

**ПРАКТИКУМ ПО МЕХАНИКЕ
ДЕФОРМИРОВАНИЯ МЕТАЛЛОВ
И КОМПОЗИТОВ**

2007



САМАРА

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА»

ПРАКТИКУМ ПО МЕХАНИКЕ ДЕФОРМИРОВАНИЯ МЕТАЛЛОВ И КОМПОЗИТОВ

Под редакцией
академика РАН Ю.Д. Третьякова,
академика РАН Г.Г. Чёрного,
профессора Ф. В. Гречникова

*Утверждено Редакционно-издательским советом
в качестве учебного пособия*

САМАРА
Издательство СГАУ
2007

УДК 539.316(075)
ББК 30.121
П 691



**Инновационная образовательная программа
"Развитие центра компетенции и подготовка
специалистов мирового уровня в области аэро-
космических и геонформационных технологий"**

Авторы: **Р.А. Васин, П.Н. Демидович, Э.Б. Завойчинская, А.В. Муравлев,
М.Ю. Рязанцева, З.Г. Тунгускова, П.В. Чистяков,
Г.З. Шарафутдинов, С.В. Шеменин**

Рецензенты: д-р техн. наук, проф. В. Р. К а р г и н
д-р техн. наук, проф. В. А. К о с т ы ш е в

П 691 **ПРАКТИКУМ ПО МЕХАНИКЕ ДЕФОРМИРОВАНИЯ МЕТАЛЛОВ
И КОМПОЗИТОВ:** учеб. пособие / Р.А. Васин [и др.]; под ред. акад. РАН
Ю.Д.Третьякова, акад. РАН Г.Г. Чёрного, проф. Ф.В. Гречникова. – Сама-
ра: Изд-во Самар. гос. аэрокосм. ун-та, 2007. - 80 с. : ил.

ISBN 978-5-7883-0673-1

Содержит описание пяти задач, из которых четыре посвящены изучению механических свойств поликристаллических материалов и резинокордного композита и одна задача – исследованию развитого пластического формообразования. Задача № 1 знакомит студентов с методикой проведения и использованием результатов самого распространенного вида механических испытаний – растяжение цилиндрических образцов; задача № 2 – с испытаниями цилиндрических образцов на сложное нагружение; задача № 3 – с механическими свойствами и методиками испытания резинокорда. В задаче № 4 на примере поликристалла дается оценка параметра квазиоднородности и экспериментально обследуется неоднородность протекания пластической деформации на мезоуровне. Задача № 5 посвящена теории течения металла в тонком слое и ее практическим приложениям.

Учебное пособие предназначено для студентов старших курсов, специализирующихся в области пластической обработки материалов.

УДК 539.316(075)
ББК 30.121

ISBN 978-5-7883-0673-1

© Третьяков Ю.Д., Чёрный Г.Г., 2007
© Самарский государственный
аэрокосмический университет, 2007

ОГЛАВЛЕНИЕ

ЗАДАЧА № 1. Упругопластические свойства материала при одноосном нагружении.....	4
ЗАДАЧА № 2. Пластичность металлов при сложном нагружении.....	24
ЗАДАЧА № 3. Механические свойства резинокорда.....	32
ЗАДАЧА № 4. Исследование микродеформаций металла зернистой структуры.....	55
ЗАДАЧА № 5. Пластическое течение в тонком слое металла.....	64

Задача № 1

УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МАТЕРИАЛА ПРИ ОДНООСНОМ НАГРУЖЕНИИ

Цель работы – исследование процесса растяжения металлического образца до его разрыва; построение диаграммы растяжения; определение модулей упругости материала; построение диаграмм “интенсивность напряжений – интенсивность деформаций”, “среднее напряжение – объемная деформация”; ознакомление с возможностями виртуального эксперимента на растяжение.

Содержание работы:

- 1) ознакомление с методикой проведения эксперимента, испытательными машинами и измерительной аппаратурой;
- 2) проведение эксперимента на растяжение вплоть до разрушения образца с измерением осевого усилия, продольной и поперечной деформаций;
- 3) определение модулей упругости материала (модуль Юнга, коэффициент Пуассона, модуль объемного сжатия, модуль сдвига);
- 4) изучение упругопластических свойств материала, определение предела текучести, предела прочности, сопротивления разрыву, построение диаграммы деформирования (истинное напряжение – логарифмическая деформация) $\sigma_{11}^{ист} \sim \varepsilon_{11}$;
- 5) определение области однородного напряженного состояния в образце при одноосном нагружении путем численного моделирования на пакете ANSYS.

1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Эксперименты на растяжение образцов с цилиндрической рабочей частью (плоских или цилиндрических кругового сечения) – самый распространенный вид механических испытаний материалов. Такие эксперименты могут проводиться в широком диапазоне температур (от криогенных до высоких), при различных скоростях деформирования (от квазистатического

до ударного нагружения), в воздушной или иной среде. Всюду в дальнейшем в настоящей работе речь будет идти о квазистатическом нагружении при комнатной температуре металлических образцов; для определенности считается, что образец цилиндрический кругового сечения. Такие эксперименты проводятся для определения ряда стандартных («гостовских») механических характеристик материалов (модуль упругости, предел текучести и т.д.), а также при идентификации (определении материальных констант и функций) математических моделей (определяющих соотношений) упругопластических материалов. Обычно для этих целей используются следующие две экспериментально построенные зависимости: «растягивающая сила P – удлинение образца на заданной базе (или продольная деформация)» и «изменение поперечного размера образца (поперечная деформация) – удлинение на заданной базе (продольная деформация)», которые перестраиваются в диаграмму одноосного растяжения «осевое напряжение σ_{11} – осевая деформация ε_{11} » и диаграмму «поперечная деформация ε_{22} – осевая деформация ε_{11} » (ось 1 направлена вдоль оси образца). Следует различать *условные напряжения*, получающиеся путем деления растягивающей силы на первоначальную площадь сечения S_0 , и *истинные напряжения*, когда площадь поперечного сечения S берется для текущего деформированного состояния. При малых деформациях этим различием пренебрегают.

Тензор деформаций ε_{ij} имеет три ненулевые компоненты, которые при малых деформациях вычисляются по формулам

$$\varepsilon_{11} = \frac{\Delta b}{b_0}, \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \frac{\Delta d}{d_0},$$

где b_0 – база измерительного прибора, Δb – измеряемое удлинение на этой базе; d_0 – начальный диаметр (для образца кругового сечения) рабочей части образца. Иногда для удобства значения ε_{ij} умножаются на 100 %. При достаточно больших деформациях ($> 10\%$) используются так называемые истинные (логарифмические) деформации. В этом случае продольная деформация вычисляется по формуле

$$\varepsilon_{11} = \ln\left(\frac{b}{b_0}\right) = \ln\left(1 + \frac{\Delta b}{b_0}\right) \approx \frac{\Delta b}{b_0} \quad (\text{при } \Delta b \ll b_0).$$

Типичная диаграмма зависимости между условным нормальным напряжением σ_{11} и продольной деформацией ε_{11} , полученная при одноосном растяжении цилиндрического стального образца с постоянной скоростью схематично показана на рис. 1. Рассмотрим некоторые точки этой диаграммы, которые соответствуют характерным значениям напряжений (деформаций).

Предел пропорциональности σ_n (точка А) – наибольшее напряжение, при котором еще имеет место линейная зависимость между напряжениями и деформациями.

Предел упругости σ_y – наибольшее напряжение, при котором строгой линейной зависимости между напряжениями и деформациями уже нет, но при снятии нагрузки в образце не обнаруживается остаточной деформации (или при котором остаточная деформация не превышает 0,005 %). Обычно σ_y и σ_n очень близки друг к другу.

Зона CD называется *зоной текучести*. В тех случаях, когда участок CD горизонтальный, он называется *площадкой текучести*. На этом участке существенно изменяется длина образца без заметного увеличения нагрузки.

Пределом текучести σ_s (точка С) называется наименьшее напряжение, при котором образец деформируется без заметного увеличения нагрузки. Материалы, имеющие на диаграмме площадку текучести (рис. 1 а), называют материалами с выраженным пределом текучести. Если площадки текучести нет (рис. 1 б), то принято говорить об условном пределе текучести как о напряжении, при котором появляются остаточные деформации заданной величины. Например, условным пределом текучести $\sigma_{0,2}$ называется напряжение, при котором образец получает остаточное удлинение, равное 0,2 %.

У материалов с площадкой текучести иногда наблюдается временное повышение напряжений перед началом текучести. В этом случае имеем "зуб текучести"; максимальное напряжение называется верхним пределом текучести, а напряжения на площадке текучести – нижним пределом текучести. Материал в это время как бы течет; без увеличения напряжений в образце появляются большие удлинения. На поверхности отполированного образца можно через лупу видеть косые «штрихи» – линии сдвигов. Эти

линии называются линиями Чернова-Людерса. Большинство их наклонено к образующей образца под углом $45^\circ - 50^\circ$, т.е. приблизительно соответствует положению площадок наибольших касательных напряжений.

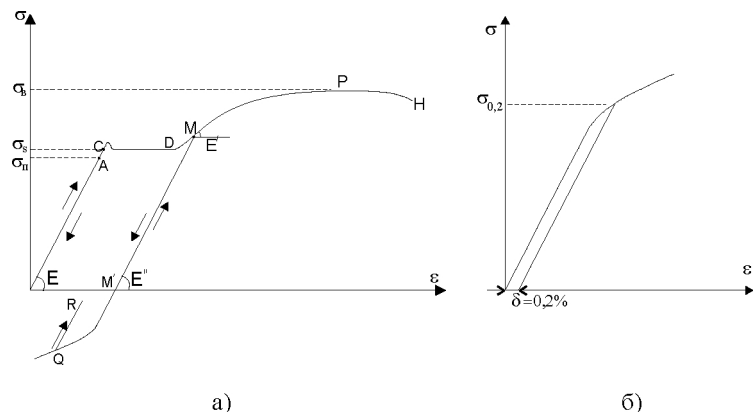


Рис. 1

Деформации, возникающие в теле при нагрузках, превышающих предел текучести, называются *упругопластическими*.

Зона DP называется зоной упрочнения: здесь удлинение образца сопровождается возрастанием нагрузки, но значительно более медленным, чем на упругом участке OA (отношение касательного модуля E' на участке MP к модулю Юнга $E - \frac{E'}{E} \approx 0,05-0,1$).

Если в процессе растяжения в точке M (рис. 1a) начать разгрузку, то зависимость между напряжением и деформацией пойдет по прямой MM' , примерно параллельной начальному участку OA при нагружении. При полном снятии нагрузки в образце сохраняется остаточная деформация, соответствующая отрезку OM' . Повторная нагрузка пойдет примерно по той же прямой MM' , а при дальнейшем ее увеличении пойдет по прежней кривой DMP. Таким образом, при разгрузке и повторной нагрузке материал ведет себя как упругий; при этом происходит увеличение предела текучести σ_{SM} по сравнению с начальным σ_s . Повышение предела текучести при повторной нагрузке называется упрочнением.

В ряде моделей теории пластичности принимается, что полная деформация $\varepsilon_{11}(OM'')$ в любой момент нагружения состоит из суммы упругой, обратимой деформации $\varepsilon_{11}^{(e)}(M''M')$ и необратимой пластической деформации $\varepsilon_{11}^{(p)}(OM')$:

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{11}^{(e)} + \varepsilon_{11}^{(p)},$$

причем $\varepsilon_{11}^{(p)} = 0$ при $\varepsilon < \varepsilon_s$, где ε_s – деформация, соответствующая пределу текучести.

Заметим, что в процессе разгрузки изменяется только упругая часть деформации; пластическая деформация может изменяться только в процессе нагрузки.

Если после разгрузки от некоторого напряжения, превышающего предел текучести, приложить к образцу нагрузку противоположного знака, то диаграмма ниже оси абсцисс будет иметь прямолинейный участок, но пластические деформации появятся при напряжении σ , по модулю меньшем не только напряжения в точке начала разгрузки M, но и начального предела текучести σ_s . Это понижение предела текучести при нагрузке обратного знака называется *эффектом Баушингера*.

Если в точке Q сменить знак нагрузки, то зависимость $\sigma_{11} \square \varepsilon_{11}$ пойдет по линии QR, почти параллельной упругому участку OA.

Характер поведения материала в процессе нагружения, разгрузки и вторичного нагружения и т.д. показывает, что зависимость между напряжением σ_{11} и деформацией ε_{11} не может быть представлена функцией, так как, например, одному значению ε_{11} могут соответствовать различные значения σ_{11} при различных процессах деформирования.

Величина $\nu = -\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}}$ в упругой области является постоянной и называется

коэффициентом Пуассона, а в пластической области изменяется, приближаясь к значению, равному 0,5. Очень часто при расчетах за предел упругости принимают $\nu = 0,5$, что соответствует несжимаемости материала.

В точке P деформация перестает быть однородной, в образце образуется шейка – местное сужение образца.

Отношение максимальной силы, которую способен выдержать образец, к начальной площади поперечного сечения называется *пределом прочности* (или временным сопротивлением) σ_g .

Процесс деформации от момента образования шейки до разрушения происходит при уменьшающейся растягивающей силе. Если вычислить истинное напряжение, отнесенное к наименьшей площади сечения шейки, то обнаружится его возрастание вплоть до момента разрушения. Напряжение в момент разрыва, получающееся в результате деления разрушающей нагрузки на площадь поперечного сечения шейки в месте разрушения, называется *истинным сопротивлением разрыву* $\sigma_{разр}$.

Измеряя по ходу растяжения изменение диаметра образца, можно получить зависимость между истинным напряжением $\sigma_{ист}$ и продольной деформацией ε_{11} .

Существует два основных типа разрушения – от отрыва и от сдвига. Если разрушение образца произошло без образования шейки, то его называют разрушением от отрыва. Этот тип разрушения характерен для хрупких материалов. Разрушение пластичных металлов при растяжении обычно связано с местной пластической деформацией, характеризуемой образованием шейки и характерной конфигурацией "чашки и конуса". Область разрыва состоит из двух резко различных зон: кратера с гладкими краями, где разрушение происходит путем сдвига, и плоского дна, имеющего ярко выраженную структуру, где разрушение происходит путем отрыва. Граница зон выражена так хорошо, что можно измерить диаметр плоского дна кратера. При сжатии материал разрушается главным образом от сдвига. Вид образцов после разрушения при растяжении и сжатии приведен на рис. 2.



Рис. 2.

Рассмотрим некоторые характеристики материала, определяемые из эксперимента на растяжение.

1) Модули упругости. При деформациях, не превосходящих определенного предела, большинство твердых тел проявляет линейно-упругие свойства. Закон Гука для изотропного упругого тела можно записать в виде

$$\sigma_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad (1)$$

$$\text{где } \theta = \varepsilon_{ii} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

а модули упругости λ и μ (так называемые параметры Ламе) имеют размерность напряжений. Закон Гука (1) можно разрешить относительно деформаций

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E} [-\nu \theta \delta_{ij} + (1 + \nu) \sigma_{ij}]. \quad (2)$$

Здесь $\theta = \sigma_{ii} = 3\sigma = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$, и использованы другие модули упругости – коэффициент Пуассона ν (безразмерная величина), модуль Юнга – E (имеющий размерность напряжений). Из (1) и (2) видно, что E и ν выражаются через λ и μ следующим образом:

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}, \quad E = \mu \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu}.$$

Шаровые части тензоров напряжений и деформаций связаны соотношением

$$\sigma = K \theta, \quad (3)$$

где K – модуль объемного сжатия, причем $K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$. Константа μ называется модулем сдвига, так как она определяет упругие свойства при сдвиговых деформациях.

Из формулы (2) следует, что при одноосном напряженном состоянии закон Гука можно записать в форме

$$\sigma_{11} = E \varepsilon_{11}, \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\nu \varepsilon_{11}.$$

2) Паспортные характеристики материала σ_s , σ_σ , $\sigma_{разр}$. Предел текучести σ_s , временное сопротивление σ_σ и разрушающее напряжение $\sigma_{разр}$ материала определяют по соответствующему ГОСТу из диаграммы растяжения материала.

2. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

В эксперименте по определению механических свойств мы имеем дело всегда с тремя объектами: испытуемый материал в виде образца той или иной формы; нагружающее устройство; измерительная аппаратура для определения и регистрации прилагаемых к телу внешних воздействий и возникающих в нем деформаций.

В эксперименте на растяжение форма образцов выбирается такой, что с достаточной степенью достоверности можно считать, что в рабочей части образца его напряженно-деформированное состояние является однородным или может быть «расшифровано» на основе некоторых гипотез. Тогда по измерениям деформаций на поверхности тела можно судить о деформациях внутри тела, а по измеренной нагрузке – вычислить напряжения в образце.

Образцы для испытания на одноосное нагружение. Назовем некоторые общие требования к образцам, преследующие цель получить достоверные и воспроизводимые результаты. Серия образцов должна быть изготовлена из одной заготовки (например, прутков, материал которых получен в одной плавке); пройти одинаковую механическую и термическую обработку; иметь строго оговоренный разброс в размерах образцов и пройти контроль по качеству поверхности образцов. Выборочными анализами на отдельных образцах для всей серии образцов указываются химический состав и микроструктура материала.

Типичный вид цилиндрического образца кругового сечения приведен на рис. 3.

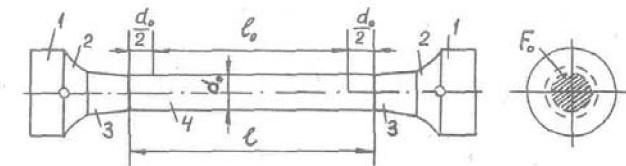


Рис. 3

Образец имеет головки 1 для крепления его в захватах испытательной машины, переходные участки 2, 3 и среднюю цилиндрическую часть 4, длина которой l называется рабочей длиной образца. Начальной расчетной

3) Упругопластические свойства материала. Диаграмма растяжения используется во многих вариантах теории пластичности для построения так называемых материальных функций. Обратимся для примера к теории малых упругопластических деформаций, соотношения которой имеют вид

$$s_{ij} = \frac{2\Phi(\varepsilon_u)}{3\varepsilon_u} e_{ij}, \quad (4')$$

$$\sigma = K\theta \quad (\text{или } \theta = 0)$$

для активного нагружения и

$$\Delta s_{ij} = 2\mu\Delta e_{ij}, \quad (4'')$$

$$\Delta\sigma = K\Delta\theta \quad (\text{или } \theta = 0)$$

для разгрузки, здесь $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}$, $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{\theta}{3}\delta_{ij}$ – соответственно девиаторы напряжений и деформаций, $\sigma_u = \sqrt{\frac{3}{2}s_{ij}s_{ij}}$, $\varepsilon_u = \sqrt{\frac{2}{3}e_{ij}e_{ij}}$ – интенсивности напряжений и деформаций; уравнения (4) содержат одну материальную функцию $\sigma_u = \Phi(\varepsilon_u)$ и две материальные константы – модули упругости K (если не используется условие несжимаемости материала $\theta = 0$ и μ).

Константы K и μ вычисляются через определяемые из опыта на растяжение модуль Юнга E и коэффициент Пуассона ν по формулам

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (5)$$

В эксперименте на растяжение

$$\sigma_u = \sigma_{11}, \quad (6)$$

и, следовательно, для построения зависимости $\sigma_u \sim \varepsilon_u$, т.е. материальной функции $\sigma_u = \Phi(\varepsilon_u)$, необходимо использовать оба получаемые из эксперимента соотношения – $\sigma_{11} \sim \varepsilon_{11}$ и $\varepsilon_{22} \sim \varepsilon_{11}$. Если вместо экспериментальной зависимости $\varepsilon_{22} \sim \varepsilon_{11}$ принять $\nu^* \equiv \text{const} = 1/2$, то в (6) выражение для ε_u упростится: $\varepsilon_u = \varepsilon_{11}$ и график функции $\sigma_u = \Phi(\varepsilon_u)$ получится из диаграммы растяжения $\sigma_{11} \sim \varepsilon_{11}$ путем замены обозначений по осям ($\sigma_{11} \rightarrow \sigma_u, \varepsilon_{11} \rightarrow \varepsilon_u$).

называется длина l_0 в пределах рабочей части, на которой производится измерение удлинения (устанавливаются навесные тензометры, наклеиваются тензодатчики или проводится видеоизмерение), т.е. база измерительных приборов находится в пределах расчетной длины образца. У стандартных образцов $l_0 = 11,3\sqrt{S_0}$ (длинные образцы) или $l_0 = 5,65\sqrt{S_0}$, где S_0 – площадь сечения рабочей части. Для цилиндрических образцов это означает, что $l_0/d_0 = 10$ или 5 (d_0 – диаметр рабочей части). Минимальное значение диаметра d_0 или толщины плоского образца h_0 должно быть равно 3 мм.

Внешний вид различных образцов на растяжение приведен на рис. 4.



Рис. 4

Нагружающие устройства. Современные испытательные машины могут быть условно разделены на две группы: электромеханические и гидравлические. В электромеханических машинах перемещение захватов (обычно одного захвата) происходит с использованием винтовых, червячных, шестеренчатых и пр. передач. Такие машины имеют электродвигатель с управлением, которое позволяет изменять скорость движения траверсы в широких пределах и поддерживать заданную скорость с высокой точностью. В гидравлических машинах перемещение захватов происходит с помощью гидроцилиндра.

Испытательные машины этих двух типов выпускаются многими фирмами (Instron, MTS, Shenck, Zwick и др.). Машины различаются максималь-

ными нагрузками, размером рабочей области, в которой располагается испытуемое изделие, и комплектацией. Все современные машины состоят из силового блока, компьютера и согласующего устройства, которое связывает компьютер с силовым блоком и обеспечивает съём данных и управление перемещением захватов по заданной программе. Программа эксперимента может осуществляться по перемещениям (деформациям) или по усилиям. В первом случае реализуется заданная скорость движения траверсы (например, циклы по деформациям, растяжение образца с заданной скоростью, эксперименты на релаксацию), а во втором случае – заданные нагрузки на образец. Электромеханические машины более удобны для проведения экспериментов по деформациям, причем заданная скорость деформирования может быть очень маленькой. Гидравлические машины позволяют проводить нагружение образца с существенно большей скоростью, например, осуществлять циклическое нагружение с частотой до 100 Гц.

Типичная схема электромеханической машины приведена на рис. 5. Машина имеет неподвижную замкнутую станину 1, подвижную траверсу 2, которая перемещается по двум ходовым винтам 3. Вращение винтов осуществляется электродвигателем 4 через редуктор 5 с переключаемой коробкой скоростей. Рабочей областью является все пространство от подвижной траверсы вверх до станины. В верхней части станины закреплен динамометр 6 с верхним захватом 8. На подвижной траверсе находится нижний захват. В захватах установлен образец 9 с закрепленным на нем навесным тензометром для измерения продольной деформации.

Данная работа практикума проводится на электромеханической машине «Testometric FS 150AX». Внешний вид установки приведен на рис.6. Испытательная машина состоит: из силовой рамы, подвижной и неподвижной траверс с захватами, электромеханического привода, пульта управления, видеокамеры “Tamron” MTV-13W1C, персонального компьютера с пакетом прикладных программ и комплекта сменных приспособлений и инструмента для обслуживания. Установка «Testometric FS 150AX» позволяет производить эксперименты на одноосное растяжение-сжатие образцов. Максимальная нагрузка 150kN, скорость перемещения подвижного захвата меняется от 0,001 до 500 мм/мин. Погрешность определения усилия составляет 0,4 %, разрешающая способность видеокadra 0,001 мм, а точность измерения при растяжении 0,01 мм.

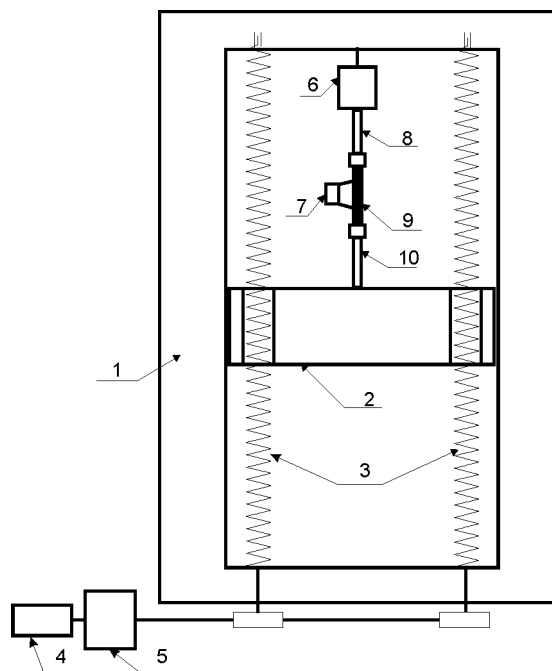


Рис. 5

Образцы для испытаний должны соответствовать ГОСТ 1497-84 (СТ СЭВ471-77) «Металлы. Методы испытаний на растяжение».

Рекомендуемая длина контрольной зоны образца при работе на испытательной машине с видеокамерой MTV-13W должна быть равна 40...50 мм, поэтому при испытании на растяжение длина образца L_1 с учетом длины зоны захвата зажимными губками должна быть не менее 100...120мм (рис. 7).

Для устранения проскальзывания образцов в захватах необходимо выбрать из комплекта зажимные губки, соответствующие типу и толщине материала:

- для тонких образцов (толщиной менее 0,5...0,8 мм) рекомендуется внутреннюю поверхность зажимных губок облицовывать наждачной бумагой;
- для толстых образцов (толщиной более 1,0 мм) – используются зажимы с насечкой.

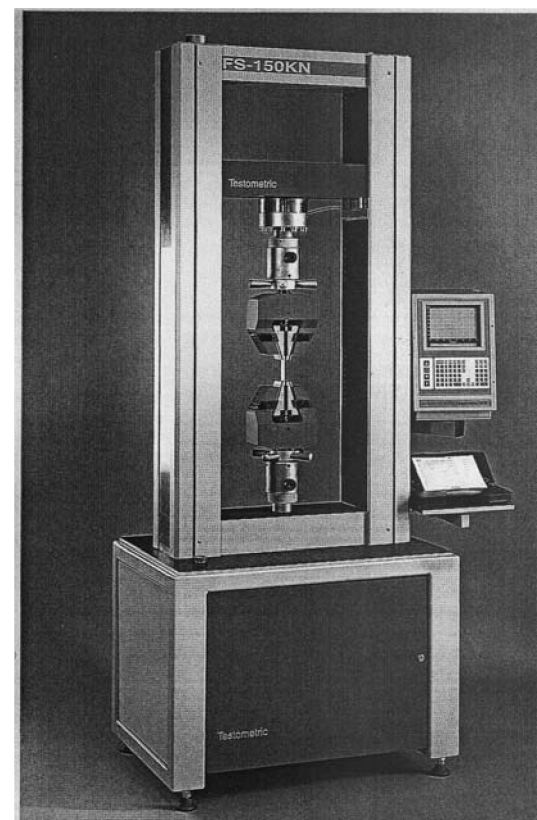


Рис. 6. Внешний вид основного блока и пульта управления испытательной машины Testometric FS 150

На участке контроля испытуемого образца нанести две контрастные линии на расстоянии 40...50 мм друг от друга (рис. 7).

Для получения высокой разрешающей способности видеокамеры линии должны быть нанесены под углом 30...40° относительно нормали к оси образца. Края линий должны иметь четкие границы. Линии наносятся маркером или выполняются из клеящейся черной или белой ленты шириной 3...5мм (темные полосы на светлом фоне образца или светлые полосы на темном фоне).

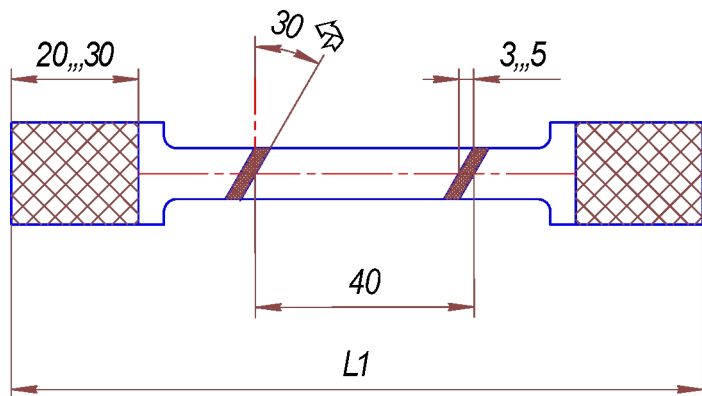


Рис. 7. Вид плоского образца для испытаний на растяжение

Для испытания круглых образцов в качестве линий базирования рекомендуется использовать канцелярские скрепки зажимного типа. Скрепки устанавливаются на образец через резиновые кольца (прокладки) диаметром 0,8...1,5 мм (рис. 8). Резиновые кольца служат центрирующими прокладками между корпусом скрепки и образцом, обеспечивая контакт скрепки по образующей линии цилиндрической части образца.



Рис. 8. Вид круглого образца с контрольными скрепками

Проволочные рычаги зажимов служат контрольными полосами, которые контрастно выделяются на темном фоне корпуса зажима. Они располагаются в одной плоскости по отношению друг к другу и направлены перпендикулярно к источнику света. При этом нужно затемнить одну пару параллельных полос, например, клеящейся темной лентой.

После включения испытательной машины необходимо включить компьютер и подождать пока загрузится программа Windows. Далее последовательно выполняются следующие действия:

1. Подключается режим ручного теста на панели пульта управления машиной кнопкой F1 (на дисплее в верхнем окне высвечивается надпись «Ручной тест»).

2. На машине Testometric FS150AX изготовителем предусмотрена установка нижней и верхней границы перемещения траверсы. Во избежание случайного повреждения захватов при перемещении траверсы вниз не следует устанавливать границу нижнего предела менее 350 мм. Оптимальное значение нижней границы при испытании плоских образцов ~ 400 мм.

Установка значений нижней и верхней границы перемещения траверсы производится в режиме редактирования на пульте управления машиной по схеме:

- отключить кнопку «●●▶» режима ускоренного перемещения (индикатор не светится);
- установить режим редактирования кнопкой F3;
- перемещая курсор на дисплее пульта, используя кнопки «←», «↓», «→», «↑», выбрать окно «A↓=000,0»;
- установить цифровое значение нижнего предела в окне «A↓=xxx,x»;
- сохранить введенное значение кнопкой «↓» (enter).
- аналогичным образом устанавливается верхняя граница перемещения траверсы в окне «A↑=XXX,X».

3. Установка сменных зажимных губок в захваты траверсы:

- ослабить два винта с накаткой, фиксирующие зажимные губки на корпусе захватов;
- выдвинуть ограничительные пластины и вынуть ранее установленные зажимные губки;
- установить необходимые зажимные губки в пазы захватов;
- вдвинуть пластины до упора и завернуть винты.

4. Установка образцов в зажимах.


4.1 Закрепить образец на неподвижном (нижнем) захвате вертикально таким образом, чтобы контрольная линия базы измерения на образце выступала за границы захвата не менее чем 10мм. Образец зажимается

поворотом штурвала на нижней траверсе против направления часовой стрелки.

4.2. Позиционирование верхней траверсы для зажима образца:

- включить кнопку режима ускоренной подачи «●●▶» (при этом в поле кнопки светится индикатор);
- сбросить предыдущий режим кнопкой стоп «■» (красного цвета);
- установить режим подачи траверсы: вверх – кнопкой «▲» или вниз – кнопкой «▼» (в поле кнопок включается световой индикатор красного цвета);
- подвести верхнюю траверсу к образцу кнопкой ускоренной подачи «◀◀» (красного цвета)

4.3 До закрепления образца в захватах верхней траверсы нажать

кнопку «» для сброса показаний индикатора нагрузки на ноль. Закрепить образец в зажиме верхней траверсы, вращая рукоятку штурвала по часовой стрелке.

4.4. Ввести значения нижнего предела перемещения траверсы в окне дисплея «A↓=000,0» по схеме:

- отключить кнопку «●●▶» режима ускоренного перемещения (индикатор не светится);
- установить режим редактирования кнопкой F3;
- перемещая курсор на дисплее пульта, используя кнопки «←», «↓», «→», «↑», выбрать окно «A↓=000,0»;
- установить цифровое значение нижнего предела в окне «A↓=xxx,x», равное значению начального положения траверсы в окне «A=xxx,x»;
- сохранить введенное значение кнопкой «↓» (enter).

4.5. Переключить кнопкой F1 режим работы испытательной машины на управление внешним компьютером. В верхнем окне дисплея появится надпись “Test PC”.

4.6. Запустить на компьютере прикладную программу: «Пуск» > «стандартные» > WinTest (в случае появления табло предупреждения об ошибке, снять табло - «ОК»). Подождать 2...5 сек., пока не загрузится программа.

4.7. Открыть окно программы “Videotensometer GN”. На экране появляется изображение образца с контрольными линиями базы измерений.

Проверить расположение образца на экране дисплея. Контрольная зона образца должна располагаться по возможности в центре экрана. Продольная ось образца должна быть параллельна прямоугольной рамке зеленого цвета.

5. Задание исходных параметров испытаний.

5.1. Установка начальных параметров (рис. 9).

В окне программы “Win Test” выбрать команду - **Задание теста > Создать**.

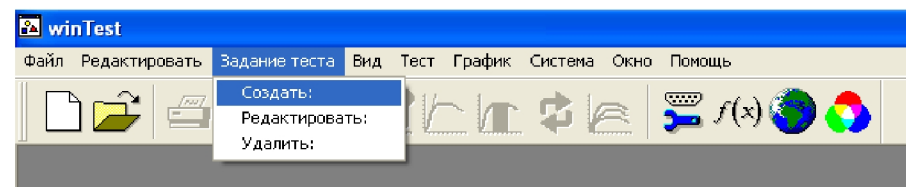


Рис. 9. Запуск программы установки начальных параметров

5.2. В окне «Создать название теста» :

- вписать название, которым будут озаглавлены все проводимые вами испытания, при этом в окне требуется последовательно заполнить закладки: **Параметры теста, Вычисления, Задаваемые привязки, Компоновка графика, Настройка тестера.**

5.3. Установить параметры в закладке «Параметры теста» (рис. 10):

- в окне «Тип теста» выбрать – Растяжение;
- в окне «Тип образца» – прямоугольный (для плоских образцов) или кольцевой (для круглых образцов);
- указать длину измеренной базы образца (50,00) и единицу измерения (мм);
- указать величину предварительного нагружения (для выбора люфта и изгиба образца) и единицу измерения, например, – 50,00 N;

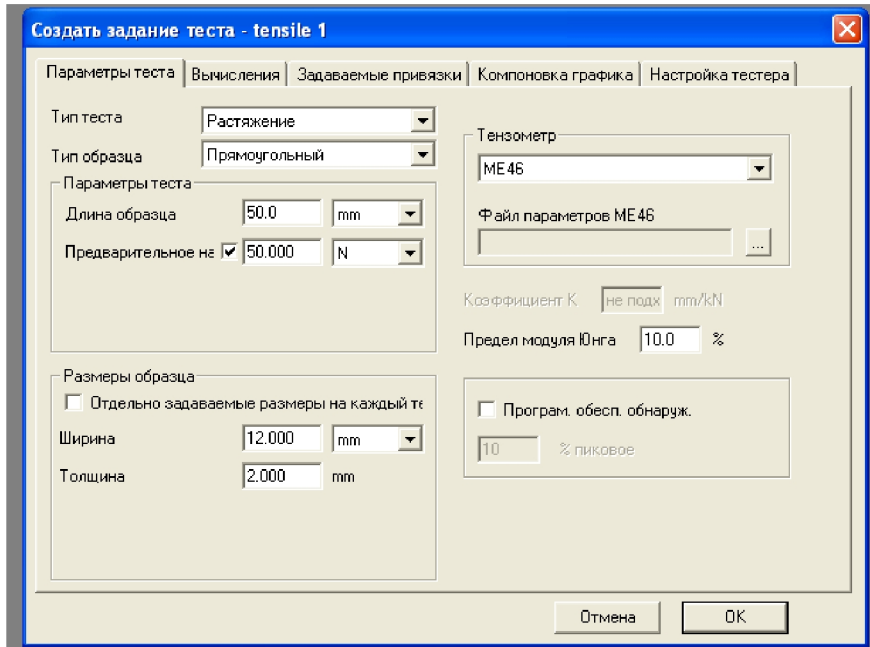


Рис. 10. Ввод данных «параметры теста»

- указать **ширину и толщину** - для плоского образца и единицу измерения или **диаметр** - для кольцевого образца и единицу измерения;
- указать тип тензодатчика усилия в окне «Тензометр» - ME 46;
- указать предел модуля Юнга (обычно 10%);
- переход к следующей закладке, не исполняя команды ОК.

5.4. Открыть закладку «Вычисления».

На закладке «Вычисления» устанавливаются параметры, численные значения которых будут рассчитаны и выведены автоматически после завершения тестового испытания образца. Порядок ввода параметров вычислений:

- задать первый параметр через команду «Редактировать столбец»;
- в окне «Столбец 1» выбрать из списка значение параметра и единицы измерения. Например: «максимальная деформация», «%».
- фиксировать параметр в окне «Столбец 1» > ОК.

Аналогично выбираются другие необходимые параметры вычислений. В последующем результаты вычислений могут быть выведены на печать отдельно в виде списка или совместно с графиком.

Результаты могут быть представлены на мониторе или сохранены в различных видах: зависимость деформации от напряжения или удлинение-усилие, усилие-время (рис. 11-13).

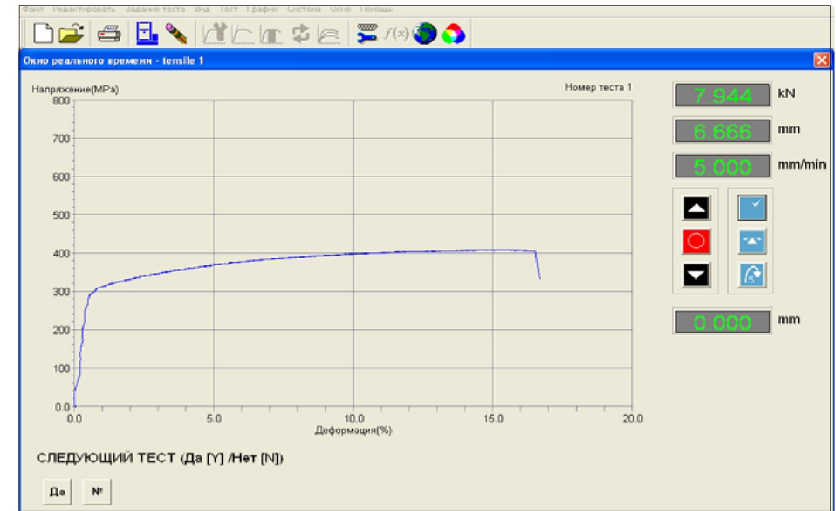


Рис. 11. График зависимости деформации от напряжения

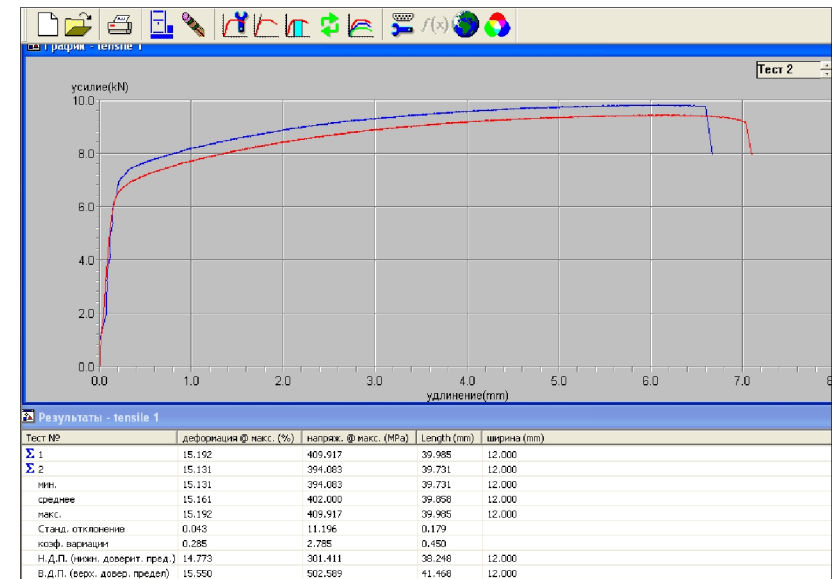


Рис. 12. График зависимости удлинения от усилия

Задача № 2

ПЛАСТИЧНОСТЬ МЕТАЛЛОВ ПРИ СЛОЖНОМ НАГРУЖЕНИИ

Цель работы. Ознакомление с методикой проведения экспериментов на сложное нагружение тонкостенных (толстостенных) трубчатых и сплошных цилиндрических образцов; экспериментальная проверка основных гипотез теории упругопластических процессов; сопоставление результатов эксперимента на сложное нагружение с расчетами по одному из вариантов теории пластичности.

1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Рассматривается упругопластическое поведение первоначально-изотропного металла при комнатной температуре в условиях однородного напряженно-деформированного состояния, не являющегося одноосным. Отметим некоторые особенности такого нагружения, специфические по отношению к одноосному нагружению. Процесс изменения напряжений σ_{ij} в элементе тела назовем процессом нагружения, а процесс изменения деформаций ε_{ij} - процессом деформирования. Эти процессы можно представлять некоторыми кривыми - траекториями напряжений и деформаций в соответствующих фазовых пространствах (пространство напряжений Π_σ , пространство деформаций Π_ε). Одноосному нагружению или деформированию соответствуют прямолинейные траектории напряжений и деформаций в пространствах $\Pi_\sigma, \Pi_\varepsilon$. Пределу упругости на одноосной диаграмме (σ_s на диаграмме растяжения или сжатия $\sigma \square \varepsilon$ и τ_s на диаграмме сдвига $\tau \square \gamma$) соответствует целая поверхность в пространстве напряжений Π_σ , называемая начальной поверхностью нагружения (начальной поверхностью текучести). При движении конца вектора напряжений (изображающей точки в Π_σ) внутри этой поверхности происходит чисто упругое деформирование, пластических деформаций не возникает; это называется пассивным

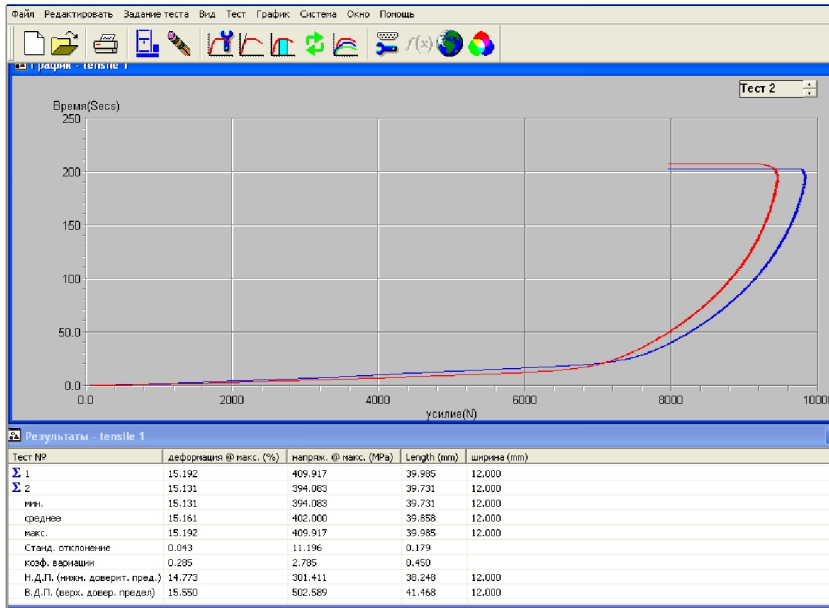


Рис. 13. График в координатах усилие-время

3. ПОРЯДОК ПРОВЕДЕНИЯ РАБОТЫ И ОФОРМЛЕНИЯ ОТЧЕТА

1. Проводится эксперимент на растяжение цилиндрического образца до разрушения. Удлинение измеряется видеоэкстензометром. Автоматически строятся диаграммы зависимостей параметров процесса.
2. Демонстрируется на компьютере виртуальный эксперимент на растяжение цилиндрического образца. Исследуется зависимость размеров области однородного напряженно-деформированного состояния от геометрии образца.
3. Отчет по задаче должен содержать:
 - диаграмму растяжения;
 - вычисленные значения модулей упругости;
 - зависимость коэффициента поперечной деформации ν^* от ε_{11} ;
 - вычисленные значения $\sigma_s, \sigma_\varepsilon, \sigma_{разр}$;
 - диаграмму $\sigma_u \square \varepsilon_u$;
 - информацию о результатах виртуального эксперимента на растяжение (зона однородного НДС в образце).

нагрузением. Движению по поверхности нагружения соответствует нейтральное нагружение. Выход за поверхность - активное нагружение - приводит к появлению необратимых пластических деформаций. Согласно концепции о существовании поверхности нагружения, каждой точке произвольной траектории напряжений в Π_σ отвечает своя поверхность нагружения, причем в случае активного или нейтрального нагружения конец вектора напряжений лежит на этой поверхности, а в случае пассивного нагружения (разгрузки) - внутри этой поверхности.

Описанная схема обобщения свойств упругопластического материала, наблюдаемых в одноосном случае, на случай сложного напряженного состояния отнюдь не решает проблемы построения определяющих соотношений. Специфика поведения материала при сложном напряженном состоянии заключается в том, что совершенно нетривиальным становится вопрос о соответствии траекторий нагружения и деформирования. Особое положение занимает выделенный А.А.Ильюшиным класс простых нагружений [1] - для них с достаточной для практики точностью выполняется теория малых упругопластических деформаций, соотношения которой конкретизируются на основании результатов одноосного эксперимента. Определяющие соотношения, столь же надежно описывающие процесс произвольного сложного нагружения, еще не сформулированы. Существует несколько подходов к построению таких соотношений.

Наиболее известный в расчетной практике подход базируется на теории течения [2], в которой понятие поверхности нагружения (поверхности текучести) играет фундаментальную роль. Из постулата Драккера или из более общего постулата пластичности А.А. Ильюшина следует, что поверхность нагружения для любой точки в пространстве Π_σ является невогнутой (если не учитывать изменение упругих свойств при пластической деформации). Кроме того, вектор приращения пластической деформации в регулярной точке поверхности нагружения $f = 0$ направлен по ее внешней нормали (принцип градиентальности), а в особой точке лежит внутри или на границе конуса крайних внешних нормалей. Функции f помимо напряжений σ_{ij} зависят от пластических деформаций ε_{ij}^p и некоторых параметров χ_k^p , отражающих историю изменения пластических деформаций. Для упроч-

няющегося материала соотношения классической теории течения имеют вид (для гладкой поверхности $f = 0$ с упругой областью $f < 0$):

$$d\varepsilon_{ij}^p = Hdf \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \quad df \equiv \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij};$$

$$H = 0, \quad \text{если } f < 0 \text{ или } f = 0, \quad df \leq 0;$$

$$H > 0, \quad \text{если } f = 0, \quad df > 0. \quad (1)$$

Объектами экспериментальных исследований в теории течения являются поверхность нагружения (начальная и последующие), закон градиентальности, функция упрочнения H в (1). Поскольку в настоящей работе не проводятся такие исследования, приведем лишь два частных наиболее известных вида соотношений (1), которые можно использовать для расчетов.

Если аргументами функции f являются только параметры

$$\sigma_u = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}} \quad \text{и} \quad s^p = \int \sqrt{\frac{2}{3} d\varepsilon_{ij}^p d\varepsilon_{ij}^p},$$

где s_{ij}, ε_{ij} - девиаторы тензоров $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$, то записывая f в форме $f = \varphi(\sigma_u) - s^p$ и используя (1) и условие непрерывности изменения поверхности нагружения $\varphi'(\sigma_u) d\sigma_u - ds^p = 0$ можем получить

$$d\varepsilon_{ij}^p = \frac{3}{2} \frac{\varphi'(\sigma_u)}{\sigma_u} s_{ij} d\sigma_u, \quad d\sigma_u \geq 0, \quad d\varepsilon_{ii}^p = 0. \quad (2)$$

Соотношения (2) отвечают закону изотропного расширения начальной поверхности нагружения $\sigma_u = \sigma_s$, а функция $\varphi(\sigma_u)$ может быть определена из любого одноосного эксперимента.

Другой простой закон изменения поверхности нагружения представляет так называемое трансляционное упрочнение, когда начальная поверхность нагружения $\sigma_u = \sigma_s$ испытывает только чистый перенос в Π_σ , не изменяя формы и размеров. Записывая в этом случае f в виде

$$f \equiv (s_{ij} - a\varepsilon_{ij}^p)(s_{ij} - a\varepsilon_{ij}^p) - c^2,$$

где a и c - постоянные, приходим к соотношениям:

$$d\varepsilon_{ij}^p = \frac{1}{ac^2} (s_{ij} - h\varepsilon_{ij}^p) (s_{mn} - h\varepsilon_{mn}^p) ds_{mn}. \quad (3)$$

Следует отметить, что эти соотношения в одномерном случае соответствуют диаграмме $\sigma \square \varepsilon$ или $\tau \square \gamma$ с линейным упрочнением (теория идеального эффекта Баушингера с линейным упрочнением).

Обратимся к теории упругопластических процессов А.А. Ильюшина. Теоретическое представление процессов производится в этой теории следующим образом. Компонентам девиаторов напряжений $s_{ij} = \sigma_{ij} + p\delta_{ij}$, $p = -\sigma_{ii}/3$, и деформаций $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon\delta_{ij}$, $\varepsilon = \varepsilon_{ii}/3$, ставится в соответствие по пять независимых величин σ_k, ε_k ($k=1, \dots, 5$), линейно и взаимоднозначно выражающихся через s_{ij} и ε_{ij} :

$$\sigma_1 = \sqrt{3} \left(s_{11} \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \quad \sigma_2 = \sqrt{3} \left(s_{11} \frac{1}{2} + s_{22} \right) \\ \sigma_3 = \sqrt{3}s_{12}, \quad \sigma_4 = \sqrt{3}s_{23}, \quad \sigma_5 = \sqrt{3}s_{13}, \quad (4)$$

$$\varepsilon_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\varepsilon_{11} \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \quad \varepsilon_2 = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\varepsilon_{11} \frac{1}{2} + \varepsilon_{22} \right); \\ \varepsilon_3 = \frac{2}{\sqrt{3}} \varepsilon_{12}, \quad \varepsilon_4 = \frac{2}{\sqrt{3}} \varepsilon_{23}, \quad \varepsilon_5 = \frac{2}{\sqrt{3}} \varepsilon_{13}, \quad (5)$$

так что

$$\sigma_k \sigma_k \equiv \frac{3}{2} s_{ij} s_{ij} \equiv \sigma_u^2, \\ \varepsilon_k \varepsilon_k \equiv \frac{2}{3} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} \equiv \varepsilon_u^2. \quad (6)$$

Вводятся евклидовы пространство напряжений Σ_5 (вектор напряжений $\vec{\sigma} = \sigma_k \vec{e}_k$ имеет компоненты σ_k) и пространство деформаций \mathcal{E}_5 (вектор деформаций $\vec{\varepsilon} = \varepsilon_k \vec{e}_k$ имеет компоненты ε_k) с ортонормированными базисами \vec{e}_k . Переход к девиаторам объясняется тем, что, во-первых, для большинства металлов вплоть до весьма больших значений гидростатического давления p изменение объема происходит упруго; во-вторых, в экспериментах можно p отнести к числу задаваемых параметров процесса.

Совокупность траектории деформаций, построенных в каждой ее точке векторов напряжений $\vec{\sigma}$, пластических деформаций $\vec{\varepsilon}^p$ и других физических векторов, приписанных к каждой ее точке значений температуры T , гидростатического давления p , скорости деформации $\dot{s} = ds/dt$ (s - длина дуги траектории деформаций: $s = \int |d\vec{\varepsilon}|$) и других физических скалярных параметров называется образом процесса нагружения в пространстве деформаций \mathcal{E}_5 . Фундаментальное значение в теории упругопластических процессов имеет постулат изотропии, утверждающий что образ процесса нагружения в \mathcal{E}_5 инвариантен относительно ортогональных преобразований (вращения и отражения). Из постулата изотропии следует, что вектор напряжений $\vec{\sigma}$ полностью определяется только внутренней геометрией траектории деформаций $\vec{\varepsilon}(s)$ и законами изменения скалярных параметров $p(s), T(s), \dot{s}(s)$ вдоль этой траектории деформаций. К настоящему времени постулат изотропии получил широкое экспериментальное обоснование; показано, что он выполняется с такой же точностью, как теория малых упругопластических деформаций при простом нагружении.

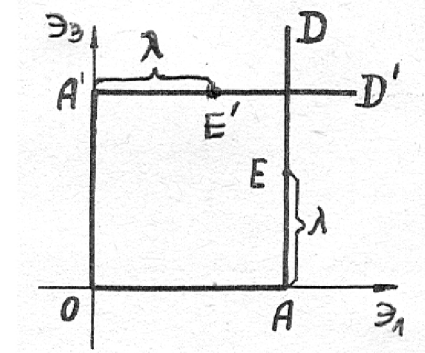


Рис.1

На рис.1 представлен простейший опыт по проверке постулата изотропии. Если $OA = OA'$ и во всех точках траекторий деформаций OAD и $OA'D'$ с равными значениями длины дуги s одинаковы величины скаляр-

ных параметров T, p, \dot{s} , то модули σ_u векторов напряжений $\vec{\sigma}$ и их углы наклона ϑ к траектории деформаций в этих точках траекторий деформаций также одинаковы.

На основании постулата изотропии определяющие соотношения (для девиаторов) записываются в виде:

$$\vec{\sigma} = A_k \vec{p}_k = \sigma_u \cos \vartheta_k \vec{p}_k, \quad k = 1, \dots, 5, \quad (7)$$

где $A_k, \sigma_u, \vartheta_k$ - функционалы пластичности от параметров кривизны $\kappa_1(s), \dots, \kappa_4(s)$ траектории деформаций и скалярных параметров $s, T(s), p(s), \dot{s}(s)$; \vec{p}_k - векторы локального сопровождающего репера Френе, построенного на траектории деформаций. Упрощение в структуру функционалов $A_k, \sigma_u, \vartheta_k$ вносит принцип запаздывания векторных свойств, утверждающий, что ориентация вектора $\vec{\sigma}$ в репере Френе $\langle \vec{p}_k \rangle$, задаваемая углами ϑ_k , определяется не всей историей процесса, а лишь некоторым конечным (активным) участком траектории деформаций, непосредственно предшествующим данному моменту. Длина этого участка λ называется следом запаздывания и является основным линейным масштабом процесса сложного нагружения. Применительно, например, к эксперименту *OAD* на рис.1 принцип запаздывания означает, что после прохождения пути *AE* длиной λ (после точки *A* излома траектории деформаций) на участке *AD* вектор $\vec{\sigma}$ «забудет» предысторию и его направление будет совпадать с направлением *AD* (начиная с точки *E*).

2. АППАРАТУРА. ОБОРУДОВАНИЕ. МЕТОДИКА ПРОВЕДЕНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА

Стандартный образец для проведения экспериментов на сложное нагружение - тонкостенный трубчатый образец. При нагружении его осевой силой P , внутренним давлением q и крутящим моментом M в нем реализуется приблизительно однородное напряженно-деформированное состояние (обобщенное плоское напряженное состояние):

$$\sigma_{zz} = \left(P + \frac{\pi}{4} d^2 q \right) / F, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{R_{cp}}{h} q,$$

$$\sigma_{\varphi z} = M / FR_{cp}, \quad F = 2\pi R_{cp} h,$$

$$\sigma_{rr} \approx 0, \quad \sigma_{r\varphi} = \sigma_{rz} = 0, \quad (8)$$

$$R_{cp} = \frac{D-h}{2}, \quad h = \frac{D-d}{2},$$

где D - наружный, d - внутренний диаметры образца. Отличные от нуля компоненты деформации - $\varepsilon_{zz}, \varepsilon_{\varphi\varphi}, \varepsilon_{rr}, 2\varepsilon_{\varphi z} = \gamma_{\varphi z}$, причем величина ε_{rr} не измеряется непосредственно в эксперименте, а вычисляется или из условия несжимаемости: $\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{zz} = 0$ или, что более реалистично, из условия упругого изменения объема:

$$\varepsilon_{ii} = \frac{1}{3K} \sigma_{jj}, \quad (9)$$

где K - модуль объемного сжатия.

Трубчатые образцы испытываются на специальных установках для сложного нагружения (фирм Instron, MTS, MFL и других), имеющих различную степень автоматизации управления процессом испытания, регистрации результатов и их обработки. В данном случае такие испытания проводятся на установке ЦДМУ-30 с модернизированной системой регистрации. При работе на установке ЦДМУ-30 задание осевого перемещения одного захвата и угла закручивания другого захвата производится посредством автоматизированных управляемых электроприводов. Измерение осевой силы P и крутящего момента M производится двухкомпонентным тензометрическим динамометром. Измерение деформаций $\varepsilon_{zz}, \gamma_{\varphi z}, \varepsilon_{\varphi\varphi}$ осуществляется электромеханическими тензомерами. Деформация $\varepsilon_{\varphi\varphi} = \Delta D / D$ регистрируется тензомером с чувствительными элементами в виде скобки. Деформации $\varepsilon_{zz} = \Delta l / l, \gamma_{\varphi z} = \Delta l_{\varphi} / l$ (l - база, Δl - удлинение на базе, Δl_{φ} - тангенциальное смещение на базе) регистрируются двумя

двухкомпонентными тензомерами, которые навешиваются на штангу, жестко закрепленную на одном из захватов установки, и опираются упорными штифтами (иглами) в образец. Расстояние между точками опоры штифтов образует базу l , величины Δl и Δl_φ определяются как разности смещений концов упорных штифтов этих тензомеров.

Подготовка эксперимента включает в себя: измерение размеров трубчатого образца на специальном приспособлении (определение D, h), определение твердости на головке образца, разработку программы ведения эксперимента по заданной траектории деформаций.

Типичная задаваемая траектория деформаций - двухзвенная ломаная (смотри рис.1), например, растяжение образца до значения $\varepsilon_1 = \varepsilon_1^0$, затем кручение образца при $\varepsilon_1 = \text{const} = \varepsilon_1^0$ или совместное растяжение и кручение образца такое, что после точки А направление $\Delta \bar{\varepsilon} \equiv \bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}_A$ было постоянным. Вторая задаваемая траектория деформаций должна иметь ту же внутреннюю геометрию, что и первая (например, как траектория $OA'D'$ по отношению к траектории OAD на рис.1).

3. ТРЕБОВАНИЯ К ОТЧЕТУ

Отчет должен содержать формулировки постулата изотропии и принципа запаздывания с примерами типичных экспериментов; сведения об испытанных образцах (марка материала, твердость, размеры) и о средствах регистрации усилий и деформаций; схему размещения тензомеров и наклеенных тензорезисторов на образце; все первичные данные экспериментов; вычисленные значения

$$\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}, \sigma_k, \varepsilon_k, \vartheta_1 = \arccos \frac{\bar{\sigma} d\bar{\varepsilon}}{\sigma_u ds}, \sigma_u, \varepsilon_u, s;$$

графики $\sigma_u \square s$, $\sigma_u \square \varepsilon_u$, $\vartheta_1 \square s$; образы процессов; расчеты (если они предусмотрены заданием руководителя) на основании вариантов теории течения (2) или (3); заключение о подтверждении (или невыполнении) принципа запаздывания и постулата изотропии в выполненных экспериментах.

Список литературы

1. Ильюшин, А.А. Пластичность. Основы общей математической теории / А.А. Ильюшин. М.: Наука, 1963.
2. Ключников, В.Д. Математическая теория пластичности / В.Д. Ключников. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1979.
3. Васин, Р.А. Некоторые вопросы связи напряжений и деформаций при сложном нагружении. Упругость и неупругость / Р.А. Васин. Вып.1, М.: Изд-во Моск. ун-та, 1971. С. 59-126.
4. Писаренко, Г.С. Деформирование и прочность материалов при сложном напряженном состоянии / Г.С. Писаренко, А.А. Лебедев. Киев: Наук. думка, 1976.
5. Лебедев, А.А. Методы механических испытаний материалов при сложном напряженном состоянии / А.А. Лебедев. Киев: Наук. думка, 1976.

Задача № 3

МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕЗИНОКОРДА

Цель работы:

1. Изучение механических свойств резинокорда.
2. Определение модуля Юнга и других упругих констант резинокордного композита при помощи опытов на одноосное растяжение симметричного двухслойного образца.

1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Общие сведения

Композиционные материалы в настоящее время широко применяются в технике и строительстве. Композиционным или композитом называется материал, полученный из нескольких однородных материалов. Целью создания различных композиций является стремление улучшить термомеханические или другие физические свойства. Например, можно добиться высокой прочности при малом весе или низкой теплопроводности при малой толщине.

Вначале композиты начали применяться в авиастроении, где важно добиваться экстремальных свойств используемых материалов. Однако существуют примеры композиционных материалов, используемых с древних времен. Таковым является материал, получаемый из глины, упроченной тростником или соломой. Современным примером композита, используемого в строительстве, является всем хорошо известный железобетон.

Примеров можно приводить множество. В настоящей задаче изучаются свойства композита, называемого резинокордным, т.е. полученного композицией резины и кордных нитей. Резинокордные композиты имеют различные технические приложения, но наиболее широко применяются в пневматических шинах. Шина, несмотря на кажущуюся простоту конструкции, является высокотехнологичным изделием, имеет сложную внутреннюю структуру и состоит из слоев резины и резинокорда. Внутренняя структура радиальной шины показана на рис. 1. Легко видны резинокордные слои, причем угол между направлением корда и окружным направлением (кордный угол, обозначаемый далее φ) меняется от слоя к слою.



Рис. 1а. Разрез пневматической шины

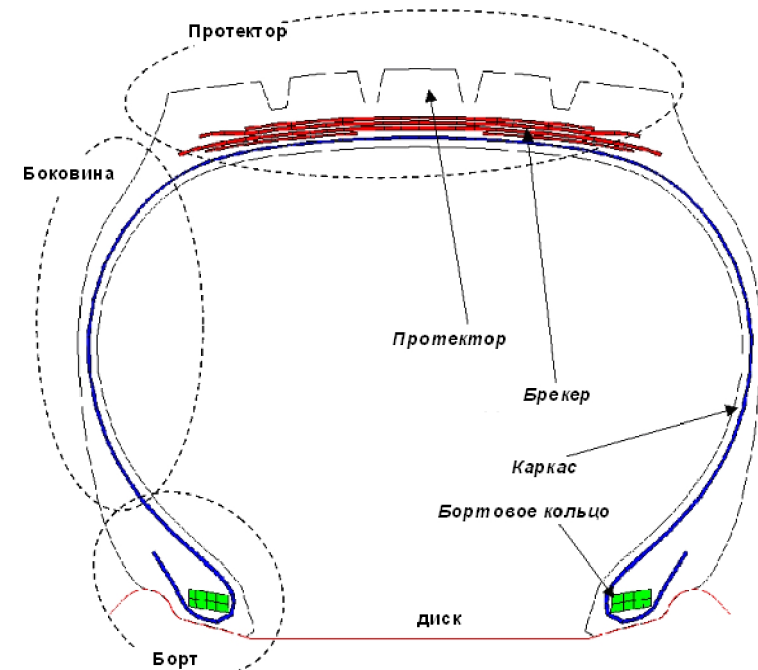


Рис. 1б. Схематическое изображение структуры пневматической шины

Резинокорд представляет собой волокнистый двухкомпонентный композит, составленный из высокоэластического связующего (резины) и корда. Резину изготавливают на основе различных каучуков как синтетических (изопреновые, бутадиен-стирольные, бутадиеновые, бутилкаучуковые), так и натурального. В качестве корда применяют полиэфирный, вязкозный, полиамидный корд и металлокорд. Именно резинокордные слои являются основным материалом для изготовления пневматических шин.

Сложные для математического описания свойства резинокорда обусловлены следующими причинами: резинокорд является сильно неоднородным и сильно анизотропным материалом, обладает вязкоупругими свойствами. Сильная неоднородность означает, что механические свойства корда и резины отличаются в тысячи и сотни раз (в зависимости от типа корда). В свою очередь сильная анизотропия означает, что свойства резинокорда (например, модуль Юнга) по разным направлениям также отличается в сотни раз. К тому же, конструкция в целом допускает большие деформации, перемещения и повороты, вследствие чего свойства элементов шины следует описывать, используя теорию конечных деформаций.

Механическое поведение резинокорда зависит от скорости деформирования. Такое поведение называют вязкоупругим.

Обычно для испытания резинокорда на одноосное растяжение используют образцы, состоящие из двух слоев резинокорда, причем один из слоев имеет угол ϕ между направлением растяжения и направлением корда (кордный угол), а второй слой – угол $-\phi$ (рис. 2, 3). Этот угол может меняться в пределах от 0 до 90 градусов. Рис. 2, 3 дают лишь схематическое изображение резинокордного слоя. В действительности нити корда расположены гораздо чаще (расстояние между нитями около 1 мм). Частота расположения кордных нитей в резинокордном слое характеризуется объемной концентрацией корда, определяемой как отношение объема, занимаемого кордом, к объему слоя.



Рис. 2. Схематичное изображение резинокордного образца

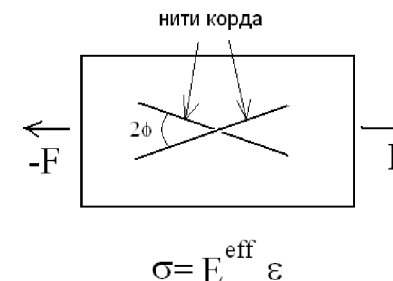


Рис. 3

Стандартный опыт на растяжение состоит в следующем. Образец резинокорда зажимают в захваты испытательной машины и осуществляют растяжение. В результате измеряется растягивающая сила F и удлинение образца $\Delta l = l - l_0$, равное разности текущей и начальной длин образца. По измеренным величинам можно вычислить растягивающее напряжение и деформацию удлинения: $\sigma = F/S$, $\epsilon = \Delta l/l_0$, где S - площадь поперечного сечения образца. Типичная зависимость $\sigma - \epsilon$ (напряжение – деформация) для двухслойного резинокорда показана на рис. 4. Как видно из этих графиков, поведение резинокорда отличается от упругого и, тем более, от линейно-упругого. Нагружение в данном опыте осуществлялось циклически, каждый цикл состоял из нагрузки и разгрузки. Как видно пути нагрузки и разгрузки не совпадают. Это явление называют гистерезисом. Образуется петля, площадь которой представляет собой механическую энергию, необратимо перешедшую в другие виды энергии. Для резинокорда считается, что вся механическая энергия переходит в тепло. Также можно заметить, что на первых циклах, происходит смещение петли гистерезиса вправо, однако после небольшого числа циклов процесс деформирования стабилизируется.

Для приведенных графиков петли стабилизируются, начиная с третьего цикла. Можно заметить, что существует некоторый диапазон деформаций, для которого зависимость напряжение - деформация является линейной, что оправдывает применение линейной теории упругости для решения ряда практических задач, в которых не требуется определять накопление тепла.

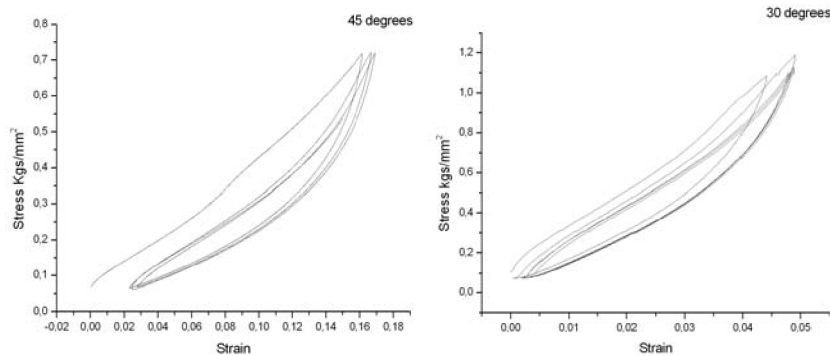


Рис. 4. Графики зависимости напряжение - деформация для углов армировки 30 и 45 градусов

Первой задачей является исследование линейной зависимости $\sigma = E^{eff} \varepsilon$. Модуль Юнга E^{eff} называется эффективным модулем Юнга и связывает среднее напряжение растяжения и среднюю деформацию удлинения. Здесь мы подошли к основным понятиям механики композитов: средним механическим величинам и эффективным свойствам. Приведенное выше описание эксперимента по существу дает экспериментальное определение средних величин деформации, напряжения и эффективного модуля жесткости (модуля Юнга). Теперь следует дать математические определения тех же понятий и разобраться, зачем они нужны на практике.

Как уже отмечалось, любой композит, в том числе и резинокорд, состоит из нескольких компонентов, причем они чередуются весьма часто (в отличие от того, как изображены нити корда на рис.2). Поэтому определение напряжений, деформаций и других механических и физических величин в каждом компоненте композита представляет собой сложную (однако решаемую) вычислительную проблему и, конечно, не может быть получено экспериментально. Поэтому возникло понятие средних по объему напряжений, деформаций и других физических величин.

Например, средние напряжения и деформации определяются следующим образом:

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij}(x) dV, \quad \langle \varepsilon_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon_{ij}(x) dV. \quad (1)$$

Предполагается, что объем V , по которому проводится осреднение, является представительным, т. е. содержит достаточно большое число компонентов композита. Кроме этого, предполагается, что материал находится в макрооднородном состоянии, что означает, что при увеличении объема, по которому производится осреднение, средние значения не изменяются. Средние величины, хотя и не дают точной информации о значениях тех же величин в компонентах, но позволяют существенно упростить расчет. Теория такого расчета называется теорией эффективного модуля и кратко сформулирована ниже. Идея состоит в замене реальной неоднородной среды однородной эквивалентной модельной средой.

В этой связи возникает вопрос: какое соотношение целесообразно установить между средними напряжениями и деформациями, если для компонентов композита справедлив закон Гука

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}(x) \varepsilon_{kl}. \quad (2)$$

В формуле (2) подчеркнута, что упругие модули композита различны в разных компонентах и, следовательно, зависят от координат, причем разрывным образом (функции $C_{ijkl}(x)$ являются разрывными). Другими словами, какие должны быть модули однородного модельного материала?

Разумно связать средние напряжения и деформации $\langle \sigma_{ij} \rangle$, $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$ такой зависимостью

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = C_{ijkl}^{eff} \langle \varepsilon_{kl} \rangle \quad (3)$$

чтобы упругая энергия W ,

$$2W = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij}(x) \varepsilon_{ij}(x) dV = \frac{1}{V} \int_V C_{ijkl}(x) \varepsilon_{ij}(x) \varepsilon_{ikl}(x) dV, \quad (4)$$

композита и энергия W^{eff} в модельной (эффективной) однородной среде с упругими модулями C_{ijkl}^{eff} ,

$$2W^{eff} = \langle \sigma_{ij} \rangle \langle \varepsilon_{ij} \rangle = C_{ijkl}^{eff} \langle \varepsilon_{ij} \rangle \langle \varepsilon_{ikl} \rangle, \quad (5)$$

были бы одинаковыми. Таким образом, эквивалентность понимается в смысле равенства энергий, а определяющим соотношением эффективного материала служит соотношение (3).

Эффективный материал является однородным, но анизотропным. Можно показать, что данное математическое определение эффективных

модулей и экспериментальное определение соответствуют друг другу: измеряемые в опыте на растяжение резинорorda напряжение σ и деформация ε являются средними по объему напряжением σ_{11} и деформацией ε_{11} : $\sigma = \langle \sigma_{11} \rangle$, $\varepsilon = \langle \varepsilon_{11} \rangle$. Таким образом, измеряемым в опыте является как раз эффективный модуль Юнга (при этом, конечно, следует учитывать только линейные участки зависимости напряжение-деформация). Далее, чтобы различать измеряемый модуль Юнга и вычисленный, мы первый будем обозначать как E^{exp} , а второй E^{eff} . Связь между эффективными модулями C_{ijkl}^{eff} и эффективным модулем Юнга состоит в следующем. Резинорord является ортотропным материалом, т.е. имеющим три плоскости симметрии упругих свойств. Число различных упругих модулей равно 9. Обратная зависимость $\langle \varepsilon_{ij} \rangle = J_{ijkl}^{\text{eff}} \langle \sigma_{kl} \rangle$ может быть записана в виде формулы (6):

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_2} & -\frac{\nu_{13}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{21}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{31}}{E_1} & -\frac{\nu_{32}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{12}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}, \quad (6)$$

причем $\frac{\nu_{12}}{E_2} = \frac{\nu_{21}}{E_1}$, $\frac{\nu_{13}}{E_3} = \frac{\nu_{31}}{E_1}$, $\frac{\nu_{23}}{E_3} = \frac{\nu_{32}}{E_2}$, а обозначение “eff” в (6) опущено для сокращения письма. Здесь $E_1 = [J_{1111}^{\text{eff}}]^{-1}$, $E_2 = [J_{2222}^{\text{eff}}]^{-1}$, $E_3 = [J_{3333}^{\text{eff}}]^{-1}$ – эффективные модули Юнга в трёх главных направлениях ортотропии, $\nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}, \nu_{31}, \nu_{32}, \nu_{21}$ – эффективные коэффициенты Пуассона, $G_{12} = J_{1212}^{\text{eff}}$, $G_{13} = J_{1313}^{\text{eff}}$, $G_{23} = J_{2323}^{\text{eff}}$ – эффективные модули сдвига. Для одноосного напряженного состояния (только $\sigma_{11} \neq 0$) зависимость приобретает вид $\varepsilon_{11} = \frac{1}{E_1^{\text{eff}}} \sigma_{11}$.

Закон Гука (3) или (6) записан для произвольного трехмерного напряженно-деформированного состояния. Однако резинорordные образцы, предназначенные для испытаний, представляют собой двухслойную пластину, находящуюся в плоском напряженном состоянии. Причем срединная плоскость образца не является плоскостью симметрии упругих свойств, как видно из рис. 5.

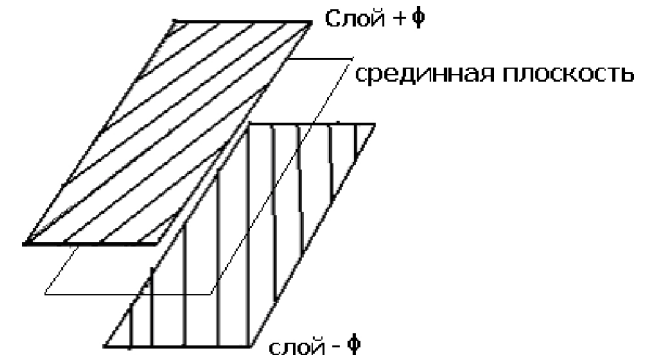


Рис. 5. Несимметричное расположение слоев корда относительно срединной плоскости

Данная несимметрия приводит к возникновению взаимного влияния растяжения, сдвига и кручения друг на друга.

Важным является вопрос о том, как можно получить эффективные характеристики среды. Все модули C_{ijkl}^{eff} (в отличие от E^{eff}) измерить невозможно. Поэтому важной целью механики композитов является задача **вычисления** эффективных модулей по заданным модулям компонентов. В зависимости от структуры композита эффективные модули могут быть вычислены приближенно с различными вычислительными затратами. Для слоистого материала эффективные модули находятся по точным формулам.

Для резинокорда разработано несколько приближенных подходов и формул для вычисления эффективных модулей. Детальное описание этих методов выходит за рамки данной работы, но самый простой способ описан ниже. Типичная зависимость эффективного модуля Юнга от кордного угла, вычисленная по разным методам, показана на рис. 6.

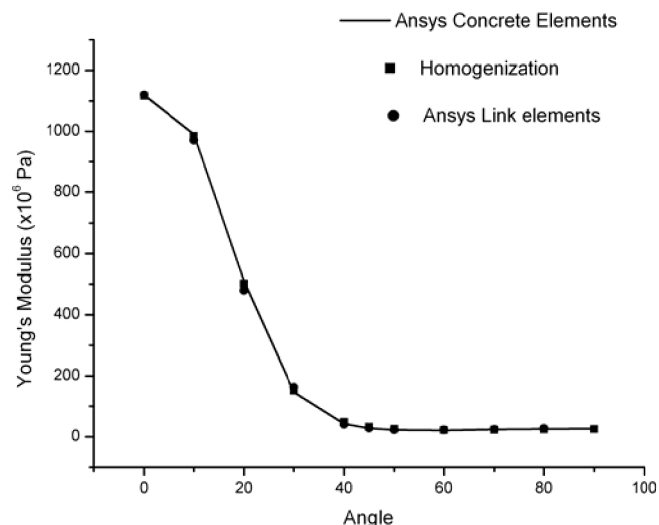


Рис. 6. Типичная зависимость эффективного модуля резинокорда от кордного угла

Рассмотрим теперь подробнее вывод определяющего соотношения для двухслойного резинокорда. Схема вычисления эффективных модулей состоит в следующем. Резинокорд имеет две иерархии структуры, а именно он может рассматриваться как слоистый композит, а слои являются волокнистыми однонаправленными материалами. Это схематично показано на рис. 7

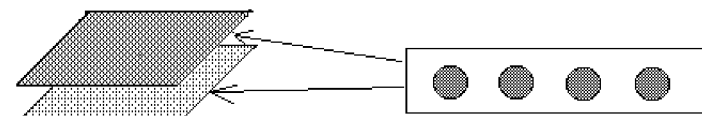


Рис. 7. Иерархия структуры резинокорда: на первом уровне материал является слоистым, а каждый слой является волокнистым композитом (второй уровень структуры)

Эффективные механические характеристики резинокорда определяются свойствами его компонент. Схема расчета эффективных модулей при плоском напряженном состоянии, учитывающая иерархию структуры, состоит, во-первых, в расчете эффективных модулей слоя как волокнистого композита (1-й этап) и, во-вторых, в осреднении слоев как слоистого композита (2-й этап).

Величины, которые характеризуют геометрию слоя резинокорда, изображены на рис. 8. Речь идет о его толщине и о параметрах корда, т. е. диаметре, шаге и кордном угле. Договоримся, что угол будет считаться положительным, когда при взгляде на шину снаружи нити корда расположены, как показано на схеме. Угол будет отрицательным при конфигурации, симметричной данной по отношению к направлению x . Пусть E_L и E_T – эффективные модули Юнга слоя резинокорда вдоль нитей и в направлении, перпендикулярном нитям корда. Эти две величины рассчитываются с учетом модуля корда E_c , модуля резины E_g , а также концентраций корда и резины γ_c и γ_g . Последние определяются следующим образом:

$$\gamma_c = \frac{\pi \varphi_E^2}{4ph} \quad (7)$$

$$\text{и } \gamma_g = 1 - \gamma_c = \frac{4ph - \pi \varphi_E^2}{4ph}.$$

Модули E_L и E_T можно приближенно определить по правилу смеси:

$$E_L = E_c \gamma_c + E_g \gamma_g, \quad (8)$$

$$\frac{1}{E_T} = \frac{\gamma_c}{E_c} + \frac{\gamma_g}{E_g}.$$

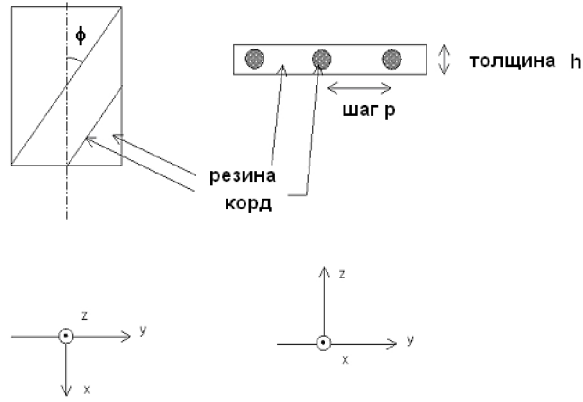


Рис. 8

Первая формула выводится из предположения об одинаковости деформации в обоих компонентах композита, вторая – из предположения об одинаковости напряжения. Первая формула дает хорошую точность для малых концентраций корда γ_c , точность второй формулы хуже. Поэтому для вычисления модуля E_T были предложены уточнения. Одна из таких формул, предложенная Акасака, имеет вид

$$\frac{1}{E_T} = \frac{\gamma_c}{E_c} + \frac{\gamma_g}{E_g} - \gamma_c \gamma_g \frac{\left(\frac{\nu_g}{E_g} - \frac{\nu_c}{E_c} \right)^2}{\frac{\gamma_c}{E_g} + \frac{\gamma_g}{E_c}}.$$

При вполне оправданных допущениях, что коэффициент Пуассона резины ν_g равен 0.5 и $E_c \gg E_g$ формула Акасака принимает вид:

$$E_T = \frac{4}{3} \frac{E_g}{\gamma_g} \quad (9)$$

Итак, модули E_L, E_T представляют собой модули Юнга слоя в системе координат, связанной с кордом, т.е. ось x' направлена вдоль корда, ось y' – в перпендикулярном направлении. В системе координат Oxy , связанной с образцом, эффективные упругие константы k -го слоя ($k=1,2$) имеют вид

$$\begin{aligned} C^k_{1111} &= c_k^4 E_{11} + E_{22}, \\ C^k_{1122} &= c_k^2 s_k^2 E_{11} + \frac{E_{22}}{2}, \\ C^k_{2222} &= s_k^4 E_{11} + E_{22} \\ C^k_{1112} &= c_k^3 s_k E_{11}, \\ C^k_{2212} &= c_k s_k^3 E_{11}, \\ C^k_{1212} &= c_k^2 s_k^2 E_{11} + \frac{E_{22}}{4}, \end{aligned} \quad (10)$$

где $c = \cos(\varphi)$, $s = \sin(\varphi)$, а $c_k = \cos(\varphi_k)$, $s_k = \sin(\varphi_k)$,

$$\varphi_k = (-1)^{k-1} \varphi.$$

Эти формулы, определяющие эффективные свойства слоя в системе Oxy , выводятся следующим образом. Для плосконапряженного состояния закон Гука для каждого слоя ($k=1,2$) имеет вид в системе координат $Ox'y'$

$$\begin{bmatrix} \langle \varepsilon'_{11} \rangle \\ \langle \varepsilon'_{22} \rangle \\ \langle \varepsilon'_{12} \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_L} & -\frac{\nu'_{21}}{E_T} & 0 \\ -\frac{\nu'_{12}}{E_L} & \frac{1}{E_T} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2G'_{12}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle \sigma'_{11} \rangle \\ \langle \sigma'_{22} \rangle \\ \langle \sigma'_{12} \rangle \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Через G'_{12} обозначен модуль сдвига в плоскости слоя резинокорда, а ν'_{ij} – коэффициент Пуассона в системе координат $Ox'y'$ (сокращение в направлении j при приложении силы в направлении i). Как известно, имеет место соотношение $\frac{\nu'_{12}}{E_L} = \frac{\nu'_{21}}{E_T}$, при этом можно принять, что эффективный коэффициент Пуассона ν'_{12} равен коэффициенту Пуассона резины $\nu'_{12} = 0.5$. Кроме этого, $G'_{12} = \frac{E_g}{3\gamma_g}$.

Тогда матрица в законе Гука (11) в системе координат $Ox'y'$, связанной с кордом, принимает следующий вид:

$$[J^{eff}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_L} & -\frac{1}{2E_L} & 0 \\ -\frac{1}{2E_L} & \frac{1}{E_T} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{E_T} \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Матрица жесткости, связывающая напряжения и деформации, соответствующая матрице (12), имеет вид

$$[C^{eff}] = \begin{bmatrix} \frac{E_L^2}{\left(E_L - \frac{E_T}{4}\right)} & \frac{E_L E_T}{2\left(E_L - \frac{E_T}{4}\right)} & 0 \\ \frac{E_L E_T}{2\left(E_L - \frac{E_T}{4}\right)} & \frac{E_{11} E_{22}}{\left(E_L - \frac{E_T}{4}\right)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E_T}{4} \end{bmatrix}. \quad (13)$$

При помощи матрицы перехода вычислим матрицу (13) в системе координат Oxy . Согласно рис. 8, направление 1 (по оси корда) составляет с направлением оси x (система координат образца) угол φ . Используя обозначения $c = \cos(\varphi)$, $s = \sin(\varphi)$ матрица перехода от штрихованной системы координат к не штрихованной описывается следующим образом:

$$\mathbf{T}(\varphi) = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2cs \\ s^2 & c^2 & -2cs \\ -cs & cs & (c^2 - s^2) \end{bmatrix}.$$

Тогда матрица жесткости $[C^{eff}]$ в системе координат образца имеет вид

$$[C^{eff}] = \mathbf{T}(-\varphi) [C^{eff}] \mathbf{T}^T(-\varphi).$$

После выполнения всех вычислений получаем

$$\begin{aligned} C_{1111}^{eff} &= \frac{c^4 E_L^2}{D} + \frac{s^2 E_L E_T}{D} + s^2 c^2 E_T, \\ C_{1122}^{eff} &= C_{2211}^{eff} = \frac{c^2 s^2 E_L^2}{D} + \frac{E_L E_T}{2D} - s^2 c^2 E_T, \\ C_{1112}^{eff} &= C_{1211}^{eff} = \frac{sc^3 E_L^2}{D} - \frac{sc E_L E_T}{2D} - \frac{1}{2} sc (c^2 - s^2) E_T, \\ C_{2222}^{eff} &= \frac{s^4 E_L^2}{D} + \frac{c^2 E_L E_T}{D} + s^2 c^2 E_T, \\ C_{2212}^{eff} &= C_{1222}^{eff} = \frac{s^3 c E_L^2}{D} - \frac{sc E_L E_T}{2D} + \frac{1}{2} sc (c^2 - s^2) E_T, \\ C_{1212}^{eff} &= s^2 c^2 \frac{E_L^2}{D} + (c^2 - s^2)^2 \frac{E_T}{4}, \end{aligned} \quad (14)$$

где обозначено: $D = E_L - \frac{E_T}{4}$. При $E_L \gg E_T$ (модуль корда \gg модуля резины) из (14) следуют формулы (10).

На этом заканчивается 1-й этап осреднения. Для двухслойного образца, обозначаемого в литературе $\pm\varphi$ -слой, осреднение жесткостей на растяжение по слоям (2-й этап в определении эффективных модулей) сводится к вычислению полусуммы соотношений (10) друг с другом, при условии, что кордный угол равен $+\varphi$ для первого слоя ($k=1$) и $-\varphi$ для второго ($k=2$). При этом число ненулевых упругих констант уменьшается:

$$\begin{aligned}
C_{1111}^{eff} &= c^4 E_L + E_T, \\
C_{1122}^{eff} &= c^2 s^2 E_L + \frac{E_T}{2}, \\
C_{2222}^{eff} &= s^4 E_L + E_T, \\
C_{1112}^{eff} &= 0, \\
C_{2212} &= 0, \\
C_{1212}^{eff} &= c^2 s^2 E_L + \frac{E_T}{4}.
\end{aligned} \tag{15}$$

При осреднении по двум слоям двухслойного образца предположено, что оба слоя полностью сцеплены друг с другом. Полное сцепление слоев означает, что перемещения в плоскости x, y любых двух точек этих слоев, имеющих одинаковые координаты x, y , также одинаковы. Данное предположение выполняется почти для всего образца, за исключением двух полосок возле свободных краев, где имеет место неполное сцепление.

Итак, в системе $Oxу$ средние напряжения и деформации связаны законом Гука

$$\begin{pmatrix} \langle \sigma_{11} \rangle \\ \langle \sigma_{22} \rangle \\ \langle \sigma_{12} \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{1111}^{eff} & C_{1122}^{eff} & 0 \\ C_{1122}^{eff} & C_{2222}^{eff} & 0 \\ 0 & 0 & C_{1212}^{eff} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle \varepsilon_{11} \rangle \\ \langle \varepsilon_{22} \rangle \\ \langle \varepsilon_{12} \rangle \end{pmatrix} \tag{16}$$

$$\begin{pmatrix} \langle \varepsilon_{11} \rangle \\ \langle \varepsilon_{22} \rangle \\ \langle \varepsilon_{12} \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{1111}^{eff} & J_{1122}^{eff} & 0 \\ J_{1122}^{eff} & J_{2222}^{eff} & 0 \\ 0 & 0 & J_{1212}^{eff} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle \sigma_{11} \rangle \\ \langle \sigma_{22} \rangle \\ \langle \sigma_{12} \rangle \end{pmatrix}$$

Чтобы найти эффективный модуль Юнга $\pm\varphi$ -слоя, следует обратить

матрицу $\begin{pmatrix} C_{1111}^{eff} & C_{1122}^{eff} \\ C_{1122}^{eff} & C_{2222}^{eff} \end{pmatrix}$ и найти матрицу $\begin{pmatrix} J_{1111}^{eff} & J_{1122}^{eff} \\ J_{1122}^{eff} & J_{2222}^{eff} \end{pmatrix}$. Тогда

$$E^{eff} = \frac{1}{J_{1111}^{eff}}. \text{ В результате вычислений получается}$$

$$E^{eff} \equiv E_{xx}^{eff} = E_T \frac{E_L(1-3c^2s^2)+3/4E_T}{s^4E_T+E_L} \tag{17}$$

Из предположения $E_c \gg E_g$ следует $E_L \gg E_T$, поэтому формула (13) может упрощена к следующему виду:

$$E^{eff} = E_L \frac{(1-3c^2s^2)}{s^4}.$$

Согласно последней формуле, эффективный модуль не зависит от модуля E_L , а следовательно и от E_c . Эффективный модуль существенно зависит от модуля корда для малых кордных углах φ , поэтому ясно, что такое упрощение неверно для кордных углов, меньших некоторого предела. Предельное значение кордного угла, для которого можно упростить формулу (17) составляет 15 – 20 градусов. Однако для больших углов факт независимости эффективного модуля от модуля корда хорошо подтверждается экспериментом. Для этих углов при расчете эффективного модуля Юнга корд можно считать нерастяжимым. Отметим, что формулы (15) при $E_c \gg E_g$ также могут быть упрощены:

$$\begin{aligned}
C_{1111}^{eff} &= c^4 E_{11}, \\
C_{1122}^{eff} &= c^2 s^2 E_{11}, \\
C_{2222}^{eff} &= s^4 E_{11}, \\
C_{1212}^{eff} &= c^2 s^2 E_{11}.
\end{aligned}$$

Однако их нельзя использовать для определения эффективного модуля Юнга, поскольку матрица $\begin{pmatrix} C_{1111}^{eff} & C_{1122}^{eff} \\ C_{1122}^{eff} & C_{2222}^{eff} \end{pmatrix}$ становится вырожденной.

Итак, описана наиболее простая методика определения эффективных упругих модулей на растяжение двухслойного резинокорда. Существуют более точные методы. Они также состоят из двух этапов: вычисление эффективных модулей слоя и осреднение по слоям. Второй этап расчета осуществляется по точным формулам, однако на первом этапе модули слоев находятся различными по степени точности приближенными методами. Следует заметить, что рассмотренная методика, несмотря на свою простоту,

обеспечивает достаточную точность вследствие малой концентрации корда и большой разницы в жесткости корда и резины.

Как уже отмечалось, для рассматриваемого двухслойного образца растяжение связано с его закручиванием. Чтобы понять, почему это происходит, рассмотрим образец как двухслойную пластину. Поле перемещений в пластине представляется в виде

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - zw_{0,1}, & u_0(x, y) &= u(x, y, 0), \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - zw_{0,2}, & v_0(x, y) &= v(x, y, 0), \\ w_0(x, y) &= w(x, y, 0), \end{aligned} \quad (18)$$

где нулем обозначены перемещения в срединной плоскости.

Деформации имеют вид

$$\varepsilon_{11} = u_{,1}, \quad \varepsilon_{22} = v_{,2}, \quad \varepsilon_{11} = 1/2(u_{,2} + v_{,1})$$

или

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= u_{0,1} - zw_{0,11}, & \varepsilon_{22} &= v_{0,2} - zw_{0,22}, \\ \varepsilon_{12} &= 1/2(u_{0,2} + v_{0,1}) - zw_{0,12}. \end{aligned} \quad (19)$$

Последние выражения можно переписать также в виде

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^0 \\ \varepsilon_{22}^0 \\ \varepsilon_{12}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \kappa_{11} \\ \kappa_{22} \\ \kappa_{12} \end{bmatrix}, \quad (20)$$

где

$$\varepsilon_{11}^0 = u_{0,1}, \quad \kappa_{11} = -w_{0,11}, \quad \varepsilon_{22}^0 = v_{0,2}, \quad \kappa_{22} = -w_{0,22},$$

$$\varepsilon_{12}^0 = 1/2(u_{0,2} + v_{0,1}), \quad \kappa_{12} = -zw_{0,12}$$

Напряжения вычисляются по формулам

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11}^k \\ \sigma_{22}^k \\ \sigma_{12}^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111}^k & C_{1122}^k & C_{1112}^k \\ C_{2211}^k & C_{2222}^k & C_{2211}^k \\ C_{1211}^k & C_{1222}^k & C_{1212}^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^0 \\ \varepsilon_{22}^0 \\ \varepsilon_{12}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \kappa_{11} \\ \kappa_{22} \\ \kappa_{12} \end{bmatrix} \quad (21)$$

В теории пластин представляют интерес также усилия и моменты, определяемые ниже:

$$\begin{aligned} N_{IJ} &= \int_{-h}^h \sigma_{IJ} dz = \int_{-h}^0 \sigma_{IJ}^1 dz + \int_0^h \sigma_{IJ}^2 dz, \\ M_{IJ} &= \int_{-h}^h z \sigma_{IJ} dz = \int_{-h}^0 z \sigma_{IJ}^1 dz + \int_0^h z \sigma_{IJ}^2 dz. \end{aligned} \quad (22)$$

Используя (21),(22), получаем выражения для усилий и моментов в общем виде

$$\begin{bmatrix} N_{11} \\ N_{22} \\ N_{12} \\ M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1111} & A_{1122} & A_{1112} & B_{1111}^{(1)} & B_{1122}^{(1)} & B_{1112}^{(1)} \\ A_{2211} & A_{2222} & A_{2212} & B_{2211}^{(1)} & B_{2222}^{(1)} & B_{2212}^{(1)} \\ A_{1211} & A_{1222} & A_{1212} & B_{1211}^{(1)} & B_{1222}^{(1)} & B_{1212}^{(1)} \\ B_{1111}^{(2)} & B_{1122}^{(2)} & B_{1112}^{(2)} & D_{1111} & D_{1122} & D_{1112} \\ B_{2211}^{(2)} & B_{2222}^{(2)} & B_{2212}^{(2)} & D_{2211} & D_{2222} & D_{2212} \\ B_{1211}^{(2)} & B_{1222}^{(2)} & B_{1212}^{(2)} & D_{1211} & D_{1222} & D_{1212} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^0 \\ \varepsilon_{22}^0 \\ \varepsilon_{12}^0 \\ \kappa_{11} \\ \kappa_{22} \\ \kappa_{12} \end{bmatrix}, \quad (23)$$

причем

$$A_{IJPQ} = A_{PQIJ}, \quad B_{IJPQ}^{(1)} = B_{PQIJ}^{(2)}, \quad D_{IJPQ} = D_{PQIJ}.$$

Для двухслойного резинокордного слоя матрица (23) имеет более простой вид (24). Как видно, для резинокорда есть влияние кручения, определяемого круткой κ_{12} , на усилия N_{11}, N_{22} и продольных деформаций $\varepsilon_{11}^0, \varepsilon_{22}^0$ на крутящий момент M_{12} . Таким образом, при плоском растяжении (все κ_{IJ} равны нулю) двухслойного резинокордного образца возникают растягивающая сила (усилие N_{11}) и крутящий момент M_{12} .

$$\begin{bmatrix} A_{1111} & A_{1122} & 0 & 0 & 0 & B_{1112}^{(1)} \\ A_{2211} & A_{2222} & 0 & 0 & 0 & B_{1212}^{(1)} \\ 0 & 0 & A_{1212} & B_{1211}^{(1)} & B_{1222}^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & B_{1112}^{(2)} & D_{1111} & D_{1122} & 0 \\ 0 & 0 & B_{2212}^{(2)} & D_{2211} & D_{2222} & 0 \\ B_{1211}^{(2)} & B_{1222}^{(2)} & 0 & 0 & 0 & D_{1212} \end{bmatrix}. \quad (24)$$

Поскольку возможность измерения крутящего момента на используемой испытательной машине «Testometric FS 150AX» отсутствует, то измерению подлежит только растягивающая сила N_{11} . Используемая при этом часть соотношений (24) выглядит следующим образом:

$$\begin{bmatrix} N_{11} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1111} & A_{1122} & 0 \\ A_{2211} & A_{2222} & 0 \\ 0 & 0 & A_{1212} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^0 \\ \varepsilon_{22}^0 \\ \varepsilon_{12}^0 \end{bmatrix}. \quad (25)$$

Соотношение (25), записанное для усилия, в точности соответствует первому соотношению (16), записанному для напряжений, поскольку

$$N_{11} = 2h \langle \sigma_{11} \rangle, \quad \langle \varepsilon_{11} \rangle = \varepsilon_{11}^0, \quad \langle \varepsilon_{22} \rangle = \varepsilon_{22}^0, \quad \langle \varepsilon_{12} \rangle = \varepsilon_{12}^0$$

$$\text{и } E^{eff} \equiv E_1^{eff} = \left(\frac{N_{11}}{2h} \right) / \varepsilon_{11}^0.$$

Задание 1. Вычисление эффективной продольной жесткости резинокорда и сравнение с экспериментом

Первым заданием является экспериментальное определение эффективного модуля Юнга $E^{eff} \equiv E_1^{eff}$ двухслойного резинокордного материала для различных кордных углов φ . Характерный график зависимости E^{eff} от φ , вычисленный различными методами, приведен на рис. 6. Расчет зависимости произведен тремя различными способами, однако, как видно, результаты достаточно хорошо совпадают между собой. При выполнении задания студенты для вычисления E^{eff} и построения графика зависимости E^{eff} от φ используют изложенную выше методику расчета, а также готовую программу, в которых реализовано несколько более сложных методик расчета.

Задание 2. Вычисление модулей корда и резины, если известны эффективные модули Юнга резинокорда для различных кордных углов

Эффективные модули резинокорда можно вычислить, если известны модули резины и корда. Однако само определение модуля корда представляет непростую задачу. Дело в том, что экспериментально установлено, что

модуль обрешиненной нити, особенно текстильной, отличается от модуля отдельной чистой нити. Поэтому для определения модуля обрешиненного корда необходим специальный метод. Другими словами, возникает **обратная задача** определения упругих модулей корда и резины по известным из эксперимента механическим свойствам резинокорда. Поскольку легко измеряемым является только модуль Юнга резинокорда, определяемый в опыте на одноосное растяжение двухслойного образца, поэтому обратная задача состоит в определении модуля Юнга обрешиненного корда по измеренным для различных кордных углов модулям Юнга резинокорда.

Как уже отмечалось, двухслойные образцы характеризуются кордным углом $\pm\varphi$ между кордным направлением и осью растяжения (рис. 2, 3). Рассмотрим симметричные образцы со всевозможными углами армирования $\pm\varphi^i$. Здесь верхний индекс соответствует номеру образца. Если считать известным коэффициент Пуассона резины ν_g , а также концентрацию наполнителя, то эффективный модуль E^{eff} является функцией трёх параметров E_c, E_g, φ :

$$E^{eff} = H(E_c, E_g, \varphi).$$

Функция H не имеет аналитического выражения и реализована в виде отмеченного выше программного модуля. В такой постановке задача определения модулей E_c и E_g сводится к эксперименту на одноосное растяжение двух образцов с разными углами армирования $\pm\varphi^1$ и $\pm\varphi^2$ и последующему решению системы двух нелинейных уравнений с двумя неизвестными, правые части которых заданы в виде численного алгоритма (программного модуля):

$$\begin{cases} E_{(1)}^{exp} = H(E_c, E_g, \varphi^1) \equiv f(E_c, E_g), \\ E_{(2)}^{exp} = H(E_c, E_g, \varphi^2) \equiv g(E_c, E_g). \end{cases} \quad (26)$$

Для обеспечения точности решения обратной задачи углы φ_1 и φ_2 целесообразно выбирать существенно различными между собой. Для решения нелинейной системы (26) применяется модифицированный метод Ньютона, который студенты применяют в виде готового программного модуля.

Итак, **вторым заданием** является проблема вычисления модулей корда и резины путем решения обратной задачи.

В таблице 1 приведены результаты решения обратной задачи. Было проделано следующее:

1. Определены экспериментальные модули $E_{(i)}^{exp}$ для различных кордных углов φ_i .
2. Численно решена обратная задача и определены модули корда E_c и резины E_g . При этом коэффициент Пуассона резины ν_g считался равным 0,5, а коэффициент Пуассона корда в расчетные формулы не входит.
3. По известным модулям корда E_c и резины E_g вычислены эффективные модули C_{ijkl}^{eff} резинокорда для угла $\varphi = 20^0$, отличного от углов φ_i . Затем по значениям C_{ijkl}^{eff} вычислен модуль E^{eff} , который сравнивается с экспериментальным модулем E^{exp} .

Для углов, данных во второй колонке, эффективные модули резинокорда имеют значения, приведенные в третьей колонке. Путем решения обратной задачи для каждой пары углов были найдены модули корда и резины. Они приведены в четвертой колонке. Для разных пар углов значения модулей корда и резины, естественно, получаются различными, но для первых трех пар это различие невелико. По значениям модулей корда и резины в четвертой колонке затем были вычислены значения эффективного модуля Юнга для угла 20^0 , получающиеся немного различными для разных пар углов. Эти значения нужно сравнивать с экспериментальным значением 532,6 МПа (четвертая колонка). Как видно для первых трех пар углов (первые три строчки) совпадение достаточно хорошее.

Таблица 1

i	Пары углов	Экспериментальные модули резинокорда	Вычисленные модули корда и резины	Эффект. модуль для угла 20^0	Численный эксперимент
1	0/90	1117,38/ 29,93	10931,3/ 26.94	535,95	532,6
2	10/80	991,95 / 29,26	10941,7 / 26.85	535,6	
3	20/70	532,62 / 27,46	10927,01 / 26.50	532,62	
4	30/60	167,30 / 28,51	10768,22 / 25.80	522,62	
5	40/50	53,36 / 23,93	10493,35 / 24.90	507,46	

2. ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Измерить площадь поперечного сечения двухслойного пластиночного образца резинокорда с углами армирования $\pm\varphi^1$ (угол φ^1 для первого слоя и угол $-\varphi^1$ для второго слоя). Результаты занести в таблицу в Microsoft Excel. Использование электронных таблиц Excel позволяет автоматизировать и упростить вычисления.
2. Закрепить образец в растягивающей машине. Измерить длину рабочей части образца.
3. Произвести несколько циклов «нагрузка - разгрузка». Результаты измерений сохранить в файлах формата Microsoft Excel.
4. Повторить пункты 1-3 для второго образца с углами армирования $\pm\varphi^2$ и контрольного образца с углами армирования $\pm\varphi^{контроль}$.

3. ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ

1. Для каждого образца создать таблицы в Microsoft Excel по типу таблицы 2, приведенной для примера ниже. Шаблон таблицы предоставляется студентам. Внести измеренные данные в эти таблицы. В каждой таблице нужно заполнять три первые колонки, данные в остальных будут вычислены автоматически.

Таблица 2

Время, с	Нагрузка, кг	Удлинение, $5 \cdot 10^{-3}$ мм	Напряж., $\cdot 10^6$ Па	Деформация	Скорость, c^{-1}

2. Обработать данные таблицы 2 для каждого образца. Результаты занести в таблицы типа таблицы 3, шаблон которой предоставляется в готовом виде.

Таблица 3

Номер цикла	Начальная строка	Конец нагрузки	Конец цикла	Отступ слева	Отступ справа	Модуль Юнга

3. Используя вычисленные значения модуля Юнга из таблицы 3, вычислить по предложенной программе (путем решения обратной за-

дачи) коэффициенты корда и резины. Результаты занести в таблицу 4. В последнюю колонку занести число итераций метода Ньютона, потребовавшихся для решения обратной задачи. Это число выдаст программа.

Таблица 4

Номер расчета	φ^1	$E_{(1)}^{\text{exp}}$	φ^2	$E_{(2)}^{\text{exp}}$	E_c	E_g	Количество итераций

4. Вычислить по предложенной программе для контроля $E_{(контр)}^{\text{eff}}$ для кордного угла $\varphi^{\text{контр}}$, и сравнить с экспериментальным значением $E_{(контр)}^{\text{exp}}$.

Список литературы

1. Победря, Б.Е. Механика композиционных материалов / Б.Е. Победря М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984.
2. Бухин, Б.Л. Введение в механику пневматических шин / Б.Л. Бухин М.: Химия, 1988.
3. Курс по механике шин, предоставленный компанией Мишлен, 2001.

Задача №4

ИССЛЕДОВАНИЕ МИКРОДЕФОРМАЦИЙ МЕТАЛЛА ЗЕРНИСТОЙ СТРУКТУРЫ

Цель работы. Экспериментальное наблюдение микродеформаций металла поликристаллической структуры, определение линейного параметра, характеризующего представительный объем (параметра квазиоднородности), а также макроскопических характеристик материала. Ознакомление с испытательной установкой ИМАШ, с методикой подготовки металлического образца к эксперименту, подбор программы для обработки результатов эксперимента и построения графиков.

1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Различные твердые материалы и тела, встречающиеся в природе и используемые в технике, обладают структурой. Обычный технический металл, например, представляет собой поликристаллическое тело, состоящее из большого числа кристаллитов (зерен) неправильной формы, взаимодействующих между собой. Каждый кристаллит, в свою очередь, является довольно сложным образованием с наличием структурных элементов меньшего масштаба.

Классические теории, описывающие механическое поведение твердых деформируемых тел, строятся на аксиоматике МСС, формально не учитывающей наличие структурной неоднородности, а именно:

1. Гипотезу сплошности, позволяющую ввести вектор перемещения как непрерывную достаточное число раз дифференцируемую вектор-функцию.
2. Гипотезу аффинности деформации окрестности точки, позволяющую ввести понятие тензора деформаций.
3. Гипотезу о силовом взаимодействии между частями тела, приводящую к описанию напряженного состояния тела тензором напряжений.
4. Гипотезу квазиоднородности, приводящую к описанию свойств тела параметрами, не зависящими от координат точек тела.

Поскольку известно, что структура (в частности размер зерна) сильно влияет на механические свойства, возникает вопрос о соответствии классических моделей реальности. Поскольку входящие в теорию уравнения со-

стояния основаны на результатах эксперимента, то в этих теориях интегральным образом структура учитывается. Однако есть ряд важных явлений, связанных с наличием структуры, которые не описываются или даже принципиально не могут быть описаны в рамках классических моделей, например различные масштабные эффекты.

Наличие структуры у материалов означает наличие параметров, имеющих размерность длины и связанных с особенностями строения и свойств материала. Для поликристаллического материала это характерный размер зерна d , для слоистого - толщина слоя и т.п. Поскольку структурная неоднородность сильнее проявляется в относительно малых объемах, то очевидно, что весьма существенной механической характеристикой материала является его представительный объем, т.е. минимальный объем, обладающий макроскопическими свойствами. Следовательно, возникает еще один линейный параметр \hat{l} - характерный линейный размер представительного объема. Этот параметр определяет границы применимости классических (макроскопических моделей). Если через x обозначить характерный линейный размер механической задачи, то условие $\frac{x}{\hat{l}} > 1$ определяет возможность использования в ней макроскопических уравнений состояния.

При $\frac{x}{\hat{l}} \leq 1$, $\frac{x}{\hat{l}} > 1$ для описания исследуемого явления необходимо использовать неоднородные модели. Заметим, что под x мы понимаем не только характерный размер деформируемого тела, но и радиус кривизны концентратора, толщину изгибаемой пластинки, длину волны и т.п.. Именно поэтому классические модели неприменимы, в частности, в задачах о деформации весьма тонких пластин, вблизи концентратора с малым радиусом кривизны, в задачах с сильно локализованными (сосредоточенными) воздействиями и др.

Впервые интерес к такому параметру проявил А.А. Ильющин [1]. В этой книге он назван параметром ориентации, а теоретический расчет его для поликристаллического материала сводится к определению среднего расстояния между двумя одинаково с некоторым допуском ориентированными кристаллами. О роли и значении этого параметра много сказано в работе В.А. Ломакина [2], где он назван параметром квазиоднородности и указывается на его связь с понятием представительного объема. В работах [3,4] дается вероятностная постановка задачи об определении представи-

тельного объема на основе классических моделей структурно-неоднородной среды (модели Рейса и модели Фойгта).

Будем считать, что любой объем материала, больший или сравнимый с представительным, характеризуется совокупностью модулей податливости и модулей жесткости (в соответствии с предположениями Рейса об однородности поля напряжений и Фойгта - об однородности поля деформаций). Эти модули называются эффективными и они являются случайными величинами. Обозначим через s_v элемент этой совокупности, через $\langle s_v \rangle$ его математическое ожидание, через Ds_v - дисперсию. Тогда представительный объем \hat{V}_s для этого элемента с вероятностью p_o и допуском ε можно определить из условия

$$p_o = P \left\{ \left| \frac{s_v - \langle s_v \rangle}{\langle s_v \rangle} \right| < \varepsilon \right\}. \quad (1)$$

Представительным объемом среды \hat{V} будем называть максимальный из \hat{V}_s .

Для однофазной поликристаллической среды

$$s_v = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^n s_i v_i, \quad (2)$$

где v_i - объем i -го зерна; s_i - один из его упругих модулей, n - число зерен в объеме V . Предположим, что $v_i = v_o$ ($v_{o,n}$ - детерминированные величины), а s_i - независимые одинаково распределенные случайные величины. Тогда, согласно теореме Ляпунова, s_v как сумма независимых случайных величин - асимптотически нормальна, а значит полностью определяется двумя первыми моментами - математическим ожиданием и дисперсией:

$$\begin{aligned} \langle s_v \rangle &= \langle s_i \rangle \equiv \langle s \rangle, \\ Ds_v &= \frac{v_o}{V} Ds_i \equiv \frac{v_o}{V} Ds. \end{aligned} \quad (3)$$

Условие (1) в этом случае дает

$$p_o = 2\Phi \left(\frac{\varepsilon \langle s_v \rangle}{\sqrt{Ds_v}} \right), \quad (4)$$

где $\Phi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^t e^{-\frac{u^2}{2}} du$ – функция Лапласа.

Из (4) получим

$$V_s = \delta \frac{v_o Ds}{\langle s \rangle^2}, \quad \delta = \left(\frac{\Phi^{-1}\left(\frac{p_o}{2}\right)}{\varepsilon} \right). \quad (5)$$

Максимальный из всех V_s и будет представительным объемом \hat{V} . Вместо \hat{V} для поликристаллического материала можно ввести понятие представительного числа зерен $\hat{n} = \frac{\hat{V}}{v_o}$. Параметр квазиоднородности $\hat{l} = d\sqrt[3]{\hat{n}}$, где d – средний размер зерна поликристаллического материала.

Расчеты, проведенные для ряда поликристаллических материалов с вероятностью 0,98 и допуском 0,05, дают следующие результаты:

	a_{1111}	$-a_{1122}$	a_{1212}	A_{1111}	A_{1122}	A_{212}	\hat{n}	$m = \sqrt[3]{\hat{n}}$
Fe(α)	0,757	0,282	0,862	2,369	1,406	1,160	2537	13
Cu	1,491	0,625	1,328	1,698	1,226	0,753	3345	15
Al	1,590	0,580	3,516	1,082	0,622	0,284	117	5
Cr	0,280	0,052	0,969	3,910	0,896	1,032	660	8
Pl	9,280	4,260	6,940	0,488	0,414	0,144	3435	15
Mo	0,280	0,078	0,910	4,600	1,760	1,100	176	5
Ni	0,750	0,286	0,816	2,526	1,561	1,226	400	7
Si	0,768	0,214	1,256	1,658	0,639	0,796	267	6

В этой таблице a_{ijkl} – модули податливости, A_{ijkl} – модули жесткости соответствующих кристаллов.

2. МЕТОДИКА ПРОВЕДЕНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА

До нагружения образца определяют характерный размер зерна d как среднее арифметическое нескольких замеров. На рабочей поверхности подготовленного к эксперименту образца нанесены точки, расстояния между

которыми порядка d (точные расстояния между ними измеряются). Нагружение образца представляет собой дискретный процесс, после каждого акта которого производятся измерения расстояний между нанесенными точками. По результатам этих замеров составляется таблица зависимости внешней силы p_i от Δl_{ik} , где k – характеристика длины базы (база длиной расстояния между точками характеризуется индексом «1», база длиной расстояния между двумя точками – индексом «2» и т.д.). В этой таблице содержится зависимость p от Δl для максимальной базы. Эту зависимость можно считать макроскопической или средней.

Далее оцениваем отклонение совокупности значений $p(\Delta l)$ для каждой базы от среднего, например, по среднеквадратичному отклонению. Замечаем, что начиная с некоторой базы это отклонение стабилизируется. Номер этой базы можно трактовать как $m = \sqrt[3]{\hat{n}}$. Далее по максимальной базе можно построить диаграмму $\sigma(\varepsilon)$ для данного материала, что позволяет определить его модуль Юнга и предел текучести.

Испытательная установка ИМАШ

Установка ИМАШ-20-78 предназначена для прямого наблюдения, фотографирования и видеозаписи микроструктуры образцов из различных материалов в процессе растяжения – сжатия при температурах от -50 до $+1500^\circ\text{C}$ в вакууме или защитных газовых средах. Установка позволяет выполнять микроструктурный анализ параллельно с исследованием механических свойств образца и осуществлять автоматическую регистрацию относительно изменения электрического сопротивления образца, температуры образца, относительно смещения захватов образца, прикладываемой к образцу нагрузки. Предусмотрено программное задание температуры.

Общая схема установки представлена на рис.4. Рабочая камера 3 выполнена из хромированной стали, герметически изолирована. В ней размещены захваты 2 системы нагружения для крепления образца 1. Нагружение образца осуществляется следующим образом. Вращение двигателя 10 через редуктор 9, ведущие звездочки 8, цепи 7 синхронно передается на нагружающие гайки 6, в которых вращательное движение преобразуется в поступательное движение штока 11, жестко соединенного с захватом 2. В зависимости от направления движения захватов к образцу 1 прикладывается сила растяжения или сжатия, которая измеряется с помощью датчиков силы

5 (динамометров). Перемещение захватов 2 измеряется датчиками перемещения 4. Изменение электрического сопротивления датчиков силы и перемещения передается на двухкоординатный графопостроитель системы управления. Датчики силы предварительно тарируются по эталонному динамометру; датчики перемещения - по образцовому индикатору. Перемещение захватов образца вручную осуществляется гайками 13.

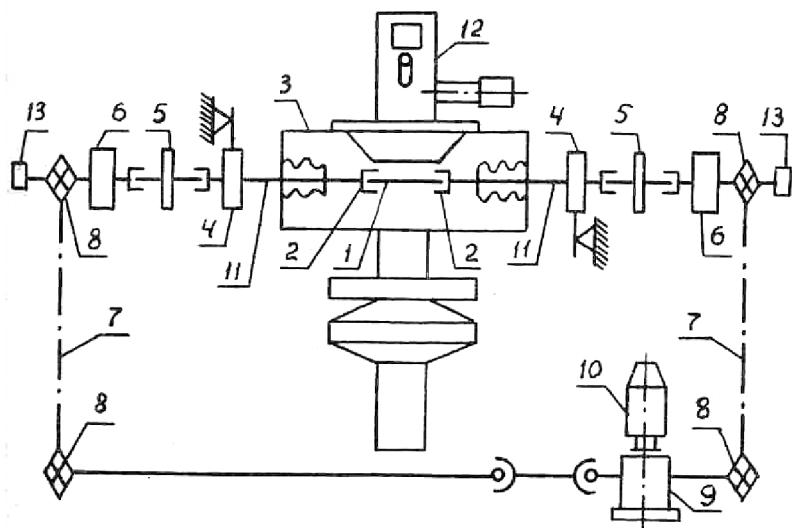


Рис. 1

Вакуумная система обеспечивает поддержание определенного температурного режима в рабочей камере и удаление продуктов испарения материалов образца при нагреве. Система управления, регулирования и сигнализации включает пульты управления установкой и блоки регулирования и записи температуры нагрева (охлаждения) образца, регулирования и записи нагрузок и деформации образца, записи относительного изменения электрического сопротивления образца.

Наблюдение микроструктуры образца осуществляется с помощью металлографического микроскопа МВТ-71, установленного на крышке рабочей камеры 3. Микроскоп МВТ-71 позволяет передавать изображение микрошлифа на компьютер с помощью видеокамеры и платы видеоввода фирмы National Instruments. Общий вид установки приведен на рис. 2.



Рис. 2

Наблюдение микроструктуры материала производится на специально подготовленной поверхности образца – микрошлифе. Для этого рабочая поверхность готового образца путем шлифования, полирования, травления доводится до такого состояния, когда при рассмотрении поверхности в металлографическом микроскопе отчетливо видна микроструктура материала. После этого на микротвердомере ПМТ-3 алмазной пирамидой на рабочую поверхность образца наносятся метки (реперные точки) на определенном расстоянии. Фотография микрошлифа с нанесенными точками приведена на рис. 3.

Расстояние между метками в микронах замеряется на микротвердомере по мере нанесения меток. В дальнейшем при деформации образца производятся замеры расстояний между метками при различных нагрузках.

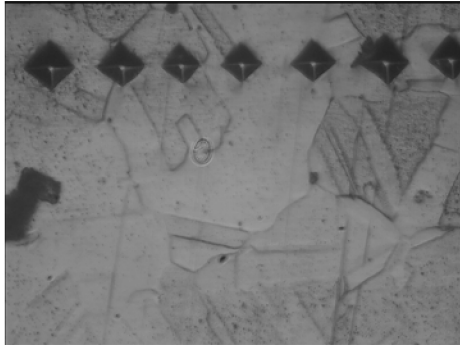


Рис. 3

3. ОФОРМЛЕНИЕ ОТЧЕТА

В отчете должны быть представлены :

1. Таблицы измерений.
2. Для каждой k -й базы - множество значений Δl_{kij} от p_i , j - число таких баз. Эти данные могут быть представлены также и в графическом виде.
3. Макроскопическая зависимость $p(\Delta l)$ - в виде графика.
4. Расчеты среднеквадратичного отклонения.
5. Значение $m = \sqrt[3]{\bar{n}}$. Значение d .
6. Диаграмма $\sigma(\varepsilon)$ для материала, а также значение модуля Юнга и предела текучести.

Список литературы

1. Ильюшин, А.А. Сопротивление материалов / А.А. Ильюшин, В.С. Ленский. – М.: Физматгиз, 1959.
2. Ломакин, В.А. Проблемы механики структурно-неоднородных твердых тел / В.А. Ломакин. МТТ. – 1978. – №6. – С. 45-52.
3. Тунгусова, З.Г. О представительном объеме упругих поликристаллических материалов / З.Г. Тунгусова // Вестн. Моск. ун-та. Сер.1, мат. мех. – 1991. – № 1.
4. Тунгусова, З.Г. О представительном объеме упругих структурно-неоднородных материалов / З.Г. Тунгусова. – М., 1993.

Задача №5

ПЛАСТИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ В ТОНКОМ СЛОЕ МЕТАЛЛА

Цель работы – знакомство с основами теории пластических течений в тонком слое металла (основные гипотезы и постановка краевой задачи). В практической части работы проводится эксперимент по сжатию тонкой пластины между двумя параллельными, сближающимися по нормали к поверхности пластины жесткими плитами, результаты которого сравниваются с построенным теоретическим решением.

1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

1.1. Особенности задачи о пластическом течении в тонком слое

Постановка и решение задач о развитом пластическом формоизменении, к которым относятся штамповка, прессование тонкостенных элементов конструкций, тонколистовая прокатка и др., сопряжена со значительными трудностями. Прежде всего, при формулировке определяющих соотношений и свойств материалов (вязкость, инерция, наличие температурных градиентов), задании граничных условий, меняющихся в процессе решения. В последние годы появились новые материалы и технологии их обработки – пластическое деформирование в состоянии сверхпластичности, использование эффекта электро-пластичности, а вместе с этим потребность в разработке новых физико-математических моделей процессов, постановке новых краевых задач и разработке численно-аналитических методов их решения.

Из всего многообразия процессов пластического течения можно выделить класс задач, которые характеризуются одним общим свойством: течение в них происходит в форме сравнительно тонкого слоя, находящегося между рабочими поверхностями тел инструмента, движение которых определяет характер и геометрию течения. Для этого класса задач при сравнительно общих предположениях относительно характеристик процессов ока-

зывается возможным построить теорию и предположить эффективные методы решения.

Рассмотрим элемент криволинейной поверхности тонкого слоя вещества, совпадающего с рабочей поверхностью инструмента, внутренняя геометрия которого в криволинейных координатах (α, β) определяется главными кривизнами: $A = \frac{\partial^2 s}{\partial^2 \alpha}$, $B = \frac{\partial^2 s}{\partial^2 \beta}$. В каждой точке этой поверхности отложим по нормали z к ней отрезки длины $h = h(\alpha, \beta, t)$. Тогда концы этих отрезков определяют вторую рабочую поверхность (рис.1). Отрезок h при этом представляет толщину слоя пластического вещества.

Положим, что толщина h весьма мала по сравнению с характерным линейным размером L области течения вещества по линиям α и β .

Следуя Эйлеру, движение вещества будем изучать, не следя за каждой физической ее точкой, а наблюдая, что происходит с различными физическими точками, проходящими через фиксированную точку пространства.

Задача ставится так: пластическое вещество сжимается двумя параллельными, сближающимися по нормали жесткими, шероховатыми плитами. В некоторый начальный момент $t = 0$ поверхность этого вещества ограничена известным контуром $\vec{r} = \vec{r}(\alpha, \beta)$. При этом боковая нагрузка отсутствует, и во все время процесса вещество может свободно растекаться.

Начальная толщина h_0 постоянна, скорость сближения плит $\frac{\partial h}{\partial t}$ известна как функция времени.

1.2. Основные гипотезы

Прежде чем приступить к записи уравнений движения слоя, примем следующие гипотезы:

- проекции скоростей физических частиц, лежащих на одной нормали, на касательную плоскость к криволинейной поверхности мало отличаются между собой и могут быть заменены средней по толщине слоя скоростью скольжения пластического вещества относительно физической поверхности движущегося рабочего тела:

$$\vec{v} = v_\alpha(\alpha, \beta, t) \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha} + v_\beta(\alpha, \beta, t) \frac{\partial \vec{r}}{\partial \beta}, \quad (1)$$

при этом $v_\alpha = v_\alpha(\alpha, \beta, t)$, $v_\beta = v_\beta(\alpha, \beta, t)$ – эйлеровы координаты вектора относительной скорости;

- скорости деформации волокон e_{zz} , расположенных вдоль нормали, в направлении этой нормали мало отличаются между собой и равны средней скорости относительного изменения толщины слоя:

$$e_{zz} = \frac{1}{h} \frac{dh}{dt}; \quad (2)$$

- поверхностные силы трения, возникающие на горизонтальных поверхностях, в общем случае являются функциями давления, относительных скоростей скольжения и коэффициентов трения; вместе с тем опыт показывает, что при сухом трении (процесс течения происходит без смазки) и наличии относительного скольжения пластического вещества по поверхностям касательное напряжение трения определяется законом Кулона $\tau = \tau(v)$ и направлено противоположно направлению скорости скольжения массы, пока оно меньше предела текучести материала на сдвиг τ_s (зона скольжения); равно пределу текучести материала на сдвиг τ_s по закону Прандтля (зона торможения) или линейно меняется от τ_s до нуля (зона застоя). Размеры первой и последней зон порядка толщины слоя; следовательно, с хорошей точностью можно считать, что возникающие в слое касательные контактные напряжения трения T_1 (на плоскости $z = 0$) и T_2 (на плоскости $z = h$) направлены в стороны, противоположные относительным скоростям скольжения и по величине равны τ_s ;

- с точностью до величин порядка h/L по сравнению с единицей можно считать, что $\sigma_{\alpha\alpha}$ и $\sigma_{\beta\beta}$ равны между собой (обозначим их q) и касательное напряжение $\tau_{\alpha\beta}$ мало и им можно пренебречь;

- плоскость, перпендикулярная до деформации, остается перпендикулярной и после деформации, откуда следует, что касательными напряжениями $\tau_{z\alpha}$ и $\tau_{z\beta}$ можно пренебречь;

- условие текучести материала примем в форме Мизеса, а именно:

$$\sigma_u = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[(\sigma_{\alpha\alpha} - \sigma_{\beta\beta})^2 + (\sigma_{\beta\beta} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{\alpha\alpha} - \sigma_{zz})^2 \right]^{1/2} = |q - \sigma_{zz}| = \sigma_s \quad (3)$$

1.3. Постановка задачи

Теперь составим уравнения сохранения импульса слоя $ABhd\alpha d\beta$ с учетом всех перечисленных гипотез в проекциях на α и β (рис.1).

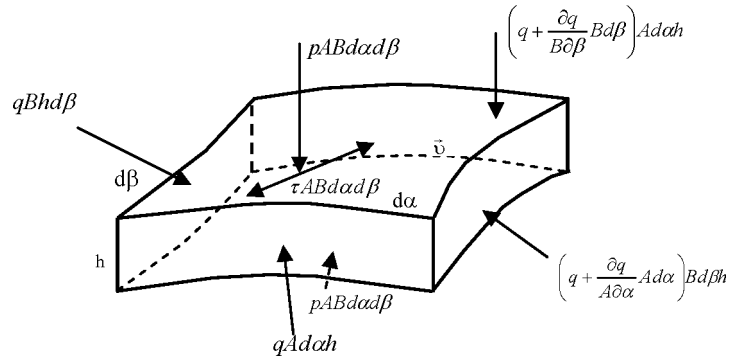


Рис 1. Элемент слоя вещества

Они имеют вид:

$$\begin{cases} \rho g_\alpha ABh \partial \alpha \partial \beta + qh B d\beta - (q + (\partial q / \partial \alpha) A d\alpha) B h d\beta - \\ - 2\tau_s AB d\alpha d\beta v_\alpha / \sqrt{v_\alpha^2 + v_\beta^2} = 0, \\ \rho g_\beta ABh \partial \alpha \partial \beta + qh A d\alpha - (q + (\partial q / \partial \beta) B d\beta) A h d\alpha - \\ - 2\tau_s AB d\alpha d\beta v_\beta / \sqrt{v_\alpha^2 + v_\beta^2} = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Поскольку напряжения постоянны по толщине, то с ошибкой не более h/R (R - радиусы кривизн поверхности слоя) уравнение сохранения импульса в проекции на ось z даст равенство

$$\sigma_{zz} = -p, \quad (5)$$

67

где p - внешнее среднее нормальное давление со стороны рабочей поверхности на слой вещества.

В данной работе рассматриваются процессы медленных течений, поэтому в уравнениях сохранения импульса первыми – инерционными – членами можно пренебречь. Если теперь разделить на элемент $ABhd\alpha d\beta$, привести подобные члены, возвести каждое из уравнений в квадрат и сложить, то получим следующее уравнение для нормального напряжения q :

$$\left(\frac{\partial q}{A \partial \alpha} \right)^2 + \left(\frac{\partial q}{B \partial \beta} \right)^2 = \frac{4\tau_s^2}{h^2} \quad (6)$$

или, используя условие Мизеса (3) с учетом (5), имеем для неизвестной функции давления p следующее уравнение:

$$\left(\frac{\partial p}{A \partial \alpha} \right)^2 + \left(\frac{\partial p}{B \partial \beta} \right)^2 = \frac{4\tau_s^2}{h^2}. \quad (7)$$

Эти соотношения показывают, что модуль градиента давления p в каждый момент течения массы постоянен для всей области и изменяется лишь по t :

$$|\text{grad}p| = \frac{2\tau_s}{h}. \quad (8)$$

При этом вектор скорости течения \vec{v} совпадает по направлению с вектором $\text{grad}p$, т.к. из (2) имеем

$$\frac{v_\alpha}{v_\beta} = \frac{\partial p}{A \partial \alpha} : \frac{\partial p}{B \partial \beta}. \quad (9)$$

В частном случае, когда течение происходит между двумя параллельными плоскостями (в технологии такой процесс называется осадкой между параллельными бойками), имеем: $A d\alpha = dx$, $B d\beta = dy$ и уравнение (7) преобразуется к виду

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)^2 = \frac{4\tau_s^2}{h^2}. \quad (10)$$

68

Скорости деформации произвольного волокна выражаются формулами:

$$e_{\alpha\alpha} = \frac{\partial v_\alpha}{A \partial \alpha} + \frac{v_\beta}{A} \frac{\partial A}{B \partial \beta}, \quad e_{\beta\beta} = \frac{\partial v_\beta}{B \partial \beta} + \frac{v_\alpha}{B} \frac{\partial B}{A \partial \alpha}, \quad (11)$$

$$2e_{\alpha\beta} = \frac{\partial v_\alpha}{B \partial \beta} + \frac{\partial v_\beta}{A \partial \alpha} - \frac{v_\alpha}{B} \frac{\partial A}{B \partial \beta} - \frac{v_\beta}{A} \frac{\partial B}{A \partial \alpha}.$$

Скорость деформации волокна, расположенного вдоль нормали, есть средняя скорость относительного изменения толщины слоя:

$$e_{zz} = \frac{1}{h} \frac{dh}{dt} = \frac{1}{h} \left(\frac{\partial h}{\partial t} + v_\alpha \frac{\partial h}{A \partial \alpha} + v_\beta \frac{\partial h}{B \partial \beta} \right). \quad (12)$$

Из экспериментальных данных по сжимаемости известно, что изменение объема происходит в основном упруго, т.е. оно будет малым по сравнению с развитыми пластическими деформациями. Это позволяет воспользоваться условием несжимаемости, которое на основании (11) и (12) запишется в виде

$$e_{\alpha\alpha} + e_{\beta\beta} + e_{zz} = \frac{1}{h} \left(\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{AB} \frac{\partial}{\partial \alpha} h B v_\alpha + \frac{1}{AB} \frac{\partial}{\partial \beta} h A v_\beta \right) = 0. \quad (13)$$

Таким образом, для неизвестной функции p имеем уравнение (7) и граничные условия на контуре $\vec{r} = \vec{r}(\alpha, \beta)$, известном лишь в начальный момент времени $t = 0$, $h = h_0$. Находя решение уравнений (7), (13) при $t = 0$, имеем p , v_α , v_β и отсюда будем знать новый контур $\vec{r} = \vec{r}(\alpha, \beta, \Delta t)$ через малое время Δt . Повторяя последовательно аналогичные вычисления, можно найти как угодно сильно деформированный контур и соответствующее ему распределение p , v_α , v_β .

1.4. Задача о затекании материала в паз

Теперь рассмотрим квадратную пластинку из свинца и стальную матрицу с системой пазов, где d – расстояние между пазами, δ – ширина паза, l – глубина паза, m – число квадратиков матрицы, h_0 – средняя начальная

толщина пластинки (измеряется индикатором часового типа), σ_s – предел текучести свинца. Все вышеуказанные величины, за исключением предела текучести свинца, измеряются самостоятельно. В процессе эксперимента осуществляют равномерное сжатие квадратной пластинки между двумя матрицами рабочего инструмента: стальной матрицей с системой пазов и массивной плиты, общим усилием Q , боковые поверхности пластинки свободны от напряжений (проводится на гидравлическом прессе в лаборатории ОМД). Предполагается, что течение в каждом из квадратов происходит независимо от остальных (рис.2), граница пластинки мало меняется со временем, и для такого течения справедливы все вышеперечисленные гипотезы.

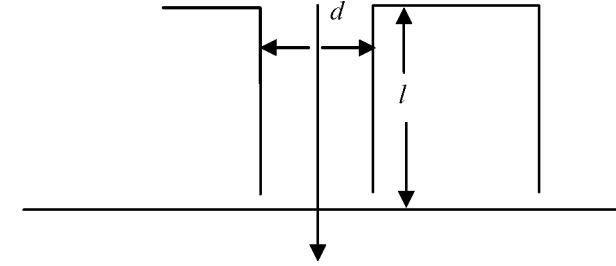


Рис 2. Затекание материала в паз

Задача затекания материала в паз состоит из решения уравнения (7) с граничным условием на границе стальной матрицы с системой пазов и пластинки. Направим ось Z вниз, $Z=0$ – граница G матрица - пластинка, $Z=l$ – основание щели в матрице). Тогда имеем следующие уравнение и граничное условие для определения функции l :

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{2\tau_s}{\delta}, \\ p|_{z=l} = \sigma_s. \end{cases} \quad (14)$$

В качестве решения этой системы имеем

$$p = \sigma_s + \frac{2\tau_s}{\delta} (l - z). \quad (15)$$

Следовательно, давление на границе G пластинка - матрица (при $Z=0$) равно (при условии $\sigma_s = \sqrt{3}\tau_s$):

$$p|_G = \sigma_s \left(1 + \frac{2l}{\sqrt{3}\delta}\right). \quad (16)$$

Если l порядка δ , то $p|_G$ порядка $2\sigma_s$.

Теперь рассмотрим уравнение (10) с граничным условием (16). Сделаем некоторые тождественные преобразования. Введем вместо функции p новую функцию ξ следующего вида:

$$\xi = \frac{h}{2\tau_s} \left(p - \sigma_s - \frac{2l}{\sqrt{3}\delta} \sigma_s\right). \quad (17)$$

При этом она удовлетворяет уравнению (10) в виде:

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 = 1 \quad (18)$$

и согласно (16) граничному условию на G :

$$\xi|_G = 0. \quad (19)$$

1.5. Аналогия формы эпюры давлений с формой песчаной насыпи

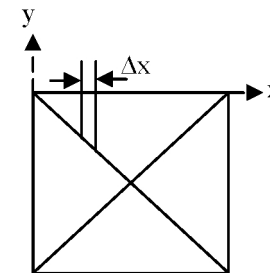
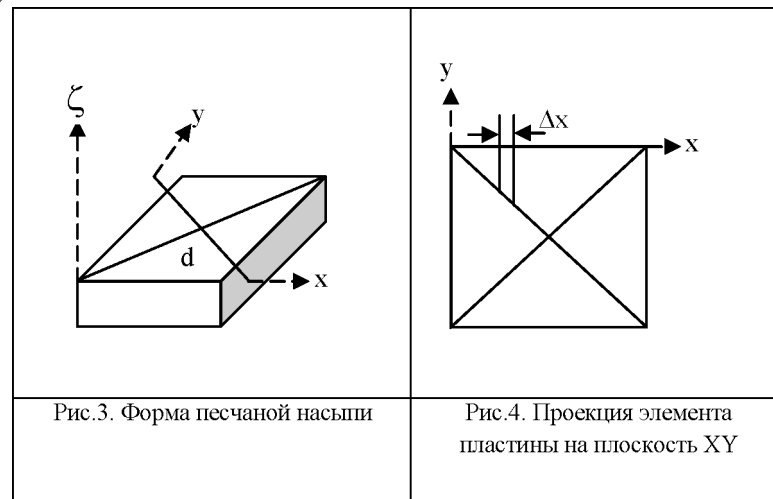
Уравнение (18) с приведенным граничным условием (19) указывает на существование аналогии между задачами течения и определения формы песчаной насыпи из сухого однородного песка. Представим себе горизонтально расположенную пластину, контур которой совпадает с контуром области течения (рис.3). Будем насыпать на эту пластину однородный песок с коэффициентом внутреннего трения ν (если положить $\nu = \text{tg } \varphi$, то φ называется углом естественного скоса). В результате образуется определенной формы предельная насыпь, ордината которой ζ будет удовлетворять такому уравнению:

$$|\text{grad } \zeta|^2 = \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)^2 = \nu^2 \quad (20)$$

и однородному граничному условию:

$$\zeta|_G = 0. \quad (21)$$

Предельная насыпь характерна тем, что угол наклона ее образующей к горизонту есть величина постоянная и равная φ . Отсюда следует, что образуемая насыпью поверхность линейчатая, т.е. содержит прямолинейные образующие.



Возьмем функцию ζ/ν . Видно, что она совпадает с ξ , поскольку тождественны уравнения (18) и (20) и граничные условия (19) и (21), которым эти функции удовлетворяют. Отсюда для функции давления p имеем

$$p = \sigma_s \left(1 + \frac{2l}{\sqrt{3}\delta}\right) + \frac{\zeta}{\nu} \frac{2\tau_s}{h}. \quad (22)$$

Подберем теперь такой песок, чтобы величина его коэффициента ν численно совпадала с значением отношения $\frac{2\tau_s}{h}$. Тогда из (22) получим

$$p = \sigma_s \left(1 + \frac{2l}{\sqrt{3}\delta}\right) + \zeta. \quad (23)$$

Далее можно представить себе, что по контуру пластинки сделан вертикальный борт высотой $\sigma_s \left(1 + \frac{2l}{\sqrt{3}\delta}\right)$. Тогда ордината такой насыпи ζ будет совпадать с функцией давления p , и для них справедливы одинаковые математические постановки задачи.

Разумеется, "песчаная аналогия" – эксперимент мысленный, но его использование позволяет, не решая задачу для нелинейного дифференциального уравнения в частных производных, во многих случаях получать интегральные характеристики процесса и решение задачи из геометрических соображений.

В частности, общее усилие Q , необходимое для осуществления процесса течения и являющееся функцией толщины пластинки, будет численно равно объему песчаной насыпи. Подсчитать объем песчаной насыпи из однородного песка, а именно, объем конуса с углом наклона граней к основанию, равным $\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\tau_s}{h}$, плюс объем параллелепипеда, высотой

$\sigma_s(1 + \frac{2l}{\sqrt{3}\delta})$, не представляет труда. Разделим основание на четыре подобласти диагоналями квадрата (см. рис.3) и выразим объем каждого конуса, расположенного над соответствующей частью квадрата V_i , в виде интеграла:

$$V_i = 2 \int_0^{d/2} dx \int_0^x \operatorname{tg} \varphi y dy. \quad (24)$$

Отсюда, объем конуса равен:

$$V = 8 \int_0^{d/2} dx \int_0^x \operatorname{tg} \varphi y dy. \quad (25)$$

Умножая V на число квадратиков, имеем для суммарного усилия Q , необходимого для сжатия пластинки, следующее выражение через объем песчаной насыпи V :

$$Q = m \left(8 \int_0^{d/2} dx \int_0^x \operatorname{tg} \varphi y dy + \sigma_s \left(1 + \frac{2l}{\sqrt{3}\delta} \right) d^2 \right). \quad (26)$$

Откуда после преобразований имеем:

$$Q = m \sigma_s d^2 \left(1 + \frac{2l}{\sqrt{3}\delta} + \frac{d}{3\sqrt{3}h} \right), \quad (27)$$

где h – конечная толщина пластинки.

1.6. К определению контура области течения

До сих пор мы предполагали, что граница области течения фиксирована, теперь поставим задачу несколько иначе. Будем рассматривать процесс течения между параллельными плоскостями, причем предположим, что размеры плоскостей превышают (в достаточной степени) первоначальные размеры области течения. По мере сближения плоскостей материал слоя, растекаясь, будет занимать все новые и новые области; задача состоит в определении контура области в любой момент времени $t > 0$.

Запишем уравнение контура в неявном виде:

$$F(x, y, z) = 0. \quad (29)$$

В момент $t + dt$ должно быть справедливо уравнение (29), отсюда имеем:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + v_x \frac{\partial F}{\partial x} + v_y \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad (30)$$

в котором v_x, v_y – скорости частиц, расположенных на контуре в момент времени t . Если обозначить v_n – скорость частицы по нормали к контуру, а через θ – угол наклона касательной к контуру к оси x , то из (30) получим:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + v_n \left(\frac{\partial F}{\partial x} \sin \theta + v_y \frac{\partial F}{\partial y} \cos \theta \right) = 0. \quad (31)$$

Представим себе участок контура MN (рис.5) и соответствующий участок проекции ребра (mn). Подсчитаем количество материала, протекающего через отрезок границы ds за время dt . Если через a обозначить длину линии тока между контуром и проекцией ребра (рис.5), то получим:

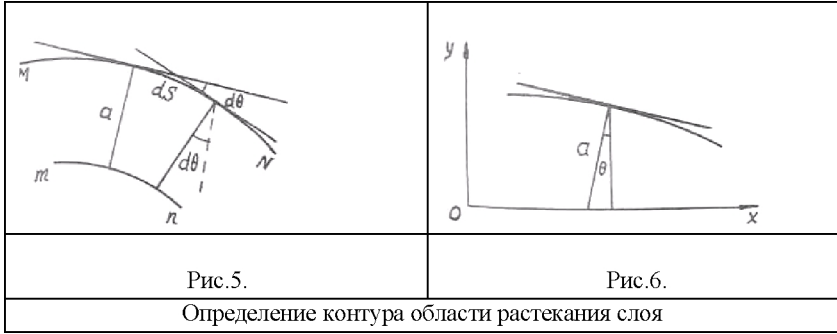
$$dV = -dh \left(ads - \frac{1}{2} a^2 d\theta \right). \quad (32)$$

С другой стороны, $dV = v_n h dt ds$. Из последних двух равенств находим:

$$v_n = a \frac{d \ln(h/h_0)}{dt} \left(1 - \frac{1}{2} a \frac{d\theta}{ds} \right). \quad (33)$$

Определить a для произвольного контура довольно сложно. Проделаем это для случая, когда контур есть симметричная относительно оси x кривая,

при этом $a = \frac{y}{\cos \theta}$ (рис.6),



$$v_n = \frac{y}{\cos\theta} \frac{d \ln(h/h_0)}{dt} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{y}{\cos\theta} \frac{d\theta}{ds} \right). \quad (34)$$

Подставив это значение v_n в (31), получим:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{y}{\cos\theta} \frac{d \ln(h/h_0)}{dt} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{y}{\cos\theta} \frac{d\theta}{ds} \right) \left(\frac{\partial F}{\partial x} \sin\theta + \frac{\partial F}{\partial y} \cos\theta \right) = 0. \quad (35)$$

Прделаем в этом уравнении следующие преобразования. Представим функцию F в виде: $F(x, y, t) = y - \varphi(x, t) = 0$. Тогда имеем:

$$\begin{aligned} y = \varphi(x, t), \quad \frac{\partial F}{\partial t} = -\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 1, \\ \cos\theta = -\left(1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right)^{1/2}, \quad \sin\theta = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \left(1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (36)$$

По определению $\frac{d\theta}{ds}$ - кривизна кривой, отсюда следует:

$$\frac{d\theta}{ds} = -\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) \left(1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right)^{-3/2}. \quad (37)$$

Подставив (36), (37) в (35), окончательно получим:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \ln h} - \varphi \left(1 + \frac{1}{2} \varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right) = 0. \quad (38)$$

Поскольку при $t = 0$, $h = h_0$, имеем $\ln(h/h_0) = 0$ и начальным условием для $\varphi(x, \ln(h/h_0))$ будет следующее:

$$\ln(h/h_0) = 0, \quad \varphi = \varphi_0(x). \quad (39)$$

Общее решение системы (38),(39) не представляется возможным, поэтому ограничимся рассмотрением одного примера (кроме одного тривиального, когда начальная область есть круг).

Пусть в начальный момент область является эллипсом:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (40)$$

Предположим, в процессе растекания область будет оставаться эллипсом с полуосями, зависящими от $\ln(h/h_0)$, и подставим это выражение в уравнение (38). Определив из него величины $a(\ln(h/h_0))$ и $b(\ln(h/h_0))$ при условии (39), получим контур области в процессе течения в виде эллипса такого вида:

$$\frac{x^2}{\left(a^2 - b^2 \right) e^{-2 \ln(h/h_0)}} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{a e^{2 \ln(h/h_0)}}{\left(a^2 - b^2 + b^2 e^{2 \ln(h/h_0)} \right)^{1/2}}. \quad (41)$$

Из уравнения (41) следует интересный результат. Перейдя к пределу, положив $\ln(h/h_0) \rightarrow \infty$, получим такое уравнение:

$$x^2 + y^2 = a b e^{\ln(h/h_0)}, \quad (42)$$

т.е. в пределе область стремится к кругу радиуса $R(\ln(h/h_0)) = \sqrt{a b} e^{\ln(h/h_0)/2}$. Этот результат имеет простой смысл. Из условия сохранения массы имеем

$$\pi a b h_0 = \pi R^2 (\ln(h/h_0)) h,$$

откуда $R(\ln(h/h_0)) = \sqrt{a b} \sqrt{\frac{h}{h_0}}$.

Полученный результат есть частный случай общего принципа, согласно которому любая область в пределе стремится к круговой.

Итак, **основной результат**, который необходимо осмыслить, проделав предложенную работу, состоит в том, что в процессах течения пластического вещества в виде тонкого слоя между двумя движущимися жесткими поверхностями инструмента внутренние касательные напряжения оказываются малыми сравнительно с нормальными, причем два нормальных напряжения в поперечных сечениях слоя можно полагать в первом приближе-

нии равными, при этом третье нормальное напряжение постоянно по толщине слоя, равно контактному давлению слоя на инструмент и определяется из условия пластичности:

$$-\sigma_3 = p \approx q + \sigma_s. \quad (43)$$

Другой основной результат представляет собой кинематическое условие: поперечные скорости частиц, расположенных по нормали, мало отличаются между собой и могут считаться одинаковыми.

Представленная классическая теория течения в тонких слоях имеет дальнейшее развитие в различных направлениях: учитываются деформации инструментов; принимается, что материал слоя обладает сжимаемостью и упрочнением; допускается анизотропия трения на поверхностях контакта и др. Так, например, вблизи точек резкого изменения кривизны контура необходимо учитывать касательные напряжения, т.к. их отсутствие может привести к неправильному нахождению поля скоростей. Для этого необходимо разработать теорию в следующем приближении и решать нелинейную задачу.

2. МЕТОДИКА ПРОВЕДЕНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА

Программу эксперимента можно задавать двумя путями:

1. На прессе задается усилие Q и экспериментально определяется конечная толщина пластинки h_3 . По формуле (27) рассчитывается теоретическая толщина пластинки h_T , затем сравнивается с h_3 (определяются абсолютное и относительное отклонение теоретической величины от экспериментальной).

2. Выбирается конечная толщина пластинки h_3 и задается в эксперименте (контролируется индикатором сближения рабочих поверхностей штампа). В эксперименте по данным силоизмерителя определяется усилие Q_3 и затем сравнивается с теоретическим значением Q_T , соответствующим толщине h_3 и найденное по соотношению (27).

3. Теперь поставим вопрос о нахождении такой толщины h_{\max} , до которой будет осажена пластинка при полном затекании в паз. Объем материала, стекающий в паз, равен: $\Delta V = (h_0 - h)y\Delta x$ (рис.4), занимает площадь:

$\Delta S = \delta\Delta x$ и стекает на глубину l' с двух сторон, т.е. $l' = \frac{\Delta V}{\Delta S}$. Максимально

возможная глубина затекания в паз равна:

$$l = \max_y l' \Big|_{y=d/2} = 2 \frac{d(h_0 - h)}{2\delta}.$$

Отсюда имеем для максимальной толщины, на которую может быть осажена пластинка следующее выражение:

$$h_{\max,T} = h_0 - \frac{l\delta}{a}. \quad (44)$$

В работе предлагается проверить, осуществлено ли в эксперименте по программе 1 полное затекание материала в паз. Если осуществлено, то можно сравнить h_3 и $h_{\max,T}$, найденное по соотношению (44) (найти относительную и абсолютную погрешности).

3. ПОРЯДОК ПРОВЕДЕНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА И ОФОРМЛЕНИЕ ОТЧЕТА

1. Определение предела текучести свинца из опыта на осадку цилиндрического образца.
2. Измерение геометрии матрицы и толщины свинцовой пластинки.
3. Расчет усилия, необходимого для полного затекания материала в паз.
4. Проведение эксперимента на сжатие свинцовой пластинки.
5. Сравнение результатов эксперимента с теоретическими расчетами.

Список литературы

1. Ильющин, А.А. Вопросы теории течения пластического вещества по поверхностям / А.А. Ильющин // ПММ. Сер. мат. мех., 1954.- Т. 18. - № 3. - С. 265-288.
2. Ильющин, А.А. Полная пластичность в процессах течения между жесткими поверхностями, аналогия с песчаной насыпью и некоторые

приложения / А.А. Ильющин // ПММ. Сер. мат. мех., 1955. Т. 19. № 6. С. 693-713.

3. Огибалов, П.М. Задачи пластических течений / П.М. Огибалов, И.А. Кийко // Инженерный журнал. – 1961.1.№ 3. С. 181-184.

4. Кийко, И.А. Пластическое течение металлов. Научные основы прогрессивной техники и технологии / И.А. Кийко - М.: Машиностроение, 1985.- 376 с.

5. Вязко-пластическое течение материалов / под общ. ред. И.А. Кийко. – М.: Изд-во МГУ, 2003. – Ч.1. – 98 с. – Ч.2. –131 с.

Учебное издание

*Васин Р. А.,
Демидович П. Н.,
Завойчинская Э. Б.,
Муравлев А. В.,
Рязанцева М. Ю.,
Тунгускова З. Г.,
Чистяков П. В.,
Шарафутдинов Г. З.,
Шешенин С. В.*

ПРАКТИКУМ ПО МЕХАНИКЕ ДЕФОРМИРОВАНИЯ МЕТАЛЛОВ И КОМПОЗИТОВ

Учебное пособие

Под редакцией
академика РАН Ю.Д. Третьякова,
академика РАН Г.Г. Чёрного,
профессора Ф. В. Гречникова

Технический редактор М. В. Хардин
Редакторская обработка Т. К. Кретирина
Корректорская обработка Ю. Н. Литвинова
Доверстка Т. Е. Половнева

Подписано в печать 22.12.07. Формат 60x84 1/16.

Бумага офсетная. Печать офсетная.

Печ. л. 5,0.

Тираж 120 экз. Заказ . ИП-ж142/2007

Самарский государственный
аэрокосмический университет.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

Изд-во Самарского государственного
аэрокосмического университета.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.