

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра математической физики

**Х.А. Чиханов**

**СИММЕТРИЯ И РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ  
В УРАВНЕНИИ ГЕЛЬМГОЛЬЦА**

*Учебное пособие*

Издательство «Самарский университет»  
2000

*Печатается по решению Редакционно-издательского совета  
Самарского государственного университета*

ББК 22.161.1

С 374

**Чиханов Х.А. Симметрия и разделение переменных в уравнении Гельмгольца: Учебное пособие.** Самара: Изд-во «Самарский университет», 2000. 54 с.

**ISBN 5-86465-145-1**

В пособии излагается содержание первой главы монографии У.Миллера «Симметрия и разделение переменных», переработанное автором с расшифровкой формул, а также приводятся некоторые таблицы из этой монографии. Во второй части пособия даны простейшие сведения о функциях Бесселя, гипергеометрических функциях, функциях параболического цилиндра, функциях Матье и др. Пособие рекомендовано студентам и аспирантам, желающим использовать элементы группового анализа в научной работе.

Рецензент канд. ист. наук, доцент А.В. Горохов

Ц 1602070100-089 Без объявл.  
6К4(03)-00

ISBN 5-86465-145-1

© Чиханов Х.А., 2000  
© Издательство «Самарский университет», 2000

# Содержание

Введение.....	5
<b>I Симметрия и разделение переменных</b>	<b>6</b>
1 Векторные поля	6
2 Группы Ли	7
3 Алгебры Ли и группы Ли	8
4 Операторы симметрии уравнения Гельмгольца	10
5 Минимальный многочлен	11
6 Функции от матрицы	14
7 Матричные ряды	16
8 Расщепление представления группы	17
9 Операторы симметрии и разделение переменных	18
10 Интегральное представление решений уравнения Гельмгольца	20
11 Случай полярных координат (орбита 2)	23
12 Случай декартовых координат (орбита 1)	24
13 Случай параболических координат (орбита 3)	25
14 Случай эллиптических координат (орбита 4)	27
15 Взаимосвязь базисов	29
<b>II Специальные функции</b>	<b>32</b>
16 Цилиндрические функции	32
17 Символ Похгаммера	33
18 Гамма и бэ́та-функции Эйлера	33
19 Гипергеометрическая функция Гаусса	34

20	Вырожденная гипергеометрическая функция	35
21	Функции параболического цилиндра	36
22	Функции Матъе	38
23	Таблицы операторов симметрии	40
	Библиографический список .....	52

## Введение

Настоящее учебное пособие содержит изложение первой главы монографии У.Миллера "Симметрия и разделение переменных", а также некоторый справочный материал из этой монографии. Хотя уже прошло двадцать с лишним лет после издания книги Миллера, она не потеряла актуальности и сейчас, особенно в связи с бурным развитием группового (а также и дискретного группового) анализа. Круг дифференциальных уравнений, допускающих нетривиальные алгебры Ли операторов симметрии, достаточно узок, но, с другой стороны, он включает в себя уравнения, важные для приложений. Предлагаемая техника вычислений имеет значение также для теории специальных функций и теории гильбертовых пространств.

Материал данного пособия использовался при чтении различных спецкурсов на мехмате СамГУ. Некоторые вычисления в монографии Миллера опущены, и автору пришлось их самостоятельно восстанавливать. Приятно отметить, что у Миллера почти нет опечаток. В начале монографии имеется замечательное предисловие редактора серии "Специальные функции" Ричарда Аски. К сожалению, нет возможности привести его здесь (это 20 стр.); хочется надеяться, что монография Миллера будет переиздана на русском языке снова и тиражом не 8 тыс.экз., а большим.

Элементы теории функций от матриц взяты из книги Гантмахера. Надо сказать, что студентам непросто изучать излагаемый материал, так как, по большому счету, надо знать и ТФКП, и теорию обобщенных функций; приходится использовать целый ряд специальных функций. Поэтому во второй части пособия приведены краткие сведения по тем функциям, которые встречаются в тексте. Разумеется, данное пособие не следует рассматривать как справочник по специальным функциям или как учебник по теории аналитических функций от матриц. Последний параграф, содержащий ряд таблиц, может служить источником упражнений для студентов.

В заключение хочется подчеркнуть, что слово "симметрия" хорошо отражает красоту математических построений монографии У.Миллера.

2 февраля 1999 г.

## Часть I

# Симметрия и разделение переменных

## 1 Векторные поля

**Определение 1.1.** Говорят, что в области  $D \subset R^n$  задано векторное поле  $\vec{\xi}$ , если компоненты  $\xi^i$  вектора  $\vec{\xi}$  являются функциями от координат:  $\xi^i = \xi^i(x^1, \dots, x^n)$ . Вектор  $\vec{\xi}$  можно интерпретировать как скорость движения; траектории движения находятся с помощью интегрирования автономной системы

$$d\vec{\xi}/dt = \vec{\xi}. \quad (1.1)$$

Если функции  $\xi^i \in C^1$ , то существует единственное решение автономной системы, проходящее через точку  $\vec{x}_0$ , причем эта кривая будет гладкой (т.е. вектор касательной непрерывно поворачивается - компоненты вектора суть непрерывные функции). Эта кривая называется линией векторного поля (интегральная кривая системы (1.1)).

**Определение 1.2.** Производной от функции  $f$  вдоль векторного поля  $\vec{\xi}$  называется сумма

$$\xi^i \partial f / \partial x^i \equiv \partial_{\xi} f. \quad (1.2)$$

Значок суммы при повторяющихся верхних и нижних индексах мы часто опускаем - это одно из правил, применяемых, например, в тензорном исчислении (в этой связи заметим, что верхний индекс  $i$  у  $x^i$  является нижним в формуле (1.2)). В случае, когда линия поля задается натуральным уравнением  $\vec{x} = \vec{x}(s)$  (т.е.  $|d\vec{x}/ds| = 1$ ), производная вдоль векторного поля является классической производной по направлению.

**Определение 1.3.** Коммутатором векторных полей  $\vec{\xi}$  и  $\vec{\eta}$  называется векторное поле  $[\vec{\xi}, \vec{\eta}]$  с компонентами

$$[\vec{\xi}, \vec{\eta}]^i = \xi^j \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j} - \eta^j \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j}. \quad (1.3)$$

Фактически последнее выражение является так называемой производной Ли  $L_{\xi} \vec{\eta}$ , взятой от вектора  $\vec{\eta}$  вдоль векторного поля  $\vec{\xi}$ . Мы, однако, не собираемся здесь излагать подробно элементы тензорного исчисления и отсылаем читателя к монографии [ДНФ], гл.3 (хотя нам это не понадобится).

**Определение 1.4.** Векторное поле  $\vec{\xi}$  касается поверхности  $f(\vec{x}) = 0$ , если  $\partial_{\xi} f|_{f=0} = 0$ .

**Теорема 1.1.** Если векторные поля  $\vec{\xi}$  и  $\vec{\eta}$  касаются гиперповерхности  $f(x^1, x^2, \dots, x^n) = 0$ , то их коммутатор также касается этой гиперповерхности.

Доказательство: Отметим сначала, что производная вдоль векторного поля является полной производной от  $f$  по параметру  $t$ , если для кривой  $\vec{x} = \vec{x}(t)$   $\vec{\xi} = d\vec{x}/dt$ .

Поэтому производная вдоль векторного поля является инвариантом преобразования координат; также и коммутатор векторных полей инвариантен, поскольку он выражается через производные вдоль векторного поля:

$$[\bar{\xi}, \bar{\eta}]^i \frac{\partial f}{\partial x^i} = (\partial_\xi \partial_\eta - \partial_\eta \partial_\xi) f. \quad (1.4)$$

Поэтому достаточно рассмотреть случай  $f(\mathbf{x}) \equiv x^n$ . Имеем:  $\partial_\xi f|_{f=0} = \partial_\xi|_{f=0} x^n = \xi^n = 0$ . Аналогично,  $\eta^n = 0$ . Далее,  $[\partial \xi^n / \partial x^i]|_{f=0} = \partial / \partial x^i [\xi^n|_{x^n=0}] = 0$  при  $i < n$ . Также  $[\partial \eta^n / \partial x^i]|_{f=0} = 0$  при  $i < n$ . Следовательно,  $\partial_{[\xi, \eta]} x^n|_{x^n=0} = [\xi, \eta]^n = \xi^i \partial \eta^n / \partial x^i - \eta^i \partial \xi^n / \partial x^i$ . ♠

## 2 Группы Ли

**Определение 2.1.** Группой называется множество  $G$ , в котором:

1) для любых  $a, b \in G$  определена групповая операция  $*$  ("умножение") и существует в  $G$  единственный элемент  $c = a * b$ , 2) существует единственный элемент  $e$  - единица группы такой, что  $a * e = e * a = a$  для любого  $a$  из  $G$ , 3) Для любого  $a \in G$  существует единственный элемент  $a^{-1}$  такой, что  $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ .

**Определение 2.2.** Пусть  $X$  - множество, в котором определены преобразования  $T(g) : \bar{x} \rightarrow T(g)\bar{x}$ , причем

- 1) каждому элементу группы  $g$  соответствует единственное преобразование  $T(g)$ ,
- 2)  $T(e) = E$  (тождественное преобразование),
- 3)  $T(g_1) \circ T(g_2) = T(g_1 * g_2)$ .

(Здесь  $T(g_1) \circ T(g_2)$  - суперпозиция преобразований - сначала  $T(g_2)$ , а потом  $T(g_1)$ .) Тогда говорят, что на  $X$  действует представление группы. Множество всех преобразований  $T(g)$  естественно обозначить через  $T(G)$ . Фактически группа всегда задается через представление.

**Теорема 2.1.** Множество  $T(G)$  является группой. ♠

**Определение 2.3.** Группа  $G$  называется группой Ли, если:

- 1) группа  $G$  является дифференцируемым многообразием,
- 2) отображение  $G \times G \rightarrow G$ , задаваемое умножением  $c = a * b$ , непрерывно по обоим переменным,
- 3) отображение  $G \rightarrow G^{-1} (c = a^{-1})$  непрерывно. Если группа является областью в банаховом или гильбертовом пространстве, то естественно задавать топологию с помощью нормы.

**Определение 2.4.** Множество представлений  $T(G)$  называется группой Ли, если отображение  $G \times X \rightarrow X$ , задаваемое преобразованиями  $T(g)$  по формуле  $\bar{y} = T(g)\bar{x}$  непрерывно по  $g$  и по  $\bar{x}$ . Строго говоря, следовало бы ввести в  $T(G)$  какую-то операторную топологию, относительно которой  $T(G)$  было бы группой Ли в смысле предыдущего определения, но мы оставим такое развлечение для слишком педантичного читателя.

**Пример 2.1.** Классическим примером группы Ли является единичная окружность  $S^1$ .

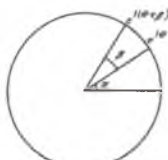


Рис 2.1

Пусть  $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$  — точка единичной окружности и одновременно комплексное число, причем  $e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha} * e^{i\beta}$ . В качестве расстояния между точками  $e^{i\alpha}$  и  $e^{i\beta}$  можно ввести обычное расстояние, измеряемое вдоль окружности, т.е.

$$\rho(e^{i\beta}, e^{i\gamma}) = \min(|\gamma - \beta|). \quad (2.1)$$

Таким образом, множество комплексных чисел вида  $e^{i\alpha}$  является группой Ли.

С другой стороны, с числом  $e^{i\alpha}$  можно связать поворот на угол  $\alpha$ . Представление группы здесь фактически совпадает с самой группой.

**Пример 2.2.** Группа  $E(2)$  движений плоскости.

Преобразования, определяющие движение

$$\begin{cases} \xi = x\cos\theta + y\sin\theta + a \\ \eta = -x\sin\theta + y\cos\theta + b \end{cases}, \quad (2.2)$$

состоят из поворота на угол  $\alpha$  и сдвигов вдоль осей. Если ввести вектор-строки  $\bar{\xi} = [\xi, \eta, 1]$  и  $\bar{x} = [x, y, 1]$  и матрицу

$$g(\theta, a, b) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & a \\ \sin\theta & \cos\theta & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.3)$$

то можно определить оператор  $T(g)$  с помощью умножения вектора-строки справа на матрицу:

$$\bar{\xi} = T(g)\bar{x} = \bar{x}g. \quad (2.4)$$

Имеем

$$T(g^1)T(g^2)\bar{x} = T(g^1)(\bar{x}g^2) = (\bar{x}g^1)g^2 = \bar{x}(g^1g^2) = T(g^1g^2)\bar{x}.$$

Таким образом, выполняется основное соотношение  $T(g^1)T(g^2) = T(g^1g^2)$  для представления группы. Кстати, именно из-за этого мы умножаем на матрицу  $g$  справа. Отметим также, что матрицы вида  $g$  образуют матричное представление группы  $E(2)$  (трехпараметрическая группа).

### 3 Алгебры Ли и группы Ли

**Определение 3.1.** Алгеброй Ли называется алгебра  $L$ , в которой введен оператор  $[\cdot, \cdot]$ , называемый коммутатором, такой, что

$$1) [A, B] = -[B, A] \text{ (антисимметричность),}$$

$$2) [[A, B], C] + [[B, C], A] + [[C, A], B] = 0 \text{ (тождество Якоби).}$$

**Пример 3.1.** Дифференциальные операторы

$$P_1 = \partial_x, \quad P_2 = \partial_y, \quad M = y\partial_x - x\partial_y, \quad (3.1)$$

образуют трехмерную алгебру Ли, для которой выполняются соотношения коммутации:

$$[M, P_1] = P_2, \quad [M, P_2] = -P_1, \quad [P_1, P_2] = 0. \quad (3.2)$$

**Пример 3.2.** Матрицы

$$M = \begin{bmatrix} \cdot & -1 & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

образуют алгебру Ли с коммутатором  $[A, B] = AB - BA$  и с той же таблицей коммутаторов.

Ниже мы увидим, что алгебры Ли и группы Ли тесно связаны между собой.

Пусть  $G(t)$  - однопараметрическая группа Ли преобразований функций на плоскости, действующих по формуле:

$$T(t)f(x_0, y_0) = \lambda(t)f(x(t), y(t)), \quad (3.4)$$

$$\text{так что} \quad x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad \lambda(0) = 1. \quad (3.5)$$

Здесь  $T(0) = E$  - тождественное преобразование.

**Определение 3.2.** Оператор  $(d/dt)T(t)|_{t=0}$  называется инфинитезимальным оператором. Имеем:

$$\frac{d}{dt}T(t)f(x_0, y_0) = \lambda(t) \left[ \frac{dx}{dt} \partial_x + \frac{dy}{dt} \partial_y + \frac{1}{\lambda(t)} \frac{d\lambda}{dt} \right] f(x(t), y(t)) = \lambda Lf,$$

где  $L = A\partial_x + B\partial_y + C$  - дифференциальный оператор с коэффициентами

$$A = \dot{x}, \quad B = \dot{y}, \quad C = \dot{\lambda}/\lambda. \quad (3.6)$$

Таким образом, инфинитезимальный оператор здесь есть дифференциальный оператор  $L$  (при  $t = 0$ ). Автономная система дифференциальных уравнений (3.6) вместе с начальными условиями (3.5) позволяет восстановить преобразование группы. Нас сейчас интересует преобразование точек плоскости. Поэтому мы временно положим  $\lambda(t) \equiv 1$ . Нетрудно видеть, что оператор  $L$  является производной вдоль векторного поля. Таким образом, однопараметрическая группа Ли восстанавливается по ее инфинитезимальному оператору.

**Пример 3.3.**  $L = P_1 = \partial_x$ . Система (3.6) здесь имеет вид:  $\{\dot{x} = 1, \dot{y} = 0\}$ . Ее решение:  $x = x_0 + t, \quad y = y_0$  (сдвиги вдоль оси  $OX$ ).

Теперь мы хотим удивить неискушенного читателя. Рассмотрим формальный ряд

$$e^{t\partial_x} f(x_0) = \left( 1 + t\partial_x + \frac{t^2}{2!} \partial_x^2 + \dots \right) f \Big|_{x_0} = f(x_0 + t) \equiv T(t)f(x_0), \quad (3.7)$$

причем  $T'(0) = \partial_x$ , и это формально соответствует нашим представлениям об экспоненте.

**Пример 3.4.**  $L = y\partial_x - x\partial_y$ . Соответствующая система  $\dot{x} = y, \dot{y} = -x$  дает решение  $\theta = \theta_0 - t$ , где  $\theta$  - полярный угол,  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, x_0 = r \cos \theta_0, y_0 = r \sin \theta_0$ . Система имеет первый интеграл  $r = \text{const}$ . Таким образом, дифференциальному оператору  $M$  соответствует поворот на угол  $t$  по часовой стрелке.

В случае, когда группа Ли содержит  $k$  параметров, интегральные кривые располагаются на многообразии размерности  $k$  и однопараметрические подгруппы восстанавливаются аналогичным образом после решения системы (1.1) для соответствующего дифференциального оператора подгруппы (его называют еще генератором подгруппы). Что будет соответствовать коммутатору генераторов двух подгрупп? Согласно теореме 1.1 коммутатор является векторным полем, касающимся двумерного многообразия, связанного с этими подгруппами. Его можно построить, проводя из каждой точки интегральной кривой одного семейства интегральную кривую другого семейства. Согласно общей теории групп Ли, коммутатору генераторов подгрупп соответствует подгруппа той же группы Ли. Мы оставим без доказательства этот основополагающий факт. Таким образом, имеется взаимное соответствие между группой Ли преобразований и алгеброй Ли дифференциальных операторов - генераторов подгрупп.

**Пример 3.5.** Для матричной группы матриц вида  $g(\theta, a, b)$  (см. (2.3)) с умножением справа генераторами подгрупп будут, в частности, матрицы (3.3). Это несложно проверить, вычислив соответствующие инфинитезимальные операторы.

## 4 Операторы симметрии уравнения Гельмгольца

В дальнейшем мы будем иметь дело с уравнением Гельмгольца

$$Q\Psi \equiv \Psi_{xx} + \Psi_{yy} + \omega^2\Psi = 0. \quad (4.1)$$

**Определение 4.1.**  $F_0$  - пространство решений уравнения Гельмгольца, аналитических по  $x$  и  $y$  в некоторой области  $D \in R^2$ . В дальнейшем решения  $\Psi$  мы будем брать из класса  $F_0$ .

**Определение 4.2.** Линейный оператор  $L = A\partial_x + B\partial_y + C$ , где  $A, B, C$  - аналитические функции по  $x$  и  $y$ , называется оператором симметрии уравнения  $Q\Psi = 0$ , если для некоторой аналитической функции  $R(x)$

$$[L, Q] \equiv LQ - QL \equiv R(x)Q. \quad (4.2)$$

**Теорема 4.1.** Оператор симметрии  $L$  переводит решения уравнения  $Q\Psi = 0$  снова в решения. Доказательство следует из (4.2). ♠

**Теорема 4.2.** Соответствующая  $L$  однопараметрическая подгруппа Ли также сохраняет класс решений. Доказательство следует из операторного тождества

$$e^{tL} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} L^k, \quad (4.3)$$

которое обычно выписывается для групп Ли и алгебр Ли вообще. Под  $e^{tL}$  понимается преобразование из однопараметрической подгруппы Ли, соответствующей генератору действия  $L$ . Обсуждение вопроса сходимости ряда (4.3) завело бы нас слишком

далеко. Отметим, впрочем, что если не брать множитель перед функцией (случай  $C \equiv 0$ ), то можно ввести новые координаты  $u, v$  так, что будет  $L \equiv \partial_u$ . Тогда ряд (4.3) превращается в ряд Тейлора типа (3.7), а преобразования подгруппы — суть сдвиги вдоль оси  $u$ . ♣

**Теорема 4.3.** Множество  $S$  операторов симметрии уравнения Гельмгольца образует алгебру Ли (вообще говоря, с комплексными коэффициентами). ♣

Тождество (4.2) позволяет в явном виде найти операторы симметрии. Расшифровывая его, полезно иметь в виду, что оно применяется к функциям. Например,

$$\partial_{xx} B \partial_y = B_{xx} \partial_y + 2B_x \partial_{xy} + B \partial_{xxy}$$

Исключая производные 3-го порядка (они сокращаются), получим:

$$2A_x \partial_{xx} + 2(A_y + B_x) \partial_{xy} + 2B_y \partial_{yy} + (A_{xx} + A_{yy} + 2C_x) \partial_x + \\ (B_{xx} + B_{yy} + 2C_y) \partial_y + C_{xx} + C_{yy} \equiv -R(\partial_{xx} + \partial_{yy} + \omega^2).$$

Сравнивая коэффициенты, получим систему определяющих уравнений (аналогичные уравнения возникают при групповом анализе дифференциальных уравнений):

$$2A_x = -R, \quad 2B_y = -R, \quad A_y + B_x = 0, \quad (4.4)$$

$$A_{xx} + A_{yy} + 2C_x = 0, \quad B_{xx} + B_{yy} + 2C_y = 0, \quad (4.5)$$

$$C_{xx} + C_{yy} = -R\omega^2. \quad (4.6)$$

Из (4.4) следует, что  $A_x = B_y$  и  $A_{xx} + A_{yy} = 0 = B_{xx} + B_{yy}$ . Тогда из (4.5)  $C \equiv \text{const}$  и из (4.6)  $R \equiv 0$ . Теперь из (4.4)  $A = A(y)$  и  $B = B(x)$ . Следовательно,  $A' = -B' \equiv 0$ . Отсюда  $A = \alpha + \gamma y$ ,  $B = \beta - \gamma x$ ,  $C = \delta$ , и  $L = (\alpha + \gamma y) \partial_x + (\beta - \gamma x) \partial_y + \delta$ .

Таким образом, множество операторов симметрии содержит формально 4 параметра. Коэффициенты при них дают базисные операторы симметрии:

$$P_1 = \partial_x, \quad P_2 = \partial_y, \quad M = y \partial_x - x \partial_y, \quad E = 1. \quad (4.7)$$

Оператору симметрии  $E$  соответствует тождественное преобразование, поэтому мы можем его отбросить. Мы видим, что вещественная алгебра Ли  $\{P_1, P_2, M\}$  совпадает с алгеброй Ли  $E(2)$ , соответствующей группе движений плоскости  $E(2)$  с таблицей коммутаторов (3.2).

## 5 Минимальный многочлен

Нам понадобятся в дальнейшем некоторые матричные ряды, например

$$e^A = E + A + \frac{A^2}{2} + \dots + \frac{A^n}{n!} + \dots \quad (5.1)$$

где  $A = \{a_{ij}\}$  - квадратная матрица  $n \times n$  из комплексных чисел. Такие матрицы образуют линейное пространство над полем комплексных чисел размерности  $n^2$ .

Пусть  $\|\vec{x}\|$  - норма вектора  $\vec{x}$ , удовлетворяющая обычным условиям:

1)  $\|\vec{0}\| = 0$ , 2)  $\|\vec{x}\| > 0$ , если  $\vec{x} \neq \vec{0}$ , 3)  $\|\lambda\vec{x}\| = |\lambda|\|\vec{x}\|$ , 4)  $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$ .  
Наиболее распространенные нормы:

$$\|\vec{x}\| = \max |x_i| \quad (\text{кубическая норма}), \quad (5.2)$$

$$\|\vec{x}\| = \sum_i |x_i| \quad (\text{октаэдрическая норма}), \quad (5.3)$$

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\sum_i |x_i|^2} \quad (\text{эрмитова норма}). \quad (5.4)$$

Норма матрицы обычно выбирается так, чтобы выполнялись соотношения:

$$\begin{aligned} \|A + B\| &\leq \|A\| + \|B\|, & \|AB\| &\leq \|A\| \cdot \|B\|, \\ \|A\vec{x}\| &\leq \|A\| \cdot \|\vec{x}\|, & \|cA\| &= |c| \cdot \|A\|. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Операторная норма вводится следующим образом:

$$\|A\| = \sup_x \left\| \frac{A\vec{x}}{x} \right\|. \quad (5.6)$$

**Определение 5.1.** Матричным многочленом называется многочлен степени  $m$

$$F(\lambda) = F_0\lambda^m + F_1\lambda^{m-1} + \dots + E \quad (5.7)$$

с матричными коэффициентами. Многочлен с числовыми коэффициентами называют скалярным многочленом (естественно рассматривать матрицы порядка  $> 1$ ). Степень многочлена обозначается как  $\deg(F)$ .

**Определение 5.2.** Матричный многочлен называется регулярным многочленом, если  $\det(F_0) \neq 0$ .

**Теорема 5.1.** Любой матричный многочлен  $F(\lambda)$  можно разделить слева и справа на регулярный многочлен  $G(\lambda)$ :

$$F(\lambda) = G(\lambda)H(\lambda) + R(\lambda), \quad \deg(R(\lambda)) < \deg(F(\lambda))$$

$$F(\lambda) = H^*(\lambda)G(\lambda) + R^*(\lambda), \quad \deg(R^*(\lambda)) < \deg(F(\lambda)).$$

Процедура деления напоминает обычное деление скалярных многочленов (или деление целых чисел). ♠

**Теорема 5.2.** (Обобщенная теорема Безу). При правом или левом делении матричного многочлена  $F(\lambda)$  на бином  $\lambda E - A$  справедливы формулы

$$F(\lambda) = Q(\lambda)(\lambda - A) + R, \quad F(\lambda) = (\lambda - A)Q^*(\lambda) + R^*,$$

где остатки от деления равны значениям многочлена:  $R = F(A)$ ,  $R^* = F^*(A)$ . Здесь  $F(A)$  ( $F^*(A)$ ) - правое (левое) значение матричного многочлена  $F(\lambda)$ , когда

при подстановке  $A$  вместо  $\lambda$  степени  $A$  ставятся справа (слева) от коэффициентов многочлена  $F$ :

$$F(A) = F_0 A^m + \dots + F_m, \quad F^*(A) = A^m F_0 + \dots + F_m \quad \spadesuit$$

**Определение 5.3.** Скалярный многочлен  $\varphi(\lambda)$  называется аннулирующим матрицу  $A$ , если  $\varphi(A) = 0$ .

**Определение 5.4.** Матрица  $B(\lambda)$ , состоящая из алгебраических дополнений матрицы  ${}^t(\lambda E - A)$ , называется присоединенной матрицей. Здесь  ${}^t B$  - транспонированная матрица.

**Определение 5.5.** Матрица  $\lambda E - A$  называется характеристической матрицей.

**Определение 5.6.** Определитель характеристической матрицы  $\Delta(\lambda) = \det(\lambda E - A)$  называется характеристическим многочленом матрицы  $A$ .  
**Теорема 5.3.**

$$(\lambda E - A)B(\lambda) = B(\lambda)(\lambda E - A) = \Delta(\lambda)E \quad (5.8)$$

Доказательство следует из свойств определителя и его алгебраических дополнений.  $\spadesuit$

Непосредственным следствием теоремы является

**Теорема 5.4.** (Гамильтона-Кэли). Каждая матрица удовлетворяет своему характеристическому уравнению  $\Delta(A)$ .  $\spadesuit$

**Определение 5.7.** Минимальным многочленом называется аннулирующий многочлен матрицы  $A$  наименьшей степени со старшим коэффициентом 1.

**Теорема 5.5.** Произвольный аннулирующий многочлен делится на минимальный (минимальный делит аннулирующий).  $\spadesuit$

**Теорема 5.6.** Минимальный многочлен единственен.  $\spadesuit$

**Определение 5.8.** Пусть  $D_{n-1}(\lambda)$  - наибольший общий делитель элементов матрицы  $B(\lambda)$ , т.е.  $D_{n-1}(\lambda)$  - Н.О.Д. миноров матрицы  $\lambda E - A$  порядка  $n - 1$ . Тогда

$$B(\lambda) = D_{n-1}(\lambda)C(\lambda). \quad (5.9)$$

Матрица  $C(\lambda)$  называется приведенной присоединенной матрицей для  $\lambda E - A$ .

**Теорема 5.7.** Минимальный многочлен  $\psi$  матрицы  $A$  вычисляется по формуле

$$\psi(\lambda) = \Delta(\lambda)/D_{n-1}(\lambda). \quad (5.10)$$

Доказательство вытекает из тождества  $\Delta(\lambda)E = (\lambda E - A)C(\lambda)D_{n-1}(\lambda)$ , из которого следует, что характеристический многочлен  $\Delta(\lambda)$  делится на  $D_{n-1}(\lambda)$ . Поэтому  $\psi(\lambda)E = (\lambda E - A)C(\lambda)$ , т.е.  $\psi(\lambda)$  - аннулирующий многочлен для  $A$ . Пусть  $\psi(\lambda) = \psi^*(\lambda)\chi(\lambda)$ , где  $\psi^*(\lambda)$  - минимальный многочлен. Так как минимальный многочлен является аннулирующим, то  $\psi^*(\lambda)E = (\lambda E - A)C^*(\lambda)$ . Следовательно,  $\psi(\lambda) = \psi^*(\lambda)\chi(\lambda)E = (\lambda E - A)C^*(\lambda)\chi(\lambda)$ . Из сравнения последнего равенства с предыдущим выражением для  $\chi(\lambda)E$  имеем:  $C(\lambda) = C^*(\lambda)\chi(\lambda)$ . Это противоречит тому, что приведенная присоединенная матрица получается выделением общего

множителя. Единственно допустимый случай, когда  $\chi(\lambda) \equiv const$ . Так как первый коэффициент у  $\psi(\lambda)$  и  $\psi^*(\lambda)$  равен 1, то  $\chi(\lambda) \equiv 1$ . ♣

**Теорема 5.8.** Корнями минимального многочлена являются различные корни характеристического многочлена  $\Delta(\lambda)$ . Это следует из тождества

$$[\psi(\lambda)]^n = \det(\psi(\lambda)E) = \det[(\lambda E - A)C(\lambda)] = \Delta(\lambda) \cdot \det[C(\lambda)]. \quad \spadesuit$$

## 6 Функции от матрицы

**Определение 6.1.** Пусть

$$\psi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} (\lambda - \lambda_2)^{m_2} \dots (\lambda - \lambda_s)^{m_s} \quad (6.1)$$

- минимальный многочлен матрицы  $A$ . Множество  $[f(\lambda_k), f'(\lambda_k), \dots, f^{(m_k-1)}(\lambda_k); k = 1, 2, \dots, s]$  называется значением многочлена  $f(\lambda)$  на спектре матрицы  $A$  и обозначается через  $f(\Lambda_A)$ . Если все указанные значения равны 0, то полагаем  $f(\Lambda_A) = 0$ .

**Теорема 6.1.** Если  $f(\Lambda_A) = 0$ , то  $f(A) = 0$ . Доказательство следует из факта, что  $f(\Lambda_A)$  делит минимальный многочлен:  $f(\lambda) = \psi(\lambda) \cdot g(\lambda)$ . ♣

**Следствие.** Если  $f(\Lambda_A) = g(\Lambda_A)$ , то  $f(A) = g(A)$ .

Итак, для построения функции от матрицы достаточно построить многочлен, принимающий на спектре матрицы  $\Lambda_A$  те же значения, что и  $f(\lambda)$ . Отметим сначала два важных случая:

1<sup>0</sup>.  $\psi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \dots (\lambda - \lambda_m)$  (все корни простые). Тогда имеем:

$$f(\lambda) = \sum_{j=1}^s \frac{\prod_{k \neq j} (\lambda - \lambda_k)}{\prod_k (\lambda_j - \lambda_k)} f(\lambda_j) \quad \text{и} \quad f(A) = \sum_{j=1}^s \frac{\prod_{k \neq j} (A - \lambda_k E)}{\prod_k (\lambda_j - \lambda_k)} f(\lambda_j) \quad (6.2)$$

(штрих ' означает, что произведение  $\prod$  берется для  $k \neq j$ ).

2<sup>0</sup>.  $\psi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^m$ . Здесь мы используем ряд Тейлора:

$$f(\lambda) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(\lambda - \lambda_1)^k}{k!} f^{(k)}(\lambda_1) \quad \text{и} \quad f(A) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(A - \lambda_1 E)^k}{k!} f^{(k)}(\lambda_1). \quad (6.3)$$

Рассмотрим общий случай. Пусть  $f(\lambda)$  - многочлен степени  $m - 1$  (на 1 меньше, чем степень минимального многочлена). Необходимо получить разложение

$$f(\lambda) = \sum_{k=1}^s [f(\lambda_k) \varphi_{k1} + f'(\lambda_k) \varphi_{k2} + \dots + f^{(m_k-1)}(\lambda_k) \varphi_{km_k}], \quad (6.4)$$

где  $\varphi_{kj}(\lambda)$  - неизвестные пока многочлены, не зависящие от  $f(\lambda)$ . Используя последнее предположение, можно брать вместо  $f(\lambda)$  различные многочлены и получать систему для нахождения  $\varphi_{kj}(\lambda)$ . Удобно, например, брать многочлены  $\psi(\lambda)/(\lambda - \lambda_j)^k, k = 1, \dots, m_k$ . Тогда система расщепляется на отдельные системы для каждого

корня. Рассмотрим пример. Пусть минимальный многочлен есть  $\psi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^2(\lambda - \lambda_2)$ . Имеем:

$$f(\lambda) = f(\lambda_1)\varphi_{11} + f'(\lambda_1)\varphi_{12} + f(\lambda_2)\varphi_2, \quad (\lambda - \lambda_1)^2 = (\lambda_2 - \lambda_1)^2\varphi_2.$$

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = (\lambda_1 - \lambda_2)\varphi_{12}, \quad \lambda - \lambda_2 = (\lambda_1 - \lambda_2)\varphi_{11} + \varphi_{12}. \quad \text{Отсюда}$$

$$\varphi_2 = \frac{(\lambda - \lambda_1)^2}{(\lambda_2 - \lambda_1)^2}, \quad \varphi_{12} = \frac{(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)}{(\lambda_1 - \lambda_2)}, \quad \varphi_{11} = \frac{(\lambda - \lambda_2)(2\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda)}{(\lambda_2 - \lambda_1)^2},$$

$$f(A) = f(\lambda_1) \frac{(A - \lambda_2 E)(2\lambda_1 E - \lambda_2 E - A)}{(\lambda_2 - \lambda_1)^2} + f'(\lambda_1) \frac{(A - \lambda_1 E)(A - \lambda_2 E)}{(\lambda_1 - \lambda_2)} + f(\lambda_2) \frac{(A - \lambda_1 E)^2}{(\lambda_2 - \lambda_1)^2}.$$

Этот способ удобен для практического использования. Вернемся к формуле (6.4). Имеем:

$$\frac{1}{\lambda - \mu} = \sum_{k=1}^s \left[ \frac{\varphi_{k1}(\mu)}{\lambda - \lambda_k} + \dots + \frac{(m_k - 1)! \varphi_{km_k}(\mu)}{(\lambda - \lambda_k)^{m_k}} \right]. \quad (6.5)$$

Подставляя слева  $(\lambda E - A)^{-1}$  вместо  $(\lambda - \mu)^{-1}$ , получим:

$$(\lambda E - A)^{-1} = \sum_{k=1}^s \left[ \frac{1 \cdot Z_{k1}}{\lambda - \lambda_k} + \dots + \frac{(m_k - 1)! \cdot Z_{km_k}}{(\lambda - \lambda_k)^{m_k}} \right], \quad (6.6)$$

где  $Z_{kj} = \varphi_{kj}(A)$  - неизвестные пока матрицы. Однако  $(\lambda E - A)^{-1} = C(\lambda)/\psi(\lambda)$  и формула (6.6) дает разложение на элементарные дроби; коэффициенты разложения можно вычислить по обычным формулам:

$$Z_{kj} = \frac{1}{(j-1)!(m_k-j)!} \left[ \frac{C(\lambda)(\lambda - \lambda_k)^{m_k}}{\psi(\lambda)} \right]_{\lambda=\lambda_k}^{(m_k-j)}, \quad k = 1, 2, \dots, s; \quad j = 1, 2, \dots, m_k. \quad (6.7)$$

Теперь согласно (6.4)

$$f(A) = \sum_{k=1}^s [f(\lambda_k)Z_{k1} + \dots + f^{(m_k-1)}(\lambda_k)Z_{km_k}] = \sum_{k=1}^s \frac{\left[ \frac{C(\lambda)(\lambda - \lambda_k)^{m_k} f(\lambda)}{\psi(\lambda)} \right]_{\lambda=\lambda_k}^{(m_k-1)}}{(m_k - 1)!}. \quad (6.8)$$

Заметим, что матрицу  $C$  можно построить, используя многочлен  $\Psi(\lambda, \mu) = (\psi(\lambda) - \psi(\mu))/(\lambda - \mu)$ . Действительно,  $\Psi(\lambda E, A)(\lambda E - A) = \psi(\lambda)E - \psi(A) = \psi(\lambda)E$  и в силу единственности деления  $C(\lambda) = \Psi(\lambda E, A)$ . Таким образом, формула (6.8) также дает практический способ построения интерполяционного многочлена. Это представление функции от матрицы в виде многочлена называется интерполяционным многочленом Лагранжа-Сильвестера.

Почему же произвольная функция от матрицы превращается в многочлен? Это связано с двумя обстоятельствами. Во-первых, речь идет об аналитических функциях от матрицы (т.е. представимых матричными рядами):

$$f(A) = \sum c_k (A - \mu E)^k. \quad (6.9)$$

Во-вторых, каждая матрица  $A$  аннулирует минимальный многочлен:  $\psi(A) = 0$ . Разделив формально частичный ряд  $f(\lambda)$  на  $\psi(\lambda)$ , мы придем к многочлену степени  $m - 1$ .

**Теорема 6.2.** Пусть точки  $\lambda_k$  спектра матрицы  $A$  окружены контуром  $\gamma$ . Тогда

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\lambda)}{\lambda E - A} d\lambda, \quad \text{где} \quad \frac{1}{\lambda E - A} = (\lambda E - A)^{-1}. \quad (6.10)$$

Интеграл берется поэлементно. Доказательство следует из (6.8). Умножая на  $(\lambda E - A)^{-1}$  и интегрируя, получим:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\lambda)}{\lambda E - A} d\lambda = \\ & = \sum_{k=1}^r \left[ \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\lambda)}{\lambda - \lambda_k} d\lambda Z_{k1} + \dots + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\lambda)}{(\lambda - \lambda_k)^{m_k}} d\lambda \cdot (m_k - 1)! Z_{km_k} \right] = \\ & = \sum_{k=1}^r [f(\lambda_k) Z_{k1} + \dots + f^{(m_k-1)}(\lambda_k) Z_{km_k}] = f(A). \quad \spadesuit \end{aligned}$$

## 7 Матричные ряды

Представление функции от матрицы

$$f(A) = \sum_{k=1}^r [f(\lambda_k) Z_{k1} + \dots + f^{(m_k-1)}(\lambda_k) Z_{km_k}] \quad (7.1)$$

является основополагающим для теории функций от матриц. Оно замечательно тем, что свойства функции от матрицы "расщепляются": от аналитической функции требуются лишь значения на спектре матрицы  $A$ , а матрицы  $Z_{kj}$  не зависят от функции  $f$ . Используя (7.1), можно выяснить сходимость матричных последовательностей.

**Теорема 7.1.** Последовательность  $f_p(A)$  сходится при  $p \rightarrow \infty$ , если она сходится на спектре  $\Lambda_A$  матрицы  $A$ . Доказательство следует из представления (7.1) для  $f_p(A)$ .  $\spadesuit$

**Пример 7.1.** Так как ряд для  $e^\lambda$  сходится во всей комплексной плоскости, то ряд

$$e^A = E + A + A^2/2 + \dots + A^n/n! + \dots \quad (7.2)$$

сходится для любой матрицы  $A$ .

**Пример 7.2.** Ряд

$$\ln(1 + \lambda) = \lambda - \lambda^2/2 + \dots + (-1)^n \lambda^{n+1}/(n+1) + \dots \quad (7.3)$$

сходится в единичном круге  $|\lambda| < 1$ . Следовательно, ряд

$$\ln(1 + A) = A - A^2/2 + \dots + (-1)^n A^{n+1}/(n+1) + \dots \quad (7.4)$$

сходится, если точки спектра находятся в этом круге.

**Пример 7.3.** Ряд

$$(E - A)^{-\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta)_n}{n!} A^n \quad (7.5)$$

сходится в том же круге  $|\lambda| < 1$ . В последних примерах ряд справа дает ту аналитическую ветвь, для которой  $f(0) = E$ . Здесь вместо  $A$  подставлена нуль-матрица.

**Теорема 7.2.** Для любых матриц  $K, L$  справедливо тождество:

$$e^{aK} L e^{-aK} = L + a[K, L] + \frac{a^2}{2}[K, [K, L]] + \frac{a^3}{3!}[K, [K, [K, L]]] + \dots = e^{a \text{Ad}_K}(L) \quad (7.6)$$

Здесь  $\text{Ad}_K(L) = [K, L]$ . Тождество будет применяться также и в случае, когда  $K, L$  - операторы.

**Теорема 7.3.** Если матрицы коммутируют, т.е.  $[A, B] = 0$ , то  $e^A e^B = e^{A+B}$ . ♣

## 8 Расщепление представления группы

Вернемся к группе движений плоскости .

**Теорема 8.1.** Матрица  $g(\theta, a, b)$  (см.(2.3)) представима в виде

$$g(\theta, a, b) = e^{\theta M} \cdot e^{aP_1 + bP_2}, \quad (8.1)$$

где  $M, P_1, P_2$  - трехмерные матрицы (3.3). Доказательство. Так как  $P_1$  и  $P_2$  - нильпотентные матрицы, т.е.  $P_i^m = 0$  при  $m = 2$ , то ряды для  $e^{aP_1}$  и  $e^{bP_2}$  обрываются. Следовательно,

$$e^{aP_1 + bP_2} = e^{aP_1} \cdot e^{bP_2} = (E + aP_1)(E + bP_2) = E + aP_1 + bP_2.$$

Легко также вычисляется матрица

$$e^{\theta M} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & \cdot \\ \sin \theta & \cos \theta & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \quad \text{Перемножая матрицы, получим (8.1).} \quad \spadesuit$$

Это наглядный пример трехмерной матричной группы Ли с инфинитезимальными операторами - матрицами  $P_1, P_2, M$ . Отметим, что

$$g(\theta, a, b)g(\theta', a', b') = g(\theta + \theta', a \cos \theta' + b \sin \theta' + a', -a \sin \theta' + b \cos \theta' + b'). \quad (8.2)$$

Замечательно то, что формула (8.1) может быть использована для записи преобразования группы  $T(g)$ , действующего на функциях:

$$T(g(\theta, a, b))\Phi(\vec{x}) = e^{\theta M} e^{aP_1} e^{bP_2} \Phi(\vec{x}) = \Phi(\vec{x}g). \quad (8.3)$$

Здесь  $\bar{x} = \{x, y, 1\}$ , а  $M, P_1, P_2$  - дифференциальные операторы (3.1), удовлетворяющие таким же соотношениям коммутации (3.2), как и матрицы  $M, P_1, P_2$  из (3.3). Формула (8.3) носит более символический характер, хотя, например, оператор  $\exp(\theta M) = \exp[\theta(y\partial_x - x\partial_y)]$  можно расшифровать, разложив в ряд экспоненту. Частные случаи формулы (8.3) для однопараметрических подгрупп имеют вид:

$$T(g(0, a, 0))\Phi(\bar{x}) = e^{aP_1}\Phi(\bar{x}) = \Phi(x + a, y), \quad (8.4)$$

$$T(g(0, 0, b))\Phi(\bar{x}) = e^{bP_2}\Phi(\bar{x}) = \Phi(x, y + b), \quad (8.5)$$

$$T(g(0, a, b))\Phi(\bar{x}) = e^{\theta M}\Phi(\bar{x}) = \Phi(x \cos \theta + y \sin \theta, -x \sin \theta + y \cos \theta). \quad (8.6)$$

## 9 Операторы симметрии и разделение переменных

Пусть  $L = A\partial_x + B\partial_y$  - оператор симметрии для уравнения Гельмгольца (4.1). Сделаем замену переменных, чтобы оператор  $L$  превратился в дифференцирование:  $L = \partial_u$ . Пусть в новых переменных оператор уравнения Гельмгольца имеет вид:

$$Q = B_{11}\partial_{uu} + B_{12}\partial_{uv} + B_{22}\partial_{vv} + C_1\partial_u + C_2\partial_v + \omega^2. \quad (9.1)$$

Так как оператор  $\partial_u$  является оператором симметрии, то подставляя  $Q$  в (4.2), получим, что коэффициенты оператора  $Q$  не зависят от  $u$ . Следовательно, переменные разделяются, и можно искать решение в виде  $\Psi_k = e^{iku}V(v)$ , где  $e^{iku}$  есть спектральная функция оператора симметрии  $\partial_u$ , а  $V(v)$  есть решение обыкновенного дифференциального уравнения

$$B_{22}V'' + (ikB_{12} + C_2)V' + (-k^2B_{11} + ikC_1 + \omega^2)V = 0. \quad (9.2)$$

Возвращаясь на плоскость  $x, y$ , получим, что существуют решения уравнения Гельмгольца, которые являются спектральными функциями оператора симметрии  $L$ :

$$L\Psi_k = ik\Psi_k \quad (9.3)$$

Как действует преобразование группы  $T(g)$  на спектральные функции? Применяя  $T(g)$  к (9.3), получим (с учётом (4.2)):

$$L^g T(g)\Psi_k = ikT(g)\Psi_k, \quad [L^g, Q^g] = R^g Q^g, \quad (9.4)$$

где

$$L^g = T(g)LT(g^{-1}), \quad Q^g = T(g)QT(g^{-1}), \quad R^g = T(g)RT(g^{-1}). \quad (9.5)$$

Таким образом, оператор  $L^g$  является оператором симметрии для преобразованного уравнения Гельмгольца с оператором  $Q^g$ . Естественно считать системы координат, связанные преобразованием группы  $T(g)$ , эквивалентными. Действие  $L \rightarrow L^g$

группы  $E(2)$  на алгебру  $E(2)$  разбивает ее на отдельные орбиты. Наглядное слово "орбита" хорошо описывает ситуацию. Заметим, что линейная комбинация двух операторов из одной орбиты не принадлежит, вообще говоря, этой орбите. Пусть

$$g_1 = e^{aP_1}, \quad g_2 = e^{bP_2}, \quad g_3 = e^{\theta M}. \quad (9.6)$$

Используя операторное равенство (7.3), получим:

$$P_1^{g_1} = P_1, \quad P_2^{g_1} = P_2, \quad M^{g_1} = M - aP_2, \quad (9.7)$$

$$P_1^{g_2} = P_1, \quad P_2^{g_2} = P_2, \quad M^{g_2} = M + bP_1, \quad (9.8)$$

$$P_1^{g_3} = \cos \alpha P_1 + \sin \alpha P_2, \quad P_2^{g_3} = -\sin \alpha P_1 + \cos \alpha P_2, \quad M^{g_3} = M. \quad (9.9)$$

Пусть теперь  $L = c_1 P_1 + c_2 P_2 + c_3 M$  - произвольный элемент алгебры  $E(2)$ . Если  $c_3 \neq 0$ , то  $(L^{g_1})^{g_2} = (c_1 + bc_3)P_1 + (c_2 - ac_3)P_2 + c_3 M = c_3 M$  при  $a = c_2/c_3$ ,  $b = -c_1/c_3$ . Если  $c_3 = 0$ , то  $L^{g_3} = (c_1 \cos \alpha - c_2 \sin \alpha)P_1 + (c_1 \sin \alpha - c_2 \cos \alpha)P_2 = hP_2$  при  $c_1 = h \sin \alpha$ ,  $c_2 = h \cos \alpha$ , т.е.  $|h| = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ . Итак,  $E(2)$  содержит две орбиты с базисными элементами  $P_2, M$ . Указанная процедура дает нам пока только две системы координат, допускающие разделение переменных - декартову и полярную. Миллер называет их координатами подгрупп. Как мы увидим ниже, существуют и другие системы координат. Соответствующие решения имеют вид:

$$\Psi_k(x, y) = e^{ikx + ik'y}, \quad k^2 + k'^2 = \omega^2 \quad \text{в декартовых координатах, и} \quad (9.10)$$

$$\Psi_k(x, y) = e^{ik\theta} J_k(\omega r) \quad \text{- в полярных.} \quad (9.11)$$

**Определение 9.1.** Оператор

$$S = A_{11}\partial_{xx} + A_{12}\partial_{xy} + A_{22}\partial_{yy} + B_1\partial_x + \partial_y + C \quad (9.12)$$

с коэффициентами из множества  $F$  функций, аналитических по  $x$  и  $y$ , называется оператором симметрии 2-го порядка, если  $[S, Q] = U(x)Q$ , где

$$U(x) = H_1(x) + \partial_x H_2(x) + \partial_y J(x). \quad (9.13)$$

**Теорема 9.1.** Оператор симметрии  $S$  является автоморфизмом множества решений уравнения Гельмгольца  $\Delta u = \omega^2 u$ .

Отметим, что введение операторов симметрии 2-го порядка обусловлено тем, что при разделении переменных обычно возникают обыкновенные уравнения 2-го порядка.

**Определение 9.2.** Оператор  $c\Delta$  на множестве решений равен  $-c\omega^2 E$  и может рассматриваться как тривиальный, поскольку он лишь сдвигает собственные значения оператора на величину  $c$ .

**Определение 9.3.**  $S/\Delta \equiv S \bmod \Delta$  - множество нетривиальных симметрий 2-го порядка с точностью до тривиальных симметрий вида  $c\Delta$ .

**Теорема 9.2.** Базис алгебры  $S/\Delta$  состоит из 9 операторов:

$$a) \quad P_1, \quad P_2, \quad M, \quad E, \quad (9.14)$$

$$b) \quad P_2^2, \quad P_1 P_2, \quad M^2, \quad \{M, P_1\}, \quad \{M, P_2\}, \quad (9.15)$$

где  $\{A, B\} = AB + BA$ . Доказательство аналогично случаю операторов 1-го порядка (см. §4). ♣

**Определение 9.4.**  $S^{(2)}$  - алгебра операторов 2-го порядка без первых производных с базисом (9.15), имеющих представление:

$$S = aP_1^2 + bP_1 P_2 + cP_2^2 + dM^2 + e\{M, P_1\} + f\{M, P_2\}. \quad (9.16)$$

**Теорема 9.3.**  $S^{(2)}$  расщепляется на 4 орбиты:  $[M^2, M^2 + r^2 P_2, \{M, P_2\}, P_1^2]$ .

Доказательство. 1)  $d \neq 0$ . Применяя переносы (9.7-8), получим из (9.16):  $\bar{S} = (S^{(1)})^{(2)} = aP_1^2 + P_1 P_2 + cP_2^2 + d(M + \bar{b}P_1 - \bar{a}P_2)^2 + e\{M + \bar{b}P_1 - \bar{a}P_2, P_1\} + f\{M + \bar{b}P_1 - \bar{a}P_2, P_2\} = (e + \bar{b}d)\{M, P_1\} + (f - \bar{a}d)\{M, P_2\} + \dots = a'P_1^2 + b'P_1 P_2 + c'P_2^2 + dM^2$ , если  $\bar{b} = -e/d, \bar{a} = f/d$ . Применяя теперь поворот (9.9), получим:  $a'[\cos \alpha P_1 + \sin \alpha P_2]^2 + b'[\cos \alpha P_1 + \sin \alpha P_2][-\sin \alpha P_1 + \cos \alpha P_2] + c'[-\sin \alpha P_1 + \cos \alpha P_2]^2 + dM^2 = a''P_1^2 + c''P_2^2 + dM^2$  при соответствующем  $\alpha$ . Последний оператор эквивалентен  $(a'' - c'')P_1^2 + dM^2$ , что приводит к  $M^2$  при  $a'' = c''$  и к  $M^2 + r^2 P_1^2$  при  $a'' \neq c''$ .

2)  $d = 0, e^2 + f^2 > 0$ . Поворот (9.9) дает из (9.16):  $[e \cos \alpha - f \sin \alpha]\{M, P_1\} + [e \sin \alpha + f \cos \alpha]\{M, P_2\} + \dots = a'P_1^2 + b'P_1 P_2 + c'P_2^2 + f'\{M, P_2\}$  где  $f' = \sqrt{e^2 + f^2}$ . Теперь с помощью переносов получим  $\{M, P_2\}$ .

3)  $d = e = f = 0$ . Повороты приводят (9.16) к  $P_2^2$  ♣

Ниже мы увидим, что этим четырем орбитам соответствуют следующие системы координат:

Таблица 1

N	Оператор	Система	Координаты	Решения
1	$P_2^2$	декартова	$x, y$	произведение экспонент
2	$M^2$	полярная	$x = r \cos \theta$ $y = r \sin \theta$	произведение экспоненты на функцию Бесселя
3	$\{M, P_2\}$	параболическая	$x = (\xi^2 - \eta^2)/2$ $y = \xi \eta$	произведение функций параболического цилиндра
4	$M^2 + d^2 P_1^2$	эллиптическая	$x = d \chi \alpha \cos \beta$ $y = d \sin \alpha \sin \beta$	произведение функций Маттье

## 10 Интегральное представление решений уравнения Гельмгольца

Мы рассматриваем решения в некоторой конкретной области, не оговаривая это каждый раз. Будем искать решения в виде преобразования Фурье

$$\Psi(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega_1 x + \omega_2 y)} \bar{h}(\omega_1, \omega_2) d\omega_1 d\omega_2 \equiv (F_{\omega_1, \omega_2 \rightarrow x, y} \bar{h}(\omega_1, \omega_2))(x, y) \equiv F \bar{h}. \quad (10.1)$$

Тогда  $Q\Psi = F[(\omega^2 - \omega_1^2 - \omega_2^2)\bar{h}] = 0$ . Последнее равенство выполняется, если  $(\omega^2 - \omega_1^2 - \omega_2^2)\bar{h}(\omega_1, \omega_2) = 0$ . Первоначальный вывод отсюда следует, что  $\bar{h} \equiv 0$ . Однако, выходя в пространство распределений (обобщенных функций), получаем, что  $\bar{h}$  сосредоточена на окружности  $\omega_1^2 + \omega_2^2 = \omega^2$ , т.е.  $\bar{h} \equiv 0$  вне окружности. И так,  $\bar{h} = \delta(\omega - s)h(\varphi)/\omega$ , где  $\omega_1 = s \cos \varphi, \omega_2 = s \sin \varphi$ , а  $\delta$  - дельта-функция Дирака, сосредоточенная на окружности  $s = \omega$ . Теперь

$$\Psi(x, y) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega(x \cos \varphi + y \sin \varphi)} h(\varphi) d\varphi \equiv Ih. \quad (10.2)$$

Читатели, не знакомые с теорией обобщенных функций, могут обратиться непосредственно к представлению (10.2). Отметим нестрогое

**Определение 10.1.** Дельта-функция Дирака  $\delta(x - x_0)$  есть "функция", которая равна нулю при  $x \neq 0$  и для любой непрерывной функции

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) f(x) dx = f(x_0). \quad (10.3)$$

Определение нестрогое, потому что интеграл здесь надо фактически рассматривать как функционал.

**Определение 10.2.**  $S_1$  - единичная окружность на плоскости.

**Определение 10.3.**  $L_2(S_1)$  - гильбертово пространство  $L_2[-\pi, \pi]$  со скалярным произведением

$$\langle h_1, h_2 \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} h_1(\varphi) \overline{h_2(\varphi)} d\varphi \quad (10.4)$$

на множестве  $2\pi$ -периодических функций, т.е.  $h(\varphi + 2\pi) \equiv h(\varphi)$ .

**Определение 10.4.**  $C^\infty(S_1)$  - пространство  $2\pi$ -периодических функций класса  $C^\infty$ .

Пусть в (10.2)  $h \in C^\infty(S_1)$ . Имеем:  $T(g)\Psi(x, y) =$

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} \exp \{i\omega[(x \cos \theta + y \sin \theta + a) \cos \varphi + (-x \sin \theta + y \cos \theta + b) \sin \varphi]\} h(\varphi) d\varphi = \\ & \int_{-\pi}^{\pi} \exp \{i\omega[x \cos \varphi + y \sin \varphi + a \cos(\varphi - \theta) + b \sin(\varphi - \theta)]\} h(\varphi - \theta) d\varphi \end{aligned} \quad (10.5)$$

Таким образом, преобразование  $T(g)$  решений связано с преобразованием функций из  $C^\infty(S_1)$ . Естественно сохранить то же обозначение  $T(g)$ , сделав коммутативной диаграмму

$$\begin{array}{ccc} h & \xrightarrow{I} & \Psi = Ih \\ \downarrow T(g) & & \downarrow T(g) \\ T(g)h & \xrightarrow{I} & T(g)Ih = IT(g)h \end{array} \quad (10.6)$$

Оператор  $I$  в таких случаях называют сплетающим оператором.  
 $T(g)$  на  $S_1$  имеет вид:

$$T(g)h(\varphi) = \exp[i\omega a \cos(\varphi - \theta) + i\omega b \sin(\varphi - \theta)]h(\varphi - \theta). \quad (10.7)$$

Он также удовлетворяет основному правилу  $T(g)T(g') = T(gg')$  для представлений групп. Это можно проверить непосредственным вычислением. Имеется отличие в действии  $T(g)$  на решениях  $\Psi$  и на функциях  $h$ , а именно: на решениях  $T(g)$  применяется изнутри (меняются аргументы), а на функциях  $h$  меняются и функция и аргументы. Нетрудно подсчитать инфинитезимальные операторы представления (10.7):

$$P_1 = i\omega \cos \varphi \cdot, \quad P_2 = i\omega \sin \varphi \cdot, \quad M = -d/d\varphi. \quad (10.8)$$

Точка справа означает, что  $P_1$  и  $P_2$  – операторы умножения. Нетрудно убедиться, что выполняются соотношения коммутации (3.2). Операторы (10.8) имеют более простой вид, чем операторы симметрии (4.7) для уравнения Гельмгольца. Главное их отличие в том, что они действуют на функциях одной переменной. В некотором смысле аналогичная ситуация возникает, когда преобразование Лапласа (или Фурье) переводит уравнение в частных производных в обыкновенное уравнение. Оператор  $M$  нельзя применить в  $L_2(S_1)$  в классическом смысле, но, выходя в пространство распределений, это удастся сделать.

**Теорема 10.1.** Оператор  $T(g)$  унитарен на  $C^\infty(S_1)$ :

$$\langle T(g)h_1, T(g)h_2 \rangle = \langle h_1, h_2 \rangle \quad \spadesuit \quad (10.9)$$

**Теорема 10.2.** Операторы  $P_1, P_2, M$  – косозермитовы, т.е.

$$\langle Lh_1, h_2 \rangle = -\langle h_1, Lh_2 \rangle, \quad \text{для } h_1, h_2 \in C^\infty(S_1), \quad L \in E(2) \quad \spadesuit \quad (10.10)$$

**Определение 10.5.** Скалярное произведение в гильбертовом пространстве

$H = \Pi L_2(S_1)$  определяется по формуле

$$(\Psi_1, \Psi_2) = \langle h_1, h_2 \rangle, \quad \Psi_j = Ih_j, \quad h_j \in C^\infty(S_1). \quad (10.11)$$

Имеем:  $(T(g)\Psi_1, T(g)\Psi_2) = (T(G)Ih_1, T(G)Ih_2) = (IT(g)h_1, IT(g)h_2) = \langle T(g)h_1, T(g)h_2 \rangle = \langle h_1, h_2 \rangle = \langle \Psi_1, \Psi_2 \rangle$ ; т.е. оператор  $T(g)$  унитарен по скалярному произведению  $(\cdot, \cdot)$  при  $h_1, h_2 \in C^\infty(S_1)$ .

**Теорема 10.3.** Операторы  $S \in S^2$  являются симметрическими операторами на множестве  $I(C^\infty(S_1))$ . Доказательство просто. Операторы  $S$  представимы в виде  $S = \{L_1, L_2\} = L_1L_2 + L_2L_1$  (см.(9.4)). Имеем:  $(S\Psi_1, \Psi_2) = ((L_1L_2 + L_2L_1)Ih_1, Ih_2) = (I(L_1L_2 + L_2L_1)h_1, Ih_2) = \langle (L_1L_2 + L_2L_1)h_1, h_2 \rangle = \langle L_2h_1, -L_1h_2 \rangle + \langle L_1h_1, -L_2h_2 \rangle =$

$$\langle h_1, L_2L_1h_2 \rangle + \langle h_1, L_1L_2h_2 \rangle = \langle h_1, Sh_2 \rangle = (\Psi_1, ISh_2) = (\Psi_1, SIh_2) = (\Psi_1, S\Psi_2). \quad \spadesuit$$

**Теорема 10.4.** Собственные значения симметричного оператора вещественны. Доказательство следует из тождества  $\lambda \|\Psi\|^2 = (S\Psi, \Psi) = (\Psi, S\Psi) = \bar{\lambda} \|\Psi\|^2$ . ♣

**Теорема 10.5.** Собственные векторы симметрического оператора, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны. ♣

**Теорема 10.6.** Пусть  $X$  - гильбертово пространство со скалярным произведением  $(\cdot, \cdot)$ , содержащее множество  $I(C^\infty(S_1))$ , например,  $X = I(L_2(S_1))$ . Пусть  $\{\Psi_k\}$  - система собственных функций оператора  $S \in S^{(2)}$ . Если функция  $f \in X$  раскладывается в ряд  $f = \sum c_k \Psi_k$ , т.е. ряд справа сходится к  $f$  в  $X$ , то коэффициенты разложения можно вычислить:  $c_k = (f, \Psi_k) / \|\Psi_k\|$ . ♣

Можно ли любой элемент гильбертова пространства разложить по собственным функциям симметрического оператора? Вообще говоря, нет. Собственных функций может оказаться слишком мало (или вообще не быть). Чтобы расширить множество собственных функций симметрического оператора, необходимо расширить его область определения. Если удастся расширить ее настолько, что она будет плотна в  $X$ , т.е. множество спектральных функций будет служить базисом в  $X$ , то, очевидно, любой элемент из  $X$  разложится в сходящийся ряд из собственных функций. Как мы увидим ниже, иногда приходится расширять  $X$  до более широкого гильбертового пространства (вообще говоря, обобщенных функций).

## 11 Случай полярных координат (орбита 2)

$S = M^2$ . Так как оператор  $M$  - косозермитовый, то оператор  $iM = -id/d\varphi$  - симметрический. Спектральная функция  $f_\lambda$  для собственного значения  $\lambda$  есть

$$e^{i\lambda\varphi} - \text{решение уравнения} \quad -i \frac{df_\lambda}{d\varphi}(\varphi) = \lambda f_\lambda(\varphi). \quad (11.1)$$

Из периодичности следует, что  $\lambda = n$  - целое и, следовательно,

$$f_n^{(2)} = e^{in\varphi} / \sqrt{2\pi}, \quad iM f_n^{(2)} = n f_n^{(2)}, \quad \|f_n^{(2)}\| = 1, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (11.2)$$

Здесь верхний индекс 2 - номер орбиты. Очевидно,

$$\langle f_n^{(2)}, f_m^{(2)} \rangle = \delta_{nm} = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ 1, & n = m \end{cases} \quad (11.3)$$

Разложение по спектральным функциям  $f_n^{(2)}(\varphi)$  есть обычный комплексный ряд Фурье. Известно, что любую функцию из  $L_2(S_1)$  можно разложить в ряд Фурье:

$$f(\varphi) = \sum c_n f_n^{(2)}(\varphi), \quad f_n^{(2)}(\varphi) = \langle f, f_n^{(2)} \rangle. \quad \text{Далее,} \quad (11.4)$$

$$\Psi_n^{(2)}(r, \theta) = [I f_n^{(2)}(\varphi)](r \cos \theta, r \sin \theta) = \int_{-\pi}^{\pi} \exp[i\omega r \cos(\varphi - \theta) + in\varphi] d\varphi = e^{in\varphi} R_n(r), \quad (11.5)$$

$$\text{где} \quad R_n(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \exp[i\omega r \cos \alpha + i n \alpha] d\alpha. \quad (11.6)$$

Однако решение с разделенными переменными в полярных координатах имеет вид  $e^{in\theta} J_n(\omega r)$ . Следовательно, из (11.5)  $c_n R_n(r) \equiv J_n(\omega r)$ , т.е. функция Бесселя  $J_n(\omega r)$  отличается лишь множителем от интеграла (11.6). Для нахождения константы  $c_n$  вычислим коэффициент в разложении  $R_n(r)$ . Он равен

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{(i\omega \cos \alpha)^n}{n! \sqrt{2\pi}} e^{in\alpha} d\alpha = \frac{(i\omega)^n}{n! \sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} \right)^n e^{in\alpha} d\alpha = \frac{(i\omega)^n \sqrt{2\pi}}{2^n n!}.$$

С другой стороны,  $J_n(\omega r) \approx \left(\frac{\omega r}{2}\right)^n / n!$  и  $c_n = \frac{1}{i^n \sqrt{2\pi}}$ , а

$$\Psi_n^{(2)}(r, \theta) = i^n \sqrt{2\pi} e^{in\theta} J_n(\omega r). \quad (11.7)$$

Попутно мы получили интегральное представление для функции Бесселя:

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{iz \cos \alpha + i n \alpha - i \pi n / 2} d\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{iz \sin \beta - i n \beta} d\beta. \quad (11.8)$$

## 12 Случай декартовых координат (орбита 1)

**Теорема 12.1.** Оператор  $iP_2 = -\omega \sin \varphi$  определен во всем гильбертовом пространстве  $L_2(S_1)$  и самосопряжен.  $\spadesuit$

Уравнение для спектральных функций  $(\omega \sin \varphi + \lambda)f(\lambda) = 0$  классических решений не имеет, но в пространстве распределений решением является

$$f_{\alpha}^{(1)}(\varphi) = \delta(\varphi - \alpha), \quad -\pi \leq \alpha < \pi, \quad (12.1)$$

$$\langle f_{\alpha}^{(1)}(\varphi), f_{\alpha'}^{(1)}(\varphi) \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \delta(\varphi - \alpha) \overline{\delta(\varphi - \alpha')} d\varphi = \delta(\alpha - \alpha'). \quad (12.2)$$

Разумеется, интеграл здесь надо понимать чисто символически; скалярное произведение  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  формально распространено на пространство обобщенных функций. Некоторым оправданием может служить "нестрогая" формула (10.3). (Рекомендуем ознакомиться с проблемой вложения гильбертовых пространств по монографии [БЕР] гл.1.)

Спектр оператора  $iP_2$  непрерывен, поэтому разложение по базису  $f_{\alpha}^{(1)}$  представляется интегралом  $h(\alpha) = \int_{-\pi}^{\pi} c_{\beta} f_{\alpha}^{(1)}(\beta) d\beta$ ,  $c_{\alpha} = \langle h, f_{\alpha}^{(1)} \rangle = h(\alpha)$ .

Эти формулы являются строгими для непрерывных функций. Равенство Парсеваля имеет вид:

$$\langle h, h \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} c_{\alpha} \bar{c}_{\alpha} d\alpha = \int_{-\pi}^{\pi} |h(\alpha)|^2 d\alpha \quad \text{и соответствующее решение}$$

$$\Psi_{\alpha}^{(1)}(x, y) = I f_{\alpha}^{(1)} = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega(x \cos \varphi + y \sin \varphi)} \delta(\varphi - \alpha) d\varphi = e^{i\omega(x \cos \alpha + y \sin \alpha)}. \quad (12.3)$$

Таким образом, основное интегральное представление (10.2) является разложением по собственным функциям  $f_{\alpha}^{(1)}$ .

### 13 Случай параболических координат (орбита 3)

$$S = \{M, P_2\} = MP_1 + P_1M = -2i\omega \sin \varphi \frac{d}{d\varphi} - i\omega \cos \varphi. \quad (13.1)$$

Цель последующих преобразований – стремление упростить это выражение (записать как производную по некоторой новой переменной). Положим

$$\cos \varphi = \text{th } \nu. \quad (13.2)$$

**Определение 13.1.** Отображение  $f(x)$  называется двулистным, если  $f(x_1) = f(x_2)$  при некоторых  $x_1 \neq x_2$ .

Отметим, что отображение, обратное к двулистному, неоднозначно (двузначно). В данном случае отображение (13.2) двулистно на  $[-\pi, \pi]$ . Чтобы сохранить информацию, мы должны иметь две функции от  $\nu$ . Итак, вводим отображение  $U$  из  $L_2(S_1)$  в  $L_2(R_1) \oplus L_2(R_1) \equiv L$  по формуле:

$$(\bar{U}f)(\nu) = \begin{bmatrix} F_+(\nu) \\ F_-(\nu) \end{bmatrix} = \sqrt{|\sin \varphi|} \begin{bmatrix} f_+(\cos \varphi) \\ f_-(\cos \varphi) \end{bmatrix}, \quad (13.3)$$

где  $f_{\pm}(\cos \varphi) = f(\varphi)$ , только  $f_-$  берется на полуинтервале  $[-\pi, 0)$ , а  $f_+$  на  $(0, \pi]$ . Вектор  $\bar{F} = [F_+, F_-]$  рассматривается в гильбертовом пространстве  $L$  со скалярным произведением:

$$\langle \bar{F}, \bar{G} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} [F_+(\nu)\overline{G_+(\nu)} + F_-(\nu)\overline{G_-(\nu)}] d\nu. \quad (13.4)$$

**Теорема 13.1.** Оператор  $U$  дает унитарное отображение  $L_2(S_1)$  на  $L$ .  
Доказательство: так как  $d\nu = -d\varphi/\sin \varphi$ , то

$$\int_{-\infty}^{\infty} [F_+(\nu)\overline{G_+(\nu)}] d\nu = \int_0^{\pi} f(\varphi)\overline{g(\varphi)} d\varphi, \text{ и } \int_{-\infty}^{\infty} [F_-(\nu)\overline{G_-(\nu)}] d\nu = \int_{-\pi}^0 f(\varphi)\overline{g(\varphi)} d\varphi. \quad \spadesuit$$

**Теорема 13.2.**  $USU^{-1} = 2i\omega d/d\nu$ . Утверждение проверяется непосредственным дифференцированием (13.3) по  $\nu$ .  $\spadesuit$

Сохраняя обозначение, имеем оператор  $S = 2i\omega d/d\nu$  уже в пространстве  $L$ . Спектральные функции имеют вид:

$$\bar{F}_{\mu}^{\pm}(\nu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \begin{bmatrix} e^{-i\mu\nu} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{F}_{\mu}^{-}(\nu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \begin{bmatrix} 0 \\ e^{-i\mu\nu} \end{bmatrix}, \quad S\bar{F}_{\mu}^{\pm} = 2\mu\omega\bar{F}_{\mu}^{\pm}. \quad (13.5)$$

Так как  $e^{2\nu} = \frac{1 + \cos \varphi}{1 - \cos \varphi}$ , то  $f_{\mu\pm}^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} |\sin \varphi|} \left[ \frac{1 + \cos \varphi}{1 - \cos \varphi} \right]^{-i\mu/2}$  при  $\varphi > 0$ , (13.6)

т.е.  $f_{\mu\pm}^{(3)} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (1 + \cos \varphi)^{-i\mu/2-1/4} (1 - \cos \varphi)^{i\mu/2-1/4} & \text{при } \varphi > 0 \\ 0 & \text{при } \varphi < 0 \end{cases}$  (13.7)

Имеем  $\{M, P_2\} f_{\mu\pm}^{(3)} = 2\mu\omega f_{\mu\pm}^{(3)}$ ,  $\langle f_{\mu\pm}^{(3)}, f_{\mu'\pm}^{(3)} \rangle = \delta(\mu - \mu')$ ,  $\langle f_{\mu\pm}^{(3)}, f_{\mu'\mp}^{(3)} \rangle = 0$ .

Соответствующее решение после замены  $\cos \varphi = (1 - t^2)/(1 + t^2)$  имеет вид:

$$\Psi_{\mu\pm}^{(3)}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{t^{i\mu-1/2}}{\sqrt{1+t^2}} \exp \left[ i\omega \left( x \frac{1-t^2}{1+t^2} + y \frac{2t}{1+t^2} \right) \right] dt. \quad (13.8)$$

Рассмотрим теперь уравнение Гельмгольца в параболических координатах

$$x = \frac{u^2 - v^2}{2}, \quad y = uv. \quad \text{Имеем: } Q\Psi \equiv \frac{\Psi_{uu} + \Psi_{vv}}{u^2 + v^2} + \omega^2 \Psi = 0.$$

Для решения с разделенными переменными  $\Psi = U(u)V(v)$  функции  $U(u)$  и  $V(v)$  удовлетворяют уравнениям:

$$U'' + (\omega^2 u^2 - k^2)U = 0, \quad V'' + (\omega^2 v^2 + k^2)V = 0. \quad (13.9)$$

Оба уравнения можно свести к уравнению функций параболического цилиндра

$$D'' + \left( p + \frac{1}{2} - \frac{z^2}{4} \right) D = 0, \quad D = D(z). \quad (13.10)$$

Учитывая (13.5), положим  $k^2 = 2\mu\omega$ . Сделаем замену  $z = \sigma u$ ,  $U = D(z)$  в первом уравнении (13.9). Получим

$$D + \left( -\frac{2\mu\omega}{\sigma^2} + \frac{\omega^2}{\sigma^4} z^2 \right) D = 0. \quad (13.11)$$

Итак,  $\sigma^4 = -4\omega^2$ ,  $\sigma = \sqrt{2\omega} \exp(\pi/4)$ ,  $p = i\mu - 1/2$ . Общее решение первого уравнения (13.9) есть

$$U(u) = A_1 D_p(\sigma u) + A_2 D_p(-\sigma u). \quad (13.12)$$

Второе уравнение (13.9) отличается знаком у  $k^2$ . Следовательно,

$$V(v) = B_1 D_{\bar{p}}(\sigma v) + B_2 D_{\bar{p}}(-\sigma v), \quad \text{где } \bar{p} = -\frac{1}{2} - i\mu. \quad (13.13)$$

Таким образом, решение с разделенными переменными в параболических координатах имеет вид:

$$\Psi_{\mu\pm}^{(3)}(x, y) = C_1 D_p(\sigma u) D_{\bar{p}}(\sigma v) + C_2 D_p(-\sigma u) D_{\bar{p}}(\sigma v) +$$

$$C_3 D_p(\sigma u) D_{\bar{p}}(-\sigma v) + C_4 D_p(-\sigma u) D_{\bar{p}}(-\sigma v). \quad (13.14)$$

Теперь мы должны подобрать коэффициенты  $c_k$  в соответствии с интегралом (13.8). Разложим обе части (13.14) в ряд в окрестности нуля. Имеем:

$$D_p(z) = G + zH + O(z^2), \quad \text{где } G = \frac{\sqrt{\pi} 2^{p/2}}{\Gamma[(1-p)/2]}, \quad H = -\frac{\sqrt{\pi} 2^{(p-1)/2}}{\Gamma[-p/2]}. \quad (13.15)$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } \Psi_{\mu+}^{(3)}(x, y) &= C_1(G + H\sigma u)(\bar{G} + \bar{H}\sigma v) + C_2(G - H\sigma u)(\bar{G} + \bar{H}\sigma v) + \\ &C_3(G + H\sigma u)(\bar{G} - \bar{H}\sigma v) + C_4(G - H\sigma u)(\bar{G} - \bar{H}\sigma v) + \dots \end{aligned} \quad (13.16)$$

С другой стороны,

$$\Psi_{\mu+}^{(3)}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{t^{i\mu-1/2}}{\sqrt{1+t^2}} \exp \left[ i\omega \left( \frac{u^2 - v^2}{2} \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2} + uv \frac{2t}{1+t^2} \right) \right] dt. \quad (13.17)$$

$$\text{Следовательно, } \Psi_{\mu+}^{(3)}(x, y) = A_0 + A_1 u^2 + A_2 v^2 + A_3 uv + O(u^2 + v^2), \quad (13.18)$$

$$\text{где } A_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{t^{i\mu-1/2}}{\sqrt{1+t^2}} dt = \frac{1}{2\pi} \Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{i\mu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{4} - \frac{i\mu}{2}\right),$$

$$A_3 = \frac{2i\omega}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{t^{i\mu+1/2}}{(1+t^2)^{3/2}} dt = \frac{2i\omega}{\pi} \Gamma\left(\frac{3}{4} + \frac{i\mu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3}{4} - \frac{i\mu}{2}\right).$$

Коэффициенты  $A_1$  и  $A_2$  нам не понадобятся, так как в разложении (13.16) нет соответствующих степеней  $u, v$ . Сравнивая (13.16) и (13.18), получим систему:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = A_0/(G\bar{G}) \\ C_1 - C_2 + C_3 - C_4 = 0 \\ C_1 + C_2 - C_3 - C_4 = 0 \\ C_1 - C_2 - C_3 + C_4 = A_3/(H\bar{H}\sigma^2). \end{cases} \quad (13.19)$$

Отсюда  $C_2 = C_3 = 0$ ,  $C_1 = C_4 = 1/(\sqrt{2} \operatorname{ch} \pi \mu)$ . Итак,

$$\Psi_{\mu+}^{(3)}(x, y) = \frac{D_p(\sigma u) D_{\bar{p}}(\sigma v) + D_p(-\sigma u) D_{\bar{p}}(-\sigma v)}{\sqrt{2} \operatorname{ch} \pi \mu}, \quad \Psi_{\mu-}^{(3)} = \Psi_{\mu+}^{(3)} \Big|_{v=-v}. \quad (13.20)$$

## 14 Случай эллиптических координат (орбита 4)

$$S = M^2 + d^2 P_1^2 \equiv \frac{d^2}{d\varphi^2} - d^2 \omega^2 \cos^2 \varphi^2, \quad x = d \operatorname{ch} \alpha \cos \beta, \quad y = d \operatorname{sh} \alpha \sin \beta. \quad (14.1)$$

Уравнение на собственные значения - это уравнение Матье:

$$Sf - \lambda f \equiv \frac{d^2}{d\varphi^2} + (a - 2q \cos(2\varphi))f = 0, \quad \text{где } a = -\lambda - \frac{d^2 \omega^2}{2}, \quad q = \frac{a^2 \omega^2}{4}. \quad (14.2)$$

Имеется бесконечное число собственных значений  $\lambda_k$  кратности 1 с предельной точкой  $\infty$  (в классе  $C^2(S_1)$ ). Собственные функции

$$f_{nc}^{(4)}(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} c e_n(\varphi, q), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad f_{ns}^{(4)}(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} s e_n(\varphi, q), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (14.3)$$

образуют ортонормированный базис в  $L_2(S_1)$ :

$$\langle f_{nc}^{(4)}, f_{mc}^{(4)} \rangle = \delta_{nm}, \quad \langle f_{ns}^{(4)}, f_{ms}^{(4)} \rangle = \delta_{nm}, \quad \langle f_{nc}^{(4)}, f_{ms}^{(4)} \rangle = 0. \quad (14.4)$$

Решение, соответствующее  $f_{nc}^{(4)}$ , есть

$$\Psi_{nc}^{(4)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega(x \cos \varphi + y \sin \varphi)} c e_n(\varphi, q) d\varphi. \quad (14.5)$$

Уравнение Гельмгольца в эллиптических координатах имеет вид

$$Q\Psi \equiv \frac{\Psi_{\xi\xi} + \Psi_{\eta\eta}}{d^2(\operatorname{ch}^2 \xi - \cos^2 \eta)} + \omega^2 \Psi = 0. \quad (14.6)$$

Отсюда для решения с разделенными переменными  $\Psi = U(u)V(v)$  имеем:

$$U'' + (d^2 \omega^2 \operatorname{ch}^2 \xi + k^2)U = 0, \quad V'' - (d^2 \omega^2 \cos^2 \eta + k^2)V = 0. \quad (14.7)$$

Вычисление оператора  $S$  в эллиптических координатах дает выражение

$$S = M^2 + d^2 P_1^2 = \frac{\cos^2 \eta \partial_{\xi\xi} + \operatorname{ch}^2 \xi \partial_{\eta\eta}}{\operatorname{ch}^2 \xi - \cos^2 \eta}. \quad (14.8)$$

Имеем из (14.8):  $S(UV) = k^2(UV)$ . Таким образом, решение с разделенными переменными действительно является спектральной функцией оператора симметрии  $S$  со спектральным значением  $k^2$ .

Теперь полезно напомнить, что  $c e_n$  и  $s e_n$  — это, соответственно, четные и нечетные решения. Кстати,

$$\lim_{q \rightarrow 0} c e_n(x, q) = \cos(nx), \quad \lim_{q \rightarrow 0} s e_n(x, q) = \sin(nx). \quad (14.9)$$

Первое уравнение в (14.7) получается из уравнения Матье замкнутой  $\varphi = \xi$ . Его решения

$$C e_n(\varphi, q) = c e_n(i\varphi, q), \quad S e_n(\varphi, q) = s e_n(i\varphi, q) \quad (14.10)$$

также суть четные и нечетные функции от  $\varphi$ , соответственно. Далее,

$$\begin{aligned} \Psi_{nc}^{(4)}(\alpha, \beta) = I f_{nc}^{(4)} = [A_{1n} C e_n(\alpha, q) + A_{2n} S e_n(\alpha, q)] [B_{1n} c e_n(\beta, q) + B_{2n} s e_n(\beta, q)] = \\ C_n C e_n(\alpha, q) s e_n(\beta, q) \end{aligned} \quad \text{ввиду четности интеграла (14.5) по } \alpha \text{ и } \beta. \quad (14.11)$$

Аналогично,

$$\Psi_{ns}^{(4)}(\alpha, \beta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega(x \cos \varphi + y \sin \varphi)} s e_n(\varphi, q) d\varphi = C'_n S e_n(\alpha, q) s e_n(\beta, q). \quad (14.12)$$

## 15 Взаимосвязь базисов

Итак, мы построили решения с разделенными переменными для каждой из 4 орбит. Если произвольное решение из гильбертового пространства  $\mathcal{H}$  разложить по спектральным функциям одной из орбит:

$$\Psi = \sum_m C_{jm} \Psi_m^{(j)}, \quad \text{то} \quad C_{jm} = (\Psi, \Psi_m^{(j)}) = \langle f, f_m^{(j)} \rangle, \quad (15.1)$$

т.е. вместо двойных интегралов достаточно сосчитать одномерные. В частности,

$$T(g)\Psi_n^{(j)} = \sum_m (T(g)\Psi_n^{(j)}, \Psi_m^{(p)}) \Psi_m^{(p)} = \sum_m \langle T(g)f_n^{(j)}, f_m^{(p)} \rangle \Psi_m^{(p)}. \quad (15.2)$$

**Определение 15.1.** Коэффициенты  $\langle f_n^{(j)}, f_m^{(p)} \rangle$  будем называть матричными элементами смешанных базисов (м.э.с.б.).

**Определение 15.2.** Числа  $T_{mn}^{(j)}(g) = \langle T(g)f_n^{(j)}, f_m^{(j)} \rangle$  назовем матричными элементами оператора  $T(g)$  в базисе  $\{\Psi_n^{(j)}\}$ .

$$\text{Имеем:} \quad T_{mn}^{(j)}(gg') = \langle T(gg')f_n^{(j)}, f_m^{(j)} \rangle =$$

$$\langle T(g)T(g')f_n^{(j)}, f_m^{(j)} \rangle = \langle T(g) \sum_k \langle T(g')f_n^{(j)}, f_k^{(j)} \rangle f_k^{(j)}, f_m^{(j)} \rangle =$$

$$\sum_k T_{kn}^{(j)}(g') \langle T(g)f_k^{(j)}, f_m^{(j)} \rangle = \sum_k T_{mk}^{(j)}(g) T_{kn}^{(j)}(g'). \quad (15.3)$$

$$\text{Далее,} \quad T_{mn}^{(j)}(g^{-1}) = \langle T(g^{-1})f_n^{(j)}, f_m^{(j)} \rangle =$$

$$\langle f_n^{(j)}, T(g)f_m^{(j)} \rangle = \overline{\langle T(g)f_m^{(j)}, f_n^{(j)} \rangle} = \overline{T_{nm}^{(j)}(g)}. \quad (15.4)$$

Возможны 12 разложений базисных спектральных функций по другому базису. Рассмотрим несколько примеров. Для  $j = 3$

$$\langle f_\alpha^{(1)}, f_{\mu+}^{(3)} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\pi \delta(\varphi - \alpha) (1 + \cos \varphi)^{\frac{\mu}{2} - \frac{1}{4}} (1 - \cos \varphi)^{-\frac{\mu}{2} - \frac{1}{4}} d\varphi =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} (1 + \cos \alpha)^{\frac{\mu}{2} - \frac{1}{4}} (1 - \cos \alpha)^{-\frac{\mu}{2} - \frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi \sin \alpha}} \left( \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \right)^\mu, \quad (0 < \alpha < \pi), \quad (15.5)$$

$$\Psi_\alpha^{(1)}(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \langle f_\alpha^{(1)}, f_{\mu+}^{(3)} \rangle \Psi_{\mu+}^{(3)}(x, y) d\mu = \frac{1}{\sqrt{2\pi \sin \alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \right)^\mu \Psi_\mu^{(3)}(x, y) d\mu. \quad (15.6)$$

$$\text{Далее,} \quad \Psi_n^{(2)}(r, \theta) = i^n \sqrt{2\pi} J_n(\omega r) e^{in\theta} =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\langle f_n^{(2)}, f_{\mu+}^{(3)} \rangle \Psi_{\mu+}^{(3)}(x, y) + \langle f_n^{(2)}, f_{\mu-}^{(3)} \rangle \Psi_{\mu-}^{(3)}(x, y)] d\mu, \quad (15.7)$$

$$\text{где} \quad \langle f_n^{(2)}, f_{\mu+}^{(3)} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi e^{in\varphi} (1 + \cos \varphi)^{\frac{\mu}{2} - \frac{1}{4}} (1 - \cos \varphi)^{-\frac{\mu}{2} - \frac{1}{4}} d\varphi =$$

$$\frac{\exp\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}-\mu\right)\right] \Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right)}{\pi\sqrt{2}} \left[ \frac{(-1)^n \Gamma\left(\frac{1}{2}+i\mu\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\mu-n\right)} F\left(\frac{1}{2}+i\mu, \frac{1}{2}-n \mid -1\right) - \frac{i\Gamma\left(\frac{1}{2}-i\mu\right)}{\Gamma(1-i\mu-n)} F\left(\frac{1}{2}-i\mu, \frac{1}{2}-n \mid -1\right) \right] \quad (15.8)$$

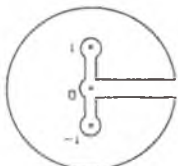


Рис 15.1

([Ми], гл.1, (3.50)). Последний интеграл можно вычислить интегрированием по контуру с предварительной заменой  $\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} = t$ ; см. рис. 15.1). Однако должен признаться, что у меня получились другие значения параметров у второй гипергеометрической функции; поэтому я привожу без вывода формулу Миллера для второй базисной серии

$$\langle f_n^{(2)}, f_{\mu-}^{(3)} \rangle = \langle f_{-n}^{(2)}, f_{\mu+}^{(3)} \rangle. \quad (15.9)$$

Функции Матье в силу своего построения легко разлагаются по экспонентам. Например,

$$ce_{2n+1}(\varphi, q) = \frac{1}{2} \sum_0^{\infty} A_{2m+1}^{(2n+1)} \left[ e^{i(2m+1)\varphi} + e^{-i(2m+1)\varphi} \right] \quad (15.10)$$

$$\langle f_{2n+1,c}^{(4)}, f_k^{(2)} \rangle = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \int_{-\pi}^{\pi} ce_{2n+1}(\varphi, q) e^{-ik\varphi} d\varphi = \begin{cases} \frac{A_{2m+1}^{(2n+1)}}{\sqrt{2}}, & \text{при } |k| = 2m+1, \\ 0, & \text{при } |k| \neq 2m+1 \end{cases} \quad (15.11)$$

(В [Ми] гл.1, (3.52) отсутствует  $\sqrt{2}$ .) Рассмотрим теперь действие группы на базисные функции:

$$T_{mn}^{(2)}(\theta, a, b) = \langle T(g)f_n^{(2)}, f_m^{(2)} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega[a \cos(\varphi-\theta) + b \sin(\varphi-\theta)] + i\pi(\varphi-\theta) - im\varphi} d\varphi = \frac{1}{2\pi} e^{i(n-m)\alpha - im\theta} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega r \cos \beta + i(n-m)\beta} d\beta = i^{n-m} e^{i(n-m)\alpha - im\theta} J_{n-m}(\omega r), \quad (15.12)$$

где  $a = r \cos \alpha$ ,  $b = r \sin \alpha$ ,  $n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  Пусть теперь  $g(\theta, a, b) = g(\theta', a', b') \cdot g(\theta'', a'', b'')$ , где  $\theta = \theta' + \theta''$ ,  $a = a' \cos \theta'' + b' \sin \theta'' + a''$ ,  $b = -a' \sin \theta'' + b' \cos \theta'' + a''$  (Напомним, что  $g$  - матрица (2.3)). Пусть  $a' = r' \cos \alpha'$ ,  $b' = r' \sin \alpha'$ ,  $a'' = r'' \cos \alpha''$ ,  $b'' = r'' \sin \alpha''$ . Тогда  $a = r' \cos(\alpha' - \theta'') + a''$ ,  $b = r' \sin(\alpha' - \theta'') + b''$ ,  $r^2 = a^2 + b^2 = r'^2 + r''^2 + 2r'r'' \cos(\alpha'' - \alpha' + \theta'')$  Выписывая для  $T_{0n}^{(2)}(\theta, a, b)$  соотношение (15.3), получим:

$$i^n e^{in\alpha} J_n(\omega r) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} T_{0k}^{(2)}(g') T_{kn}^{(2)}(g'') = \sum_{k=-\infty}^{\infty} T_{0k}^{(2)}(\theta', a', b') T_{kn}^{(2)}(\theta'', a'', b'') = \sum_{k=-\infty}^{\infty} i^k e^{ik\alpha'} J_k(\omega r') i^{n-k} e^{i(n-k)\alpha'' - ik\theta''} J_{n-k}(\omega r'').$$

Отсюда  $e^{in(\alpha-\alpha'')} J_n(\omega r) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ik\beta} J_k(\omega r') J_{n-k}(\omega r''), \beta = \alpha' - \alpha'' - \theta''$ .

Заменяя здесь  $k$  на  $-k$ , получим:

$$e^{in(\alpha-\alpha'')} J_n(\omega r) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ik(\pi-\beta)} J_k(\omega r') J_{n+k}(\omega r''), r^2 = r'^2 + r''^2 - 2r'r'' \cos(\pi-\beta). \quad (15.13)$$

Мы получили в чистом виде теорему сложения для функций Бесселя ([ГрР], 8.530.2).

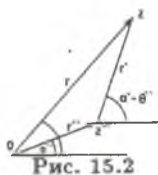


Рис. 15.2

Здесь  $\alpha - \alpha''$  - угол между комплексными точками векторами  $a + ib$  и  $a'' + ib''$ , т.е. угол в треугольнике со сторонами  $r, r', r''$ , лежащий против стороны  $r'$ . Действительно, пусть  $z = r e^{i\alpha}$ ,  $z' = r' e^{i\alpha'}$ ,  $z'' = r'' e^{i\alpha''}$ . В треугольнике, образованном комплексными точками  $0, z, z''$ , угол  $\widehat{z''0z}$  равен  $\alpha - \alpha''$ . Так как  $z = z' e^{-i\theta''} + z''$ , то  $z - z'' = r' e^{i(\alpha' - \theta'')}$ , т.е. аргумент комплексного вектора  $z - z''$  равен  $\alpha' - \theta''$ . Следовательно, угол  $\widehat{0z''z}$  равен  $2\pi - (\pi - \alpha'') - (\alpha' - \theta'') = \pi + \alpha'' - \alpha' + \theta'' = \pi - \beta$ , причем  $|z - z''| = r'$ . Замечательно то, что мы не накладывали ограничений (не считая формулы  $g = g'g''$ ) на параметры!

Другие примеры разложений решений уравнения Гельмгольца имеются в [КМ1-КМ4].

## Часть II

# Специальные функции

## 16 Цилиндрические функции

Уравнение цилиндрических функций  $J'' + \frac{J'}{z} + \left(1 - \frac{\lambda^2}{z^2}\right) J = 0$  (16.1)

имеет решением функцию Бесселя:

$$J_\lambda(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{\lambda+2k}}{k! \Gamma(\lambda+k+1)}, \quad \lambda \in \mathbb{R}^1. \quad (16.2)$$

Предполагается, что степени  $(z/2)^{\lambda+2k}$  принимают вещественные значения на положительной полуоси  $\operatorname{Re}(z) = x$ . Ряд рассматривается в плоскости с разрезом вдоль луча  $[-\infty, 0]$ .

Если  $\lambda$  - нецелое, то общее решение уравнения есть

$$J = C_1 J_\lambda(z) + C_2 J_{-\lambda}(z). \quad (16.3)$$

Если  $\lambda = -n$  - отрицательное целое число, то в этом ряду пропадают первые  $n$  членов, т.к.  $\Gamma(\lambda+k+1) = \infty$ , и можно проверить, что  $J_{-n}(z) \equiv (-1)^n J_n(z)$ . Для построения второго решения вводится функция Неймана при нецелом  $\lambda$ :

$$N_\lambda(z) = \frac{\cos(\lambda\pi) J_\lambda(z) - J_{-\lambda}(z)}{\sin(\lambda\pi)}. \quad (16.4)$$

Общее решение уравнения (16.1) при целом  $\lambda = n$  есть  $C_1 J_n z + C_2 N_n(z)$ , где

$$\pi N_n(z) = \pi \lim_{\lambda \rightarrow n} N_\lambda(z) = 2J_n(z) \ln \frac{z}{2} -$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! (k+n)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k} [\psi(k+1) + \psi(k+n+1)]; \quad (16.5)$$

Здесь  $\psi(p) = \Gamma'(p)/\Gamma(p)$  - функция Трикоми.

Интегральные представления:  $J_\lambda(z) = \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\lambda}{\sqrt{\pi} \Gamma(\lambda + \frac{1}{2})} \int_{-1}^1 \frac{\cos(zt) dt}{(1-t^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}}, \quad \operatorname{Re} \lambda > -\frac{1}{2}, \quad (16.6)$

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{iz \sin \theta - in\theta} d\theta, \quad n - \text{целое}, \quad (16.7)$$

Рекуррентные соотношения:  $J_{\lambda-1} + J_{\lambda+1} = \frac{2\lambda}{z} J_\lambda, \quad J_{\lambda-1} - J_{\lambda+1} = 2 \frac{d}{dz} J_\lambda. \quad (16.8)$

Асимптотика при больших  $|z|$ :

$$J_\lambda(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left\{ \cos \left( z - \frac{\pi\lambda}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \left[ 1 + O\left(\frac{1}{z^2}\right) \right] - \frac{1}{2z} \sin \left( z - \frac{\pi\lambda}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \left( \lambda^2 - \frac{1}{4} \right) \left[ 1 + O\left(\frac{1}{z^2}\right) \right] \right\}, \quad |\arg z| < \pi, \quad \lambda \neq -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \dots \quad (16.9)$$

Теорема сложения:

$$e^{in\psi} J_n(\omega R) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(\omega R) J_{n+k}(\omega R) e^{ik\varphi}, \quad \text{где} \quad R^2 = r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \varphi. \quad (16.10)$$

Здесь  $\psi$  - угол треугольника со сторонами  $\rho, r, R$ , лежащий против стороны  $\rho$ .

Отметим частные случаи функции Бесселя:

$$J_{n+\frac{1}{2}}(z) = (-1)^n z^{n+\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left( \frac{1}{z} \frac{d}{dz} \right)^n \frac{\sin z}{z}, \quad J_{-n-\frac{1}{2}}(z) = z^{n+\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left( \frac{1}{z} \frac{d}{dz} \right)^n \frac{\cos z}{z}. \quad (16.11)$$

Функция  $J_\lambda(x)$  имеет на вещественной полуоси  $x > 0$  счетное число положительных нулей (простых). Пусть  $\{\mu_k\}$  - семейство положительных нулей  $J_\lambda(x)$ . Тогда функции  $J_\lambda(x)$  ортогональны в гильбертовом пространстве  $X = L_2([0, 1], \sqrt{x})$  со скалярным произведением

$$(\varphi, \psi) = \int_0^1 x \varphi(x) \overline{\psi(x)} dx. \quad (16.12)$$

Любая функция из  $X$  раскладывается в ряд Фурье-Бесселя:

$$f(x) = \sum_1^{\infty} c_k J_\lambda(\mu_k x), \quad c_k = \frac{2}{J_{\lambda+1}^2(\mu_k)} \int_0^1 x f(x) J_\lambda(\mu_k x) dx. \quad (16.13)$$

## 17 Символ Похгаммера

$$(a)_n = a(a+1)\dots(a+n-1), \quad (a)_0 = 1, \quad (a)_{-n} = (-1)^n / (1-a)_n, \quad (1)_n = n!,$$

$$(a)_{n+k} = (a)_n (a+n)_k = (a)_k (a+k)_n, \quad (a)_{nk} = \left(\frac{a}{n}\right)_k \left(\frac{a+1}{n}\right)_k \dots \left(\frac{a+n-1}{n}\right)_k n^{nk}.$$

## 18 Гамма и бэта-функции Эйлера

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad \operatorname{Re}(z) > 0, \quad (18.1)$$

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad \Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(n+1) = n!. \quad (18.2)$$

Интеграл может быть продолжен в левую полуплоскость  $Re(z) \leq 0$ , если использовать основное функциональное соотношение (18.2) для  $\Gamma(z)$ .

Произведения  
Вейерштрасса и Эйлера : 
$$\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{z}{k}}}{1 + \frac{z}{k}} = \frac{1}{z} \prod_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1 + \frac{1}{k}}{1 + \frac{z}{k}} \right). \quad (18.3)$$

Здесь  $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right] \approx 0.5772156649\dots$  - постоянная Эйлера. (18.4)

Связь с синусом: 
$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}, \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \quad (18.5)$$

Формула удвоения (Лежандр): 
$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right). \quad (18.6)$$

Асимптотика при  
 $x \rightarrow +\infty$  (Стирлинг) : 
$$\Gamma(x) = x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x} \sqrt{2\pi} \left(1 + \frac{\theta}{12x}\right), \quad 0 < \theta < 1. \quad (18.7)$$

Бэта-функция Эйлера:

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}} dx = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \quad Re(p), Re(q) > 0. \quad (18.8)$$

## 19 Гипергеометрическая функция Гаусса

$$F \left[ \begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| z \right] \equiv F(a, b, c; z) \equiv {}_2F_1(a, b, c; z) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n z^n}{(c)_n n!} =$$

$$1 + \frac{ab}{c}z + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)} \frac{z^2}{2} + \dots, \quad |z| < 1, \quad c \neq 0, -1, -2, \dots \quad (19.1)$$

Интегральное представление:

$$F \left[ \begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| z \right] = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-tz)^{-a} dt, \quad Re(c) > Re(b) > 0, \quad (19.2)$$

где  $z \notin [1, +\infty)$ . Гипергеометрическое дифференциальное уравнение:

$$z(1-z)F'' + [c - (a+b+1)z]F' - abF = 0. \quad (19.3)$$

Второе решение уравнения: 
$$u_2 = z^{1-c} F \left[ \begin{matrix} a-c+1, b-c+1 \\ 2-c \end{matrix} \middle| z \right], \quad c \neq 1. \quad (19.4)$$

Можно выписать 6 интегралов вида (18.4) по путям, соединяющим попарно точки  $0, 1, \infty, 1/z$ . Это дает еще 4 решения:

$$u_3 = F \left[ \begin{matrix} a, b \\ a + b + 1 - c \end{matrix} \middle| 1 - z \right], \quad u_4 = z^{-a} F \left[ \begin{matrix} a, a + 1 - c \\ a + 1 - b \end{matrix} \middle| \frac{1}{z} \right], \quad (19.5)$$

$$u_5 = z^{-b} F \left[ \begin{matrix} b - c + 1, b \\ b - a + 1 \end{matrix} \middle| \frac{1}{z} \right], \quad u_6 = (1 - z)^{c-a-b} F \left[ \begin{matrix} c - a, c - b \\ c - a - b + 1 \end{matrix} \middle| 1 - z \right]. \quad (19.6)$$

Основное решение можно записать в 4 формах:

$$F \left[ \begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| z \right] = (1 - z)^{-a} F \left[ \begin{matrix} a, c - b \\ c \end{matrix} \middle| \frac{z}{z - 1} \right] = \\ = (1 - z)^{-b} F \left[ \begin{matrix} c - a, b \\ c \end{matrix} \middle| \frac{z}{z - 1} \right] = (1 - z)^{c-a-b} F \left[ \begin{matrix} c - a, c - b \\ c \end{matrix} \middle| z \right]. \quad (19.7)$$

Аналогично преобразуя остальные 5 решений, получим 24 решения (48 - с учетом биекции  $a \leftrightarrow b$ ) Куммера уравнения (18.3). Естественно, любые 3 решения линейно зависимы. В частности,

$$F \left[ \begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| z \right] = A_1 F \left[ \begin{matrix} a, b \\ a + b + 1 - c \end{matrix} \middle| 1 - z \right] + \\ + A_2 (1 - z)^{c-a-b} F \left[ \begin{matrix} c - a, c - b \\ c - a - b + 1 \end{matrix} \middle| 1 - z \right], \quad (19.8)$$

где  $A_1 = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}$ ,  $A_2 = \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}$ , Отсюда

$$F \left[ \begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| z \right] \rightarrow \begin{cases} \rightarrow A_1 & \text{при } c - a - b > 0 \quad z \rightarrow 1 \\ \approx A_2 (1 - z)^{c-a-b} & \text{при } c - a - b < 0 \quad z \approx 1 \\ \approx -\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \ln(1 - z) & \text{при } c - a - b = 0 \quad z \approx 1 \end{cases}$$

## 20 Вырожденная гипергеометрическая функция

$$\Phi(a, c; x) \equiv {}_1F_1(a, c; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n x^n}{(c)_n n!} = 1 + \frac{a}{c} x + \frac{a(a+1)}{c(c+1)} \frac{x^2}{2} + \dots \quad (20.1)$$

где  $c \neq 0, -1, -2, \dots$  Уравнение:  $x\Phi'' + (c-x)\Phi' - a\Phi = 0$ . (20.2)

Второе решение:  $u_2 = x^{1-c}\Phi(a-c+1, 2-c; x)$ ,  $c \neq 1$ . (20.3)

Автоморфизм Куммера:  $\Phi(a, c; x) = e^x \Phi(c-a, c; -x)$ . (20.4)

Интегральное представление:

$$\Phi(a, c, x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 e^{xt} t^{a-1} (1-t)^{c-a-1} dt, \quad \operatorname{Re}(c) > \operatorname{Re}(a) > 0. \quad (20.5)$$

Асимптотика

при  $x \rightarrow +\infty$ : 
$$\Phi(a, c, x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} e^{zx} x^{a-c} \left[ 1 + O\left(\frac{1}{x}\right) \right]. \quad (20.6)$$

Решением является также функция Трикоми:

$$\Psi(a, c, x) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} e^{-zt} t^{a-1} (1+t)^{c-a-1} dt, \quad \operatorname{Re}(x) > 0, \quad \operatorname{Re}(c) > \operatorname{Re}(a) > 0. \quad (20.7)$$

Автоморфизм: 
$$\Psi(a, c, x) = x^{1-c} \Psi(a-c+1, 2-c, x). \quad (20.8)$$

Выражение через  $\Phi(a, c, x)$ :

$$\Psi(a, c, x) = \frac{\Gamma(1-c)}{\Gamma(a-c+1)} \Phi(a, c, x) + \frac{\Gamma(c-1)}{\Gamma(a)} x^{1-c} \Phi(a-c+1, 2-c, x). \quad (20.9)$$

Асимптотика при  $x \rightarrow +\infty$ : 
$$\Psi(a, c, x) = x^{-a} \left[ 1 + O\left(\frac{1}{x}\right) \right]. \quad (20.10)$$

## 21 Функции параболического цилиндра

Уравнение (Вебер): 
$$D'' + \left( p + \frac{1}{2} - \frac{z^2}{4} \right) D = 0. \quad (21.1)$$

Оно сводится к вырожденному гипергеометрическому уравнению; поэтому функцию параболического цилиндра  $D_p(z)$  можно определить в виде:

$$D_p(z) = 2^{p/2} e^{-z^2/4} \Psi\left(-\frac{p}{2}, \frac{1}{2}, \frac{z^2}{2}\right) = 2^{p/2} e^{-z^2/4} \left[ \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1-p}{2}\right)} \Phi\left(-\frac{p}{2}, \frac{1}{2}, \frac{z^2}{2}\right) + \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) z}{\sqrt{2} \Gamma\left(-\frac{p}{2}\right)} \Phi\left(\frac{1-p}{2}, \frac{3}{2}, \frac{z^2}{2}\right) \right]. \quad (21.2)$$

4 решения уравнения (21.1):  $D_p(z), D_p(-z), D_{-p-1}(iz), D_{-p-1}(-iz)$  (см. [14], 16.5). Отсюда при малых  $z$   $D_p(z) = G + zH + O(z^2)$ , где  $G = \sqrt{\pi} 2^{p/2} / \Gamma[(1-p)/2]$ ,  $H = \Gamma(-1/2) 2^{(p-1)/2} / \Gamma(-p/2)$

Если  $p$  – натуральное число, то слагаемые в (21.2) пропадают (в зависимости от четности):

$$D_{2k}(z) = \frac{2^k \sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - k\right)} e^{-z^2/4} \Phi\left(-k, \frac{1}{2}, \frac{z^2}{2}\right), \quad (21.4)$$

$$D_{2k+1}(z) = \frac{2^k \Gamma(-\frac{1}{2})}{\Gamma(-\frac{1}{2} - k)} z e^{-z^2/4} \Phi\left(-k, \frac{3}{2}, \frac{z^2}{2}\right). \quad (21.5)$$

Последние выражения связаны с многочленами Эрмита:

$$H_n(x) = e^{x^2} \left(\frac{d}{dx}\right)^n [e^{-x^2}]. \quad (21.6)$$

Рассмотрим, в частности,  $H_{2n}(x)$ :

$$H_{2n}(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^{2p}}{p!} \sum_{k=n}^{\infty} (-1)^k \frac{2k \dots (2k - 2n + 1)}{k!} x^{2k-2n} =$$

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^{2p}}{p!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+n} (2k + 2n)!}{(k + n)! (2k)!} x^{2k} = (-1)^n \sum_{s=0}^{\infty} x^{2s} \sum_{k=0}^s \frac{(-1)^k (2k + 2n)!}{(k + n)! (2k)! (s - k)!}. \quad (21.7)$$

Используя соотношения

$$\frac{(2k + 2n)!}{(k + n)! (2k)!} = \frac{2^{2n} (1/2)_n (n + 1/2)_k}{k! (1/2)_k}, \quad \frac{1}{(s - k)!} = \frac{(-1)^k (-s)_k}{s!}, \quad (21.8)$$

и учитывая, что  $(-s)_k = 0$  при  $k > s$ , получим:

$$H_{2n}(x) = (-1)^n 2^{2n} \left(\frac{1}{2}\right)_n \sum_{s=0}^{\infty} \frac{x^{2s}}{s!} \sum_{k=0}^s \frac{(n + 1/2)_k (-s)_k}{(1/2)_k k!}. \quad (21.9)$$

Внутренняя сумма есть значение гипергеометрической функции в точке 1:

$$\sum_{k=0}^s \frac{(n + 1/2)_k (-s)_k}{(1/2)_k k!} = F\left(\begin{matrix} n + 1/2, -s \\ 1/2 \end{matrix} \middle| 1\right) = \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(s - n)}{\Gamma(-n)\Gamma(s + 1/2)}. \quad (21.10)$$

Однако последний переход возможен при  $s - n > 0$ , что, казалось бы, противоречит тому, что  $s = 0, 1, 2, \dots$ , а  $n$  - целое неотрицательное число. Поэтому мы допустим, что  $n < 0$  и  $n$  - нецелое. Тогда (21.10) преобразуется к виду  $(-n)_s / (1/2)_s$ . Так как последнее выражение есть многочлен, то возможно аналитическое продолжение на любые значения  $n$ . Итак,

$$H_{2n}(x) = (-1)^n 2^{2n} \left(\frac{1}{2}\right)_n \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-n)_s}{(1/2)_s s!} x^{2s} = (-1)^n 2^{2n} \left(\frac{1}{2}\right)_n \Phi\left(-n, \frac{1}{2}, x^2\right) \quad (21.11)$$

$$\frac{2^k \sqrt{\pi}}{\Gamma(-k + 1/2)} = (-1)^k 2^k \left(\frac{1}{2}\right)_k, \quad D_{2k}(z) = 2^{-k} e^{-z^2/4} H_{2k}\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right). \quad (21.12)$$

Аналогично выводится формула

$$H_{2n+1}(x) = \frac{2(-1)^n (2n + 1)!}{n!} x \Phi\left(-n, \frac{3}{2}, x^2\right). \quad (21.13)$$

$$\text{Отсюда} \quad D_{2k+1}(z) = 2^{-k-1/2} e^{-z^2/4} H_{2k+1}\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right), \quad (21.14)$$

т.е. для всех натуральных  $n$

$$D_n(z) = 2^{-n/2} e^{-z^2/4} H_n\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right). \quad (21.15)$$

## 22 Функции Матъе

$$\text{Уравнение Матъе: } y'' + (a - 2q \cos(2x))y = 0. \quad (22.1)$$

Т.к. коэффициент уравнения - целая функция, то решения также будут целыми аналитическими функциями. Однако они не обязаны быть периодическими функциями! Рассмотрим вначале пример из [Ка] (2.70). Уравнение

$$y'' - 2y' \operatorname{tg} x + by = 0, \quad b \geq 0 \quad (22.2)$$

имеет общее решение

$$y(x) = C_1 \frac{\cos(\lambda x)}{\cos x} + C_2 \frac{\sin(\lambda x)}{\cos x}, \quad b + 1 = \lambda^2. \quad (22.3)$$

Оно имеет решения периода  $2\pi$  в случае  $b + 1 = n^2$ , т.е.  $b = 0, 3, 8, 15, 24, \dots$  Таким образом, существует семейство спектральных значений параметра  $b$ . Аналогично этому уравнение Матъе имеет решения периода  $\pi$  или  $2\pi$ , когда  $a$  принимает дискретный ряд значений, зависящих от  $q$ . Имеется 4 семейства решений:

1°. четные функции периода  $\pi$ :

$$ce_{2n}(x, q) = \sum_{m=0}^{\infty} A_{2m}^{(2n)} \cos(2mx), \quad a = a_{2n}(q), \quad (22.4)$$

2°. четные функции периода  $2\pi$ :

$$ce_{2n+1}(x, q) = \sum_{m=0}^{\infty} A_{2m+1}^{(2n+1)} \cos[(2m+1)x], \quad a = a_{2n+1}(q), \quad (22.5)$$

3°. нечетные функции периода  $\pi$ :

$$ce_{2n}(x, q) = \sum_{m=0}^{\infty} B_{2m}^{(2n)} \sin(2mx), \quad a = b_{2n}(q), \quad (22.6)$$

4°. нечетные функции периода  $2\pi$ :

$$ce_{2n+1}(x, q) = \sum_{m=0}^{\infty} B_{2m+1}^{(2n+1)} \sin[(2m+1)x], \quad a = b_{2n+1}(q). \quad (22.7)$$

Первые коэффициенты рядов -  $A_0^{(2m)}, A_1^{(2m+1)}, B_0^{(2m)}, B_1^{(2m+1)}$  - нормировочные. Обозначим, убрав верхний индекс:

$$Gc_m = \frac{A_m}{A_{m-2}}, \quad Gs_m = \frac{B_m}{B_{m-2}}, \quad V_m = \frac{a - m^2}{q}. \quad \text{Тогда} \quad (22.8)$$

$$Gc_2 = V_0, \quad Gc_4 = V_2 - 2/Gc_2, \quad Gc_3 = V_1 - 1, \quad Gs_4 = V_2, \quad Gs_3 = V_1 + 1. \quad (22.9)$$

Остальные коэффициенты находятся по общей рекуррентной формуле:

$$G_m = \frac{1}{V_m - G_{m+2}}, \quad m > 3. \quad (22.10)$$

Соответствующие спектральные значения находятся из уравнений, в левой части которых стоят непрерывные дроби:

$$V_0 - \frac{2}{V_2 -} \frac{1}{V_4 -} \frac{1}{V_6 -} \dots = 0 \quad \text{для } a_{2n}, \quad (22.11)$$

$$V_1 - 1 - \frac{1}{V_3 -} \frac{1}{V_5 -} \frac{1}{V_7 -} \dots = 0, \quad \text{для } a_{2n+1}, \quad (22.12)$$

$$V_2 - \frac{1}{V_4 -} \frac{1}{V_6 -} \frac{1}{V_8 -} \dots = 0, \quad \text{для } b_{2n}, \quad (22.13)$$

$$V_1 + 1 - \frac{1}{V_3 -} \frac{1}{V_5 -} \frac{1}{V_7 -} \dots = 0, \quad \text{для } b_{2n+1}. \quad (22.14)$$

При малых  $q$

$$ce_n(x, q) = \cos(nx) - q \left\{ \frac{\cos[(n+2)x]}{4(n+1)} - \frac{\cos[(n-2)x]}{4(n-1)} \right\} + O\left(\frac{q^2}{n^2}\right), \quad (22.15)$$

$$se_n(x, q) = \sin(nx) - q \left\{ \frac{\sin[(n+2)x]}{4(n+1)} - \frac{\sin[(n-2)x]}{4(n-1)} \right\} + O\left(\frac{q^2}{n^2}\right). \quad (22.16)$$

В формуле [УиВ], 19.3, пример 1 (4), по-видимому, пропущена единица в фигурных скобках при  $\cos(2x)$ .

$$\text{Следовательно,} \quad \lim_{q \rightarrow 0} ce_n = \cos(nx) \quad \lim_{q \rightarrow 0} se_n = \sin(nx). \quad (22.17)$$

$$\text{Соотношения ортогональности:} \quad \int_{-\pi}^{\pi} ce_n(x, q) se_k(x, q) dq = 0, \quad \forall n, k. \quad (22.18)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} ce_n(x, q) ce_k(x, q) dq = \int_{-\pi}^{\pi} se_n(x, q) se_k(x, q) dq = 0, \quad n \neq k, \quad (22.19)$$

$$\text{Нормировка:} \quad \int_{-\pi}^{\pi} ce_n^2(x, q) dq = 2A_0^2 + A_2^2 + \dots = A_1 + A_3^2 + \dots = 1, \quad (22.20)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} se_n^2(x, q) dq = B_1^2 + B_3^2 + \dots = B_2 + B_4^2 + \dots = 1. \quad (22.21)$$

## 23 Таблицы операторов симметрии

Уравнение Клейна-Гордона:

$$\Psi_{tt} - \Psi_{xx} + \omega^2 \Psi = 0, P_1 = \partial_t, P_2 = \partial_x, M = -t\partial_x - x\partial_t.$$

Таблица 2

N	Операторы	Координаты	Множители решения
1	$P_2^2, P_1 P_2, (P_1 + P_2)^2$	$x, y$	Экспоненты
2	$M^2$	$t = u \operatorname{ch} v, x = u \operatorname{sh} v$	Экспоненты и ф. Бесселя
3	$\{M, P_2\}$	$t = (u^2 + v^2)/2, x = uv$	ф. параболич. цилиндра
4	$\{M, P_1\}$	$t = uv, x = (u^2 + v^2)/2$	ф. параболич. цилиндра
5	$\{M, P_1 - P_2\} + (P_1 + P_2)^2$	$t = u + v + (u - v)^2/2$ $x = u + v - (u - v)^2/2$	ф. Эйри
6	$M^2 - P_1 P_2$	$t + x = \operatorname{ch}[(u - v)/2]$ $t - x = \operatorname{sh}[(u + v)/2]$	ф. Матъе
7	$M^2 + (P_1 + P_2)^2$	$t + x = 2 \operatorname{sh}(u - v)$ $t - x = \operatorname{exp}(u + v)$	ф. Бесселя
8	$M^2 - (P_1 + P_2)^2$	$t + x = 2 \operatorname{ch}(u - v)$ $t - x = \operatorname{exp}(u + v)$	ф. Бесселя
9	$M^2 + P_2^2$	$t = \operatorname{sh} u \operatorname{ch} v$ $x = \operatorname{ch} u \operatorname{sh} v$	ф. Матъе
10	$M^2 - P_2^2$	$t = \operatorname{ch} u \operatorname{ch} v$ $x = \operatorname{sh} u \operatorname{sh} v$ или $t = \cos u \cos v$ $x = \sin u \sin v$	ф. Матъе
11	$\{M, P_1 - P_2\}$		Решений нет

Комплексное уравнение Гельмгольца:  $\Psi_{xx} + \Psi_{yy} + \omega^2 \Psi = 0$ .

$$P_1 = \partial_x, P_2 = \partial_y, M = y\partial_x - x\partial_y.$$

Таблица 3

N	Операторы	Координаты	Множители решения
1	$P_1^2, (P_1 + iP_2)^2$	$x, y$	Экспоненты
2	$M^2$	$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$	Экспонента и ф. Бесселя
3	$M^2 - a^2 P_2^2, a \neq 0$	$x = a \operatorname{ch} \alpha \cos \beta, y = a \operatorname{sh} \alpha \sin \beta$	ф.Матье
4	$\{M, P_2\}$	$x = (\xi^2 - \eta^2)/2, y = \xi\eta$	ф.параболич. цилиндра
5	$M^2 + (P_1 + iP_2)^2$	$x = (u^2 + u^2v^2 - v^2)/(2uv)$ $y = i(u^2 - u^2v^2 + v^2)/(2uv)$	ф.Бесселя
6	$\{M, P_1 + iP_2\} + (P_1 - iP_2)^2$	$x = (w + z)/2 - (w - z)^2/4$ $y = -(w + z)/2 - (w - z)^2/4$	ф.Эйри
7	$\{M, P_1 + iP_2\}$		Решений нет

Классы эквивалентности решений с разделенными переменными.

Таблица 4

N	Операторы	Координаты	Множители решения
N	Оператор симметрии	Эквивал. решения для веществ. ур-ния Гельмгольца (см. таблицу 1)	Эквивал. решения для веществ. ур-ния Клейна-Гордона (см. таблицу 2)
	(см. таблицу 3)		
1	$P_1^2, (P_1 + iP_2)^2$	1	1
2	$M^2$	2	2
3	$M^2 - a^2 P_2^2, a \neq 0$	4	6,9,10
4	$\{M, P_2\}$	3	3,4
5	$M^2 + (P_1 + iP_2)^2$		7,8
6	$\{M, P_1 + iP_2\} + (P_1 - iP_2)^2$		5
7	$\{M, P_1 + iP_2\}$		11

Уравнение Шредингера:  $i\Psi_t + \Psi_{xx} = 0$ ,  
 $K_2 = -t^2\partial_t - tx\partial_x - t/2 + ix^2/4$ ,  $K_1 = -t\partial_x + ix/2$ ,  
 $K_0 = i$ ,  $K_{-1} = \partial_x$ ,  $K_2 = \partial_t$ ,  $K^0 = x\partial_x + 2t\partial_t + 1/2$ .

Таблица 5

N	Операторы	Координаты	R для множителя $\exp(iR)$	Множители решения
1	$K_{-1}, K_{-2}$	$x = u, t = v$	0	Экспоненты
2а	$K_{-2} - K_1$	$x = u + v^2/2$	$uv/2$	Эксп. и ф. Эйри
2б	$K_2 + K_{-1}$	$x = uv + 1/2v$	$(u^2v - u/v)/4$	Эксп. и ф. Эйри
3а	$K^0$	$x = u\sqrt{v}$	0	Эксп. и ф. параб. цилиндра
3б	$K_2 + K_{-2}$	$x = u\sqrt{ 1 - v^2 }$	$\pm u^2v/4$ (+, если $ v  > 1$ , -, если $ v  < 1$ )	Эксп. и ф. параб. цилиндра
4	$K_2 - K_{-2}$	$x = u\sqrt{1 + v^2}$	$u^2v/4$	Эксп. и ф. Эрмита

Уравнение теплопроводности:  $\Psi_t - \Psi_{xx} = 0$ .

$H_2 = t^2\partial_t + tx\partial_x + t/2 + x^2/4$ ,  $H_1 = t\partial_x + x/2$ ,  
 $H_0 = 1$ ,  $H_{-1} = \partial_x$ ,  $H_{-2} = \partial_t$ ,  $H^0 = x\partial_x + 2t\partial_t + 1/2$ .

Таблица 6

N	Операторы	Координаты	R для множителя $\exp(iR)$	Множители решения
1	$H_{-1}, H_{-2}$	$x = u, t = v$	0	Экспоненты
2	$H_{-2} + H_1$	$x = u + v^2/2$	$-uv/2$	Эксп. и ф. Эйри
3	$H^0$	$x = u\sqrt{v}$	0	Эксп. и многочлен Эрмита
4	$H_2 + H_{-2}$	$x = u\sqrt{1+v^2}$	$u^2v/4$	Эксп. и ф. параболического цилиндра

Уравнение Шредингера для изотропной свободной частицы:

$$i\Psi_t + \Psi_{xx} - \frac{a}{x^2}\Psi = 0,$$

$$K_{-2} = \partial_t, K_2 = -t^2\partial_t - tx\partial_x - t/2 + ix^2/4, K^0 = 2t\partial_t + x\partial_x + 1/2.$$

Таблица 7

1a	$K_{-2}$	$x = u, t = v$	0	Эксп. и ф. Бесселя
1б	$K_2$	$x = uv$	$x = u^2v/4$	Эксп. и ф. Бесселя
2a	$K^0$	$x = u\sqrt{v}$	0	Эксп. и ф. Уиттекера
2б	$K_2 + K_{-2}$	$x = u\sqrt{\pm(1-v^2)}$	$\pm u^2v/4$	Эксп. и ф. Уиттекера
3	$K_2 - K_{-2}$	$x = u\sqrt{1+v^2}$	$u^2v/4$	Эксп. и ф. Лаггера

Комплексное уравнение  $\Psi_t - \Psi_{xx} + \frac{a}{x^2}\Psi = 0,$

$$J^+ = t^2\partial_t + tx\partial_x + t/2 + x^2/4, J^- = -\partial_t, J^0 = i\partial_t + (1/2)x\partial_x + 1/4.$$

Таблица 8

1	$J^-$	$x = u, t = v$	0	Эксп. и ф. Бесселя
2	$J^0$	$x = u\sqrt{v}$	0	Эксп. и ф. Лаггера

Таблица 9

N		V	Физическая аналогия
1	F	0	Свободная частица
2	O	$k(x^2 + y^2), k > 0$	Гармонический осциллятор
3	R	$-k(x^2 + y^2), k > 0$	Репульсивный осциллятор
4	L	$ax, a \neq 0$	Движение в однородном внешнем поле

Двумерное уравнение Шредингера :  $i\Psi_t + \Psi_{xx} + \Psi_{yy} - V(x, y)\Psi = 0, x = x_1, y = x_2$ .  
 Генераторы подгрупп при  $V(x, y) = 0$ :

$$K_2 = -t^2\partial_t - tx_1\partial_{x_1} - tx_2\partial_{x_2} - t + i(x_1^2 + x_2^2)/4, K_{-2} = \partial_t, M = x_1\partial_{x_2} - x_2\partial_{x_1},$$

$$P_j = \partial_{x_j}, B_j = -it\partial_{x_j} + ix_j/2, \quad j = 1, 2, D = x_1\partial_{x_1} + x_2\partial_{x_2} + 2t\partial_t + 1, E = i$$

Ниже  $c$  - декартовы координаты,  $r$  - радиальные (полярные),  $p$  - параболические,  $e$  - эллиптические (см. также табл. 9).

Таблица 10

N		Операторы	Координаты и R из множителя $\exp(iR)$	Множители решения
1a	Fc	$K_2, B_1^2$	$x = uw, y = vw$ $R = (u^2 + v^2)w/4$	Экспоненты
1b	Fc	$K_{-2}, P_1^2$	$x = u, y = v$ $R = 0$	Экспоненты
2a	Fr	$K_2, M^2$	$x = uw \cos v, y = uw \sin v$ $R = u^2w/4$	Экспонента и ф. Бесселя
2b	Fr	$K_{-2}, M^2$	$x = u \cos v, y = u \sin v$ $R = 0$	Экспонента и ф. Бесселя
3a	Fp	$K_2, \{B_2, M\}$	$x = w(u^2 - v^2)/2, y = uvw$ $R = (u^2 + v^2)w/16$	ф.параболич. цилиндра
3b	Fp	$K_{-2}, \{P_2, M\}$	$x = (u^2 - v^2)/2, y = uv$ $R = 0$	ф.параболич. цилиндра

N		Операторы	Координаты и R из множителя $\exp(iR)$	Множители решения
4a	Fe	$K_2, M^2 - B_2^2$	$x = w \operatorname{ch} u \cos v, y = w \operatorname{sh} u \sin v$ $R = (\operatorname{sh}^2 u + \operatorname{cos}^2 v)w/4$	Модифиц. ф.Матье и ф.Матье
46	Fe	$K_{-2}, M^2 - P_2^2$	$x = \operatorname{ch} u \cos v, y = \operatorname{sh} u \sin v$ $R = 0$	" "
5a	Lc	$B_2^2 + 2bEP_2$ $K_2 - 2aP_1 - 2bP_2,$	$x = uw + a/w$ $y = vw + b/w$ $R = (u^2 + v^2)w/4 - (au + bv)/2w$	ф.Эйри
56	Lc	$P_1^2 - 2aEB_1$ $K_{-2} + 2aB_1 + 2bB_2,$	$x = u + aw^2, y = v + bw^2$ $R = (au + bv)w$	ф.Эйри
6a	Lp	$K_2 - aP_1,$ $\{B_2, M\} - aP_2^2$	$x = (u^2 - v^2)w/2 + a/w, y = uvw$ $R = (u^2 + v^2)^2w/16 -$ $-(u^2 - v^2)a/4w$	ф.ангармон. осциллятора
?66	Lp	$K_{-2} - aB_1,$ $\{P_2, M\} + aB_2^2$	$x = (u^2 - v^2)/2 + aw^2/2, y = uv$ $R = (u^2 - v^2)aw/4$	ф.ангармон. осциллятора
7	Oc	$K_{-2} - K_2,$ $P_1^2 + B_1^2$	$x = u\sqrt{1+w^2}, y = v\sqrt{1+w^2}$ $R = (u^2 + v^2)w/4$	ф.Эрмита
8	Or	$K_{-2} - K_2,$ $M^2$	$x = u\sqrt{1+w^2} \cos v$ $R = u^2w/4, y = u\sqrt{1+w^2} \sin v$	Экспонента и ф.Лаггера
9	Oe	$K_{-2} - K_2,$ $M^2 - P_2^2 - B_2^2$	$x = \sqrt{1+w^2} \operatorname{ch} u \cos v$ $y = \sqrt{1+w^2} \operatorname{sh} u \sin v$ $R = (\operatorname{sh}^2 u + \operatorname{cos}^2 v)w/4$	ф.Айнса
10a	Rc	$D, \{B_1, P_1\}$	$x = u\sqrt{ w }, y = v\sqrt{ w }$ $R = 0$	ф.параб. цилиндра
106	Rc	$K_{-2} + K_2,$ $P_1^2 - B_1^2$	$x = u\sqrt{ w^2 - 1 }, y = v\sqrt{ w^2 - 1 }$ $R = c(u^2 + v^2)w/4$	ф.параб. цилиндра
11a	Rr	$D, M^2$	$x = u\sqrt{ w } \cos v, y = u\sqrt{ w } \sin v$ $R = 0$	Экспонента и ф.Уиттекера

N		Операторы	Координаты и R из множителя $\exp(iR)$	Множители решения
116	Rr	$K_{-2} + K_2$ $M^2$	$u\sqrt{ w^2 - 1 } \cos v, u\sqrt{ w^2 - 1 } \cos v$ $R = \varepsilon u^2 w / 4$	Экспонента и ф. Уиттекера
12a	Re	$D,$ $M^2 - 1/2\{B_2, P_2\}$	$x = \sqrt{ w } \operatorname{ch} u \cos v$ $y = \sqrt{ w } \operatorname{sh} u \sin v$ $R = 0$	ф. Айнса
126	Re	$K_{-2} + K_2,$ $M^2 - P_2^2 + B_2^2$	$x = \sqrt{ w^2 - 1 } \operatorname{ch} u \cos v$ $y = \sqrt{ w^2 - 1 } \operatorname{sh} u \sin v$ $R = \varepsilon (\operatorname{sh}^2 u + \cos^2 v) / 4$	ф. Айнса
13	L	$P_1,$ $B_2^2 - 2bEP_2$	$x = u, y = vw + b/w$ $R = wv^2/4 - bv/2w$	Экспонента и ф. Эйри
14	L	$P_1,$ $P_2^2 - 2aEB_2$	$x = u, y = v + aw^2$ $R = avw$	Экспонента и ф. Эйри
15	O	$P_1,$ $P_2^2 + B_2^2$	$x = u, y = v\sqrt{1 + w^2}$ $R = wu^2/4(?)$	Экспонента и ф. Эрмита
16	R	$P_1,$ $\{B_2, P_2\}$	$x = u, y = v\sqrt{ w }$ $R = 0$	Экспонента и ф. параб. цил.
17	R	$P_1,$ $P_2^2 - B_2^2$	$x = u, y = v\sqrt{ w^2 - 1 }$ $R = \varepsilon v^2 w / 4$	Экспонента и ф. параб. цил.

Двумерное уравнение теплопроводности :  $\Psi_t - \Psi_{xx} - \Psi_{yy} = 0, \quad x = x_1, y = x_2.$  (табл.11)

$$H_2 = t^2 \partial_t + tx_1 \partial_{x_1} + tx_2 \partial_{x_2} + t + (x_1^2 + x_2^2)/4, H_{-2} = \partial_t, M = x_1 \partial_{x_2} - x_2 \partial_{x_1},$$

$$P_j = \partial_{x_j}, B_j = t \partial_{x_j} + x_j/2, \quad j = 1, 2. H^0 = x_1 \partial_{x_1} + x_2 \partial_{x_2} + 2t \partial_t + 1. H_0 = 1.$$

Таблица 11

1a	Fc	$H_2, B_1^2$	$x = uw, y = vw$ $R = -(u^2 + v^2)w/4$	Экспоненты
16	Fc	$H_{-2}, P_1^2$	$x = u, y = v$ $R = 0$	Экспоненты
2a	Fr	$H_2, M^2$	$x = uw \cos v, y = uv \sin v$ $R = -u^2w/4$	Экспонента и ф. Бесселя
26	Fr	$H_{-2}, M^2$	$x = u \cos v, y = u \sin v$ $R = 0$	Экспонента и ф. Бесселя
3a	Fp	$H_2, \{B_2, M\}$	$x = w(u^2 - v^2)/2, y = uvw$ $R = -(u^2 + v^2)w/16$	ф. параб. цилиндра
36	Fp	$H_{-2}, \{P_2, M\}$	$x = (u^2 - v^2)/2, y = uv$ $R = 0$	ф. параб. цилиндра
4a	Fe	$H_2, M^2 - B_2^2$	$x = w \operatorname{ch} u \cos v, y = w \operatorname{sh} u \sin v$ $R = -(\operatorname{sh}^2 u + \operatorname{cos}^2 v)w/4$	Мод. ф. Матъе и ф. Матъе
46	Fe	$H_{-2}, M^2 - P_2^2$	$x = \operatorname{ch} u \cos v, y = \operatorname{sh} u \sin v$ $R = 0$	Мод. ф. Матъе и ф. Матъе
5a	Lc	$B_2^2 - 2bP_2H_0$ $H_2 - 2aP_1 - 2bP_2,$	$x = uw + a/w$ $y = vw + b/w$ $R = -(u^2 + v^2)w/4 + (au + bv)/2w$	ф. Эйри
56	Lc	$P_1^2 + 2aB_1H_0$ $H_{-2} + 2aB_1 + 2bB_2,$	$x = u + aw^2, y = v + bw^2$ $R = -(au + bv)w$	ф. Эйри
6a	Lp	$H_2 - aP_1,$ $\{B_2, M\} - aP_2^2$	$x = (u^2 - v^2)w/2 + a/w,$ $y = uvw, R = -(u^2 + v^2)^2w/16 +$ $+a(u^2 - v^2)/4w$	ф. ангармон. осциллятора
? 66	Lp	$H_{-2} - 2aB_1,$ $\{P_2, M\} + 2aB_2^2$	$x = (u^2 - v^2)/2 + aw^2, y = uv$ $R = -a(u^2 - v^2)w/2$	ф. ангармон. осциллятора
7	Oc	$H_{-2} + H_2,$ $P_1^2 + B_1^2$	$x = u\sqrt{1+w^2}, y = v\sqrt{1+w^2}$ $R = -(u^2 + v^2)w/4$	ф. параб. цил.
8	Or	$H_{-2} + H_2,$ $M^2$	$x = u\sqrt{1+w^2} \cos v$ $y = u\sqrt{1+w^2} \sin v, R = -u^2w/4$	Экспонента и ф. Уиттекера

9	Oe	$H_{-2} + H_2,$ $M^2 - P_2^2 - B_2^2$ ?	$x = \sqrt{1+w^2} \operatorname{ch} u \cos v$ $y = \sqrt{1+w^2} \operatorname{sh} u \sin v$ $R = -(\operatorname{sh}^2 u + \cos^2 v)w/4$	ф.Айнса
10a	Rc	$H^0, \{B_1, P_1\}$	$x = u\sqrt{ w }, y = v\sqrt{ w }$ $R = 0$	ф.Эрмита
106	Rc	$H_{-2} - H_2,$ $P_1^2 - B_1^2$	$x = u\sqrt{ w^2 - 1 }, y = v\sqrt{ w^2 - 1 }$ $R = -\varepsilon(u^2 + v^2)w/4$ $\varepsilon = \operatorname{sign}(1 - w^2)$	ф.Эрмита
11a	Rr	$H^0, M^2$	$x = u\sqrt{ w } \cos v, y = u\sqrt{ w } \sin v$ $R = 0$	Экспонента и ф.Лаггера
116	Rr	$H_{-2} - H_2$ $M^2$	$u\sqrt{ 1 - w^2 } \cos v, u\sqrt{ 1 - w^2 } \cos v$ $R = -\varepsilon u^2 w/4$	Экспонента и ф.Лаггера
12a	Re	$H_0,$ $M^2 - 1/2\{B_2, P_2\}$	$x = \sqrt{ w } \operatorname{ch} u \cos v$ $y = \sqrt{ w } \operatorname{sh} u \sin v$ $R = 0$	ф.Айнса
126	Re	$H_{-2} - H_2,$ $M^2 - P_2^2 + B_2^2$	$x = \sqrt{ 1 - w^2 } \operatorname{ch} u \cos v$ $y = \sqrt{ 1 - w^2 } \operatorname{sh} u \sin v$ $R = -\varepsilon(\operatorname{sh}^2 u + \cos^2 v)/4$	ф.Айнса
13	L	$P_1,$ $B_2 + 2bP_2H_0$	$x = u, y = vw + b/w$ $R = -wv^2/4 + bv/2w$	Экспонента и ф.Эйри
14	L	$P_1,$ $P_2^2 + 2aB_2H_0$	$x = u, y = v + aw^2$ $R = -avw$	Экспонента и ф.Эйри
15	O	$P_1,$ $P_2^2 + B_2^2$	$x = u, y = v\sqrt{1+w^2}$ $R = -wv^2/4$	Экспонента и ф.параболич.цил.
16	R	$P_1,$ $\{B_2, P_2\}$	$x = u, y = v\sqrt{ w }$ $R = 0$	Экспонента и ф.Эрмита
17	R	$P_1,$ $P_2^2 - B_2^2$	$x = u, y = v\sqrt{ 1 - w^2 }$ $R = -\varepsilon v^2 w/4$	Экспонента и ф.Эрмита

Трехмерное уравнение Гельмгольца:

$$(\Delta_3 + \omega^2)\Psi = 0, \quad \text{где } \Delta_3 \equiv \partial_{x_1 x_1} + \partial_{x_2 x_2} + \partial_{x_3 x_3}.$$

$$P_j = \partial_j = \partial_{x_j}, \quad j = 1, 2, 3, \quad J_1 = x_3 \partial_2 - x_2 \partial_3, \quad J_2 = x_1 \partial_3 - x_3 \partial_1, \quad J_3 = x_2 \partial_1 - x_1 \partial_2.$$

Таблица 12

N	Коммутирующие операторы $S_1, S_2$	Координаты	
1	$P_2^2, P_3^2$	Декартовы	$x, y, z$
2	$J_3^2, P_3^2$	Цилиндрич.	$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi,$ $z = z$
3	$\{J_3, P_2\}, P_3^2$	Параболич. цилиндра	$x = (\xi^2 - \eta^2)/2,$ $y = \xi \eta, z = z$
4	$J_3^2 + d^2 P_1^2, P_3^2$ $d > 0$	Эллиптич. цилиндра	$x = d \operatorname{ch} \alpha \cos \beta$ $y = d \operatorname{sh} \alpha \sin \beta, z = z$
5	$J \cdot J, J_3^2$	Сферические	$x = \rho \sin \theta \cos \varphi$ $y = \rho \sin \theta \sin \varphi$ $z = \rho \cos \theta$
6	$J \cdot J - a^2(P_1^2 + P_2^2), J_3^2$ $a > 0$	Вытянутого сфероида	$x = a \operatorname{sh} \eta \sin \alpha \cos \varphi$ $y = a \operatorname{sh} \eta \sin \alpha \sin \varphi$ $z = a \operatorname{ch} \eta \cos \alpha$
7	$J \cdot J + a^2(P_1^2 + P_2^2), J_3^2$ $a > 0$	Сплюсненного сфероида	$x = a \operatorname{ch} \eta \sin \alpha \cos \varphi$ $y = a \operatorname{ch} \eta \sin \alpha \sin \varphi$ $z = a \operatorname{sh} \eta \cos \alpha$
8	$\{J_1, P_2\} - \{J_2, P_1\}, J_3^2$	Параболич.	$x = \xi \eta \cos \varphi, y = \xi \eta \sin \varphi,$ $z = (\xi^2 - \eta^2)/2$
9	$J_3^2 - c^2 P_3^2 + c(\{J_1, P_2\} + \{J_2, P_1\}),$ $c(P_2^2 - P_1^2) + \{J_2, P_1\} - \{J_1, P_2\}$	Парабои- дальные	$x = 2c \operatorname{ch} \alpha \cos \beta \operatorname{sh} \gamma,$ $y = 2c \operatorname{sh} \alpha \sin \beta \operatorname{ch} \gamma,$ $z = c(\operatorname{ch}(2\alpha) + \cos(2\beta)) -$ $- \operatorname{ch}(2\gamma))/2$
10	$P_1^2 + a P_2^2 + (a+1) P_3^2 + J \cdot J,$ $J_2^2 + a(J_1^2 + P_3^2),$ $a > 1$	Эллипсоидальные	$x = \left[ \frac{(\mu-a)(\nu-a)(\rho-a)}{a(a-1)} \right]^{1/2}$ $y = \left[ \frac{(\mu-1)(\nu-1)(\rho-1)}{(1-a)} \right]^{1/2},$ $z = \left[ \frac{\mu\nu\rho}{a} \right]^{1/2}$

11	$J \cdot J, J_1^2 + bJ_2^2,$ $0 < b < 1$	Конические	$x = r \left[ \frac{(b\mu-1)(b\nu-1)}{1-b} \right]^{1/2}$ $y = r \left[ \frac{b(\mu-1)(\nu-1)}{b-1} \right]^{1/2},$ $z = r [b\mu\nu]^{1/2}$
----	---	------------	---

Трехмерное уравнение Лапласа:  $\Delta_3 \Psi = 0$ .

$P_j = \partial_j = \partial_{x_j}, \quad j = 1, 2, 3. J_1 = x_3 \partial_2 - x_2 \partial_3, \quad J_2 = x_1 \partial_3 - x_3 \partial_1, \quad J_3 = x_2 \partial_1 - x_1 \partial_2, D =$   
 $-(x_1 \partial_1 + x_2 \partial_2 + x_3 \partial_3 + 1/2), K_1 = x_1 + (x_1^2 - x_2^2 - x_3^2) \partial_1 + 2x_1 x_3 \partial_3 + 2x_1 x_2 \partial_2, K_2 =$   
 $x_2 + (x_2^2 - x_1^2 - x_3^2) \partial_2 + 2x_2 x_3 \partial_3 + 2x_2 x_1 \partial_1, K_3 = x_3 + (x_3^2 - x_1^2 - x_2^2) \partial_3 + 2x_3 x_1 \partial_1 + 2x_3 x_2 \partial_2.$

Дополнительные системы координат, допускающие R-разделение переменных

$\Psi = \sqrt{R(\mu, \nu, \rho)} A(\mu) B(\nu) C(\rho)$  для уравнения Лапласа:

Таблица 13

12	$S_1 = \frac{a+1}{4}(P_2 + K_2)^2 + \frac{b+1}{4}(P_1 + K_1)^2 +$ $+\frac{a+b}{4}(P_3 + K_3)^2 + J_3^2 + bJ_2^2 + aJ_1^2$ $S_2 = \frac{a}{4}(P_2 + K_2)^2 + \frac{b}{4}(P_1 + K_1)^2 + \frac{ab}{4}(P_3 + K_3)^2$	$x = R^{-1} \left[ \frac{(\mu-a)(\nu-a)(\rho-a)}{(b-a)(a-1)a} \right]^{1/2}$ $y = R^{-1} \left[ \frac{(\mu-b)(\nu-b)(\rho-b)}{(a-b)(b-1)b} \right]^{1/2}$ $z = R^{-1} \left[ \frac{(\mu-1)(\nu-1)(\rho-1)}{(a-1)(b-1)} \right]^{1/2}$ $R = 1 + \left[ \frac{\mu\nu\rho}{ab} \right]^{1/2}$
13	$S_1 = 2\alpha J_3^2 + \frac{\alpha+1}{2}\{P_2, K_2\} + \frac{\beta}{2}(P_2^2 - K_2^2) +$ $\frac{\alpha}{2}\{P_1, K_1\} + \frac{\beta}{2}(K_1^2 - P_1^2),$ $S_2 = \frac{\alpha}{2}\{P_2, K_2\} + \frac{\beta}{2}(P_2^2 - K_2^2) + (\alpha^2 + \beta^2)J_3^2$	$x = R^{-1} \left[ \frac{(\mu-1)(\nu-1)(\rho-1)}{(a-1)(b-1)} \right]^{1/2}$ $y = R^{-1} \left[ -\frac{\mu\nu\rho}{ab} \right]^{1/2}, z = R^{-1}$ $R = 2Re \left[ \frac{i(\mu-a)(\nu-a)(\rho-a)}{(b-a)(a-1)a} \right]^{1/2}$ $a = \bar{b} = \alpha + i\beta;$ $\alpha, \beta$ вещественные
14	$S_1 = J_3^2,$ $4S_2 = (P_3 + K_3)^2 - a(P_3 - K_3)^2$	$x = R^{-1} \cos \varphi, y = R^{-1} \sin \varphi$ $z = R^{-1} \left[ -\frac{\mu\rho}{a} \right]^{1/2},$ $\bar{R} = \left[ \frac{(\mu-a)(a-\rho)}{a(a-1)} \right]^{1/2}$ $- \left[ \frac{(\mu-1)(1-\rho)}{a-1} \right]^{1/2}$
15	$S_1 = J_3^2,$ $4S_2 = -4aD^2 - (P_3 - K_3)^2$	$x = R^{-1} \cos \varphi, y = R^{-1} \sin \varphi$ $z = R^{-1} \left[ \frac{(\mu-a)(a-\rho)}{a(a-1)} \right]^{1/2},$ $R = \left[ \frac{\mu\rho}{a} \right]^{1/2} + \left[ \frac{(\mu-1)(\rho-1)}{a-1} \right]^{1/2}$

16	$S_1 = J_3^2,$ $2S_2 = \alpha\{P_3, K_3\} + \beta(K_3^2 - P_3^2)$	$x = R^{-1} \cos \varphi, y = R^{-1} \sin \varphi$ $z = R^{-1} \left[ \frac{-\mu\rho}{ab} \right]^{1/2},$ $R = 2Re \left[ \frac{i(\mu-a)(\rho-a)}{a(a-b)} \right]^{1/2}$ $a = \bar{b} = \alpha + i\beta$
17	$S_1 = J_3^2,$ $4S_2 = (P_3 + K_3)^2$	$x = R^{-1} \operatorname{sh} \xi \cos \varphi,$ $y = R^{-1} \operatorname{sh} \xi \sin \varphi$ $z = R^{-1} \cos \psi$ $R = \operatorname{ch} \xi + \sin \psi$

Волновое уравнение :  $\Psi_{tt} - \Delta_2 \Psi \equiv (\partial_{x_0 x_0} - \partial_{x_1 x_1} - \partial_{x_2 x_2}) \Psi = 0.$

$P_j = \partial_j = \partial_{x_j}, \quad j = 0, 1, 2, M_{12} = x_1 \partial_2 - x_2 \partial_1, M_{01} = x_0 \partial_1 + x_1 \partial_0,$   
 $M_{02} = x_0 \partial_2 + x_2 \partial_0, \quad K_0 = -x_0 + (x \cdot x - 2x_0^2) \partial_0 - 2x_0 x_1 \partial_1 - 2x_0 x_2 \partial_2,$   
 $D = -(x_0 \partial_0 + x_1 \partial_1 + x_2 \partial_2 + 1/2), \quad K_1 = x_1 + (x \cdot x + 2x_1^2) \partial_1 + 2x_1 x_0 \partial_0 + 2x_1 x_2 \partial_2,$   
 $K_2 = x_2 + (x \cdot x + 2x_2^2) \partial_2 + 2x_2 x_0 \partial_0 + 2x_2 x_1 \partial_1.$  Здесь  $x \cdot x = x_0 x_0 - x_1 x_1 - x_2 x_2.$   
 Возможен также матричный базис этой алгебры.

**Определение 23.1.**  $so(3, 2)$  - 10-мерная алгебра вещественных матриц  $A$  таких, что  $AG^{3,2} + G^{3,2}A^t = 0$ , где

$$G^{3,2} = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^3 E_{jj} - \sum_{k=4}^5 E_{kk},$$

а  $E_{ij}$  - матрица  $5 \times 5$ , у которой единственный ненулевой элемент 1 на месте  $(i, j)$ . Базис  $so(3, 2)$  состоит из матриц:

$$\Gamma_{ab} = E_{ab} - E_{ba} = -\Gamma_{ba}, a \neq b, \Gamma_{AB} = -E_{AB} + E_{BA} = -\Gamma_{BA}$$

$$\Gamma_{aB} = E_{aB} + E_{Ba} = \Gamma_{Ba}, 1 \leq a, b \leq 3, 4 \leq A, B \leq 5, \text{ причём}$$

$$P_0 = \Gamma_{14} + \Gamma_{45}, P_1 = \Gamma_{12} + \Gamma_{25}, P_2 = \Gamma_{13} + \Gamma_{35}$$

$$K_0 = \Gamma_{14} - \Gamma_{45}, K_1 = \Gamma_{12} - \Gamma_{25}, K_2 = \Gamma_{13} - \Gamma_{35}$$

$$M_{12} = \Gamma_{23}, M_{01} = \Gamma_{42}, M_{02} = \Gamma_{43}, D = \Gamma_{15}.$$

Здесь базисные (инфинитезимальные матрицы) мы обозначаем буквами, соответствующими дифференциальным операторам. В краткой работе нет возможности полного описания, и мы отсылаем читателя к работам Калнинса и Миллера [8-11].

Рассмотрим один важный случай, когда решение является собственной функцией оператора  $M_{12}$ . Тогда  $\Psi(\vec{x}) = e^{im\varphi} \Phi(x_0, r)$ , где  $x_1 = r \cos \varphi$ ,  $x_2 = r \sin \varphi$ , а  $\Phi$  удовлетворяет уравнению Эйлера-Пуассона- Дарбу (ЭПД):

$$\Phi_{00} - \Phi_{rr} - \frac{1}{r} \Phi_r + \frac{m^2}{r^2} \Phi = 0$$

Алгебра операторов симметрии уравнения ЭПД содержится в соответствующей алгебре волнового уравнения. В таблице 14 приведены только операторы, соответствующие решениям с  $R$ -разделёнными переменными волнового уравнения. Здесь  $\Gamma_{23} = M_{12}$ ,  $\Gamma_{51} = D$ ,  $\Gamma_{45} = (P_0 - K_0)/2$ ,  $K_{41} = (P_0 + K_0)/2$ .

Таблица 14

N	операторы $S_1, S_2$	Решения
1'	$\Gamma_{23}^2, \Gamma_{45}^2$	Экспонента и ф.Гегенбаура
4'	$\Gamma_{23}^2, (\Gamma_{45} + \Gamma_{41})^2$	Экспонента и ф. Бесселя
16'	$\Gamma_{23}^2, \Gamma_{51}^2$	Экспонента и присоединенная Лежандра
27	$\Gamma_{23}^2, 2\Gamma_{41}^2 + \{\Gamma_{45}, \Gamma_{41}\}$	присоединенная Лежандра
28	$\Gamma_{23}^2, 2\Gamma_{45}^2 + \{\Gamma_{45}, \Gamma_{41}\}$	присоединенная Лежандра
29	$\Gamma_{23}^2, \Gamma_{41}^2 + a\{\Gamma_{45}, \Gamma_{51}\}$	Ламе - Вангерина
30	$\Gamma_{23}^2, \Gamma_{45}^2 + a\Gamma_{51}^2, \quad a > 0$	Ламе- Вангерина
31	$\Gamma_{23}^2, a\Gamma_{41}^2 + \Gamma_{51}^2, \quad a > 1$	Ламе -Вангерина
32	$\Gamma_{23}^2, \{\Gamma_{51}, \Gamma_{41} + \Gamma_{45}\}$	Бесселя

## Библиографический список

- [1] Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 832 с.
- [2] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. М.: Наука, 1973. 296 с.
- [3] Березанский Ю.М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев: Наукова думка, 1965. 800 с.
- [4] Boyer C. The maximal kinematical invariance group for an arbitrary potential. Helv.Phys.Acta, 1974, V.47, 589-605.

- [5] Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1967. 576 с.
- [6] Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: ФМ, 1963. 1100 с.
- [7] Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко Ф.Т. Современная геометрия. М.: Наука, 1979. 760 с.
- [8] Kalnins E., Miller W. J. Lie theory and separation of variables,8, Semisubgroup coordinates for  $\Psi_{tt} - \Delta_2\psi = 0$ . J.Math. Phys., 1975, V.16, 2507-2516.
- [9] Kalnins E., Miller W.J. Lie theory and separation of variables,9: Orthogonal R-separable coordinate systems for the wave equation  $\Psi_{tt} - \Delta_2\psi = 0$ . J.Math.Phys., 1976, V.17, 331-335.
- [10] Kalnins E., Miller W.J. Lie theory and separation of variables,10: Nonorthogonal R-separable solutions of the wave equation  $\Psi_{tt} - \Delta_2\psi = 0$ . J.Math.Phys., 1976. V.17, 356-368.
- [11] Kalnins E., Miller W.J. Lie theory and separation of variables,11: The EPD equation. J.Math.Phys., 1976, V.17, 369-377.
- [12] Миллер У.,мл. Симметрия и разделение переменных. М.: Мир, 1981. 344 с.
- [13] Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: ФМ, 1961. 704 с.
- [14] Уиттекер Э.Т.,Ватсон Дж.Н. Курс современного анализа. Т.2, М.: ФМ, 1963. 516 с.

Хамид Александрович Чиханов

**СИММЕТРИЯ И РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ  
В УРАВНЕНИИ ГЕЛЬМГОЛЬЦА**

*Учебное пособие*

Редактор Н.А.Волынкина  
Компьютерная верстка, макет Х.А.Чиханов

ЛР № 020316 от 04.12.96 г. Подписано в печать 20.03.2001.  
Формат 60 x 84/16. Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. печ.л. 5,35;  
уч.-изд. л.5,75. Тираж 100 экз. Заказ N 610  
Издательство "Самарский университет", 443011, г. Самара,  
ул. Акад. Павлова, 1.  
УОП СамГУ, ПЛД № 67-43 от 19.02.98.