главной оптической оси собирающей линзы (рис. 133). Для этого используем луч SO, падающий на линзу вдоль главной оптической оси и сохраняющий то же направление после прохождения линзы, и произвольный

луч SA, который падает на линзу параллельно побочной оптической оси OB и после преломления в линзе пересекает фокальную плоскость MN в точке B и главную оптическую ось в точке $S_1$.

Точка $S_1$ является изображением светящейся точки S. Введем обозначения: $d$ — расстояние от светящийся точки S до оптического центра O линзы; $f$ — расстояние от изображения $S_1$ до оптического центра O; $F$ — фокусное расстояние линзы.

На рис. 133 треугольники $SAS_1$ и $OBS_1$ подобны, поэтому $\frac{SS_1}{OS_1}=\frac{AS_1}{BS_1}$, или $\frac{d+f}{f}=\frac{AS_1}{BS_1}$. Из подобия треугольников $OAS_1$ и $FBS_1$ имеем $\frac{OS_1}{FS_1}=\frac{AS_1}{BS_1}$, или $\frac{f}{f-F}=\frac{AS_1}{BS_1}$. В этих пропорциях правые части равны, поэтому $\frac{d+f}{f}=\frac{f}{f-F}$.

Отсюда имеем

$$fF+Fd=fd\,.$$

Разделив это уравнение на $fdF$, получим формулу тонкой линзы:

$$\frac{1}{F}=\frac{1}{d}+\frac{1}{f},\ \text{или}\ D=\frac{1}{d}+\frac{1}{f}. \tag{4.6}$$

При использовании формулы (4.6) необходимо придерживаться следующего правила знаков. Расстояние предмета от линзы принято считать положительным ($d>0$), если предмет находится слева от линзы, и отрицательным ($d<0$), если предмет расположен справа от линзы. Фокусное расстояние собирающей линзы — положительное ($F>0$), а рассеивающей — отрицательное ($F<0$). Если при этих условиях в результате расчета по формуле (4.6) получается положительное расстояние изображения от линзы ($f>0$), то изображение действительное и расположено с противоположной стороны линзы. Если же расстояние окажется отрицательным, то изображение мнимое и расположено по ту же сторону линзы, что и предмет.

Формулу тонкой линзы можно записать через радиусы кривизны $R_1$ и $R_2$ сферических поверхностей, образующих линзу:

$$D=\frac{1}{F}=\left(\frac{n_л}{n_c}-1\right)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right), \tag{4.7}$$

где $n_л$ — показатель преломления линзы; $n_c$ — показатель преломления среды, в которой находится линза.

## § 120. Построение изображений в линзах

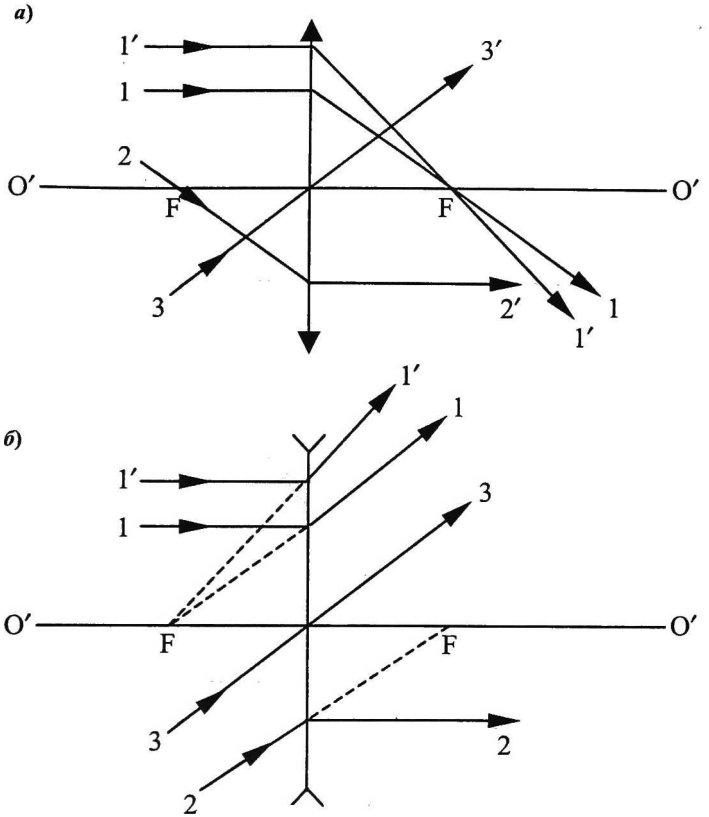



Рис. 134

Для построения изображения светящейся точки в тонкой линзе достаточно построить ход каких-либо двух выходящих из этой точки лучей до падения на линзу и после преломления в ней. Изображение предмета получается как совокупность изображений отдельных его точек. При построении изображений предметов в линзах пользуются лучами, ход которых показан на рис. 134 (*а* — в собирающей линзе; *б* — в рассеивающей):

1 — луч, идущий параллельно главной оптической оси, после преломления в собирающей линзе проходит через главный задний фокус собирающей линзы, а после преломления в рассеивающей линзе распространяется так, что его продолжение проходит через передний главный фокус линзы;

2 — луч, который проходит через передний главный фокус собирающей линзы, после преломления в ней распространяется параллельно главной оптической оси; если луч 2 падает на рассеивающую линзу так, что

его продолжение проходит через главный задний фокус линзы, то после преломления в рассеивающей линзе он распространяется параллельно главной оптической оси;

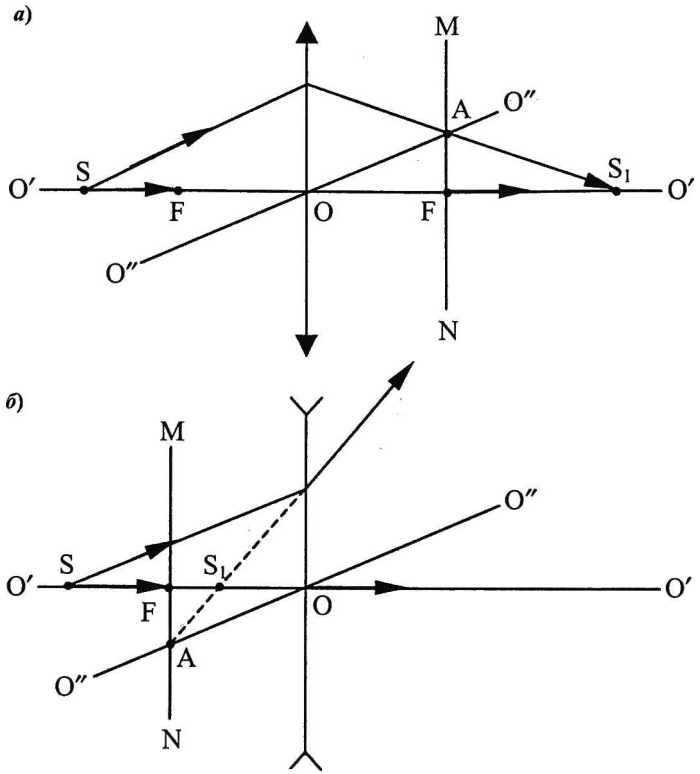



Рис. 135

3 — луч, падающий в оптический центр линзы, после прохождения сквозь линзу не изменяет своего направления.

Можно построить изображение светящейся точки как в собирающей, так и в рассеивающей линзе с помощью побочных оптических осей. Проводится побочная оптическая ось $O''O''$ любого направления (рис. 135). Через светящуюся точку проводится луч, параллельный побочной оси $O''O''$. Преломленный луч или его продолжение пройдет через точку пересечения $A$ побочной оптической оси $O''O''$ с фокальной плоскостью линзы $MN$. Второй луч проводится по главной оптической оси, он пройдет линзу без преломления. Точка пересечения этих двух лучей (или их продолжений) есть изображение $S_1$.

Рассмотрим типичные случаи построения изображений предмета при помощи собирающей линзы. Предмет обозначим стрелкой $AB$, а его изображение $A_1B_1$.

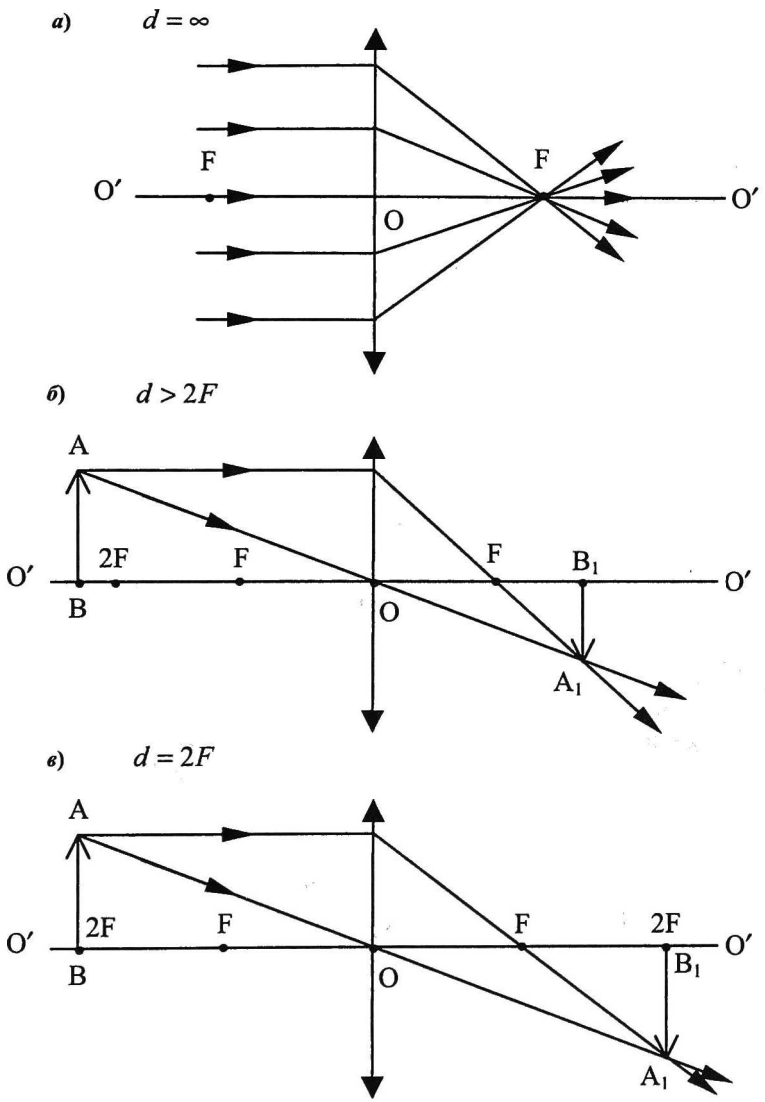



Рис. 136

1 — предмет бесконечно удален от линзы (рис. 136,*а*). От предмета на линзу падает пучок лучей, параллельных главной оптической оси линзы. После преломления лучи пересекаются в фокусе линзы.

2 — предмет расположен за двойным фокусом ( $d > 2F$ ). Полученное изображение (рис. 136,*б*) – действительное, обратное и уменьшенное.

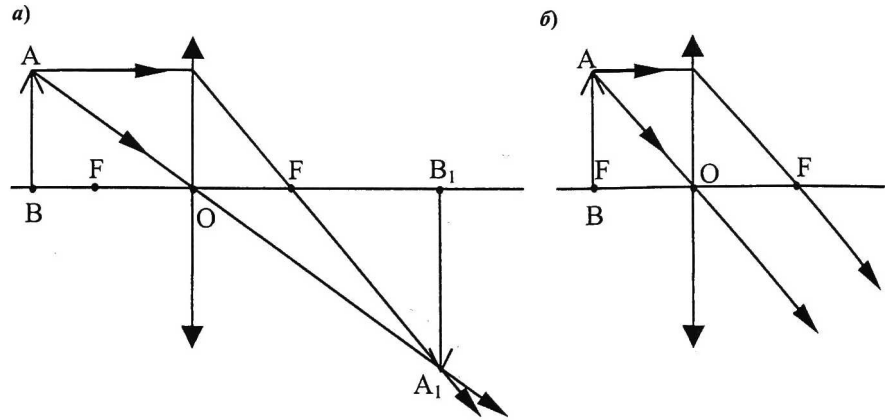



Рис. 137

3 — предмет расположен перед линзой на двойном фокусном расстоянии ( $d = 2F$ ). Изображение (см. рис. 136,*в*) — действительное, обратное, в натуральную величину.

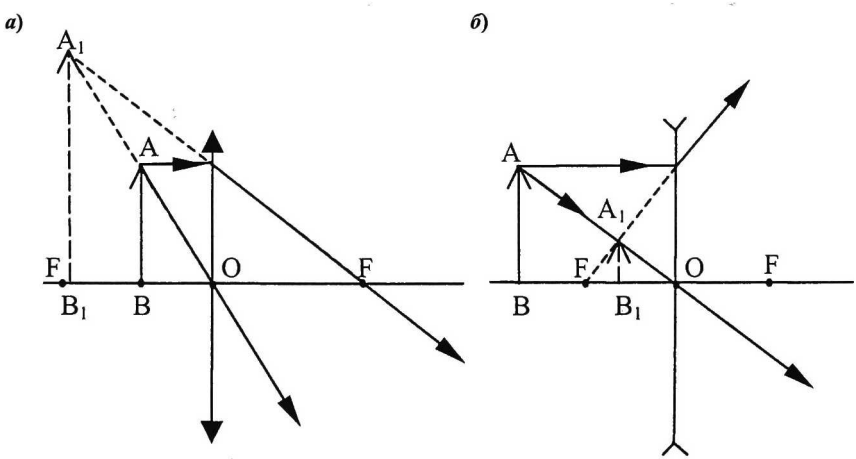



Рис. 138

4 — предмет находится между двойным фокусом и фокусом линзы. Изображение — действительное, обратное, увеличенное (рис. 137,*а*).

5 — предмет располагается в фокальной плоскости линзы. Лучи из линзы выходят параллельными (рис. 137,*б*) друг другу. Изображения не будет.

6 — предмет между фокусом и линзой. Изображение — мнимое, прямое и увеличенное, находится с той же стороны линзы, что и предмет (рис.138,*а*).

Построение изображения в рассеивающей линзе дано на рис. 138,*б*. Рассеивающая линза всегда дает мнимое, уменьшенное и прямое изображение предмета, расположенное между линзой и ее главным фокусом с той же стороны, что и предмет.

Отношение линейных размеров изображения предмета $h_1$ в линзе к линейным размерам предмета $h$ называется линейным увеличением линзы:

$$\Gamma = \frac{h_1}{h} = \frac{f}{d}.$$

Собирающая линза дает увеличенное изображение только тогда, когда расстояние от линзы до изображения больше расстояния от линзы до предмета. Рассеивающая линза дает только уменьшенное изображение предмета.

Увеличение в линзе считается положительным, когда $h$ и $h_1$ находятся на одной стороне главной оптической оси линзы (изображение прямое, мнимое), и отрицательным, когда $h$ и $h_1$ находятся по разные стороны от главной оптической оси линзы (изображение перевернутое, действительное).

## ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

**Задача 62.** Человек рассматривает светящуюся точку $S$ через плоскопараллельную стеклянную пластину толщиной $d = 3$ см так, что луч зрения нормален к пластинке. Найти расстояние между точкой $S$ и ее изображением $S'$.

**Дано:**
$d = 3 \cdot 10^{-2}$ м
$n = 1{,}5$
$SS' = ?$

**Решение.** В глаз человека попадают лучи, которые образуют между собой малые углы $i$. Продолжим эти лучи до их пересечения в точке $S'$, которая является изображением светящейся точки $S$. Рассмотрим два луча, которые выходят из точки $S$ и попадают в глаз человека $SD$ и $SB$. Луч $SD$ падает на пластинку нормально, а луч $SB$, дважды преломившись, выйдет из пластинки параллельно отрезку $SO$. Проведем отрезок $OA$ параллельно лучу $SD$. Из параллелограмма $SS'CO$

$$SS' = OC = d - h. \qquad (1)$$

Отрезок $h = AC$ выразим через величины $d$ и $n$. Заметим, что если бы в точке $O$ находился источник света, то его изображением явилась бы точка $C$.

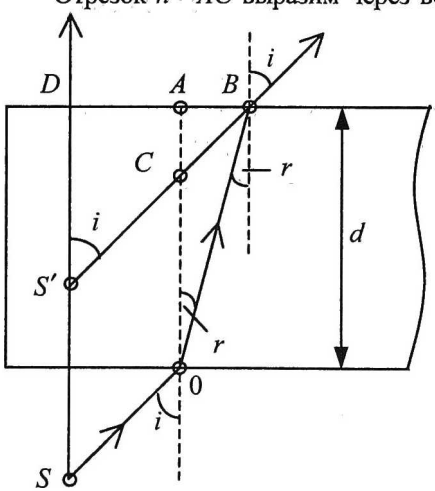


Рис. к задаче 62

Из треугольников $OAB$ и $CAB$ имеем

$$\frac{h}{d} = \frac{\operatorname{tg} r}{\operatorname{tg} i}. \qquad (2)$$

В силу малости углов $i$ и $r$ отношение

$$\frac{\operatorname{tg} r}{\operatorname{tg} i} \approx \frac{\sin r}{\sin i}. \qquad (3)$$

Воспользуемся законом преломления (4.3):

$$\frac{\sin r}{\sin i} = \frac{1}{n}, \qquad (4)$$

так как показатель преломления воздуха примем равным 1.

Тогда из уравнений (2)–(4) получим

$$\frac{h}{d} = \frac{1}{n} \text{ и } h = \frac{d}{n}. \qquad (5)$$

Подставив выражение (5) в (1), найдем искомую величину:

$$SS' = \frac{(n-1)d}{n}.$$

**Ответ:** $SS' = 10^{-2}$ м.

**Задача 63.** Стеклянная треугольная призма имеет показатель преломления $n = 1,6$ и преломляющий угол $\varphi = 45°$. Каким должен быть наибольший угол падения луча на боковую грань призмы, чтобы при выходе его из призмы наблюдалось полное отражение?

**Дано:**
$n = 1,6$
$\varphi = 45°$
$i = ?$

**Решение.** Полное отражение наступит тогда, когда луч будет падать на грань $AC$ (см. рисунок к задаче) под углом, который равен или больше предельного угла полного отражения. Предельный угол полного отражения определяется из закона преломления (4.3):

$$\frac{\sin i_0}{\sin(\pi/2)} = \frac{1}{n}, \text{ откуда}$$

$$i_0 = 38°40'$$

Из $\Delta MNO$, зная угол $i_0$, найдем угол $r$:

$$r + i_0 = \varphi = 45°, \quad r = 6°20'.$$

Так как $\frac{\sin i}{\sin r} = n$, то $\sin i = n \sin r$ и угол $i = \arcsin(n \sin r)$, $i = 10°$.

**Ответ:** $i = 10°$.

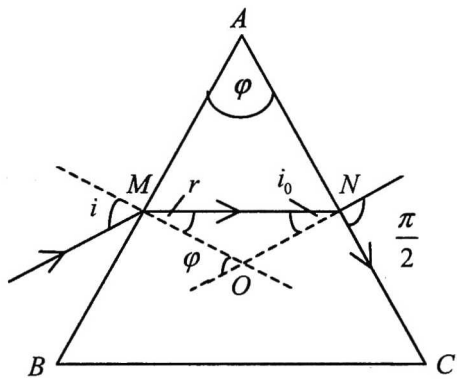


Рис. к задаче 63

**Задача 64.** Фокусное расстояние линзы в воздухе $F_1 = 0,5$ м. Найти фокусное расстояние линзы $F_2$, погруженной в воду, если показатель преломления стекла, из которого сделана линза, $n = 1,6$.

**Дано:**
$F_1 = 0,5$ м
$n = 1,6$
$n_в = 1,33$
$F_2 = ?$

**Решение.** Используя формулу тонкой линзы (4.7) и принимая $n_c = 1$, найдем выражение для фокусного расстояния линзы в воздухе:

$$F_1 = \frac{R_1 R_2}{(n-1)(R_2 + R_1)}. \qquad (1)$$

Принимая $n_c = n_в$, найдем выражение для фокусного расстояния линзы, погруженной в воду:

$$F_2 = \frac{R_1 R_2}{\left(\frac{n}{n_в} - 1\right)(R_2 + R_1)}. \qquad (2)$$

Разделив уравнение (2) на (1), получим

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{(n-1)}{\left(\frac{n}{n_в} - 1\right)}, \text{ откуда}$$

$$F_2 = \frac{(n-1)}{\left(\frac{n}{n_в} - 1\right)} F_1, \; F_2 = 1{,}5 \text{ м}.$$

**Ответ:** $F_2 = 1{,}5$ м.

# Глава 21
# ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ СВЕТА

## § 121. Уравнение световой волны. Условия интерференционного максимума и минимума

Свет — это электромагнитная волна, длина которой лежит в диапазоне от 10 нм до 1 мм. Из теории Максвелла для плоской монохроматической волны были получены уравнения

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kx),$$
$$\vec{H} = \vec{H}_0 \cos(\omega t - kx), \tag{4.8}$$

где $\vec{E}$ — вектор напряженности электрического поля; $\vec{H}$ — вектор напряженности магнитного поля; $\vec{E}_0, \vec{H}_0$ — максимальные (амплитудные) значения векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$; $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ — циклическая чистота; $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ — волновое число; $(\omega t - kx)$ — фаза волны; $T$ — период колебаний; $\lambda$ — длина волны.

Вектор $\vec{E}$ называется *световым вектором*, так как многие из оптических действий (физиологические, фотохимические, фотоэлектрические и другие) вызываются колебаниями данного вектора.

*Интерференция* — это физическое явление наложения когерентных волн, в результате которого происходит усиление колебаний в одних точках пространства и ослабление в других. При интерференции света образуются чередующиеся между собой светлые и темные полосы или кольца. Интерферировать могут только волны, имеющие одинаковые частоты, постоянные во времени разности фаз и одинаковые ориентации в пространстве векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$. Такие волны называются *когерентными*.

Волна, у которой амплитуда, частота и начальная фаза остаются постоянными неограниченно долго, называется *монохроматической*.

Пусть источники света $S_1$ и $S_2$ (рис. 139) излучают когерентные волны:

$$E_1 = E_{01} \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda} \right) = E_{01} \cos \varphi_1,$$

$$E_2 = E_{02} \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x_2}{\lambda} \right) = E_{02} \cos \varphi_2.$$

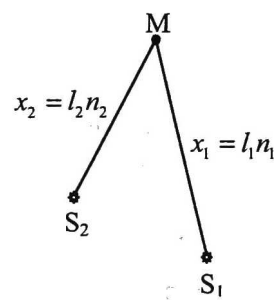


Рис. 139

В точке M происходит наложение двух волн и наблюдается явление интерференции. Применив принцип суперпозиции, найдем амплитуду результирующих колебаний:

$$E_0^2 = E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2E_{01}E_{02}\cos\Delta\varphi = \\ = E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2E_{01}E_{02}\cos\left(2\pi\cdot\frac{l_1n_1 - l_2n_2}{\lambda}\right), \quad (4.9)$$

где $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ — разность фаз слагаемых волн; $l_1$ и $l_2$ — расстояния от источника света $S_1$ и $S_2$ до точки $M$; $n_1$ и $n_2$ — показатели преломления сред, в которых распространяются волны; $nl$ — оптическая длина пути.

Амплитуда результирующего вектора $E_0$ максимальна, если $\cos\Delta\varphi = 1$, т. е. когда разность фаз

$$\Delta\varphi = \pm 2\pi\frac{l_1n_1 - l_2n_2}{\lambda} = \pm 2k\pi, \quad (4.10)$$

где $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ — порядок интерференционного максимума.

Из выражения (4.10) имеем

$$\delta = \pm(l_1n_1 - l_2n_2) = \pm k\lambda = \pm 2k\frac{\lambda}{2},$$

где $\delta$ — оптическая разность хода волн.

*Если оптическая разность хода двух волн равна целому числу длин волн или четном числу полуволн, то в точке М наблюдается усиление колебаний (условие максимума при интерференции).*

Амплитуда результирующего вектора $E_0$ минимальна, если $\cos\Delta\varphi = -1$, т. е. когда разность фаз в уравнении (4.9)

$$\Delta\varphi = \pm 2\pi\frac{l_1n_1 - l_2n_2}{\lambda} = \pm(2k+1)\pi,$$

или

$$\delta = \pm(l_1n_1 - l_2n_2) = \pm(2k+1)\frac{\lambda}{2},$$

где $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ — порядок интерференционного минимума.

*Если оптическая разность хода двух волн равна нечетному числу полуволн, то в точке М наблюдается ослабление колебаний (условие минимума при интерференции).*

Интенсивность света $I \sim E_0^2$, из уравнения (4.9) получим

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1I_2}\cos\Delta\varphi.$$

Допустим, что интенсивности интерферирующих волн одинаковы: $I_1 = I_2$. Если $\cos\Delta\varphi = 1$,то

$$I = I_1 + I_1 + 2\sqrt{I_1^2} = 4I_1,$$

т. е. в интерференционных максимумах интенсивность света возрастает в четыре раза.

Если $\cos\Delta\varphi = -1$, то $I = 0$, происходит полное гашение света светом.

## § 122. Расчет интерференционной картины от двух когерентных источников

Источники монохроматического света $S_1$ и $S_2$ находятся в одинаковой среде с показателем преломления $n=1$ на расстоянии $d$ друг от друга (рис. 140) и на расстоянии $l$ от экрана Э. Пусть расстояние $l >> d$. Выделим на экране произвольную точку М, положение которой определяется координатой $x$. Начало отсчета координаты, точка О, равноудалена от $S_1$ и $S_2$, а точка М отстоит от источника света $S_1$ на расстояние $l_1$, а от $S_2$ — на расстояние $l_2$. Найдем условия, при котором в точке М наблюдается максимум или минимум интенсивности света $I$. Из треугольников $AS_1M$ и $BS_2M$ запишем:

$$l_1^2 = l^2 + \left(x - \frac{d}{2}\right)^2,$$

$$l_2^2 = l^2 + \left(x + \frac{d}{2}\right)^2.$$

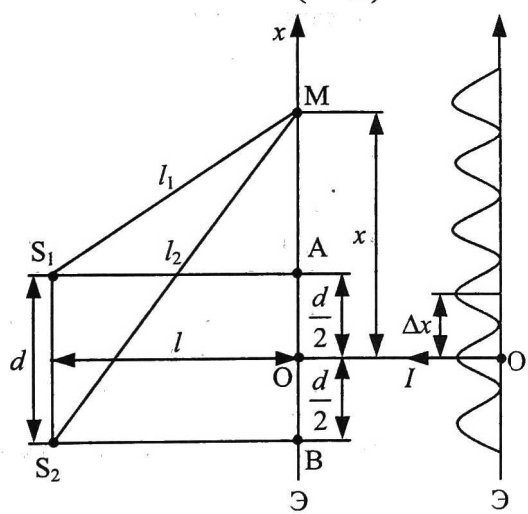



Рис. 140

Вычитая первое уравнение из второго, получим

$$l_2^2 - l_1^2 = \left(x + \frac{d}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{d}{2}\right)^2 = 2xd \quad \text{или}$$

$$(l_2 - l_1)(l_1 + l_2) = 2xd.$$

При $d \ll l$ сумма $l_1 + l_2 \approx 2l$, тогда $(l_2 - l_1)2l = 2xd$, откуда оптическая разность хода волн

$$\delta = l_2 - l_1 = x\frac{d}{l}.$$

Если для точки М $\delta = \pm k\lambda$, то в этой точке наблюдается усиление интенсивности света. Найдем координату $x_k$, удовлетворяющую этому условию:

$$\pm k\lambda = x_k \frac{d}{l}, \quad x_k = \pm k\frac{\lambda l}{d},$$

где $k = 0, 1, 2, 3, ...$

Ширина интерференционной полосы

$$\Delta x = x_k - x_{(k+1)} = \lambda\frac{l}{d}. \qquad (4.11)$$

На экране образуются ряд чередующиеся светлых и темных интерференционных полос, ширина которых $\Delta x$ увеличивается с уменьшением расстояния $d$.

В точке О всегда наблюдается максимум интенсивности, т. к. разность хода волн равна нулю ($S_1O = S_2O$). При наблюдении в белом свете полосы цветные, кроме точки О, где располагается белая полоса.

## § 123. Методы наблюдения интерференции света

Интерференция света наблюдается только при наложении когерентных волн. Свет, испущенный, например, лампой накаливания, не является монохроматическим, так как он слагается из волн, излучаемых многими атомами раскаленной нити. Время излучения атома около $10^{-8}$ с и при этом образуется синусоидальный цуг волны протяженностью порядка 3 м. Цуги многих атомов, накладываясь друг на друга, образуют световую волну. При наложениях фазовые соотношения между колебаниями многократно изменяются случайным образом, два источника света оказываются не когерентными.

Разработано несколько методов получения когерентных световых волн от обычных источников света. Во всех случаях используется один и тот же принцип: световую волну, излучаемую одним источником, делят на две части, а затем образовавшиеся волны накладывают друг на друга. Рассмотрим некоторые из таких методов.

1. *Щели Юнга.* Яркий свет, пройдя через щель $S$ (рис. 141), вследствие дифракции образует расходящуюся волну, которая падает на щели $S_1$ и $S_2$. Эти щели можно рассматривать как вторичные источники света.

В результате дифракции на щелях $S_1$ и $S_2$ образуются две когерентные волны, которые, накладываясь, дают на экране Э интерференционные полосы. Используя формулу (4.11), зная расстояния $d$, $l$ и длину падающей световой волны $\lambda$, можно рассчитать ширину интерференционной полосы.

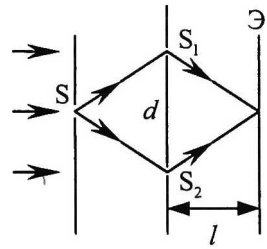


Рис. 141

2. *Зеркала Френеля* представляют собой два соприкасающихся плоских зеркала, расположенные под углом, близким к 180° друг к другу (рис. 142). Источник S испускает световые волны, которые отражаются от зеркал AO и OB и попадают на экран Э, образуя область наложения волн MN. Кожух K защищает экран от прямого попадания лучей. Волны, отраженные от зеркал, распространяются так, как будто они исходят из мнимых источников света $S_1$ и $S_2$.

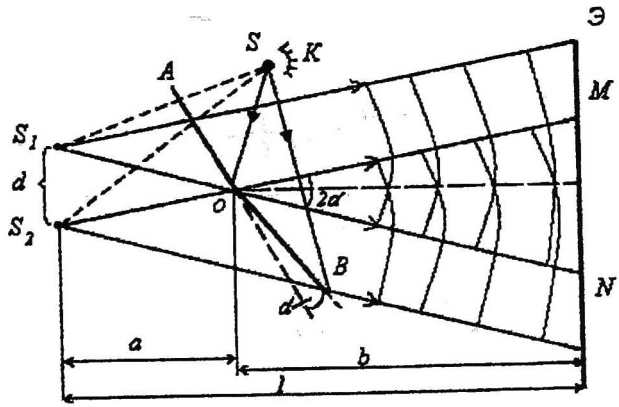


Рис. 142

Угол между отраженными от зеркал лучами OM и ON равен $2\alpha$.

Обозначив отрезок $OS_1 = OS_2 = r$, найдем расстояние между мнимыми источниками $S_1$ и $S_2$

$$d = 2OS_1 \sin\alpha = 2r\sin\alpha \approx 2r\alpha,$$

так как угол $\alpha$ очень мал.

Поскольку $a = r\cos\alpha \approx r$, то $l = a + b = r + b$.

Подставляя $d$ и $l$ в формулу (4.11), можно рассчитать ширину интерференционной полосы:

$$\Delta x = \frac{(r+b)\lambda}{2r\alpha}.$$

3. *Бипризма Френеля* состоит из двух призм с малыми преломляющими углами $\varphi$ (рис. 143), сложенными вместе. При освещении бипризмы линейным источником света S образуются две когерентные волны, исходящие из мнимых источников $S_1$ и $S_2$. Эти волны интерферируют и на экране Э можно наблюдать интерференционные полосы, ширина которых определяется по формуле

$$\Delta x = \frac{(a+b)\lambda}{2a(n-1)\varphi},$$

где $n$ — показатель преломления стекла бипризмы; $\lambda$ — длина световой волны.

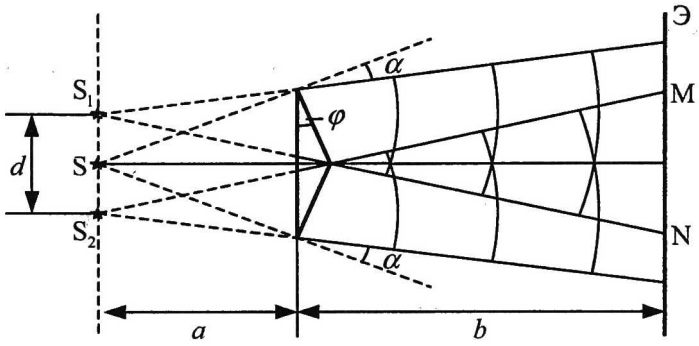



Рис. 143

## § 124. Интерференция в тонких пленках

При падении световой волны под углом $i$ на пленку толщиной $d$ (рис. 144) происходит ее отражение от верхней и нижней поверхностей пленки. В результате образуются две волны 1 и 2, которые, пройдя линзу $L$, интерферируют в точке М. Определим оптическую разность хода лучей $\delta$ для случая, когда показатель преломления пленки $n_2$ больше показателя преломления среды $n_1$, т. е. $n_2 > n_1$.

Оптические пути лучей 1 и 2 от плоскости DC до точки М одинаковы, первый луч от точки А проходит оптический путь $\mathrm{AD}n_1$, а второй луч $(\mathrm{AB}+\mathrm{BC})n_2$. Таким образом, разность хода лучей

$$\delta = (\mathrm{AB}+\mathrm{BC})n_2 - \left(\mathrm{AD}n_1 - \frac{\lambda}{2}\right) = 2\mathrm{AB}n_2 - \left(\mathrm{AD}n_1 - \frac{\lambda}{2}\right). \qquad (4.12)$$

В точке A отражение луча происходит от оптически более плотной среды, поэтому фаза волны меняется на $\pi$, т. е. отраженный луч теряет полволны (оптический путь $ADn_1$ уменьшается на $\lambda/2$).

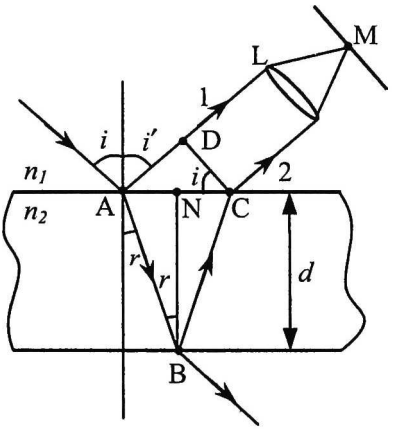


Рис. 144

$$AB = \frac{d}{\cos r},$$

$$AD = AC\sin i = 2d\,\mathrm{tg}\,r\sin i\,. \quad (4.13)$$

По закону преломления запишем:

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1}, \text{ откуда}$$

$$n_1 \sin i = n_2 \sin r\,. \quad (4.14)$$

Подставив выражения (4.13) и (4.14) в (4.12), получим

$$\delta = \frac{2dn_2}{\cos r}\left(1-\sin^2 r\right)+\frac{\lambda}{2} = 2dn_2\cos r+\frac{\lambda}{2}. \quad (4.15)$$

Так как $\cos r = \sqrt{1-\sin^2 r}$, то уравнение (4.14) примет вид

$$\sin r = \frac{n_1^2}{n_2^2}\sin^2 r,$$

тогда

$$\cos r = \sqrt{1-\frac{n_1^2}{n_2^2}\sin^2 i}\,. \quad (4.16)$$

Подставив выражение (4.16) в (4.15), окончательно получим

$$\delta = 2d\sqrt{n_2^2 - n_1^2\sin^2 i}+\frac{\lambda}{2}. \quad (4.17)$$

Если пленка освещается монохроматическим светом (например, красным) и при этом выполняется условие максимума при интерференции: $\delta = \pm k\lambda$, то в отраженном свете пленка будет иметь тот же цвет (т. е. красный). Если же выполняется условие минимума $\delta = \pm(2k+1)\frac{\lambda}{2}$, то пленка будет темной. При освещении белым светом пленка окрашивается в цвет, соответствующий длине волны $\lambda$, для которой выполняется условие максимума.

## § 125. Интерференционные полосы равного наклона и равной толщины

Интерференционная картина, как следует из формулы (4.17), определяется величинами $\lambda$, $d$, $n$ и $i$. При освещении плоскопараллельной пластинки монохроматическим светом (рис. 145) можно наблюдать чередование максимумов и минимумов интерференции. Для этого на пути отраженной волны следует поставить собирательную линзу Л и экран Э.

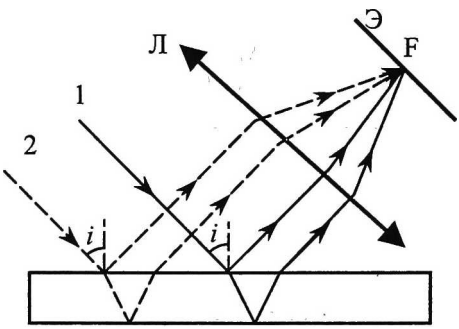



Рис. 145

Лучи 1 и 2, падающие на пластину под одним и тем же углом $i$, отразившись от верхней и нижней плоскостей пластинки, интерферируют и собираются в фокусе F линзы. Если оптическая разность хода этих лучей $\delta = \pm k\lambda$, то на экране наблюдаются максимумы интенсивностей, образуя полосу данного порядка интерференции. Каждая полоса обусловлена световыми лучами, падающими под одним и тем же углом $i$, но с разных направлений. Эти полосы называются *полосами равного наклона*. Поскольку интерферирующие лучи параллельны, то экран Э располагают в фокальной плоскости линзы, как это делается для получения изображения бесконечно удаленных предметов.

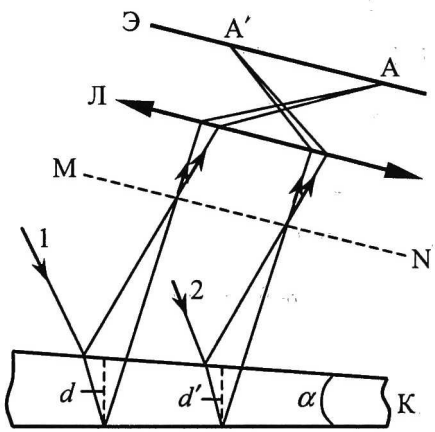



Рис. 146

Рассмотрим отражение параллельного светового пучка, падающего на пластину в виде клина с углом при вершине $\alpha$. Отраженные от верхней и нижней плоскостей пластинки лучи 1 и 2 (рис. 146) не будут параллельными. Так как их оптическая разность хода не одинакова, то при определенном положении клина К и линзы Л на экране появляются светлые и темные интерференционные полосы, параллельные ребру клина. Каждая полоса образуется в результате отражения от участков клина с одинаковой толщиной $d$, поэтому они называются *полосами равной толщины*.

Так как поверхности клина не параллельны друг другу, то интерферирующие лучи пересекаются вблизи клиновидной пластинки, т. е. локализованы на поверхности MN.

## § 126. Кольца Ньютона

Интерференционные полосы равной толщины можно наблюдать, если на плоскопараллельную пластинку положить плосковыпуклую линзу с весьма малой кривизной (рис. 147,а). Клинообразный слой воздуха (или другой среды) между линзой и пластинкой играет роль тонкой пленки, и вокруг точки касания линзы с пластинкой образуются светлые и темные кольца (кольца Ньютона, рис. 147,б). Наблюдение колец можно проводить как в отраженном, так и в проходящем свете. При наблюдении в белом свете кольца приобретают радужную окраску. Пусть на плоскую поверхность линзы в воздухе нормально падает монохроматический свет с длиной волны $\lambda$. Показатель преломления линзы $n_1$ больше показателя преломления воздуха $n_2$. Согласно формуле (4.17)

$$\delta = 2d\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i} + \frac{\lambda}{2}.$$

Световые лучи падают почти по нормали к пластинке, и $\sin i = 0$, а

$$\delta = 2dn_2 + \frac{\lambda}{2}. \qquad (4.18)$$

Из треугольника OAB находим

$$R^2 = (R-d)^2 + r^2 = R^2 - 2Rd + d^2 + r^2.$$

Поскольку толщина воздушного клина $d \ll R$, то $d^2 \approx 0$ и $d = \frac{r^2}{2R}$. Подставив значение $d$ в формулу (4.18), получим

$$\delta = \frac{r^2 n_2}{R} + \frac{\lambda}{2}.$$

Если $\delta = k\lambda$ (условие максимума интенсивности), то образуется светлое кольцо:

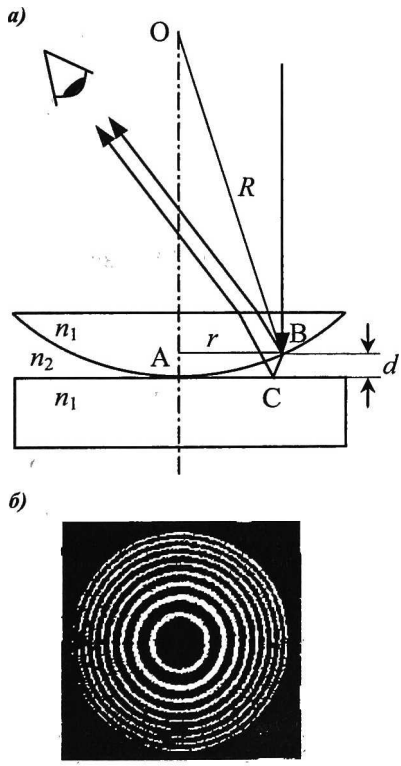



Рис. 147

$$\frac{r^2 n_2}{R} + \frac{\lambda}{2} = k\lambda,$$

откуда радиус кольца

$$r_k = \sqrt{(2k-1)\frac{R}{n_2}\frac{\lambda}{2}}, \qquad (4.19)$$

где $k = 1, 2, 3, \ldots$.

При $k = 0$ в точке касания линзы с пластинкой наблюдается минимум интенсивности, обусловленный изменением фазы световой волны на $\pi$ при отражении ее от пластинки.

По формуле (4.19) можно определить радиусы светлых колец при наблюдении в отраженном свете и радиусы темных колец при наблюдении в проходящем свете.

Если $\delta = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$, то наблюдается темное кольцо:

$$\frac{r^2 n_2}{R} + \frac{\lambda}{2} = (2k+1)\frac{\lambda}{2}, \text{ откуда}$$

$$r_k = \sqrt{kR\frac{\lambda}{n_2}}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots \qquad (4.20)$$

Формула (4.20) позволяет определить радиусы темных колец в отраженном свете и радиусы светлых колец в проходящем свете.

С помощью установки для наблюдения колец Ньютона можно найти длину волны монохроматического света, зная радиусы соответствующих колец, и радиус кривизны $R$ линзы.

## § 127. Применение интерференции света

Приборы, в которых используется явление интерференции света, называются *интерферометрами*. На рис. 148 приведена схема интерферометра Майкельсона[1].

Прибор имеет два плоских зеркала $M_1$ и $M_2$ и полупрозрачную плоскопараллельную пластинку $P_1$. Луч от источника монохромного света S попадает на пластинку $P_1$, где разделяется на два луча, один из которых, отразившись от посеребренного слоя пластинки, направлен к зеркалу $M_1$. После отражения от зеркала $M_1$ луч вновь проходит пластинку $P_1$ (на рис. 148 обозначен 1′). Луч 2 идет к зеркалу $M_2$ и, отразившись от него, возвращается к пластинке $P_1$, отразившись от которой, идет параллельно

[1] Альберт Абрахам Майкельсон (1852–1931) — американский физик.

лучу 1′ (на рис. 148 обозначен 2′). Первый луч проходит пластинку $P_1$ дважды.

Чтобы компенсировать возникшую разность хода между лучами 1 и 2, на пути луча 2 ставится пластинка $P_2$, отличающаяся от $P_1$ только тем, что не имеет серебряного покрытия.

Лучи 1′ и 2′ когерентны. Их оптическая разность хода

$$\delta = 2n_1(l_1 - l_2),$$

где $n_1$ — показатель преломления среды; $l_1$ и $l_2$ — расстояния от точки A до зеркала $M_1$ и $M_2$ соответственно.

Когда расстояния $l_1$ и $l_2$ равны, наблюдается максимум интерференции. При смещении зеркала $M_1$ на величину $\lambda/4$ оптическая разность хода лучей будет равна $\lambda/2$, наблюдается минимум интерференции.

Таким образом, по изменению интерференционной картины можно судить о незначительных перемещениях зеркала. Интерферометр Майкельсона используется для точного ($\sim 10^{-7}$ м) измерения длины тела. Различные типы интерферометров отличаются лишь конструктивно, принцип же действия остается одинаковым.

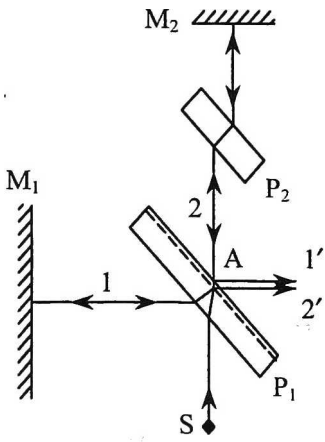


Рис. 148

Применение интерферометров многообразно: для исследования качества изготовления оптических стекол, измерения углов, при исследовании быстропротекающих процессов, для измерения различных газодинамических параметров при обтекании воздухом летательных аппаратов и т. д.

Явление интерференции также используется в *просветлении* оптики. Интенсивность светового потока, проходящего сложную оптическую систему, состоящую из набора линз, призм и зеркал, значительно уменьшается. Кроме того, появляются блики, которые очень нежелательны при использовании некоторых оптических приборов (перископов, биноклей и т. п.). Эти дефекты устраняются методом просветления оптики: на оптические поверхности наносятся тонкие прозрачные пленки толщиной $\lambda/4$ ($\lambda$ — длина волны падающего света). Падающий и отраженный лучи, имеющие разность хода $\lambda/2$, интерферируют. При этом выполняется условие минимума, в результате чего уничтожаются блики и улучшается четкость изображения.

## ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

**Задача 65.** На мыльную пленку с показателем преломления $n_2 = 1{,}33$ падает под углом $i = 30°$ монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 0{,}6$ мкм. Отраженный от пленки свет в результате интерференции имеет наибольшую яркость. Какова наименьшая возможная толщина пленки?

**Дано:**
$n_1 = 1$
$n_2 = 1{,}33$
$i = 30°$
$\lambda = 6 \cdot 10^{-7}$ м
$h_{min} = ?$

**Решение.** При падении световой волны на пленку (см. рисунок к задаче) происходит ее отражение от верхней и нижней поверхностей пленки. В результате образуются две волны 1 и 2, которые, пройдя линзу Л, интерферируют в точке Р. Оптическая разность хода лучей 1 и 2:

$$\delta = (AB + BC)n_2 - (ADn_1 - \frac{\lambda}{2}) = \\ = 2ABn_2 - ADn_1 + \frac{\lambda}{2} \quad (1)$$

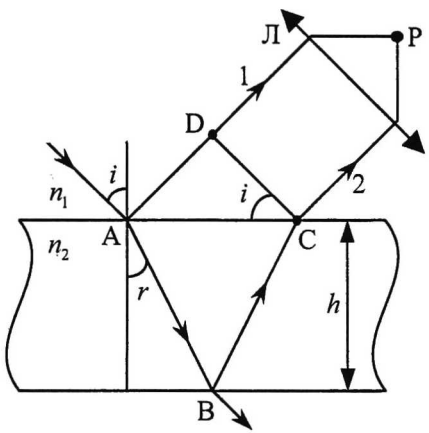


Рис. к задаче 65

В точке А отражение происходит от оптически более плотной среды, поэтому фаза волны изменяется на $\pi$, что эквивалентно «потере» полуволны.

Выполнив преобразования в выражении (1) (см. § 124, формулы (4.12)–(4.17)), получим

$$\delta = 2h\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i} + \frac{\lambda}{2}. \quad (2)$$

Запишем условие максимума при интерференции:

$$2h\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i} + \frac{\lambda}{2} = \pm 2k\frac{\lambda}{2}. \quad (3)$$

Для определения $h_{min}$ необходимо в уравнении (3) принять $k = 1$, т. е.

$$2h_{min}\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i} = \frac{\lambda}{2}, \text{ откуда}$$

$$h_{min} = \frac{\lambda}{4\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i}}. \quad (4)$$

Подставим численные значения в уравнение (4):

$$h_{\min} = \frac{6 \cdot 10^{-7}\ \text{м}}{4\sqrt{1,33^2 - \sin^2 30^0}} = 1,2 \cdot 10^{-7}\ \text{м}.$$

**Ответ:** $h_{\min} = 1,2 \cdot 10^{-7}$ м.

**Задача 66.** На стеклянный клин нормально его грани падает монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 0,66$ мкм. Определить преломляющий угол клина, если на 1 см длины образуется 10 интерференционных полос.

**Дано:**
$\lambda = 6,6 \cdot 10^{-7}$ м
$n = 1,5$
$N = 10$
$l = 10^{-2}$ м
$\alpha = ?$

**Решение.** Параллельный пучок световых лучей, отраженный от верхней и нижней граней клина, образует интерференционную картину вблизи верхней поверхности клина.

Лучи 1 и 2 при малом угле клина можно считать параллельными. Найдем оптическую разность хода лучей 1 и 2:

$$\delta = 2d_k n \cos r + \frac{\lambda}{2}, \qquad (1)$$

где $d_k$ — толщина клина в том месте, где наблюдается интерференционная полоса, соответствующая номеру полосы; $r$ — угол преломления лучей; $\lambda$ — длина волны.

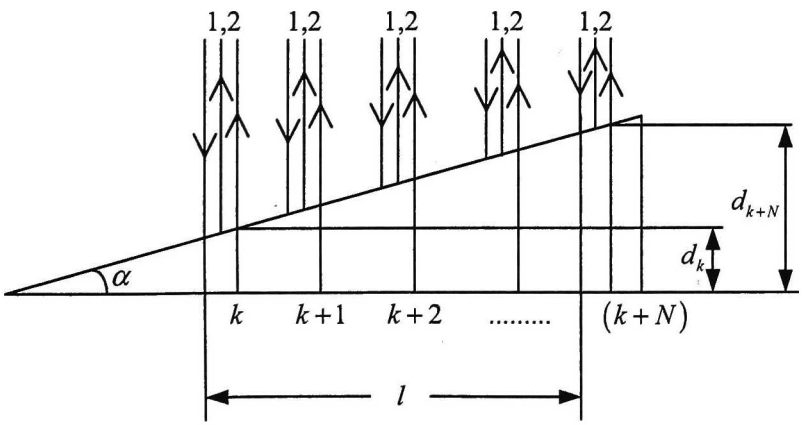



Рис. к задаче 66

При отражении от верхней грани клина фаза волны изменяется на $\pi$, поэтому в уравнении (1) появилась разность хода, равная половине длины волны.

Запишем условие интерференционного минимума:

$$\delta = 2d_k n \cos r + \frac{\lambda}{2} = (2k+1)\frac{\lambda}{2}. \qquad (2)$$

Учитывая, что угол падения луча равен нулю, а $\cos r = 1$ (при малых углах $\alpha$), уравнение (2) примет вид

$$2d_k = k\lambda \text{, откуда}$$

$$d_k = \frac{k\lambda}{2n}. \qquad (3)$$

Пусть темной полосе с номером $(k+N)$ соответствует толщина клина $d_{k+N}$ (см. рисунок к задаче). На расстоянии $l$ по условию задачи укладывается $N$ темных полос. Как видно из рисунка:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{(d_{k+N} - d_k)}{l}. \qquad (4)$$

Вследствие малости угла $\alpha$ можно считать, что $\operatorname{tg}\alpha \approx \alpha$ и

$$\alpha = \frac{(d_{k+N} - d_k)}{l} = \frac{(k+N)\lambda - k\lambda}{2nl} = \frac{N\lambda}{2nl}. \qquad (5)$$

Подставив в уравнение (5) численные значения, получим

$$\alpha = \frac{5 \cdot 0{,}66 \cdot 10^{-9}\ \text{м}}{1{,}5 \cdot 10^{-2}\ \text{м}} = 2 \cdot 10^{-4}\ \text{рад}.$$

Так как $1\,\text{рад} = 2{,}06'' \cdot 10^5$, то $\alpha = 41{,}2''$.

**Ответ:** $\alpha = 41{,}2''$.

# Глава 22
# ДИФРАКЦИЯ СВЕТА

## § 128. Принцип Гюйгенса–Френеля

*Дифракцией света* называется явление, обусловленное волновыми свойствами света и наблюдаемое при его распространении в среде с резко выраженными неоднородностями (отверстия, щели, границы непрозрачных тел и т. д.). Дифракция приводит к огибанию волнами препятствий и к попаданию света в область геометрической тени, т. е. к отклонению от законов геометрической оптики.

Дифракция происходит всегда, если на пути распространения света имеется резко выраженная неоднородность. Другой вопрос, будем ли мы ее видеть. С помощью микроскопа можно рассмотреть дифракцию тогда, когда простым глазом она не видна. Если длина световой волны $\lambda$ соизмерима с размерами препятствий, то дифракция наблюдается. В зависимости от условий наблюдения различают два вида дифракции: дифракция в параллельных лучах (дифракция Фраунгофера[1]) и дифракция в непараллельных лучах (дифракция Френеля[2]).

По *принципу Гюйгенса*[3] каждая точка среды, до которой доходит фронт волны, является центром вторичных волн, огибающая которых дает положение нового фронта волны. Принцип Гюйгенса позволяет вывести законы отражения и преломления волн, но не дает возможности рассчитывать их интенсивность. Френель дополнил принцип Гюйгенса идеей о когерентности и интерференции вторичных волн.

*Согласно принципу Гюйгенса–Френеля световую волну можно заменить эквивалентной системой вторичных когерентных волн.* Волновое возмущение в любой точке пространства можно рассматривать как результат интерференции волн, идущих от вторичных источников.

## § 129. Метод зон Френеля

Для нахождения амплитуды световой волны в точке P (см. рис. 149) по принципу Гюйгенса–Френеля сферический фронт волны от источника S разбивается на кольцевые зоны (зоны Френеля).

Пусть $PM = r_0$ — расстояние от точки P до фронта волны. Расстояние от точки P

[1] Иозеф Фраунгофер (1787–1826) — немецкий физик.
[2] Огюстен Жан Френель (1788–1827) — французский физик.
[3] Христиан Гюйгенс (1629–1695) — нидерландский ученый.

$$\text{до первой зоны} \quad r_1 = r_0 + \frac{\lambda}{2},$$

$$\text{до второй зоны} \quad r_2 = r_1 + \frac{\lambda}{2} = r_0 + 2\frac{\lambda}{2},$$

$$\text{до третьей зоны} \quad r_3 = r_2 + \frac{\lambda}{2} = r_0 + 3\frac{\lambda}{2},$$

$$\text{и т. д.} \quad r_k = r_0 + k\frac{\lambda}{2}, \tag{4.21}$$

где $k$ — номер зоны.

Разности хода волн от соседних зон Френеля, приходящих в точку Р, отличаются на $\lambda/2$, т. е. фазы колебаний противоположны. При наложении такие колебания будут ослаблять друг друга. Амплитуда $A$ результирующих световых колебаний в точке Р равна

$$A = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + \ldots \pm A_k, \tag{4.22}$$

где $A_1$, $A_2$, …, $A_k$ — амплитуды колебаний, возбужденные 1, 2, …, $k$-й зонами в точке Р.

Амплитуда колебаний, возбуждаемая зоной, зависит от площади зоны, от расстояния $r$ от зоны до точки Р и от угла $\alpha$ (рис. 149) между внешней нормалью к фронту волны и направлением распространения света от зоны к точке Р. Покажем, что площади зон равновелики. Из треугольников SAC и PAC запишем:

$$\text{AC}^2 = R^2 - (R - \text{CM})^2 = r_k^2 - (r_0 + \text{CM})^2,$$

где $R$ — радиус сферической волны; $\text{CM} = h_k$ — высота сферического сегмента.

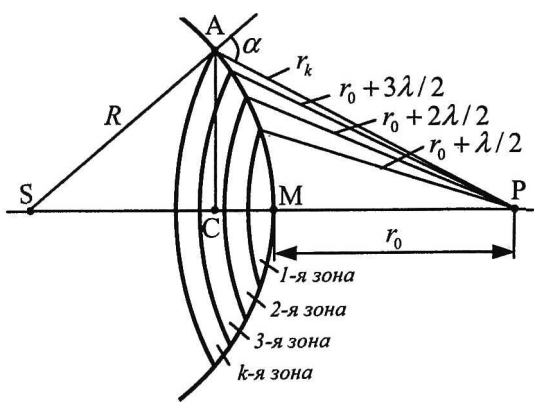



Рис. 149

Тогда

$$R^2-(R-h_k)^2=r_k^2-(r_0+h_k)^2. \qquad (4.23)$$

Подставив выражение (4.21) $r_k=r_0+k\frac{\lambda}{2}$ в (4.23), получим

$$h_k=\frac{(r_k^2-r_0^2)}{2(R+r_0)}. \qquad (4.24)$$

Площадь сферического сегмента

$$S_k=2\pi Rh_k. \qquad (4.25)$$

Считая $\lambda << r_0$, из уравнений (4.21), (4.24), (4.25) имеем

$$S_k=\frac{\pi Rr_0k\lambda}{R+r_0}, \text{ т. к. } k^2\lambda^2\approx 0.$$

Площадь зоны

$$S=S_k-S_{k-1}=\frac{\pi Rr_0\lambda}{R+r_0}.$$

Получили, что площадь зоны $S$ не зависит от номера зоны $k$, значит, площади всех зон одинаковы. Тогда амплитуды колебаний, приходящих в точку Р, зависят только от $r_k$ и $\alpha$. С ростом номера зоны $r_k$ и $\alpha$ возрастают, следовательно, амплитуда $A_1>A_2>A_3>...>A_k$.

Найдем амплитуду результирующих колебаний в точке Р, используя выражение (4.22):

$$A=\frac{A_1}{2}+(\frac{A_1}{2}-A_2+\frac{A_3}{2})+(\frac{A_3}{2}-A_4+\frac{A_5}{2})+...\pm\frac{A_k}{2},$$

откуда

$$A=\frac{A_1}{2}\pm\frac{A_k}{2}, \qquad (4.26)$$

т. к. слагаемые, стоящие в скобках, равны нулю.

Если число зон $k$ четное, то в формуле (4.26) берется знак минус, если нечетное — плюс. У свободной волновой поверхности число зон Френеля $k\to\infty$ и $A_k\to 0$, тогда $A=\frac{A_1}{2}$. Амплитуда результирующих колебаний равна половине амплитуды центральной зоны Френеля. Так как площадь зоны Френеля очень мала, то свет распространяется, словно в узком канале, т. е. *прямолинейно*. Таким образом, с помощью дифракции можно объяснить прямолинейность распространения света.

Следует отметить, что результирующую амплитуду можно найти также методом графического сложения амплитуд.



Рис. 150

Реальным подтверждением метода зон Френеля является *зонная пластинка Френеля*. На прозрачную пластинку наносится чередующиеся концентрические кольца, расположенные по принципу построения зон Френеля. Пусть эти кольца открывают только нечетные зоны Френеля (1, 3, 5 и т. д.). Тогда результирующая амплитуда $A = A_1 + A_3 + A_5 + \ldots$ в точке наблюдения Р будет больше, чем при полностью открытом фронте волны. Резко возрастает и интенсивность света в наблюдаемой точке. Зонная пластинка действует подобно собирающей линзе.

Аналогично можно изготовить пластину, где открыты только четные зоны Френеля. На рис. 150 показана *амплитудная зонная пластинка*, у которой открыты нечетные зоны.

Еще больший эффект дает *фазовая зонная пластинка Вуда*, у которой вторичные волны от всех точек волновой поверхности приходят в рассматриваемую точку в одинаковых фазах. По сравнению с амплитудной фазовая зонная пластинка, увеличивает интенсивность света в четыре раза.

С помощью зонной пластинки можно определить длину световой волны. Ее используют также для фокусировки лучей в рентгеновских микроскопах.

## § 130. Дифракция на одиночном отверстии и экране

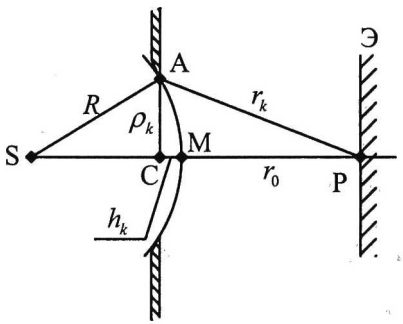



Рис. 151

Сферическая волна от точечного источника света S проходит через отверстие диафрагмы радиусом $\rho_k$ (рис. 151).

Результирующая амплитуда колебаний в точке Р будет зависеть от числа зон $k$, прошедших через отверстие.

Из треугольника АСР запишем:

$$\rho_k^2 = r_k^2 - (r_0 + h_k)^2 =$$
$$= r_k^2 - r_0^2 - 2r_0 h_k - h_k^2 .$$

Так как $h_k << r_0$, то $h_k^2 \approx 0$ и

$$\rho_k^2 = r_k^2 - r_0^2 - 2r_0 h_k . \qquad (4.27)$$

Возведем в квадрат левую и правую части уравнения (4.21):

$$r_k^2 = (r_0 + k\frac{\lambda}{2})^2 = r_0^2 + 2r_0 k\frac{\lambda}{2} + k^2\frac{\lambda^2}{4} . \qquad (4.28)$$

Поскольку $k^2\lambda^2/4 \approx 0$, то из (4.28) получим

$$r_k^2 - r_0^2 = r_0 k\lambda . \qquad (4.29)$$

Из уравнений (4.24) и (4.29) определим высоту сферического сегмента:

$$h_k = \frac{r_0 k\lambda}{2(R+r_0)} . \qquad (4.30)$$

Подставив выражения (4.29) и (4.30) в (4.27), найдем число зон, укладывающихся на площади отверстия диафрагмы:

$$k = \frac{\rho_k^2 (R+r_0)}{r_0 R\lambda} . \qquad (4.31)$$

Если число зон окажется нечетным, то согласно уравнению (4.26) в точке Р наблюдается максимум освещенности. Самая наибольшая освещенность будет, когда диафрагма открывает только одну первую зону Френеля. Если отверстие открывает четное число зон, то в точке Р наблюдается минимум освещенности. Самая минимальная освещенность в точке Р будет в том случае, когда отверстие диафрагмы открывает лишь две первые зоны Френеля.

Вокруг точки Р на экране образуются чередующиеся светлые и темные кольца. Интенсивность светлых колец убывает при удалении от центра. При освещении диафрагмы белым светом кольца имеют радужную окраску.

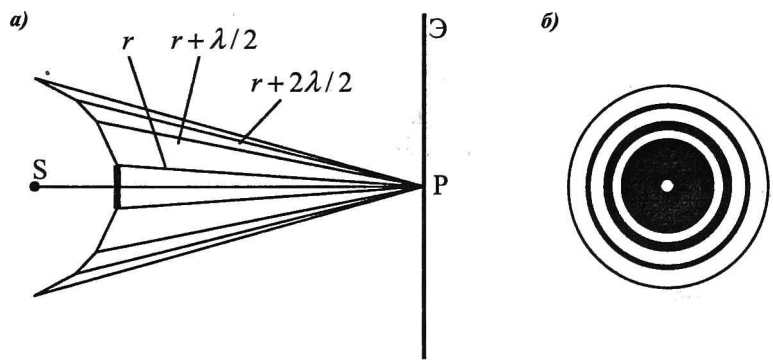



Рис. 152

Рассмотрим случай, когда между источником света S и электроном Э расположен круглый непрозрачный диск, закрывающий часть волнового фронта (рис. 152,а). Пусть диск перекрывает $k$ первых зон Френеля. Амплитуда результирующего колебания в точке Р равна

$$A = A_{k+1} - A_{k+2} + A_{k+3} - \ldots = \frac{A_{k+1}}{2} + \left( \frac{A_{k+1}}{2} - A_{k+2} + \frac{A_{k+3}}{2} \right) + \ldots = \frac{A_{k+1}}{2} ,$$

так как выражения, заключенные в скобки, равняются нулю. Таким образом, в точке P вопреки «здравому смыслу» (за непрозрачной пластиной должна располагаться тень) всегда наблюдается светлое пятно (см. рис. 152,б). Его называют *пятном Пуассона*. Вокруг точки P располагаются чередующиеся концентрические окружности минимумов и максимумов интенсивности. При наблюдении в белом свете эти окружности имеют радужную окраску.

## § 131. Дифракция на одиночной щели

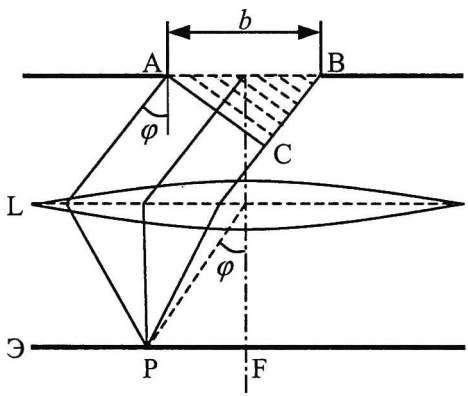



Рис. 153

На одиночную щель шириной $b$ (рис. 153) падает по нормали к ней плоская монохроматическая световая волна. AB — фронт падающей волны. За щелью расположена собирающая линза L. Лучи, падающие на линзу параллельно, собираются ею, и на экране Э наблюдается явление интерференции. AC — новый фронт волны для лучей, отклоненных на угол $\varphi$ (угол дифракции). Лучи, идущие параллельно главной оптической оси линзы, собираются в фокусе линзы F и образуют максимум света, так как они проходят одинаковые оптические пути и в точку F приходят в одинаковой фазе. Лучи, отклоненные щелью на угол $\varphi$, проходят различные оптические пути и имеют оптическую разность хода

$$\delta = BC = b\sin\varphi .$$

Эти лучи интерферируют в точке P. По методу зон Френеля разобьем волновую поверхность AB на зоны. Для этого расстояние BC поделим на отрезки, равные $\lambda/2$, и проведем пунктиром прямые, параллельные AC. Определим число зон Френеля $k$, укладывающихся на щели:

$$k = \frac{BC}{\lambda/2} = \frac{b\sin\varphi}{\lambda/2}.$$

Если на волновой поверхности AB укладывается четное число зон, то в точке P наблюдается минимум интенсивности:

$$\frac{b\sin\varphi}{\lambda/2} = \pm 2k ,$$

где $k = 1,2,3,...$ — порядок дифракционных минимумов.

Отсюда получаем *условие минимумов*:

$$b\sin\varphi = \pm k\lambda\,. \qquad (4.32)$$

Если

$$\frac{b\sin\varphi}{\lambda/2} = \pm(2k+1),$$

то в точке P наблюдается максимум интенсивности, т. е.

$$b\sin\varphi = \pm(2k+1)\frac{\lambda}{2},$$

это *условие максимумов*.

Таким образом, в монохроматическом свете на экране в центре (точка F) образуется нулевой максимум интенсивности, а от него влево и вправо чередуются максимумы и минимумы первого, второго, третьего и т. д. порядков. При наблюдении в белом свете максимумы будут иметь вид дифракционных спектров, обращенных фиолетовой стороной к центру, кроме нулевого, который останется белым.

## § 132. Дифракционная решетка

*Дифракционная решетка* представляет собой совокупность большого числа одинаковых по ширине и параллельных друг другу щелей, разделенных непрозрачными промежутками (рис. 154). Величина

$$d = a + b$$

называется *периодом* (*постоянной*) *дифракционной решетки*. Здесь $b$ — ширина щели, $a$ — ширина непрозрачного промежутка.

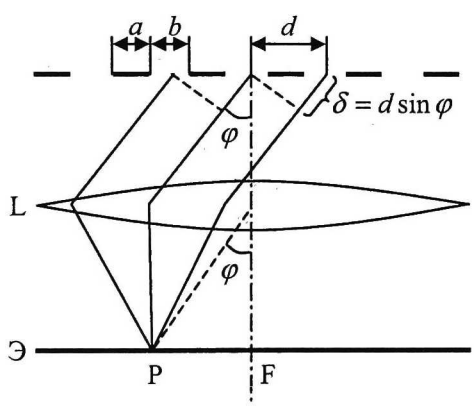


Рис. 154

Современная дифракционная решетка может иметь число штрихов $N_0 = 5000$ (и более) на 1 мм, а период $d = 10^{-3}$ м/5000 = 0,2 мкм.

Пусть на дифракционную решетку нормально падает параллельный пучок монохроматического света. Для наблюдения дифракционной картины за решеткой ставится линза L, в фокальной плоскости которой располагается экран Э. На экране интерферируют лучи от разных щелей. Так как щели находятся на одинаковых расстояниях друг от друга, то оптические разности хода лучей от двух соседних щелей для данного направления $\varphi$ одинаковы в пределах всей дифракционной решетки:

$$\delta = (a+b)\sin\varphi = d\sin\varphi\,.$$

Прежние минимумы интенсивности будут наблюдаться в направлениях, определяемых условием (4.32):

$$b\sin\varphi = \pm k\lambda,$$

где $k = 1, 2, 3, ...$

Это условие *главных минимумов* дифракционной решетки.

Освещенность от одной щели усиливается действием другой, если

$$d\sin\varphi = \pm 2k\frac{\lambda}{2} = \pm k\lambda, \qquad (4.33)$$

где $k = 0, 1, 2, 3, ...$

Это условие *главных максимумов*.

Если дифракционная решетка имеет $N$ щелей, то между двумя главными максимумами располагается $(N-1)$ дополнительных минимумов, разделенных слабыми по интенсивности вторичными максимумами. Условие *дополнительных минимумов*:

$$d\sin\varphi = \pm\frac{m\lambda}{N},$$

где $m = 1,2,3,...,(N-1),(N+1),...,(2N-1),(2N+1)$ и т. д.

При наблюдении в белом свете максимумы первого, второго и т. д. порядков, кроме нулевого, имеют вид дифракционных спектров, обращенных фиолетовой частью к центру.

Дифракционная решетка является спектральным прибором и характеризуется *разрешающей способностью* и *угловой дисперсией*. Согласно *критерию Рэлея* две спектральных линии с длиной волн $\lambda_1$ и $\lambda_2$ разрешаются (т. е. наблюдаются как отдельные линии), если главный максимум одной длины волны совпадает с ближайшим минимумом второй. Из этого критерия определяется *разрешающая способность* $R$ дифракционной решетки:

$$R = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} = kN.$$

Для увеличения $R$ следует увеличить число штрихов $N$, либо порядок дифракционного спектра $k$.

*Угловая дисперсия* $D$ определяется шириной спектра:

$$D = \frac{d\varphi}{d\lambda}.$$

Дифференцируя условие главных максимумов (4.33) по φ, для угловой дисперсии получим

$$D = \frac{k}{d\cos\varphi}.$$

Чем выше порядок спектра $k$, тем больше угловая дисперсия.

## § 133. Дифракция на пространственной решетке

Для наблюдения дифракции рентгеновских лучей Лауэ[1] использовал кристаллы, в которых атомы или ионы располагаются в определенном порядке, образуя трехмерную *пространственную решетку*. Постоянная такой решетки порядка $10^{-10}$ м, что соизмеримо с длинной волны $\lambda \approx \approx (10^{-10} - 10^{-12})$ рентгеновского излучения.

Дифракция рентгеновских лучей возникает при отражении волн от систем параллельных плоскостей, в которых располагаются узлы кристаллической решетки. Отраженные вторичные волны когерентны и интерферируют между собой.

Пусть монохроматический пучок параллельных рентгеновских лучей падает на кристалл под углом скольжения $\theta$ (рис. 155). Вторичные волны, отражаясь от слоев 1 и 2 кристаллической решетки, приобретают оптическую разность хода:

$$\delta = BD + DC = 2d\sin\theta\,.$$

Если отраженные волны находятся в одинаковой фазе, то при наложении их наблюдаются максимумы интенсивности

$$2d\sin\theta = k\lambda\,, \qquad (4.34)$$

где $k = 1, 2, 3, \ldots$

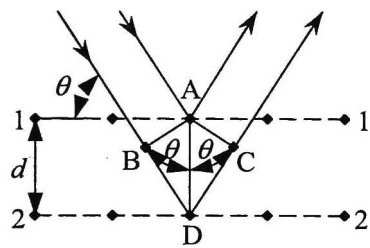


Рис. 155

Уравнение (4.34) называется *формулой Вульфа*[2]*–Брэггов*[3], которая используется при рентгеноструктурном анализе вещества: по известным значениям $\theta$, $k$ и $\lambda$ определяется структура вещества (межплоскостное расстояние $d$).

## § 134. Физические принципы голографии

*Голография* — это метод записи и восстановления световых волн. На обычной фотографии записывается распределение амплитуды в волне, а на голограмме — амплитуды и фазы.

На примере простейшего предмета — точки рассмотрим механизм получения голограммы и восстановление ее изображения по схеме, предложенной американскими физиками Э. Лейтом и Ю. Упатниексом.

---

[1] Макс фон Лауэ (1879–1960) — немецкий физик.

[2] Георгий Викторович Вульф (1863–1925) — российский кристаллограф.

[3] Уильям Генри Брэгг (1862–1942) — английский физик.
Уильям Лоренс Брэгг (1890–1971) — английский физик, сын У. Г. Брэгга.

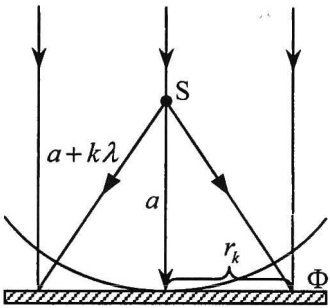



Рис. 156

Светящаяся точка S (рис. 156), расположенная на расстоянии $a$ от фото-пластинки Ф, испускает сферическую световую волну. На фотопластинку падает также опорная плоская волна, изображенная на рис. 156 параллельными лучами. Если волны когерентны, то на пластинке образуется система интерференционных полос. Для всех точек пластинки, равноудаленных от ее центра, фазовые соотношения падающих волн одинаковы, поэтому интерференционные полосы на фотопластинке будут иметь вид концентрических окружностей (рис. 157,а). В центре разность хода волн равна нулю, а для произвольно взятого k-го кольца — $k\lambda$, поэтому радиус $k$-го кольца равен

$$r_k^2 = (a+k\lambda)^2 - a^2 = 2ak\lambda + k^2\lambda^2,$$

где $k$ — целое число.

Для достаточно больших $k$ из полученного выражения можно найти расстояние между соседними кольцами $\Delta r_k$, считая $\Delta r_k << r_k$:

$$\Delta r_k = a\lambda + \frac{(k+\frac{1}{2})\lambda^2}{r_k}. \qquad (4.35)$$

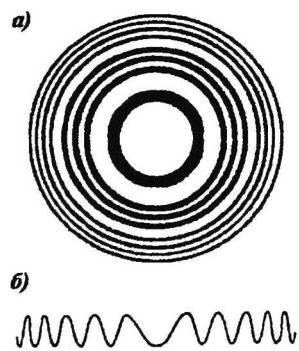



Рис. 157

Таким образом, голограмма точки S представляет собой систему концентрических колец с радиусами, определяемыми уравнением (4.35). Такая система называется *зонной решеткой Френеля* (рис. 157,а). Распределение интенсивности в максимумах интерференционной картины синусоидальное (рис. 157,б).

Рассмотрим восстановление изображения. Уберем светящуюся точку S, а ее голограмму поместим на то место, где она экспонировалась, и осветим голограмму той самой плоской световой волной, которая использовалась при ее записи.

Каждый малый участок зонной решетки Френеля можно рассматривать как дифракционную решетку с синусоидальным распределением прозрачности. При дифракции на ней образуются три пучка: пучок нулевого порядка (продолжение падающего); два пучка первого порядка, распространяющиеся под углами, удовлетворяющими условию

$$\sin\varphi = \pm\frac{\lambda}{\Delta r_k}.$$

Рассмотрим луч света, падающий на голограмму на расстоянии $r_k$ от ее оси (рис. 158). Лучи первого порядка отклоняются на углы $\pm\varphi_k$. Эти лучи (или их продолжения) пересекут ось голограммы на расстоянии $\pm x$ от ее поверхности. Из рис. 158 следует, что

$$x = r_k ctg\varphi_k = r_k\sqrt{\frac{1-\sin^2\varphi_k}{\sin\varphi_k}}.$$

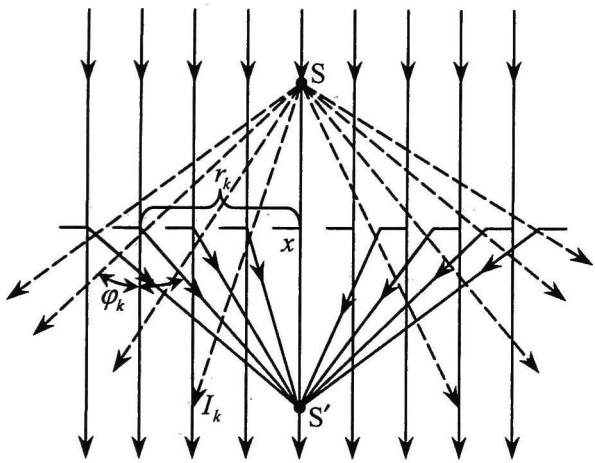



Рис. 158

Учитывая, что $\sin\varphi_k = \dfrac{\lambda}{\Delta r_k} \approx \dfrac{r_k}{a+k\lambda}$, получим

$$x = \sqrt{a^2 + 2ak\lambda + k^2\lambda^2 - r^2{}_k}\,.$$

Подставив в данное выражение значение $\Delta r_k^2$ из формулы (4.35), придем к равенству: $x = a$.

Таким образом, расстояние, на котором лучи плюс первого и минус первого порядков пересекают ось голограммы, одинаково для лучей, дифрагированных всеми участками голограммы.

Итак, при прохождении плоской волны через голограмму точки образуются две сферические волны (см. рис. 159), одна из которых имеет выпуклый, а другая — вогнутый фронт. Центр выпуклой волны находится в точке S, расположенной на расстоянии $a$ от голограммы, т. е. в том месте, где помещалась точка при голографировании. Вогнутая волна сходится в точке S′, которая так же находится на расстоянии $a$ от голограммы. Кроме

волны первого порядка, образующей мнимое и действительное изображения точки, из голограммы выходит еще плоская волна, соответствующая нулевому порядку.

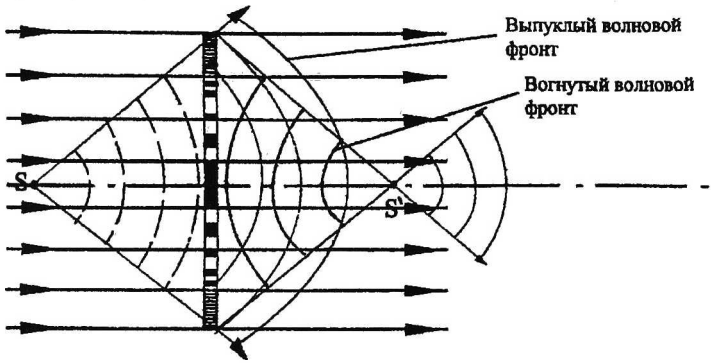



Рис. 159

Поскольку предметы состоят из большого числа точек, то результаты, полученные для точки, можно распространить на любые предметы. В этом случае голограмму следует рассматривать как наложение зонных решеток, образованных каждой точкой предмета. Рассмотрим процесс записи и восстановления изображения трехмерного предмета.

С помощью линз 2 и 4 (рис. 160) расширяется и коллимируется пучок лазера 1. Одна часть пучка служит для освещения диффузно-рассеивающего предмета 6 (*предметная волна*), другая, отражаясь от вспомогательного плоского зеркала 5, падает в виде плоской волны на фотопластинку 7 (*опорная волна*).

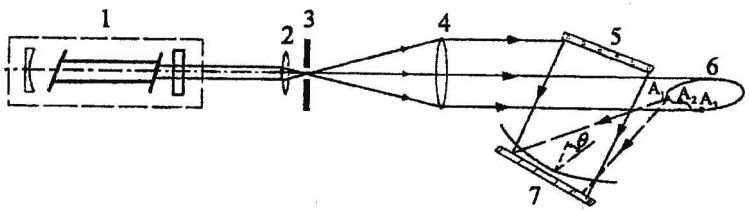



Рис. 160

Зарегистрированная на фотопластинке сложная интерференционная картина несет амплитудную и фазовую информацию от каждой точки объекта, освещенной лучом лазера.

Если полученную голограмму осветить параллельным пучком лазера, падающим под тем же углом, под каким падала на пластинку опорная волна в момент фотографирования (см. рис. 161), то большая часть света пройдет без отклонения в направлении максимума нулевого порядка, а

часть света отклонится в направлении максимумов первого порядка. Нижний отклоненный пучок света является репродукцией волны, которая падала от объекта 6 на пластину. Глаз, расположенный на пути распространения этого волнового фронта, увидит за голограммой мнимое изображение объекта. Оно идентично объекту и расположено там, где находился объект. Восстановленное изображение трехмерно.

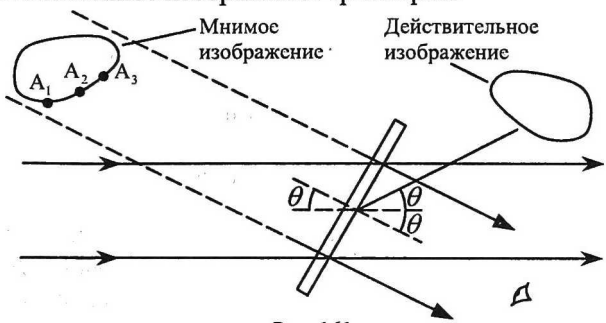



Рис. 161

Верхний отклоненный пучок образует волну, подобную предметной, но фазы в ней имеют противоположные знаки. Эта волна образует действительное изображение, которое является зеркальным изображением объекта.

Голограмма не имеет точечного соответствия, характерного для фотографии. В фотографии каждой точке объекта соответствует точка на негативе. В голографии каждая точка объекта регистрируется на всей голограмме.

Любой участок голограммы несет информацию обо всем объекте, даже участок размером в одну–две длины волны, т. е. порядка одного квадратного микрона. Поскольку в восстановлении изображения основную роль играет дифракция, то четкость восстановления картины, так же, как четкость дифракционных максимумов, получаемых от дифракционной решетки и характеризуемых разрешающей способностью решетки, определяется числом дифрагируемых элементов.

Разрешающая способность дифракционной решетки $R = kN$, где $k$ — порядок спектра (в нашем случае $k = 1$); $N$ — число щелей решетки (в нашем случае число дифрагируемых элементов). Чем больше размер голограммы, тем четче, без искажений, будет передано изображение объекта.

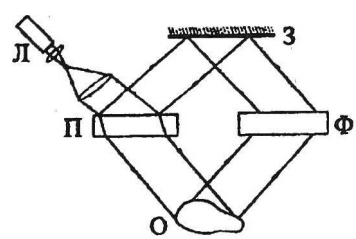



Рис. 162

Можно получить увеличенное и уменьшенное изображение объекта путем изменения длины опорной волны при восстановлении или путем увеличения или уменьшения голограммы.

В 1969 г. Ю. Н. Денисюк[1] предложил метод объемного голографирования в толстых фотографических слоях. Одна из схем получения объемной голограммы показана на рис. 162.

Опорная волна от лазера Л, пройдя через полупрозрачное зеркало П, рассеивается объектом О и попадает на толстослойную фотоэмульсию пластинки *Ф*. С противоположной стороны на пластинку падает волна, отраженная от плоского зеркала З.

В эмульсионном слое образуются стоячие волны с расстоянием между пучностями, равном половине длины волны. При наклонном падении лучей (под углом $\alpha$ к фотопластинке) расстояние между пучностями $d$ увеличивается и определяется из соотношения $d = \dfrac{\lambda}{2\sin\alpha}$. Изображение предмета может быть восстановлено как при помощи такого же опорного луча лазера, так и при помощи обычной лампы накаливания Л (рис. 163).

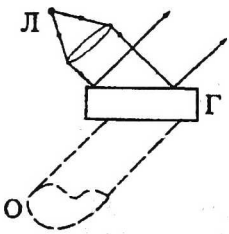


Рис. 163

Действительно, свет будет усиливаться вследствие интерференции отраженных лучей от различных плоскостей только тогда, когда выполняется условие интерференционных максимумов. А это условие может выполняться только для лучей той же длины волны, что и были взяты при получении голограммы Г, т. е. для длины волны лазера. Остальные лучи, испускаемые лампой накаливания, для которых условие максимумов не выполняется, будут взаимно погашены.

При рассматривании голограммы при помощи глаза (рис. 163) появится мнимое изображение предмета О на том месте, где он находился ранее при голографировании. Однако изображение будет одноцветным в лучах лазерного источника. Чтобы получить цветное изображение предмета, необходимо получить голограмму в трех цветах от трех лазеров, сочетание излучений которых дает белый свет. В этом случае на голограмме образуются три семейства плоскостей. Соотношение интенсивностей лучей лазера должно соответствовать реальному соотношению цветов.

Возможные применения голограммы разнообразны: запись и хранение информации (на одной фотопластинке можно записать книгу объемом тысяча и более страниц), ЭВМ с голографической памятью, голографическое кино и телевидение, голографический электронный микроскоп, голографическая интерферометрия в радиолокационных системах и т. д.

[1] Юрий Николаевич Денисюк (р. в 1927 г.) — российский физик.

## ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

**Задача 67.** Расстояние от источника S монохроматического света с длиной волны $\lambda = 0{,}50$ мкм до экрана Э равно 3 м. Как изменится интенсивность света в точке P, если между экраном и источником поставить диафрагму D с круглым отверстием радиуса $r = 1{,}0$ мм на расстоянии $r_0 = 2{,}0$ м от экрана (см. рисунок к задаче)?

**Дано:**

$\lambda = 0{,}5 \cdot 10^{-6}$ м

$R + r_0 = 3$ м

$r_0 = 2{,}0$ м

$r = 10^{-3}$ м

$\dfrac{I}{I_0} = ?$

**Решение.** Согласно методу зон Френеля в отсутствии диафрагмы амплитуда результирующего колебания $A$ в точке P равна амплитуде первой зоны Френеля, т. е.

$$A = \frac{A_1}{2}.$$

Интенсивность света $I_0$ пропорциональна квадрату амплитуды, т. е. в нашем случае

$$I_0 \sim \frac{A_1^2}{4}. \qquad (1)$$

При постановке диафрагмы в точке P будет светлое или темное пятно в зависимости от числа зон Френеля, укладывающихся на поверхности волнового фронта, ограниченного отверстием диафрагмы. Четному числу зон соответствует темное пятно, а нечетному — светлое. Используя формулу (4.31), найдем число зон $k$, проходящих через отверстие, полагая $r = \rho_k$:

$$k = \frac{r^2(R + r_0)}{R r_0 \lambda}; \quad k = \frac{10^{-6}\,\text{м}^2 \cdot 3\,\text{м}}{1\,\text{м} \cdot 2\,\text{м} \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-6}\,\text{м}} = 3.$$

Таким образом, при постановке диафрагмы D на пути распространения световой волны (см. рисунок) в точке P будет светлое пятно.

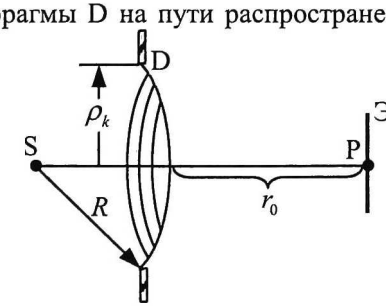


Рис. к задаче 67

Так как $r \ll R$ и $r \ll r_0$, то можно считать, что колебания, приходящие в точку P от каждой из трех зон Френеля, будут иметь одинаковые амплитуды. Колебания от двух соседних зон приходят в противофазе и гасят друг друга. Амплитуда результирующего колебания $A$ в данном случае будет равна амплитуде одной зоны Френеля, например первой, т. е. $A = A_1$. Интенсивность света при этом

$$I \sim A_1^2 . \qquad (2)$$

Из уравнений (1) и (2) найдем отношение интенсивностей:

$$\frac{I}{I_0} = A_1^2 \Big/ \frac{A_1^2}{4} = 4 .$$

**Ответ:** с диафрагмой интенсивность света увеличится в 4 раза.

**Задача 68**. Какое число штрихов нанесено на 1 мм дифракционной решетки, если красная линия ($\lambda = 0,7$ мкм) в спектре третьего порядка наблюдается под углом $\varphi = 57°12'$? Свет падает на решетку нормально.

**Дано:**
$\lambda = 0,7 \cdot 10^{-6}$ м
$k = 3$
$\varphi = 57°12'$
$N = ?$

**Решение.** Запишем условие получения главных максимумов (4.34):

$$d \sin\varphi = k\lambda, \quad (k = 0,1,2,3,...) ,$$

так как $d = \frac{1}{N}$, то получим

$$\frac{1}{N}\sin\varphi = k\lambda, \quad N = \frac{\sin\varphi}{k\lambda} .$$

$$N = \frac{\sin 57°12' \cdot 10^{-3}\text{м}}{3 \cdot 0,7 \cdot 10^{-6}\text{м}} = 400 .$$

**Ответ:** $N = 400$ .

# Глава 23
# ПОЛЯРИЗАЦИЯ СВЕТА

## § 135. Естественный и поляризованный свет

Согласно теории Максвелла свет представляет собой поперечные волны (рис. 164,а).

На рис. 164,б, в рассматриваются только колебания светового вектора, т. е. вектора напряженности электрического поля $\vec{E}$. В *естественном свете* рис. 164,б вектора $\vec{E}$ имеют разные направления, оставаясь перпендикулярным вектору скорости $\vec{c}$. Это объясняется тем, что источники естественного света S представляют собой совокупность огромного числа элементарных источников (атомов и молекул), испускающих свет независимо друг от друга с разными фазами и с различной ориентацией векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$.

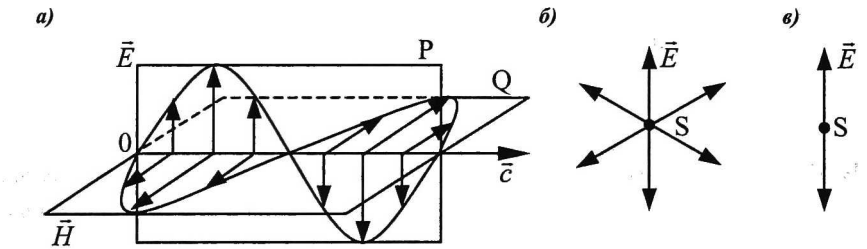



Рис. 164

Некоторые кристаллы могут ослабить или совсем устранить колебания вектора $\vec{E}$ какого-нибудь направления. Если колебания вектора $\vec{E}$ совершаются в одной фиксированной плоскости, проходящей через луч (рис. 164,а,в), то такой свет называется *плоскополяризованным*, или *линейно поляризованным*. *Поляризация света* — это упорядоченность в ориентации векторов напряженностей электрического $\vec{E}$ и магнитного $\vec{H}$ полей световой волны в плоскости, перпендикулярной световому лучу.

Плоскость P, в которой колеблется световой вектор $\vec{E}$ в плоскополяризованной волне, называется *плоскостью колебаний*. Перпендикулярная к P плоскость Q, в которой колеблется вектор $\vec{H}$, называется *плоскостью поляризации*.

Возможна поляризация, в результате которой световой вектор $\vec{E}$ поворачивается вокруг луча, а конец вектора описывает в пространстве эллипс. В этом случае свет называется *эллиптически поляризованным*. Если конец вектора $\vec{E}$ описывает в пространстве окружность, то свет называется *поляризованным по кругу*, или *циркулярно поляризованным*. Поляриза-

ция по кругу и линейная поляризация являются частными случаями эллиптической поляризации света.

Рассмотрим сложение двух линейно поляризованных электрических колебаний, имеющих одинаковую циклическую частоту $\omega$ и постоянную разность фаз, происходящих во взаимно перпендикулярных направлениях:

$$E_X = E_{OX}\cos(\omega t + \varphi_1),$$
$$E_Y = E_{OY}\cos(\omega t + \varphi_2). \tag{4.36}$$

Исключив из системы уравнений (4.36) $\omega t$, получим колебания, описываемые уравнением

$$\frac{E_X^2}{E_{OX}^2} + \frac{E_Y^2}{E_{OY}^2} - 2\frac{E_X E_Y}{E_{OX}E_{OY}}\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1). \tag{4.37}$$

Если разность фаз $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, где $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$, то $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = 0$, а $\sin(\varphi_2 - \varphi_1) = \pm1$ и уравнение (4.37) примет вид

$$\frac{E_X^2}{E_{OX}^2} + \frac{E_Y^2}{E_{OY}^2} = 1. \tag{4.38}$$

В общем случае, когда $E_{OX} \neq E_{OY}$, выражение (4.38) является уравнением эллипса с центром в начале координат (рис. 165). При нечетном числе $k$ вектор $\vec{E}$ вращается по ходу часовой стрелки (при четном $k$ — *наоборот*) и световая волна распространяется в направлении оси $Z$. Это *правая эллиптически поляризованная волна*. Когда $k$ нечетное — *левая эллиптически поляризованная волна*.

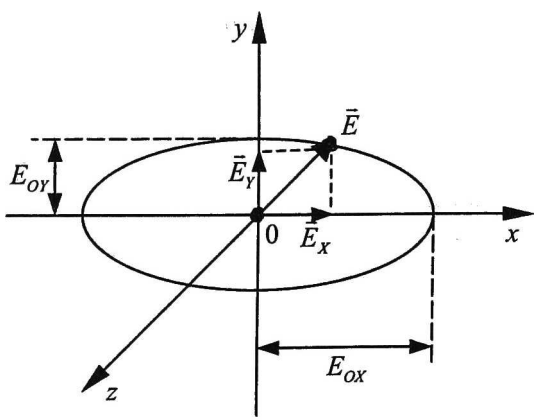



Рис. 165

Схематически эллиптически поляризованную волну для данного момента времени, когда $E_{OX} = E_{OY}$, можно представить следующим образом: конец вектора $\vec{E}$ движется по винтовой линии, расположенной на наружной поверхности прямого цилиндра, поперечным сечением которого является эллипс. При этом вектор $\vec{E}$ перпендикулярен оси цилиндра, вдоль которой распространяется световой луч.

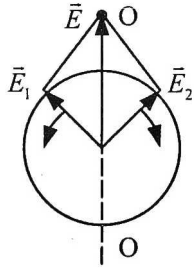


Рис. 166

При сложении двух волн одинаковой частоты и амплитуды, но обладающих левой и правой круговыми поляризациями, образуется линейно поляризованная волна, так как результирующий вектор $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ все время совпадает с вертикальной линией О–О (рис. 166).

## § 136. Закон Малюса

Устройства, позволяющие получать поляризованный свет, называются *поляризаторами*. Для обнаружения поляризованного света применяются *анализаторы*. Анализаторами могут служить те же устройства, которые являются поляризаторами.

Пусть на поляризатор 1 (рис. 167) падает плоскополяризованный свет, имеющий амплитуду $A_0$ и интенсивность $I_0$. Через поляризатор проходит составляющая колебания с амплитудой $A = A_0 \cos\varphi$, где $\varphi$ — угол между плоскостью колебаний светового вектора падающей волны и плоскостью поляризатора (плоскость, свободно пропускающая колебания). Тогда

$$A^2 = A_0^2 \cos^2\varphi, \text{ но } A^2 = I_1, \text{ а } A_0^2 = I_0,$$

и окончательно запишем:

$$I = I_0 \cos^2\varphi.$$

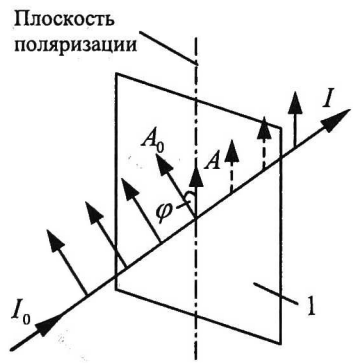


Рис. 167

Получили *закон Малюса*[1] для плоскополяризованного света.

Если пропускать естественный свет интенсивностью $I_e$ через два поляризатора, плоскости которых расположены под углом φ друг к другу, то из первого поляризатора выйдет плоскополяризованный свет с интенсивностью $I_0 = \frac{1}{2} I_e$, а из второго $I = I_0 \cos^2\varphi$, т. е. интенсивность

[1] Этьенн Луи Малюс (1775–1812) — французский физик.

естественного света, прошедшего через два поляризатора, равна

$$I = \frac{1}{2} I_e \cos^2 \varphi . \tag{4.39}$$

Из уравнения (4.39) следует, что максимальная интенсивность поляризованного света равна $I_{max} = \frac{1}{2} I_e$, когда угол $\varphi = 0$ (поляризаторы параллельны), и минимальная интенсивность $I_{min} = 0$, когда $\varphi = 90°$ (поляризаторы скрещены). Физическая величина

$$P = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} \tag{4.40}$$

называется *степенью поляризации*. Для естественного света $I_{max} = I_{min}$ и $P = 0$, для плоскополяризованного света $I_{min} = 0$ и $P = 1$.

## § 137. Поляризация света при отражении и преломлении. Формулы Френеля

Поляризация света происходит на границе двух диэлектриков. В общем случае отраженный луч частично поляризован, но при угле падения $i_{Бр}$, удовлетворяющем условию

$$\operatorname{tg} i_{Бр} = \frac{n_2}{n_1}, \tag{4.41}$$

отраженный луч становится полностью поляризованным. Уравнение (4.41) называется *законом Брюстера*[1], а угол падения луча $i_{Бр}$, при котором отраженный луч полностью поляризован, называется *углом Брюстера*. Колебания вектора $\vec{E}$ в отраженном свете происходят перпендикулярно плоскости падения луча (на рис. 168 изображены точками).

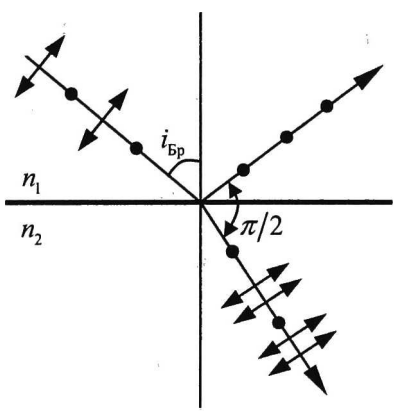


Рис. 168

Преломленный луч оказывается частично поляризованным. Колебания вектора $\vec{E}$ в преломленном луче совершаются преимущественно параллельно плоскости падения (на рис. 168 изображены стрелками).

[1] Дейвид Брюстер (1781–1868) — шотландский физик.

Если вместо одной пластинки свет пропускать через систему одинаковых пластинок, расположенных друг за другом так, что на каждую пластинку свет падает под углом Брюстера, то на выходе можно получить практически полностью поляризованный свет. Такая система, набранная из стеклянных пластинок, называется *стеклянной стопой*.

При падении луча под углом Брюстера отраженный и преломленный лучи взаимно перпендикулярны.

Пусть на границу, разделяющую два однородных диэлектрика, падает плоская электромагнитная волна. На поверхности раздела эта волна частично отражается в первую среду и частично преломляется, переходя во вторую среду. Из электромагнитной теории Максвелла и граничных условий для векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ (см. § 74, 102) следует, что на границе раздела двух сред с показателями преломления $n_1 = \sqrt{\varepsilon_1}$ и $n_2 = \sqrt{\varepsilon_2}$ должны выполняться следующие соотношения: $\vec{E}_{1\tau} = \vec{E}_{2\tau}$ и $\vec{H}_{1\tau} = \vec{H}_{2\tau}$ (непрерывность тангенциальных компонент векторов напряженности электрического $\vec{E}$ и магнитного $\vec{H}$ полей); $\varepsilon_1 \vec{E}_{1n} = \varepsilon_2 \vec{E}_{2n}$ и $\vec{H}_{1n} = \vec{H}_{2n}$ (непрерывность нормальных компонент векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$), где $\varepsilon_1$ и $\varepsilon_2$ — диэлектрические проницаемости первой и второй среды. В первой среде результирующее значение напряженности электрического поля определяется суммой напряженностей падающей и отраженной волн, а во второй — полем преломленной волны.

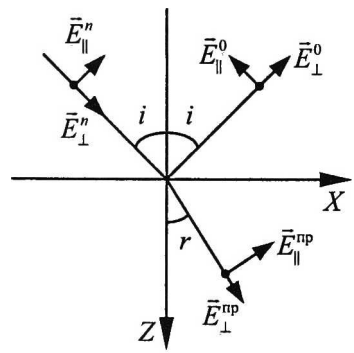


Рис. 169

Для нахождения соотношений между амплитудами и фазами волн принято раскладывать вектор $\vec{E}$ на два взаимно перпендикулярных вектора, один из которых ($\vec{E}_{\parallel}$) колеблется в плоскости падения, а другой ($\vec{E}_{\perp}$) — перпендикулярно этой плоскости (рис. 169):

$$\vec{E}^{п} = \vec{E}^{п}_{\parallel} + \vec{E}^{п}_{\perp}, \quad \vec{E}^{о} = \vec{E}^{о}_{\parallel} + \vec{E}^{о}_{\perp}, \quad \vec{E}^{пр} = \vec{E}^{пр}_{\parallel} + \vec{E}^{пр}_{\perp},$$

где индексы: п, о, пр — относятся к падающей, отраженной и преломленной волнам соответственно.

Из рис. 169 видно, что

$$\begin{aligned} E^{п}_{x} &= E^{п}_{\parallel}\cos i, \quad E^{о}_{x} = -E^{о}_{\parallel}\cos i, \\ E^{п}_{y} &= E^{п}_{\perp}, \quad E^{о}_{y} = E^{о}_{\perp}, \\ E^{п}_{z} &= -E^{п}_{\parallel}\sin i, \quad E^{о}_{z} = -E^{о}_{\parallel}\sin i. \end{aligned} \tag{4.42}$$

Компоненты, перпендикулярные плоскости чертежа, на рис. 169 условно обозначены кружками. Положительные направления $\|$-составляющей показаны отрезками, а $\perp$-составляющие направлены от наблюдателя за чертеж. Отсюда следует, что компоненты $E_{\perp}^{n}$, $E_{\perp}^{0}$ и $E_{\perp}^{np}$, а также $E_{\|}^{n}$ и $E_{\|}^{np}$, совпадают по фазе, если их знаки одинаковы, и противоположны по фазе, когда имеют разные знаки. Компоненты $E_{\|}^{n}$ и $E_{\|}^{o}$ совпадают по фазе, когда их знаки различны, и противоположны по фазе, когда их знаки одинаковы.

Запишем граничные условия в виде

$$E_y^{n}+E_y^{o}=E_y^{np},\quad H_x^{n}+H_x^{o}=H_x^{np},\quad H_y^{n}+H_y^{o}=H_y^{np}.$$

Тогда получим

$$\begin{gathered}(E_{\|}^{n}-E_{\|}^{o})\cos i=E_{\|}^{np}\cos r,\\ E_{\perp}^{n}+E_{\perp}^{o}=E_{\perp}^{np},\\ \sqrt{\varepsilon_1}(E_{\perp}^{n}-E_{\perp}^{o})\cos i=\sqrt{\varepsilon_2}E_{\perp}^{np}\cos r,\\ \sqrt{\varepsilon_1}(E_{\|}^{n}+E_{\|}^{o})=\sqrt{\varepsilon_2}E_{\|}^{np}.\end{gathered}\tag{4.43}$$

Решая систему уравнений (4.43) относительно $E_{\|}^{o}$, $E_{\perp}^{o}$, $E_{\|}^{np}$ и $E_{\perp}^{np}$, получим формулы Френеля:

$$\begin{gathered}E_{\|}^{o}=E_{\|}^{n}\frac{\operatorname{tg}(i-r)}{\operatorname{tg}(i+r)};\quad E_{\|}^{np}=E_{\|}^{n}\frac{2\sin r\cos i}{\sin(i+r)\cos(i-r)};\\ E_{\perp}^{o}=-E_{\perp}^{n}\frac{\sin(i-r)}{\sin(i+r)};\quad E_{\perp}^{np}=E_{\perp}^{n}\frac{2\sin r\cos i}{\sin(i+r)}.\end{gathered}\tag{4.44}$$

Если сумма углов $(i+r)=\dfrac{\pi}{2}$, то из формул Френеля следует, что $\operatorname{tg}(i+r)=\infty$ и $E_{\|}^{o}=0$. Это значит, что в отраженной волне вектор $\vec{E}$ колеблется только в направлении, перпендикулярном плоскости падения. Отраженная волна оказывается линейно поляризованной, а угол падения $i$ является углом Брюстера.

Как следует из формул Френеля, знаки $E_{\|}^{n}$ и $E_{\perp}^{np}$, $E_{\|}^{n}$ и $E_{\|}^{np}$ совпадают. Это значит, что при преломлении фаза волны не меняется. Что касается отраженной волны, то при $n_1<n_2$ для $E_{\perp}$ наблюдается изменение фазы на $\pi$; для компоненты $E_{\|}$ такое изменение фазы происходит только при углах падения, больших $i_{Бр}$. Если $n_1>n_2$, то изменение фазы в отраженной волне не происходит.

Поскольку интенсивность света пропорциональна $E^2$, то из формул Френеля можно получить распределение интенсивностей. Отношение интенсивностей отраженной $I^{\circ}$ и падающей $I^{\text{п}}$ волн называется *коэффициентом отражения* $\rho$. Так, для коэффициентов отражения линейно-поляризованного света получили формулы

$$\rho_{\perp} = \frac{I_{\perp}^{\circ}}{I_{\perp}^{\text{п}}} = \frac{\sin^2(i-r)}{\sin^2(i+r)}, \quad \rho_{\parallel} = \frac{I_{\parallel}^{\circ}}{I_{\parallel}^{\text{п}}} = \frac{tg^2(i-r)}{tg^2(i+r)}. \qquad (4.45)$$

Для уменьшения коэффициента отражения применяется эффективный метод просветления оптических систем, описанный в §127.

Классическая электромагнитная теория Максвелла позволяет объяснить механизм поляризации света при отражении и преломлении. Под действием световой волны оптические электроны атомов диэлектрика совершают вынужденные колебания, которые излучают вторичные электромагнитные волны. Вторичные волны, накладываясь друг на друга, образуют отраженную волну вне диэлектрика и, складываясь с падающей волной, — преломленную волну внутри диэлектрика.

Если колебания отдельного электрона разложить на составляющие — параллельную и перпендикулярную плоскости падения, то каждой из этих компонент соответствует плоскополяризованная вторичная волна.

Под действием падающей электромагнитной волны электрон излучает в основном в направлении, перпендикулярном направлению колебаний, образуя *лепесток направленности излучений*. Интенсивность вторичной волны с плоскостью колебаний, перпендикулярной плоскости падения, намного превышает интенсивность колебаний другого направления. Поэтому отраженный луч оказывается частично поляризованным. При угле падения, равном углу Брюстера, интенсивность вторичной волны соответствующего направления уменьшается до нуля и отраженный луч полностью поляризуется.

## § 138. Двойное лучепреломление. Поляризационные призмы

*Анизотропными* называются вещества, свойства которых различны в разных направлениях. Анизотропные кристаллы (исландский шпат, кварц и др.) обладают двойным лучепреломлением. Если на кристалл исландского шпата, представляющий по форме ромбоэдр, направить луч естественного света, то он разделяется в кристалле на два луча, распространяющихся с разными скоростями. Это явление получило название *двойного лучепреломления*.

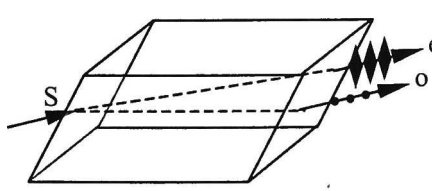


Рис. 170

Луч *о* (рис. 170) распространяется во всех направлениях кристалла с одинаковой скоростью, имеет постоянный показатель преломления $n_o$ и подчиняется законам преломления, и поэтому называется *обыкновенным лучом*. Другой луч *е* не подчиняется законам преломления, скорость его различна в разных направлениях и показатель преломления $n_e$ зависит от направления распространения луча в кристалле. Этот луч называется *необыкновенным*.

В кристалле существуют направления, вдоль которых скорости распространения обыкновенного и необыкновенного лучей одинаковы, т. е. двойное лучепреломление не наблюдается. Такие направления называются *оптическими осями кристалла*. Плоскость, содержащая оптическую ось и данный луч, называется *главным сечением кристалла*.

Кристаллы, обладающие двойным лучепреломлением, делятся на *одноосные* и *двуосные*. У двуосных кристаллов (слюда, гипс), в отличие от одноосных, оба луча необыкновенные. Мы будем рассматривать только одноосные кристаллы.

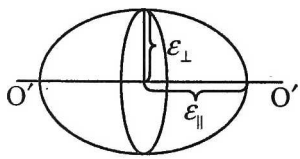


Рис. 171

В кристалле, в котором наблюдается двойное лучепреломление, диэлектрическая проницаемость $\varepsilon$ зависит от ориентации светового вектора $\vec{E}$. Значения $\varepsilon$ в направлении оптической оси $\varepsilon_\parallel$ и в направлениях, перпендикулярных оптической оси $\varepsilon_\perp$ для одноосных кристаллов различны. Распределения $\varepsilon_\perp$ и $\varepsilon_\parallel$ образуют эллипсоид вращения (рис. 171).

Так как показатель преломления $n = \sqrt{\varepsilon}$, то скорость световой волны $v = \dfrac{c}{n}$ в кристалле зависит от направлений колебаний вектора $\vec{E}$.

Двойное лучепреломление можно объяснить, используя принцип Гюйгенса. Пусть пучок естественного света падает под углом $i$ на грань одноосного кристалла (см. рис. 172).

Допустим, что в данный момент времени фронт падающей волны занимает положение АС, достигая кристалла. При различных углах падения $i$ лучи, преломленные в кристалле, распространяются по всем направлениям. Скорость обыкновенной волны не зависит от направления и к моменту времени, когда фронт падающей волны достигнет точки В, фронт вторичной волны образует полусферу с центром в точке А. Касательная ДВ к полусфере является фронтом преломленной обыкновенной волны. Фронт вторичной необыкновенной волны имеет форму эллипса и касательная РВ является фронтом преломленной необыкновенной волны.

Преломленный обыкновенный луч проходит через точку M, а необыкновенный через N. Точки M и N лежат на разных лучах, таким образом, в кристалле происходит разделение падающего луча 1 на два: обыкновенный (*o*-луч) и необыкновенный (*e*-луч).

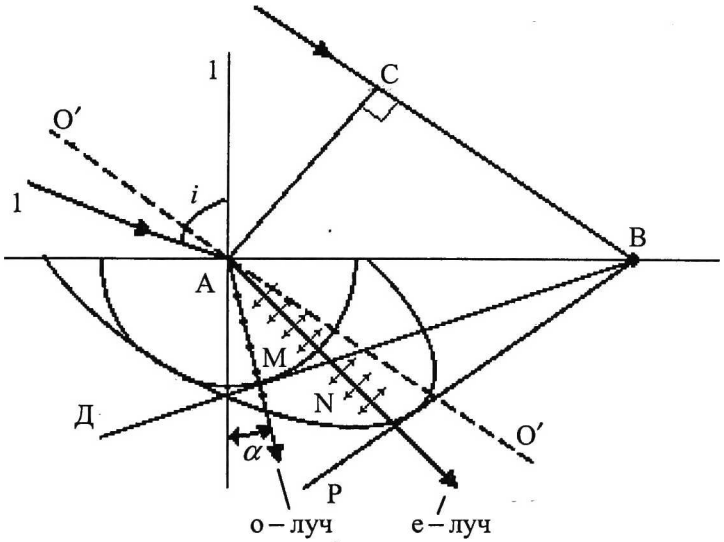



Рис. 172

Обыкновенный и необыкновенный лучи полностью поляризованы во взаимно перпендикулярных плоскостях. Направление колебаний светового вектора в *o*-лучах перпендикулярно главному сечению кристалла, а в *e*-лучах колебания вектора $\vec{E}$ лежат в плоскости главного сечения.

Из анизотропных кристаллов изготовляют *поляризаторы* света. Для этого иногда используется один из линейнополяризованных лучей, а другой луч удаляется. Примером могут служить призмы Николя, Глана–Фуко, Волластона.

Призма Николя[1] (николь) представляет собой параллелепипед (рис. 173), вырезанный из кристалла исландского шпата, разрезанный по диагонали на две части и склеенный канадским бальзамом.

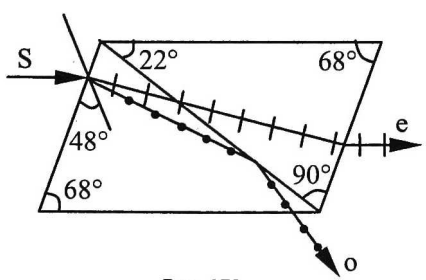



Рис. 173

Для исландского шпата $n_o = 1{,}6584$, $n_e = 1{,}4864$, для канадского бальзама $n = 1{,}550$ (данные

[1] Уильям Николь (1768–1851) — шотландский ученый.

приведены для желтой линии натрия $\lambda = 589{,}3$ нм). При определенном угле падения лучей на призму обеспечивается полное отражение *о*-луча на границе с канадским бальзамом. Отраженный луч поглощается зачерненной боковой гранью призмы или выводится из кристалла. На выходе из призмы получается линейнополяризованный *е*-луч.

Призма Глана–Фуко[1] состоит из двух прямоугольных призм (рис. 174,а), изготовленных из исландского шпата и разделенных воздушным промежутком. Оптические оси прямоугольных призм параллельны. Падающий луч делится призмой на обыкновенный и необыкновенный лучи. Обыкновенный луч претерпевает полное отражение и выводится из системы, а необыкновенный луч проходит через обе призмы.

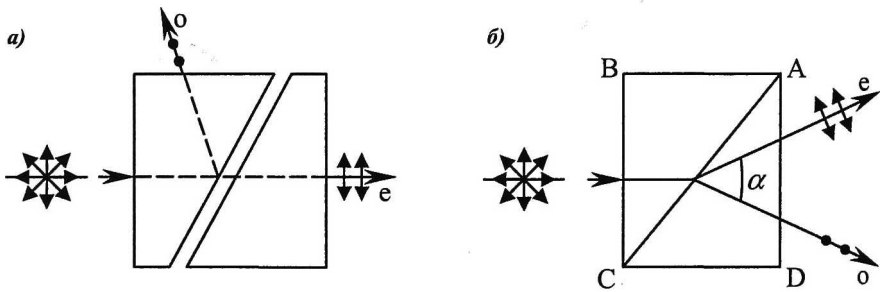



Рис. 174

Призма Волластона[2] состоит из двух призм, изготовленных из исландского шпата, со взаимно перпендикулярными оптическими осями (рис. 174,б). Призмы склеены по гипотенузам AC. В призме ABC лучи *о* и *е* распространяются по направлению падающего луча. Оптические оси призм ABC и ACD взаимно перпендикулярны, поэтому *о*-луч первой призмы становится *е*-лучом во второй, и наоборот. Из призмы выходят два расходящихся луча, которые ортогонально поляризованы. Угол расхождения лучей $\alpha \approx (10° - 20°)$.

Некоторые анизотропные кристаллы (турмалин, герапатит и т. д.) наряду с двойным лучепреломлением обладают *дихроизмом* — способностью поглощать один из лучей значительно сильнее, чем другой. Такие кристаллы применяются для изготовления поляризаторов. Кристаллики герапатита, вкрапленные в целлулоидную пленку, используются для устройства поляроидов, применяемых в качестве поляризаторов (анализаторов) света.

[1] Жан Бернар Фуко (1819–1868) — французский физик

[2] У. Волластон (1766–1828) — английский физик.

## § 139. Искусственная оптическая анизотропия

В изотропных веществах может наблюдаться двойное лучепреломление под влиянием внешних воздействий: при механической деформации или под действием электрического поля. Пластинка 1, изготовленная из плексигласа, помещается между скрещенными николями, один из которых является поляризатором P, а другой анализатором A (рис. 175). Если пластинка свободна от деформаций, то луч света через систему не проходит. При сжатии (или растяжении) пластинки в направлении OO поле зрения просветляется. Пластинка приобретает свойства одноосного кристалла, оптическая ось которого совпадает с направлением деформации.

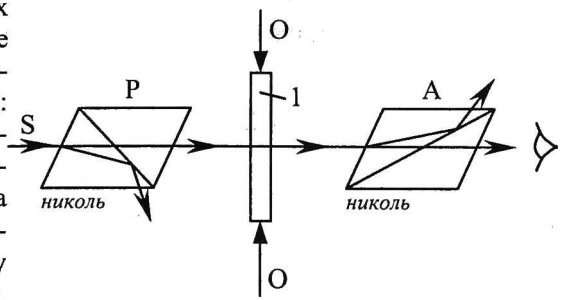


Рис. 175

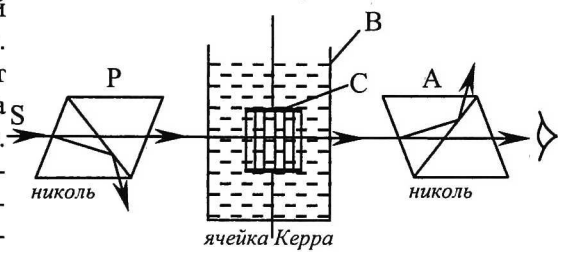


Рис. 176

По разности показателей преломления обыкновенного и необыкновенного лучей можно определить распределение механических напряжений σ в исследуемой пластинке:

$$n_o - n_e = k\sigma,$$

где $k$ — коэффициент пропорциональности.

Если между двумя скрещенными николями поместить кювету с нитробензолом B и конденсатором C (рис. 176), то при подаче электрического заряда на пластины конденсатора поле зрения просветляется (жидкость приобретает свойства одноосного кристалла с оптической осью, направленной вдоль поля). Это явление получило название *эффекта Керра*[1], а кювета с жидкостью и конденсатором называется *ячейкой Керра*. Разность показателей преломления обыкновенного и необыкновенного лучей равна

$$n_o - n_e = kE^2,$$

где $E$ — напряженность электрического поля; $k$ — постоянная Керра.

[1] Джон Керр (1824–1907) — шотландский физик.

Ячейка Керра является практически безынерционным световым затвором (время срабатывания $\tau = \left(10^{-13} - 10^{-10}\right)$ с) и используется при фото- и киносъемках быстропротекающих процессов, в схемах управления лазерами и т. д.

## § 140. Вращение плоскости поляризации

Некоторые кристаллы (кварц, киноварь и т. д.), а также жидкости (скипидар, никотин и др.) и водные растворы органических веществ (сахар, кислоты и др.) способны вращать плоскость поляризации проходящего через них плоскополяризованного света. Такие вещества называются *оптически активными*.

В кристаллах угол поворота плоскости поляризации:

$$\varphi = \alpha l,$$

где $\alpha$ — постоянная вращения; $l$ — путь света в кристалле.

Наибольший угол поворота $\varphi$ наблюдается в случае, когда луч проходит вдоль оптической оси кристалла.

В растворах угол $\varphi$ пропорционален концентрации вещества $C$:

$$\varphi = \alpha_0 C l, \tag{4.46}$$

где $\alpha_0$ — удельная постоянная вращения; $l$ — путь света в растворе.

Оптически активные вещества в зависимости от направления вращения плоскости поляризации делятся на *право-* и *левовращающие*.

Оптическая активность веществ обусловлена асимметрией строения их молекул.

Согласно Френелю линейно-поляризованный монохроматический свет при входе в оптически активное вещество разлагается на две волны, которые циркулярно поляризованы во взаимно противоположных направлениях (рис. 177) и имеют одинаковую частоту $\omega$. При этом вектор падающей волны $\vec{E} = \vec{E}' + \vec{E}''$, а модули векторов связаны соотношением $\left|\vec{E}'\right| = \left|\vec{E}''\right| = \left|\vec{E}\right|/2$. Если смотреть навстречу световому лучу, то вектор $\vec{E}'$ вращается против, а $\vec{E}''$ — по часовой стрелке и в любой момент времени симметричны относительно плоскости колебаний падающей волны O–O. Скорости этих волн $v'$ и $v''$ в оптически активном веществе различны, поэтому при прохождении через вещество между ними возникает оптическая разность хода $\delta$ и происходит сдвиг фаз $\Delta\varphi$:

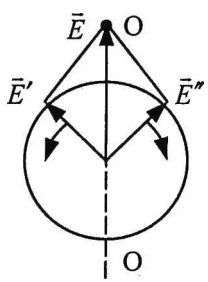


Рис. 177

$$\delta = l(n' - n'') = lc\left(\frac{1}{v'} - \frac{1}{v''}\right),$$

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi\delta}{\lambda} = \omega l\left(\frac{1}{v'} - \frac{1}{v''}\right),$$

где $l$ — толщина слоя вещества; $c$ — скорость света в вакууме, $n'$ и $n''$ — показатели преломлений световых волн.

Когда скорость $v' < v''$, на выходе из оптически активного вещества вектор $\vec{E}''$ опережает по фазе вектор $\vec{E}'$ на $\Delta\varphi > 0$ и результирующий вектор $\vec{E}$ колеблется в плоскости O′–O′, которая оказывается повернутой по часовой стрелке на угол $\frac{\Delta\varphi}{2}$ (рис. 178). Такое оптически активное вещество является *правовращающим*. Если $v' > v''$, то $\Delta\varphi < 0$ и вещество будет *левовращающим*. Когда скорость $v' = v''$, *эффекта не наблюдается, вещество не является оптически активным.*

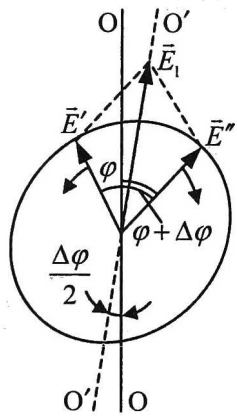


Рис. 178

Некоторые вещества, не являющиеся оптически активными, приобретают свойство вращать плоскость поляризации при помещении их в магнитное поле. Это явление получило название *эффекта Фарадея*. При этом угол поворота плоскости поляризации

$$\varphi = VHl,$$

где $H$ — напряженность магнитного поля; $l$ — путь света в веществе; $V$ — постоянная Верде (удельное магнитное вращение).

Вращение плоскости поляризации обусловлено диамагнитным эффектом. При помещении вещества во внешнее магнитное поле возникает прецессия электронных орбит, что приводит к вращательной анизотропии вещества. Возникновение анизотропии объясняется различием во взаимодействии с веществом циркулярно-поляризованных волн $\vec{E}'$ и $\vec{E}''$, так как направление вращения одного из векторов совпадает с прецессионным вращением, а другого не совпадает.

Уравнение (4.46) лежит в основе метода измерения концентрации растворенных веществ (поляриметрия), который широко используется в медицине, в биофизических исследованиях и в промышленности.

## ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

**Задача 69**. Угол преломления луча в жидкости $r = 35°$. Определить показатель преломления жидкости, если отраженный луч полностью поляризован.

**Дано:**
$r = 35°$
$n_1 = 1,0$
$n_2 = ?$

**Решение.** По условию задачи отраженный свет полностью поляризован. Это происходит тогда, когда луч света падает на жидкость под углом Брюстера (4.41):

$$\operatorname{tg} i_{Бр} = \frac{n_2}{n_1}. \qquad (1)$$

Запишем закон преломления (4.3):

$$\frac{\sin i_{Бр}}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1}. \qquad (2)$$

Приравняем левые части уравнений (1) и (2):

$$\frac{\sin i_{Бр}}{\cos i_{Бр}} = \frac{\sin i_{Бр}}{\sin r}, \text{ откуда } \sin r = \cos i_{Бр}.$$

А это значит, что сумма углов $i_{Бр} + r = 90°$, тогда

$$i_{Бр} = 90 - r = 55°.$$

Из уравнения (2) находим $n_2$:

$$n_2 = \frac{\sin i_{Бр}}{\sin r}, \quad n_2 = \frac{\sin 55°}{\sin 35°} = 1,43.$$

**Ответ:** $n_2 = 1,43$.

**Задача 70**. Во сколько раз уменьшается интенсивность естественного света, прошедшего через два поляризатора, если угол между их главными плоскостями был равен $30°$ и в каждом поляризаторе в отдельности теряется 10% интенсивности падающего на него света?

**Дано:**
$\varphi = 30°$
$k = 0,1$
$\frac{I_0}{I_2} = ?$

**Решение.** Естественный свет можно представить как наложение двух некогерентных волн, которые поляризованы во взаимно перпендикулярных плоскостях и имеют одинаковые интенсивности, т. е.

$$I_0 = 0,5I_\perp + 0,5I_\parallel,$$

где $I_0$ — интенсивность естественного света, $I_\perp$ и $I_\parallel$ — составляющие интенсивностей поляризованного света, у которых колебания вектора напряженности электрического поля $\vec{E}$ перпендикулярны и параллельны плоскости падения.

Поляризатор пропускает колебания, параллельные его главной плоскости, интенсивность которых $I_{\parallel}$, и полностью задерживает колебания, перпендикулярные этой плоскости, интенсивность которых $I_{\perp}$. На выходе из первого поляризатора получается плоскополяризованный свет, интенсивность которого $I_1$ с учетом поглощения и отражения света поляризатором равна

$$I_1 = 0,5I_0(1-k). \quad (1)$$

После прохождения второго поляризатора интенсивность света еще уменьшится за счет поглощения и отражения света поляризатором и за счет несовпадения плоскости поляризации света с главной плоскостью поляризации.

С учетом закона Малюса

$$I_2 = I_1(1-k)\cos^2\varphi. \quad (2)$$

Подставив уравнение (1) в (2), получим

$$I_2 = 0,5I_0(1-k)^2\cos^2\varphi. \quad (3)$$

Используя уравнение (3), найдем уменьшение интенсивности света:

$$\frac{I_0}{I_2} = \frac{2}{(1-k)^2\cos^2\varphi}.$$

Подставив численные значения, получим

$$\frac{I_0}{I_2} = 3,3.$$

**Ответ:** интенсивность света уменьшится в 3,3 раза.

# Глава 24
# ДИСПЕРСИЯ СВЕТА

## § 141. Электронная теория дисперсии

Зависимость показателя преломления $n$ вещества от частоты $\omega$ или длины волны $\lambda$ называется *дисперсией света*. Эта зависимость проявляется, например, при прохождении белого света через стеклянную призму. На экране за призмой наблюдается радужная полоска, называемая *дисперсионным спектром*. Различают нормальную дисперсию, когда $\frac{dn}{d\omega} > 0$, и аномальную при $\frac{dn}{d\omega} < 0$.

По теории Максвелла свет представляет собой электромагнитные волны. Падающая световая волна вызывает вынужденные колебания электронов в атомах вещества. Выведенные из положений равновесия электроны начинают колебаться, теряя энергию на излучение вторичных волн.

Для простоты рассмотрим вынужденные колебания одного электрона. Аналогично уравнению (1.139) для вынужденных колебаний электрона запишем:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\omega t = \frac{eE_0}{m}\cos\omega t = \frac{eE}{m}, \qquad (4.47)$$

где $F_0$ — амплитудное значение силы, действующей на электроны; $e$, $m$ — заряд и масса электрона; $E_0$, $E$ — амплитудное и мгновенное значения напряженности электрического поля волны; $\omega$ — циклическая частота колебаний в световой волне; $\omega_0$ — собственная частота колебаний электрона. Уравнение (4.47) записано без учета сил сопротивления, обуславливающих поглощение энергии световой волны. Действием магнитной составляющей силы Лоренца также пренебрегли ввиду ее малости.

Решением уравнения (4.47) является уравнение вида

$$x = \frac{eE}{m\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)}. \qquad (4.48)$$

Оптически прозрачные среды являются диэлектриками. Под действием электрического поля падающей волны происходит их поляризация. Показатель преломления вещества согласно закону Максвелла (3.204) $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$, т. к. для диэлектриков $\mu \approx 1$, то $n = \sqrt{\varepsilon}$.

Диэлектрическая проницаемость однородного диэлектрика

$$\varepsilon = n^2 = 1 + \chi = 1 + \frac{P}{\varepsilon_0 E}, \qquad (4.49)$$

где $\chi$ — диэлектрическая восприимчивость; $P$ — модуль вектора поляризации.

Модуль дипольного момента электрона, совершающего вынужденные колебания $p = ex$, где $x$ — мгновенное смещение электрона.

Модуль вектора поляризации

$$P = Np = Nex, \tag{4.50}$$

где $N$ — число атомов в единице объема диэлектрика.

Подставляя выражения (4.49) и (4.50) в (4.48), получим

$$n^2 = 1 + \frac{P}{\varepsilon_0 E} = 1 + \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}. \tag{4.51}$$

Если в атоме несколько электронов, то уравнение (4.51) перепишется в виде

$$n^2 = 1 + \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m} \sum_i \frac{1}{\omega_{0i}^2 - \omega^2}. \tag{4.52}$$

где $\omega_{0i}$ — собственная циклическая частота электрона.

На (рис. 179) показан вид функции, описываемой уравнением (4.52). Если собственная частота электрона $\omega_0$ совпадает с частотой $\omega$, то функция претерпевает разрыв (обозначено пунктиром). Но если учитывать силы сопротивления при колебаниях электронов, то график функции будет иметь вид, показанный на (рис. 179) сплошной линией.

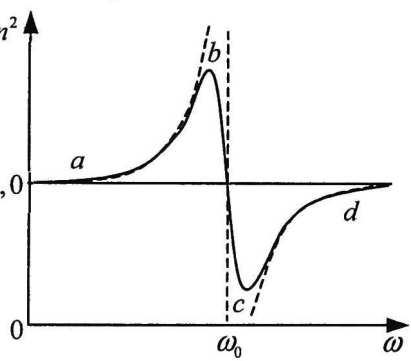


Рис. 179

Участки кривой *ab* и *cd* соответствуют области *нормальной дисперсии*, т. к. с ростом частоты $\omega$ показатель преломления $n$ увеличивается. Участок кривой *bc* относится к области *аномальной дисперсии*, т. к. с увеличением $\omega$ показатель преломления $n$ уменьшается.

Аномальная дисперсия наблюдается при частотах, соответствующих интенсивному поглощению света. При аномальной дисперсии $n \le 1$, т. е. длина световой волны в веществе больше длины волны в вакууме и фазовая скорость v больше скорости света в вакууме. Это не противоречит специальной теории относительности, т. к. в данном случае рассматривается фазовая скорость, а в СТО — реальной скоростью передачи сигнала является групповая скорость.

Излучение света, как правило, не является монохроматическим. Световой сигнал имеет форму короткого импульса, который можно предста-

вить как суперпозицию (наложение) гармонических волн различных частот, т. е. в виде *волнового пакета*. Волновой пакет характеризуется максимумом амплитуды. Если фазовая скорость распространения гармонических волн зависит от частоты (или длины волны), то наблюдается *дисперсия волн*. При отсутствии дисперсии волны распространяются с одинаковой фазовой скоростью и волновой пакет не меняет своей формы. В диспергирующей среде фазовые скорости гармонических волн различны и форма волнового пакета не сохраняется.

Скорость перемещения максимума амплитуды волнового пакета, когда спектр частот не очень широк, а дисперсия волн мала, называется *групповой скоростью*.

Рэлей установил связь между групповой $v_г$ и фазовой v скоростями:

$$v_г = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}. \qquad (4.53)$$

Если $\frac{dv}{d\lambda} > 0$ (нормальная дисперсия), то $v_г < v$; если $\frac{dv}{d\lambda} < 0$, то $v_г > v$ (аномальная дисперсия). При отсутствии дисперсии $\frac{dv}{d\lambda} = 0$ и групповая скорость совпадает с фазовой.

В теории относительности доказывается, что групповая скорость в отличие от фазовой не может быть больше скорости света в вакууме.

Области аномальной дисперсии позволяют определять частоты собственных колебаний электронов в атомах и молекулах и на этом основании судить об их структуре.

Области нормальной дисперсии используются при проведении спектрального анализа.

## § 142. Поглощение света веществом

Уменьшение энергии световой волны при прохождении ее сквозь слой вещества называется *поглощением света*. Свет различных длин волн поглощается веществом по-разному. Тело, освещенное белым светом, способно поглощать лучи определенных длин волн. Остальные же лучи отражаются или рассеиваются. При поглощении света часть энергии световой волны переходит во внутреннюю энергию вещества, вызывая его нагревание, или в энергию вторичного излучения (*фотолюминесценция*).

Рассмотрим поглощение света пластиной толщиной $d$, через которую проходит световая волна (см. рис. 180). Выделим в пластине тонкий слой $dx$, отстоящий от ее грани на расстоянии $x$. Для бесконечно малой толщины изменение интенсивности светового потока, прошедшего сквозь слой, пропорционально толщине слоя $dx$ и интенсивности света $I_x$ на входе в слой:

$$dI_x = -\alpha I_x dx, \qquad (4.54)$$

где $\alpha$ — коэффициент поглощения, зависящий от свойств поглощающего вещества.

Знак минус в выражении (4.54) указывает на убывание интенсивности света. Разделив переменные в уравнении (4.54) и интегрируя его, получим *закон Бугера*[1].

$$\int_{I_0}^{I} \frac{dI_x}{I_x} = -\alpha \int_0^d dx, \quad I = I_0 e^{-\alpha d}. \qquad (4.55)$$

где $I_0$ — интенсивность света на входе в пластину; $I$ — интенсивность света на выходе из пластины.

Из закона Бугера следует, что интенсивность света, проходящего сквозь пластину, уменьшается по экспоненте. Коэффициент поглощения $\alpha$ не зависит от интенсивности проходящего света. Для каждого вещества существует зависимость коэффициента $\alpha$ от длины волны, называемая *спектром поглощения*. Газы при небольших давлениях поглощают в узких спектральных интервалах и их спектры состоят из отдельных линий (или групп линий). Спектры жидкостей и твердых тел образуют широкие полосы поглощения.

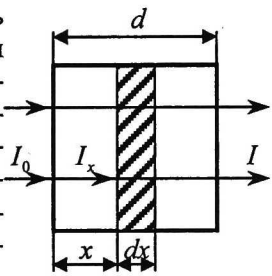


Рис. 180

[1] Пьер Бугер (1698–1758) — французский ученый.

# Глава 25
# КВАНТОВАЯ ПРИРОДА ИЗЛУЧЕНИЯ

## § 143. Тепловое излучение. Закон Кирхгофа

*Тепловым* называется электромагнитное излучение, обусловленное нагреванием тела. Тепловое излучение происходит за счет энергии атомов и молекул вещества и возникает при любых температурах выше абсолютного нуля.

Если нагретое тело поместить в идеально отражающую и непроницаемую для излучения оболочку, то с течением времени в результате обмена энергией между телом и излучением наступит *равновесие*: количество энергии, излучаемой и поглощаемой телом в единицу времени, станет одинаковым. Состояние термодинамического равновесия системы сохраняется до тех пор, пока не изменятся внешние условия. Самостоятельно система не может выйти из этого состояния. Среди известных видов излучения *только тепловое излучение может быть равновесным.*

Количество энергии $dW$, излучаемое телом за единицу времени, называется *потоком излучения*:

$$\Phi = \frac{dW}{dt}.$$

*Энергетической светимостью* тела $R_э$ называется отношение потока излучения к площади поверхности $S$ излучающего тела:

$$R_э = \frac{\Phi}{S}.$$

Энергетическая светимость измеряется в ваттах на квадратный метр (Вт/м$^2$).

Нагретое тело излучает электромагнитные волны различной длины волны. Каждая длина волны обладает определенной энергией.

Спектральный состав излучения характеризуется *спектральной плотностью энергетической светимости* $r_{\lambda,T}$ (лучеиспускательная способность):

$$r_{\lambda,T} = \frac{dR_э}{d\lambda},$$

где $dR_э$ — энергетическая светимость на участке спектра шириной $d\lambda$.

Опыты показывают, что спектральная плотность энергетической светимости зависит от длины волны $\lambda$ и от температуры тела $T$.

Зная $r_{\lambda,T}$, можно найти энергетическую светимость

$$R_э = \int_0^\infty r_{\lambda,T}\, d\lambda. \qquad (4.56)$$

Поглощение телом лучистой энергии характеризуется *спектральной поглощательной способностью* (коэффициент поглощения):

$$\alpha_{\lambda,T} = \frac{\Phi'_{\lambda,T}}{\Phi_{\lambda,T}}, \qquad (4.57)$$

где $\Phi_{\lambda,T}$ — поток падающего на тело излучения для данного интервала длин волн; $\Phi'_{\lambda,T}$ — поток, поглощенный телом.

Коэффициент поглощения зависит от температуры, длины волны и от природы тела.

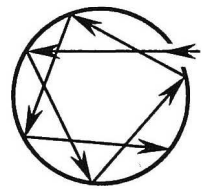


Рис. 181

Из выражения (4.57) следует, что $\alpha$ изменяется от 0 до 1. Тело, коэффициент поглощения которого для всех длин волн (или частот) равен единице, называется *черным*. Сажа, черный бархат, платиновая чернь и др. имеют коэффициенты поглощения, близкие к единице. Моделью черного тела может служить полый шар с небольшим отверстием в замкнутой полости (рис. 181). Луч света после многократного отражения в полости такого тела поглощается настолько, что интенсивность вышедшего луча практически равна нулю. Тело, для которого коэффициент поглощения меньше единицы, называется *серым*.

Количественная связь между поглощением и излучением тел устанавливается *законом Кирхгофа*: в состоянии термодинамического равновесия отношение спектральной плотности энергетической светимости к спектральной поглощательной способности одинаково для всех тел и равно спектральной плотности энергетической светимости черного тела $r^{\text{чер}}_{\lambda,T}$:

$$\frac{r_{1\lambda,T}}{\alpha_{1\lambda,T}} = \frac{r_{2\lambda,T}}{\alpha_{2\lambda,T}} = r^{\text{чер}}_{\lambda,T} = f(\lambda,T). \qquad (4.58)$$

Это отношение для всех тел является универсальной функцией Кирхгофа $f(\lambda, T)$ длины волны $\lambda$ и температуры $T$.

Из закона Кирхгофа следует, что каждое тело поглощает излучение в том интервале длин волн, в котором оно их испускает.

## § 144. Законы излучения черного тела

Зависимость спектральной плотности энергетической светимости $r_{\lambda,T}$ черного тела от длины волны $\lambda$ при постоянной температуре $T$ была установлена экспериментально (см. рис. 182).

Как видно из рисунка, спектр теплового излучения сплошной, с ростом температуры ($T_3 > T_2 > T_1$) лучеиспускательная способность тела увеличивается. Сформулируем опытные законы теплового излучения черного тела.

*Закон Стефана[1]–Больцмана: энергетическая светимость $R_э$ черного тела прямо пропорциональна четвертой степени абсолютной температуры*:

$$R_э = \sigma T^4, \tag{4.59}$$

где $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8} \dfrac{\text{Вт}}{\text{м}^2\text{К}^4}$ — постоянная Стефана–Больцмана.

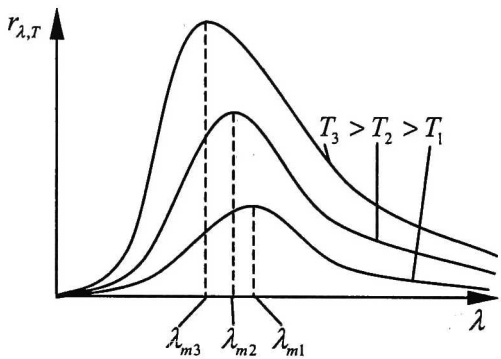


Рис. 182

Из рис. 182 также видно, что с ростом температуры максимум излучения $r_{\lambda,T}$ смещается в сторону более коротких длин волн.

*Закон смещения Вина[2]: длина волны $\lambda_m$, соответствующая максимальному значению спектральной плотности энергетической светимости $r_{\lambda,T}$ черного тела, обратно пропорциональна его абсолютной температуре*:

$$\lambda_m = \frac{b'}{T}, \tag{4.60}$$

где $b' = 2{,}9 \cdot 10^{-3}$ мК — постоянная Вина.

*Второй закон Вина: максимальное значение спектральной плотности энергетической светимости $r_{\lambda,T}$ черного тела прямо пропорционально пятой степени его абсолютной температуры*:

$$r_{\lambda,T} = b'' T^5, \tag{4.61}$$

где $b'' = 1{,}30 \cdot 10^{-5} \dfrac{\text{Вт}}{\text{м}^3\text{К}^5}$ — постоянная второго закона Вина.

В классической физике считается, что излучение и поглощение энергии телами происходит непрерывно. Экспериментальную зависимость спектральной плотности энергетической светимости от длины волны и температуры в рамках представлений классической физики объяснить не удалось.

[1] Йозеф Стефан (1835–1893) — австрийский физик.
[2] Вильгельм Вин (1864–1928) — немецкий физик.

## § 145. Формула Планка

В 1900 г. М. Планк[1] выдвинул гипотезу, согласно которой атом вещества излучает и поглощает энергию определенными порциями — *квантами*. Энергия кванта

$$E = h\nu = h\frac{c}{\lambda}, \tag{4.62}$$

где $h = 6{,}625 \cdot 10^{-34}$ Дж·с — постоянная Планка; $\nu$ — частота колебаний; $\lambda$ — длина волны; $c$ — скорость света в вакууме.

Согласно гипотезе Планка энергия, излучаемая и поглощаемая веществом, может принимать лишь дискретные значения, кратные целому числу $h\nu$. Для универсальной функции Кирхгофа Планк вывел формулу

$$r_{\lambda,T}^{\text{чер}} = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5}\frac{1}{\exp\left[hc/(\lambda kT)\right]-1},$$

или

$$r_{\lambda,T}^{\text{чер}} = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2}\frac{1}{\exp\left[h\nu/(kT)\right]-1}, \tag{4.63}$$

которая блестяще согласуется с опытными данными по распределению энергии в спектре излучения черного тела во всем диапазоне длин волн (частот) и температур. Здесь $k$ — постоянная Больцмана.

Законы Стефана–Больцмана и Вина, а также постоянные этих законов $\sigma$, $b'$, $b''$ можно вычислить по формулам Планка (4.62), (4.63), зная универсальные постоянные $h$, $k$ и $c$.

Законы теплового излучения используются в оптической пирометрии при измерении температуры раскаленных тел.

## § 146. Фотоэлектрический эффект

*Внешним фотоэффектом* называется явление выбивания электронов с поверхности металлов под действием света. Внешний фотоэффект был открыт в 1887 г. Г. Герцем. Фундаментальные исследования фотоэффекта выполнены в 1888–1890 гг. А. Столетовым[2]. Схема экспериментальной установки показана на рис. 183. Световой поток, падая на металлический катод К, вырывает из него электроны, которые под действием внешнего электрического поля двигались к аноду А. Напряжение между анодом и катодом регулировалось потенциометром Р и измерялось вольтметром V. Ток, протекающий через вакуумированный сосуд, где располагались катод и анод, регистрировался гальванометром G.

---

[1] Макс Планк (1858–1947) — немецкий физик.

[2] Александр Григорьевич Столетов (1839–1896) — русский физик.

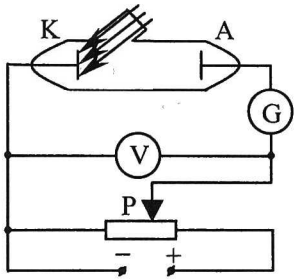


Рис. 183

На рис. 184 дана зависимость фототока от напряжения в цепи. С увеличением напряжения $U$ сила тока $I$ также увеличивается, достигая *тока насыщения* $I_н$. Значение тока насыщения определяется числом электронов $n$, вырываемых светом из катода в единицу времени:

$$I_н = en,$$

где $e$ — заряд электрона.

При $U = 0$ в цепи течет некоторый ток, что свидетельствует о наличии начальной скорости у электронов, покидающих катод. Если сменить полярность электродов, то электроны будут тормозиться электрическим полем и при $U = U_з$ (*задерживающее напряжение*) фототок прекращается. Согласно закону сохранения энергии можно записать:

$$\frac{m\mathrm{v}_m^2}{2} = eU_з,$$

где $\mathrm{v}_m$ — максимальная скорость электрона; $m$ — масса электрона.

Опытами установлены следующие законы внешнего фотоэффекта:

максимальная скорость фотоэлектронов определяется частотой излучения, падающего на катод;

для каждого вещества существует минимальная частота $\nu_{кр}$, при которой начинает наблюдаться фотоэффект; эта частота получила название *красной границы фотоэффекта*;

- сила фототока насыщения пропорциональна освещенности катода.

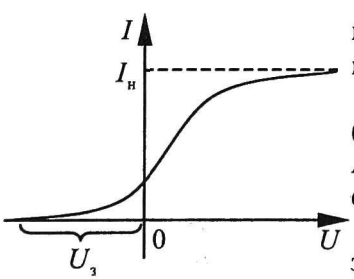


Рис. 184

Внешний фотоэффект практически безынерциален: фототок возникает через $10^{-9}$ с после начала освещения катода.

Используя гипотезу М. Планка о квантах (фотонах) электромагнитного излучения, А. Эйнштейн[1] разработал теорию внешнего фотоэффекта.

Фотоны, падая на катод, отдают свою энергию, которая расходуется на работу выхода электронов из металла $A_{вых}$ и кинетическую энергию электрона:

$$h\nu = A_{вых} + E_к^{max}, \qquad (4.64)$$

где $h\nu$ — энергия поглощенного фотона; $E_к^{max}$ — максимальная кинетическая энергия фотоэлектронов.

[1] Альберт Эйнштейн (1879–1955) — физик-теоретик.

Красная граница фотоэффекта определяется по формуле

$$\nu_{кр} = \frac{A_{вых}}{h}. \qquad (4.65)$$

Внешний фотоэффект используется в фотоэлементах, которые широко применяются в технике: при сортировке и счете деталей на конвейере, при передаче изображения по телеграфу, в телевидении, в звуковом кино и т. д.

*Внутренний фотоэффект* заключается в том, что под действием света электропроводность кристаллических полупроводников и некоторых диэлектриков увеличивается.

Внутренний фотоэффект возникает, если энергия поглощенного фотона достаточна для перевода электрона из валентной зоны в зону проводимости.

*Вентильный фотоэффект* (разновидность внутреннего фотоэффекта) наблюдается в контакте электронно-дырочного полупроводника. Под действием света в полупроводниках возникают электроны и дырки, которые разделяются электрическим полем *p-n*-перехода и между дырочным и электронным полупроводниками образуется фотоэлектродвижущая сила. Фотоэффект возникает при поглощении фотонов связанными электронами вещества.

На основе вентильных фотоэлементов разработаны солнечные батареи для питания бортовой аппаратуры спутников и космических кораблей.

Некоторые вентильные фотоэлектроны чувствительны к инфракрасному излучению. Их используют в системах ночного видения.

## § 147. Фотон. Давление света

По современным представлениям свет испускается, распространяется и поглощается дискретными порциями (квантами), которые получили название *фотоны*. Энергия фотона

$$E = h\nu = h\frac{c}{\lambda}.$$

Фотон — это элементарная частица с нулевой массой, которая в любой среде движется со скоростью света $c$.

Импульс фотона

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}. \qquad (4.66)$$

Фотон обладает энергией и импульсом (это корпускулярные свойства частицы) и характеризуется частотой (волновая характеристика).

Падая на какую- либо поверхность, фотон передает свой импульс атомам или молекулам вещества поверхности, оказывая на нее световое давление.

Пусть в единицу времени на единицу площади поверхности падает $n$ фотонов. Часть фотонов отражается поверхностью, часть поглощается. Обозначим за $\rho$ коэффициент отражения света, тогда $\rho n$-число отражаемых фотонов, а $(1-\rho)n$-число поглощаемых фотонов. Каждый отражаемый фотон передает поверхности импульс:

$$\frac{h\nu}{c}-\left(-\frac{h\nu}{c}\right)=\frac{2h\nu}{c},$$

так как при отражении знак импульса меняется на противоположный.

Каждый поглощаемый фотон передает поверхности импульс $\frac{h\nu}{c}$. Давление света $P$ на поверхность равно импульсу, который передают поверхности за единицу времени все $n$ фотонов:

$$P=\frac{2h\nu}{c}\rho n+\frac{h\nu}{c}(1-\rho)n$$

или

$$P=\frac{nh\nu}{c}(1+\rho)=\frac{E_0}{c}(1+\rho)=\omega(1+\rho), \qquad (4.67)$$

где $E_0=nh\nu$ — энергия всех фотонов, падающих на единицу поверхности в единицу времени; $\omega$ — объемная плотность энергии.

Существование давления света было предсказано Максвеллом после создания им электромагнитной теории и впервые измерено П. Лебедевым[1] в 1901 г.

Естественный свет оказывает на поверхность очень малое давление, примерно $5\cdot10^{-6}$ Па, что на десять порядков меньше нормального атмосферного давления.

## § 148. Эффект Комптона

*Эффект Комптона*[2] — это изменение длины волны (или частоты) падающего на вещество излучения при рассеянии его веществом.

Исследуя рассеяние рентгеновских лучей на парафине, Комптон обнаружил в спектре рассеянного излучения наряду с длиной волны падающего излучения $\lambda$ присутствие новых, больших по величине, длин волн $\lambda'$. С волновой точки зрения в рассеянном излучении должна наблюдаться только длина волны падающего на вещество излучения.

Эффект Комптона можно объяснить, рассматривая столкновения фотонов со свободными (слабо связанными) электронами атомов. При взаи-

[1] Петр Николаевич Лебедев (1866–1912) — русский физик.

[2] Артур Холи Комптон (1892–1962) — американский физик.

модействии фотон отдает часть своей энергии электрону. Так как энергия фотона

$$E = h\nu = h\frac{c}{\lambda},$$

то при этом должна уменьшаться частота $\nu$ его колебаний, т. е. увеличиваться длина волны $\lambda$.

Изменение длины волны при рассеянии излучения веществом можно определить, используя законы сохранения энергии и импульса.

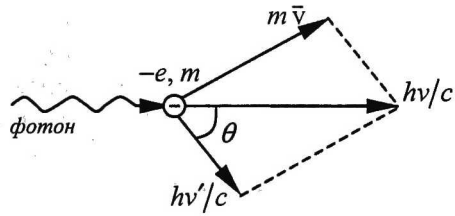


Рис. 185

По закону сохранения энергии:

$$h\nu + m_0c^2 = h\nu' + mc^2, \quad (4.68)$$

где $h\nu$ — энергия падающего на вещество фотона; $m_0c^2$ — энергия покоящегося электрона; $h\nu'$ — энергия рассеянного фотона; $mc^2$ — полная энергия электрона (после взаимодействия).

Применим закон сохранения импульса, считая соударение фотона с электроном упругим:

$$\vec{p} = \vec{p}' + \vec{p}_e, \quad (4.69)$$

где $p = \frac{h\nu}{c}$, $p' = \frac{h\nu'}{c}$ — модули импульсов падающего и рассеянного фотонов соответственно; $p_e = m\mathrm{v}$ — модуль импульса электрона.

Используя рис. 185, запишем закон сохранения импульса (4.69) в скалярном виде:

$$m^2\mathrm{v}^2 = \left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 + \left(\frac{h\nu'}{c}\right)^2 - 2\frac{h^2\nu\nu'}{c^2}\cos\theta, \quad (4.70)$$

где $\theta$ — угол рассеяния.

Решая совместно уравнения (4.68) и (4.70) и учитывая, что

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\mathrm{v}^2/c^2}},$$

можно определить изменение длины волны $\Delta\lambda$ при комптоновском рассеянии:

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{2h}{m_0c}\sin^2\frac{\theta}{2} = 2k\sin^2\frac{\theta}{2}, \quad (4.71)$$

где $k = \frac{h}{m_0c} = 2{,}43\cdot10^{-12}$ м — *постоянная Комптона* (комптоновская длина волны).

Несмещенные линии с длиной волны $\lambda$ в исследуемом спектре образуются за счет столкновений фотонов с электронами, прочно связанными с атомами.

## § 149. Корпускулярно-волновой дуализм света

Электромагнитное излучение имеет двойственную корпускулярно-волновую природу: с одной стороны, оно обладает волновыми свойствами, обусловливающими такие явления, как интерференция, дифракция, поляризация, с другой стороны, представляет поток элементарных частиц-фотонов, действие которых проявляется в фотоэлектрическом эффекте, тепловом излучении, эффекте Комптона и т. д.

Давление света можно объяснить как волновой, так и квантовой теорией.

Свет распространяется в пространстве как волна, а взаимодействует с веществом как частица.

Квантовая механика не отрицает электромагнитную теорию света. Согласно квантовой теории свет — это волна, квадрат амплитуды которой характеризует вероятность появления фотонов.

Дуализм света — это частный случай общего свойства материи, отчетливо проявляющегося в микромире.

## ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

**Задача 71.** Максимум энергии в спектре излучения черного тела приходится на длину волны $\lambda_{max} = 0{,}80$ мкм. Найти энергетическую светимость поверхности тела.

**Дано:**
$\lambda_{max} = 0{,}8 \cdot 10^{-6}$ м
$R_э = ?$

**Решение.** По закону Стефана–Больцмана (4.59) можно определить энергетическую светимость тела:

$$R_э = \sigma T^4 . \qquad (1)$$

Абсолютную температуру $T$, входящую в уравнение (1), найдем по закону смещения Вина (4.60):

$$\lambda_{max} = \frac{b'}{T} . \qquad (2)$$

Из уравнений (1), (2) получим

$$R_э = \sigma \left( \frac{b'}{\lambda_{max}} \right)^4 . \qquad (3)$$

Проверим размерность:

$$[R_э] = \frac{\text{Вт} \cdot \text{м}^4 \cdot \text{К}^4}{\text{м}^2 \cdot \text{К}^4 \cdot \text{м}^4} = \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2} .$$

Подставим в уравнение (3) численные значения:

$$R_э = 5{,}67 \cdot 10^{-8} \left( \frac{2{,}9 \cdot 10^{-3}}{0{,}8 \cdot 10^{-6}} \right)^4 = 9{,}8 \frac{\text{МВт}}{\text{м}^2} .$$

**Ответ:** $R_э = 9{,}8 \dfrac{\text{МВт}}{\text{м}^2}$.

**Задача 72.** Найдите постоянную Планка, если фотоэлектроны, вырываемые с поверхности металла светом с частотой $\nu_1 = 1{,}2 \cdot 10^{15}$ Гц, задерживаются напряжением $U_1 = 3{,}1$ В, а вырываемые светом с длиной волны $\lambda_2 = 125$ нм — напряжением $U_2 = 8{,}1$ В.

**Дано:**
$\nu_1 = 1{,}2 \cdot 10^{15}$ Гц
$\lambda_2 = 125 \cdot 10^{-9}$ м
$U_1 = 3{,}1$ В
$U_2 = 8{,}1$ В
$h = ?$

**Решение.** Если при фотоэффекте изменить полярность батареи, то сила фототока уменьшится и при некотором напряжении, называемом задерживающим, она станет равной нулю. Это значит, что электрическое поле тормозит вырываемые электроны до их полной остановки. Согласно теореме о кинетической энергии работа электрического поля равна изменению кинетической энергии электрона:

$$eU = \frac{m\mathrm{v}^2}{2}, \qquad (1)$$

где $e$, $m$, v — заряд, масса и скорость электрона.

Записав дважды уравнение Эйнштейна для фотоэффекта (4.64) и используя равенство (1), получим

$$h\nu_1 = A + \frac{m\mathrm{v}^2}{2} = A + eU_1, \qquad (2)$$

$$h\nu_2 = h\frac{c}{\lambda_2} = A + \frac{m\mathrm{v}^2}{2} = A + eU_2. \qquad (3)$$

Найдем из уравнения (2) работу выхода электрона $A$ и подставим ее в уравнение (3). Проведя преобразования, получим

$$h = \frac{e(U_2 - U_1)}{\left(\frac{c}{\lambda_2} - \nu_1\right)}. \qquad (4)$$

Подставив в уравнение (4) численные данные, найдем

$h = 6{,}66 \cdot 10^{-34}$ Дж · с.

**Ответ:** $h = 6{,}66 \cdot 10^{-34}$ Дж · с.

**Задача 73.** Определить максимальную скорость электронов, вырванных с поверхности вольфрама γ-лучами с длиной волны $\lambda = 0{,}001$ нм.

**Дано:**

$\lambda = 1 \cdot 10^{-12}$ м

$A = 7{,}2 \cdot 10^{-19}$ Дж

v = ?

**Решение.** Скорость электронов, вырываемых с поверхности вещества, зависит от энергии кванта электромагнитного излучения, падающего на поверхность. Если энергия кванта много меньше энергии покоя электрона, то скорость вырванного электрона оказывается много меньше скорости света в вакууме. В этом случае при решении задач кинетическая энергия в уравнении (4.64) записывается по классической формуле

$$E_{\text{к(max)}} = \frac{m\mathrm{v}^2}{2}.$$

Применив формулу Эйнштейна (4.64) $h\nu = A + \frac{m\mathrm{v}^2}{2}$ и заменив частоту через длину волны $\lambda$ и скорость света $c$, т. е. $\nu = \frac{c}{\lambda}$, для скорости электрона получим выражение

$$\mathrm{v} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(\frac{hc}{\lambda} - A\right)}. \qquad (1)$$

Подсчитаем значение скорости: $v \approx 6,6 \cdot 10^8$ м/с .

Полученная скорость электрона оказалась больше скорости света, что противоречит специальной теории относительности. В нашем случае энергия кванта сравнима по величине с энергией покоя электрона, поэтому при решении необходимо применять релятивистскую формулу кинетической энергии (1.116):

$$E_к = E_0\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}-1\right) = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}-1\right). \qquad (2)$$

Действительно, подсчитав энергию покоя электрона:

$$E_0 = m_0c^2 = 9,11\cdot10^{-31}\text{кг}\cdot\left(3\cdot10^8\right)^2\text{м}^2/\text{с}^2 = 0,82\cdot10^{-13}\text{Дж}$$

и энергию кванта $\gamma$–лучей: $E = h\nu = \frac{ch}{\lambda}$; $E = 1,99\cdot10^{-13}$ Дж,

убеждаемся, что эти величины сравнимы друг с другом.

Для данного случая уравнение (4.64) примет вид

$$\frac{hc}{\lambda} = A + m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}-1\right). \qquad (3)$$

Работой выхода электрона $A$ в уравнении (3) можно пренебречь как очень малой по сравнению с энергией кванта $\frac{hc}{\lambda}$. Тогда из уравнения (3) получим $\frac{hc}{\lambda} = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}-1\right)$, откуда $v = \frac{2c\sqrt{\left(m_0c^2+\frac{hc}{2\lambda}\right)\frac{hc}{2\lambda}}}{m_0c^2+\frac{hc}{\lambda}}$.

**Ответ:** $v = 1,9\cdot10^8$ м/с .

**Задача 74.** Пучок света с длиной волны $\lambda = 490$ нм , падая нормально на поверхность, производит на нее давление, равное $P = 9,81\cdot10^{-7}$ Па . Сколько квантов света падает ежесекундно на единицу площади этой поверхности, если коэффициент отражения света $\rho = 0,5$ ?

**Дано:**
$\lambda = 490\cdot10^{-9}$ м
$\rho = 0,5$
$P = 9,81\cdot10^{-7}$ Па
$N = ?$

**Решение.** Давление, производимое светом, определяется формулой (4.67):

$$P = \frac{E_0(1+\rho)}{c}, \text{ откуда } E_0 = \frac{Pc}{1+\rho}.$$

Если энергия данного кванта $E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$, то количество квантов, падающих ежесекундно на единицу поверхности:

$$N = \frac{E_0}{E} = \frac{Pc\lambda}{hc(1+\rho)} = \frac{P\lambda}{h(1+\rho)}.$$

**Ответ:** $N = 2{,}5 \cdot 10^{21}$ частиц$/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$.

# ЧАСТЬ 5
# ЭЛЕМЕНТЫ ФИЗИКИ АТОМА И АТОМНОГО ЯДРА

## Глава 26
## СТРОЕНИЕ АТОМА

### § 150. Модель атома Томсона и Резерфорда

Со времен Демокрита ученые считали, что все вещества состоят из мельчайших неделимых частиц атомов. Такое мнение существовало весьма долго. Во второй половине XIX века в связи с развитием спектроскопии и открытием электрона серьезно встал вопрос о строении атома.

Дж. Дж. Томсон в 1903 г. предложил *пудинговую* модель атома. Согласно этой модели атом представляет собой шар, равномерно заряженный положительным электричеством, внутри которого относительно его центра колеблются отрицательно заряженные электроны. В целом атом электронейтрален. Однако такая модель атома оказалась ошибочной, так как противоречила результатам опытов Э. Резерфорда[1].

Схема экспериментальной установки Резерфорда показана на рис. 186. Радиоактивное вещество Р, испускающее α-частицы (ядра атома гелия), помещалось в вакуумной камере. Пройдя диафрагму D, узкий поток α-частиц попадал на тонкую (~1 мкм) металлическую фольгу Ф, которая рассеивала их на различные углы Θ. Затем α-частицы ударялись об экран Э, покрытый сернистым цинком. Удары α-частиц вызывали на экране вспышки (сцинтилляцию), наблюдаемые в микроскоп.

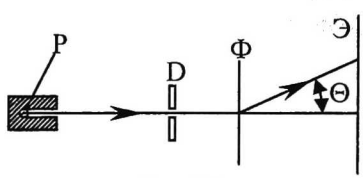


Рис. 186

Опыты показали, что некоторые α-частицы (примерно одна из 20 000), проходя через фольгу, отклонялись на аномально большие (почти до 180°) углы.

По результатам опытов Резерфорд сделал следующие выводы:

- отклонение α-частиц на значительные углы происходит в результате их взаимодействия с большим положительным зарядом атома;

поскольку α-частиц, испытывающих значительные отклонения, немного, то объем с большим положительным зарядом занимает очень малую часть атома.

[1] Эрнест Резерфорд (1871–1937) — английский физик.

Эти выводы противоречили модели атома Томсона.

На основании своих опытов Резерфорд разработал *ядерную (планетарную) модель атома*. Согласно этой модели атом состоит из ядра с положительным зарядом $Ze$ ($Z$ — порядковый номер элемента в таблице Менделеева; $e$ — элементарный заряд) и имеет размер порядка $10^{-15}-10^{-14}$ м, основная масса атома (~99,4 %) сосредоточена в атомном ядре. Вокруг ядра по орбитам, близким к круговым, вращаются электроны. Атом электронейтрален.

Однако ядерная модель атома не смогла объяснить линейчатый характер спектров излучения и поглощения и оказалась в противоречии с законами классической электродинамики.

В модели Резерфорда электроны, вращаясь вокруг атомного ядра по криволинейным орбитам, должны двигаться с ускорением. Согласно классической электродинамике любые ускоренно движущиеся электрические заряды должны излучать электромагнитные волны. Поскольку полная энергия системы «атом + электромагнитная волна» сохраняется, то энергия электрона должна уменьшаться, чтобы скомпенсировать излучение. В результате этого уменьшается радиус орбиты и, двигаясь по спирали, электрон должен упасть на ядро. По мере приближения к ядру частота обращения электрона и испускаемого электроном электромагнитного излучения должны возрастать. Таким образом, свет, испускаемый атомом, должен иметь сплошной спектр.

В действительности атомы являются устойчивыми системами, а излучение разреженных газов имеет линейчатый спектр.

Разработанная Резерфордом ядерная модель атома оказалась внутренне противоречива.

В рамках этой модели ни устойчивость атомных систем, ни линейчатость спектров объяснить не удалось.

## § 151. Спектр атома водорода

Спектры излучения и поглощения разреженных газов являются дискретными, так как атомы испускают свет только определенных длин волн. В спектроскопе наблюдается линейчатый спектр, представляющий собой совокупность спектральных линий, составляющих определенные серии.

Водород представляет собой простейший атом, состоящий из ядра, вокруг которого вращается один электрон. Поэтому водород имеет самый простой спектр. На рис. 187 показана схема спектральных линий водорода серии Бальмера[1], где символами $H_\alpha$ ($\lambda = 0{,}6563$ мкм), $H_\beta$ ($\lambda = 0{,}481$ мкм),

[1] Иоганн Якоб Бальмер (1825–1898) — швейцарский физик.

$H_\gamma$ ($\lambda = 0{,}4340$ мкм), $H_\delta$ ($\lambda = 0{,}4102$ мкм) обозначены видимые спектральные линии.

Помимо видимого света, в спектре водорода имеются излучения, расположенные в инфракрасной области (серии Пашена, Брэкета, Пфунда) и в ультрафиолетовой (серия Лаймана).

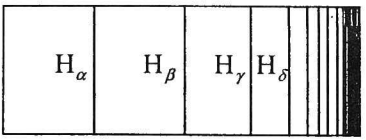



Рис. 187

Расположение спектральных линий в спектре подчиняется обобщенной формуле Бальмера:

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right), \tag{5.1}$$

где $R = 1{,}097 \cdot 10^7\ \text{м}^{-1}$ — постоянная Ридберга[1]; $\lambda$ — длина волны; $m$ и $n$ — целые числа, имеющие определенное значение для каждой серии и спектральной линии (см. табл. 4).

*Таблица 4*

| Наименование серии | Значения $m$ | Значения $n$ |
|---|---|---|
| Серия Лаймана | 1 | 2,3,4,... |
| Серия Бальмера | 2 | 3,4,5,... |
| Серия Пашена | 3 | 4,5,6,... |
| Серия Брэкста | 4 | 5,6,7,... |
| Серия Пфунда | 5 | 6,7,8,... |

Формулу (5.1) можно записать для частоты излучения:

$$\nu = R'\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right), \tag{5.2}$$

где $R' = R \cdot c = 3{,}29 \cdot 10^{15}\ \text{с}^{-1}$ — постоянная Ридберга; $c$ — скорость света в вакууме.

## § 152. Теория Бора

Спектральные закономерности атома водорода объяснила теория Бора[2], разработанная в 1913 г. и являющаяся первым вариантом квантовой теории. В основу теории Бора положены два постулата.

1. Электроны в атоме могут находиться только в определенных устойчивых состояниях, в которых атом не излучает энергии. Эти состояния назвали *стационарными*. На стационарных орбитах момент импульса электрона $m_e v r_n$ кратен значению $h/(2\pi)$, т. е.

[1] Юханнес Роберт Ридберг (1854–1919) — шведский физик.
[2] Нильс Хендрик Давид Бор (1885–1962) — датский физик.

$$m_e \mathrm{v} r_n = n\frac{h}{2\pi} = n\hbar\,, \tag{5.3}$$

где $m_e$ — масса электрона; v — линейная скорость электрона; $r_n$ — радиус орбиты; $n = 1, 2, 3, \ldots$ — целое число, названное *главным квантовым числом*; $\hbar$ — постоянная Планка.

2. Атом излучает или поглощает фотон электромагнитного поля при переходе из одного стационарного состояния в другое:

$$h\nu = E_n - E_m\,, \tag{5.4}$$

где $E_n$, $E_m$ — энергии стационарных состояний атома до и после излучения или поглощения. Если $E_n > E_m$, то атом излучает фотон (электрон переходит на орбиту, более близкую к ядру атома).

Постулаты Бора позволили рассчитать спектр атома водорода и определить постоянную Ридберга.

В атоме на электрон действует сила кулоновского притяжения к ядру, сообщающая ему нормальное (центростремительное) ускорение. Считая орбиту электрона круговой, запишем уравнение его движения:

$$\frac{m_e \mathrm{v}^2}{2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{r_n^2}\,. \tag{5.5}$$

Из уравнений (5.3) и (5.5) находится выражение для радиусов орбит:

$$r_n = n^2 \frac{h^2\varepsilon_0}{\pi m_e e^2 Z}\,. \tag{5.6}$$

Подставляя значения констант и считая $Z = 1$ и $n = 1$ (первая орбита атома водорода), по формуле (5.6) определим значение первого боровского радиуса:

$$r_\text{Б} = 0{,}528 \cdot 10^{-10}\,\text{м}\,.$$

Используя выражение (5.5), вычислим полную энергию электрона в атоме, которая согласно принятой модели является суммой кинетической энергии вращающегося электрона и потенциальной энергии взаимодействия электрона с ядром:

$$E = E_k + E_p = \frac{m_e \mathrm{v}^2}{2} - \frac{e^2 Z}{4\pi\varepsilon_0 r_n} = \frac{e^2 Z}{8\pi\varepsilon_0 r_n} - \frac{e^2 Z}{4\pi\varepsilon_0 r_n} = -\frac{e^2 Z}{8\pi\varepsilon_0 r_n}\,. \tag{5.7}$$

Согласно (5.7) полная энергия электрона оказывается отрицательной и равной по абсолютному значению его кинетической энергии. Знак минус означает, что система является связанной.

Из соотношения (5.7) следует, что в боровской модели энергии электрона принимают дискретные значения.

При $n = 1$ атом обладает наименьшей энергией (*основное состояние*). Состояния атома с $n > 1$ называются *возбужденными*.

Из соотношений (5.6) и (5.7) получаем энергетический спектр атома водорода:

$$E_n = -\frac{m_e e^4 Z^2}{8h^2 \varepsilon_0^2 n^2}, \quad n = 1,2,3,... \tag{5.8}$$

Подставляя выражение (5.8) в условие (5.4), получим обобщенную формулу Бальмера:

$$\nu = \frac{m_e e^4}{8h^3 \varepsilon_0^2}\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right) \quad \text{или} \quad \frac{1}{\lambda} = \frac{m_e e^4}{8h^3 \varepsilon_0^2 c}\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right), \tag{5.9}$$

где $R = \dfrac{m_e e^4}{8h^3 \varepsilon_0^2 c}$ — постоянная Ридберга.

Совпадение теоретического и экспериментального значений постоянной Ридберга, физическое истолкование формулы Бальмера убеждает в правильности теории Бора.

Теория Бора позволила рассчитать спектры атома водорода и *водородоподобных систем* (ионы $He^+$, $Li^{2+}$), но не смогла объяснить интенсивность спектральных линий.

## § 153. Опыт Франка и Герца

Эксперимент, проведенный в 1913 г. Франком[1] и Герцем[2], доказывает существование в атоме дискретных энергетических уровней, постулируемых теорией Бора. В опытах изучалось взаимодействие электронов, ускоренных электрическим полем, с атомами паров ртути.

К разрядной трубке, содержащей катод К, анод А и сетку С, подавалось напряжение, как показано на рис. 188,*а*. Между катодом и сеткой прикладывалось напряжение $U$, которое регулировалось потенциометром Р. Между сеткой и анодом подавалось встречное напряжение порядка 0,5 В. Трубка заполнялась насыщенными парами ртути под давлением ~100 Па.

В экспериментах измерялся анодный ток $I$ (количество электронов, пришедших на анод, в единицу времени) в зависимости от напряжения $U$ между катодом и сеткой. Полученная вольт-амперная характеристика показана на рис. 188,*б*.

Электроны, вылетающие с поверхности накаленного катода, ускорялись электрическим полем в промежутке между катодом и сеткой и, преодолев задерживающее поле, достигали анода. Анодный ток возрастал. Однако этот рост сопровождался резкими спадами тока каждый раз, когда ускоряющий потенциал увеличивался приблизительно на 4,9 В. Это объясняется тем, что электроны, испускаемые катодом, до напряжения 4,9 В испытывали упругие столкновения с атомами ртути, и их кинетическая энергия поступательного движения оставалась неизменной. При напряже-

[1] Джеймс Франк (1882–1964) — немецкий физик.

[2] Густав Людвиг Герц (1887–1975) — немецкий физик.

нии $U_0 = 4{,}9$ В электроны стали испытывать неупругие столкновения с атомами ртути, и их энергия настолько уменьшалась, что они не могли преодолеть задерживающее поле и не достигали анода. Анодный ток резко падал.

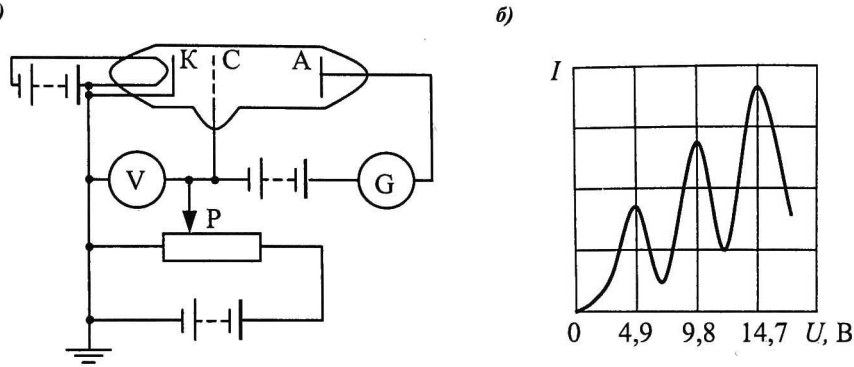



Рис. 188

Если ускоряющий потенциал увеличить еще на 4,9 В, то электроны могут снова испытывать неупругие столкновения и терять свою кинетическую энергию. Этим объясняется второй спад тока, наблюдаемый в опытах. Третий спад соответствует электронам, которые испытали три неупругих столкновения и т. д.

Каждый раз после неупругого столкновения, атом ртути переходил в возбужденное состояние, а затем возвращался в основное состояние, излучая фотон с длиной волны $\lambda \approx 250$ нм.

В основном состоянии энергия валентного электрона ртути $E_0 = -10{,}42$ эВ. Энергия первого возбужденного состояния $E_1 = -5{,}54$ эВ. Для переход из основного состояния в первое возбужденное требуется энергия $\Delta E = E_1 - E_0 = -5{,}54 - (-10{,}42) = 4{,}88$ эВ $\approx 4{,}9$ эВ.

В возбужденном состоянии атом пребывает очень короткое время ($\approx 10^{-8}$ с), а затем переходит в основное состояние. Такой переход сопровождается излучением фотона с энергией 4,9 эВ и длиной волны $\lambda = \dfrac{hc}{\Delta E} = 250$ нм, что и наблюдалось в опытах.

Таким образом, возбуждение атома ртути происходит лишь в том случае, когда атому передается энергия, равная разности энергий в основном и возбужденном состояниях.

Опыты Франка и Герца доказали существование дискретных энергетических уровней в атоме ртути.

## ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

**Задача 75.** Найдите период $T$ обращения электрона на первой боровской орбите атома водорода.

**Дано:**
H
$n=1$
$T=?$

**Решение.** Согласно теории Бора (5.3)

$$mvr = n\hbar, \qquad (1)$$

где $m$ — масса электрона, $\hbar = 1{,}055\cdot10^{-34}$ Дж·с — постоянная Планка; $r$ — радиус электронной орбиты, v — скорость электрона; $n$ — номер орбиты.

Сила взаимодействия между электрическими зарядами ядра и электрона сообщает электрону нормальное (центростремительное) ускорение. На основании второго закона Ньютона запишем:

$$\frac{m\mathrm{v}^2}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2}, \qquad (2)$$

где $e$ — заряд электрона.

Из выражений (1) и (2) определим скорость v и радиус $r$ $n$-й электронной орбиты:

$$r = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2 n^2}{me^2}, \qquad \mathrm{v} = \frac{n\hbar}{mr} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar n}. \qquad (3)$$

Зная $r$ и v, найдем период обращения:

$$T = \frac{2\pi r}{\mathrm{v}} = \frac{32\pi^3\varepsilon_0^2\hbar^3 n^3}{me^4}; \quad T = 1{,}5\cdot10^{-16}\text{ с}.$$

**Ответ:** $T = 1{,}5\cdot10^{-16}$ с.

**Задача 76.** Найдите длину волны $\lambda$ фотона, соответствующего переходу электрона со второй боровской орбиты на первую в однократно ионизированном атоме гелия.

**Дано:**
$m=1$
$n=2$
$Z=2$
$\lambda=?$

**Решение.** Частота излучения фотона водородоподобным ионом при переходе электрона со второй боровской орбиты на первую можно определить по формуле Бальмера (5.9):

$$\nu = RcZ^2\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right), \qquad (1)$$

где $Z$ — порядковый номер элемента в таблице Менделеева; $R = 1{,}1\cdot10^7$ м$^{-1}$ — постоянная Ридберга.

При подстановке значений $m=1$ и $n=2$ из выражения (1) получим

$$\nu = \frac{3RcZ^2}{4}. \qquad (2)$$

Так как $\nu = c/\lambda$, то из формулы (2) имеем

$$\lambda = \frac{4}{3RZ^2}.$$

Для однократно ионизированного гелия $Z = 2$, т. е. $\lambda = \frac{1}{3R}$; $\lambda = 30{,}4$ нм.

**Ответ:** $\lambda = 30{,}4$ нм.

**Задача 77.** На дифракционную решетку нормально падает пучок света от разрядной трубки, наполненной атомарным водородом. Постоянная решетки $d = 5$ мкм. Какому переходу электрона соответствует спектральная линия, наблюдаемая при помощи этой решетки в спектре пятого порядка под углом $\varphi = 41°$?

**Дано:**
$d = 5 \cdot 10^{-6}$ м
$k = 5$
$\varphi = 41°$
переход = ?

**Решение.** Из условия максимумов интенсивности при дифракции света на дифракционной решетке при нормальном падении лучей (4.33)

$$d \sin\varphi = k\lambda$$

найдем длину волны

$$\lambda = \frac{d \sin\varphi}{k}. \qquad (1)$$

Связь длины волны света с номерами боровских орбит в атоме водорода устанавливается формулой Бальмера (5.9):

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right), \qquad (2)$$

где $R$ — постоянная Ридберга; $m$ — номер орбиты, на которую переходит электрон; $n$ — номер орбиты, с которой переходит электрон.

Из соотношений (1) и (2) получим

$$\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} = \frac{k}{Rd \sin\varphi} = 0{,}139.$$

Подбором чисел $m$ и $n$ находим, что такой переход возможен с $n = 3$ на $m = 2$ в серии Бальмера.

# Глава 27

# ЭЛЕМЕНТЫ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

## § 154. Гипотеза де Бройля. Дифракция электронов

В 1923 г. Луи де Бройль[1] высказал гипотезу о том, что подобно фотону света материальные частицы наряду с корпускулярными обладают волновыми свойствами. Согласно де Бройлю, любой материальной частице, обладающей импульсом $p$, можно сопоставить волновой процесс с длиной волны

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m\mathrm{v}}, \qquad (5.10)$$

где $m$, v — масса и скорость частицы; $h$ — постоянная Планка.

Величина $\lambda$ называется *дебройлевской длиной волны*.

Если подсчитать дебройлевскую длину волны для пули массой $m = 10$ г, летящей со скоростью $\mathrm{v} = 500$ м/с, то она окажется чрезвычайно малой ($\sim 1{,}3 \cdot 10^{-34}$ м), чтобы ее можно было обнаружить или измерить. Дебройлевская длина волны электрона, ускоренного разностью потенциалов $U = 10$ кВ, составляет

$$\lambda = \frac{h}{m\mathrm{v}} = \frac{h}{\sqrt{2eUm}} \approx 0{,}012 \text{ нм}.$$

Такую длину волны можно обнаружить экспериментально.

В 1927 году Дэвиссон[2] и Джермер[3], исследуя рассеяние электронов монокристаллом никеля, обнаружили в распределении отраженных электронов регулярные пики. Эти пики были интерпретированы на основе дифракционной картины. Оказалось, что длина волны электрона совпадает с дебройлевской длиной волны, рассчитанной по формуле (5.10).

В том же году Дж. Томсон[4] и Тарковский[5], облучая металлическую фольгу потоком быстрых электронов, получили дифракционную картину. В более поздних экспериментах было показано, что и другие частицы (протоны, нейтроны и т. д.) обладают волновыми свойствами.

Итак, эксперименты доказали, что микрочастицы имеют волновую природу. А это значит, что, подобно фотону, всем частицам присущи и корпускулярные, и волновые свойства. В то же время любую из них нельзя считать ни частицей, ни волной, как это делалось в классической физике.

---

[1] Луи де Бройль (1892–1987) — французский физик.
[2] Клинтон Джозеф Дэвиссон (1881–1958) — американский физик.
[3] Лестер Халберт Джермер (1896–1971) — американский физик.
[4] Джордж Паджет Томсон (1892–1975) — английский физик.
[5] П. С. Тарковский (1895–1939) — советский физик.

## § 155. Соотношение неопределенностей Гейзенберга

Гипотеза де Бройля и опытное подтверждение волновых свойств частиц создали предпосылки для создания принципиально новой теории, описывающей их поведение. Такой теорией стала *квантовая механика,* основы которой были заложены Гейзенбергом[1] и Шредингером[2] в 20-х годах двадцатого столетия.

Квантовая механика раскрывает квантованность энергии атомов и волновую природу частиц. В отличие от классической физики, часто оперирующей моделями объектов, квантовая механика лишена наглядности.

По классическим представлениям координата и импульс тела могут быть одновременно точно известными. Из корпускулярно-волнового дуализма следует, что существуют границы применимости этих понятий. В квантовой механике движущейся частице соответствует волна, позволяющая определять вероятность нахождения частицы в данной точке в данный момент времени. На основе волновых свойств частиц Гейзенберг сформулировал *соотношение неопределенностей*, согласно которому положение (координата) и импульс (или скорость) движущейся частицы могут быть заданы одновременно лишь с ограниченной степенью точности:

$$\begin{aligned} \Delta x \cdot \Delta p_X &\geq \hbar, \\ \Delta y \cdot \Delta p_Y &\geq \hbar, \\ \Delta z \cdot \Delta p_Z &\geq \hbar, \end{aligned} \qquad (5.11)$$

где $\Delta x$, $\Delta y$, $\Delta z$ — неопределенности координат, в которых находится частица; $\Delta p_x$, $\Delta p_y$, $\Delta p_z$ — неопределенности интервалов, в которых заключены проекции импульса частицы по осям $x$, $y$ и $z$; $\hbar = h/(2\pi)$ — постоянная Планка.

Произведение неопределенности координаты частицы на неопределенность проекции импульса на заданное направление не может быть меньше постоянной Планка.

Чем точнее определен импульс, тем неопределенней является ее координата, и наоборот.

Другое соотношение неопределенностей устанавливает связь между энергией и временем:

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar, \qquad (5.12)$$

где $\Delta E$ — неопределенность энергии некоторого состояния системы; $\Delta t$ — время измерения энергии некоторого состояния.

Из соотношения (5.12) следует, что чем больше точность измерения

---

[1] Вернер Карл Гейзенберг (1901–1976) — немецкий физик.
[2] Эрвин Шредингер (1887–1961) — австрийский физик.

времени, т. е. чем меньше $\Delta t$, тем меньше точность определения энергии, и наоборот.

Используя соотношения неопределенностей (5.11), покажем, что представление атома в виде большого числа электронов, вращающихся по замкнутым орбитам вокруг положительно заряженного ядра, оказывается несостоятельным.

Радиус атома имеет порядок $10^{-10}$ м, значит, неопределенность координаты $\Delta x \approx 10^{-10}$ м, а неопределенность скорости определим из уравнения (5.11):

$$\Delta v = \frac{\Delta p_x}{m} = \frac{\hbar}{\Delta x \cdot m} \approx 1{,}2 \cdot 10^6 \text{ м/с},$$

где $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг — масса электрона.

По классическим представлениям электрон, вращаясь по орбите, имеет скорость v порядка $(10^6 \div 10^7)$ м/с. Так как неопределенность скорости $\Delta v$ того же порядка, что и сама скорость v, то для электрона в атоме невозможно сохранить представление о траектории движения.

Другое дело, если наблюдается движение электрона, например, в камере Вильсона. Толщина следа электрона имеет величину порядка $10^{-4}$ м, т. е. $\Delta x \approx 10^{-4}$ м, а

$$\Delta v = \frac{6.26 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}}{2\pi 10^{-4} \text{ м} \cdot 9.1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}} \approx 1 \text{ м/с}.$$

При скорости электрона в камере Вильсона порядка 1000 м/с неопределенность $\Delta v$ составляет 0,1%, и в этом случае можно пользоваться понятием траектория движения.

## § 156. Волновая функция. Уравнение Шредингера

Для теоретического описания динамики процессов, протекающих на атомном уровне, была разработана квантовая механика. Квантово-механический расчет не позволяет найти траекторию движения частицы, с его помощью можно лишь вычислить вероятность, с которой частица может быть обнаружена в различных точках пространства.

Поскольку с движением микрочастицы сопоставляется волновой процесс, то ее состояние можно описать волновой функцией $\Psi(x, y, z, t)$, зависящей от координат и времени. Вид волновой функции (пси-функции) определяется состоянием частицы. Интерпретацию $\Psi$-функции дал Борн[1]: вероятность $dP$ того, что частица находится в объеме $dV$ прямо пропорциональна квадрату модуля $\Psi$-функции и элементу объема, т. е.

[1] Макс Борн (1882–1970) — немецкий физик.

$$dP = |\Psi|^2 \, dV = \Psi\Psi^* dV = |\Psi|^2 \, dxdydz , \qquad (5.13)$$

где $\Psi^*$ — функция, комплексно сопряженная с $\Psi$.

Отсюда следует, что физический смысл имеет квадрат модуля волновой функции

$$|\Psi|^2 = \frac{dP}{dV},$$

который определяет плотность вероятности нахождения частицы в окрестности точки с координатами *x, y, z.*

Условием нормировки $\Psi$-функции является выражение

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* \Psi dV = 1,$$

т. е. пребывание частицы в одной из точек пространства есть достоверное событие и его вероятность равна единице.

По своему смыслу волновая функция должна быть *однозначной, непрерывной и ограниченной*, производные $\frac{\partial\Psi}{\partial x}$, $\frac{\partial\Psi}{\partial y}$, $\frac{\partial\Psi}{\partial z}$, $\frac{\partial\Psi}{\partial t}$ должны быть непрерывны. Перечисленные требования носят название *стандартных условий.*

Э. Шредингер получил уравнение, позволяющее найти волновые функции частиц, движущихся в различных силовых полях:

$$i\hbar \frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi + U(x,y,z,t)\Psi , \qquad (5.14)$$

где $m$ — масса частицы; $\hbar$ — постоянная Планка; $i$ — мнимая единица; $U(x,y,z,t)$ — потенциальная энергия частицы в силовом поле, где она движется; $\Psi = \Psi(x,y,z,t)$ — волновая функция частицы; $\Delta$ — оператор Лапласа (в декартовой системе координат $\Delta\Psi = \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}$).

При решении большого числа задач (например, для описания поведения электрона в атоме) используется стационарное уравнение Шредингера, в котором исключена зависимость $\Psi$-функции от времени ($\Psi = \Psi(x,y,z)$, $U = U(x,y,z)$):

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}\right) + U\Psi = E\Psi , \qquad (5.15)$$

где $E$ — полная энергия микрочастицы.

## § 157. Частица в одномерной бесконечно глубокой прямоугольной потенциальной яме

Квантовая механика позволяет на основе волновых свойств частиц объяснять дискретность энергетических спектров атомов. Для того чтобы понять природу квантования энергии, рассмотрим в качестве примера одномерное движение частицы, находящейся в бесконечно глубокой потенциальной яме (рис. 189).

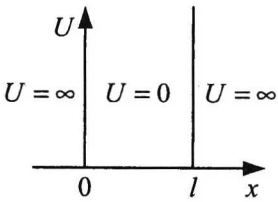


Рис. 189

Допустим, что частица может двигаться только вдоль оси $x$, и ее движение ограничено непроницаемыми для частицы вертикальными стенками: $x = 0$ и $x = l$. Потенциальная энергия $U$ в этом случае принимает следующие значения:

$$U(x) = \begin{cases} \infty, & x < 0, \\ 0, & 0 \le x \le l, \\ \infty, & x > l. \end{cases}$$

Уравнение Шредингера (5.15) для рассматриваемой области, в которой волновая функция отлична от нуля, примет вид

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E\Psi = 0. \qquad (5.16)$$

Введя обозначение

$$\omega^2 = \frac{2m}{\hbar^2} E,$$

запишем:

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + \omega^2\Psi = 0. \qquad (5.17)$$

Получили однородное дифференциальное уравнение второго порядка, решением которого является функция

$$\Psi(x) = A\sin(\omega x + \varphi). \qquad (5.18)$$

Выбор $\Psi$-функции должен удовлетворять граничным условиям. За пределы потенциальной ямы частица попасть не может, а поэтому вероятность обнаружения ее там равна нулю (следовательно, и $\Psi = 0$). Из условия непрерывности следует, что на границах потенциальной ямы, при $x = 0$ и $x = l$ $\Psi$-функция должна быть также равна нулю:

$$\Psi(0) = \Psi(l) = 0. \qquad (5.19)$$

Из уравнения (5.18) при $x = 0$ $\Psi(0) = A\sin(\varphi) = 0$, откуда следует, что $\varphi = 0$; при $x = l$

$$\Psi(l) = A\sin\omega l = 0,$$

что возможно лишь в случае

$$\omega_n l = \pm n\pi, \tag{5.20}$$

где $n = 1, 2, 3, \ldots$

Значение $n = 0$ отпадает, так как при этом $\Psi = 0$, т. е. частица нигде не находится, что противоречит условию задачи.

Из выражений $\omega_n^2 = \dfrac{2mE}{\hbar^2}$ и $\omega_n l = \pm n\pi$, исключив $\omega_n$, определим значения энергии $E$ частицы в виде

$$E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ml^2}n^2, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{5.21}$$

Как следует из уравнения (5.21), значения энергии частицы квантованы и образуют *дискретный спектр*. Целое число $n$, определяющее энергию частицы, называется *главным квантовым числом.*

Найдем разность энергий двух соседних уровней:

$$\Delta E_n = E_{n+1} - E_n = \frac{\hbar^2\pi^2}{2ml^2}(2n+1) \approx \frac{\hbar^2\pi^2}{ml^2}n, \tag{5.22}$$

т. к. $(n+1)^2 - n^2 = 2n+1$.

Из уравнения (5.22) видно, что чем меньше масса частицы и размеры потенциальной ямы, тем больше расстояние между уровнями энергии. Допустим, что масса частицы $m = 10^{-26}$ кг (примерно масса молекулы), а $l = 10$ см (размер сосуда с газом), то $\Delta E_n = 16\cdot10^{-40}\cdot n$, Дж. В этом случае энергетические уровни располагаются так часто, что воспринимаются как сплошной спектр энергии.

Для электрона, движущегося в атоме ($l \approx 10^{-10}$ м, $m = 9{,}1\cdot10^{-31}$ кг), $\Delta E_n = 10^{-17}\cdot n$, Дж и дискретность энергетических уровней весьма заметна.

Из уравнений (5.21) и (5.22) следует, что

$$\frac{\Delta E_n}{E_n} \approx \frac{2}{n}.$$

Это отношение при больших квантовых числах ($n >> 1$) гораздо меньше единицы, т. е. соседние уровни тем ближе, чем больше $n$. При больших $n$ энергетические уровни воспринимаются как сплошной спектр, т. е. выполняется принцип соответствия Бора: *законы квантовой механики при больших значениях квантовых чисел переходят в законы классической механики.*

Найдем значения собственных функций $\Psi$, подставив выражение (5.20) в (5.18):

$$\Psi_n(x) = A\sin\frac{\pi x}{l}n\,. \qquad (5.23)$$

Для определения постоянной $A$ используется условие нормировки:

$$A^2\int_0^l \sin^2\frac{\pi x n}{l}dx = 1\,.$$

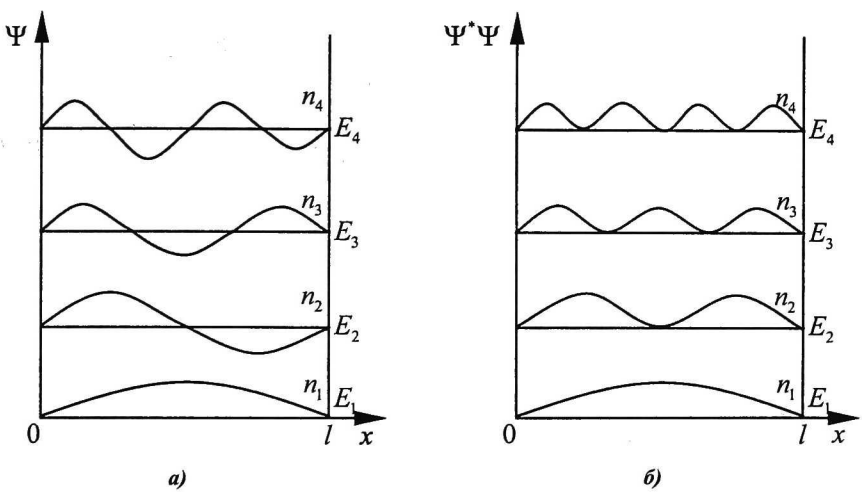
В результате интегрирования получим

$$A = \sqrt{\frac{2}{l}}\,.$$

Тогда уравнение (5.23) запишется в виде

$$\Psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{\pi x}{l}n\,, \qquad (5.24)$$

где $n = 1, 2, 3, \ldots$




*а)* *б)*

Рис. 190

На рис. 190 изображены графики волновой функции и квадрата модуля волновой функции, а также значения энергии $E$ для нескольких наименьших значений квантового числа $n$. Из рис. 190,*а* видно, что распределение вероятностей обнаружения частицы имеет характер стоячей волны.

Вероятность обнаружения частицы у стенок потенциальной ямы равна нулю: при $n = 1$ наиболее вероятное нахождение частицы в середине потенциальной ямы; при $n = 2$ частица не может быть обнаружена в середине потенциальной ямы (рис. 190,б), но одинаково часто бывает слева и справа от середины.

По законам классической физики все положения частицы в потенциальной яме равновероятны.

## § 158. Атом водорода. Квантовые числа

Атом водорода с высокой степенью точности можно рассматривать как систему, состоящую из неподвижного ядра с зарядом $+e$ и движущегося вокруг него электрона с зарядом $-e$. В системе СИ потенциальная энергия $U$ такой системы отрицательна и равна

$$U = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}, \tag{5.25}$$

где $r$ — расстояние электрона от ядра; $\varepsilon_0$ — электрическая постоянная.

Для данного случая уравнение Шредингера примет вид

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}+\frac{2m_e}{\hbar^2}\left(E+\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)\Psi = 0, \tag{5.26}$$

где $m_e$ — масса электрона.

Уравнение (5.26) имеет *однозначное, конечное и непрерывное* решение при любых положительных значениях энергии $E > 0$ и при дискретных отрицательных значениях энергии, равных

$$E_n = -\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \frac{m_e e^4}{2\hbar^2 n^2}, \tag{5.27}$$

где $n = 1, 2, 3, ...$

Случай положительных энергий соответствует процессу рассеяния электрона на протоне при термоэлектронной эмиссии, фотоэффекте и т. д. При отрицательных значениях энергия электрона связана с ядром в атоме водорода.

Целое положительное число $n$ называется *главным квантовым числом* и представляет собой номер уровня энергий.

Волновая функция электрона в атоме водорода нумеруется тремя квантовыми числами: $n$, $l$, $m$, где $l = 0, 1, 2, ..., (n-1)$ — *орбитальное квантовое число*; $m = -l, ..., -1, 0, 1, ..., l$ — *магнитное квантовое число.*

Поэтому для каждого значения энергии $E_n$, кроме $E_1$, приходится несколько волновых функции $\Psi_{n,l,m}$, которые отличаются квантовыми числами $l$ и $m$, т. е. атом может иметь одно и то же значение энергии, находясь в нескольких состояниях. Такие состояния атома называют *вырожденными,* а их количество называется *кратностью вырождения.*

Суммарное число электронных состояний $N$ (кратность вырождения), отличающихся хотя бы одним из квантовых чисел, при данном главном квантовом числе для уровней атома водорода определяется по формуле

$$N = \sum_{l=0}^{n-1}(2l+1) = n^2. \tag{5.28}$$

В квантовой механике показано, что орбитальное квантовое число $l$ определяет момент импульса электрона $L$:

$$L = \hbar\sqrt{l(l+1)}, \quad l = 0,1,2,...,(n-1), \tag{5.29}$$

т. е. момент импульса электрона квантуется — он может иметь лишь дискретные значения.

Проекция вектора $\vec{L}$ орбитального момента импульса электрона на направление оси $z$ внешнего магнитного поля тоже квантуется:

$$L_z = m\hbar, \tag{5.30}$$

где $m = 0, \pm1, \pm2, ..., \pm l$ — магнитное квантовое число.

Существует еще спиновое квантовое число $s$, которое принимает только два значения: $s = \pm\frac{1}{2}$. Экспериментальное исследование спектральных линий водорода показало, что каждая линия состоит из двух (или большего числа) близких спектральных линий. Это явление получило название *тонкой структуры спектральных линий*.

Электрон может находиться в двух различных состояниях, характеризующихся *спином*. Эти два возможных значения спинового квантового числа ($+\frac{1}{2}$ и $-\frac{1}{2}$) определяют два возможных направления спинового момента импульса $M = \pm s\hbar$.

В атомной физике принято использовать заимствованные из спектроскопии обозначения. Например, состояние электрона с $l = 0$ называют $s$-состоянием; $l = 1$ — $p$-состояние и т. д. ($s$, $p$, $d$, $f$, $g$, $h$, ..... в порядке возрастания орбитального момента $l$).

При записи символа состояния главное квантовое число пишется в начале. Например, символ $4d$ означает, что электрон находится в состоянии с квантовыми числами $n = 4$, $l = 2$.

Фотон является элементарной частицей, обладающей целым спином ($s = 1$). Поэтому при квантовых переходах выполняется *правило отбора*:

$$\Delta l = \pm 1. \tag{5.31}$$

Из схемы уровней, представленных на рис. 191, видно, что серии Лаймана соответствуют переходы $np \to 1s$, серии Бальмера — переходы $np \to 2s$, $ns \to 2p$, $nd \to 2p$.

Состояние $1s$ является *основным*. Находясь в этом состоянии, атом обладает минимальной энергией и не излучает. Поглощение электромагнитной энергии атомом обычно происходит в ситуации, когда атом находится в основном состоянии. Именно поэтому спектр поглощения для атомарного водорода состоит из линии серии Лаймана, то есть отвечает переходам:

$$1s \to np, \quad n = 2, 3, ... \tag{5.32}$$

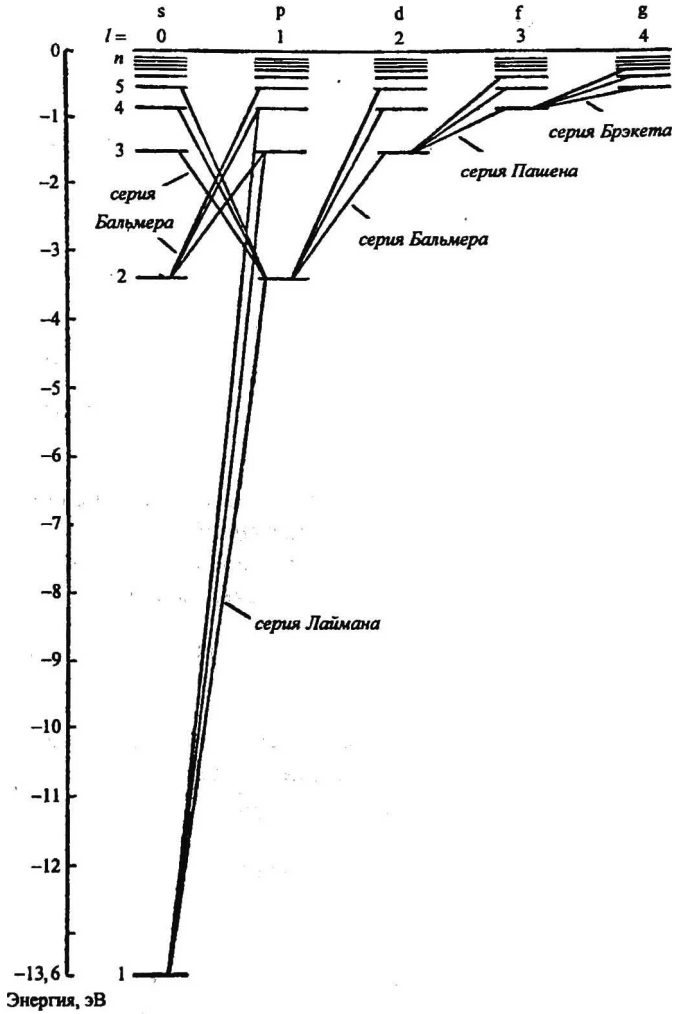



Рис. 191

Обобщение результатов, полученных для атома водорода, в ряде случаев получается достаточно просто. Например, для водородоподобного атома (ион атома гелия или другого, более тяжелого иона, в котором вокруг ядра движется один электрон) энергетический спектр получается из формулы (5.27) путем замены заряда ядра $e$ на $Ze$, где $Z$ — порядковый номер химического элемента:

$$E_n = -\frac{m_e Z^2 e^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2 2\hbar^2 n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{5.33}$$

Для щелочных металлов процессы излучения и поглощения похожи на процессы в атоме водорода. Они определяются в основном переходами внешнего (валентного) электрона. Схема уровней в этом случае подобна атому водорода. Состояния валентного электрона также нумеруются главным и орбитальным квантовыми числами ($n$, $l$). Различные ряды уровней отличаются значением орбитального момента $L = 0,1,2,3,4,...$ и обозначаются буквами $S$, $P$, $D$, $F$, $G$, ...

Ридберг показал, что в линейчатых спектрах химических элементов наблюдаются спектральные серии, частоты $\omega$ всех линий данной серии удовлетворяют соотношению

$$\omega = T(n_2) - T(n_1),$$

где $n_1$ и $n_2$ — некоторые целые числа.

Функции $T(n)$ называются *спектральными термами*.

## § 159. Магнитомеханические явления. Спин электрона

Рассмотрим опыты, в которых впервые экспериментально была обнаружена связь между орбитальными магнитными и механическими моментами электрона и определено гиромагнитное отношение.

*Опыт Эйнштейна и де Хааза*[1].

Стержень 1 из ферромагнетика, подвешенный на упругой нити 2, помещается внутрь соленоида 3 (рис. 192), который запитывался переменным электрическим током. Намагничивание стержня приводит к его вращению, так как магнитные орбитальные моменты электронов устанавливаются по направлению магнитного поля соленоида, а механические орбитальные моменты ориентируются против поля. При этом суммарный механический момент электронов, первоначально равный нулю (вследствие беспорядочной ориентации некоторых моментов), становится отличен от нуля. Стержень приобретает момент импульса и совершает крутильные колебания вокруг своей оси. Для усиления эффекта собственные частоты крутильных колебаний и переменного электрического тока подбирались так, чтобы имел место резонанс. По смещению светового луча 5, отраженного от зеркальца 4, закрепленного на кварцевой нити, измерялась

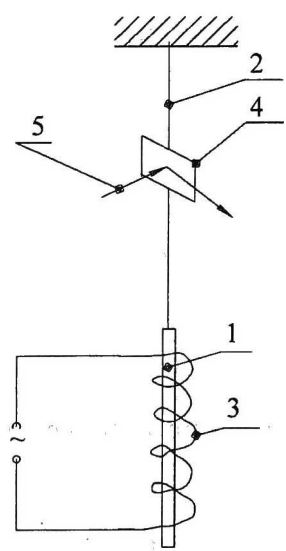


Рис. 192

[1] В. де Хааз (1878–1960) — голландский физик.

амплитуда колебаний. Опыты позволили найти отношение магнитного орбитального момента электрона к его механическому орбитальному моменту (гиромагнитное отношение), которое оказалось равным $-e/m$, т. е. в два раза больше значения, определенного по формуле (3.140).

*Опыт Барнетта*[1].

Барнетт проделал опыт по определению гиромагнитного отношения, приводя железный стержень в быстрое вращение и измеряя возникающую в нем намагниченность. По опытам Барнетта значение гиромагнитного отношения оказалось в два раза больше теоретического, рассчитанного по формуле (3.140).

Явления, наблюдаемые в опытах Эйнштейна и де Хааза и Барнетта, получили название *магнитомеханические явления*.

В 1925 г. Д. Ю. Уленбек[2] и С. А. Гаудсмит[3] для объяснения результатов рассмотренных опытов выдвинули гипотезу о том, что электрон, помимо орбитальных механического и магнитного моментов, обладает собственным механическим моментом $L_s$ который они назвали *спином* (spin — вращение).

*Спин электрона* — это такое же его свойство, как масса $m$ и заряд $e$. Спину электрона соответствует собственный магнитный момент

$$p_s = -L_s \frac{e}{m}.$$

Было установлено, что

$$L_S = \hbar\sqrt{s(s+1)} = \frac{\sqrt{3}}{2}\hbar, \tag{5.34}$$

$$p_s = -\frac{e\hbar\sqrt{3}}{2m} = -\sqrt{3}\mu_Б, \tag{5.35}$$

где $s = 1/2$ — спиновое квантовое число электрона, $\mu_Б = \frac{e\hbar}{2m} =$

$= 0{,}927 \cdot 10^{-23} \frac{Дж}{Тл}$ — *магнетон Бора* (единица магнитного момента).

Отношение собственного магнитного $p_s$ и механического $L_s$ моментов электрона (гиромагнитное отношение) равно

$$\frac{p_s}{L_s} = -\frac{e}{m},$$

что находится в соответствии с опытными данными.

---

[1] Сэмюэл Джексон Барнетт (1873–1956) — американский физик.

[2] Джордж Юджин Уленбек (1900–1974) — американский физик.

[3] Самюэл Абрахам Гаудсмит (1902–1979) — американский физик.

Исследование спектров водорода показало, что каждая спектральная линия состоит из двух или более близких линий. Это явление *называется тонкая структура спектральных линий.*

При помещении атома в магнитное поле спектральная линия оказывается расщепленной на две компоненты с почти одинаковыми, но все же отличающимися частотами. Это явление называется *эффектом Зеемана.*

Наличие спина у электрона позволило объяснить как магнитные свойства ферромагнетиков, так и особенности оптических спектров.

## § 160. Опыт Штерна и Герлаха

Эксперимент, осуществленный Штерном и Герлахом[1] в 1921 г. подтвердил идею о пространственном квантовании спинового момента электрона.

Схема опыта показана на рис. 193. Пучок атомов, испускаемых серебром M, разогретым в печи, проходя в вакуумированном сосуде через систему диафрагм D и через сильно неоднородное магнитное поле, попадал на фотопластинку Ф. Неоднородность магнитного поля достигалась конструкцией полюсных наконечников электромагнита. До включения магнитного поля на фотопластинку падал узкий пучок атомов, фиксируя на ней тонкую сплошную полоску.

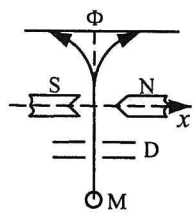


Рис. 193

В соответствии с классической теорией после прохождения пучка атомов через сильно неоднородное магнитное поле на фотопластинке должна образовываться сплошная растянутая полоса. Согласно квантовой теории невозбужденные атомы не имеют магнитного момента, обусловленного движением электрона вокруг ядра, и поэтому на атомы магнитное поле не действует и они должны двигаться строго по прямой линии в центр экрана. Однако в опытах с пучком атомов серебра были зафиксированы две резко выраженные линии, расположенные симметрично относительно центра. Анализ показал, что на атом в неоднородном магнитном поле действует сила

$$F_x = -m_s \frac{e\hbar}{m} \frac{dB}{dx},$$

где $e$ и $m$ — заряд и масса электрона; $B$ — индукция магнитного поля; $m_s$ — магнитное спиновое квантовое число.

Атомы, для которых $m_s = -1/2$, смещаются в положительном направлении оси $x$, так как для них $F_x > 0$. Для атомов с $m_s = +1/2$ сила $F_x < 0$, и они смещаются в противоположную сторону.

Опыт Штерна–Герлаха был повторен с атомами водорода, меди, золота, натрия, калия и во всех случаях наблюдалось раздвоение пучка.

[1] Вальтер Герлах (1889–1979) — немецкий физик.

Эти опыты показали, что электрон имеет спиновой магнитный момент, который может принимать одну из двух дискретных ориентаций относительно внешнего поля, т. е. проекция спина электрона и его магнитного момента на направление внешнего магнитного поля является квантованной величиной.

## § 161. Принцип Паули. Периодическая система элементов Менделеева

В 1925 г. Паули[1] выдвинул принцип, который гласил: *в одном и том же атоме не может быть двух электронов, имеющих набор одних и тех же квантовых чисел.*

Ранее отмечалось, что число электронов $Z$ в атоме совпадает с номером элемента в периодической системе Менделеева. Поведение электронов в атоме подчиняется двум основным принципам:

1) электрон находится в состоянии с минимальной энергией,

2) принцип Паули.

Эти принципы лежат в основе распределения электронов по энергетическим уровням и определяют положение атома в периодической системе элементов Менделеева.

Состояние электрона в атоме характеризуется четырьмя квантовыми числами: главное квантовое число $n$, принимающее значения 1, 2, 3,...; орбитальное квантовое число $l$ со значениями 0, 1, 2,..., $(n-1)$; магнитное квантовое число $m$, принимающее значения 0, $\pm1$, $\pm2$,..., $\pm l$, и спиновое квантовое число $s = \pm 1/2$.

Электроны в атоме в зависимости от значения квантового числа $n$ образуют *оболочки*, которые подразделяются на подоболочки, отличающиеся значениями орбитального квантового числа $l$. Обозначение оболочек представлено в табл. 5.

*Таблица 5*

| Значение числа $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Обозначение оболочки | $K$ | $L$ | $M$ | $N$ | $O$ | $P$ | ... |
| Орбитальное квантовое число $l$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | ... |
| Обозначение подоболочки | $s$ | $p$ | $d$ | $f$ | $g$ | $h$ | ... |

Атом водорода H имеет один электрон ($Z = 1$). По принципу минимальной энергии его главное квантовое число $n = 1$, орбитальное квантовое число $l = n - 1 = 0$, магнитное квантовое число $m = 0$, а $s = \pm 1/2$. Очевидно, что он будет находиться в $K$-оболочке, состояние электрона обозначается $1s$, спин которого может иметь произвольную ориентацию.

[1] Вольфганг Паули (1900–1958) — швейцарский физик.

*Таблица 6.*

| Элемент | K | L | | M | | | N | | Элемент | K | L | M | N | | | O | | | P |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1s | 2s | 2p | 3s | 3p | 3d | 4s | 4p | | | | | 1s 1p | 4d | 4f | 5s | 5p | 5d | 6s |
| 1H | 1 | - | - | - | | - | | | 37Rb | 2 | 8 | 18 | 8 | - | - | 1 | | | - |
| 2He | 2 | - | - | - | | | | | 38Sr | 2 | 8 | 18 | 8 | - | | 2 | | | |
| 3Li | 2 | 1 | - | | - | | | - | 39Y | 2 | 8 | 18 | 8 | 1 | - | 2 | - | - | - |
| 4Be | 2 | 2 | - | - | | | | | 40Zr | 2 | 8 | 18 | 8 | 2 | - | 2 | - | | - |
| 5B | 2 | 2 | 1 | - | | | - | | 41Nb | 2 | 8 | 18 | 8 | 4 | - | 1 | - | - | - |
| 6C | 2 | 2 | 2 | - | - | | - | | 42Mo | 2 | 8 | 18 | 8 | 5 | | 1 | - | | |
| 7N | 2 | 2 | 3 | - | | | - | | 43Tc | 2 | 8 | 18 | 8 | 5 | | 2 | - | | |
| 8O | 2 | 2 | 4 | | | | - | | 44Ru | 2 | 8 | 18 | 8 | 7 | | 1 | | | |
| 9P | 2 | 2 | 5 | - | - | | - | | 45Rh | 2 | 8 | 18 | 8 | 8 | | 1 | - | | |
| 10Ne | 2 | 2 | 6 | - | - | | - | | 46Pd | 2 | 8 | 18 | 8 | 10 | - | | | | |
| 11Na | 2 | 8 | | 1 | - | - | - | - | 47Ag | 2 | 8 | 18 | 18 | | - | 1 | - | - | - |
| 12Mg | 2 | 8 | | 2 | | | - | | 48Cd | 2 | 8 | 18 | 18 | | - | 2 | | | |
| 13Al | 2 | 8 | | 2 | 1 | | - | | 49In | 2 | 8 | 18 | 18 | | | 2 | 1 | - | - |
| 14Si | 2 | 8 | | 2 | 2 | - | - | - | 50Sn | 2 | 8 | 18 | 18 | | | 2 | 2 | | - |
| 15P | 2 | 8 | | 2 | 3 | - | - | - | 51Sb | 2 | 8 | 18 | 18 | | | 2 | 3 | - | - |
| 16S | 2 | 8 | | 2 | 4 | | - | - | 52Te | 2 | 8 | 18 | 18 | | - | 2 | 4 | - | - |
| 17Cl | 2 | 8 | | 2 | 5 | - | | | 53I | 2 | 8 | 18 | 18 | | - | 2 | 5 | | - |
| 18Ar | 2 | 8 | | 2 | 6 | - | - | - | 54Xe | 2 | 8 | 18 | 18 | | - | 2 | 6 | - | - |
| 19K | 2 | 8 | | 8 | | - | 1 | - | 55Cs | 2 | 8 | 18 | 18 | | - | 8 | | - | 1 |
| 20Ca | 2 | 8 | | 8 | | | 2 | - | 56Ba | 2 | 8 | 18 | 18 | | - | 8 | | - | 2 |
| 21Sc | 2 | 8 | | 8 | | 1 | 2 | - | 57La | 2 | 8 | 18 | 18 | | - | 8 | | 1 | 2 |
| 22Ti | 2 | 8 | | 8 | | 2 | 2 | - | 58Ce | 2 | 8 | 18 | 18 | | 2 | 8 | | | 2 |
| 23V | 2 | 8 | | 8 | | 8 | 2 | - | 59Pr | 2 | 8 | 18 | 18 | | 3 | 8 | | | 2 |
| 24Cr | 2 | 8 | | 8 | | 5 | 1 | - | 60Nd | 2 | 8 | 18 | 18 | | 4 | 8 | | | 2 |
| 25Mn | 2 | 8 | | 8 | | 5 | 2 | - | 61Pm | 2 | 8 | 18 | 18 | | 5 | 8 | | - | 2 |
| 26Fe | 2 | 8 | | 8 | | 6 | 2 | - | 62Sm | 2 | 8 | 18 | 18 | | 6 | 8 | | | 2 |
| 27Co | 2 | 8 | | 8 | | 7 | 2 | - | 63Eu | 2 | 8 | 18 | 18 | | 7 | 8 | | | 2 |
| 28Ni | 2 | 8 | | 8 | | 8 | 2 | - | | | | | | | | | | | |
| 29Cu | 2 | 8 | | 8 | | 10 | 1 | - | 64Gd | 2 | 8 | 18 | 18 | | 7 | 8 | | 1 | 2 |
| 30Zn | 2 | 8 | | 8 | | 10 | 2 | - | 65Tb | 2 | 8 | 18 | 18 | | 8 | 8 | | 1 | 2 |
| 31Ga | 2 | 8 | | 8 | | 10 | 2 | 1 | 66Dy | 2 | 8 | 18 | 18 | | 10 | 8 | | | 2 |
| 32Ge | 2 | 8 | | 8 | | 10 | 2 | 2 | 67Ho | 2 | 8 | 18 | 18 | | 11 | 8 | | - | 2 |
| 33As | 2 | 8 | | 8 | | 10 | 2 | 3 | 68Er | 2 | 8 | 18 | 18 | | 12 | 8 | | - | 2 |
| 34Se | 2 | 8 | | 8 | | 10 | 2 | 4 | 69Tu | 2 | 8 | 18 | 18 | | 13 | 8 | | - | 2 |
| 35Br | 3 | 8 | | 8 | | 10 | 2 | 5 | 70Yb | 2 | 8 | 18 | 18 | | 14 | 8 | | - | 2 |
| 36Kr | 2 | 8 | | 8 | | 10 | 2 | 6 | 71Lu | 2 | 8 | 18 | 18 | | 14 | 8 | | 1 | 2 |

Следующий элемент гелий He с зарядовым числом $Z = 2$ (два электрона). Оба электрона находятся в $K$-оболочке в состоянии $1s^2$, но по принципу Паули их спиновые квантовые числа различны: $+1/2$ и $-1/2$

(антипараллельная ориентация спинов). Атом гелия заканчивает заполнение $K$-оболочки. Число состояний $N$ электрона в атоме при данном значении главного квантового числа $n=1$ согласно (5.28) $N=n^2=1$, но с учетом спина удваивается и принимает значение $N_1=2$. Это число состояний образует период таблицы элементов, заканчивающийся гелием.

Далее осуществляется построение $L$-оболочки, в которой может разместиться $N_2=8$ электронов. Заполнение начинается с атома лития Li, имеющего три электрона, два из которых находятся в состоянии $1s$, а третий электрон по принципу Паули не может находиться в этом состоянии и попадает в $L$-оболочку в состояние $2s$. Заполнение $L$-оболочки заканчивается атомом неона Ne (см. табл. 6).

Затем идет построение $M$-оболочки, которая по формуле (5.28) может содержать $N_3=18$ электронов, имея в своем составе три подоболочки $3s$, $3p$ и $3d$. Как и в предыдущих случаях, сначала заполняются $K$- и $L$-оболочки, а затем в $M$-оболочке сначала заполняется подоболочка $3s$, потом $3p$.

Построение $M$-оболочки начинается с атома натрия Na и заканчивается атомом криптона Kr.

Как видно из табл. 6 инертные газы: Ne — неон, Ar — аргон, Kr — криптон, Xe — ксенон имеют одинаковые внешние оболочки из 8 электронов; во внутренней оболочке щелочных металлов (Li — литий, Na — натрий, K — калий, Rb — рубидий, Cs — цезии, Fr — франций) имеется лишь один $s$-электрон; во внешней оболочке щелочно-земельных металлов (Be — бериллий, Mg — магний, Ca — кальций, Sr — стронций, Ba — барий, Ra — радий) имеется два $s$-электрона.

Периодичность свойств химических элементов, открытая Д. И. Менделеевым, связана с периодичностью заполнения оболочек и подоболочек электронов, с номерами мест в них, определяемых квантовыми числами и разрешаемых принципом Паули.

## § 162. Рентгеновское излучение

В 1895 г. Рентген[1] обнаружил лучи, обладающие большой проникающей способностью, впоследствии названные *рентгеновскими лучами*.

Рентгеновские лучи можно получить с помощью рентгеновской трубки (см. рис. 194), состоящей из катода 1, фокусирующего цилиндра 2, анода 3 и вакуумированной колбы 4. Катод 1 выполняется из вольфрама в виде спирали. За счет термоэлектронной эмиссии катод испускает электроны, которые фокусируются цилиндром 2 на металлический анод 3.

[1] Вильгельм Конрад Рентген (1845–1923) — немецкий физик.

Между анодом и катодом прикладывается высокое напряжение — десятки киловольт. Давление газа в трубке 4 очень низкое, порядка $10^{-5}$ мм рт. ст.

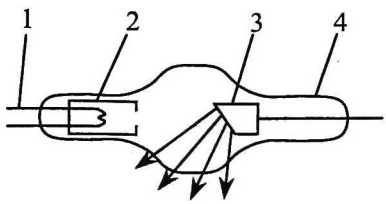



Рис. 194

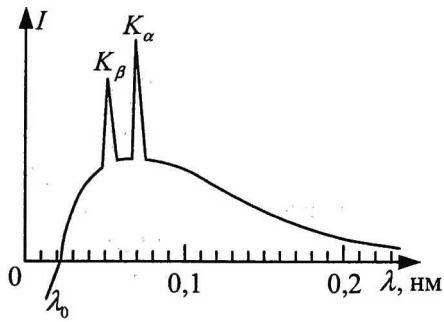



Рис. 195

Электроны, вырываемые из катода и ускоренные внешним электрическим полем, бомбардируют анод, при этом образуются рентгеновские лучи.

Рентгеновские лучи представляют собой электромагнитные волны с длиной волны $\lambda \approx (0{,}1-1)$ нм .

Спектр рентгеновского излучения содержит две компоненты (рис. 133): сплошной спектр, обусловленный торможением электронов (*тормозное излучение*), и отдельные спектральные линии *характеристического излучения* (максимумы $K_\alpha$ и $K_\beta$ на рис. 195).

Тормозное излучение наблюдается при напряжении $U$ на рентгеновской трубке $\sim(30\div50)$ кВ, не зависит от материала анода и определяется энергией бомбардирующих электронов.

Кривая распределения интенсивности $I$, как видно из рис. 195, обрывается при длине волны $\lambda_0$, которая зависит от приложенного к трубке напряжения:

$$\lambda_0 = \frac{hc}{eU}, \tag{5.36}$$

где $h$ — постоянная Планка; $e$ — заряд электрона; $c$ — скорость света в вакууме.

При повышении напряжения на трубке наблюдается характеристическое излучение, обусловленное возбуждением внутренних электронных оболочек атомов анода. Характеристическое излучение определяется природой вещества, из которого изготовлен анод.

Г. Мозли[1] установил закон для определения частоты спектральных линий характеристического излучения:

$$\nu = R(Z-\sigma)^2\left(\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}\right), \qquad (5.37)$$

где $\nu$ — частота, соответствующая данной линии; $R$ — постоянная Ридберга; $Z$ — атомный номер химического элемента (вещества анода); $\sigma$ — постоянная экранирования, принимающая различные значения для каждой серии спектра; $m = 1, 2, 3, \ldots$ (определяет серию спектра); $n$ принимает целочисленные значения, начиная с $m + 1$ (определяет отдельную линию в соответствующей серии).

С помощью закона Мозли по измеренной длине волны спектральной линии рентгеновского излучения весьма точно определяется атомный номер химического элемента.

Благодаря высокой проникающей способности рентгеновские лучи находят широкое применение в медицине (диагностика и лечение ряда заболеваний), в дефектоскопии изделий, в металловедении при определении структуры кристаллов и т. д.

## § 163. Индуцированное излучение. Лазеры

Переход атома или молекулы из одного энергетического состояния в другое сопровождается поглощением или излучением квантовой энергии. Такие переходы могут происходить как спонтанно (например, люминесценция), так и под действием внешнего электромагнитного поля. Если квантовая система излучает энергию под действием внешнего электромагнитного поля, то такое излучение называется *индуцированным*. Отличительной чертой индуцированного излучения является то, что оно совпадает по частоте, направлению и поляризации с внешним, падающим на вещество излучением, и когерентно во всем объеме.

Когда квантовая система, через которую проходит электромагнитная волна, находится в термодинамическом равновесии, то населенность нижних энергетических уровней системы больше, чем верхних, и большее число атомов переходит в единицу времени с нижних уровней на верхние, чем наоборот. Хотя вероятности перехода с уровня на уровень при этом в обоих направлениях одинаковы.

Если квантовая система находится в возбужденном состоянии, то населенность верхних энергетических уровней значительно больше населенности нижних уровней, в этом случае под влиянием внешнего излучения большее число атомов переходит в единицу времени с верхних уровней на нижние. Этот процесс сопровождается индуцированным излучением.

---

[1] Генри Гвин Джефриз Мозли (1887–1915) — английский физик.

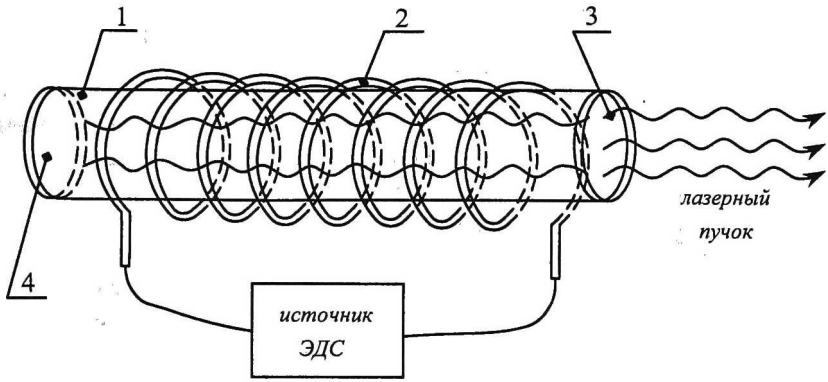



Рис. 196

Состояние системы, при котором число атомов в возбужденном состоянии больше, чем в основном, называется состоянием с *инверсной населенностью*. Для достижения такого состояния используется *оптическая накачка*.

Таким образом, имея возбужденную квантовую систему, можно получить усиление падающего слабого излучения.

Приборы, генерирующие индуцированное излучение, называются *квантовыми генераторами*.

В начале 50-х годов советские физики Н. Г. Басов[1] и А. М. Прохоров[2], а также независимо от них американский физик Ч. Х. Таунс[3] создали первые квантовые генераторы — мазеры, работающие в диапазоне сантиметровых волн. В 1960 г. Т. Г. Мейман[4] создал первый оптический квантовый генератор — лазер, работающий в видимой области спектра.

Рабочим телом в первом лазере (рис. 196) служил цилиндр 1 диаметром порядка 1 см и длиной 5 см, изготовленный из розового рубина, который представлял собой окись алюминия $Al_2O_3$ с примесью 0,05% $Cr_2O_3$. Плоские торцы цилиндра были тщательно отполированы и параллельны с большой степенью точности. На них наносилось серебряное покрытие таким образом, что торец цилиндра 4 полностью отражал свет, а торец 3 способен пропускать около 10% упавшей на него световой энергии. Рубиновый цилиндр помещался внутрь спиральной импульсной лампы 2, дающей яркое излучение. За счет энергии этого излучения происходит возбуждение ионов хрома, которые участвуют в генерации лазерного излуче-

[1] Николай Геннадиевич Басов (1922–2001) — советский физик.
[2] Александр Михайлович Прохоров (1916–2002) — советский физик.
[3] Чарльз Хард Таунс (род. в 1915 г.) — американский физик.
[4] Теодор Гарольд Мейман (род. в 1927 г.) — американский физик.

ния. Кроме основного состояния 1 (рис. 197) у иона хрома существуют возбужденные состояния 2 и 3. Уровень 2 получил название *метастабильного* уровня, так как время жизни его на несколько порядков больше, чем у обычных состояний, и составляет примерно $10^{-3}$ с.

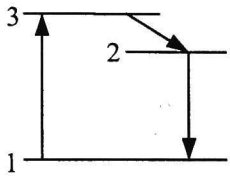


Рис. 197

Переход в состояние 1 из состояния 2 осуществляется под воздействием внешней электромагнитной волны. Как только несколько атомов осуществят этот переход, они стимулируют вынужденное излучение других атомов, и начинается лазерная генерация.

Для перевода системы в метастабильное состояние используется оптическая *накачка*. Накачку выполняет ксеноновая лампа – вспышка, излучающая свет с длиной волны $\lambda = 550$ нм. Световая энергия от лампы проникает через прозрачный кристалл и переводит ионы хрома из основного состояния 1 в возбужденное состояние 3. Подавляющее число атомов путем безызлучательного перехода попадают на метастабильный уровень 2, в котором живут сравнительно долго. Уровень 2 становится перенасыщенным. Так «накапливается» энергия. Затем происходит вынужденный переход из состояния 2 в состояние 1. Начинают излучаться волны во всех направлениях.

Волна, идущая вдоль цилиндра, многократно отражается от его торцов, так как один из торцов зеркальный, а другой полупрозрачный. Эта волна освобождает энергию, накопленную на метастабильных уровнях, и быстро усиливается. Через полупрозрачный торец из рубина выходит кратковременный импульс красного цвета. Лазерный луч монохроматичен, обладает высокой когерентностью, большой интенсивностью и имеет очень малый (порядок $10^{-5}$ рад) угол расхождения.

Лазеры используются в технике: для сварки, резки, плавления металлов; в медицине вместо скальпеля; в светолокаторах для измерения расстояний, в голографии как источники света и т. д.

## ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

**Задача 78.** Найдите длину волны де Бройля для: а) электрона, движущегося со скоростью $v = 10^6$ м/с; б) атома водорода, движущегося со среднеквадратичной скоростью при температуре $T = 300$ К; в) шарика массой $m = 1$ г, движущегося со скоростью $v = 1$ см/с.

**Дано:**

а) $m_0 = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг

$v = 10^6$ м/с

б) $T = 300$ К

$\mu = 10^{-3} \dfrac{\text{кг}}{\text{моль}}$

в) $m = 10^{-3}$ кг

$v = 10^{-2}$ м/с

$\lambda = ?$

**Решение.** Длина волны де Бройля определяется по формуле (5.10):

$$\lambda = \frac{h}{mv}, \qquad (1)$$

когда частота нерелятивистская, т. е. скорость движения $v$ гораздо меньше скорости света $c$.

Масса релятивистской частицы

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

и формула (1) примет вид

$$\lambda = \frac{h\sqrt{1 - v^2/c^2}}{m_0 v}, \qquad (2)$$

где $m_0$ — масса покоя частицы; $h$ — постоянная Планка.

а) Так как скорость электрона $v$ соизмерима со скоростью света $c$, то для определения $\lambda$ воспользуемся уравнением (2):

$$\lambda = \frac{h\sqrt{1 - v^2/c^2}}{m_0 v}; \quad \lambda = 727 \text{ пм}.$$

б) Среднеквадратичную скорость атома водорода найдем по формуле (2.25):

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}; \quad \langle v \rangle = 2733 \text{ м/с},$$

где $R = 8{,}31 \dfrac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$ — универсальная газовая постоянная; $\mu$ — молярная масса атома водорода.

Так как $\langle v \rangle << c$, то длину волны найдем по формуле (1):

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{hN_A}{\mu v}; \quad \lambda = 146 \text{ пм},$$

где $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$ — постоянная Авогадро.

в) Так как скорость шарика $v << c$, то по формуле (1) найдем

$\lambda = 6{,}62 \cdot 10^{-29}$ м. Ввиду малости $\lambda$ волновые свойства шарика обнаружить невозможно.

**Ответ:** а) 727 пм, б) 146 пм, в) $6{,}62 \cdot 10^{-29}$ м.

**Задача 79.** Оцените с помощью соотношений неопределенностей минимальную кинетическую энергию электрона, движущегося внутри сферы радиусом $R$ = 0,05 нм, со скоростью v << $c$.

**Дано:**
$R = 0{,}5 \cdot 10^{-10}$ м
$E_{к\,min} = ?$

**Решение.** Соотношение неопределенностей для координаты и импульса имеет вид (5.11):

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar, \qquad (1)$$

где $\Delta x$ — неопределенность координаты частицы; $\Delta p$ — неопределенность ее импульса; $\hbar = 1{,}05 \cdot 10^{-34}$ Дж · с — постоянная Планка.

Электрон движется внутри сферы радиусом $R$. Можно считать, что электрон будет находиться в пределах области с неопределенностью

$$\Delta x = R. \qquad (2)$$

Физически неопределенность импульса $\Delta p$ не должна превышать значение самого импульса $p$, т. е.

$$\Delta p \leq p. \qquad (3)$$

Для нерелятивистской частицы кинетическая энергия $E_к = \frac{m\text{v}^2}{2}$, а импульс $p = m\text{v}$, отсюда запишем:

$$p = \sqrt{2mE_к}. \qquad (4)$$

Подставив выражения (2)–(4) в уравнение (1), получим

$$Rp \geq \hbar \quad \text{или} \quad R\sqrt{2mE_к} \geq \hbar. \qquad (5)$$

Выполняя подстановку, изменение импульса $\Delta p$ заменили значением

$$p = \sqrt{2mE_к},$$

так как такая замена не нарушает неравенства.

Из выражения (5) находим

$$E_к \geq \frac{\hbar^2}{2R^2 m}. \qquad (6)$$

Переходя в уравнении (6) к равенству, определим минимальную кинетическую энергию электрона:

$$E_{к\,min} = \frac{\hbar^2}{2R^2 m}; \; E_{к\,min} = 2{,}42 \cdot 10^{-18} \text{ Дж} = 15 \text{ эВ}.$$

**Ответ:** $E_{к\,min} = 15$ эВ.

# Глава 28
# ЭЛЕМЕНТЫ ФИЗИКИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

## § 164. Энергетические зоны металлов, диэлектриков и полупроводников

В отдельном атоме, как было показано ранее, электроны могут занимать вполне определенные (разрешенные) энергетические уровни, образуя дискретный спектр. Самый низкий энергетический уровень соответствует основному состоянию, а более высокие уровни — возбужденным состояниям. В промежутках между энергетическими уровнями значения энергии для электронов запрещены. Состояния электронов в атоме определяются квантовыми числами $n$, $l$, $m$ и $s$. Их принято изображать в виде схемы уровней (рис. 198). На каждом энергетическом уровне, согласно принципу Паули, могут находиться не более двух электронов, имеющих противоположно направленные спины. Заполнение уровней происходит в определенной последовательности: сначала заполняется самый низкий энергетический уровень, затем следующий и т. д. Последний энергетический уровень, заполненный при $T = 0$ К, называется *валентным*. В кристалле разрешенные энергетические уровни расщепляются, образуя широкие *зоны*. Внешние электроны оказываются в *валентной зоне*, или в частично заполненной зоне, следующей за валентной, называемой *зоной проводимости*. Между разрешенными зонами расположены *запрещенные зоны*, состоящие из значений энергий, которыми электроны обладать не могут. На рис. 199 показано распределение зон в кристалле.

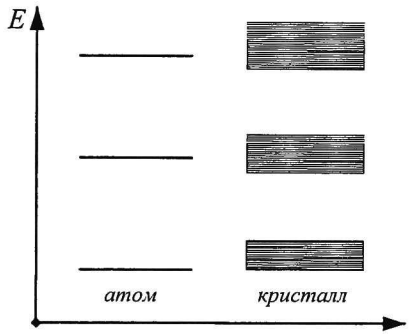


Рис. 198

У диэлектриков валентные зоны заполнены электронами, зона проводимости практически пуста, а ширина запрещенной зоны $\Delta E$ настолько велика (порядка нескольких электрон-вольт), что энергия теплового движения электронов недостаточна для переброски их из

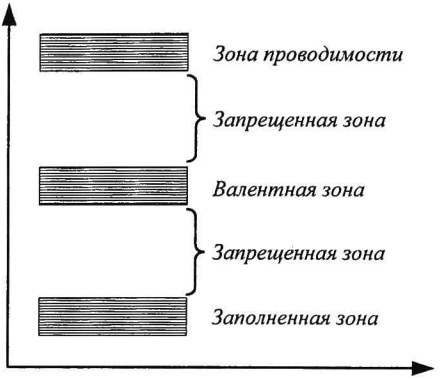


Рис. 199

валентной зоны в зону проводимости (рис. 200). В полупроводниках валентная зона также полностью заполнена электронами, но ширина запрещенной зоны сравнительно невелика ($\Delta E \sim 1$ эВ) и при нормальных условиях на каждые $10^9$ атомов приходится одна пара носителей электрических зарядов, появляющихся под действием света или теплоты.

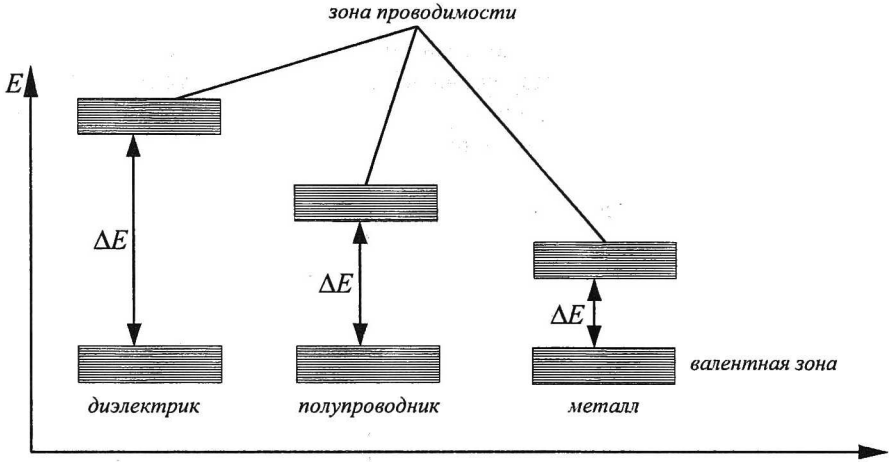



Рис. 200

В металлах валентная зона и зона проводимости расположены так близко, что могут частично перекрываться. Сравнительно небольшая энергия $\Delta E \sim \left(10^{-23} - 10^{-22}\right)$ эВ способна перевести валентные (свободные) электроны на более высокие энергетические уровни. Поэтому электроны легко ускоряются электрическим полем и металлы являются хорошими проводниками электрического тока.

Свободные электроны в металлах образуют *электронный газ*, так как их поведение подобно молекулам идеального газа.

Согласно квантовой модели проводимости электроны в металлах подчиняются *распределению Ферми*[1]*–Дирака*[2]:

$$\langle n_i \rangle = \frac{1}{\exp\left(\dfrac{E_i - E_F}{kT}\right) + 1}. \qquad (5.38)$$

где $\langle n_i \rangle$ — среднее число электронов, находящихся на уровне энергии $E_i$, $E_F$ — энергия (уровень) Ферми; $k$ — постоянная Больцмана; $T$ — температура.

[1] Энрико Ферми (1901–1954) — итальянский физик.
[2] Поль Адриен Морис Дирак (1902–1984) — английский физик.

*Уровень Ферми* $E_F$ — это максимальная энергия, которую могут иметь электроны при абсолютном нуле температуры. Энергия Ферми слабо зависит от температуры:

$$E_F = E_F^0\left[1-\frac{\pi^2}{12}\left(\frac{kT}{E_F^0}\right)^2\right], \tag{5.39}$$

где $E_F^0 = \dfrac{\hbar^2\left(3\pi^2 n\right)^{2/3}}{2m}$ — энергия Ферми при абсолютном нуле температуры; $\hbar$ — постоянная Планка; $m$ — масса электрона; $n$ — концентрация электронов в металле.

Отношение

$$T_F = \frac{E_F}{k}$$

называется *температурой Ферми*. Если $T << T_F$, электронный газ называется *вырожденным*, если $T >> T_F$, то электронный газ называется *невырожденным*. Электронный газ в металлах даже при температурах плавления ($\sim 10^3$ К) является вырожденным. Поэтому электронный газ вносит малый вклад в теплоемкость металлов.

## § 165. Полупроводники. Собственная и примесная проводимость полупроводников

По способности проводить электрический ток все вещества делятся на проводники, полупроводники и изоляторы. Металлы являются хорошими проводниками, большинство других веществ (резина, слюда и т. д.) — изоляторы. Вещества, принадлежащие к промежуточной, но резко обособленной категории, называются *полупроводниками*.

Большинство полупроводников — это твердые кристаллические вещества. Ярко выраженными полупроводниками являются кремний и германий.

Электропроводимость чистых (т. е. без примесей) полупроводников называется *собственной*.

Рассмотрим механизм электрической проводимости на примере таких полупроводников, как германий или кремний.

Межатомные связи в любых кристаллах, в том числе и полупроводниковых, осуществляются с помощью валентных электронов, находящихся во внешней электронной оболочке атома.

Германий и кремний являются четырехвалентными элементами, т. е. их внешняя оболочка состоит из четырех электронов. При образовании кристаллов атомы настолько сближаются, что их внешние электронные оболочки

перекрывают друг друга. Взаимодействие электронных оболочек приводит к тому, что валентные электроны соседних атомов становятся общими. Эти общие электроны и связывают между собой атомы кремния или германия, образуя *ковалентные* или *парноэлектронные* связи (рис. 201).

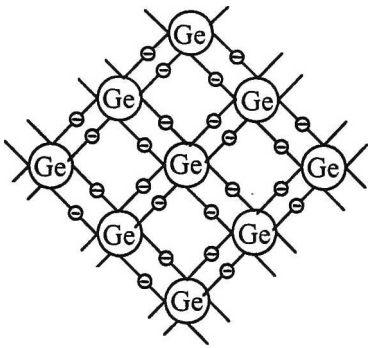


Рис. 201

При температурах, близких к абсолютному нулю, все валентные электроны в полупроводниках связаны и свободно заряженных частиц (т. е. электронов проводимости) в кристаллах нет. Если поместить такой кристалл в электрическое поле, электрический ток не возникнет. При очень низких температурах чистые полупроводники являются диэлектриками.

При нагревании или облучении чистого полупроводника кинетическая энергия валентных электронов увеличивается и некоторые из парноэлектронных связей разрушаются. В результате этого в полупроводнике появляются свободные электроны. Если валентный электрон становится свободным, то атом, которому он раньше принадлежал, превращается в положительный ион с зарядом, равным по абсолютному значению заряду электрона.

Вакантные места, появляющиеся в валентных связях после освобождения электрона, называются *дырками*. Так как в чистом полупроводнике дырки появляются одновременно с образованием свободных электронов, то число дырок в нем равно числу свободных электронов.

Образование дырок происходит в результате перехода электрона с верхнего энергетического уровня валентной зоны в зону проводимости.

В отсутствие внешнего электрического поля дырки и свободные электроны движутся в кристалле полупроводника хаотически. При наложении на полупроводник внешнего электрического поля свободные электроны и дырки в нем начинают двигаться упорядоченно: электроны против направления внешнего электрического поля, дырки — по направлению этого поля, что и создает электрический ток.

Итак, собственная электропроводность $\gamma$ обусловлена отрицательно заряженными электронами и положительными дырками:

$$\gamma = q_e n\left(U_n + U_p\right), \qquad (5.40)$$

где $n$ — концентрация свободных электронов, равная концентрации дырок; $U_n$ и $U_p$ — собственная подвижность электронов и дырок; $q_e$ — элементарный заряд.

При повышении температуры (или при облучении) число разорванных связей в полупроводнике (а следовательно, число свободных электронов и

дырок) увеличивается. Это приводит к уменьшению удельного сопротивления полупроводников. Удельное сопротивление полупроводника может резко уменьшиться при введении в него незначительного количества примесей.

При наличии в полупроводнике примеси в нем, наряду с собственной проводимостью, возникает дополнительная — *примесная проводимость*. Изменяя концентрацию примеси, можно значительно изменить число носителей заряда того или иного знака. Примеси могут служить дополнительным поставщиком электронов в кристаллы полупроводника. Например, в решетке полупроводника один атом германия, имеющий четыре валентных электрона, заменен атомом примеси, который имеет пять валентных электронов (мышьяк, сурьма).

Четыре валентных электрона примесного атома будут участвовать в образовании парноэлектронных связей с соседними атомами германия, а пятый электрон окажется лишним. Этот электрон очень слабо связан со своим атомом, легко может его покинуть и стать свободным электроном. Кристалл полупроводника в этом случае приобретает свободные электроны в основном от атомов примеси.

Примеси, отдающие электроны, называются *донорными*. В полупроводнике с донорной примесью основным носителем тока являются электроны. Под действием электрического поля эти электроны приходят в упорядоченное движение и в полупроводнике возникает электронная примесная проводимость. Полупроводники с такой проводимостью называются электронными или полупроводниками *n*-типа (*n* — начальная буква слова negative, т. е. отрицательный).

Если в качестве примеси взять трехвалентный химический элемент (индий, бор, алюминий), то трехвалентный атом примеси своими электронами может заполнить лишь три валентные связи с соседними атомами. Возникает недостаток одного электрона для образования всех парноэлектронных связей в решетке четырехвалентного германия. Незаполненная валентная связь будет дыркой. Сюда может перейти валентный электрон от соседнего основного атома. При этом трехвалентный атом станет отрицательным ионом, а у соседнего атома, потерявшего электрон, возникнет положительная дырка, которая, в свою очередь, может быть заполнена электроном от следующего соседнего атома решетки, и т. д.

Таким образом, трехвалентная примесь отнимает у решетки электроны, создавая дырки. Под действием электрического поля дырки перемещаются по направлению поля, и в полупроводнике возникает дырочная примесная проводимость.

Примеси, которые приводят к дырочной примесной проводимости, называются *акцепторными*. Присутствие в кристалле акцепторной примеси создает большую концентрацию дырок, которые становятся основными

носителями тока. Полупроводники с преобладанием дырочной проводимости называются проводниками *p*-типа (*p* — начальная буква слова positive, т. е. положительный).

В легированных полупроводниках примеси создают дополнительные энергетические состояния между зонами. В полупроводнике *n*-типа (рис. 202,а) донорные энергетические уровни расположены ниже дна зоны проводимости. Электроны на этом уровне легко приобретают дополнительную энергию и переходят в зону проводимости. В полупроводниках *p*-типа акцепторные уровни расположены немного выше потолка валентной зоны и электроны валентной зоны могут легко переходить на них. В результате образуются положительно заряженные дырки (светлые кружки на рис. 202,б). Заполненная электроном дырка перемещается.

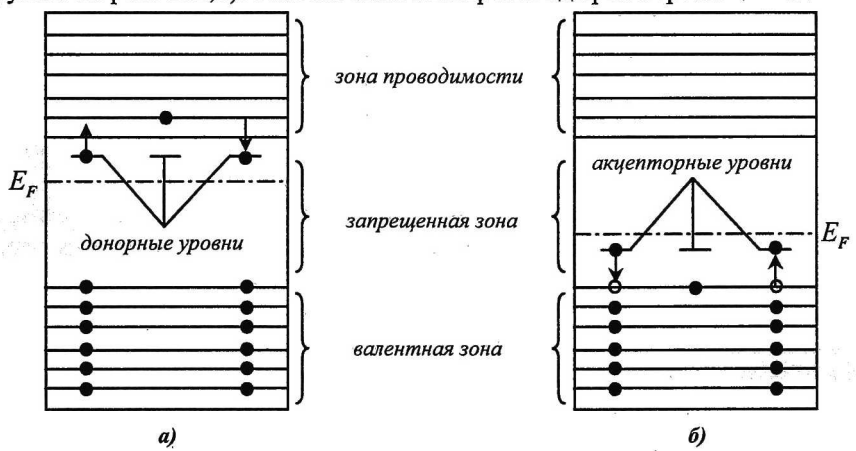



Рис. 202

Итак, примесная проводимость в полупроводниках *n*-типа обусловлена движением электронов, а в полупроводниках *p*-типа — дырок. С увеличением температуры $T$ подвижность электронов и дырок уменьшается, электропроводимость $\gamma$ легированных полупроводников растет за счет увеличения концентрации носителей зарядов:

$$\gamma = \gamma_0 e^{-b/T}, \qquad (5.41)$$

где $\gamma_0$ — удельная проводимость при 0°С; $b$ — постоянная, зависящая от материала; $e$ — основание натуральных логарифмов.

## § 166. Полупроводниковый диод и транзистор

Основным элементом большинства полупроводниковых приборов является электронно-дырочный (*n-p*) переход, который образуется в полупроводниковом кристалле на границе между областями с электронной и дырочной проводимостью. Это может быть кристалл германия, у которого

одна половина содержит донорную примесь, являясь полупроводником *n*-типа, а другая — акцепторную, представляя собой полупроводник *p*-типа.

Благодаря тепловому движению будет происходить взаимная диффузия основных носителей тока через контакт полупроводников. В результате на границе электронно-дырочного перехода образуется *запирающий электрический слой*. Электрическое поле запирающего слоя препятствует дальнейшему переходу электронов и дырок через границу раздела полупроводников (рис. 203,а).

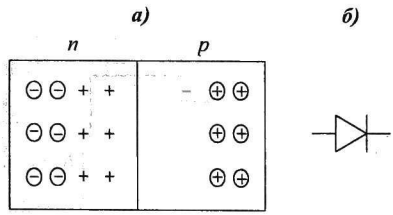



Рис. 203

Внешнее электрическое поле влияет на сопротивление запирающего электрического слоя.

Если *n*-полупроводник подключить к отрицательному полюсу источника ЭДС, а плюс источника соединить с *p*-полупроводником, электрическое поле источника будет перемещать основные носители тока в каждой из областей к границе раздела полупроводников. Напряженность электрического поля запирающего слоя уменьшится. Через контакт будет проходить электрический ток. Такое включение *n-p*-перехода называется *прямым* (пропускным).

Если *n*-полупроводник соединить с положительным полюсом источника, а *p*-полупроводник — с отрицательным, основные носители тока под действием электрического поля источника будут перемещаться от границы контакта в противоположные стороны. Напряженность поля *n-p*-перехода увеличивается, а сопротивление приконтактной области значительно возрастает. При таком направлении внешнего поля электрический ток через *n-p*-переход практически не проходит. Такое включение *n-p*-перехода называется *обратным* (запирающим).

Таким образом, контакт двух полупроводников с различными видами проводимости обладает свойством хорошо проводить ток в одном направлении и очень плохо в противоположном. Поэтому полупроводник с одним *n-p*-переходом называют полупроводниковым диодом и используют в выпрямителях переменного тока.

На протяжении половины периода, когда потенциал *p*-полупроводника положителен, ток свободно проходит через *n-p*-переход. В следующую половину периода ток равен нулю.

Схематическое изображение *диода* показано на рис. 203,б. Полупроводниковые диоды обладают рядом преимуществ перед электронными двухэлектродными лампами (экономия энергии, миниатюрность и т. д.), что позволяет широко использовать их в различных электрических схе-

мах, радио-, теле- и видеоаппаратуре, в электронно-вычислительных машинах и т. д.

Полупроводниковое устройство с двумя электронно-дырочными переходами называют *транзистором* (триод).

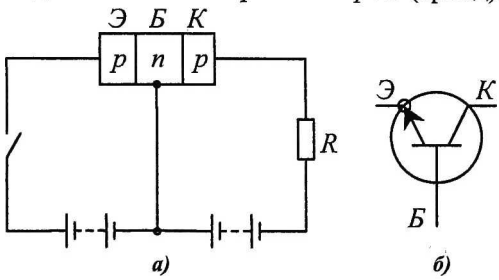



Рис. 204

С помощью соответствующих примесей в кристаллах германия или кремния создают три области: между двумя областями с проводимостью *p*-типа создается слой с проводимостью *n*-типа. Эту тонкую прослойку называют *базой* (Б) (рис. 204,а). Одна из разделенных базой областей называется эмиттером (Э), а вторая — коллектором (К). Таким образом, между эмиттером и базой, а также коллектором и базой создаются два *p-n*-перехода, пропускные направления которых противоположны.

На рис. 204,б показано условное обозначение транзистора. Оба *p-n*-перехода соединены с двумя источниками ЭДС (рис. 204,а). При этом переход «эмиттер–база» включен в прямом (пропускном), а переход «коллектор–база» в обратном (запирающем) направлении.

При создании напряжения между эмиттером Э и базой Б основные носители эмиттера (дырки) переходят из него в базу, создавая ток в этой цепи.

Так как толщина базы очень мала, попавшие в нее дырки не объединяются с электронами базы и проникают в коллектор К. В коллекторе дырки увлекаются электрическим полем и замыкают цепь. Сила тока в коллекторе приблизительно равна силе тока в эмиттере. Поэтому при изменении силы тока в цепи эмиттера с помощью источника переменного напряжения одновременно во столько же раз изменяется сила тока в цепи коллектора.

Эту особенность действия транзистора используют для управления током в цепи коллектора. Для этого в цепь коллектора включают резистор *R* с большим сопротивлением. Тогда *небольшие изменения напряжения в цепи эмиттера могут вызвать значительные изменения напряжения на резисторе*. Это означает усиление напряжения. Следовательно, транзисторы можно использовать для усиления напряжения и мощности, т. е. для преобразования малых сигналов в большие.

## § 167. Термоэлектрические явления

К термоэлектрическим относятся явления Зеебека[1], Пельтье[2] и Томсона[3].

*Явление Зеебека*: в замкнутой электрической цепи, состоящей из двух разнородных проводников ACB и ADB (рис. 205), спаи которых A и B находятся при различных температурах (допустим, что $T_1 > T_2$), возникает электрический ток $I$. Следовательно, в электрической цепи появляется *термоэлектродвижущая сила,* пропорциональная разности температур спаев:

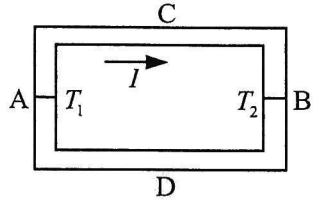


Рис. 205

$$\mathscr{E}_T = \alpha(T_1 - T_2), \qquad (5.42)$$

где $\alpha$ — удельная термо-ЭДС, значение которой постоянно для данной пары металлов или полупроводников.

Возникающая термо-ЭДС обусловлена зависимостью уровня Ферми от температуры и диффузией электронов (или дырок). Два разнородных металла, приводимые в соприкосновение, могут иметь различные значения уровней Ферми, в связи с чем в металлах возникает *внутренняя контактная разность потенциалов*

$$\Delta\varphi = \frac{E_{F1} - E_{F2}}{e}, \qquad (5.43)$$

где $E_{F1}$ и $E_{F2}$ — уровни Ферми первого и второго металлов; $e$ — заряд электрона.

Как видно из уравнения (5.39), различия в уровнях Ферми, приводящие к возникновению внутренней контактной разности потенциалов, объясняются неодинаковой концентрацией электронов в металлах.

При различных температурах спаев двух металлов также возникает диффузия более быстрых электронов к холодному спаю, а более медленных к нагретому. Это объясняется тем, что концентрация электронов с энергией $E > E_F$ у нагретого спая больше, чем у холодного, а концентрация электронов с $E < E_F$, наоборот, у нагретого спая будет меньше. Образование градиента концентрации вызывает диффузию электронов, в результате которой у холодного спая окажется больше электронов, чем у горячего.

---

[1] Томас Иоганн Зеебек (1770–1831) — немецкий физик.
[2] Жан Шарль Пельтье (1785–1845) — французский физик.
[3] Уильям Томсон (Кельвин) (1824–1907) — английский физик.

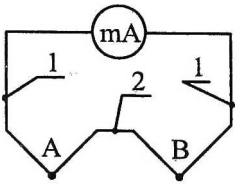


Рис. 206

Явление Зеебека используется при термопарных измерениях температуры. *Термопара* изготавливается из двух разнородных металлических проволок 1 и 2, концы которых в точках А и В спаяны (рис. 206). Один спай помещают в среду, температуру которой необходимо измерить, а другой поддерживается при постоянной температуре (комнатной или 0°С). Возникший термоток измеряют чувствительным микроамперметром. Предварительно проводится градуировка термопары. Термопарные измерения позволяют определить температуру с точностью до сотых долей градуса.

*Явление Пельтье* обратно явлению Зеебека: при пропускании электрического тока по цепи, состоящей из двух разнородных металлов или полупроводников, один спай нагревается, а другой — охлаждается. Температуры спаев оказываются различны. Количество теплоты, выделившейся (или поглощенной) спаем:

$$Q = \Pi I t, \tag{5.44}$$

где П — коэффициент Пельтье; $I$ — сила тока; $t$ — время.

Явление Пельтье используется в термоэлектрических полупроводниковых холодильниках.

Если по проводнику, нагретому *неравномерно*, пропускать электрический ток, то в проводнике происходит дополнительное выделение (или поглощение) теплоты, аналогичной теплоте Пельтье. Это *явление Томсона*.

# Глава 29
# ФИЗИКА АТОМНОГО ЯДРА И ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

## § 168. Структура ядра атома

Согласно современным представлениям атомное ядро состоит из *нуклонов: протонов* и *нейтронов*. Протон имеет положительный заряд, равный по величине заряду электрона. Масса протона $m_p = 1{,}6726 \cdot 10^{-27}$ кг примерно в 1840 раз больше массы электрона. Нейтрон не имеет электрического заряда, а масса нейтрона приблизительно равна массе протона $m_n = 1{,}6750 \cdot 10^{-27}$ кг.

Количество нуклонов в ядре определяется *массовым числом* $M$ (округленное значение атомной массы химического элемента), а число протонов $N_p = Z$ — *зарядовым числом*, равным порядковому номеру элемента в периодической системе Д. И. Менделеева. Число нейтронов в ядре атома $N_n = M - Z$. Атомы одного и того же химического элемента, отличающиеся друг от друга числом нейтронов в их ядрах, называются *изотопами* данного элемента. Существуют, например, три стабильных изотопа кислорода. Приняты условные символические обозначения химических элементов ${}^{M}_{Z}\mathrm{X}$ и элементарных частиц: ${}^{1}_{1}p$ — протон, ${}^{1}_{0}n$ — нейтрон, ${}^{0}_{-1}e$ — электрон и т. д. Изотопы кислорода, например, обозначаются:

$$ {}^{16}_{8}\mathrm{O},\ {}^{17}_{8}\mathrm{O},\ {}^{18}_{8}\mathrm{O}. $$

Приближенно размеры ядер впервые были определены Резерфордом в опытах по рассеянию $\alpha$-частиц. Оказалось, что ядра имеют примерно сферическую форму, причем радиус возрастает в зависимости от массового числа М и может быть рассчитан по приближенной формуле:

$$ r \approx 1{,}2 \cdot 10^{-15} \cdot M^{1/3}, \text{ м}. $$

Массы ядер принято измерять в атомных единицах массы (а.е.м). Масса нейтрального атома углерода ${}^{12}_{6}\mathrm{C}$ принята за 12 а.е.м. Массы также выражают в единицах энергии электрон-вольтах (эВ). Согласно формуле Эйнштейна $E = mc^2$ масса и энергия взаимосвязаны. 1 а.е.м. = $= 1{,}6606 \cdot 10^{-27}$ кг $= 931{,}5016 \dfrac{\text{МэВ}}{\text{с}^2}$. Утверждение о том, что масса частицы равна 1 МэВ, эквивалентно тому, что масса равна $10^6 \dfrac{\text{эВ}}{\text{с}^2} = 1{,}78 \cdot 10^{-30}$ кг.

Массы покоя некоторых частиц приведены в табл. 7.

*Таблица 7.*

| Частица | Масса покоя | | |
|---|---|---|---|
| | кг | а.с.м. | МэВ |
| Электрон | $9{,}1095\cdot10^{-31}$ | 0,00054858 | 0,51100 |
| Протон | $1{,}67256\cdot10^{-27}$ | 1,007276 | 938,28 |
| Атом ${}^{1}_{1}\mathrm{H}$ | $1{,}67356\cdot10^{-27}$ | 1,007825 | 938,79 |
| Нейтрон | $1{,}67500\cdot10^{-27}$ | 1,008665 | 939,57 |

## § 169. Ядерные силы. Энергия связи атомных ядер

Ядро атома состоит из одноименно заряженных и нейтральных частиц. На первый взгляд, ядро атома должно разлететься на отдельные частицы. Однако этого не происходит. Ядра атомов устойчивы, а значит, они удерживаются какими-то силами. *Ядерные силы*, как принято их называть, отличаются от всех других известных сил. Они не являются электромагнитными силами, так как в ядре есть нейтральные частицы. Но это и не гравитационные силы, поскольку ядерные силы весьма велики. Это самые мощные силы, которые наблюдаются в природе. Их величина примерно в $10^3$ раз больше сил кулоновского взаимодействия, поэтому взаимодействия частиц в ядре атома называют *сильными взаимодействиями*.

Ядерные силы, действующие между двумя протонами или между двумя нейтронами, или между протоном и нейтроном, имеют одинаковую величину. В этом смысле протон и нейтрон не отличаются друг от друга и могут считаться двумя состояниями одной частицы — нуклона. Их называют *короткодействующими силами*, так как радиус их действия порядка $10^{-15}$ м. В отличие от кулоновских, ядерные силы не являются центральными.

Масса покоя ядра

$$m_{\text{я}} = m_{\text{а}} - Zm_e \tag{5.45}$$

всегда меньше суммы масс образующих ядро нуклонов на величину $\Delta m$, называемую *дефектом масс* и определяемую выражением

$$\Delta m = Zm_p + (M - Z)m_n - m_{\text{я}}, \tag{5.46}$$

где $m_{\text{а}}$ — масса покоя нейтрального атома; $m_p$, $m_n$ — массы покоя свободного протона и нейтрона соответственно; $m_e$ — масса электрона.

Энергия, необходимая для полного расщепления ядра на нуклоны, называется *энергией связи ядра*. Энергию связи $E_{\text{с}}$ рассчитывают по формуле

$$E_{\text{с}} = \Delta m \cdot c^2, \tag{5.47}$$

где $c$ — скорость света в вакууме; $\Delta m$ — дефект масс.

Энергия связи сравнительно велика. Так, например, для ядра гелия она составляет 28,4 МэВ. В расчете на один нуклон приходится энергия связи 7,1 МэВ. Энергия связи валентных электронов в атомах порядка 10 эВ, т. е. в миллион раз меньше.

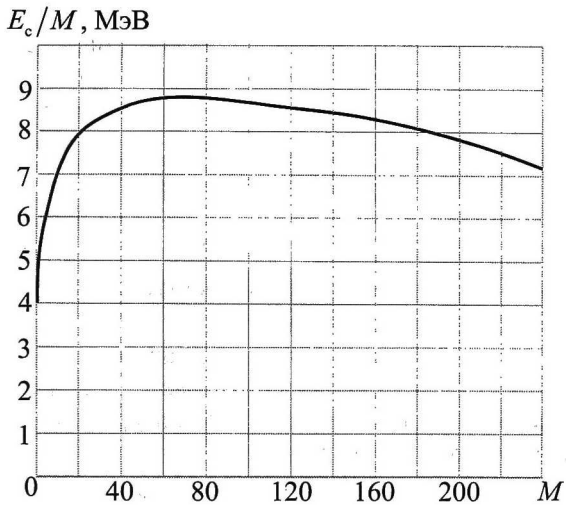



Рис. 207

*Удельной энергией связи* называется полная энергия связи, деленная на число нуклонов в ядре, т. е. $\frac{E_c}{M}$. Например, для гелия она составляет $\frac{28,3}{4}$ МэВ $= 7,1$ МэВ. На рис. 207 показана зависимость удельной энергии связи для *стабильных ядер*. Под стабильным понимается ядро, существующее сколь угодно долго. С ростом массового числа M происходит увеличение удельной энергии связи, при $M \approx 50$ кривая выходит на насыщение, а затем с ростом M медленно снижается. Это означает, что более тяжелые ядра оказываются менее прочными.

## § 170. Радиоактивность

*Радиоактивность* — это спонтанное превращение атомных ядер одного химического элемента в ядра другого, сопровождающееся излучением и испусканием элементарных частиц.

Явление радиоактивности было открыто в конце девятнадцатого века Беккерелем[1]. Некоторые вещества (полоний, уран, радий и др.) самопро-

[1] Антуан Анри Беккерель (1852–1908) — французский физик.

извольно и непрерывно излучают частицы, которые обладают высокой проникающей способностью. Такое излучение назвали *радиоактивным*.

Радиоактивное излучение сильно ионизирует газы, оказывает воздействие на биологические объекты, проникает через непрозрачные предметы. При воздействии электрического или магнитного полей поток радиоактивного излучения делится на три части: $\alpha$-частицы, $\beta$-частицы, $\gamma$-лучи. $\alpha$- и $\beta$-частицы отклоняются в электрическом и магнитном полях в разные стороны. Следовательно, они несут заряды противоположных знаков, $\gamma$-лучи не отклоняются. Исследования показали, что $\beta$-частицы — поток электронов, движущихся с огромной скоростью, близкой к скорости света; $\alpha$-частицы — ядра атома гелия, которые движутся со скоростью порядка $10^7$ м/с; $\gamma$-лучи — электромагнитные волны с очень короткой длиной волны ($\lambda \leq 10^{-10}$ м). Таким образом, к радиоактивным процессам относятся: $\alpha$-распад, $\beta$-распад, $\gamma$-излучение ядер и др.

Радиоактивное излучение связано с процессами, происходящими внутри ядра атома. Ядра радиоактивных элементов превращаются в другие ядра. Происходит радиоактивный распад ядер.

*Альфа-распад* протекает по схеме

$$ {}^{M}_{Z}\mathrm{X} \rightarrow {}^{M-4}_{Z-2}\mathrm{Y} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}\,. \qquad (5.48) $$

При $\alpha$-распаде из материнского ядра (обозначенного в (5.48) буквой X) образуется дочернее ядро Y. При этом выделяется $\alpha$-частица — ядро атома гелия. Например, при $\alpha$-распаде радий превращается в радон:

$$ {}^{226}_{88}\mathrm{Ra} \rightarrow {}^{222}_{86}\mathrm{Rn} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}\,. \qquad (5.49) $$

Альфа-распад обусловлен тем, что у тяжелых ядер сильное ядерное взаимодействие, проявляющееся между соседними нуклонами, не может противостоять силам кулоновского отталкивания протонов. Энергия связи радиоактивного ядра слишком мала, чтобы ядро было стабильным.

*Бета-распад* протекает по схеме

$$ {}^{M}_{Z}\mathrm{X} \rightarrow {}^{M}_{Z+1}\mathrm{Y} + {}^{0}_{-1}e + \tilde{\nu}\,. \qquad (5.50) $$

Дочернее ядро имеет атомный номер на единицу больше, чем материнское. При $\beta$-распаде наряду с электроном испускается антинейтрино $\tilde{\nu}$. *Нейтрино* и *антинейтрино* имеют нулевой заряд и нулевую массу покоя. Например, $\beta$-распад ядра ${}^{14}_{6}\mathrm{C}$ происходит следующим образом:

$$ {}^{14}_{6}\mathrm{C} \rightarrow {}^{14}_{7}\mathrm{N} + {}^{0}_{-1}e + \tilde{\nu}\,. \qquad (5.51) $$

В $\beta$-распаде решающую роль играет *слабое взаимодействие*. $\beta$-распад сопровождается испусканием $\gamma$-лучей.

*Гамма-излучение* представляет собой фотоны, обладающие высокой энергией. Поскольку $\gamma$-излучение не имеет электрического заряда, то при $\gamma$-распаде не происходит превращения одного химического элемента в другой.

При радиоактивном распаде выполняются классические законы сохранения. Энергия, импульс, момент импульса и электрический заряд после распада остаются такими же, как до распада. Помимо этого действует еще *закон сохранения числа нуклонов*: полное число нуклонов $M$ остается неизменным при любом радиоактивном распаде.

## § 171. Закон радиоактивного распада

Процесс радиоактивного распада является случайным процессом, поэтому точно предсказать, когда произойдет распад, невозможно. Однако можно приближенно определить число ядер, распадающихся за данный промежуток времени.

Пусть число распадов $dN$, происходящих за очень короткий промежуток времени $dt$, пропорционально $dt$ и полному числу радиоактивных ядер $N$:

$$dN = -\lambda N dt . \qquad (5.52)$$

Коэффициент пропорциональности $\lambda$ называется *постоянной распада*. Знак минус указывает на то, что число $N$ уменьшается.

Интегрируя уравнение (5.52):

$$\int_{N_0}^{N} \frac{dN}{N} = -\lambda \int_0^t dt ,$$

получим

$$N = N_0 e^{-\lambda t} , \qquad (5.53)$$

где $N_0$ — количество нераспавшихся ядер в начальный момент времени $t = 0$; $N$ — число нераспавшихся ядер в момент времени $t$.

Уравнение (5.53) выражает *закон радиоактивного распада*, согласно которому число нераспавшихся ядер убывает со временем по экспоненциальному закону.

Скорость распада характеризуется *периодом полураспада* $T_{1/2}$. Период полураспада — это промежуток времени, за который распадается половина исходного количества ядер. Если принять $N = N_0/2$ при $t = T_{1/2}$, то из уравнения (5.53) получим

$$\frac{N_0}{2} = Ne^{-\lambda T_{1/2}} \text{ или } T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0{,}693}{\lambda}. \qquad (5.54)$$

Период полураспада известных радиоактивных элементов изменяется в диапазоне от $10^{-22}$ до $10^{28}$ с, т. е. до $10^{21}$ лет.

Число распадов, происходящих в радиоактивном элементе за единицу времени, называется *активностью вещества*.

Пусть за промежуток времени $dt$ распадается $dN$ ядер. Используя выражение (5.52), получим

$$|dN| = \lambda N dt . \qquad (5.55)$$

Активность радиоактивного вещества равна произведению постоянной распада на количество нераспавшихся в веществе ядер.

Единицей активности в СИ является беккерель (Бк), равный одному распаду в секунду.

## § 172. Ядерные реакции. Ядерный реактор

*Ядерными реакциями* называют изменения ядер атомов при их взаимодействии друг с другом или элементарными частицами. Эти реакции символически записываются в виде

$$^{M}_{Z}X + {}^{4}_{2}\alpha \rightarrow {}^{M+4}_{Z+2}Y$$

или

$$^{M}_{Z}X + {}^{1}_{1}p \rightarrow {}^{M+1}_{Z+2}Y + {}^{0}_{-1}e\,.$$

В ядерных реакциях выполняются законы сохранения электрического заряда и числа нуклонов, например:

$$^{14}_{7}N + {}^{4}_{2}He \rightarrow {}^{17}_{8}O + {}^{1}_{1}p\,, \qquad (5.56)$$

$$^{27}_{13}Al + {}^{1}_{0}n \rightarrow {}^{24}_{11}Na + {}^{4}_{2}He\,, \qquad (5.57)$$

$$^{7}_{3}Li + {}^{1}_{1}p \rightarrow {}^{4}_{2}He + {}^{4}_{2}He\,. \qquad (5.58)$$

Если энергия покоя ядер и элементарных частиц после реакции больше, чем до реакции, то реакция протекает с поглощением энергии, если меньше, то энергия выделяется в результате реакции. Например, при бомбардировке атома азота α-частицами (реакция (5.56)) часть энергии переходит во внутреннюю энергию вновь образовавшегося ядра атома кислорода.

Исследуя искусственные превращения элементов, Э. Ферми показал, что нейтроны наиболее эффективны для инициирования ядерных реакций. Нейтроны электронейтральны, поэтому не отталкиваются положительно заряженным ядром и вероятность реакции у них гораздо выше, чем у протонов или α-частиц.

При попадании нейтрона в ядра некоторых тяжелых элементов (уран, плутоний и др.) ядра делятся обычно на осколки неравной массы, образуя 2–3 нейтрона. Такой распад тяжелого ядра называется *ядерной реакцией деления*.

Образовавшиеся в результате реакции ядра-осколки и нейтроны разлетаются с огромными скоростями, происходит деление ядра атома, сопровождаемое γ-излучением. При распаде ядра образуются новые элементы: барий, стронций, криптон и другие.

Реакцию деления записывают в виде

$$^{1}_{0}n + {}^{235}_{92}U \rightarrow {}^{236}_{92}U \rightarrow N_1 + N_2 + \text{нейтроны}\,. \qquad (5.59)$$

где $N_1$ и $N_2$ — ядра, образовавшиеся в результате реакции, называемые *осколками деления*.

Процесс деления протекает очень быстро, промежуточное ядро $^{236}_{92}\mathrm{U}$ существует порядка $10^{-12}$ с. Типичной реакцией деления является

$$^{1}_{0}n + {}^{235}_{92}\mathrm{U} \rightarrow {}^{141}_{56}\mathrm{Ba} + {}^{92}_{36}\mathrm{Kr} + 3\,{}^{1}_{0}n. \qquad (5.60)$$

В реакции деления высвобождается огромная энергия, т. к. масса ядра $^{235}_{92}\mathrm{U}$ существенно больше суммарной массы осколков деления.

Нейтроны, образовавшиеся в результате реакции, попадая в другие ядра, могут вызвать *цепную реакцию деления*. При цепной реакции можно получить огромное количество энергии.

Цепная реакция осуществляется в атомной бомбе. Если масса урана $^{235}_{92}\mathrm{U}$ или плутония $^{239}_{94}\mathrm{Pu}$ больше *критической*, нейтроны быстро размножаются, и в результате цепной реакции происходит взрыв.

Управляемые цепные реакции реализованы в *ядерных реакторах*.

Схема гетерогенного уранового реактора на тепловых нейтронах показана на рис. 208. В активной зоне реактора расположены тепловыделяющие урановые элементы 1 и графитовый замедлитель 2, в котором скорости нейтронов уменьшаются. Стержни 3 с примесью кадмия или бора сильно поглощают нейтроны и служат для регулирования скорости реакции и для аварийной остановки реактора. При опускании стержней 3 в реактор уменьшается количество нейтронов, при поднятии — увеличивается. Автоматическое устройство управления стержнями позволяет регулировать мощность реактора.

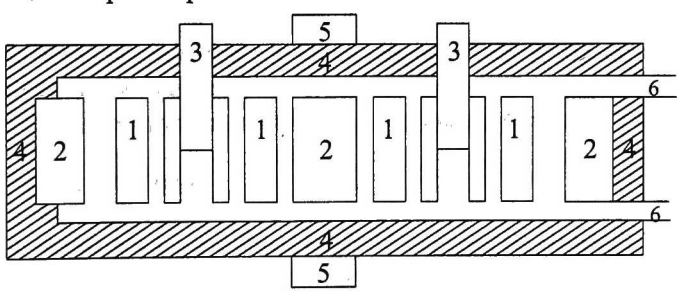



Рис. 208

*Тепловыделяющие элементы* (твэлы) представляют собой стержни из ядерного топлива, заключенные в оболочку, слабо поглощающую нейтроны. Отражатель нейтронов 4 окружает активную зону реактора и служит для уменьшения их утечки. Количество нейтронов контролируется с помощью счетчика 5. Тепло, выделяющееся в твэлах при делении ядер, передается теплоносителю, который насосами прокачивается по каналам 6. Теплоноситель переносит энергию от твэлов к газовой турбине или к электрогенератору

(в зависимости от назначения реактора), в которых происходит ее дальнейшее преобразование в механическую или электрическую энергию. В качестве теплоносителей применяется вода, водяной пар, воздух, щелочные металлы, гелий, углекислый газ.

Ядерные реакторы используются для выработки новых делящихся материалов, радиоизотопов, в атомных электростанциях, в качестве источников энергии движителей судов, космических аппаратов и т. д.

*Термоядерной реакцией* синтеза называется процесс слияния легких ядер в одно ядро (ядерный синтез). Термоядерные реакции протекают при высоких температурах порядка $\left(10^7 - 10^8\right)$ К с выделением огромного количества энергии. Их осуществление даст человечеству неисчерпаемый запас энергии.

Так, например, при слиянии ядер дейтерия и трития

$$ {}_1^2\mathrm{H} + {}_1^3\mathrm{H} \rightarrow {}_2^4\mathrm{He} + {}_0^1n $$

выделяется энергия 17,6 МэВ (или 3,5 МэВ на каждый нуклон). При соединении одного атома углерода с двумя атомами кислорода (сгорание угля с образованием углекислого газа) выделяется энергия порядка 5 эВ. В нашем примере при ядерном синтезе выделится энергии примерно в 3,5 миллиона раз больше, чем при сгорании каменного угля.

При делении урана выделяется энергии 0,85 МэВ на нуклон, т. е. в 4 раза меньше.

Однако осуществить управляемую термоядерную реакцию очень трудно. Для этого необходимо научиться получать очень высокие температуры и удерживать образовавшуюся плазму в заданном объеме.

Работы по осуществлению ядерного синтеза ведутся в нескольких направлениях. Одним из перспективных является создание установок «токамак», в которых плазма удерживается магнитным полем. Разрабатываются также установки с использованием мощных импульсных лазеров.

## § 173. Методы регистрации ионизирующих излучений

Радиоактивное излучение обладает сильным ионизирующим действием. Это свойство излучения используется в *счетчике Гейгера–Мюллера* для регистрации β-частиц и γ-квантов. Счетчик Гейгера–Мюллера представляет собой металлическую трубку, вдоль оси которой натянута тонкая, изолированная от трубки вольфрамовая проволочка. Трубка заполняется разреженным газом. Между проволочкой-анодом и трубкой поддерживается высокое напряжение, примерно 1 кВ. β-частица или γ-квант, попав в газовую среду, ионизируя газ, создает свободные электроны, которые под действием электрического поля устремляются к аноду. Разрядные процессы внутри трубки регистрируются электронными счетными схемами.

В *сцинтилляционных счетчиках* используются специальные кристаллы, в которых энергия элементарных частиц или γ-квантов переходит в энергию световых квантов. Вспышки света, возникающие в кристалле, усиливаются специальными фотоэлектронными умножителями и регистрируются электронными схемами.

В *камере Вильсона* траектория движения частиц видна непосредственно и может быть сфотографирована. Камера наполняется перенасыщенными парами жидкости (вода, спирт и т. д.). Через специальное отверстие в камеру проникают исследуемые частицы. Пролетая в камере, частицы на своем пути создают ионы. Перенасыщенный пар, конденсируясь на ионах, образует капельки жидкости, в результате чего наблюдаются *треки* — следы движущихся частиц.

Для регистрации частиц используется также *фотоэмульсионный метод*. Ионизирующее излучение действует на эмульсию фотопластинки, образуя скрытое изображение. При проявлении фотопластинки виден трек частицы.

## § 174. Дозиметрия. Дозы облучений

Прохождение α- и β-частиц, а также γ- и *R*-излучения (рентгеновского) через ткани живых существ оказывает сильное поражающее действие. Количественной оценкой действия ионизирующего излучения на вещество и живые организмы занимается *дозиметрия*.

*Поглощенной дозой излучения* Д называется физическая величина, равная отношению энергии ионизирующего излучения $\Delta W$, переданной элементу облученного вещества, к массе $\Delta m$ этого элемента:

$$Д = \frac{\Delta W}{\Delta m}. \qquad (5.61)$$

Единицей поглощенной дозы является грей (Гр). 1 Гр — это доза излучения, при которой веществу массой 1 кг передается энергия ионизирующего излучения 1 Дж:

$$[Д] = 1\,\frac{Дж}{кг} = 1\,Гр.$$

Поглощенную дозу практически оценить трудно, поэтому вводится понятие *экспозиционной дозы* фотонного облучения $Д_0$, оцениваемой по ионизирующему действию излучения на воздух. Единицей экспозиционной дозы облучения является $[Д_0] = 1\,\frac{Кл}{кг}$ — это доза фотонного излучения, при которой сумма электрических зарядов всех ионов одного знака, созданного электронами, освобожденными в облученном воздухе массой 1 кг при полном использовании ионизирующей способности электронов, равна 1 Кл.

Ранее экспозиционная доза измерялась в рентгенах (Р), а поглощенная доза в радах (рад):

$$1\,\text{Р} = 258\,\frac{\text{мкКл}}{\text{кг}},\quad 1\,\text{рад} = 0{,}01\,\text{Гр}.$$

Действие ядерных излучений на живой организм определяется не только дозой облучения, но и природой ионизирующих частиц. Альфа-частицы, протоны, нейтроны, быстрые ионы производят больше физиологических нарушений в организме, чем β-частицы, γ- и *R*-лучи. Особенно опасны потоки нейтронов.

Для оценки биологического воздействия излучения вводится понятие *биологической дозы* $Д_б$, которая связана с экспозиционной дозой $Д_0$ следующим соотношением:

$$Д_б = Д_0 \cdot \text{ОБЭ}. \qquad (5.62)$$

где ОБЭ — опытный коэффициент, называемый *относительной биологической эффективностью.*

ОБЭ показывает, во сколько раз действие данного излучения на живую ткань превышает действие γ- или *R*-лучей, если при их поглощении выделяется одинаковое количество энергии. В табл. 8 приводятся приближенные значения ОБЭ для различных видов излучения.

При воздействии на организм разных видов излучения, результирующий эффект определяется суммой биологических доз.

***Таблица 8***

| Вид излучения | ОБЭ |
|---|---|
| R-, γ- и β- излучение | 1 |
| Медленные нейтроны | 5 |
| Быстрые нейтроны | 10 |
| Протоны | 10 |
| α-частицы | 20 |
| Осколки деления | 20 |

Облучение организма разделяют на *внешнее* и *внутреннее*. Ядерные взрывы, ядерные реакторы, рентгеновские установки, горные породы, радиоактивные лечебные воды, космические лучи — это источники внешнего облучения. Внутреннее облучение обусловлено долгоживущими радиоактивными элементами естественного происхождения ($^{14}_{6}\text{C}$, $^{40}_{19}\text{K}$, $^{226}_{88}\text{Ra}$), входящими в состав пищи и попавшими внутрь организма при аварийных ситуациях.

*Естественный фон* радиации составляет в среднем 25 мкКл/кг в год. Предельно допустимая индивидуальная доза не должна превышать 1,3 мКл/кг в год. Опасной для жизни человека считается доза

$(75 \div 150)$ мКл/кг, полученная при единовременном облучении всего организма.

От внешнего $\alpha$-излучения можно защититься тонким слоем вещества (в том числе и воздуха), так как частицы из-за малого пробега легко поглощаются. Гораздо опаснее попадание $\alpha$-частиц внутрь организма.

Для защиты от $\gamma$-, $R$-лучей и нейтронных потоков применяются толстые поглощающие экраны из свинца, железа, бетона, кирпича.

При радиоактивном загрязнении среды особую опасность представляет β-активный стронций $^{90}_{38}\mathrm{Sr}$, период полураспада которого $T_{1/2} = 28$ лет. Попадая в организм через воду, растения или продукты, радиоактивный стронций накапливается в организме и становится источником длительного облучения костного мозга.

Считается, что даже малые дозы излучения повышают вероятность раковых заболеваний и генетических изменений, поэтому дозы облучения организма следует свести к минимуму.

## § 175. Элементарные частицы. Фундаментальные взаимодействия

*Элементарными* называются мельчайшие частицы материи за исключением атомных ядер с массовым числом больше единицы.

Мы уже описывали некоторые элементарные частицы: *фотоны* — кванты электромагнитного излучения, *протоны* и *нейтроны*, входящие в состав ядра атома, *электроны*, образующие электронную оболочку атома.

В настоящее время известно свыше 500 элементарных частиц. Многие из них возникают при взаимодействии космических лучей с земной атмосферой. Элементарные частицы регистрируются в экспериментах на ускорителях по расщеплению атомных ядер, по рассеянию пучков частиц.

Большинство элементарных частиц имеют очень короткое время жизни: миллионные доли секунды даже при отсутствии внешнего воздействия. *Стабильными* частицами являются: *фотон, электрон, протон* и *нейтрино*. Но и фотон, испущенный, например, нагретым телом, живет порядка $10^{-8}$ с, а потом поглощается другим телом. Бессмертными можно считать только нейтрино, так как они слабо взаимодействуют с другими частицами.

Все элементарные частицы превращаются друг в друга. При взаимодействии двух частиц наблюдаются также превращения их в другие частицы, которые не входили в состав исходных, а рождаются в момент взаимодействия. Такая *взаимопревращаемость* частиц является их отличительным свойством.

У всех элементарных частиц существуют *античастицы*, которые обладают противоположным электрическим зарядом и магнитным момен-

том. При столкновении частицы с античастицей происходит их *аннигиляция*: частицы превращаются в γ-излучение или в более легкие частицы других типов. Например, при взаимодействии электрона и *позитрона* порождается два фотона:

$$e^+ + e^- \rightarrow 2\gamma.$$[1]

Процесс, обратный аннигиляции, называется *процессом образования пар*:

$$\gamma + \mathrm{X} \rightarrow \mathrm{X} + e^+ + e^-.$$

В этом процессе позитрон образуется вместе с электроном при столкновении жесткого $\gamma-$ кванта с ядром атома.

Считается, что механизм всех взаимодействий обменный: частица испускает или поглощает другую частицу. При этом силы, возникающие между двумя частицами, являются результатом их обмена промежуточной частицей, которая называется *переносчиком взаимодействия*.

При превращении элементарных частиц выполняются законы сохранения энергии, массы, импульса, электрического заряда и др.

Элементарные частицы принято классифицировать по их отношению к различным типам *фундаментальных взаимодействий*.

Различают четыре типа фундаментальных взаимодействий: сильное, электромагнитное, слабое и гравитационное. *Сильное взаимодействие* обеспечивает существование атомных ядер и проявляется в действии ядерных сил. *Электромагнитное взаимодействие* обусловливает существование атомов, молекул и макротел. *Слабое взаимодействие* характерно для всех элементарных частиц, кроме фотона. *Гравитационное взаимодействие* проявляется в виде сил всемирного тяготения.

Если принять за 1 интенсивность сильного взаимодействия, то интенсивность электромагнитного взаимодействия составляет $\sim 10^{-3}$, слабого $\sim 10^{-14}$, гравитационного $\sim 10^{-40}$.

Элементарные частицы делятся на три группы.

1. *Переносчики взаимодействий*. В эту группу входят фотоны — кванты электромагнитного поля, *гравитоны*[2] — кванты гравитационного поля, *промежуточные бозоны* — переносчики слабых взаимодействий и *глюоны* — переносчики сильных взаимодействий.

2. *Адроны* — самый многочисленный класс элементарных частиц, которые, наряду с электромагнитным и слабым, участвуют в сильном взаимодействии. К андронам относятся *барионы* (протон, нейтрон, гиперон), *мезоны* ($\pi$-мезон, $K$-мезон) и *резонансные частицы*. Согласно гипотезе

---

[1] Обозначения частиц даются в таблице 9.

[2] Экспериментально гравитоны не зарегистрированы.

американских физиков М. Гелл-Мана и Д. Цвейга все адроны (мезоны и барионы) состоят из *кварков*, которых существует шесть сортов (ароматов): *u*-кварк, *d*-кварк, *s*-кварк, *c*-очарованный кварк, *b*-кварк и *t*-кварк. Каждый сорт кварков может иметь три цветовые разновидности (желтый, синий и красный).

3. *Лептоны* — элементарные частицы, не участвующие в сильном взаимодействии. Насчитывается шесть лептонов (электрон, электронное нейтрино, мюон, мюонное нейтрино, тау-лептон и тау-нейтрино) и шесть антилептонов.

При сегодняшнем понимании окружающей природы пока невозможно решить, какие из известных элементарных частиц являются *истинно* элементарными (неделимыми) частицами.

Кварки обладают дробными электрическими зарядами, равными $+\frac{2}{3}e$ и $-\frac{1}{3}e$. Здесь $e$ — заряд электрона. Кроме того, имеются *антикварки* с зарядами $-\frac{2}{3}e$ и $+\frac{1}{3}e$. Например, мезон состоит из одного кварка и одного антикварка, барион — из трех кварков, антибарион — из трех антикварков.

Экспериментально кварки обнаружить не удалось. Считается, что кварки заключены внутри адронов, структуру которых они образуют. При малых расстояниях кварки практически свободны, так как силы взаимодействия между ними очень малы. С увеличением расстояния между кварками очень быстро возрастают и силы их взаимодействия. Поэтому кварки не вылетают из адрона.

Свойства важнейших элементарных частиц приведены в табл. 9.

Античастицы могут образовывать *антивещество*. В 1969 г. в нашей стране на ускорителе в Серпухове был получен *антигелий*-3, ядра атома которого состоят из двух антипротонов и одного антинейтрона, а оболочка — из двух позитронов. При аннигиляции антивещества с веществом образуются γ-кванты, обладающие большой энергией.

*Таблица 9*

| Наименование частицы | | | Символ | | Масса, МэВ | Эл. заряд | Время жизни, с |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | Частица | Античастица | | | |
| Переносчики взаимодействий | | Фотон | $\gamma$ | $\gamma$ | 0 | 0 | стабилен |
| | | Гравитон | G | | 0 | | стабилен |
| | | Глюон | $g_i$ | | 0 | 0 | |
| | | Промежуточные бозоны | $W^+_-$<br>$Z^0$ | | ≈80000<br>≈90000 | | ?<br>? |
| Лептоны | | Нейтрино электронное | $\nu_e$ | $\overline{\nu}_e$ | 0 | 0 | стабильно |
| | | Нейтрино мюонное | $\nu_\mu$ | $\overline{\nu}_\mu$ | 0 | 0 | стабильно |
| | | Нейтрино тау-лептонное | $\nu_\tau$ | $\overline{\nu}_\tau$ | 0 | 0 | стабильно |
| | | Электрон | $e^-$ | $e^+$ | 0,511 | –1 | стабилен |
| | | Мюон | $\mu^-$ | $\mu^+$ | 105,66 | –1 | $2{,}2\cdot10^{-6}$ |
| | | Тау-лептон | $\tau^-$ | $\tau^+$ | 1782 | 0 | $3{,}4\cdot10^{-13}$ |
| Адроны | Мезоны | Пи-мезоны (пионы) | $\pi^0$ | $\pi^0$ | 134,96 | 0 | $8\cdot10^{-17}$ |
| | | | $\pi^+$ | $\pi^-$ | 139,57 | 1 | $2{,}6\cdot10^{-8}$ |
| | | Ка-мезоны (каоны) | $K^+$ | $K^{-1}$ | 493,67 | 1 | $1.24\cdot10^{-8}$ |
| | | | $K^0$ | $\overline{K}^0$ | 497,7 | 0 | $K_S^0 - 8.9\cdot10^{-11}$<br>$K_L^0 - 5.18\cdot10^{-8}$ |
| | | Эта-нуль-мезон | $\eta^0$ | $\eta^0$ | 548,8 | 0 | $10^{-18}$ |
| | Барионы, Нуклоны | Протон | $p$ | $\overline{p}$ | 938,28 | 1 | стабилен |
| | | Нейтрон | $n$ | $\overline{n}$ | 939,57 | 0 | 918 |
| | Барионы, Гипероны | Лямбда-гиперон | $\Lambda^0$ | $\overline{\Lambda}^0$ | 1115,6 | 0 | $2{,}6\cdot10^{-10}$ |
| | | Сигма-гиперон | $\Sigma^+$ | $\overline{\Sigma}^+$ | 1189,37 | 1 | $8\cdot10^{-11}$ |
| | | | $\Sigma^0$ | $\overline{\Sigma}^0$ | 1192,48 | 0 | $5{,}8\cdot10^{-20}$ |
| | | | $\Sigma^-$ | $\overline{\Sigma}^-$ | 1197,35 | –1 | $1{,}48\cdot10^{-10}$ |
| | | Кси-гипероны | $\Xi^0$ | $\overline{\Xi}^0$ | 1314,9 | 0 | $2{,}90\cdot10^{-10}$ |
| | | | $\Xi^-$ | $\overline{\Xi}^-$ | 1321,3 | –1 | $1{,}64\cdot10^{-10}$ |
| | | Омега-минус частица | $\Omega^-$ | $\overline{\Omega}^-$ | 1672,2 | –1 | $8{,}2\cdot10^{-11}$ |

## ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

**Задача 80.** Найти постоянную распада $\lambda$ радона, если известно, что число атомов радона уменьшается за время $t = 1$ сутки на 18,2%.

**Дано:**
$t = 86400$ с
$k = 18,2\% = 0,182$
$\lambda = ?$

**Решение.** Найдем $\lambda$, воспользовавшись законом радиоактивного распада:

$$N = N_0 e^{-\lambda t}, \quad (1)$$

или

$$N = N_0 (1-k). \quad (2)$$

Подставив уравнение (2) в (1), выразим $\lambda$:

$$(1-k) = e^{-\lambda t}. \quad (3)$$

Логарифмируем уравнение (3):

$$\ln(1-k) = -\lambda t,$$

откуда

$$\lambda = -\frac{\ln(1-\kappa)}{t}; \lambda = 2,3 \cdot 10^{-6}\,\text{с}^{-1}.$$

**Ответ:** $\lambda = 2,3 \cdot 10^{-6}\,\text{с}^{-1}$.

**Задача 81.** Какое количество теплоты $Q$ выделяется при распаде радона активностью $A = 3,7 \cdot 10^{10}$ Бк : а) за время жизни $t = 1$ ч ; б) за среднее время жизни $\tau$ ? Кинетическая энергия вылетающей из радона $\alpha$-частицы $E_к = 5,5$ МэВ .

**Дано:**
$A = 3,7 \cdot 10^{10}$ Бк
$t = 3600$ с
$E_к = 8,8 \cdot 10^{-13}$ Дж
$Q_1 = ?\quad Q_2 = ?$

**Решение.** Количество $\alpha$-частиц, вылетевших за время $t$ :

$$N = At.$$

Считаем, что вся кинетическая энергия $E_к$ $\alpha$ — частиц превращается в теплоту:

$$Q_1 = E_к N = E_к A t; Q_1 = 117 \text{ Дж}.$$

Период полураспада радона:

$$T_{1/2} = 3,82 \text{ сут} \approx 3,3 \cdot 10^5 \text{ с}.$$

Среднее время жизни радиоактивного элемента τ можно связать с периодом полураспада:

$$\tau = \frac{T_{1/2}}{\ln 2}.$$

Тогда за время $\tau$ выделится количество теплоты:

$$Q_2 = E_к A\tau = E_к A\frac{T_{1/2}}{\ln 2};\ Q_2 = 15{,}5\ \text{кДж}.$$

**Ответ:** $Q_1 = 117$ Дж; $Q_2 = 15{,}5$ кДж.

**Задача 82.** Найти энергию связи в ядре атома гелия $^4_2\text{He}$.

| **Дано:** |
|---|
| $^4_2\text{He}$ |
| $E_{св} = ?$ |

**Решение.** Энергия связи ядра определяется по формуле

$$E_{св} = \Delta m \cdot c^2, \qquad (1)$$

где $\Delta m$ — дефект массы; $c$ — скорость света в вакууме.

Дефект массы $\Delta m$ атомного ядра есть разность между суммой масс свободных протонов и нейтронов и массой образовавшегося из них ядра:

$$\Delta m = \left(Zm_p + Nm_n\right) - m_я,$$

где $Z$ — зарядовое число (число протонов в ядре); $m_p$ и $m_n$ — масса покоя протона и нейтрона соответственно; $m_я$ — масса ядра.

Если учесть, что

$$m_я = m_а - Zm_e,$$
$$m_p + m_e = m_{^1_1\text{H}},$$
$$N = M - Z,$$

то формулу дефекта массы можно представить в более удобном для вычислений виде:

$$\Delta m = Zm_{^1_1\text{H}} + \left(M - Z\right)m_n - m_а. \qquad (2)$$

Здесь $M$ — массовое число (число нуклонов в ядре); $N$ — число нейтронов в ядре; $m_{^1_1\text{H}}$ — масса атома водорода; $m_а$ — масса атома элемента (в данном случае гелия $^4_2\text{He}$).

Вычисление дефекта массы выполним во внесистемных единицах (а.е.м.). Для ядра

$$^4_2\text{He} \rightarrow Z = 2,\ M = 4.$$

Кроме этого:

$$m_{^1_1\text{H}} = 1{,}00783 \text{ а.е.м.},\ \ m_n = 1{,}00867 \text{ а.е.м.}$$

Масса нейтрального атома $^4_2\text{He}$ равна

$$m_а = 4{,}00260 \text{ а.е.м.}$$

Подставим эти значения в (2):

$$\Delta m = 2 \cdot 1{,}00783 + \left(4 - 2\right) \cdot 1{,}00867 - 4{,}00260 = 0{,}0304 \text{ а.е.м.}$$

Подставляя в (1) численные значения, получим

$$E_{св} = 0,0304 \cdot 931,4 = 28,6 \text{ МэВ}.$$

**Ответ:** $E_{св} = 28,6$ МэВ.

**Задача 83.** Какая масса $m$ урана $^{235}_{92}U$ расходуется за время $t = 1$ сут на атомной электростанции мощностью $P = 5000$ кВт ? КПД принять равным 17%. Считать, что при каждом акте распада выделяется энергия $Q = 200$ МэВ.

**Дано:**
$t = 86400$ с
$P = 5 \cdot 10^6$ Вт
$\eta = 17\% = 0,17$
$Q = 3,2 \cdot 10^{-11}$ Дж
$m = ?$

**Решение.** Энергия, выделяемая при распаде $N$ атомов урана:

$$Q_N = NQ .$$

Учитывая КПД, найдем энергию, передаваемую потребителю:

$$P_n = NQ\eta .$$

Выразим $P_n$ через мощность электростанции:

$$NQ\eta = Pt . \quad (1)$$

Число распавшихся ядер

$$N = \frac{m}{\mu} N_A . \quad (2)$$

где $\mu$ — молярная масса урана; $N_A$ — число Авогадро.

Подставив выражение (2) в (1), получим

$$\frac{m}{\mu} N_A Q\eta = Pt .$$

Отсюда

$$m = \frac{Pt\mu}{N_A Q\eta}; \; m = 31 \cdot 10^{-3} \text{ кг}.$$

**Ответ:** $m = 31$ г.

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

«Истина — это постоянный процесс уничтожения старого и возрождение нового.»

*Ф. Тютчев*

Окружающий нас мир материален. Человечеству всегда было присуще стремление познать этот мир, представить его структуру, сформировать законы его существования и развития. Наука о природе прошла длинный путь от непосредственного ее созерцания к накоплению и обобщению полученных знаний и воссозданию физической картины мира (ФКМ). *Физическая картина мира* — это модель природы, определяющая весь стиль физического мышления на данном историческом этапе развития физики. В ее основе лежат представления о материи и ее атрибутах — пространстве, времени, движении, причинности, взаимодействии и др. Это не просто философские идеи, а элементы физического знания, конкретизированные и выраженные на языке науки.

В 1687 г. появился труд И. Ньютона «Математические начала натуральной философии», в котором были сформулированы основные законы механики — науки о механическом движении и взаимодействии материальных тел. Законы Ньютона легли в основу *механической картины мира* (МКМ). Большой вклад в создание МКМ внесли ученые древности: Демокрит, Эпикур, Гассенди, Кеплер, Галилей.

Согласно МКМ все тела состоят из абсолютно твердых частиц, которые находятся в непрерывном движении в соответствии с законами механики. Взаимодействие между телами осуществляется с помощью гравитационных сил. Это взаимодействие протекает с бесконечно большой скоростью, т. е. мгновенно (*принцип дальнодействия*). Материя является мерой инерции и гравитации. Ньютон считал пространство и время *абсолютным*. Пространство — ни от чего не зависящая бесконечная протяженность в трех измерениях. Время — ни от чего не зависящая и единая для всей Вселенной равномерная длительность.

МКМ господствовала в науке почти двести лет. В 1873 г. Максвелл разработал теорию электромагнитного поля. На смену МКМ пришла *электродинамическая картина мира* (ЭКМ). Ее создателями являются Д. К. Максвелл, А. М. Ампер, М. Фарадей, Х. А. Лоренц и др. Согласно представлениям ЭКМ материя — универсальное физическое поле, заполняющее все пространство. Теория Максвелла утверждала, что взаимодействие осуществляется посредством электромагнитных полей с конечной скоростью, равной скорости света в вакууме (*принцип близкодействия*). ЭКМ с помощью электромагнитных полей объясняла природу сил, действующих внутри атомов и молекул, из которых состоят макроскопические тела.

Согласно теории относительности А. Эйнштейна пространство и время связаны неразрывно, образуя единое четырехмерное пространство–время. При наличии тяготеющих масс пространство искривляется, становится неевклидовым.

Однако с помощью законов электродинамики объяснить все явления окружающего мира не удалось. На смену ЭКМ пришла *квантово-полевая физическая картина мира.* Создателями квантовой теории является целая плеяда блестящих ученых 20-го века: М. Планк, Э. Резерфорд, Н. Бор, А. Эйнштейн, Луи де Бройль, В. Гейзенберг, Э. Шредингер, П. Дирак, М. Борн, В. Паули, Э. Ферми, Л. Д. Ландау, Р. Фейнман и др.

Квантовая механика позволила понять структуру атомов и их спектры, природу химической связи и объяснить периодическую систему элементов Д. И. Менделеева. Отличительной чертой этой теории является вероятностный характер предсказаний результатов измерений и дискретность значений физических величин.

По принципу корпускулярно–волнового дуализма материя дискретна и непрерывна, т. е. может обладать либо корпускулярными, либо волновыми свойствами. Важнейшей мерой движения материи является энергия, которая эквивалентна массе.

Законы сохранения обязаны свойствам симметрии природы. Пространство и время однородны, пространство — изотропно. Однородность пространства приводит к закону сохранения импульса, однородность времени — к закону сохранения энергии, а изотропность пространства — к закону сохранения момента импульса. Эти законы соблюдаются в классической и квантовой физике.

В последние десятилетия ученые проводили многочисленные исследования по отысканию «истинно элементарных» частиц. По современным представлениям такими частицами могут быть кварки. Хотя существование и свойства кварков подтверждены многочисленными экспериментальными и теоретическими исследованиями, найти их не удается.

Элементарные частицы взаимопревращаются друг в друга. Этому превращению соответствуют четыре вида фундаментальных взаимодействий: гравитационное, электромагнитное, слабое и сильное. Фундаментальные взаимодействия являются обменными, так как в процессе взаимодействия частицы обмениваются квантами соответствующих полей.

В современной физике предпринимаются попытки создания теории, которая объединила бы поля, описывающие гравитационное, электромагнитное, слабое и сильное взаимодействия (суперобъединение). Но эти попытки пока крайне далеки от завершения.

Чем ближе наука подходит к общим физическим идеям и принципам, тем стремительнее приближается к единой картине физической реальности. Например, принцип причинности «работает» как в классическом, так

и в квантовом случае: состояние объекта в некоторый момент времени однозначно предопределяет его дальнейшее состояние. Только в классическом случае состояние объекта в начальный момент времени определяется координатами и скоростью, а в квантовой механике — видом волновой функции.

Каждая новая картина мира претендует на универсальность, но рано или поздно опыт заставит изменить исторически ограниченное видение мира. В силу этого любой закон или теория имеют границы применимости. За этими границами согласно принципу соответствия «работает» другая теория, не отрицающая предыдущую, а включающая ее как частный случай.

Итак, с развитием естествознания, по мере накопления новых знаний представления о материи и ее атрибутах претерпевают существенные изменения. Изменяется и физическая картина мира. Поскольку нет пределов широте и глубине познания мира, то и процесс познания его является бесконечным.

# Предметно-именной указатель


Абсолютный нуль температур 117
Адиабата 151
Адроны 426
Активность 420
Альфа-распад 418
Ампер А. М. 247
Ампер 5, 223, 247
Амплитуда 91
Анализатор 345
Анизотропия 349
Аннигиляция 426
Антинейтрино 418
Атом 117, 375
- водорода в квантовой механикс 390
- - теории Бора 377

База 412
Барионы 428
Бета-распад 418
Бозоны 428
Больцман Людвиг 128
Бор Нильс 377
Бройль Луи де 383

Вакуум 236
Ватт 34
Ван-дер-Ваальс 165
Вебер 255
Вектор индукции магнитной 243
- напряженности поля магнитного 267
Вектор напряженности поля электростатического 187
- плотности тока 224
- поляризации 202
- световой 313
- скорости 9, 10
- Умова–Пойнтинга 296
- ускорения 11
- - нормального 11
- - тангенциального 11
- электрического смещения 204
Вес тела 28
Вещество 4
- оптически активное 352
Взаимодействие гравитационное 27
- межмолекулярное 117
- сильное 27, 426
- слабое 27, 426
- электромагнитное 27, 426
Волна бегущая 104
- де Бройля 383
- звуковая 110
Волна когерентная 313
- монохроматическая 313
- опорная 338
- плоская 104
- предметная 338
- поперечная 104, 295
- продольная 104
- стоячая 107
- сферическая 328
- электромагнитная 293
Вольт 191
Время 4
- однородное 8
- релаксации 101, 278
Высота звука 111
Вязкость 144

Газ вырожденный 407
- идеальный 119
- реальный 165
- электронный 223, 406
Галилей Галилео 76
Гамма-излучение 418
Генератор квантовый 401
Генри 277
Герц Генрих 295
Гейзенберг Вернер 384
Гипотеза Ампера 266
- де Бройля 383
- Планка 366
Гироскоп 57
Гистерезис 207, 271
Глюоны 426
Голография 335
Гравитация 66
Гравитоны 426
Градиент 68, 192
Грей 423
Громкость звука 111
Гюйгенс Христиан 327

Давление 120
- гидростатическое 178
- добавочное 174
- критическое 166
- молекулярное 173
- парциальное 122
- света 366
Деформация 28, 181
Двигатель вечный 146
- тепловой 158
Движение 4, 7

Движение броуновское 118
- вращательное 15
- криволинейное 13
- колебательное 94
- механическое 7
- переменное 10
- поступательное 7
- прямолинейное 9
- равномерное 9
- тепловое 117
Двойное лучепреломление 349
Декремент затухания 102, 290
Денисюк Ю. Н. 340
Детерминизм механики классической 27
Дефект массы ядра 417
Джоуль Д. П. 191, 229
Диамагнетики 268
Диаметр молекулы эффективный 135
Динамика 26
Диод вакуумный 237
- полупроводниковый 410
Диполь электрический 199
Дисперсия волн 106, 359
- света 358
- угловая 334
Дифракция на решетке 335
- - - пространственной 335
- - щели 336
- света 330
- Фраунгофера 327
- Френеля 332
Диоптрия 306
Диффузия 136
Дихроизм 352
Диэлектрики 201
- дипольные полярные 201
- дипольные неполярные 201
Диэлектрическая проницаемость 185, 204
- восприимчивость 203
Длина волны 105, 295
- - дебройлевская 383
- - комптоновская 369
- свободного пробега молекул 135
Добротность контура 290
Дозиметрия 423
Домены 208, 271
Дрейф 233
Дуализм квантово-волновой 370
Дырка 408

Единицы физических величин 5
- - - основные 4
- - - производные 5

Жидкость, свойства 179
Жуковский Н. Е. 55

Закон Авогадро 119
- Ампера 247
- Био–Савара–Лапласа 244
- Бойля–Мариотта 147
- Больцмана 128
- Брюстера 346
- Бугера 361
- взаимосвязи массы и энергии 83
- Вина 364
- всемирного тяготения 28
- Гей-Люссака 149
- Гука 29, 182
- движения центра масс 31
- Дальтона 122
- Джоуля–Ленца 229
- инерции 26
- Кеплера 66
- Кирхгофа 362
- Клапейрона 121
- Кулона 185
- Кюри 269
- Ленгмюра 237
- Ленца 276
- Максвелла 122
- Малюса 345
- Мозли 400
- Ньютона первый, второй 26
- - третий 27
- - трения внутреннего 137
- Ома для цепи полной 230
- - в дифференциальной форме 226
- - для участка цепи 226
- отражения 301
- Паскаля 127
- полного тока 264
- прямолинейного распространения света 301
- равномерного распределения энергии по степеням свободы молекул 142
- распада радиоактивного 419
- релятивистского сложения скоростей 82
- сохранения заряда 184
- - импульса 31
- - момента импульса 55
- - энергии 37
- преломления 302
- сохранения механической энергии 85
- Стефана–Больцмана 364
- Столетова 364
- трения внутреннего 138
- Фарадея 276
- Фика 136

Закон Фурье 137
- Шарля 148
Заряд пробный 187
- сторонний 203
- точечный 184
- электрический 184
- элементарный 184
- ядра атома 415
Заряды индуцированные 209
- связанные 203
Зона валентная 405
- запрещенная 405
- проводимости 405
- разрешенная 405
Зоны Френеля 327

Излучение индуцированное 399
- радиоактивное 418
- рентгеновское 398
- -характеристическое 399
- тепловое 362
Изобара 149
Изопроцессы 147
Изотерма 147
- Ван-дер-Ваальса 166
Изотропность пространства 51
Изохора 148
Импульс тела 29
- фотона 367
Индуктивность 276
- соленоида 277
Индукция взаимная 277
- магнитная 243
- электромагнитная 276
Интенсивность звука 110
Интерферометры 322
Ионизатор 234
Ионизация атома 234
Источник ЭДС 225

Кандела 5
Капиллярность 175
Карно Сади 159
Квант 365
Кельвин 5
Кеплер Иоганн 66
Кварки 241
Килограмм 5
Кинематика 7
Клаузиус Рудольф 161
Когерентность 315
Колебания механические вынужденные 101
- гармонические 90, 288
- затухающие 101, 289
Колебания незатухающие 287
- свободные 90, 288
- электромагнитные 287
- - вынужденные 290
Количество вещества 118
- теплоты 144
Коллектор 412
Кольца Ньютона 321
Комптон Артур Холи 368
Конденсаторы 210
Контур колебательный 288
Космические скорости 68
Коэффициент диффузии 136
- затухания 102
- отражения 349
- Пельтье 414
- поглощения 361
- Пуассона 152
- теплопроводности 137
- трения внутреннего 137
- - скольжения 29
- упругости 28
КПД термический 159
- цикла Карно 159
Кристаллы атомные 181
- ионные 181
Критерий Релея 334
Кулон 184

Лазеры 400
Лампы накачки 401
- электронные 237
Лебедев П. Н. 368
Ленц Э. Х. 229, 276
Лептоны 427
Линзы 303
Линия вектора напряженности поля электрического 186
- - индукции магнитной 243
- - смещения электрического 204
Лоренц Х. А. 252
Луч необыкновенный 350
- обыкновенный 350
- световой 301
Лучи альфа-, бета-, гамма 418

Магнетик 266
Магнетон Бора 394
Магнитная проницаемость 268
Максвелл Д. К. 122, 250
Максимум дифракционный 334
- интерференционный 315
Масса 26
- молярная 118
- покоя 83

Масса релятивистская 83
Материя 4
Маятник математический 93
- физический 94
Мезоны 426
Мениск 175
Метод зон Френеля 327
- исследования статистический 116
- термодинамический 116
Метр 5
Механика 7
- квантовая 7, 383
- классическая 7
- релятивистская 7
Минимум дифракционный 333
- интерференционный 315
Модели атома 375
Модель идеального газа 119
Модуль Юнга 182
Молекула 118
Моль 5, 118
Момент атома магнитный 265
- диполя электрический 199
- импульса 50
- - собственный(спин) 394
- инерции 52
- - стержня, цилиндра, шара 54
- - тонкостенного обруча 53
- контура магнитного 243
механический 50
- силы 50
- электрона 264
Монокристаллы 181
Мощность 34
- тока 228
- удельная тепловая 229
Мюоны 428

Намагниченность 266
Напряженность 67
- поля диполя 200
- - гравитационного 67
- - магнитного 268
- - электрического 185
Напряжение 226
- тока запирающее 411
- пробоя 235
Натяжение поверхностное 173
Начало термодинамики первое 145
- - второе 158
- - третье 164
Невесомость 28
Нейтрино 418
Нейтрон 415
Николь 351
Неравенство Клаузиуса 161
Нуль Кельвина 117
Нуклон 415
Ньютон Исаак 26

Оболочки электронные 396
Обратимость луча 302
Объем критический 167
Ом 226
Оператор Гамильтона 36
- Лапласа 107
Оптика 301
- геометрическая 301
- просветленная 323
Опыт Лебедева 366
- Штерна 126
- Штерна и Герлаха 395
Опыты Девиссона и Джермера 383
- Франка и Герца 379
Основное уравнение МКТ 121
Осциллятор 90
- гармонический 90
Ось оптическая 306, 350
Отношение гиромагнитное 264

Парамагнетики 268
Параметры критические 165
Переход электронно-дырочный 410
Период колебаний 92, 288
- обращения 16
- полураспада 419
Петля гистерезиса 207, 271
Плазма 236
Планк Макс 365
Пластинка зонная 330
Плечо силы 50
- диполя 199
Плоскость поляризации 344
- фокальная 303
Плотность заряда линейная 196
- - объемная 189
- - поверхностная 193
- потока энергии 109, 296
- тока 223
- - смещения 288
- спектральной светимости энергетической 362
- энергии поля магнитного 278
- - - электростатического 215
Поверхностное натяжение 174
Поверхность волновая 104
- эквипотенциальная 192, 209
Поглощение света 360
Позитрон 426

Показатель адиабаты 150
- преломления 301, 304
Поле гравитационное 66
- вихревое 250
- магнитное 242
- однородное 66, 186
- потенциальное 66, 190, 249
- тока кругового 242
- - прямого 244
- центральное 186
- электрическое вихревое 250
- электростатическое 186
- электромагнитное 286
Поликристалл 181
Полосы равного наклона 322
- равной толщины 322
Полупроводники 407
Поляризация света 343
- диэлектрика 202
Поляризованность 202
- спонтанная 207
Поляроид 352
Порядок интерференционного максимума 315
- - минимума 315
Постоянная Авогадро 118
- Больцмана 128
- Вина 364
- гравитационная 28
- Комптона 368
- магнитная 244
- молярная газовая 121
- Планка 366
- распада радиоактивного 419
- решетки дифракционной 333
- Ридберга 379
- Стефана–Больцмана 364
- Холла 254
- электрическая 185
Постулаты Бора 377
- Эйнштейна 78
Потенциал поля гравитационного 67
- - электростатического 190
Поток вектора напряженности 187
- индукции магнитной 255
- энергии 109
Потокосцепление 277
Правила Кирхгофа 231
- винта правого 245
- руки левой 247
- - правой 277
Преобразования Галилея 76
- Лоренца 78
Призма Волластона 352
- Глана–Фуко 352
- Николя 351
Прецессия 57, 265
Принцип Гюйгенса 327
- Гюйгенса–Френеля 327
- дальнодействия 77, 432
- независимости действия сил 26
- относительности Галилея 76
- - Эйнштейна 78
- Паули 396
- соответствия Бора 388
- суперпозиции полей 187
- Ферма 301
Природа света 316
Проводимость полупроводника примесная 409
- - дырочная 409
- - собственная 407
- - электронная 409
- *p-n*-перехода 410
- удельная 224
Пространство 4
- однородное 8
- изотропное 8
Просветление оптики 324
Протон 415
Процесс адиабатный 150
- изобарный 150
- изохорный 148
- изотермический 147
- изоэнтропийный 162
- круговой (цикл) 158
- термодинамический 116
- - необратимый 158
- - обратимый 158
Пси-функция 385
Путь 9
Пучность волны стоячей 107
Пьезоэлектрики 208

Работа 32
- в магнитном поле 255
- в термодинамике 152
- выхода электрона из металла 237
- ионизации 235
- механическая 32
- переменной силы 32
- силы 33
- тока электрического 228
- элементарная 34
Равновесие тепловое 116
- термодинамическое 362
Радиан 5

Радиоактивность 417
Радиус-вектор 8
- действия молекулярного 173
- кривизны 15
Разность потенциалов 191
- - контактная 412
- хода волн 314
- - - оптическая 314
Разряд газовый 235
- несамостоятельный 235
- самостоятельный 235
Распределение Больцмана 127
- Максвелла 123
- Ферми–Дирака 406
Реактор ядерный 421
Реакция термоядерная 422
- цепная 421
- ядерная 420
Резерфорд Эрнест 375
Резонанс 103, 292
Рекомбинация 234
Решетка дифракционная 333
- зонная Френеля 336
- кристаллическая 181
- трехмерная (пространственная) 335
Самоиндукция 277
Сверхпроводимость 234
Свет видимый 316
- естественный 343
- поляризованный плоско 343
- - частично 343
Светимость энергетическая 362
Связь напряженности и потенциала 192
Сегнетоэлектрики 207
Секунда 5
Серия Бальмера 377
- Лаймана 377
- Пашена, Пфунда 377
Сечение кристалла главное 350
Сила 26
- гравитационная 28
- инерции 71
- консервативная 33, 190
- коэрцитивная 208, 272
- Лоренца 252
- оптическая линзы 303
- поверхностного натяжения 174
- термоэлектродвижущая 413
- тока 223
- трения скольжения 29
- тяжести 28
- упругости 28
- центробежная 71
Сила электродвижущая 225
- - индукции 276
Силы молекулярного взаимодействия 117
- сторонние 225
- ядерные 416
Система диссипативная 33
- единиц СИ 5
- инерциальная 26
- консервативная 33
- координат 8
- неинерциальная 70
- отсчета 8
- термодинамическая 117
Скорость волн групповая 360
- мгновенная 10
- молекул арифметическая 126
- света в вакууме 294, 304
- средняя 10
- средняя квадратичная 120, 126
- угловая 15
- фазовая 106, 295
Сложение колебаний взаимно-перпендикулярных 98
- - одного направления 95
Смачивание 174
Соленоид 250
Соотношения неопределенностей Гейзенберга 384
Сопротивление 226
- активное 292
- емкостное 292
- индуктивное 292
- общее 228
- полное 292
- удельное 226
Спектр атома водорода 376
- дисперсионный 358
Спин электрона 265, 391
Степень поляризации 346
- свободы движения 143
Стерадиан 5
Стопа стеклянная 347
Тело аморфное 181
- изотропное 181
- кристаллическое 180
- макроскопическое 116
- отсчета 8
- рабочее 158
- серое 363
- твердое 8, 181
- черное 363
Тембр звука 111
Температура 116

Температура критическая 234
- термодинамическая 117
- Ферми 407
Теорема Гаусса для поля магнитного 255
- - - - электростатического в вакуумс 187
- - - - в диэлектрике 204
- Лармора 266
- Нернста 164
- о циркуляции 191, 249
- Штейнера 54
Теория дисперсии света 357
- Максвелла электромагнитная 283
- молекулярно-кинетическая 123
- относительности специальная 77
- света квантовая 365
- теплоемкостей 146
Теплоемкость тела 144
- молярная 146
- удельная 144
Теплопроводность 137
Термодинамика 142
Термопара 413
Тесла 243
Ток индукционный 277
- насыщения 235, 366
- постоянный 223
- проводимости 223
- смещения 284
- электрический 223
Тороид 250
Течение стационарное 177
Точка Кюри 209, 272
- материальная 8
- тройная 166
Траектория 9
Трение внутреннсе 136
Триод вакуумный 237
- полупроводниковый 410
Трубка Пито 180

Угол Брюстера 346
- предельный 304
- скольжения 335
Удар неупругий 38
- упругий 39
Узел волны стоячей 107
- решетки кристаллической 181
- цепи электрической 231
Универсальная газовая постоянная 121
Уравнение адиабаты 151
- Бернулли 178
- Ван-дер-Ваальса 165
- волны бегущей 105
- волны стоячей 107
Уравнение движения кинематическое 9
- динамики вращательного движения 56
- изобары 150
- изотермы 147
- изохоры 148
- Клапейрона 121
- Клапейрона–Менделеева 121
- Майера 147
- моментов 51
- неразрывности 177
- Пуассона 151
- Умова 109
- Шредингера 385
- Эйнштейна для фотоэффекта внешнего 366
Уравнения Максвелла для электромагнитного поля 283
Уровень Ферми 407
Ускорение 11
- нормальное 11
- тангенциальное 11
- угловое 16

Фаза колебаний 92
Фарад 210
Фарадей Майкл 276
Ферромагнетики 271
Фигуры Лиссажу 100
Физика атомная 375
- молекулярная 116
Флуктуации 125
Формула барометрическая 126
- Бальмера обобщенная 379
- Вульфа–Брегтов 335
- Лапласа 175
- Ньютона 137
- Планка 365
- Ричардсона–Дешмана 238
- Томсона 288
- тонкой линзы 303
Формулы Френеля 346
Фотон 367
Фотопроводимость 367
Фотоэффект вентильный 367
- внешний 365
- внутренний 367
Фронт волновой 105
Функция волновая 385
- распределения молекул по скоростям 124

Центр масс 31
- оптический линзы 305
Цикл Карно 159
- обратный 158
- прямой 158

Циркуляция 191, 268

**Ч**астицы нейтральные 415
- стабильные 425
- элементарные 425
Частота 16
- колебаний 92
- - резонансная 103
- - собственная 92, 288
- - циклическая 92, 288
Число Авогадро 119, 144
- волновое 105, 294
- квантовое главное 387, 390
- - магнитное 390
- - орбитальное 390
- - спиновое 391
- степеней свободы молекул 142

**Ш**кала волн электромагнитных 297
- термодинамическая температурная 116

**Э**йнштейн Альберт 78, 366
Электроемкость 210
- Земли 210
- конденсатора плоского 211
- - сферического 211
- - цилиндрического 211
- проводника 210
- шара 210
Электрон 415
- валентный 409
- свободный 410
Электрон-вольт 415
Электростатика 184
Эмиссия 236
Эмиттер 412
Энергия 32
- внутренняя 144

Энергия волны 109, 296
- кванта 365
- кинетическая 32
- конденсатора 212
- покоя 82
- полная 37
- поля магнитного 243
- - электрического 213
- проводника 212
- - тела вращающегося 52
- потенциальная 35
- связи ядра 416
- - - удельная 417
- системы точечных зарядов 213
Энтальпия 149
Энтропия 163
Эрстед Ханс Кристиан 243
Эффект вентильный 367
- гироскопический 57
- Зеемана 395
- Керра 353
- Комптона 368
- пьезоэлектрический 208
- Фарадея 355
- Холла 253

**Я**вление Зеебека 413
- Пельтье 414
- полного отражения 304
- Томсона 414
- электромагнитной индукции 275
Явления капиллярные 174
- переноса 136
Ядро атома 415
Яма потенциальная 387
Ячейка Керра 133

# ОГЛАВЛЕНИЕ

**Предисловие** ..... 3
**Введение** ..... 4

**Часть 1. Физические основы механики**

**Глава 1. Кинематика** ..... 7
§ 1. Механическое движение. Кинематическое уравнение движения ..... 7
§ 2. Скорость движения ..... 9
§ 3. Ускорение ..... 11
§ 4. Движение тела, брошенного под углом к горизонту ..... 13
§ 5. Вращение тела вокруг оси ..... 15
*Примеры решения задач* ..... 19

**Глава 2. Динамика поступательного движения** ..... 26
§ 6. Законы И. Ньютона ..... 26
§ 7. Силы в механике ..... 28
§ 8. Импульс тела. Закон сохранения импульса ..... 29
§ 9. Центр масс. Закон движения центра масс ..... 31
§ 10. Энергия, работа, мощность ..... 32
§ 11. Кинетическая и потенциальная энергия ..... 34
§ 12. Закон сохранения энергии ..... 37
§ 13. Соударение тел ..... 38
*Примеры решения задач* ..... 41

**Глава 3. Динамика вращательного движения твердого тела** ..... 50
§ 14. Момент силы. Момент импульса. Закон сохранения момента импульса ..... 50
§ 15. Момент инерции. Кинетическая энергия вращающегося тела ..... 52
§ 16. Момент инерции некоторых тел ..... 53
§ 17. Основной закон динамики вращательного движения. Работа и мощность при вращательном движении ..... 55
§ 18. Гироскопы ..... 57
*Примеры решения задач* ..... 59

**Глава 4. Гравитация** ..... 66
§ 19. Законы Кеплера. Гравитационное поле ..... 66
§ 20. Космические скорости ..... 68
§ 21. Неинерциальные системы отсчета ..... 69
*Примеры решения задач* ..... 72

**Глава 5. Элементы специальной теории относительности** ..... 76
§ 22. Преобразования Галилея. Сложение скоростей в классической механике ..... 76
§ 23. Относительность одновременности ..... 77
§ 24. Постулаты специальной теории относительности (СТО). Преобразования Лоренца ..... 78
§ 25. Энергия релятивистской частицы. Закон взаимосвязи массы и энергии ..... 83
*Примеры решения задач* ..... 86

**Глава 6. Механические колебания и волны** ..... 90
§ 26. Гармонические колебания ..... 90
§ 27. Физический и математический маятник ..... 93
§ 28. Сложение гармонических колебаний одного направления ..... 95
§ 29. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний ..... 98
§ 30. Затухающие колебания ..... 100
§ 31. Вынужденные колебания ..... 102
§ 32. Механические волны в упругой среде ..... 104
§ 33. Уравнение плоской бегущей волны. Волновое уравнение ..... 105
§ 34. Стоячие волны ..... 107
§ 35. Энергия и интенсивность волны ..... 108
§ 36. Звуковые волны ..... 110
*Примеры решения задач* ..... 112

## Часть 2. Основы молекулярной физики и термодинамики

**Глава 7. Основы молекулярно-кинетической теории идеального газа** ..... 116
§ 37. Понятия и определения ..... 116
§ 38. Основные положения молекулярно-кинетической теории ..... 117
§ 39. Количество вещества. Масса и размеры молекул ..... 118
§ 40. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеального газа ..... 119
§ 41. Уравнение состояния идеального газа ..... 121
§ 42. Закон распределения молекул по скоростям (закон Д. Максвелла) ..... 122
§ 43. Барометрическая формула. Распределение Л. Больцмана ..... 126
*Примеры решения задач* ..... 129

**Глава 8. Явления переноса в газах** ..... 135
§ 44. Средняя длина свободного пробега молекул ..... 135
§ 45. Опытные законы явлений переноса ..... 136
*Примеры решения задач* ..... 139

**Глава 9. Первое начало термодинамики** ..... 142
§ 46. Внутренняя энергия идеального газа ..... 142
§ 47. Работа в термодинамике ..... 144
§ 48. Первое начало термодинимики ..... 145
§ 49. Кинетическая теория теплоемкостей ..... 146
§ 50. Изопроцессы в газах ..... 147
*Примеры решения задач* ..... 154

**Глава 10. Второе начало термодинамики** ..... 158
§ 51. Круговые обратимые и необратимые процессы. Цикл Карно ..... 158
§ 52. Неравенство Клаузиуса. Энтропия ..... 161
§ 53. Энтропия и вероятность ..... 163
§ 54. Второе начало термодинамики ..... 165
§ 55. Реальные газы. Уравнение Ван-дер-Ваальса ..... 165
§ 56. Изотермы реальных газов. Фазовые переходы ..... 166
*Примеры решения задач* ..... 168

**Глава 11. Жидкое и твердое состояния** ..... 173
§ 57. Поверхностное натяжение жидкости ..... 173
§ 58. Смачивание. Капиллярные явления ..... 174
§ 59. Элементы динамики жидкостей и газов. Уравнение неразрывности ..... 176
§ 60. Уравнение Бернулли ..... 177
§ 61. Применение уравнения Бернулли ..... 179
§ 62. Твердые тела. Кристаллические и аморфные тела ..... 180
§ 63. Механические свойства твердых тел ..... 182

## Часть 3. Основы электродинамики

**Глава 12. Электростатическое поле в вакууме** ..... 184
§ 64. Электрический заряд. Закон Кулона ..... 184
§ 65. Электростатическое поле. Напряженность электростатического поля ..... 185
§ 66. Поток вектора напряженности. Теорема Гаусса ..... 187
§ 67. Потенциал электростатического поля. Циркуляция вектора напряженности ..... 189
§ 68. Связь между напряженностью электростатического поля и потенциалом ..... 192
§ 69. Применение теоремы Гаусса к расчету электростатических полей ..... 193

**Глава 13. Электростатическое поле в веществе** ..... 199
§ 70. Электрический диполь ..... 199
§ 71. Электрические свойства диэлектриков ..... 201
§ 72. Поляризация диэлектрика. Напряженность поля в диэлектрике ..... 202
§ 73. Вектор электрического смещения. Теорема Гаусса для диэлектриков ..... 204
§ 74. Условия на границе раздела двух диэлектриков ..... 205
§ 75. Сегнетоэлектрики ..... 207
§ 76. Проводники в электростатическом поле ..... 208
§ 77. Конденсаторы ..... 210
§ 78. Энергия электростатического поля ..... 213
*Примеры решения задач* ..... 217

**Глава 14. Постоянные электрический ток** ... 223
§ 79. Условия возникновения электрического тока. Сила тока. Плотность тока ... 223
§ 80. Электродвижущая сила и напряжения ... 225
§ 81. Закон Ома для однородного участка цепи ... 226
§ 82. Работа и мощность тока. Закон Джоуля–Ленца ... 228
§ 83. Закон Ома для неоднородного участка цепи ... 230
§ 84. Правила Кирхгофа. Расчет разветвленной электрической цепи ... 231
§ 85. Электронная проводимость металлов ... 232
§ 86. Электрический ток в газах. Самостоятельный и несамостоятельный разряды ... 234
§ 87. Понятие о плазме ... 236
§ 88. Электрический ток в вакууме. Электронная эмиссия ... 236
*Примеры решения задач* ... 238

**Глава 15. Магнитное поле в вакууме** ... 243
§ 89. Магнитное поле тока. Индукция магнитного поля ... 243
§ 90. Закон Био–Савара–Лапласа ... 244
§ 91. Закон Ампера. Взаимодействие проводников с током ... 247
§ 92. Рамка с током в магнитном поле ... 248
§ 93. Циркуляция вектора магнитной индукции. Теорема о циркуляции ... 249
§ 94. Магнитное поле соленоида и тороида ... 250
§ 95. Сила Лоренца. Движение заряженных частиц в магнитном поле ... 252
§ 96. Эффект Холла ... 253
§ 97. Магнитный поток. Теорема Гаусса для магнитного поля ... 255
§ 98. Работа, совершаемая при перемещении проводника и контура с током в магнитном поле ... 255
*Примеры решения задач* ... 258

**Глава 16. Магнитное поле в веществе** ... 264
§ 99. Магнитные моменты электронов и атомов. Атом а магнитном поле ... 264
§ 100. Намагничивание вещества ... 266
§ 101. Диа- и парамагнетизм ... 268
§ 102. Условия на границе раздела двух магнетиков ... 269
§ 103. Ферромагнетизм ... 271
*Примеры решения задач* ... 273

**Глава 17. Электромагнитная индукция** ... 276
§ 104. Законы Фарадея и Ленца ... 276
§ 105. Явление самоиндукции. Индуктивность ... 277
§ 106. Энергия магнитного поля ... 278
*Примеры решения задач* ... 280

**Глава 18. Основы теории Максвелла для электромагнитного поля** ... 283
§ 107. Вихревое электрическое поле. Первое уравнение Максвелла ... 283
§ 108. Токи смещения. Второе уравнение Максвелла ... 284
§ 109. Полная система уравнений Максвелла ... 285

**Глава 19. Электромагнитные колебания и волны** ... 287
§ 110. Свободные электромагнитные колебания в контуре ... 287
§ 111. Собственная частота колебаний в контуре. Формула Томсона ... 288
§ 112. Затухающие электромагнитные колебания ... 289
§ 113. Вынужденные электромагнитные колебания ... 290
§ 114. Резонанс в цепи переменного тока ... 292
§ 115. Электромагнитные волны ... 293
§ 116. Энергия электромагнитных волн ... 296
§ 117. Шкала электромагнитных волн ... 297
*Примеры решения задач* ... 298

**Часть 4. Оптика**

**Глава 20. Элементы геометрической оптики** ... 301
§ 118. Законы геометрической оптики ... 301
§ 119. Линзы. Формулы тонкой линзы ... 303
§ 120. Построение изображений в линзах ... 305
*Примеры решения задач* ... 310

**Глава 21. Интерференция света** ... 313
§ 121. Уравнение световой волны. Условия интерференционного максимума и минимума ... 313
§ 122. Расчет интерференционной картины от двух когерентных источников ... 315
§ 123. Методы наблюдения интерференции света ... 316
§ 124. Интерференция в тонких пленках ... 318
§ 125. Интерференционные полосы равного наклона и равной толщины ... 320
§ 126. Кольца Ньютона ... 321
§ 127. Применение интерференции света ... 322
*Примеры решения задач* ... 324

**Глава 22. Дифракция света** ... 327
§ 128. Принцип Гюйгенса–Френеля ... 327
§ 129. Метод зон Френеля ... 327
§ 130. Дифракция на одиночном отверстии и экране ... 330
§ 131. Дифракция на одиночной щели ... 332
§ 132. Дифракционная решетка ... 333
§ 133. Дифракция на пространственной решетке ... 335
§ 134. Физические принципы голографии ... 335
*Примеры решения задач* ... 341

**Глава 23. Поляризация света** ... 343
§ 135. Естественный и поляризованный свет ... 343
§ 136. Закон Малюса ... 345
§ 137. Поляризация света при отражении и преломлении. Формулы Френеля ... 346
§ 138. Двойное лучепреломление. Поляризационные призмы ... 349
§ 139. Искусственная оптическая анизотропия ... 353
§ 140. Вращение плоскости поляризации ... 354
*Примеры решения задач* ... 356

**Глава 24. Дисперсия света** ... 358
§ 141. Электронная теория дисперсии ... 358
§ 142. Поглощение света веществом ... 360

**Глава 25. Квантовая природа излучения** ... 362
§ 143. Тепловое излучение. Закон Кирхгофа ... 362
§ 144. Законы излучения черного тела ... 363
§ 145. Формула Планка ... 365
§ 146. Фотоэлектрический эффект ... 365
§ 147. Фотон. Давление света ... 367
§ 148. Эффект Комптона ... 368
§ 149. Корпускулярно-волновой дуализм света ... 370
*Примеры решения задач* ... 371

**Часть 5. Элементы физики атома и атомного ядра**

**Глава 26. Строение атома** ... 375
§ 150. Модели атома Томсона и Резерфорда ... 375
§ 151. Спектр атома водорода ... 376
§ 152. Теория Бора ... 377
§ 153. Опыт Франка и Герца ... 379
*Примеры решения задач* ... 381

**Глава 27. Элементы квантовой механики** ... 383
§ 154. Гипотеза де Бройля. Дифракция электронов ... 383
§ 155. Соотношение неопределенностей Гейзенберга ... 384
§ 156. Волновая функция. Уравнение Шредингера ... 385
§ 157. Частица в одномерной бесконечно глубокой прямоугольной потенциальной яме ... 387
§ 158. Атом водорода. Квантовые числа ... 390
§ 159. Магнитомеханические явления. Спин электрона ... 393
§ 160. Опыт Штерна и Герлаха ... 395
§ 161. Принцип Паули. Периодическая система элементов Менделеева ... 396
§ 162. Рентгеновское излучение ... 398

§ 163. Индуцированное излучение. Лазеры ... 400
*Примеры решения задач* ... 403

**Глава 28. Элементы физики твердых тел** ... 405
§ 164. Энергетические зоны металлов, диэлектриков и полупроводников ... 405
§ 165. Полупроводники. Собственная и примесная проводимость полупроводников ... 407
§ 166. Полупроводниковый диод и транзистор ... 410
§ 167. Термоэлектрические явления ... 413

**Глава 29. Физика атомного ядра и элементарных частиц** ... 415
§ 168. Структура ядра атома ... 415
§ 169. Ядерные силы. Энергия связи атомных ядер ... 416
§ 170. Радиоактивность ... 417
§ 171. Закон радиоактивного распада ... 419
§ 172. Ядерные реакции. Ядерный реактор ... 420
§ 173. Методы регистрации ионизирующих излучений ... 422
§ 174. Дозиметрия. Дозы облучения ... 423
§ 175. Элементарные частицы. Фундаментальные взаимодействия ... 425
*Примеры решения задач* ... 429

**Заключение** ... 432

**Предметно-именной указатель** ... 435