

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра оптики и спектроскопии

А.З. Грасюк

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ИЗЛУЧЕНИЯ С ВЕЩЕСТВОМ

Учебное пособие рекомендовано УМС по физике УМО университетов
России в качестве учебного пособия для студентов старших курсов и
аспирантов, специализирующихся по оптике, лазерной физике

Издательство «Самарский университет»
2002

ББК 22.34

Г75

УДК 535.23

Грасюк А.З. Взаимодействие излучения с веществом: Учебное пособие для студентов старших курсов и аспирантов, специализирующихся по оптике, лазерной физике. Самара: Изд-во «Самарский университет», 2002, 278 с.: ил. 54; табл. 8.

Изложены физические законы, процессы и явления, связанные со взаимодействием излучения с веществом в его различных состояниях: конденсированная среда, газ, плазма, которой уделено наибольшее внимание. В качестве общего фундаментального закона, управляющего равновесным излучением, обсуждается формула Планка и следствия из неё в макро-, микро- и мегамире. Как следствие формулы Планка в представлении Эйнштейна применительно к двухуровневой квантовой системе описывается лазерный эффект (усиление света) и оптические квантовые усилители. На примере задачи о заполненной фотонами зеркальной полости с расширяющимися стенками обсуждается проявление формулы Планка в масштабах Вселенной. Обсуждаются параметры, основные свойства и особенности классической, а также квантовой (вырожденной) плазмы: условие вырождения, температура вырождения, концентрация электронов и их максимальная энергия (энергия Ферми). Рассмотрены основные величины и процессы, связанные со столкновениями частиц в плазме. С помощью системы уравнений Максвелла описаны параметры, явления и законы, характеризующие прохождение электромагнитных волн сквозь плазму. Проанализировано соотношение между давлением лазерного света и давлением плазмы, созданной этим светом вблизи поверхности мишени. Рассмотрены туннельная и лавинная ионизации как примеры лазерной ионизации атомов нейтрального газа. Обсуждаются достижения и проблемы управляемого лазерного термоядерного синтеза (ЛТС): термоядерные D-D и D-T реакции, роль туннельного эффекта в процессе слияния сталкивающихся ядер, лазерное всестороннее сжатие и разогрев сферической мишени, пороговая энергия лазерного импульса, необходимого для энергетически выгодного ЛТС.

Курс рассчитан на студентов старших курсов, а также аспирантов и преподавателей физических факультетов университетов.

ББК 22.34

УДК 535.23

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Федеральной целевой программы "Государственная интеграция высшего образования и фундаментальной науки"

© Грасюк А.З., 2002

© Изд-во "Самарский университет", 2002

ГЛАВА 1. ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ, УПРАВЛЯЮЩИЕ ИЗЛУЧЕНИЕМ. ФОРМУЛА ПЛАНКА И СЛЕДСТВИЯ ИЗ НЕЕ В МАКРО-, МИКРО- И МЕГАМИРЕ

1.1. Формула Планка как распределение по частотам ν спектрально-объемной плотности энергии $\rho_{\nu,\nu}[\text{Дж}/\text{м}^3 \cdot \text{Гц}]$ при заданной температуре $T[\text{К}]$. Физический смысл отдельных сомножителей в распределении $\rho_{\nu,\nu}(\nu, T)$: спектрально-объемная плотность мод, средняя энергия осциллятора, средняя энергия фотона, число фотонов в моде. Формула Планка как распределение по длинам волн: $\rho_{\nu,\lambda}(\lambda, T) = \rho_{\nu,\lambda}[\text{Дж}/\text{м}^3 \cdot \text{м}]$. Формула Планка как распределение по частотам (или по длинам волн) спектральной испускательной способности $S_\nu[\text{Вт}/\text{м}^2 \text{Гц}]$ (или $S_\lambda[\text{Вт}/\text{м}^2 \text{м}]$). Соотношение между ρ и S

Если лазерный свет с плотностью потока (интенсивностью) $I_L[\text{Вт}/\text{м}^2]$ облучает некоторое тело (мишень), то в результате поглощения части падающего света мишень будет нагреваться. Горячая поверхность мишени будет испускать электромагнитные волны. Интенсивность такого переизлучения будет тем выше, чем выше температура T поверхности мишени. В конце концов установится равновесие: поглощаемая лазерная мощность будет равна потоку излучения, испускаемому поверхностью нагретой мишени.

М. Планк (Max Karl Ernst Ludwig Planck) открыл в 1900 г. фундаментальный закон природы, которому подчиняется равновесное излучение, испускаемое и поглощаемое веществом, нагретым до некоторой равновесной температуры. При заданной температуре T формула Планка показывает, как зависит от частоты ν спектрально-объемная плотность излучения $\rho_{\nu,\nu}[\text{Дж}/\text{м}^3 \text{Гц}]$, то есть энергия в единице объема и в единичном спектральном интервале. Такая зависимость от частоты (*распределение Планка по частотам*) выглядит следующим образом:

$$\rho_{\nu,\nu} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}. \quad (1.1)$$

В этой записи формулы Планка в ее правой части выделены два сомножителя, каждый из которых, как будет видно ниже (п. 1.2.1, 1.2.2), име-

ет свой самостоятельный физический смысл. Множитель $\frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}$ представляет собой среднюю энергию планковского (квантового) осциллятора (например, атома). Так как вещество находится в равновесии с излучением, то это одновременно и средняя энергия фотонов в моде. Этот множитель можно представить как $h\nu\bar{n}$, где $\bar{n} = \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}$ - среднее число фотонов в моде. Множитель $8\pi\nu^2/c^3$ - это так называемая спектрально-объемная плотность мод (осцилляторов поля, или состояний фотона).

Физический смысл левой части (1.1), то есть "частотной" спектрально-объемной плотности $\rho_{\nu,v}$, поясняют соотношения:

$$\rho_{\nu,v} = \frac{dw_{\nu}}{d\nu},$$

$$dw_{\nu}[\text{Дж}/\text{м}^3] = \rho_{\nu,v}[\text{Дж}/\text{м}^3\text{Гц}]d\nu[\text{Гц}], \quad (1.2)$$

где $dw_{\nu}[\text{Дж}/\text{м}^3]$ - объемная плотность энергии равновесного излучения, приходящаяся на частотный интервал $[\nu, \nu + \delta\nu]$.

Наряду с распределением по частотам (1.1) используется также распределение Планка по длинам волн λ :

$$\rho_{\nu,\lambda} = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1}. \quad (1.3)$$

Эту формулу нельзя получить из (1.1) формальной подстановкой $\nu = c/\lambda$. Чтобы найти $\rho_{\nu,\lambda}[\text{Дж}/\text{м}^3]$ из (1.2), выразим dw_{ν} через $\rho_{\nu,\lambda}$ и $d\lambda$:

$$dw_{\nu} = \rho_{\nu,\lambda} d\lambda. \quad (1.4)$$

Приравнявая (1.2) и (1.4), получаем:

$$\rho_{\nu,\lambda} = \rho_{\nu,v} \frac{d\nu}{d\lambda} = \rho_{\nu,v} \frac{c}{\lambda^2}. \quad (1.5)$$

Подставляя теперь в $\rho_{\nu,v} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}$ выражение $\nu = \frac{c}{\lambda}$, получим из (1.5) формулу Планка в виде (1.3).

Формулу Планка представляют также как спектральную излучательную способность $S_{\nu}[\text{Вт}/\text{м}^2\text{Гц}]$ или $S_{\lambda}[\text{Вт}/\text{м}^2\text{м}]$. В этом случае S_{ν} (распределение по частотам) имеет вид:

$$S_{\nu} = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}. \quad (1.6)$$

Таким образом

$$S_{\nu} = \frac{c}{4} \rho_{\nu,v}. \quad (1.7)$$

Распределение по длинам волн выглядит так:

$$S_{\lambda} = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1}, \quad (1.8)$$

то есть

$$S_{\lambda} = \frac{c}{4} \rho_{\nu, \lambda}. \quad (1.9)$$

Соотношения (1.7) и (1.9) между спектральной испускающей способностью S_{ν} (S_{λ}) и спектрально-объемной плотностью энергии $\rho_{\nu, \nu}$ ($\rho_{\nu, \lambda}$) можно доказать следующим образом (рис. 1.1). Излучающая поверхность $\sigma[\text{м}^2]$ черного тела (источника), располагающаяся в плоскости XY , подчиняется закону Ламберта (ламбертов источник). Рассмотрим испускаемый в направлении радиуса r световой поток $d\Phi_{\theta, \varphi}[\text{Вт}]$, который характеризуется полярным углом θ , отсчитываемым от нормали к $\sigma[\text{м}^2]$ (то есть от оси z), и азимутальным углом φ .

Согласно закону Ламберта,

$$d\Phi_{\theta, \varphi} = B \sigma \cos \theta d\Omega. \quad (1.10)$$

Здесь $B[\text{Вт}/\text{м}^2 \cdot \text{ст.рад}]$ есть не зависящая от θ и φ энергетическая яркость источника, а $d\Omega[\text{ст.рад}]$ - элементарный телесный угол. Он определяется,

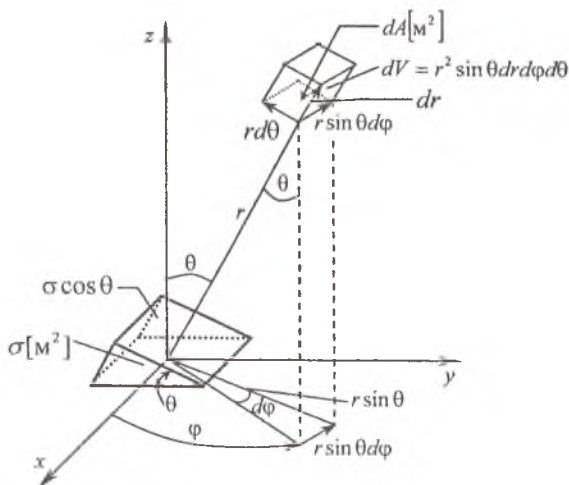


Рис. 1.1. К доказательству соотношений $S_i[\text{Вт}/\text{м}^2 \cdot \text{м}] = \frac{c}{4} \rho_{\nu, i}[\text{Дж}/\text{м}^3 \cdot \text{м}]$,

$I[\text{Вт}/\text{м}^2] = 2S$, $S = \pi B$. $\sigma[\text{м}^2]$ - площадка, излучающая по закону Ламберта.

как обычно, делением площадки $dA = r \sin \theta d\varphi r d\theta$ на r^2 :

$$d\Omega = \frac{dA}{r^2} = \sin \theta d\varphi d\theta,$$

$\sigma \cos \theta$ - "видимая" часть площадки σ , то есть проекция ее площади на плоскость, перпендикулярную радиусу r . Ламбертов источник характеризуется диаграммой направленности, которая в полярных координатах

$\beta = \frac{r}{r_0}$, θ имеет вид $\beta = \cos \theta$. Это окружность, касающаяся горизонтали

($\beta = 0, \theta = \pi/2$). Действительно, в декартовых координатах на плоскости ХУ нормированный радиус-вектор β имеет проекции

$$x = \cos \theta \sin \theta, y = \cos^2 \theta.$$

Исключая $\cos \theta$ и $\sin \theta$, получаем уравнение окружности с радиусом $1/2$ и с центром на оси y , "касающейся" начала координат:

$$x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

Дифференциальная испускательная способность $dS[\text{Вт}/\text{м}^2]$ плоского ламбертова источника $d\Phi_{\theta,\varphi}$ есть

$$dS = \frac{d\Phi_{\theta,\varphi}}{\sigma} = B \cos \theta \sin \theta d\varphi d\theta,$$

то есть это такая плотность потока, которая получается, если поток, испущенный в элементарный телесный угол $d\Omega = \sin \theta d\varphi d\theta$, поделить на всю площадь источника.

Полная испускательная способность $S[\text{Вт}/\text{м}^2]$ плоского ламбертова источника площадью σ получается интегрированием по θ и φ :

$$S = \frac{1}{\sigma} \int d\Phi = B \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta d\theta = \pi B. \quad (1.11)$$

Дифференциальная испускательная интенсивность плоского ламбертова источника есть такая плотность $dI_s[\text{Вт}/\text{м}^2]$ светового потока $d\Phi_{\theta,\varphi}$, которая определяется делением $d\Phi_{\theta,\varphi}$ на "видимую" часть площадки σ , то есть на проекцию площади источника на плоскость, нормальную к направлению распространения элементарного потока $d\Phi_{\theta,\varphi}$:

$$dI_s = \frac{d\Phi_{\theta,\varphi}}{\sigma \cos \theta} = B d\theta. \quad (1.12)$$

Полная (испускательная) интенсивность $I_s [\text{Вт}/\text{м}^2]$ плоского ламбертова источника с учетом всех направлений получается интегрированием (1.12) по θ и φ :

$$I_s = B \int d\Omega = B \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta d\theta = 2\pi B = 2S, \quad (1.13)$$

то есть

$$I_s = 2S.$$

Найдем теперь объемную плотность $w_V [\text{Дж}/\text{м}^3]$ энергии излучения, выраженную через $S [\text{Вт}/\text{м}^2]$ и $I_s [\text{Вт}/\text{м}^2]$.

За время dt наш ламбертов источник испускает в определенном направлении и в телесный угол $d\Omega = \sin \theta d\varphi d\theta$ энергию $dW^{\text{изл}} [\text{Дж}]$, которая представляет собой поток $d\Phi_{\theta, \varphi} [\text{Вт}]$ (1.10), умноженный на время dt :

$$dW^{\text{изл}} = d\Phi_{\theta, \varphi} dt = \sigma dS dt = B \sigma \cos \theta \sin \theta d\varphi dt.$$

Эта энергия содержится в параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис 1.2), объем которого V в соответствии с законами элементарной геометрии, равен

$$V = \sigma \cos \theta c dt.$$

Тем самым объемная плотность излучаемой энергии $dw_V^{\text{изл}} [\text{Дж}/\text{м}^3]$, приходящаяся на телесный угол $d\Omega$, есть

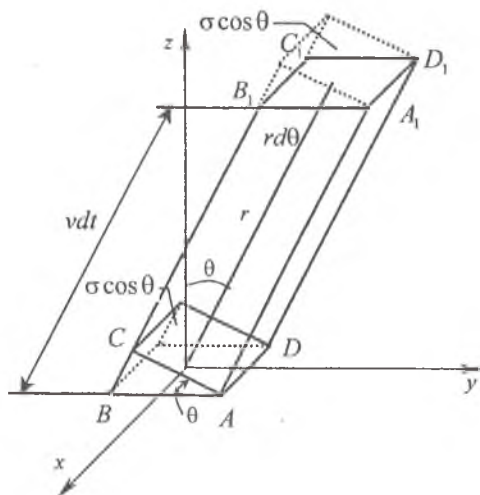


Рис. 1.2. К вычислению объемной плотности энергии. Испущенная за время dt энергия содержится в параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$

$$dw_V^{\text{изл}} = \frac{dW^{\text{изл}}}{V} = \frac{1}{c} B \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{dI_s}{c}, \quad (1.14)$$

где в соответствии с (1.12) I_s - излучательная интенсивность.

Эта формула представляет собой известное соотношение между интенсивностью $dI_s [\text{Вт}/\text{м}^2]$ однонаправленного потока и объемной плотностью энергии $dw_V^{\text{изл}} [\text{Дж}/\text{м}^3]$. Однако выражение (1.14) дает лишь половину *полной* объемной энергии $dw_V [\text{Дж}/\text{м}^3]$, существующей в элементарном объеме dV .

Дело в том, что в рассматриваемом нами случае имеет место динамическое равновесие: световой поток, идущий от поверхности источника σ равен противоположному по направлению потоку, который идет к его поверхности σ (например, при стационарном нагреве поверхности изолированной мишени лазерным пучком такое равенство потоков следует просто из закона сохранения энергии).

Значит, в искомую объемную плотность $dw_V [\text{Дж}/\text{м}^3]$ световой энергии дают вклад два потока с одинаковой интенсивностью $dI_s [\text{Вт}/\text{м}^2]$: один от поверхности источника σ , другой (противоположный по направлению) - к его поверхности. Таким образом

$$dw_V = 2dw^{\text{изл}} = 2 \frac{dI_s}{c}. \quad (1.15)$$

Интегрируя (1.15) по углам θ и φ , как это уже делалось в (1.11) и (1.13), получаем

$$w_V = \frac{2I_s}{c} = \frac{2\pi B}{c} = \frac{4S}{c}.$$

Так как из (1.10) и (1.12) следует, что

$$S = \pi B = \frac{1}{2} I_s,$$

окончательно имеем

$$w_V = 4 \frac{S}{c}.$$

Соотношение это справедливо для любой спектральной компоненты. Таким образом, для спектральных распределений получаем соотношения (1.7) и (1.9).

1.2. Вывод формулы Планка (распределение по частотам)

1.2.1. Средняя энергия квантового осциллятора Планка

Согласно Планку, взаимодействующее с излучением вещество представляет собой совокупность атомных осцилляторов. Каждый осциллятор характеризуется частотой колебаний ν и энергией, которая пропорциональна квадрату амплитуды колебаний. Поглощение и испускание излучения осциллятором происходит квантами с энергией $h\nu$. При этом энергия осциллятора либо увеличивается на $h\nu$ (поглощение), либо уменьшается на $h\nu$ (испускание). На рис. 1.3 показана группа осцилляторов, колеблющихся с частотой ν , которыми могут быть, например, связанные электроны в атомах.

Как видно из рис. 1.3, энергии этих осцилляторов образуют систему эквидистантных энергетических уровней, каждый из которых отличается от соседнего на $h\nu$. Поглощение кванта $h\nu$ означает переход осциллятора на соседний, более высокий уровень, а испускание - переход также на соседний, но ниже расположенный уровень. Чтобы найти *среднюю энергию одного осциллятора*, необходимо вычислить полную энергию всех их и разделить эту энергию на полное число осцилляторов. Предполагается (и это показано на рис. 1.3), что число осцилляторов на каждом из энергетических уровней (в каждом из состояний) определяется распределением Больцмана:

$$N_m = N_0 e^{-m \frac{h\nu}{kT}}$$

или

$$\frac{N_{m+1}}{N_m} = e^{-\frac{h\nu}{kT}}.$$

Полное число частиц-осцилляторов есть

$$N_e = N_0 + N_1 + N_2 + \dots + N_n = N_0 \left(1 + e^{-\frac{h\nu}{kT}} + e^{-2\frac{h\nu}{kT}} + \dots + e^{-m\frac{h\nu}{kT}} \right) = N_0 \frac{1}{1 - e^{-x}}, \quad (1.16)$$

ибо, в соответствии со свойствами геометрической прогрессии

$$\sum_{m=0}^{\infty} e^{-mx} = \frac{1}{1 - e^{-x}},$$

где $x = \frac{h\nu}{kT}$.

Полная энергия всех осцилляторов на всех энергетических уровнях будет

Энергетические уровни атома осциллятора	Энергия уровня	Число осцилляторов на уровне	Энергия осцилляторов на уровне
 m	$mh\nu$	$N_0 \exp\left(-\frac{mh\nu}{kT}\right)$	$mh\nu N_0 \exp\left(-\frac{mh\nu}{kT}\right)$
 2	$2h\nu$	$N_0 \exp\left(-\frac{2h\nu}{kT}\right)$	$2h\nu N_0 \exp\left(-\frac{2h\nu}{kT}\right)$
 1	$h\nu$	$N_0 \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right)$	$h\nu N_0 \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right)$
 0	0	N_0	0
		$N_\Sigma = N_0 \left[1 + e^{\left(-\frac{h\nu}{kT}\right)} + \dots + e^{\left(-\frac{mh\nu}{kT}\right)} + \dots \right]$	$w = h\nu N_0 \left[1 + e^{\left(-\frac{h\nu}{kT}\right)} + \dots + m e^{\left(-\frac{mh\nu}{kT}\right)} + \dots \right]$

Рис.1.3. Планковская квантовая модель вещества, находящегося в равновесии с излучением. Эквидистантные энергетические уровни атомов-осцилляторов, энергии уровней (кратны $h\nu$), число осцилляторов на каждом из уровней (распределение Больцмана), энергия осцилляторов каждого уровня

$$W_e = N_0 \left(0 + h\nu e^{-\frac{h\nu}{kT}} + 2h\nu e^{-\frac{2h\nu}{kT}} + \dots + mh\nu e^{-\frac{mh\nu}{kT}} \right),$$

$$W_e = N_0 h\nu \sum_{m=0}^{\infty} m e^{-\frac{mh\nu}{kT}} = \frac{d}{dx} \sum_{m=0}^{\infty} e^{-mx} = N_0 h\nu \left(-\frac{d}{dx} \frac{1}{1-e^{-x}} \right), \quad (1.17)$$

где по-прежнему $x = \frac{h\nu}{kT}$.

Средняя энергия осциллятора $\bar{W}$ таким образом будет равна полной энергии всех осцилляторов (1.17), поделенной на полное (суммарное) число всех осцилляторов (1.16):

$$\bar{W} = \frac{W_\Sigma}{N_\Sigma} = \left[N_0 h\nu \left(-\frac{d}{dx} \frac{1}{1-e^{-x}} \right) \right] / \left(N_0 \frac{1}{1-e^{-x}} \right) = h\nu \frac{d}{dx} \ln(1-e^{-x}) = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}.$$

Итак, средняя энергия $\bar{W}$ атомного осциллятора Планка равна

$$\bar{W} = \frac{h\nu}{e^{kT} - 1}. \quad (1.18)$$

Так как атомные осцилляторы находятся в равновесии с излучением, то есть с фотонами, то средняя энергия $\bar{W}$ атома-осциллятора (1.18) равна средней энергии $\bar{W}_\phi$ фотонов, находящихся в любом возможном состоянии (моде):

$$\bar{W} = \bar{W}_\phi = \frac{h\nu}{e^{kT} - 1}. \quad (1.19)$$

Среднюю энергию фотонов $\bar{W}_\phi$ в моде можно записать в следующем виде:

$$\bar{W}_\phi = h\nu\bar{n},$$

где величина

$$\bar{n} = \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \quad (1.20)$$

представляет собой *среднее число фотонов в моде*. Из (1.20) следует:

$$\bar{n} < 1, \text{ если } \frac{h\nu}{kT} > 1,$$

$$\bar{n} > 1, \text{ если } \frac{h\nu}{kT} < 1.$$

Фотоны представляют собой бозоны, и в одном состоянии (моде) их может быть сколько угодно. В данном случае в каждой моде их среднее число равно $\bar{n}$.

Теперь наша задача - вычислить величину

$$\mu_{\nu, \nu} [1/\text{м}^3 \text{Гц}] = \frac{dM[\text{м}^{-3}]}{d\nu}$$

- *спектрально-объемную плотность мод*, то есть ячеек, в каждой из которых находится $\bar{n} = \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$ равновесных фотонов, причем их средняя энергия, согласно (1.19), есть $\bar{W}_\phi = \frac{h\nu}{e^{kT} - 1}$. Тогда, умножив эту среднюю энер-

гию фотонов в каждой моде на спектрально-объемную плотность этих мод $\mu_{\nu, \nu}$, мы получим то, к чему стремимся, а именно *спектрально-объемную плотность излучения* $\rho_{\nu, \nu} [\text{Дж}/\text{м}^3 \text{Гц}]$:

$$\rho_{\nu, \nu} = \mu_{\nu, \nu} \bar{W}_\phi.$$

Наряду с термином "мода" или "состояние фотона" употребляется также термин "осциллятор поля", который в данном случае не используется, чтобы не путать его с планковским осциллятором-атомом.

1.2.2. Объемно-спектральная плотность возможных состояний элементарных частиц. Объемно-спектральная плотность мод

Пусть имеется некоторый объем $V[\text{м}^3]$ - "зеркальный ящик", в котором есть N_s частиц и M_s возможных состояний для них. Если частицы - электроны, то в каждом таком состоянии может находиться не более одной частицы:

$$\frac{N_s}{M_s} = 1.$$

Если частицы - фотоны, то в каждом из состояний может быть любое их число. На каждое состояние приходится "объем неопределенности" ΔV_{xyz} , в котором в среднем локализована каждая частица. Этот объем равен произведению неопределенностей координат частицы Δx , Δy , Δz .

$$\Delta V_{xyz} = \Delta x \Delta y \Delta z. \quad (1.21)$$

Из (1.21) следует, что объемная плотность (концентрация) состояний, приходящаяся на объем неопределенности ΔV_{xyz} из координатного интервала $[x, y, z; x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z]$, есть

$$M_v[\text{м}^{-3}] = 2(\Delta V_{xyz})^{-1} = 2(\Delta x \Delta y \Delta z)^{-1}. \quad (1.22)$$

Множитель 2 означает удвоение числа состояний из-за особенностей элементарных частиц (две возможные взаимно ортогональные поляризации фотона).

Каждая из величин Δx , Δy , Δz связана с соответствующей компонентой импульса частицы соотношением неопределенностей координата-импульс:

$$\Delta x \Delta p_x \geq h, \Delta y \Delta p_y \geq h, \Delta z \Delta p_z \geq h. \quad (1.23)$$

Мы предполагаем, что плотность "упаковки" состояний максимальна, то есть определяется соотношением неопределенности координата-импульс (1.23).

Наша ближайшая задача состоит в том, чтобы выразить объемную плотность состояний dM_v через измеряемые характеристики частиц: импульс, энергию. Воспользовавшись (1.23), перепишем (1.22) в следующем виде:

$$\Delta M_v = \frac{\Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z}{h^3}. \quad (1.24)$$

Перейдем теперь к сферическим координатам в "импульсном" пространстве. Для этого заменим координаты x, y, z на p_x, p_y, p_z , а $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ на $p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}$. Теперь элемент объема в пространстве импульсов будет:

$$dp_x dp_y dp_z = p^2 \sin\theta dp d\varphi d\theta.$$

Учитывая изотропность импульса в пространстве, проинтегрируем по φ от 0 до 2π и по θ от 0 до π и получим из (1.24) плотность состояний, приходящуюся на интервал $[p, p + dp]$ значений импульса p

$$dM_V[p, p + dp] = 2 \frac{4\pi p^2 dp}{h^3} = \frac{8\pi p^2 dp}{h^3}, \quad (1.25)$$

$dM_V[p, p + dp]$ - это объемная плотность состояний, которая зависит лишь от абсолютной величины p импульса (но не зависит от его направления, определяемого углами φ и θ) и которая приходится на интервал значений импульса $[p, p + dp]$, то есть в пределах от p до $p + dp$.

В данном конкретном случае, когда мы имеем дело с фотонами, нас интересует объемно-спектральная плотность фотонных состояний. Импульс фотона, согласно формуле де-Бройля, есть

$$p = \hbar k = \frac{h}{\lambda} = \frac{h\nu}{c}.$$

Теперь формула (1.25) приобретает вид:

$$dM_V = \frac{8\pi \nu^2 d\nu}{c^3} = \mu_{V,\nu} d\nu.$$

Отсюда получаем объемно-спектральную плотность состояний (мод)

$$\mu_{V,\nu} = \frac{dM_V}{d\nu} = \frac{8\pi \nu^2}{c^3}. \quad (1.26)$$

Умножив теперь спектрально-объемную плотность мод (1.26) на среднюю энергию фотонов в моде (1.19), получим формулу Планка в виде (1.1) распределения по частотам спектрально-объемной плотности энергии $\rho_{V,\nu}$:

$$\rho_{V,\nu} = \frac{8\pi \nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{kT} - 1}.$$

Формула Планка - фундаментальный закон природы. Следствия из нее - это ряд законов, управляющих излучением и его взаимодействием с веществом в микро-, макро- и мегамире. Некоторые из таких законов-следствий имеют самостоятельные названия, как, например, закон смещения Вина, закон Стефана-Больцмана. Исторически они были установлены экспериментально еще до открытия Планка. В частности, закон Стефана-

Больцмана был обнаружен экспериментально Стефаном в 1879 г. и теоретически обоснован Больцманом в 1884 г. Закон смещения Вина был найден экспериментально Вином в 1893 г.

1.3. Форма планковской кривой, положение максимума. Закон смещения Вина

1.3.1. Распределение Планка по длинам волн

Чтобы легче было проследить за поведением $\rho_{\nu, \Lambda}$ (1.3) как функции длины волны $\lambda[\text{м}]$ и температуры $T[\text{К}]$, введем безразмерные (нормированные) величины Λ и α соответственно для λ и T

$$\Lambda = \frac{\lambda k T}{hc},$$

$$\alpha = \frac{T}{T_c}.$$

Здесь T_c - произвольно выбранная температура, например $T_c = 5770 \text{ К}$ - температура поверхности Солнца. Используя эти величины, получим распределение по длинам волн (1.3) в следующем виде:

$$\frac{\rho_{\nu, \Lambda}}{\rho_0} = \frac{1}{\Lambda^5} \frac{1}{\exp\left\{\frac{1}{\alpha \Lambda}\right\} - 1},$$

где $\rho_0 = 8\pi \left(\frac{kT_c}{hc}\right)^4 kT_c = 5,17 \cdot 10^4 \text{ Дж/м}^3 \text{м}.$

Распределение по Λ для различных значений нормированной температуры α представлено на рис. 1.4.

Чтобы облегчить анализ формы распределения и получить закон смещения Вина, введем другую безразмерную величину

$$\xi = \frac{hc}{\lambda k T}. \quad (1.27)$$

Распределение по длинам волн (1.3) примет следующий вид:

$$r(\xi) = \frac{\rho_{\nu, \xi}}{\rho_0} = \frac{\xi^5}{e^\xi - 1}. \quad (1.28)$$

Проследим за поведением (1.28). Продифференцируем по λ (1.28) и получим

$$\frac{dr}{d\lambda} = \frac{dr}{d\xi} \frac{d\xi}{d\lambda} = \frac{\xi^4 [(\xi - 5)e^\xi + 5]}{(e^\xi - 1)^2} \frac{hc}{\lambda^2 k T}.$$

Подставляя значение λ из (1.27), получим производную $\frac{dr}{d\lambda}$ как функцию ξ :

$$\frac{dr}{d\lambda} = \frac{\xi^6 |(\xi - 5)e^\xi + 5| kT}{(e^\xi - 1)^2 hc}.$$

Значение $\frac{d\rho_{V,\lambda}}{d\lambda}$ при $\lambda=0$ найдем, переходя к пределу $\xi \rightarrow \infty$ и следя при этом лишь за поведением знакопеременного выражения $(5 - \xi)e^\xi - 5$, так как все остальные величины – положительные:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{d\rho_{V,\lambda}}{d\lambda} = \lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{\xi^6 |(\xi - 5)e^\xi + 5| kT}{(e^\xi - 1)^2 hc} = +0. \quad (1.29)$$

Таким образом, в окрестности $\lambda=0$ первая производная, оставаясь положительной, приближается к 0 тем быстрее, чем меньше температура T . Распределение Планка по длинам волн "стелется" вдоль оси абсцисс, круто поднимаясь с ростом λ , причем тем круче, чем больше температура T (рис. 1.4).

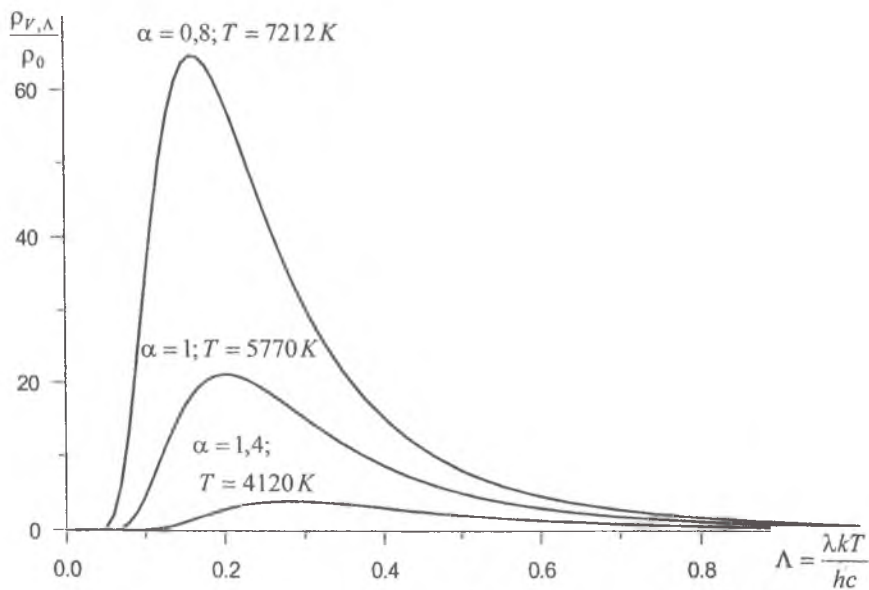


Рис. 1.4. Нормированное распределение $\frac{\rho_{V,\lambda}}{\rho_0}$ по длинам волн $\Lambda = \frac{\lambda kT}{hc}$ при различных значениях температуры $T = \alpha T_c$, где $T_c = 5770 \text{ K}$ - температура поверхности Солнца

При $\lambda \rightarrow \infty$, как это видно из (1.29), первая производная $\frac{d\rho_{\nu,\lambda}}{d\lambda}$ также стремится к нулю. Однако, в отличие от предыдущего случая ($\lambda \rightarrow 0$), теперь первая производная по λ отрицательна и ее предел равен -0 . Значение $\frac{d\rho_{\nu,\lambda}}{d\lambda}$ при $\lambda \rightarrow \infty$ соответствует пределу:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{d\rho_{\nu,\lambda}}{d\lambda} = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\xi^6 [(\xi - 5)e^\xi + 5] kT}{(e^\xi - 1)^2 hc} = -0.$$

Из рис. 1.4 видно, что максимум величины $\rho_{\nu,\lambda}$ тем больше, чем выше температура. При этом положение максимума с ростом температуры смещается в коротковолновую сторону (закон смещения Вина).

Значению длины волны $\lambda = \lambda_m$, соответствующее максимуму распределения Планка по длинам волн, можно определить, приравняв нулю производную $\frac{d\rho_{\nu,\lambda}}{d\lambda}$. При этом получается трансцендентное уравнение $(\xi - 5)e^\xi + 5 = 0$, которое легко решить графически, если переписать его в следующем виде:

$$5 - \xi = 5e^{-\xi}.$$

Его решение есть

$$\xi_m = \frac{hc}{\lambda_m kT} = 4,965.$$

Отсюда получаем соотношение

$$\lambda_m T = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К} = b_\lambda. \quad (1.30)$$

Величина $b_\lambda = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$ называется *постоянной Вина*.

1.3.2. Распределение по частотам

Распределение Планка по частотам (1.1) можно изучить аналогичным способом, введя нормированную частоту $x = \frac{h\nu}{kT_c}$ и температуру

$\alpha = \frac{T}{T_c}$. Так же как и в п. 1.3.1, здесь T_c - произвольно выбранная постоянная температура, например температура поверхности Солнца, введенная для удобства анализа свойств планковской кривой. В результате получим (1.1) в следующем виде:

$$\frac{\rho_{\nu,x}}{\rho_0} = \frac{x^3}{e^{x/\alpha} - 1},$$

где $\rho_0 = 8\pi h \left(\frac{kT_c}{hc} \right)^3$. Зависимость $\frac{\rho_{v,x}}{\rho_0}$ от нормированной частоты x для различных значений температур показана на рис. 1.5, из которого видно, что с увеличением температуры максимум кривой растет и смещается в сторону более высоких частот (закон смещения Вина).

Для упрощения анализа производных по v распределения (1.1) и получения постоянной Вина используем ту же методику, что и п.1.3.1: введем безразмерную переменную

$$z = \frac{h\nu}{kT}. \quad (1.31)$$

Распределение по v (1.1) принимает вид:

$$s(z) = \frac{\rho_{v,v}}{\rho_0} = \frac{z^3}{e^z - 1}$$

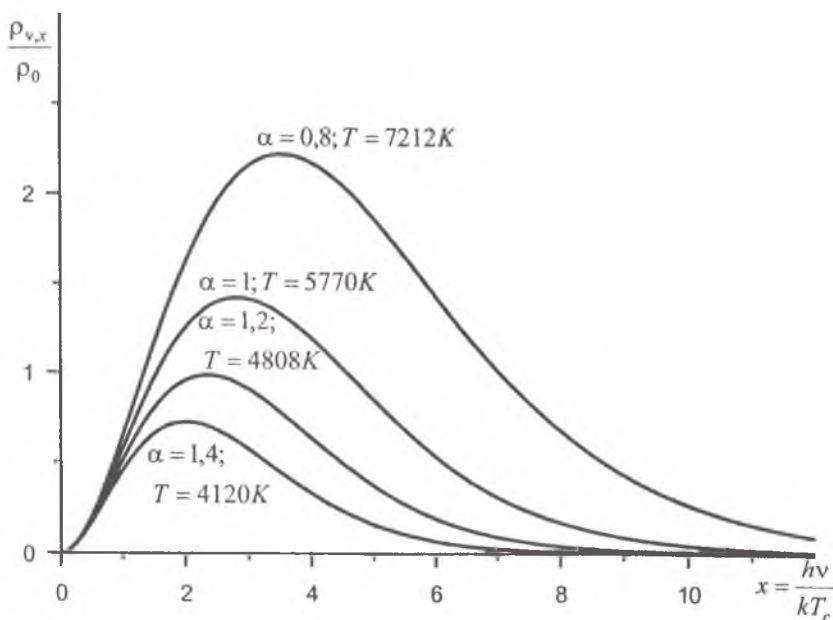


Рис. 1.5. Нормированное распределение Планка по частоте для различных значений температуры $T = \frac{T_c}{\alpha}$, где $T_c = 5770 \text{ K}$ - температура поверхности

$$\text{Солнца, } \rho_0 = 8\pi h \left(\frac{kT_c}{hc} \right)^3 = 1,07 \cdot 10^{-15} [\text{Дж}/\text{м}^3\text{Гц}]$$

Первую производную $s(z)$ по v получим по правилам дифференцирования:

$$\frac{ds}{dv} = \frac{ds}{dz} \frac{dz}{dv} = \frac{z^2[(3-z)e^z - 3]}{(e^z - 1)^2}.$$

При переходе к пределам при $z \rightarrow 0$ и $z \rightarrow \infty$ нам достаточно следить лишь за поведением знакопеременной функции $(3-z)e^z - 3$. В результате имеем:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2[(3-z)e^z - 3]}{(e^z - 1)^2} = +0,$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^2[(3-z)e^z - 3]}{(e^z - 1)^2} = -0.$$

Таким образом, при $v \rightarrow 0$ и при $v \rightarrow \infty$ распределение Планка по частотам "прижимается" к оси частот тем медленнее, чем ниже температура.

Значение частоты $v = v_m$, соответствующее максимуму распределения Планка по частотам, определяется из формулы (1.31) при $\frac{ds}{dv} = 0$. При этом получается трансцендентное уравнение:

$$3 - z = 3e^{-z}.$$

Его решение

$$z_m = \frac{h\nu_m}{kT} = 2,82.$$

Отсюда получаем постоянную Вина для распределения по частотам:

$$\frac{\nu_m}{T} = 5,28 \cdot 10^{-10} \text{ сек}^{-1} \text{ К}^{-1} = b_\nu. \quad (1.31)$$

Длина волны λ_m , которая соответствует найденному значению ν_m , есть

$$\lambda_m^\nu = \frac{c}{\nu_m} = 5,11 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К} / T(\text{К}).$$

Таким образом, закон Вина (1.32) для распределения по частотам, записанный в форме (1.30), полученной для распределения по длинам волн, приводит к следующему выражению:

$$\lambda_m^\nu T = 5,68 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К} = b_\lambda^\nu. \quad (1.33)$$

Получается постоянная Вина $b_\lambda^\nu = 5,68 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$, которая отличается от "канонической" постоянной Вина (1.30) $b_\lambda = 2,49 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$. Например, при $T = 5770 \text{ К}$ получаем $\lambda_m^\nu = 885 \text{ нм}$, а не $\lambda_m = 502 \text{ нм}$, следующее из закона Вина (1.30) для распределения по длинам волн!

На первый взгляд, возник парадокс: формула (1.33) для длины волны λ_m^ν , которая соответствует максимуму распределения по частотам (1.31),

не совпадает с формулой (1.30), полученной из распределения Планка (1.3) по длинам волн!

На самом деле противоречия нет. Просто нельзя формально переходить к длинам волн в законе смещения Вина (1.33), полученного из распределения Планка по частотам. Дело в том, что величиной, непосредственно измеряемой спектральным прибором является, энергия (ее объемная плотность dw_ν [Дж/м³] или плотность мощности dI [Вт/м²] = cdw_ν), приходящаяся на некоторый спектральный интервал частот или длин волн, который определяется свойствами прибора. Такую измеряемую величину, объемную плотность энергии, например dw_ν [Дж/м³], можно представить с помощью любого из распределений (1.1) или (1.3):

$$dw_\nu = \rho_{\nu,\nu} d\nu = \rho_{\nu,\lambda} d\lambda. \quad (1.34)$$

Таким образом,

$$dw_\nu = \rho_{\nu,\nu} d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1} d\nu, \quad (1.35)$$

$$dw_\nu = \rho_{\nu,\lambda} d\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1} d\lambda. \quad (1.36)$$

Слева как в (1.35), так и в (1.36) стоит одна и та же величина - объемная плотность энергии. Правые же части в (1.34) и (1.35) содержат как разные спектральные интервалы ($d\nu = -\frac{c}{\lambda^2} d\lambda$), так и разные спектральные плотности:

$$\rho_{\nu,\nu} [\text{Дж}/\text{м}^3 \text{Гц}] = \frac{dw_\nu}{d\nu},$$

$$\rho_{\nu,\lambda} [\text{Дж}/\text{м}^3 \text{м}] = \frac{dw_\lambda}{d\lambda}.$$

Поэтому, говоря о спектральной плотности, нужно всегда помнить, какую она имеет размерность, то есть в каких единицах (частотах или длинах волн) измеряется спектральный интервал, поделив на который измеренную на опыте объемную плотность энергии мы получим эту спектральную плотность.

И тем не менее нас окружает “зеленый мир”: листья почти всех растений на Земле имеют зеленый цвет, соответствующий длине волны $\lambda \sim 0,5 \text{ мкм}$. Но именно эта длина волны соответствует примерно максимуму распределения Планка по длинам волн для температуры $T = 5570 \text{ К}$ поверхности Солнца. Примерно под эту же длину волны “подстроился” и человеческий глаз: максимум кривой видности соответствует зеленому цвету (длина волны $\lambda = 0,56 \text{ мкм}$). По какой-то таинственной причине “зеленый мир” выбрал для себя распределение Планка именно по длинам волн, а не по частотам!

1.4. Закон Стефана-Больцмана. Стационарный нагрев вещества излучением

1.4.1. Вывод закона Стефана-Больцмана из формулы Планка

Закон Стефана-Больцмана устанавливает связь между полной излучательной способностью S [Вт/м²] поверхности нагретого тела и его температурой T [K]:

$$S = \varepsilon \sigma_{CB} T^4. \quad (1.37)$$

Здесь $\sigma_{CB} = 5,67 \cdot 10^{-8}$ [Вт/м²К⁴] – постоянная Стефана-Больцмана, $\varepsilon < 1$ – излучательная способность поверхности, характеризующая отличие ее от абсолютно черного тела, для которого $\varepsilon = 1$. Величина ε для некоторых материалов и типов поверхностей представлена в таблице 1.1.

Закон Стефана-Больцмана был установлен экспериментально Стефаном в 1879 г. и теоретически обоснован Больцманом в 1884 г. Однако этот закон содержится в формуле Планка, являясь одним из следствий ее. В виде (1.37) его можно получить, проинтегрировав по частотам (длинам волн) соответствующую спектральную излучательную способность (1.6) или (1.8).

Введя обозначение $x = \frac{h\nu}{kT}$ и воспользовавшись формулой Планка в виде (1.6), получим

$$S = \int_0^{\infty} S_{\nu} d\nu = \frac{2\pi k^4 T^4}{c^2 h^3} \int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{2\pi^5 k^4}{15 \cdot c^2 h^3} \cdot T^4 = \sigma_{CB} T^4. \quad (1.38)$$

Здесь использовано численное значение табличного интеграла:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15} = 6,494.$$

Таблица 1.1.

Излучательные способности некоторых материалов

Материал	Излучательная способность
Алюминий (отливка)	0,3
Алюминий (полированный)	0,05
Железо (полированное)	0,29
Медь (полированная)	0,04
Медь черная	0,78
Сталь травленая	0,07

Постоянная Стефана-Больцмана, полученная из формулы Планка интегрированием по частоте (1.38)

$$\sigma_{CB} = \frac{2\pi \cdot k^4}{15c^2 h^3} = 5,64 \cdot 10^{-8} \text{ Вт/м}^2\text{К}^4,$$

отличается лишь в третьем знаке от экспериментальной величины в (1.37).

Следует заметить, что закон Стефана-Больцмана в виде (1.37) справедлив далеко не всегда. Для некоторых материалов этот закон лишь приблизительно соответствует формуле

$$S = \sigma_{CB} T^4,$$

причем значение σ_{CB} может на несколько порядков отличаться от значения $\sigma_{CB} = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ [Вт/м}^2\text{К}^4]$ в классической формуле (1.27), а $n \neq 4$. Например, для платины при $T = 10^3 \text{ К}$ имеет место соотношение

$$S_{Pl} = 3,56 \cdot 10^{-11} \cdot T^{4,77},$$

а для вольфрама

$$S_W = 5,9 \cdot 10^{-13} \cdot T^{5,35}.$$

Поэтому при нагреве (излучением) конкретного вещества необходимо учитывать особенности закона Стефана-Больцмана для этого вещества. На практике закон Стефана-Больцмана применяют обычно для исследования нагрева тел излучением черного тела или лазерным излучением или же, наоборот, для излучения процесса остывания нагретого тела. При этом следует учитывать энергию, которая приходит к телу из окружающего пространства. Например, при оценке излучения, испускаемого нагретым до температуры $T \text{ [К]}$ телом в окружающую среду с температурой $T_0 < T$, полная испускательная способность $S_\Sigma \text{ [Вт/м}^2]$ тела будет

$$S_\Sigma = \sigma_{CB} (T^4 - T_0^4).$$

Пусть, в частности, $T = 310 \text{ К}$, $T_0 = 270 \text{ К}$ (купальщик-"морж" с температурой тела $t = 36,6^\circ \text{С}$ на берегу водоема при температуре воздуха $t = -3^\circ \text{С}$). В этом случае: $S_\Sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} (3,1^4 - 2,7^4) \cdot 10^8 = 222,3 \text{ Вт/м}^2$.

В воде потери тепла возрастают многократно из-за теплопроводности. Если считать теплопроводность кожи $\Lambda = 0,15 \text{ Вт/К}\cdot\text{м}$, толщину ее $\Delta x = 0,5 \text{ мм}$, температуру воды $t_b \approx 0^\circ \text{С}$ ($\Delta T = 36 \text{ К}$), то плотность потока теряемого пловцом тепла $q \text{ [Вт/м}^2]$ будет $q = \Lambda \Delta T / \Delta x \approx 10^3 \text{ Вт/м}^2$.

1.4.2. Температура мишени при нагреве тепловым источником (Солнце)

Рассмотрим в качестве примера нагрев мишени излучением Солнца, поверхность которого является довольно хорошим приближением к абсолютно черному телу с температурой $T_C = 5770$ К.

Оценим для начала интенсивность $I_{C3}[\text{Вт}/\text{м}^2]$ излучения Солнца (С) на поверхности Земли (З). Полный поток $P_C[\text{Вт}]$, испускаемый всей поверхностью Солнца, составляет

$$P_C = 4\pi R_C^2 \sigma_{\text{сб}} T_C^4 = \pi D_C^2 \sigma_{\text{сб}} T_C^4,$$

где $R_C = 0,696 \cdot 10^9$ м - радиус Солнца, $D_C = 2R_C$ - его диаметр. Интенсивность $I_{C3}[\text{Вт}/\text{м}^2]$ солнечного света на поверхности Земли равна потоку P_C , поделенному на площадь сферы $4\pi R_{C3}^2$, где $R_{C3} = 1,49 \cdot 10^{11}$ м - расстояние от Солнца до Земли:

$$I_{C3} = \frac{P_C}{4\pi R_{C3}^2} = \frac{1}{4} \left(\frac{D_C}{R_{C3}} \right)^2 \sigma_{\text{сб}} T_C^4.$$

Эту формулу можно представить еще и так:

$$I_{C3} = \frac{1}{4} \theta^2 \sigma_{\text{сб}} T_C^4, \quad (1.39)$$

где $\theta[\text{рад}] = \frac{D_C}{R_{C3}}$ - видимый угловой диаметр теплового источника (в данном случае - Солнца) и одновременно, согласно законам геометрической оптики, - расходимость излучения от этого источника на расстоянии R_{C3} от него.

Действительно (рис. 1.6), из геометрической оптики известна формула линзы с фокусным расстоянием F :

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}.$$

Из этой формулы следует, что если источник диаметром D_C располо-

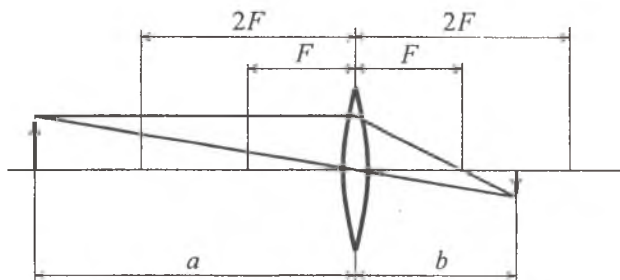


Рис. 1.6. Построение изображения в линзе

жен за двойным фокусным расстоянием $b = R_{C3}$ линзы с фокусным расстоянием F [м] (в данном случае $b = R_{C3} \gg 2F$), то его изображение будет расположено между фокусным и двойным фокусным расстоянием линзы, то есть на расстоянии $F < a < 2F$. В данном случае $a \cong F$, то есть фактически *изображение расположено в фокальной плоскости*. Из подобия треугольников, показанных на рис 1.6 и получающихся при построении изображения, диаметр которого $\varnothing_F$ [м], следует соотношение

$$\varnothing_F = D_C \frac{a}{b} \cong D_C \frac{F}{R_{C3}} \equiv \frac{D_C}{R_{C3}} F.$$

Но диаметр фокального пятна $\varnothing_F$, получающегося при фокусировке линзой с фокусом F любого светового пучка с расходимостью θ [рад], есть

$$\varnothing_F = \theta F.$$

Следовательно, расходимость θ представляет собой отношение

$$\theta = \frac{D_C}{R_{C3}}, \quad (1.40)$$

что и доказывает справедливость выражения (1.39) для интенсивности I_{C3} как функции расходимости θ . В частности, для солнечного света из (1.40) и (1.39) можно оценить расходимость θ и I_{C3} (так называемую солнечную постоянную).

$$\theta = \frac{D_C}{R_{C3}} = \frac{2 \cdot 0,696 \cdot 10^9 \text{ м}}{1,49 \cdot 10^{11} \text{ м}} = 0,93 \cdot 10^{-2} \text{ рад}.$$

$$I_{C3} = 0,25 \cdot 0,93^2 \cdot 10^{-4} \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} [\text{Вт/м}^2 \text{ К}^4] \cdot (5770 [\text{К}])^4 = 1,36 \text{ кВт/м}^2.$$

Оценим теперь температуру T_M [К] мишени с площадью S_M [м²], коэффициентом отражения R , излучательной способностью ϵ , нагреваемой солнечным светом с расходимостью θ , который фокусируется на мишень линзой диаметром D_n [м], площадью

$$S_n [\text{м}^2] = \frac{\pi}{4} D_n^2 \quad (1.41)$$

и фокусом F [м]. На линзу падает свет интенсивностью I_{C3} [Вт/м²], поэтому она собирает световой поток P_n [Вт], который равен произведению падающей интенсивности на площадь линзы:

$$P_n = I_{C3} S_n. \quad (1.42)$$

Этот поток собирается в фокальное пятно площадью

$$S_F = \frac{\pi}{4} \varnothing_F^2 = \frac{\pi}{4} (\theta F)^2, \quad (1.43)$$

создавая в фокальной плоскости интенсивность I_F [Вт/м²]:

$$I_F = \frac{P_{\text{л}}}{S_F}.$$

Интенсивность $I_F^{\text{полг}}$ [Вт/м²] сфокусированного света, поглощаемого мишенью в фокальной плоскости, будет

$$I_F^{\text{полг}} = \frac{(1-R)P_{\text{л}}}{S_F}.$$

Возможны два варианта нагрева (рис. 1.7): а) фокальное пятно больше или равно мишени, то есть полностью перекрывает ее (“малая” мишень); б) фокальное пятно меньше мишени (“большая” мишень). Рассмотрим последовательно каждый из этих вариантов и определим максимально достижимую температуру мишени.

а) Мишень - “малая”: ее площадь $S_{\text{мм}}$ [м²] меньше (или равна) площади S_F [м²] фокального пятна:

$$S_{\text{мм}} \leq S_F = \frac{\pi}{4} \varnothing_F^2. \quad (1.44)$$

В этом случае поглощаемая мишенью мощность $P_{\text{мм}}^{\text{полг}}$ [Вт] есть произведение интенсивности на площадь “малой” мишени $S_{\text{мм}}$:

$$P_{\text{мм}}^{\text{полг}} = (1-R)P_{\text{л}} \frac{S_{\text{мм}}}{S_F}. \quad (1.45)$$

В соответствии с законом Стефана-Больцмана, эта поглощаемая мощность равна мощности $P_{\text{мм}}^{\text{изл}}$ [Вт] излучения мишени с температурой $T_{\text{мм}}$:

$$P_{\text{мм}}^{\text{изл}} = 2S_{\text{мм}}\varepsilon\sigma_{\text{СБ}}T_{\text{мм}}^4.$$

Множитель 2 тут учитывает тот факт, что излучение происходит через всю поверхность мишени. В случае плоской мишени излучают две поверхности: передняя и задняя.

Приравнявая (1.44) к (1.45), получаем соотношение

$$(1-R)P_{\text{л}} \frac{S_{\text{мм}}}{S_F} = 2S_{\text{мм}}\varepsilon\sigma_{\text{СБ}}T_{\text{мм}}^4.$$

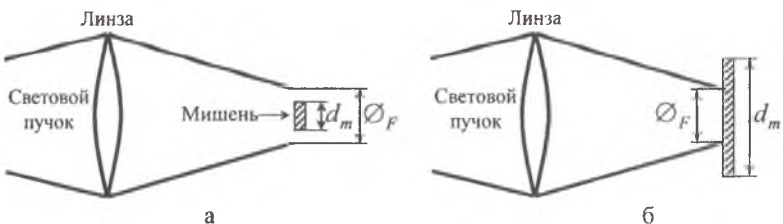


Рис.1.7. Нагрев мишени сфокусированным световым пучком

После сокращения на $S_{\text{мм}}$ имеем следующее равенство для определения $T_{\text{мм}}$:

$$(1-R) \frac{P_n}{S_F} = 2\varepsilon \sigma_{\text{сб}} T_{\text{мм}}^4. \quad (1.46)$$

Воспользовавшись формулами (1.39), (1.41), (1.42), запишем следующие выражения для P_n и S_F :

$$P_n = I_{\text{сз}} S_n = I_{\text{сз}} \frac{\pi}{4} D_n^2 = \frac{1}{4} \theta^2 \sigma_{\text{сб}} T_c^4 \frac{\pi}{4} D_n^2, \quad (1.47)$$

ибо, согласно (1.39),

$$I_{\text{сз}} = \frac{1}{4} \theta^2 \sigma_{\text{сб}} T_c^4.$$

Кроме того, согласно (1.43),

$$S_F = \frac{\pi}{4} \varnothing_F^2 = \frac{\pi}{4} (\theta F)^2.$$

Подставим в левую часть (1.46) соответствующее выражение (1.47) для P_n , а также формулу (1.43) для S_F и получим

$$\frac{\frac{1}{4} \theta^2 \sigma_{\text{сб}} T_c^4 \frac{\pi}{4} D_n^2}{\frac{\pi}{4} (\theta F)^2} = 2\varepsilon \sigma_{\text{сб}} T_{\text{мм}}^4.$$

После соответствующих сокращений имеем следующее выражение для $T_{\text{мм}}$ ($S_n \leq S_F$):

$$T_{\text{мм}} = \left\{ \frac{1}{4} \frac{1-R}{2\varepsilon} \frac{D_n^2}{F^2} \right\}^{\frac{1}{4}} T_c.$$

Полагая $\frac{1-R}{\varepsilon} \cong \frac{1}{2}$, получаем следующее выражение для оценок

$$T_{\text{мм}} = \frac{1}{2} \left(\frac{D_n}{F} \right)^{\frac{1}{2}} T_c. \quad (1.48)$$

Пусть, например, $\frac{D_n}{F} = \frac{1}{4}$. Тогда

$$T_{\text{мм}} \cong 0,25 \cdot T_c \cong 1400 \text{ К}.$$

б) Мишень - "большая": ее площадь $S_{\text{бм}} [\text{м}^2]$ больше площади $S_F [\text{м}^2]$ фокального пятна:

$$S_{\text{бм}} > S_F.$$

Фокальное пятно занимает лишь часть мишени, которая полностью перехватывает световой поток, собранный линзой. При этом предполагается, что теплопроводность материала мишени достаточно велика (металл,

например), так что *температура всегда одинакова на всей поверхности*. В этом случае вместо (1.46) получаем следующее соотношение для определения температуры $T_{\text{бм}}^4$ “большой” мишени

$$(1 - R)P_{\text{л}} = 2S_{\text{бм}}\varepsilon\sigma_{\text{сб}}T_{\text{бм}}^4. \quad (1.49)$$

Проведем тождественные преобразования левой части, чтобы свести все расчеты к рассмотренному выше варианту. Поделим обе части (1.49) на S_F и получим

$$\frac{(1 - R)P_{\text{л}}}{S_F} = 2 \frac{S_{\text{бм}}}{S_F} \varepsilon\sigma_{\text{сб}}T_{\text{бм}}^4.$$

Правая часть здесь отличается от правой части множителем $\frac{S_{\text{бм}}}{S_F} > 1$. После соответствующих преобразований, аналогичных предыдущим в случае а), получим вместо (1.48) следующее выражение для максимальной температуры $T_{\text{бм}}$ “большой” мишени:

$$T_{\text{бм}} = \left(\frac{S_F}{S_{\text{бм}}} \right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{2} \left(\frac{D_{\text{л}}}{F} \right)^{\frac{1}{2}} T_{\text{с}}. \quad (1.50)$$

Оно отличается от (1.48) множителем $\left(\frac{S_F}{S_{\text{бм}}} \right)^{\frac{1}{4}} < 1$, то есть температура “большой” теплопроводящей мишени получается ниже, чем в предыдущем случае “малой” мишени.

Как видно из формул (1.48), (1.50), предельно достижимая температура мишени всегда ниже температуры теплового источника, что лишний раз подтверждает справедливость второго начала термодинамики.

1.4.3. Температура мишени при нагреве излучением лазера. Равновесная (максимальная) температура. Процесс установления равновесной (максимальной) температуры

Равновесная (максимальная) температура

При стационарном равновесном нагреве тела лазерным светом вступает в действие закон Стефана-Больцмана (1.37). В результате устанавливается некая предельная (максимальная) температура, при которой поглощаемый поток становится равным переизлучаемому.

Пусть в откаченной прозрачной колбе на тугоплавких тонких проводочках с пренебрежимо малой теплопроводностью подвешена стальная пластина (мишень) площадью $S_{\text{м}}[\text{м}^2]$ с коэффициентом отражения R и излучательной способностью ε . Эту мишень облучает лазерный пучок

мощностью P_L [Вт]. Спрашивается, до какой предельной температуры $T_{\max}$ [K] нагреется пластинка? И еще вопрос: если пластинка - стальная, то какова должна быть минимальная мощность пучка (например, от CO_2 -лазера с длиной волны $\lambda = 10$ мкм), чтобы можно было расплавить пластинку?

Проанализируем происходящие процессы. Поглощаемая пластинкой мощность, то есть нагревающая мощность P_n , есть $(1-R)P_L$, а мощность, переизлучаемая P_{CB} [Вт] по закону Стефана-Больцмана равна P_{CB} [Вт] = $S_{\text{мо}} \varepsilon \sigma_{\text{CB}} T^4 = 2S_m \varepsilon \sigma_{\text{CB}} T^4$. Здесь коэффициент 2 появился потому, что переизлучение происходит через всю поверхность $S_{\text{мо}}$ плоской мишени, а так как поверхностей две (передняя и задняя), то $S_{\text{мо}} = 2S_m$. Если бы вместо пластинки использовать шар радиусом r , то $S_{\text{мо}} = 4\pi r^2$.

Равновесие, очевидно, наступит при такой температуре $T_{\max}$, при которой P_n станет равной P_{CB} , то есть когда будет выполняться равенство

$$P_L(1-R) = S_{\text{мо}} \varepsilon \sigma_{\text{CB}} T_{\max}^4.$$

Отсюда получим выражение для максимальной температуры $T_{\max}$ [K] нагрева:

$$T_{\max} = \left(\frac{P_L(1-R)}{S_{\text{мо}} \varepsilon \sigma_{\text{CB}}} \right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{P_L(1-R)}{2S_m \varepsilon \sigma_{\text{CB}}} \right)^{\frac{1}{4}}. \quad (1.51)$$

Здесь следует обратить внимание на тот факт, что температура $T_{\max}$ определяется мощностью лазера. В этом - принципиальное отличие лазерного нагрева от нагрева тепловым источником (см. п.1.5).

Мощность $P_L^{\text{пл}}$, необходимая для того, чтобы расплавить пластинку, - это та мощность, которой соответствует температура плавления $T_{\text{пл}}$:

$$P_L^{\text{пл}} = \frac{S_{\text{мо}} \varepsilon \sigma_{\text{CB}}}{(1-R)} T_{\max}^4 = \frac{2S_m \varepsilon \sigma_{\text{CB}}}{(1-R)} T_{\text{пл}}^4.$$

Если эта пластинка с площадью $S_m = 1 \text{ см}^2$ стальная (для травленной стали $\varepsilon = 0,07$, $R = 0,93$, $T_{\max} = T_{\text{пл}} \approx 1500 \text{ K}$), то необходимая для расплавления мощность CO_2 -лазера

$$P_L^{\text{пл}} = 57,5 \text{ Вт}.$$

Отметим, что проведенные оценки справедливы для *равновесной* системы, то есть для ситуации, когда нагреваемая мишень находится в равновесии с излучением. Все изменения температуры происходят при этом достаточно медленно (строго говоря, бесконечно медленно). Впрочем, такого равновесия может и не быть, например в ситуации, когда в некоторый (на-

чальный) момент времени начинается нагрев мишени лазером. Тогда на определенном отрезке времени мишень поглощает больше, чем излучает, и можно пренебречь переизлучаемой мощностью. Однако по мере нагрева все большая мощность будет переизлучаться по закону Стефана-Больцмана. В результате рост температуры замедлится, ведь нагревающая мощность конечна. Короче говоря, установление температуры во времени есть некий процесс, который происходит тем медленнее, чем ближе подходит температура к своему предельному значению, то есть чем ближе состояние равновесия системы мишень - излучение.

Процесс установления равновесной (максимальной) температуры

До сих пор мы считали равновесной систему излучение - мишень и пренебрегали временем установления температуры. Это допустимо, если считать теплоемкость металлической мишени пренебрежимо малой величиной. Однако в ряде практически важных случаев необходимо учитывать “тепловую инерцию”, то есть конечную теплоемкость мишени, которая представляет собой произведение ее массы $M[\text{кг}]$ на удельную теплоемкость $C[\text{Дж/кг} \cdot \text{К}]$.

При нагреве мишени конечных размеров необходимо в общем случае учитывать и процесс теплопроводности, благодаря которому температура “растекается” по мишени за конечное время. Будем для простоты считать это время пренебрежимо малым, то есть предполагать, что скорость распространения тепла по мишени много больше скорости роста ее температуры, так что в любой момент времени температуру во всех точках можно считать одинаковой.

Рассмотрим процесс нагрева мишени с конечной теплоемкостью и достаточно высокой (в вышеуказанном смысле) теплопроводностью.

Пусть начиная с некоторого момента времени $t = 0$, к мишени $M[\text{кг}]$ с теплоемкостью $M[\text{кг}] C[\text{Дж/кг} \cdot \text{К}]$ через поверхность с площадью $S_m[\text{м}^2]$ и коэффициентом отражения R начинает подводиться нагревающая мощность $P_n[\text{Вт}]$.

В результате нагрева температура $T[\text{К}]$ мишени начинает увеличиваться. Одновременно нарастает мощность $P_{CB}[\text{Вт}]$, переизлучаемая по закону Стефана-Больцмана через всю поверхность $S_{mo}[\text{м}^2]$ мишени ($S_{mo} > S_m$) с излучательной способностью ϵ (рис. 1.8):

$$P_{CB}[\text{Вт}] = S_{mo} \epsilon \sigma_{CB} T^4.$$

Пока температура T мала, она растет линейно со временем, ибо выполняется неравенство

$$P_n \gg P_{CB}.$$

По мере увеличения $T[K]$ все большая часть подводимой мощности переизлучается ($P_{CB} \sim T^4$), что, очевидно, уменьшает скорость роста $T[K]$. В конце концов достигается такая (максимальная) температура T_{max} , при которой устанавливается равновесие:

$$P_n = P_{CB},$$

или

$$P_n = S_{mo} \epsilon \sigma_{CB} T_{max}^4. \quad (1.52)$$

Отсюда имеем выражение для T_{max} , аналогичное (1.51):

$$T_{max} = \left(\frac{P_n}{S_{mo} \epsilon \sigma_{CB}} \right)^{\frac{1}{4}}.$$

Таким образом, повышение температуры при нагреве от начального значения T_0 до конечного T_{max} происходит в результате некоего переходного процесса. Его длительность тем больше, чем больше теплоемкость $MC[Дж/К]$ мишени и чем меньше подводимая к ней мощность нагрева $P_n[Вт]$.

Следует отметить, что в случае лазерного воздействия нагревающая мощность P_n в общем случае состоит из двух компонент: лазерной P_{nL} и тепловой P_{nc} :

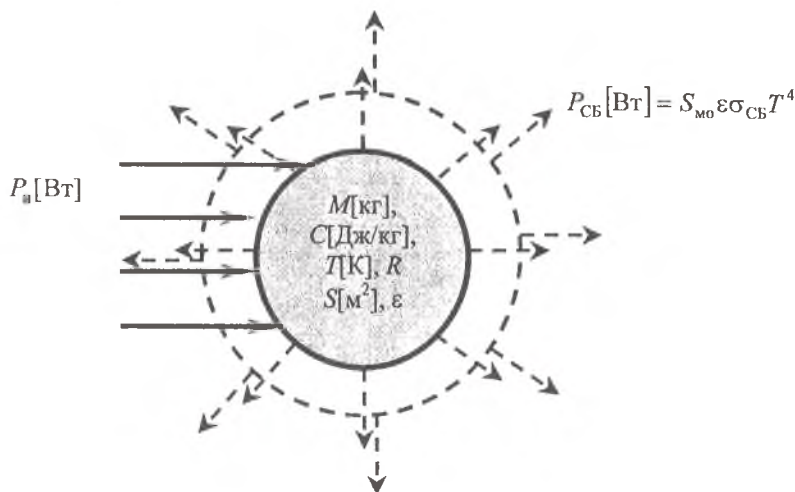


Рис. 1.8. Нагрев мишени массой $M[кг]$ теплоемкостью $C[Дж/кг \cdot К]$ с коэффициентом отражения поверхности R внешним излучением мощностью $P_n[Вт]$. Мишень с общей площадью поверхности $S_{mo}[м^2]$ и излучательной способностью ϵ излучает мощность $P_{CB}[Вт]$ по закону Стефана-Больцмана $P_{CB}[Вт] = S_{mo} \epsilon \sigma_{CB} T^4$

$$P_n = P_{nL} + P_{oc}.$$

Здесь $P_{nL} = P_L (1 - R)$, где P_L - мощность лазера, а R - коэффициент отражения.

Тепловая мощность P_{oc} поступает из окружающей среды (ОС), температура которой T_{oc} . В земных условиях обычно мишень находится в тепловом равновесии с окружающей средой, поэтому для P_{oc} имеет место формула

$$P_{oc} = \epsilon_{oc} S_{mo} \sigma_{CB} T_{oc}^4.$$

В условиях теплового равновесия начальная температура мишени T_o практически равна T_{oc} , то есть имеет место соотношение

$$T_{oc} \cong T_o < T_{max}.$$

Если лазерная мощность преобладает, то есть $P_{oc} \ll P_{nL}$, то величиной P_{nT} можно при расчетах пренебречь. Однако если $P_{oc} \gg P_{nL}$, или лазер вообще отсутствует ($P_{oc} = 0$), или $T_o < T_{oc}$, то в описанном ниже процессе будет фигурировать P_{oc} в качестве мощности нагрева P_n . Таков, в частности, нагрев в печи. Обратная ситуация имеет место в космосе. Там $T_{oc} \approx 0$, и нагрев мишени может быть только от внешнего источника (солнечная радиация, лазерное излучение).

Рассмотрим процесс установления температуры во времени. Энергия dQ_n , поглощенная мишенью за время dt , есть

$$dQ_n = P_n dt.$$

Энергия dQ_{CB} , переизлученная всей поверхностью мишени за то же время

$$dQ_{CB} = P_n dt = S_{mo} \epsilon \sigma_{CB} T^4 dt.$$

Разность между dQ_n и dQ_{CB} представляет собой оставшуюся в мишени энергию, которая равна произведению теплоемкости MC на приращение температуры dT :

$$MCdT = P_n dt - S_{mo} \epsilon \sigma_{CB} T^4 dt.$$

Отсюда получаем дифференциальное уравнение для температуры

$$MC \frac{dT}{dt} = P_n - S_{mo} \epsilon \sigma_{CB} T^4 \quad (1.53)$$

с начальным условием $T(0) = T_o$.

Введем безразмерную температуру ξ :

$$\xi = \frac{T}{T_{max}}, \quad (1.54)$$

где T_{max} определяется из условия $\frac{dT}{dt} = 0$ в (1.53), то есть из формулы (1.52).

Уравнение (1.53) принимает вид:

$$MCT_{\max} \frac{d\xi}{d\tau} = P_n - S_{\text{мо}} \varepsilon \sigma_{\text{СБ}} T_{\max} \xi^4. \quad (1.55)$$

Поделив обе части (1.54) на P_n и воспользовавшись равенством (1.52), получим дифференциальное уравнение для температуры в безразмерных (нормированных) переменных

$$\frac{d\xi}{d\tau} = 1 - \xi^4 \quad (1.56)$$

с начальным условием

$$\xi(0) = \frac{T_0}{T_{\max}} = \xi_0. \quad (1.57)$$

Здесь $\tau = \frac{t}{\tau_m}$ - безразмерное время, а нормировочная постоянная времени τ_m [сек] есть

$$\tau_m = \frac{MCT_{\max}}{P_n} = \frac{MC}{S_{\text{мо}} \varepsilon \sigma_{\text{СБ}} T_{\max}^3}. \quad (1.58)$$

Физический смысл τ_m можно пояснить так: это время, в течение которого нагревающая мощность P_n вкладывает в мишень энергию, равную $MCT_{\max}$.

Из вида уравнения (1.56) уже можно судить о характере зависимости температуры от времени. Видно, например, что вдали от равновесия, когда $\xi < 1$, можно пренебречь ξ^4 по сравнению с единицей. Тогда решение уравнения (1.56) имеет вид:

$$\xi(t) = \frac{t}{\tau_m} + \xi_0.$$

С учетом обозначений (1.54), (1.57), (1.58) получаем достаточно очевидную зависимость температуры T от времени нагрева t и мощности P_n :

$$T(t) = \frac{P_n}{MC} t + T_0.$$

Решение уравнения (1.56) ищем методом разделения переменных:

$$d\tau = \frac{d\xi}{1 - \xi^4} = d\xi \left[\frac{1}{2} \frac{1}{1 + \xi^2} + \frac{1}{4} \frac{1}{1 + \xi} + \frac{1}{4} \frac{1}{1 - \xi} \right] = \frac{1}{2} d(\arctg \xi) + \frac{1}{4} d \left(\ln \frac{1 + \xi}{1 - \xi} \right). \quad (1.59)$$

После интегрирования (1.59) получаем решение $t = \tau_m f(\xi) + C$. Постоянную интегрирования находим из начального условия (1.57). При $t = 0$ имеем $\xi = \xi_0$, отсюда $C = \tau_m f(\xi_0)$, и окончательное решение выглядит так:

$$t = \tau_m [f(\xi) - f(\xi_0)], \quad (1.60)$$

где $f(\xi)$ и $f(\xi_0)$ имеют вид

$$f(\xi) = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \xi + \frac{1}{4} \ln \frac{1+\xi}{1-\xi}, \quad (1.61)$$

$$f(\xi_0) = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \xi_0 + \frac{1}{4} \ln \frac{1+\xi_0}{1-\xi_0},$$

а постоянная времени τ_m определяется формулой (1.58).

$$\tau_m = \frac{MCT_{\max}}{P_n} = \frac{MC}{S_{\text{мо}} \varepsilon \sigma_{\text{сб}} T_{\max}^3}.$$

Формула (1.60) связывает время нагрева t , начиная от $t=0$, с ростом нормированной температуры от начального ее значения ξ_0 до $\xi = \frac{T}{T_{\max}}$.

Типичная зависимость $\frac{t}{\tau_m} = f(\xi)$ представлена в таблице 1.2 и на рис. 1.9. Из таблицы видно, что $f(\xi)$ становится нелинейной функцией при $\xi > 0,6$. Если же $\xi < 0,4$, то $f(\xi) \approx \xi$, то есть время нагрева линейно зависит от температуры.

$$t_n = \tau_m [f(\xi_k) - f(\xi_0)] \approx \tau_m (\xi_k - \xi_0) = \frac{MC}{P_n} (T_k - T_0).$$

Для практических расчетов и оценок формулу (1.60) иногда целесообразно привести к виду, в котором мощность P_n нагрева (и с ней и максимальная температура $T_{\max}$) нормирована на некоторую известную величину. Такой величиной может быть, например, мощность $P_{\text{ос}}$, поступающая в мишень из окружающей среды с температурой $T_{\text{ос}}$:

$$P_{\text{ос}}[\text{Вт}] = \varepsilon S_{\text{мо}} \sigma_{\text{сб}} T_{\text{ос}}^4. \quad (1.62)$$

В этом случае нагревающая мощность P_n и максимальная температура $T_{\max}$ фигурируют в виде безразмерного параметра κ , который с учетом формул (1.52), (1.62) имеет вид

Таблица 1.2.

Связь между нормированным временем нагрева $\tau = f(\xi)$ и нормированной температурой ξ мишени в случае учета переизлучения по закону Стефана-Больцмана по формуле (1.59) при нулевой начальной температуре ($\xi_0 = 0$).

ξ	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
$f(\xi)$	0,2	0,3	0,402	0,506	0,616	0,74
ξ	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99	0,999
$f(\xi)$	0,89	1,1	1,29	1,53	1,71	2,29

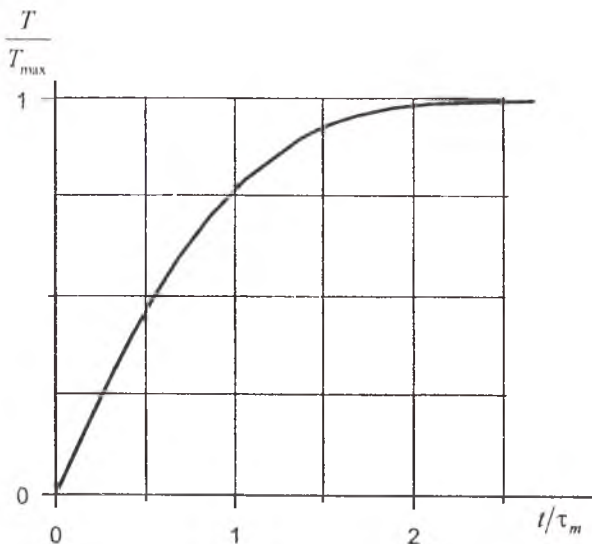


Рис. 1.9. Вид функции $\frac{t}{\tau_m} = f(\xi)$: зависимость температуры $\xi = y = \frac{T}{T_{\max}}$ (нормированной на ее максимальное значение) от времени, нормированного на постоянную τ_m . Начальная температура - нулевая

$$\kappa = \frac{T_{\max}}{T_{\text{OC}}} = \left(\frac{P_{\text{н}}}{P_{\text{OC}}} \right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{P_{\text{ил.}}}{P_{\text{OC}}} + 1 \right)^{\frac{1}{4}}, \quad (1.63)$$

то есть мощность лазера $P_L = P_{\text{oc}}(\kappa^4 - 1)/(1 - R)$.

Введем теперь нормированную на T_{OC} температуру.

$$y = \frac{T}{T_{\text{OC}}},$$

которая в силу своего определения может изменяться в следующем интервале значений

$$1 \leq y \leq \kappa.$$

Прежняя переменная $\xi = \frac{T}{T_{\max}}$, введенная в (1.54), теперь выглядит так:

$$\xi = \frac{T}{T_{\max}} = \left(\frac{T}{T_{\text{OC}}} \right) / \left(\frac{T_{\max}}{T_{\text{OC}}} \right) = \frac{y}{\kappa}.$$

В результате формула (1.60) приобретает следующий вид:

$$\frac{t}{\tau_{\text{OC}}} = \frac{1}{\kappa^3} \left[f\left(\frac{y}{\kappa} \right) - f\left(\frac{y_0}{\kappa} \right) \right], \quad (1.64)$$

где постоянная τ_{OC} есть

$$\tau_{OC} = \frac{MC}{S_{mo} \epsilon \sigma_{CB} T_{OC}^3},$$

ибо

$$\tau_m = \frac{\tau_{OC}}{\kappa^3},$$

как это следует из тождественных преобразований (1.58) с учетом (1.63)

$$\tau_m = \frac{MC}{S_{mo} \epsilon \sigma_{CB} T_{max}^3} = \frac{MC}{S_{mo} \epsilon \sigma_{CB} T_{OC}^3} = \frac{\tau_{OC}}{\kappa^3}.$$

Если нужно получить семейство зависимостей температуры от времени при различных значениях нагревающей мощности P_n [Вт], то можно воспользоваться формулой (1.64), беря различные значения параметра κ . Набор таких кривых для различных κ представлен на рис. 1.10.

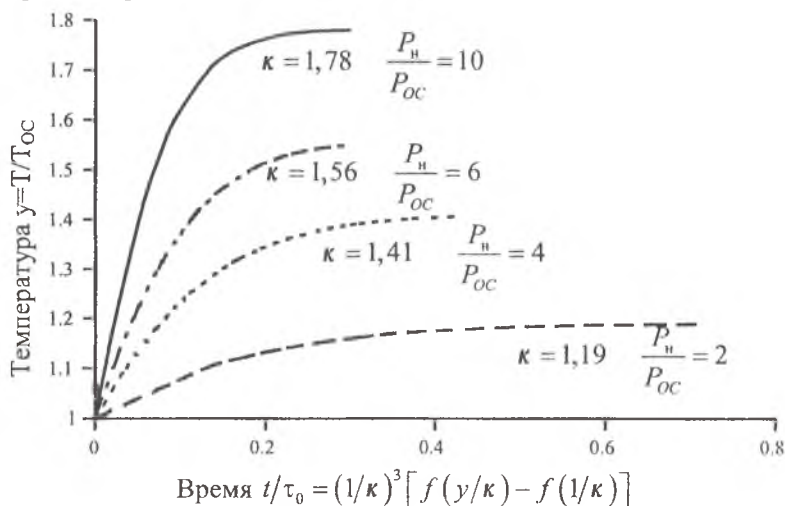


Рис. 1.10. Зависимость температуры от времени при различной нагревающей мощности

В качестве примера применения полученных формул рассмотрим следующую задачу.

Задача

Стальной шар радиусом $r = 1$ см (мишень) помещен в лазерный пучок диаметром $D_L = 2$ см. Найти

1) мощность лазера P_L [Вт] (минимальную), необходимую для нагрева мишени от начальной температуры $T_0 = 300$ К до конечной максимальной (равновесной) температуры $T_k = T_{\max} = 500$ К (230°C);

2) время, необходимое для достижения: $T_k = 0,94T_{\max}$, $T_k = 0,99T_{\max}$ (225°C);

3) значение P_L [Вт], обеспечивающее нагрев мишени до заданной температуры ($T_k = 500$ К) в течение заданного времени нагрева $t_n = 160$ с.

Характеристики мишени:

Коэффициент отражения $R = 0,6$, излучательная способность $\varepsilon = 0,4$, плотность $d = 7,8 \cdot 10^3$ кг/м³, теплоемкость $C = 0,46 \cdot 10^3$ Дж/кг·К, полная излучающая поверхность мишени $S_{\text{мо}} = 4\pi r^2$.

Решение для п.1).

Воспользуемся соотношением (1.52), связывающим нагревающую мощность $P_n = (1-R)P_L + P_{OC}$ с мощностью, переизлучаемой по закону Стефана-Больцмана:

$$P_n = (1-R)P_L + P_{OC} = S_{\text{мо}} \varepsilon \sigma_{\text{СБ}} T_{\max}^4.$$

Для мощности лазера получаем формулу

$$P_L = \frac{\varepsilon}{(1-R)} S_{\text{мо}} \varepsilon \sigma_{\text{СБ}} (T_{\max}^4 - T_{OC}^4) = \frac{1}{(1-R)} P_{OC} \left[\left(\frac{T_{\max}}{T_{OC}} \right)^4 - 1 \right] = \frac{1}{(1-R)} P_{OC} (\kappa^4 - 1).$$

Подставляя сюда $T_{\max} = 500$ К, а также другие величины, получаем минимальную мощность лазера $P_L = 2,95$ Вт.

Решение для п.2).

Применим формулы (1.60) и (1.58):

$$t = \tau_m [f(\xi) - f(\xi_0)], \quad \tau_m = \frac{MC}{S_{\text{мо}} \varepsilon \sigma_{\text{СБ}} T_{\max}^3},$$

связывающие длительность нагрева t_n и нормированную температуру

$\xi = \frac{T}{T_{\max}}$, $\xi_0 = \frac{T_0}{T_{\max}}$ через постоянную времени τ_m . Для τ_m получаем величину

$\tau_m = 4,24 \cdot 10^3$ с. Кроме того, имеем (таблица 1.2): $f(0,94) = 1,25$, $f(0,99) = 1,71$, $f(\xi_0) = f(0,6) = 0,616$. В итоге получим

$$t_n(0,94T_{\max}) = (4,24 \cdot 10^3 \text{ с}) [f(0,94) - f(0,6)] = (4,24 \cdot 10^3 \text{ с}) (1,25 - 0,616) = 2,69 \cdot 10^3 \text{ с}.$$

$$t_n(0,99T_{\max}) = (4,24 \cdot 10^3 \text{ с}) [f(0,99) - f(0,6)] = (4,24 \cdot 10^3 \text{ с}) (1,71 - 0,616) = 4,66 \cdot 10^3 \text{ с}.$$

Решение для п 3).

Для решения этой части задачи воспользуемся формулой (1.64)

$$\frac{t_n}{\tau_o} = \frac{1}{\kappa^3} \left[f\left(\frac{y}{\kappa}\right) - f\left(\frac{1}{\kappa}\right) \right].$$

Вычислим τ_{oc} по формуле: $\tau_{oc} = \frac{MC}{S_{mo} \varepsilon \sigma_{cb} T_{oc}^3}$. Получим

$\tau_{oc} = 1,96 \cdot 10^4$ с. Найдем $P_{oc} = \varepsilon S_{mo} \sigma_{cb} T_{oc}^4 = 0,23$ Вт. Подставим теперь конечное значение температуры (она отмечена индексом “к”, который не следует путать с “нагревным” параметром κ) в $y_k = \frac{T_k}{T_{oc}} = \frac{500}{300} = 1,67$,

$t_n = 600$ с и найдем значение $\kappa = \left((1-R) \frac{P_L}{P_{oc}} + 1 \right)^{\frac{1}{4}}$, соответствующее величине $\frac{t_n}{\tau_{oc}}$ - левой части (1.64). Получаем $\kappa = 2,25$. Зная κ , находим искомую мощность лазера:

$$P_L = \frac{1}{1-R} (\kappa^4 - 1) P_{oc} = 14 \text{ Вт.}$$

Заметим, что в данном случае учет переизлучения заметно увеличивает время нагрева по сравнению с обычным “линейным” нагревом, то есть без учета переизлучения. Действительно, отношение $\frac{t_n}{t_n^{лин}}$ времени нагрева t_n с учетом переизлучения ко времени линейного нагрева $t_n^{лин}$ без учета переизлучения есть

$$\frac{t_n}{t_n^{лин}} = \frac{f\left(\frac{y_k}{\kappa}\right) - f\left(\frac{1}{\kappa}\right)}{\frac{y_k}{\kappa} - \frac{1}{\kappa}}.$$

Подставив сюда $\kappa = 2,25$, $y_k = \frac{T_k}{T_{oc}} = \frac{500}{300} = 1,67$, получим $\frac{y_k}{\kappa} = 0,742$,

$f\left(\frac{y_k}{\kappa}\right) = 0,796$, $\frac{1}{\kappa} = 0,444 \approx f\left(\frac{1}{\kappa}\right)$. Имеем $f\left(\frac{y_k}{\kappa}\right) - f\left(\frac{1}{\kappa}\right) = 0,35$ и

$\frac{y_k}{\kappa} - \frac{1}{\kappa} = \frac{0,67}{2,25} = 0,298$. Таким образом, получаем $\frac{t_n}{t_n^{лин}} = \frac{0,35}{0,298} = 1,175$, то

есть переизлучение дает в данном случае увеличение времени нагрева на 18%.

1.5. Принципиальное отличие лазерного нагрева от нагрева тепловым источником. “Температура” лазерного излучения

Согласно (1.50), предельная (равновесная) температура нагрева мишени определяется в конечном счете *мощностью* лазера P_L . В этом состоит принципиальное отличие лазерного нагрева от нагрева тепловым источником (см. п.1.4.2), когда температура мишени определяется температурой источника и всегда меньше ее. Дело в том, что само понятие “температура” для лазерного источника не имеет физического смысла, ибо лазерное излучение - это излучение среды с “отрицательной температурой”, которая, в свою очередь, больше бесконечной. Попробуем оценить “температуру” лазера.

Высокая пространственная когерентность лазерного света позволяет фокусировать его на площадку с поперечными размерами порядка длины волны, то есть концентрировать свет в малом объеме и тем самым получать очень большие объемные плотности излучения. Высокая временная когерентность означает, что лазерный свет монохроматичен, то есть его световой пучок сосредоточен в очень узком спектральном интервале. Таким образом, объемно-спектральная плотность излучения лазера может быть чрезвычайно высокой и на много порядков превосходить ту величину, которую дает распределение Планка для черного тела при самой высокой реально достижимой температуре.

Можно оценить ту эквивалентную температуру T_e [K], которую должно было бы иметь черное тело, чтобы спектрально-объемная плотность его излучения была бы такой же, как у лазера с высокой степенью пространственной и временной когерентности. Пусть имеется такой лазер со следующими характеристиками: ширина спектральной линии $\Delta\nu_\lambda$ [Гц], длина волны λ [м], энергия W_L [Дж] в импульсе длительностью τ [с], диаметр пучка D [м], расходимость θ [рад]. Если такой пучок фокусировать линзой с фокусным расстоянием F , то в фокальной плоскости получится пятно диаметром $d_F = \theta F$ и площадью $S_F = \frac{\pi}{4}(\theta F)^2$. Интенсивность I_F [Вт/м²] лазерного света в фокальном пятне такова:

$$I_F = \frac{4W}{\tau\pi(\theta F)^2} \cong \frac{W}{\tau_L(\theta F)^2}.$$

Объемная же плотность излучения w_V [Дж/м²] при этом равна

$$w_V[\text{Дж/м}^2] = \frac{I_F}{c} \cong \frac{W_L}{c\tau_L(\theta F)^2}.$$

Объемно-спектральная плотность $\rho_{V,\nu}^L$ [Дж/м³Гц] для лазерного излучения будет

$$\rho_{V,\nu}^L = \frac{w_V}{\Delta\nu_n} = \frac{W_L}{c\Delta\nu_n\tau_L(\theta F)^2}. \quad (1.65)$$

Учтем теперь упомянутую выше высокую когерентность лазерного света. Высокая степень пространственной когерентности равносильна тому, что расходимость пучка θ - дифракционная, то есть

$$\theta \cong \frac{2\lambda}{D}.$$

Подставив значение $\theta \cong \frac{2\lambda}{D}$ в (1.65), получим

$$\rho_{V,\nu}^L = \frac{w_V}{\Delta\nu_n} = \frac{W_L}{4\lambda^2 c \Delta\nu_n \tau_L (F/D)^2}. \quad (1.66)$$

Полная временная когерентность означает, что излучение, как говорят, спектрально ограничено, то есть произведение ширины спектра $\Delta\nu_n$ на длительность лазерного импульса τ_L составляет величину порядка единицы:

$$\Delta\nu_n \tau_L \cong 1.$$

Тогда $\rho_{V,\nu}^L$ в (1.66) принимает вид:

$$\rho_{V,\nu}^L = \frac{W_L}{4\lambda^2 c (F/D)^2}. \quad (1.67)$$

Пусть используемая нами линза - безабберационная и достаточно светосильная, то есть отношение F/D невелико, например

$$\left(\frac{F}{D}\right)^2 \cong 10.$$

Формула (1.67) теперь выглядит так:

$$\rho_{V,\nu}^L = \frac{W_L}{40\lambda^2 c}. \quad (1.68)$$

Сравним теперь полученное значение $\rho_{V,\nu}^L$ для лазера с соответствующей величиной $\rho_{V,\nu}$ для теплового излучения. Задавшись некоторой

“эквивалентной” температурой T_3 черного тела, возьмем распределение Планка по частотам:

$$\rho_{\nu, \nu} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT_3}\right) - 1}. \quad (1.69)$$

Приравняем теперь $\rho_{\nu, \nu}^L$ (1.68) для лазера и $\rho_{\nu, \nu}$ (1.69) для черного тела. После несложных преобразований получим следующее соотношение:

$$\exp\left(\frac{h\nu}{kT_3}\right) = 1 + 320\pi \frac{h\nu}{W_L}. \quad (1.70)$$

Логарифмируя обе части (1.70), учитывая, что $W_L \gg h\nu$, и разлагая в ряд Тэйлора логарифм правой части, имеем:

$$\frac{h\nu}{kT_3} = \ln\left(1 + 320\pi \frac{h\nu}{W_L}\right) \cong 320\pi \frac{h\nu}{W_L}.$$

Для “эквивалентной” температуры T_3 черного тела получаем:

$$T_3 = \frac{W_L}{320\pi k}.$$

Если, например, энергия лазерного излучения составляет 1 Дж, то эквивалентная температура T_3 черного тела равна фантастической величине:

$$T_3 = 2,3 \cdot 10^{20} \text{ K}.$$

Разумеется, при лазерном нагреве такие температуры не достигаются. Дело в том, что одномодовый лазерный свет при нагреве возбуждает множество атомов-осцилляторов, каждый из которых переизлучает на своей частоте и насыщает фотонами свою моду. В результате излучение “разбазаривается” по многим частотам и модам. Таким образом, поверхность нагреваемого тела, поглощая одночастотный лазерный свет, переизлучает на многих частотах (в соответствии с распределением Планка), что равносильно многократному уменьшению спектрально-объемной плотности излучения по сравнению с лазерной.

1.6. Формула Планка в представлении Эйнштейна

1.6.1. Вынужденные и спонтанные переходы. Вероятности переходов. Коэффициенты Эйнштейна

Формула Планка в записи Эйнштейна описывает процессы излучения и поглощения в двухуровневой активной среде, состоящей из атомов или молекул, на которую воздействует излучение. Под воздействием такого

излучения двухуровневая квантовая система (атом или молекула) переходит из одного энергетического состояния в другое, то есть имеют место *вынужденные* переходы с одного уровня на другой, в результате чего происходит *вынужденное излучение* фотонов или *вынужденное* их поглощение. Переход с верхнего уровня на нижний, который сопровождается испусканием фотона, возможен и в отсутствии фотонов, инициирующих вынужденное испускание. Это так называемое *спонтанное* излучение.

Формула Планка в ее “каноническом” виде

$$\rho_{\nu, \nu} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

и главное - сам факт ее справедливости позволяют обосновать сформулированные Эйнштейном законы излучения и поглощения света в двухуровневой квантовой системе, то есть установить законы взаимодействия излучения с отдельными атомами или молекулами.

Рассмотрим некоторую совокупность частиц (например, связанных электронов в атоме) при температуре T , на которую действует излучение со спектрально-объемной плотностью $\rho_{\nu, \nu}$ [Дж/м³сек] (рис. 1.11).

Считаем, что каждая частица имеет лишь два энергетических уровня: нижний уровень 1 с энергией W_1 и статистическим весом g_1 и верхний уровень 2 с энергией W_2 и статистическим весом g_2 . Концентрация частиц на нижнем уровне 1 составляет N_1 [1/м³], а на верхнем - N_2 [1/м³]. Распределение Больцмана с учетом кратности вырождения уровней g_1, g_2 (статистических весов) выглядит следующим образом:

$$\frac{N_2}{g_2} = \frac{N_1}{g_1} \cdot e^{\frac{h\nu}{kT}}, \quad (1.71)$$

где $\nu = \frac{(W_2 - W_1)}{h}$ - резонансная частота.

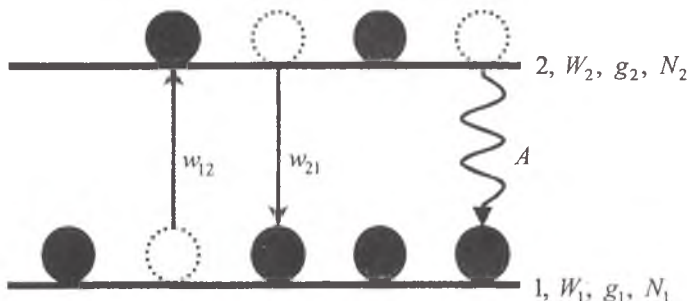


Рис. 1.11. Схема уровней в представлении формулы Планка по Эйнштейну

Согласно гипотезе Эйнштейна, под действием излучения происходят так называемые *вынужденные переходы*. Вероятность w [1/сек] каждого из них (в единицу времени) пропорциональна $\rho_{\nu,\nu}$ [Дж/м³сек] спектрально-объемной плоскости излучения:

$$\begin{aligned} w_{12}[1/\text{сек}] &= B_{12}\rho_{\nu,\nu}, \\ w_{21}[1/\text{сек}] &= B_{21}\rho_{\nu,\nu}. \end{aligned} \quad (1.72)$$

Здесь B_{21} и B_{12} - так называемые коэффициенты Эйнштейна, характеризующие вынужденное излучение, w_{21} [1/сек] представляет собой вероятность вынужденного перехода сверху вниз, w_{12} [1/сек] - вероятность вынужденного перехода снизу вверх. Как показано на рис. 1.12 и в таблице 1.3, вероятности w_{21} [1/сек] и w_{12} [1/сек] связаны соотношением

$$\frac{w_{12}}{g_2} = \frac{w_{21}}{g_1}. \quad (1.73)$$

Итак, в соответствии с *принципом детального равновесия*, вероятность $\downarrow w(1)$ перехода сверху вниз и вероятность перехода снизу вверх $\uparrow w(1)$ в расчете на одно состояние должны быть равны, то есть

$$\downarrow w(1) = \frac{w_{21}}{g_1} \text{ и } \uparrow w(1) = \frac{w_{12}}{g_2},$$

что и обосновывает формулу (1.73). Подставляя в (1.73) выражения (1.72) для w_{12} и w_{21} , получим следующее соотношение для B_{12} и B_{21} :

$$\frac{B_{12}}{g_2} = \frac{B_{21}}{g_1}.$$

Выразим теперь спектрально-объемную плотность излучения $\rho_{\nu,\nu}$ через вероятности переходов w_{21} , w_{12} и коэффициенты Эйнштейна A и B . Затем сравним получившееся выражение для $\rho_{\nu,\nu}$ с “канонической” формулой Планка для $\rho_{\nu,\nu}$ и увидим, что такое сравнение позволяет сразу же

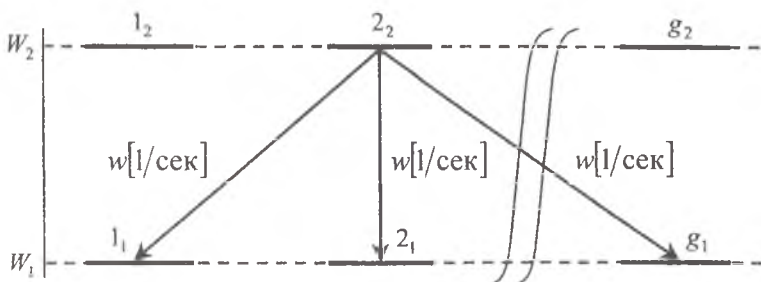


Рис 1.12. Возможные состояния связанного электрона на вырожденных энергетических уровнях атома и альтернативные вынужденные переходы между (вырожденными) уровнями

Таблица 1.3

Вероятности вынужденных переходов связанного электрона между двумя вырожденными энергетическими уровнями в атоме. Принцип детального равновесия

Переход	Альтернативные схемы перехода	Вероятность каждого перехода	Полная вероятность перехода	Принцип детального равновесия
$W_2 \rightarrow W_1$ (сверху вниз)	$2_2 \rightarrow 1_1$ или $2_2 \rightarrow 2_1$ или $\vdots$ $2_2 \rightarrow g_1$	$w[1/\text{сек}]$ $w[1/\text{сек}]$ $\vdots$ $w[1/\text{сек}]$	$w_{21} = g_1 w$	$\frac{w_{12}}{g_2} = \frac{w_{21}}{g_1} = w$
$W_1 \rightarrow W_2$ (снизу вверх)	$2_1 \rightarrow 1_2$ или $2_1 \rightarrow 2_2$ или $\vdots$ $2_1 \rightarrow g_2$	$w[1/\text{сек}]$ $w[1/\text{сек}]$ $\vdots$ $w[1/\text{сек}]$	$w_{12} = g_2 w$	$\frac{w_{12}}{g_2} = \frac{w_{21}}{g_1} = w$

получить важные соотношения между w_{21} и w_{12} , а также между A и B . Для этого воспользуемся условиями равновесия излучения с веществом.

При равновесии число переходов (в единицу времени) снизу вверх $N_1 w_{12}$ равно числу переходов сверху вниз: вынужденных ($N_2 w_{21}$) и спонтанных ($N_2 A$):

$$N_1 w_{12} = N_2 w_{21} + N_2 A. \quad (1.74)$$

Здесь $A[1/\text{с}]$ - коэффициент Эйнштейна, обозначающий вероятность (в единицу времени) спонтанного перехода сверху вниз:

$$A = \frac{1}{\tau_{\text{сп}}},$$

где $\tau_{\text{сп}}[\text{с}]$ так называемое спонтанное время жизни верхнего (возбужденного) уровня.

Перепишем уравнение (1.74) следующим образом:

$$w_{21} = \frac{A}{\frac{N_1}{N_2} \frac{w_{21}}{w_{12}} - 1}. \quad (1.75)$$

Воспользуемся теперь формулой (1.72), связывающей вероятность перехода w_{21} со спектрально-объемной плотностью излучения $\rho_{\nu, \nu}$, и получим формулу Планка, выраженную через коэффициенты Эйнштейна, населенности уровней и вероятности переходов

$$\rho_{\nu, \nu} = \frac{A/B_{21}}{\frac{N_1}{N_2} \frac{w_{12}}{w_{21}} - 1}. \quad (1.76)$$

Сравним эту формулу с ее “каноническим” видом:

$$\rho_{\nu, \nu} = \frac{8\pi \cdot \nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1}.$$

Из сравнения видно, что должны выполняться следующие соотношения.

Во-первых,

$$\frac{N_1}{N_2} \frac{w_{12}}{w_{21}} = \exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right), \quad (1.77)$$

то есть (1.76) теперь можно записать так:

$$\rho_{\nu, \nu} = \frac{A}{B_{21}} \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1}. \quad (1.78)$$

Кроме того, из распределения Больцмана (1.71) имеем следующее выражение для $\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right)$:

$$\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) = \frac{N_1}{N_2} \frac{g_2}{g_1}. \quad (1.79)$$

Сравнивая формулы (1.77) и (1.79), получаем “автоматически” соотношение между w_{12} и w_{21} - вероятностями переходов:

$$\frac{w_{12}}{g_2} = \frac{w_{21}}{g_1},$$

которое выше нам пришлось доказывать, исходя из принципа детального равновесия.

Во-вторых, из сравнения формул (1.78) и (1.1) получается, что

$$A = B_{21} \frac{8\pi \cdot \nu^2}{c^3} h\nu. \quad (1.80)$$

Это соотношение можно сформулировать следующим образом:

Вероятность спонтанного перехода равна вероятности вынужденного перехода (сверху вниз, если $g_1 g_2 \neq 1$), если вместо спектрально-объемной плотности излучения $\rho_{\nu, \nu}$ подставить спектрально-объемную плотность осцилляторов (мод) $\frac{8\pi \nu^2}{c^3}$, умноженную на энергию фотона $h\nu$.

Таким образом, зная коэффициент Эйнштейна B , можно, пользуясь (1.80), определить $A = \tau_{\text{сп}}^{-1}$ и, следовательно, узнать спонтанное время жизни $\tau_{\text{сп}}$ частицы на верхнем уровне. Примеры значений $\tau_{\text{сп}} = A^{-1}$ приведены в таблице 1.4.

Коэффициенты B вычисляются в квантовой механике. Практически обычно поступают наоборот: из экспериментальной величины $A = \tau_{\text{сп}}^{-1}$ оценивают B .

Так как $w_{21} = B_{21}\rho_{\nu,\nu}$, то, подставив сюда выражение для $\rho_{\nu,\nu}$ из (1.78), получим следующее выражения для вероятности w_{21} вынужденного перехода:

$$w_{21} = A \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1}.$$

Ранее в п. 1.2 в (1.20) было отмечено, что величина $\bar{n}$, равная

$$\bar{n} = \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1},$$

есть среднее число фотонов в моде.

Таким образом, вероятность вынужденного излучения $w_{21}[1/\text{с}]$ приобретает следующий вид:

$$w_{21} = A\bar{n}. \quad (1.81)$$

Для вероятности вынужденного перехода снизу вверх (то есть поглощения) с учетом соотношения (1.81) между вероятностями w_{21} и w_{12} имеем

$$w_{12} = \frac{g_2}{g_1} A\bar{n}.$$

Формула (1.81) представляет собой весьма важное и полезное для различных приложений соотношение, которое можно сформулировать так (статистика Бозе):

вероятность вынужденного испускания (перехода) в единицу времени равна среднему числу $\bar{n}$ фотонов в моде, умноженному на вероятность

Таблица 1.4

Коэффициенты Эйнштейна $A_{m,n}$ для линий атомарного водорода

Серия	Лаймана			Бальмера			
	L_α	L_β	L_γ	H_α	H_β	H_γ	H_δ
Символ линии							
Длина волны (нм)	121,0	102,6	97,3	656,3	486,1	434,0	410,0
Коэффициент $A_{m,n} \cdot 10^8 \text{с}^{-1}$	4,68	0,55	0,13	0,44	0,084	0,025	0,0097
Спонтанное время жизни $10^9 \tau_{\text{сп}} [\text{с}] =$	2,14	18	77	22,7	119	400	$1,03 \cdot 10^3$

$A[1/c]$ спонтанного излучения (перехода), то есть на вероятность испускания (в единицу времени), которая не зависит от наличия или отсутствия фотонов в моде.

Соотношение (1.81) представляет собой частный случай более общего выражения (статистика Бозе-Эйнштейна):

$$w_{n+1} = A(n+1) = An + A = w + A,$$

которое можно сформулировать так: если в моде уже содержатся n фотонов, то вероятность появления в ней $n+1$ -го фотона равна сумме вероятностей вынужденного ($w = An$) и спонтанного (A) излучений. Если же фотонов в моде нет ($n=0$), то вероятность появления (первого) фотона есть $A[1/c]$.

Итак, вероятность вынужденного испускания (1.72) можно представить в более общем виде (1.81) и словесно определить следующим образом:

вероятность вынужденного излучения равна числу фотонов в моде, умноженному на вероятность появления "первого" ("независимого") фотона, то есть фотона, никак не связанного с наличием или отсутствием фотонов в моде.

Подобное обобщение оправдано потому, что вероятность $A[1/c]$ появления "независимого" фотона зависит от механизма элементарного акта взаимодействия фотона с квантовой системой (атомом или молекулой) и вовсе необязательно связана со спонтанным (самопроизвольным) переходом с верхнего возбужденного уровня из-за конечного времени жизни возбужденного состояния (см. приложение 1.1).

1.6.2. Вынужденные переходы (поглощение и испускание) как процесс рассеяния фотонов на атомах и молекулах. Сечение вынужденного перехода. Поглощение и усиление света)

Рассеяние света. Сечение рассеяния. Коэффициент экстинкции

Пусть в некотором объеме содержатся рассеивающие центры с концентрацией $N[m^{-3}]$ (рис.1.13).

Если эти центры облучает поток элементарных частиц с плотностью потока $J[1/m^2c]$, то вероятность рассеяния $w[1/c]$ (т.е. вероятность в единицу времени) пропорциональна J :

$$w = \sigma J. \quad (1.82)$$

Коэффициент пропорциональности $\sigma[m^2]$ между вероятностью рассеяния $w[1/c]$ (в единицу времени) и плотностью облучающего потока $J[1/m^2c]$

называется *сечением* рассеяния. Сечение имеет размерность площади и выражается в см^2 или в м^2 .

Пусть $W[\text{Дж}]$ - энергия каждой частицы в пучке (например, $W = h\nu$), облучающем рассеивающие центры, концентрация которых есть $N[\text{м}^{-3}]$. Интенсивность пучка $I[\text{Вт}/\text{м}^2]$ (то есть плотность мощности) есть

$$I = WJ.$$

Умножим обе части (1.82) на величину WN .

Тогда выражение слева будет представлять собой величину, численно равную объемной плотности мощности $p_v[\text{Вт}/\text{м}^3]$, то есть скорости изменения во времени объемной плотности энергии $w_v[\text{Дж}/\text{м}^3]$. Действительно, произведение $w[1/\text{с}]N[1/\text{м}^3]$ есть объемная скорость переходов (актов рассеяния), которая, будучи умноженная на энергию рассеивающейся частицы $W[\text{Дж}]$, представляет собой объемную мощность $p_v[\text{Вт}/\text{м}^3]$ рассеяния

$$p_v = WwN. \quad (1.83)$$

Мощность $dP[\text{Вт}]$, рассеиваемая в выделенном на рис. 1.13 объеме $dV[\text{м}^3] = S[\text{м}^2]dx[\text{м}]$, есть

$$dP = p_v dV = WwNSdx. \quad (1.84)$$

В соответствии с законом сохранения энергии эта мощность $WwNSdx$ приводит к уменьшению потока частиц $P[\text{Вт}] = W[\text{Дж}]\Pi[1/\text{с}]$ на ту же са-

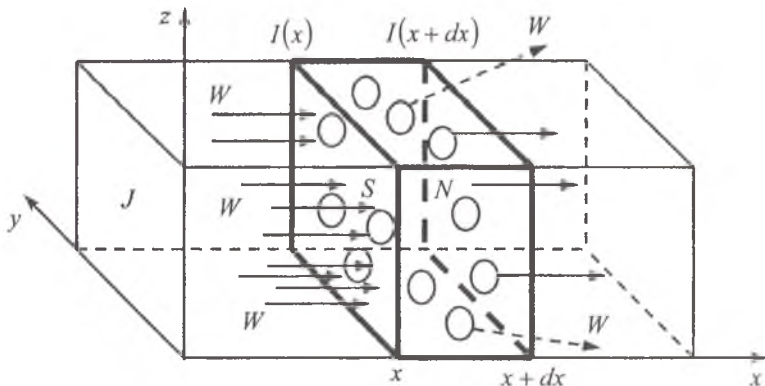


Рис. 1.13. Рассеяние частиц с энергией $W[\text{Дж}]$ на рассеивающих центрах с концентрацией $N[1/\text{м}^3]$ (к выводу уравнения $\frac{dI}{dx} = -\sigma NI$). $\rightarrow$ -

направление движения частиц, $J[1/\text{м}^2\text{с}]$ - плотность потока,

$I[\text{Вт}/\text{м}^2] = WJ$ - интенсивность

мую величину dP , которая, как это видно из рис. 1.13, равна

$$dP = S[I(x+dx) - I(x)] = S \frac{dI}{dx} dx. \quad (1.85)$$

Сравнивая (1.84) и (1.85), получаем следующее уравнение

$$\frac{dI}{dx} = -WwN.$$

Производная от I по координате x здесь отрицательна, ибо происходит убыль (рассеяние) падающих частиц. Так как согласно (1.82), $w = \sigma J$ и, кроме того, $I[\text{Вт}/\text{м}^2] = WJ$, уравнение принимает следующий вид:

$$\frac{dI}{dx} = -\sigma NI.$$

Решение этого уравнения таково:

$$I(x) = I(0) \exp(-\alpha x),$$

где $\alpha[\text{м}^{-1}] = \sigma[\text{м}^2]N[\text{м}^{-3}]$ - коэффициент поглощения (коэффициент экстинкции), $I(0)$ - интенсивность (плотность мощности) на входе в среду, содержащую центры рассеяния.

Сечение вынужденного перехода

Сечение вынужденного перехода можно получить, преобразуя формулу (1.72) для вероятности $w[1/\text{сек}]$ вынужденного перехода:

$$w = B\rho_{\nu,\nu}. \quad (1.86)$$

Спектрально-объемную плотность $\rho_{\nu,\nu}$ можно выразить через плотность мощности излучения $I[\text{Вт}/\text{м}^2]$ и $g(\nu)$ - форм-фактор спектральной линии перехода между двумя рабочими уровнями:

$$\rho_{\nu,\nu} = \frac{I}{c} g(\nu). \quad (1.87)$$

В самом деле,

$$\frac{I}{c} = w_{\nu},$$

где $w_{\nu}[\text{Дж}/\text{м}^3]$ - объемная плотность энергии излучения, а $g(\nu)$ имеет размерность $1/\text{Гц}$, то есть представляет собой нормированную спектральную плотность, так что

$$\int g(\nu) d\nu = 1.$$

Например, для затухающего осциллятора с резонансной частотой ω_0 и декрементом затухания δ колебания могут выглядеть так:

$$x = x_0 \exp(-\delta t) \sin \omega_1 t, \quad (1.88)$$

где $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$.

Спектр колебаний, то есть форм-фактор, или Фурье-образ (1.88) представляет собой в этом случае так называемый Лоренцовский контур:

$$g(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{\delta}{(\omega - \omega_0)^2 + \delta^2},$$

где $\delta = \Delta\omega_n$ и, кроме того, $\Delta\omega_n = 2\delta = \frac{1}{\tau_{\text{сп}}}$ - ширина спектральной линии по ее полувысоте, $\tau_{\text{сп}}$ - спонтанное время жизни возбужденного состояния (верхнего энергетического уровня). То обстоятельство, что $\Delta\omega_n = \frac{1}{\tau_{\text{сп}}} = 2\delta$, объясняется следующим образом. Энергия $W_2(t)$ возбужденного (верхнего) уровня пропорциональна среднему по периоду T квадрату x , то есть $W_2(t) \approx x^2 \approx \exp(-2\delta t)$.

Таким образом, имеет место соотношение

$$2\delta = \tau^{-1}.$$

Форм-фактор можно выразить через циклические частоты $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$,

$$\Delta\nu_n = \frac{\Delta\omega_n}{2\pi}, \quad \delta = \frac{\Delta\omega_n}{2}, \quad \text{воспользовавшись равенством}$$

$$g(\omega)d\omega = g(\nu)d\nu$$

или

$$g(\nu) = g(\omega) \frac{d\omega}{d\nu} = g(\omega \rightarrow 2\pi\nu) 2\pi.$$

В результате имеем

$$g(\nu) = \frac{1}{\pi} \frac{\Delta\nu_n/2}{(\nu - \nu_0)^2 + (\Delta\nu_n/2)^2}. \quad (1.89)$$

В частности, при резонансе

$$g(\nu_0) = \frac{2}{\pi\Delta\nu_n} = \frac{4}{\Delta\omega_n} = 4\tau_{\text{сп}} = \frac{4}{A}.$$

Подставляя (1.87) в (1.86), получим

$$w[1/c] = B\rho_{\nu} = B \frac{h\nu}{c} g(\nu) \frac{I}{h\nu} = \sigma J.$$

Отсюда следует, что сечение $\sigma[\text{м}^2]$ есть

$$\sigma = B \frac{h\nu}{c} g(\nu). \quad (1.90)$$

Можно также выразить сечение через коэффициент Эйнштейна A , используя соотношение между A и B , полученное из формулы Планка в представлении Эйнштейна (1.77)

$$A = B \frac{8\pi \cdot \nu^2}{c^3} h\nu. \quad (1.91)$$

Подставляя (1.90) в значение B , выраженное через A , в (1.91) получим

$$\sigma[\text{м}^2] = \frac{\lambda^2}{8\pi} Ag(\nu). \quad (1.92)$$

В том случае, когда форм-фактор $g(\nu)$ описывает так называемую естественную ширину линии, то есть когда ширина спектральной линии определяется $\tau_{\text{сп}}$ - спонтанным временем жизни $\left(A = 2\delta = \frac{1}{\tau_{\text{сп}}} \right)$, сечение перехода при резонансе ($\nu = \nu_0$) становится очень большим:

$$\sigma = \frac{\lambda^2}{2\pi}. \quad (1.93)$$

Действительно, в этом случае, как следует из (1.89), форм-фактор на резонансной частоте $\nu = \nu_0$ имеет вид:

$$g(\nu_0) = \frac{2}{\pi \Delta \nu_{\text{л}}} = \frac{4}{\Delta \omega_{\text{л}}} = \frac{4}{A}.$$

Для естественной ширины линии имеет место соотношение $\frac{1}{\Delta \omega_{\text{л}}} = \tau_{\text{сп}}$, из которого с учетом того, что $A = 1/\tau_{\text{сп}}$, следует (1.93). Примеры сечений и других характеристик некоторых лазерных переходов даны в таблице 1.5.

Таблица 1.5

Сечения и другие характеристики некоторых лазерных переходов

Лазер	Nd-лазер	“Рубиновый” лазер	Экимерный XeCl лазер
Длина волны	1,06 мкм	0,693 мкм	0,308 мкм
Ширина спектральной линии (однородная часть)	20 см ⁻¹ 6·10 ¹¹ Гц	6 см ⁻¹ 1,8·10 ¹¹ Гц	20 см ⁻¹ 6·10 ¹¹ Гц
Спонтанное время жизни $\tau = 1/A$	3·10 ⁻⁴ с	3·10 ⁻³ с	10 ⁻⁷ с
Естественная ширина линии $\Delta \nu_{\text{л}}$ [Гц]	0,53·10 ³ Гц	0,53·10 ² Гц	1,59·10 ⁶ Гц
Сечение усиления	1,5·10 ⁻²³ м ²	2,3·10 ⁻²³ м ²	3·10 ⁻²⁰ м ²

Зная, как выглядит сечение $\sigma[\text{м}^2]$ вынужденного перехода, рассмотрим с точки зрения процесса рассеяния взаимодействие светового пучка с двухуровневой квантовой системой (рис. 1.11).

Облучающие вещество и “рассеивающиеся” частицы - это фотоны с энергией $W = h\nu$ каждый. Плотность потока фотонов $J[1/\text{м}^2\text{с}]$ есть:

$$J = \frac{I}{h\nu},$$

где $I[\text{Вт}/\text{м}^2\text{с}]$ - интенсивность света (плотность мощности.)

Центры рассеяния представляют собой атомы, каждый из которых может находиться в одном из двух состояний: на нижнем уровне 1 (основное состояние с населенностью $N_1[\text{м}^{-3}]$) или на верхнем уровне 2 (возбужденное состояние с населенностью $N_2[\text{м}^{-3}]$).

Каждый элементарный акт рассеяния означает вынужденный переход: либо с нижнего уровня на верхний (переход $1 \rightarrow 2$), либо с верхнего уровня на нижний (переход $2 \rightarrow 1$). Переход $1 \rightarrow 2$ сопровождается поглощением взаимодействующего с атомом внешнего “вынуждающего” фотона. Переход $2 \rightarrow 1$ сопровождается вынужденным испусканием фотона в добавок к вынуждающему. Особенность вынужденно испущенного фотона состоит в том, что он находится в том же состоянии, что и фотон, его породивший: имеет ту же частоту, направление распространения и поляризацию. Эта особенность вынужденного испускания как процесса рассеяния показана на рис. 1.14, где представлены индуцированные фотоны (обозначены пунктиром), испускаемые в результате вынужденных переходов в возбужденном атоме с верхнего уровня 2 на нижний уровень 1 (см. также рис. 1.11). Такие атомы отмечены штриховкой.

“Исчезновение” вынуждающих фотонов связано с вынужденными переходами с нижнего уровня 1 на верхний 2. При этом атом оказывается в возбужденном состоянии (светлые кружки). На рис. 1.14 показаны также фотоны, испускаемые в результате спонтанных переходов с верхнего уровня 2 на нижний 1.

Предположим для определенности, что $N_1 > N_2$, то есть в единицу времени актов поглощения фотонов больше, чем актов испускания. Тогда можно повторить все рассуждения и выкладки пункта а), заменив лишь WN на $h\nu(N_1 - N_2)$. В результате получится уравнение:

$$\frac{dI}{dx} = -\sigma(N_1 - N_2)I.$$

Его решение известно; это закон Бугера:

$$I(x) = I(0)\exp(-\alpha x).$$

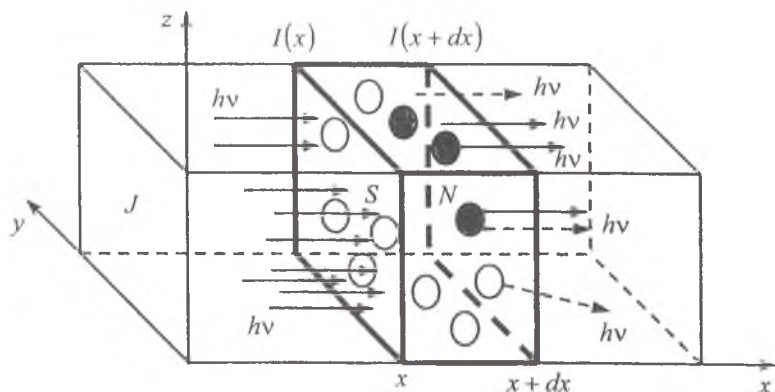


Рис. 1.14. Поглощение и усиление света как процесс рассеяния фотонов на атомах: в основном состоянии (поглощение) и в возбужденном состоянии (усиление). При усилении каждый “рассеянный”, то есть индуцированный фотон попадает в то же состояние, в котором находится индуцирующий “рассеиваемый” фотон. “Спонтанный” фотон может испускаться в любом направлении

Здесь коэффициент поглощения $\alpha[\text{м}^{-1}]$ равен

$$\alpha = \sigma(N_1 - N_2) \quad (1.94)$$

и сечение $\sigma[\text{м}^2]$ перехода

$$\sigma = \frac{\lambda^2}{8\pi} A g(\nu),$$

где $\lambda[\text{м}]$ - длина световой волны, $A = \frac{1}{\tau_{\text{сп}}}$ коэффициент Эйнштейна A , $\tau_{\text{сп}}[\text{с}]$ - время жизни на уровне 2.

При инверсии населенностей, когда $N_2 > N_1$, происходит усиление света по закону

$$I(x) = I(0) \exp(\alpha x),$$

где

$$\alpha = \sigma(N_2 - N_1)$$

представляет собой коэффициент усиления, равный по величине и противоположный по знаку коэффициенту поглощения (1.94).

1.6.3. Усиление света с учетом спонтанного излучения как следствие формулы Планка (в записи Эйнштейна)

1.6.3.1. Испускание и поглощение света в активной среде. Объемная плотность мощности излучения (и поглощения). Ее пропорциональность числу n основных фотонов в моде. Вычисление n - среднего числа фотонов в моде. Ширина спектральной линии и ее форм-фактор. Сечение вынужденного перехода (сечения усиления и поглощения). Коэффициент линейного усиления (или поглощения)

Пусть имеется двухуровневая активная среда длиной L и диаметром D с населенностью уровней верхнего $N_2[\text{м}^{-3}]$ и нижнего $N_1[\text{м}^{-3}]$, как это показано на рис. 1.15.

На вход в такую среду поступает резонансное излучение с интенсивностью $I_0[\text{Вт}/\text{м}^2]$ и частотой $\nu[1/\text{с}] = \frac{c}{\lambda}$, где $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ - скорость света, а $\lambda[\text{м}]$ - длина волны. Излучение это для начала будем считать монохроматичным (одночастотным) и одномодовым. Одномодовость означает, то все фотоны находятся в одном состоянии, то есть имеют одну и ту же частоту ν , направление распространения (волновой вектор $k = \frac{2\pi c}{\lambda}$) и поляризацию. На практике монохроматичным считается такое излучение, у которого



Рис. 1.15. Оптический (лазерный) усилитель. На вход в активную среду длиной $L[\text{м}]$ и диаметром $D[\text{м}]$ с инверсной населенностью $\Delta N = N_2 - N_1$ поступает внешний входной сигнал с интенсивностью $I(0) = I_0$, который усиливается на длине усиления L . Спонтанное излучение эффективно усиливается лишь в пределах телесного угла $\Delta\Omega = \left(\frac{D}{L}\right)^2$, так как только в пределах этого угла происхо-

дит усиление на всей длине L

го спектральная ширина $\delta\nu$ много меньше $\Delta\nu_s$ - ширины спектральной линии квантовой системы:

$$\delta\nu \ll \Delta\nu_s.$$

Внешнее излучение является широкополосным, когда

$$\delta\nu \gg \Delta\nu_s.$$

В результате воздействия внешнего излучения имеют место вынужденные переходы с вероятностью $w[1/c]$, где w , согласно (1.80), имеет вид:

$$w = B\rho_{\nu,\nu} = \sigma \frac{I}{h\nu} = An.$$

Здесь B и A - коэффициенты Эйнштейна, $\rho_{\nu,\nu}$ - спектрально-объемная плотность внешнего излучения, n - число фотонов в каждой моде активной среды. Таким образом, вероятность вынужденного излучения тем больше, чем большее число фотонов в каждой моде активной среды создает внешнее излучение.

Объемная плотность мощности света $p_V^{в,исп} [Вт/м^3]$, испускаемого за счет вынужденных переходов сверху вниз (то есть с верхнего уровня 2 на нижний уровень 1) с учетом (1.83) имеет вид:

$$p_V^{в,исп} = h\nu N_2 w = h\nu N_2 An.$$

Объемная плотность мощности света $p_V^{в,погл} [Вт/м^3]$, поглощаемого за счет вынужденных переходов снизу вверх (то есть с нижнего уровня 1 на верхний уровень 2) с учетом (1.83), (1.71) выглядит так:

$$p_V^{в,погл} = h\nu N_1 w_{12} = \frac{g_1}{g_2} w_{21} h\nu N_1 An.$$

Суммарная объемная мощность $p_V^в$, испускаемая (или поглощаемая) в веществе за счет вынужденных переходов, есть разность $p_V^{в,исп} - p_V^{в,погл}$, то есть

$$p_V^в = p_V^{в,исп} - p_V^{в,погл} = h\nu \Delta N_{21} An, \quad (1.95)$$

где

$$\Delta N_{21} = N_2 - \frac{g_2}{g_1} N_1. \quad (1.96)$$

Физический смысл этого выражения таков. $p_V^в$ - это объемная плотность мощности излучения, состоящего из фотонов того состояния, что и внешние фотоны. Другими словами, если внешнее инициирующее излучение одномодовое, то и $p_V^в$ - объемная плотность мощности одномодового излучения.

Таким образом, объемная плотность излучения $p_V^в [Вт/м^3]$ пропорциональна n - среднему числу фотонов в моде.

Ранее в п. 1.6.2 было введено такое понятие, как *сечение вынужденного перехода* $\sigma[\text{м}^2]$ (сечение усиления, сечение поглощения). В терминах сечения формулу (1.95) можно записать через интенсивность $I[\text{Вт}/\text{м}^2]$ следующим образом:

$$p_V^{\text{в}} = \sigma \Delta N_{21} I. \quad (1.97)$$

Это сечение $\sigma[\text{м}^2]$ теперь можно получить, воспользовавшись выражением (1.79) п. 1.6.1:

$$w_{21} = A n,$$

связывающим вероятность вынужденного излучательного перехода $w_{21}[\text{1/с}]$ со средним числом n фотонов в моде через коэффициент Эйнштейна $A[\text{1/с}]$ и выразив эту величину $\sigma[\text{м}^2]$ через такие характеристики, как ширина спектральной линии, длина волны и т.п.

Найдем n - среднее число фотонов в моде. Эта величина n равна объемной плотности фотонов $N = \frac{I}{ch\nu}$, поделенной на объемную плотность

$M_V[\text{м}^{-3}]$ мод в активной среде:

$$M_V = \frac{8\pi\nu^2 \Delta\nu_n}{c^3} \approx \frac{8\pi\nu^2}{g(\nu)c^3},$$

где $\Delta\nu_n$ - ширина спектральной линии, а $g(\nu)$ - ее формфактор.

В формуле для M_V будет стоять 4π вместо 8π , если мы имеем дело с поляризованным излучением. Итак, среднее число фотонов n в моде есть

$$n = \frac{I}{ch\nu} \frac{1}{M_V} = \frac{I}{ch\nu} \frac{c^3 g(\nu)}{8\pi\nu^2} = \frac{\lambda^2}{8\pi} g(\nu) \frac{I}{h\nu}.$$

Подставляя это выражение в (1.95), получим

$$p_V^{\text{в}} = h\nu \Delta N_{21} A \frac{\lambda^2}{8\pi} g(\nu) \frac{I}{h\nu} = \Delta N_{21} \frac{\lambda^2}{8\pi} g(\nu) A I = \Delta N_{21} \sigma I.$$

Здесь величина $\sigma[\text{м}^2]$ представляет собой уже известное *сечение вынужденного перехода* (см. в п.1.6.2 формулу (1.92)):

$$\sigma = \frac{\lambda^2 A g(\nu)}{8\pi}$$

или

$$\sigma = \frac{\lambda^2}{8\pi} \frac{A}{\Delta\nu_n},$$

где $\Delta\nu_n$ - ширина спектральной линии перехода.

В знаменателе формулы будет стоять 4π вместо обычных 8π , если мы рассматриваем поляризованное излучение.

Произведение $\Delta N_{21}\sigma$ есть коэффициент линейного усиления (или поглощения, если $\alpha[\text{м}^{-1}] < 0$).

$$\alpha = \Delta N_{21}\sigma. \quad (1.98)$$

В случае однофотонного резонансного взаимодействия (ОРВ) коэффициент Эйнштейна $A[1/\text{с}]$ есть просто обратное время жизни частицы на верхнем уровне 2:

$$A = \frac{1}{\tau_{\text{сп}}}.$$

При комбинационном рассеянии коэффициент $A = A_{\text{скр}}$ и, следовательно, $\sigma_{\text{вкр}}[\text{м}^2]$ - сечение ВКР представляет собой следующее выражение

$$\sigma_{\text{вкр}} = \frac{\lambda_c^2}{8\pi} A_{\text{скр}} g(\nu) = \frac{\lambda_c^2}{8\pi} g(\nu) \Omega_{\text{скр}} \frac{\partial \sigma_{\text{скр}}}{\partial \Omega} \frac{I_p}{h\nu_p}.$$

Соответственно, линейный коэффициент $\alpha_{\text{вкр}}[\text{м}^{-1}]$ усиления ВКР есть выражение, аналогичное (1.98):

$$\alpha_{\text{вкр}} = \sigma_{\text{вкр}}(N_1 - N_2).$$

Следует помнить, что в силу специфической природы элементарного акта при ВКР коэффициент усиления g_c - положительная величина именно при *отсутствии инверсной населенности*, то есть при $N_1 - N_2 > 0$, что отражает формула (1.81). Таким образом, усиление стоксовой компоненты ВКР происходит *без инверсии!*

В работах по ВКР обычно используют величину $g_c[\text{м/Вт}]$ - так называемый *коэффициент усиления ВКР*, записывая $\alpha_{\text{вкр}}$ в виде произведения g_c на интенсивность накачки I_p

$$\alpha_{\text{вкр}} = g_c I_p,$$

где g_c представляет собой выражение

$$g_c = \frac{\lambda_c^2}{8\pi} g(\nu) \Omega_{\text{скр}} \frac{\partial \sigma_{\text{скр}}}{\partial \Omega} \frac{\lambda_p}{hc} (N_1 - N_2).$$

Итак, объемная плотность мощности *вынужденного* излучения $\rho_V^{\text{в}}[\text{Вт/м}^3]$ имеет следующий вид:

$$\rho_V^{\text{в}} = \Delta N_{21}\sigma I = \alpha I,$$

где

$$\alpha[\text{м}^{-1}] = \Delta N_{21}\sigma$$

есть так называемый линейный коэффициент усиления (или поглощения, если $N_2 < N_1$).

1.6.3.2. Спонтанные переходы. Объемная плотность мощности вынужденного и спонтанного излучения как пространственная производная от интенсивности света. Уравнение, описывающее усиления света, и его решение

Кроме вынужденных переходов в активной среде имеют место так называемые спонтанные преходы (в данном случае с верхнего уровня 2 на нижний уровень 1). Вероятность каждого такого перехода $w_{\text{сп}}[1/\text{с}]$ есть

$$w_{\text{сп}} = A.$$

Это спонтанное излучение дает свой вклад в объемную плотность мощности в виде компоненты $p_V^{\text{сп}}[\text{Вт}/\text{м}^3]$, которую можно представить так:

$$p_V^{\text{сп}} = h\nu N_2 A \frac{\Delta\Omega}{\Omega} = h\nu N_2 A \frac{1}{4\pi} \left(\frac{D}{L} \right)^2.$$

Здесь множитель $\frac{\Delta\Omega}{\Omega} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{D}{L} \right)^2$ означает, что мы учитываем лишь ту часть спонтанных фотонов, которая ограничена пространственной угловой апертурой $\Delta\Omega = \left(\frac{D}{L} \right)^2$ активной среды, ибо только в пределах этого угла возможно усиление спонтанных фотонов на всей длине усилителя L .

С учетом спонтанного излучения результирующая объемная мощность $p_V[\text{Вт}/\text{м}^3]$, выделяющаяся (или поглощаемая) в активной среде, есть

$$p_V = p_V^{\text{исп}} - p_V^{\text{погл}} = h\nu(N_2 - N_1)An + h\nu \frac{N_2}{4\pi} \left(\frac{D}{L} \right)^2 A.$$

Ранее в п. 1.6.2 было показано, что объемная мощность $p_V[\text{Вт}/\text{м}^3]$ равна скорости изменения интенсивности света $\frac{dI}{dx}$. В этом можно убедиться также из следующих формальных тождественных преобразований:

$$p_V = h\nu \frac{dN_\Phi}{dt} = \frac{dw_V}{dt} = \frac{dcw_V}{cdt} = \frac{dI}{dx}. \quad (1.99)$$

Здесь $N_\Phi[\text{м}^{-3}]$ - объемная плотность фотонов в активной среде, $w_V[\text{Дж}/\text{м}^3] = h\nu N_\Phi$ - объемная плотность световой энергии, $I[\text{Вт}/\text{м}^2] = cw_V$ - интенсивность излучения, c - скорость света.

Физический смысл соотношения (1.99) можно пояснить следующим образом. Объемная плотность мощности p_V (выделяющаяся в веществе или поглощаемая им) означает, что световой поток $\Pi(x)$, проходящий че-

рез активную среду, меняется подобно тому, как это показано на рис. 1.14. Приращение или убыль потока $\Pi = SI$ на отрезке dx есть

$$\Pi(x+dx) - \Pi(x) = \frac{d\Pi}{dx}.$$

Это изменение потока равно результирующей мощности, $dP[\text{Вт}] \equiv d\Pi$, выделяющейся в активной среде (или поглощаемой в ней) в объеме $dV = Sdx$, то есть

$$dP[\text{Вт}] = p_V dV = p_V Sdx.$$

Подставив выражение $p_V = \frac{dI}{dx}$ из (1.99), получим

$$Sdx \frac{dI}{dx} = Sdx \Delta N_{21} \sigma I + Sdx h\nu \frac{N_2}{4\pi} \left(\frac{D}{L}\right)^2 A.$$

После соответствующих сокращений имеем следующее уравнение:

$$\frac{dI}{dx} = \Delta N_{21} \sigma I + h\nu \frac{N_2}{4\pi} \left(\frac{D}{L}\right)^2 A. \quad (1.100)$$

Начальным (граничным) условием служит интенсивность I_0 входного внешнего сигнала:

$$I(0) = I_0 \quad (1.101)$$

или в сокращенных обозначениях

$$\frac{dI}{dx} = \alpha I + \beta.$$

Здесь $\alpha[\text{м}^{-1}]$ представляет собой линейный коэффициент усиления

$$\alpha[\text{м}^{-1}] = \sigma \Delta N_{21},$$

где $\sigma[\text{м}^2]$ - сечение вынужденного перехода (в данном случае - усиления), которое в соответствии с (1.92) для поляризованного излучения имеет вид:

$$\sigma = \left(\frac{\lambda^2}{4\pi}\right) Ag(v) \cong \left(\frac{\lambda^2}{4\pi}\right) A \Delta\nu_a.$$

Кроме того, согласно (1.96), $\Delta N_{21} = N_2 - \frac{g_2}{g_1} N_1$, а величина $\beta[\text{Вт}/\text{м}^3]$ - есть объемная плотность мощности спонтанного излучения.

$$\beta = h\nu \frac{N_2}{4\pi} \left(\frac{D}{L}\right)^2 A. \quad (1.102)$$

Если же внешнего сигнала на входе в усиливающую среду нет, то

$$I(0) = 0. \quad (1.103)$$

Такой режим, когда усиливается только спонтанное излучение, называется *суперлюминесцентным*, а соответствующий оптический квантовый усилитель - *суперлюминесцентным усилителем*.

Мы получили уравнение (1.100), описывающее усиление света с интенсивностью $I(x)$ с учетом спонтанного излучения, представленного величиной β в (1.102) в двухуровневой среде. В данном случае однофотонного резонансного взаимодействия (ОРВ) такая среда должна быть с инверсной населенностью ($\Delta N_{21} > 0$). Уравнение (1.100), разумеется, описывает и поглощение света при ОРВ, если инверсии населенности нет, то есть $\Delta N_{21} < 0$.

При ВКР уравнение для интенсивности I_c усиливающейся стоксовой компоненты выглядит аналогично (1.100):

$$\frac{dI_c}{dx} = \alpha_{\text{вкр}} I_c + \beta_{\text{скр}}, \quad (1.104)$$

где $\alpha_{\text{вкр}}$ выражается формулами (1.97) и (1.96).

Здесь

$$\beta_{\text{скр}} = h\nu \frac{N_2}{4\pi} \left(\frac{D}{L} \right)^2 A_{\text{скр}}.$$

Кроме того, $\alpha_{\text{вкр}} = g_c I_p$, и уравнение (1.102) можно представить так:

$$\frac{dI_c}{dx} = g_c I_p I_c + \beta_{\text{скр}}. \quad (1.105)$$

Начальное (точнее граничное) условие дифференциального уравнения (1.105) выглядит так:

$$I(0) = I_0.$$

1.6.3.3. Линейный режим усиления (без учета эффекта насыщения). Оптические квантовые усилители: суперлюминесцентные и усилители внешнего сигнала. Предельная чувствительность оптического усилителя. Особенности усиления света при учете спонтанного излучения

Уравнение (1.100) можно решить, не прибегая к методу вариации постоянной, если в (1.100) вынести за скобки α и представить уравнение в следующем виде:

$$\frac{dI}{dx} = \Delta N_0 \sigma (I + I_{\text{сн}}) = \alpha (I + I_{\text{сн}}),$$

где $\alpha [\text{м}^{-1}] = \Delta N_0 \sigma$ - коэффициент усиления, ибо $\Delta N_0 > 0$. Инверсная населенность $\Delta N_0 = N_2 - \frac{g_2}{g_1} N_1$ в данном случае линейного усиления есть вели-

чина *постоянная*: $\Delta N_{12} = \Delta N_0 = \text{const}$. Начальное (точнее - граничное) условие: $I(0) = I_0$ - это интенсивность входного внешнего сигнала.

Интенсивность $I_{\text{сн}}$ в (1.101) представляет собой выражение

$$I_{\text{сн}} = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{N_2}{\Delta N_0} \frac{h\nu}{g(\nu)} \frac{1}{D^2} \left(\frac{D^2}{\lambda L} \right)^2 = \frac{N_2}{\Delta N_0} \frac{h\nu \Delta\nu}{D^2} F^2. \quad (1.106)$$

Здесь $\Delta\nu_n$ - ширина спектральной линии (вблизи резонанса $g(\nu) \approx \Delta\nu_n^{-1}$ - см.

п.1.6.2), $F^2 = \left(\frac{D^2}{\lambda L} \right)^2$ - квадрат числа Френеля.

Величина F^2 - это число мод, помещающихся в угловой апертуре $\Delta\Omega = \left(\frac{D}{L} \right)^2$ активной среды. Действительно, телесный угол, приходящийся

на одну моду, есть дифракционный угол $\Delta\Omega_{\text{лиф}} = \left(\frac{\lambda}{D} \right)^2$ и, таким образом,

$$F^2 = \frac{\Delta\Omega}{\Delta\Omega_{\text{лиф}}} = \left(\frac{D^2}{\lambda L} \right)^2.$$

Решение уравнения (1.101) можно получить, если заменой переменной записать его следующим образом:

$$\frac{d}{dx} (I + I_{\text{сн}}) = \alpha (I + I_{\text{сн}}). \quad (1.107)$$

Тогда решение выглядит так:

$$I(x) + I_{\text{сн}} = C \exp(\alpha x).$$

Постоянную C находим из граничного условия $I(0) = I_0$. Физический смысл такого условия означает, что на вход усилителя поступает *внешний сигнал* с интенсивностью I_0 . При $x = 0$ имеем: $C = I_0 + I_{\text{сн}}$. Окончательно получаем решение уравнения (1.107) в виде:

$$I(x) = (I_0 + I_{\text{сн}}) \exp(\alpha x) - I_{\text{сн}} = I_0 \exp(\alpha x) + I_{\text{сн}} [\exp(\alpha x) - 1]. \quad (1.108)$$

При $\alpha x \gg 1$ будет $I(x) \approx (I_0 + I_{\text{сн}}) \exp(\alpha x)$, то есть излучение на выходе ведет себя так, как если бы на вход наряду с I_0 поступало бы и $I_{\text{сн}}$.

Величина $I_{\text{сн}} [\text{Вт/м}^2]$ представляет собой приведенную ко входу ($x = 0$) интенсивность спонтанного излучения, в чем нетрудно убедиться, положив $I_0 = 0$ и взяв $\alpha x \ll 1$. Если длина активной среды $L [\text{м}]$, то интенсивность $I(L)$ света на выходе из нее есть

$$I(L) = I_0 \exp(\alpha L) + \frac{N_2}{N_2 - N_1} \frac{1}{D^2} h\nu \Delta\nu_n F^2 [\exp(\alpha L) - 1]. \quad (1.109)$$

Обычно $N_2 \gg N_1$. Однако формула (1.109) “работает” и при $N_2 \rightarrow N_1$. Действительно, при $N_2 \rightarrow N_1$ имеем

$$\exp(\alpha L) \cong 1 - \alpha L = 1 - \sigma(N_2 - N_1)L.$$

В результате (1.109) принимает вид

$$I(L) = I_0 \left[1 + \sigma(N_2 - N_1)L \right] + N_2 \frac{1}{D^2} h\nu \Delta\nu F^2 \alpha L.$$

Для ВКР - аналогичная формула только с заменой величин: $I_{\text{сн}}(x)$ вместо $I(x)$, $\alpha_{\text{вкр}} = g_c I_p$ вместо α и $\beta_{\text{свр}}$ вместо β :

$$I(x) = I_0 \exp(g_c I_p x) + \frac{\beta_{\text{свр}}}{\alpha_{\text{вкр}}} [\exp(g_c I_p x) - 1].$$

Отметим, что аналогичную замену можно сделать и во всех последующих формулах, полученных для ОПВ, если захотим перейти к ВКР.

Практически бывает удобнее пользоваться формулами типа (1.108), в которые входит мощность $P(x) = \frac{\pi}{4} D^2 I(x)$ (световой поток). Тогда формула (1.108) выглядит следующим образом:

$$P(x) = P_0 \exp(\alpha x) + P_{\text{сн}}(0) [\exp(\alpha x) - 1],$$

где $P_0 = \frac{\pi}{4} D^2 I_0(0)$, а $P_{\text{сн}}(0) = \frac{\pi}{4} D^2 I_{\text{сн}}(0)$. Подставляя выражение (1.106) для $I_{\text{сн}}(0)$, получим явное выражение для $P_{\text{сн}}(0)$, удобное для практических применений:

$$P_{\text{сн}}(0) = \frac{\pi}{4} D^2 I_{\text{сн}}(0) \frac{N_2}{N_2 - N_1} \pi \frac{h\nu \Delta\nu}{4} F^2.$$

При $N_2 \gg \frac{g_2}{g_1} N_1$, то есть когда $\frac{N_2}{N_0} \cong 1$, имеем следующее полезное для практики выражение для приведенной ко входу мощности спонтанного излучения $P_{\text{сн}}(0)$:

$$P_{\text{сн}}(0) = h\nu \Delta\nu F^2. \quad (1.109)$$

Предельная чувствительность любого усилителя - это минимальный сигнал на его входе, обеспечивающий заданное (скажем, в K раз) превышение сигнала над шумом на выходе. В нашем случае оптического усилителя входным сигналом является P_0 , а входным шумом - приведенная ко входу мощность спонтанного излучения $P_{\text{сн}}$, определяемая формулой (1.109). Другими словами, должно быть обеспечено условие $P_0 > P_{\text{сн}}$, например, $P_0 = K P_{\text{сн}}$.

Повысить чувствительность оптического усилителя можно, применяя пространственную и (или) частотную фильтрацию. Пусть, например, внешний сигнал - одномодовый (то есть его расходимость $\theta \cong \frac{\lambda}{D}$ - дифракционная), а полоса частот $\Delta\nu_c$ меньше, чем $\Delta\nu_y$ - спектральная полоса усилителя. Тогда, установив на входе усилителя пространственный и частотный фильтры, можно повысить его чувствительность в $F^2 \frac{\Delta\nu_y}{\Delta\nu_c}$ раз. Действительно, пространственный фильтр с шириной полосы $\theta_\phi = \theta$ обеспечит $F \cong 1$ и тем уменьшит выходной шум в F^2 раз, а частотный фильтр с полосой $\Delta\nu_\phi = \Delta\nu_c$ сделает полосу пропускания усилителя равной полосе сигнала, то есть также уменьшит спонтанный шум на выходе в $\frac{\Delta\nu_y}{\Delta\nu_c}$ раз.

Таким образом, предельная чувствительность усилителя (то есть минимальная мощность входного сигнала, обеспечивающая соотношение сигнал/шум на выходе в K раз) есть величина $P_0 \cong Kh\nu\Delta\nu_c$.

Оптический усилитель с *пространственным селектором мод* (ПСМ) на выходе показан на рис.1.16.

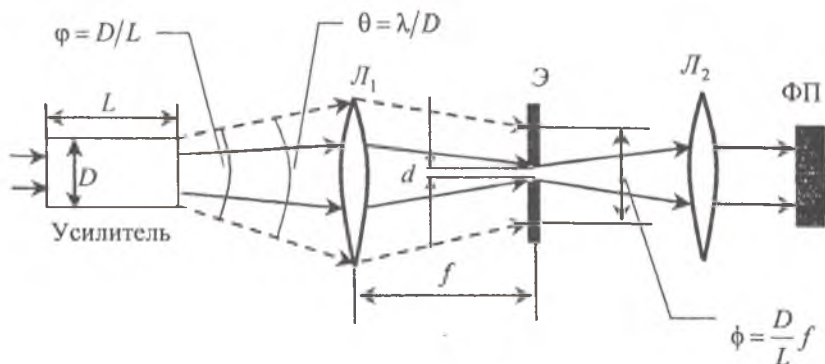


Рис. 1.16. Оптический усилитель с пространственным селектором мод. L_1 и L_2 - конфокальная система линз с фокусом f . Э - экран в фокальной плоскости линз, в котором имеется отверстие (диафрагма) диаметром $d \approx \frac{\lambda}{D} f$. $\varphi \approx \frac{D}{L}$ - расходимость усиленного спонтанного излучения. $\theta \approx \frac{\lambda}{D}$ - дифракционная расходимость усиливаемого сигнала. Так как $\varphi \gg \theta$, то $\phi \gg d$. В результате одномодовый сигнал полностью проходит сквозь диафрагму и попадает на фотоприемник ФП, в то время как большая часть усиленного спонтанного излучения задерживается экраном

ПСМ представляет собой систему из двух конфокальных линз L_1 и L_2 с фокусными расстояниями f , в фокальной плоскости которых находится непрозрачный экран Э с отверстием (диафрагмой). Диаметр $d \approx \theta f = \frac{\lambda}{D} f$ диафрагмы подбирают так, чтобы сквозь неё проходил пучок с расходимостью, не превышающей дифракционную $\theta \approx \frac{\lambda}{D}$. Усиленное спонтанное излучение (собственный шум усилителя) сосредоточено в значительно большем угле φ , который определяется угловой апертурой усилителя $\frac{D}{L}$, то есть $\varphi \approx \frac{D}{L}$. Это излучение образует на экране пятно диаметром $\varnothing \approx \frac{D}{L} f \gg d$. Тем самым усиленное спонтанное излучение ослабляется в $\left(\frac{\varnothing}{d}\right)^2 = \left(\frac{D^2}{\lambda L}\right)^2 = F^2$ раз и также становится одномодовым. Это равносильно значению $F = 1$ в выражении (1.109) для приведенной ко входу мощности спонтанного шума, и такой усилитель называют *пространственно одномодовым*, или просто *одномодовым*. Его чувствительность $P_{\text{сн}}[\text{Вт}]$ составляет

$$P_{\text{сн}} \approx h\nu \Delta\nu_n.$$

Спектральная селекция, то есть сужение полосы пропускания усилителя с помощью обычных пассивных фильтров, - довольно сложная техническая задача. Например, чтобы ограничить полосу до $\Delta\nu \sim 10^6$ Гц, необходим фильтр, спектральная селективность которого для оптических частот (зеленый свет $\Delta\nu \sim 6 \cdot 10^{14}$ Гц) должна быть $\frac{\Delta\nu}{\nu} \sim 1,5 \cdot 10^{-9}$. Однако в ряде практических случаев сам усилитель является достаточно эффективным активным спектральным фильтром (АСФ) по отношению к внешнему шумовому фону, например, солнечному свету. В этом случае селективность S_ν можно оценить с помощью формулы Планка для спектрального распределения испускательной способности S_ν черного тела с температурой T - источника шумового фона (в данном случае - Солнца)

$$S_\nu = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \frac{h\nu}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1}.$$

Для S_ν имеем соотношение

$$C_v = \frac{S_v(v_L) \Delta v_n}{\int_0^\infty S_v(v) dv} = \frac{x_L^3 \Delta x_n}{[\exp(x_L) - 1] \int_0^\infty S(x) dx}. \quad (1.110)$$

Здесь v_L и Δv_n соответственно резонансная частота и полоса усилителя,

$$x = \frac{h\nu}{kT}, \quad S(x) = \frac{x^3}{\exp(x) - 1}, \quad \int_0^\infty S(x) dx = \frac{\pi^4}{15} = 6,49.$$

Для усилителя с рабочей длиной волны $\lambda = 1$ мкм ($\nu_n = 3 \cdot 10^{14}$ Гц) полосой $\Delta \nu_n = 10^8$ Гц, $x_L = 2,4$, $\Delta x_L = x_L \frac{\Delta \nu_n}{\nu_L} = 0,8 \cdot 10^{-6}$ при $T = 6000$ К (температура поверхности Солнца) имеем $C_v = 1,7 \cdot 10^{-7}$. В данном случае следует еще учесть и величину $C_\theta \ll 1$ - пространственную (угловую) селективность одномодового усилителя. Если D - его диаметр (см. рис. 1.16), а $\theta_c = 0,9 \cdot 10^{-2}$ рад - расходимость солнечного излучения с интенсивностью $I_c = 1,3$ кВт/м² (солнечная постоянная), то для C_θ имеем следующую формулу.

$$C_\theta = \left(\frac{\lambda}{D} \right)^2 \frac{1}{\theta_c^2}.$$

В результате мощность $P_c^{\text{вх}}$ [Вт] входного солнечного шума будет

$$P_c^{\text{вх}} [\text{Вт}] = \frac{\pi}{4} D^2 I_c C_\theta C_v = \frac{\pi}{4} \lambda^2 I_c \theta_c^2 C_v.$$

Это будет значительно меньше мощности спонтанного шума $P_{\text{сн}} \approx h\nu \Delta \nu_n$. Действительно, при $\theta_c = 0,9 \cdot 10^{-2}$ рад, $h\nu = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Дж,

$\Delta \nu_n = 10^8$ Гц получим $\frac{P_c^{\text{вх}}}{P_{\text{сн}}} = 10^{-1}$. Если принимаемый сигнал (и режим работы усилителя) - импульсный, то говорят о минимальной шумовой энергии, то есть о предельной энергетической чувствительности усилителя W_{min} [Дж]:

$$W_{\text{min}} \approx (h\nu \Delta \nu_n F^2) \tau,$$

где τ [с] - длительность импульса.

Минимальная входная шумовая энергия достигается в одномодовом усилителе, для которого выполняется соотношение

$$\Delta \nu_n \tau F^2 = 1.$$

В этом случае говорят: "один шумовой фотон на моду".

$$W_{\text{min}} \approx h\nu.$$

В настоящее время созданы оптические усилители с чувствительностью, близкой к теоретическому пределу (1.110) [Носач О.Ю. и др. Кванто-

вая электроника Т.30. №9. 2000 С.833.]. Для этого использовался фотодиссоционный лазер-усилитель с длиной волны $\lambda = 1,315$ мкм на переходе $^2P_{1/2} \rightarrow ^2P_{3/2}$ атомарного йода. Такой лазер сочетает в себе целый ряд замечательных свойств, необходимых для создания на его основе предельно чувствительного усилителя. Так, например, ширина его линии усиления - чрезвычайно узкая и составляет величину $\Delta\nu_L < 10^{-2} \text{ см}^{-1}$. Населенность нижнего рабочего уровня много меньше населенности верхнего уровня (то есть $N_2 \gg N_1$). Кроме того, оптическая однородность близка к идеальной, так что можно проводить селекцию пространственных мод и достигать условия $F=1$. Коэффициент усиления (до $\alpha \approx 0,2 \text{ см}^{-1}$) на длине усиления $L \sim 1$ м обеспечивает усиление $\sim 10^6$. Все это позволило достичь энергетической чувствительности $\sim 3h\nu$ при длительности импульса ~ 40 нсек.

В случае отсутствия внешнего сигнала ($P_0 = 0$) происходит усиление спонтанного излучения (так называемый *суперлюминесцентный режим*), и на выходе такого *суперлюминесцентного усилителя* получаем $P_{\text{сп}}(L)$ - мощность усиленного спонтанного излучения:

$$P_{\text{сп}}(L) = P_{\text{сп}}(0) \left(\exp\{\alpha x\} - 1 \right).$$

1.6.3.4. Нелинейный режим усиления. Эффект насыщения: снижение усиления с ростом усиленного сигнала из-за уменьшения инверсной населенности. Зависимость выходного усиленного излучения от инкремента усиления и от величины входного сигнала

Учет эффекта насыщения приводит к уравнению, которое, в отличие от (1.100), выглядит следующим образом:

$$\frac{dG}{dx} = \frac{G\alpha_p}{1 + \beta^2 + G}. \quad (1.111)$$

Здесь G - так называемый фактор насыщения: $G(L) \equiv G_L = \frac{I(L)}{I_s}$,

$G(0) \equiv G_0 = \frac{I(0)}{I_s}$, где I_s - интенсивность насыщения, $\beta = \frac{\Delta\nu_L}{\nu_L}$ - нормированная на ширину линии $\Delta\nu_L$ расстройка $\Delta\nu$, α_p - резонансный коэффициент усиления (то есть при $\Delta\nu = 0$).

Решение (1.111) с граничным условием $G_0 = \frac{I(0)}{I_s}$ при $\beta = 0$ выглядит так:

$$\ln\left(\frac{G_L}{G_0}\right) + G_L - G_0 = \alpha_p x.$$

При $x = L$ получаем решение в виде

$$\ln\left(\frac{G_L}{G_0}\right) + G_L - G_0 = \alpha_p L \quad (1.112)$$

или иначе

$$\ln(K) + G_0(K - 1) = \alpha_p L. \quad (1.113)$$

Здесь $K = \frac{G_L}{G_0}$. Величина K может изменяться в пределах

$$1 \leq K \leq \exp(\alpha_p L).$$

Из (1.113) для G_0 имеем трансцендентное выражение

$$G_0 = \frac{\alpha_p L - \ln(K)}{K - 1}.$$

Зависимость G_L от $\alpha_p L$ при различных G_0 и показана на рис. 1.17. Решение (1.112) с учетом (1.113) позволяет также получить зависимость выходного сигнала G_L от входного G_0 при различных инкрементах уси-

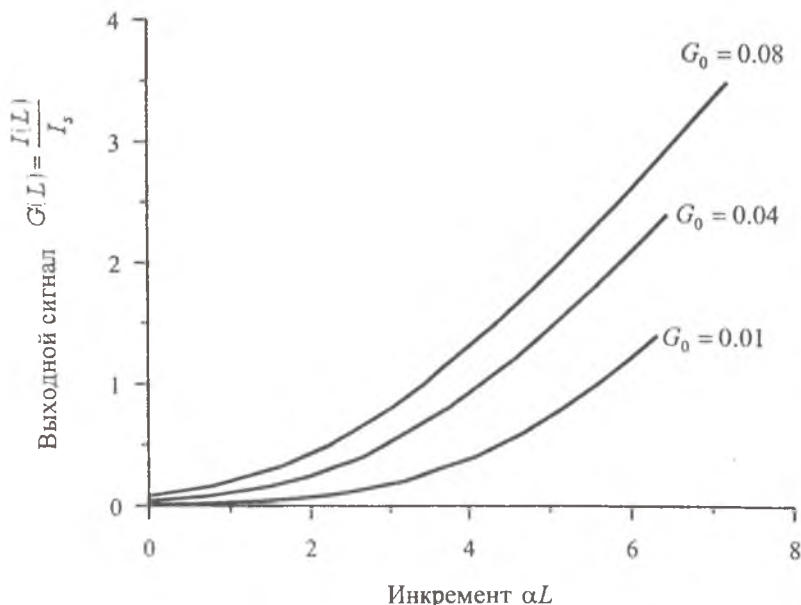


Рис. 1.17. Зависимость нормированного на интенсивность насыщения I_s выходного сигнала $I(L)$ нелинейного оптического усилителя от инкремента усиления αL при различных значениях входного сигнала $I(0)$, также нор-

$$\text{мированного на } I_s, G_L = \frac{I(L)}{I_s}, G_0 = \frac{I(0)}{I_s}$$

ния $\alpha_p L$. Такая зависимость представлена на рис.1.18.

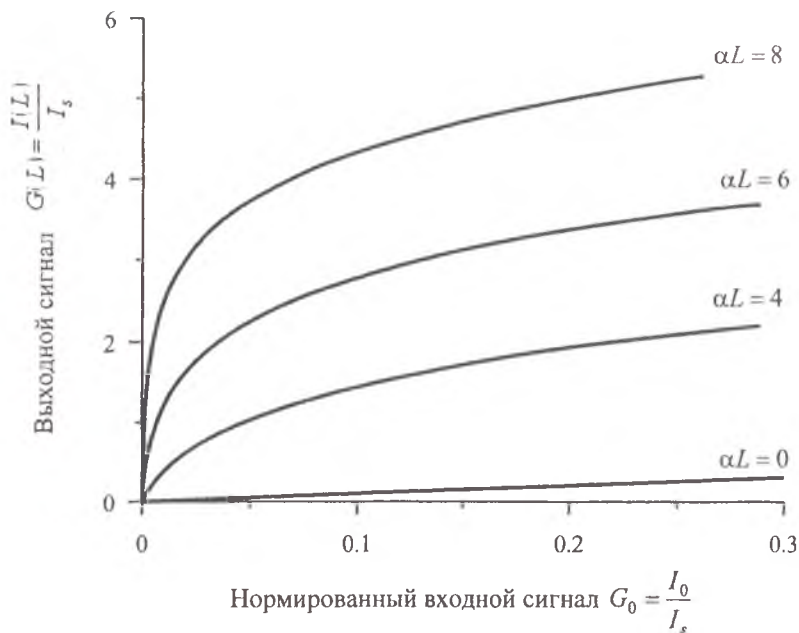


Рис.1.18. Зависимость сигнала на выходе усилителя $G_L = \frac{I(L)}{I_s}$ от входного сигнала $G_0 = \frac{I(0)}{I_s}$ при различных инкрементах усиления αL . Оба сигнала нормированы на интенсивность насыщения I_s . $G(x) = \frac{I(x)}{I_s}$ - фактор насыщения

1.6.5. Предельная длина усилителя в режиме насыщения

Из рис. 1.17 следует, что выходная интенсивность или плотность энергии растут линейно с длиной. Действительно, если запасенная в активной среде плотность энергии w_v [Дж/м³] есть

$$w_v = h\nu(N_2 - N_1),$$

то она полностью переходит в световую энергию на любом отрезке Δx , если на этом отрезке – режим насыщения, то в результате приращение плотности энергии $\Delta\sigma$ [Дж/м²] будет

$$\Delta\sigma = w_v \Delta x.$$

Однако так будет только в том случае, когда мы пренебрегаем нерезонансными ненасыщенными потерями, а они всегда есть. Таким образом, в действительности приращение $\Delta\sigma$ будет описываться так:

$$\Delta\sigma = w_\gamma \Delta x \exp(-\gamma \Delta x),$$

где $\gamma[\text{м}^{-1}]$ - коэффициент поглощения. Таким образом, на длине x полное насыщение

$$\sigma = \sigma_0 + w_\gamma x \exp(-\gamma x).$$

Из вида функции следует, что $\sigma(x)$ достигает максимума при $x = L_{\text{лим}} = 1/\gamma$, которую называют предельной длиной усилителя.

1.7. Формула Планка в масштабах Вселенной

1.7.1. "Стандартная модель" Вселенной (Теория Большого Взрыва, остывание "горячей Вселенной"). Реликтовое излучение как проявление закона Планка в масштабах Вселенной

С точки зрения современной космологии, наша Вселенная произошла в результате Большого Взрыва. Эта космическая теория сейчас является общепринятой и называется еще "Стандартной моделью" (Standard Model). Популярное и увлекательное изложение этой теории, ее результатов и предсказаний, описание процессов, происходивших во Вселенной, содержится в книгах: С.Вайнберг "Первые три минуты" (М.: Мир, 1986), И.Д. Новиков "Как взорвалась Вселенная" (М.: Наука, 1988). Большой Взрыв принципиально отличается от любого нашего земного взрыва, который начинается в определенной точке вещества, где, например, расположен детонатор, и, начавшись там, распространяется по веществу. Большой Взрыв Вселенной начался "одновременно везде". Более того, просто за пределами воображения находятся те фактические плотности ($> 10^{100}$ кг/м³) и температуры ($> 10^{12}$ К), которые были во Вселенной на начальном этапе ее существования. Впрочем, о начальном этапе такой "горячей" Вселенной можно говорить лишь спустя примерно 10^{-2} с от начала Большого Взрыва, ибо только на этом этапе характеристики "горячей" Вселенной можно хоть как-то вообразить. Однако по мере расширения Вселенной она остывала, ее температура падала (см. ниже п.1.7.2), и начинали образовываться различные элементарные частицы. Пороговая температура T_n для образования такой элементарной частицы с массой покоя m есть

$$T_n = \frac{mc^2}{k},$$

где $c = 3 \cdot 10^8$ м/с - скорость света, а $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К - постоянная Больцмана. Так, например, при $T = 10^{12}$ К могли существовать π -мезоны с массой покоя $300m_e$, где $m_e = 0,91 \cdot 10^{-30}$ кг - масса покоя электрона. В самом деле, пороговая температура T_n образования такого π -мезона есть

$$T_n \approx \frac{300m_e}{k} = 1,8 \cdot 10^{12} \text{ К}.$$

При дальнейшем падении температуры (из-за расширения Вселенной) до значения $3 \cdot 10^9$ К (это произошло примерно через 14 с после Большого Взрыва) образовались электроны и позитроны. Действительно, их масса примерно в 300 раз меньше, чем у π -мезона, поэтому и пороговая температура примерно в 300 раз ниже:

$$T_n \approx \frac{m_e c^2}{k} = 6 \cdot 10^9 \text{ К}.$$

Взаимная аннигиляция электронов и позитронов, впрочем, высвобождала энергию, которая замедляла процесс охлаждения Вселенной. Тем не менее процесс охлаждения продолжался, и образовывались ядра легких элементов (водород, дейтерий, тритий, гелий).

Однако пройдет еще $7 \cdot 10^5$ лет, прежде чем Вселенная остынет до 3000 К, так что электроны и ядра смогут сформироваться в стабильные атомы. После этого по мере дальнейшего охлаждения начнут формироваться звезды и галактики.

С охлаждением расширяющейся Вселенной падала температура ее равновесного излучения, менялось его спектральное распределение. Это излучение, заполнявшее Вселенную с самого ее возникновения и "остывшее" до ее сегодняшней температуры (3 К), называется *реликтовым излучением*. Оно должно создавать шумовой фон, который можно зарегистрировать соответствующими приемниками. Такой фон был обнаружен в 1964 г. Пензиасом и Вильсоном (A.A.Penzias, R.W.Wilson). В результате многомесячных тщательных измерений на длине волны $\lambda = 7,35$ см они установили, что шумовая температура фона составляет около 3 К (между 2,7 и 3 К).

Позже многими исследователями были проведены измерения температуры космического шумового фона в различных диапазонах длин волн. В соответствии с законом смещения Вина, максимум Планковского распределения при $T = 3$ К находится около $\lambda_m = 0,1$ см. Поэтому чтобы получить всю кривую Планка, необходимо было провести соответствующие исследования в диапазоне длин волн от нескольких сотых до десятков сантиметров. Опыты на длинах волн короче 0,3 см особенно трудны, ибо атмосфера становится непрозрачной. Измерения в диапазоне между

$\lambda_m = 0,25$ см и $\tilde{\lambda}_m = 0,06$ см были проведены в США с помощью высотных атмосферных зондов в 1976 г.

Все проведенные опыты подтвердили предположение о планковском распределении реликтового излучения (рис. 1.19). Пензиасу и Вильсону в 1978 г. была присуждена Нобелевская премия по физике.

Здесь следует отметить одно любопытное обстоятельство. Экспериментальный факт, свидетельствующий в пользу существования реликтового излучения с шумовой температурой $T = 3$ К, был установлен почти за четверть века до открытия Пензиаса и Вильсона. Дело было так. Астрофизики Мак-Келлар и Адамс (A. Mc Kellar, W.S. Adams) в 1941 г. провели измерения в УФ-диапазоне спектров поглощения радикала CN в межзвездном газе в созвездии Змеенова. При этом они заметили такие особенности этих спектров, которые в то время, казалось, никак невозможно было объяснить.

Дело в том, что электронные спектры поглощения молекул в оптическом диапазоне имеют колебательно-вращательную структуру. Эта структура вызвана тем обстоятельством, что одновременно с электронными переходами, связанными с изменением главного квантового числа n , происходят колебательные и вращательные переходы в молекуле с изменением соответствующих квантовых чисел: колебательного (ν) и вращательного (J). В молекуле могут одновременно меняться как электронные состояния, так и колебательные и вращательные состояния. Другими словами, проис-

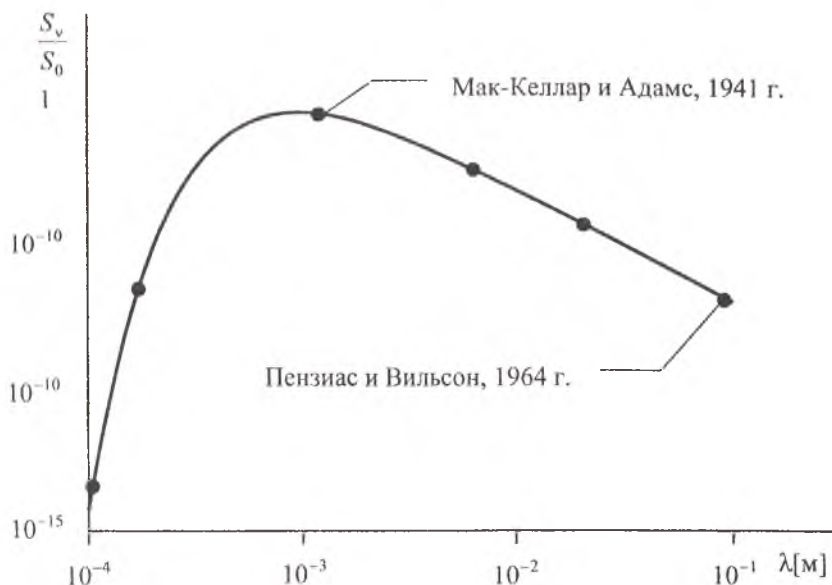


Рис. 1.19. Кривая Планка для космического реликтового излучения

ходят переходы как между электронными энергетическими уровнями, так и между колебательными и вращательными энергетическими уровнями молекулы. В этом случае электронный спектр поглощения в оптическом диапазоне промодулирован колебательными и вращательными частотами молекул (т.н. колебательно-вращательные полосы в электронных спектрах поглощения).

Мак-Келлар и Адамс наблюдали три линии поглощения в CN, связанные с колебательно-вращательной структурой электронного спектра радикала CN в УФ-диапазоне (табл.1.6). Необычным было то обстоятельство, что одна из этих линий могла появиться только при наличии вращательно-возбужденных молекул CN, причем частота такого вращательного перехода составляет примерно $\nu = 8 \text{ см}^{-1}$ (длина волны $\lambda_{\text{вп}} = 0,12 \text{ см}$) (соответствующие колебательно-вращательные переходы показаны на рис. 1.20, 1.21). Такое могло произойти только в том случае, если в межзвездной

Таблица 1.6.

Спектральные линии поглощения в межзвездном газе (свободный радикал CN), свидетельствующие о наличии в CN возбужденного вращательного уровня - результат воздействия реликтового излучения с температурой $T \approx 3 \text{ К}$ (наблюдения Мак-Келлара и Адамса в 1941 г.)

Вращательное состояние	Состояние	n	ν	J	ΔJ	$\nu[\text{см}^{-1}]$ $\lambda[\text{нм}]$	Условие существования линии
Основное $J=0$	Начальное	$n = m$	$\nu = 0$	$J = 0$	0	25809,06 см^{-1} 387,46 нм	Возможна при $T = 0$
	Конечное	$n = m + 1$	$\nu = 1$	$J = 0$			
	Начальное	$n = m$	$\nu = 0$	$J = 0$	+1	25813,126 см^{-1} 387,3998 нм	Возможна при $T = 0$
	Конечное	$n = m + 1$	$\nu = 1$	$J = 1$			
Возбужденное $J=1$	Начальное	$n = m$	$\nu = 0$	$J = 1$	0	25809,06 см^{-1} 387,46 нм	Возможна при $T = 0$
	Конечное	$n = m + 1$	$\nu = 1$	$J = 1$			
	Начальное	$n = m$	$\nu = 0$	$J = 1$	+1	25813,126 см^{-1} 387,3998 нм	Возможна при $T = 0$
	Конечное	$n = m + 1$	$\nu = 1$	$J = 2$			
	Начальное	$n = m$	$\nu = 0$	$J = 1$	-1	25801,371 см^{-1} 387,5763 нм	Возможна при $T \geq 3 \text{ К}$
	Конечное	$n = m + 1$	$\nu = 1$	$J = 0$			

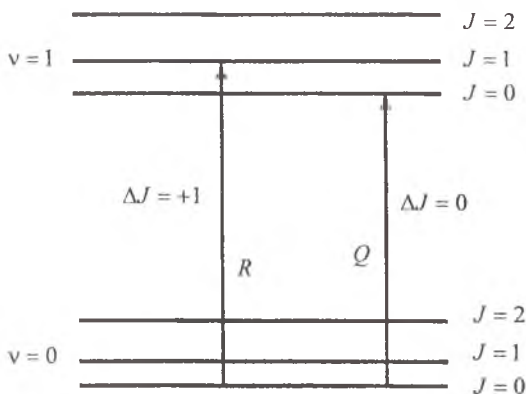


Рис. 1.20. Колебательно-вращательные переходы в молекуле, находящейся в основном вращательном состоянии ($J = 0$). Правила отбора ($\Delta J = 0, \pm 1$) по вращательному квантовому числу J в данном случае допускают лишь два колебательно-вращательных перехода: $\Delta J = 0$ (Q -ветвь) и $\Delta J = +1$ (R -ветвь). Вращательная структура электронных переходов может содержать поэтому только две линии, которые соответствуют правилам отбора $\Delta J = 0$ и $\Delta J = +1$

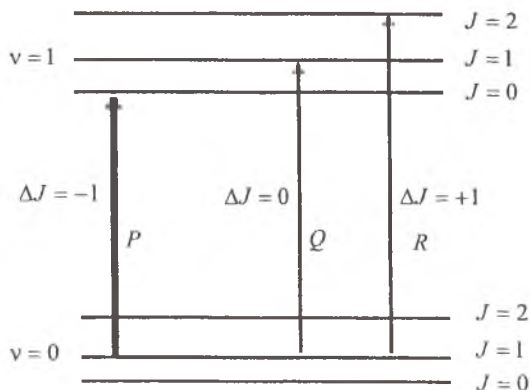


Рис. 1.21. Колебательно-вращательные переходы в молекуле, находящейся в первом возбужденном вращательном состоянии ($J = 1$). Возможны три перехода: $\Delta J = 0$ (Q -ветвь), $\Delta J = +1$ (R -ветвь) и $\Delta J = -1$ (P -ветвь). Вращательная структура электронных переходов содержит три линии. Одна из них, обусловленная переходом $\Delta J = -1$ (P -ветвь), возможна только при наличии вращательного возбуждения (первый возбужденный вращательный уровень $J = 1$). Этот возбужденный уровень появился в результате вращательного перехода: $J = 0 \rightarrow J = 1$, которому соответствует частота $\nu = 8 \text{ см}^{-1}$ (длина волны $\lambda = 0,12 \text{ см}$) реликтового излучения

среде существует излучение на соответствующей длине волны ($\lambda = 0,12$ см), которое возбуждает соответствующий вращательный уровень (рис. 1.21). Но именно такое (реликтовое) излучение и существует в современной Вселенной, причем, как видно из рис. 1.19, длина волны $\lambda = 0,12$ см соответствует максимуму распределения Планка.

Современная Вселенная прозрачна для реликтового излучения. Средняя плотность $d[\text{кг/м}^3]$ вещества во Вселенной составляет величину

$$d = 3 \cdot 10^{-28} \text{ кг/м}^3.$$

Масса протона M_p , то есть атома водорода M_H , есть

$$M_p = 1,6 \cdot 10^{-27} \text{ кг}.$$

Таким образом, средняя концентрация протонов N_e (и электронов) составляет

$$N_H = N_p = 0,18 \text{ м}^{-3},$$

То есть один протон (и электрон) приходится на 5 м^3 . Концентрация же реликтовых фотонов на много порядков больше. Действительно, в соответствии с законом Стефана-Больцмана, плотность потока $I_p[\text{Вт/м}^2]$ реликтового излучения с температурой T_p будет порядка

$$I_p \approx 4\sigma_{\text{СБ}} T_p^4.$$

Полагая длину волны λ соответствующей максимуму распределения $\lambda = \lambda_{\text{max}}^p = 10^{-3} \text{ м}$, температуру $T_p = 3 \text{ К}$, учитывая соотношение между длиной волны λ и частотой ν ($\nu = c/\lambda$), получим концентрацию $N_{\Phi}^p[\text{м}^{-3}]$ реликтовых фотонов:

$$N_{\Phi}^p = \frac{I_p}{ch\nu_{\text{max}}^p} = \frac{\lambda_{\text{max}}^p I_p}{c^2 h} = 10^7 \text{ м}^{-3}.$$

Таким образом, концентрация фотонов почти на 8 порядков выше концентрации атомов водорода.

1.7.2. Понижение температуры равновесного излучения в расширяющейся полости (модель остывания "горячей" Вселенной)

Рассмотрим замкнутую полость с зеркальной внутренней поверхностью, заполненную равновесным излучением с температурой T (рис.1.22). Предположим теперь, что полость начала расширяться со скоростью v . В этом случае линейные размеры полости $L[\text{м}]$ увеличиваются во времени от начального значения L_0 по следующему закону:

$$L(t) = L_0 + 2vt,$$

то есть коэффициент $M(t)$ увеличения линейных размеров есть

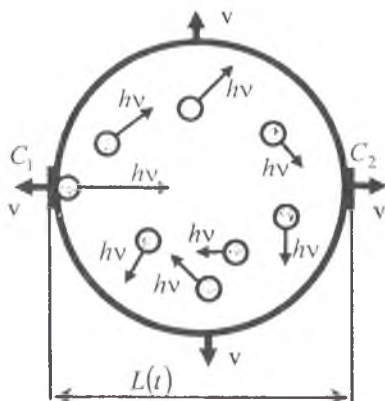


Рис. 1.22. Расширяющаяся полость с зеркальными стенками, заполненная фотонами (модель "горячей" Вселенной)

$$M(t) = \frac{L(t)}{L_0} = 1 + \frac{2vt}{L_0}.$$

Проследим за коэффициентом $M(t)$, а также за фотоном с начальной энергией $h\nu$, который движется со скоростью света с между противоположными участками поверхности - зеркальными "стенками" C_1 и C_2 , отражаясь поочередно от них. При этом каждая из стенок удаляется от другой со скоростью $v[m/c] \ll c$. Наблюдение будем вести с помощью некоей скоростной "видеокамеры", позволяющей фиксировать различные положения фотона в пространстве в виде "стоп-кадров" (рис. 1.23).

"Стоп-кадр" № 0 показывает исходную ситуацию: фотон с энергией $h\nu$ движется от стенки C_1 к стенке C_2 , в то время как стенки разбегаются со скоростью $v \ll c$ каждая. "Стоп-кадр" №1 зафиксировал момент, когда фотон догнал стенку C_2 и отразился от нее. Его энергия $h\nu_1$ теперь вследствие эффекта Допплера стала

$$h\nu_1 = \frac{h\nu}{1 + 2v/c}.$$

В этот момент времени расстояние L_1 между стенками C_1 и C_2 есть

$$L_1 = L_0 + 2 \frac{L_0}{c} v = L_0 \left(1 + \frac{2v}{c} \right). \quad (1.114)$$

Коэффициент M_1 увеличения линейных размеров полости есть, очевидно,

$$M_1 = \left(1 + \frac{2v}{c} \right)^1.$$

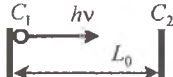
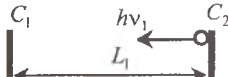
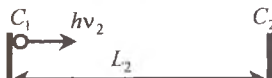
Кадр №	Стоп-кадр: положение фотона в различные моменты времени	Расстояние L_n $C_1 - C_2$	Коэффициент расширения M_n	Энергия фотона $h\nu$
0		L_0	$M = \left(1 + \frac{2v}{c}\right)^0 = 1$	$h\nu$
1		$L_1 = L_0 \left(1 + \frac{2v}{c}\right)$	$M_1 = \left(1 + \frac{2v}{c}\right)^1$	$\frac{h\nu}{M_1}$
2		$L_2 = L_0 \left(1 + \frac{2v}{c}\right)^2$	$M_2 = \left(1 + \frac{2v}{c}\right)^2$	$\frac{h\nu}{M_2}$
n		$L_n = L_0 \left(1 + \frac{2v}{c}\right)^n$	$M_n = \left(1 + \frac{2v}{c}\right)^n$	$\frac{h\nu}{M_n}$

Рис. 1.23. Изменение линейного размера L , коэффициента M линейного расширения и энергии фотона $h\nu$ в расширяющейся полости

Последующий стоп-кадр №2 фиксирует момент времени, когда фотон, совершив второй проход, догнал стенку C_1 и отразился от нее. Теперь его энергия $h\nu_2$ из-за эффекта Доплера будет:

$$h\nu_2 = \frac{h\nu_1}{1 + 2v/c} = \frac{h\nu}{\left(1 + 2v/c\right)^2}.$$

Расстояние L_2 между стенками C_1 и C_2 в этот момент есть

$$L_2 = L_1 \left(1 + \frac{2v}{c}\right) = L_0 \left(1 + \frac{2v}{c}\right)^2. \quad (1.115)$$

Коэффициент M_2 увеличения линейных размеров

$$M_2 = \left(1 + \frac{2v}{c}\right)^2.$$

Стоп-кадр после n -го прохода, когда фотон в n -й раз отразился от стенки, показывает следующее. Энергия фотона $h\nu_n$, как видно из предыдущих оценок, есть

$$h\nu_n = \frac{h\nu}{\left(1 + 2v/c\right)^n}.$$

Расстояние L_n между C_1 и C_2 в этот момент такое:

$$L_n = L_0 \left(1 + \frac{2v}{c}\right)^n. \quad (1.116)$$

Коэффициент M_n увеличения линейных размеров есть

$$M_n = \left(1 + \frac{2v}{c}\right)^n. \quad (1.117)$$

Как видно из (1.117), первоначальная энергия фотона $h\nu$ уменьшилась в M_n раз.

Из (1.116), в свою очередь, следует, что во столько же раз увеличились и линейные размеры полости. То есть энергия фотона после любого числа проходов уменьшается во столько же раз, во сколько увеличивается линейный размер L зеркальной полости.

Величину M_n можно представить в более наглядном виде, а именно как линейную функцию $M(t)$ времени.

$$M_n = M(t) = 1 + \frac{2v}{c}t. \quad (1.118)$$

Здесь

$$t = \frac{S(n)}{c} \quad (1.119)$$

представляет собой текущее время, начиная с исходной ситуации, показанной на начальном (нулевом) “стоп-кадре”, а $S(n)$ - весь путь, который проделал фотон за n отражений.

Величина $S(n)$ - это сумма всех отрезков $L_0, L_1, \dots, L_n$, пройденных фотоном и представленных формулами (1.114) - (1.116). Поэтому $S(n)$ представляет собой геометрическую прогрессию:

$$S(n) = L_0 \left[1 + \left(1 + \frac{2v}{c}\right) + \left(1 + \frac{2v}{c}\right)^2 + \dots + \left(1 + \frac{2v}{c}\right)^n \right].$$

Для вычисления $S(n)$ используем соответствующую формулу геометрической прогрессии:

$$S(n) = L_0 \frac{\left(1 + \frac{2v}{c}\right)^{n+1} - 1}{2v/c}.$$

Для $\left(1 + \frac{2v}{c}\right)^n$ имеем следующее выражение:

$$\left(1 + \frac{2v}{c}\right)^n = 1 + 2v \frac{S(n)}{c} \frac{1}{L_0}.$$

Отсюда с учетом (1.119) получаем формулу (1.118).

Таким образом, энергия фотона $h\nu(t)$ уменьшается со временем во столько же раз, во сколько раз увеличиваются линейные размеры $L(t)$ полости

$$h\nu(t) = \frac{h\nu}{M(t)},$$

$$L(t) = L_0 M(t).$$

Полученные формулы позволяют найти зависимость температуры от коэффициента увеличения M линейных размеров расширяющейся полости. В самом деле, объемная плотность энергии $w_V [\text{Дж}/\text{м}^3] = w_V(\nu_i)$ для любой частоты ν_i есть произведение энергии фотона $h\nu_i$ на концентрацию $N_{\Phi i} [\text{м}^{-3}]$ таких фотонов:

$$w_V(\nu_i) = N_{\Phi i} h\nu_i.$$

Так как число фотонов в расширяющейся полости в среднем постоянно, то, следовательно, зависимость объемной плотности энергии от M имеет вид:

$$w_V(\nu_i, M) = \frac{N_{\Phi i}}{M^3} \frac{h\nu}{M} = \frac{w_V(\nu_i, M=1)}{M^4}.$$

Так как $dw_V = \rho_{V,\nu} d\nu$, то

$$dw_V(M) = \frac{\rho_{V,\nu}}{M^4} d\nu.$$

Полная объемная плотность $w_V(M)$ представляет собой интеграл по частотам от $\rho_{V,\nu}$.

Такой интеграл - это закон Стефана-Больцмана в следующей форме:

$$w_V = \frac{1}{M^4} \frac{4}{c} \sigma_{\text{СБ}} T^4.$$

Отсюда получаем:

$$w_V(M) = \frac{4}{c} \sigma_{\text{СБ}} \left(\frac{T}{M} \right)^4.$$

Таким образом, температура в расширяющейся полости, заполненной равновесным планковским излучением, обратно пропорциональна M , то есть уменьшается во столько раз, во сколько раз увеличиваются линейные размеры полости.

Задачи

1. Архимед, согласно преданию, сжег военные корабли римлян, когда они подошли к Сиракузам, чтобы захватить город. Для этого Архимед поставил на крутом берегу людей с зеркалами и велел наводить отраженный солнечный свет на корабль. Возможно ли такое на расстоянии $r = 100 \text{ м}$? Сколько потребуется людей (M), если у каждого из них: а) Плоское зеркало диаметром $D = 1 \text{ м}$? б) Сферическое зеркало того же

диаметра с фокусным расстоянием $F = r$? Солнечная постоянная $I_c = 1,3 \text{ кВт/м}^2$. Расходимость солнечного излучения $\theta = 10^{-2}$ рад. Коэффициент отражения R_s солнечного света от зеркал считать $R_s = 1$. Корабли деревянные. Коэффициент отражения от кораблей $R = 0$. Излучательную способность дерева принять $\varepsilon = 1$. Температура воспламенения дерева $T_d = 800 \text{ К}$. Теплопроводностью дерева пренебречь. Постоянная Стефана-Больцмана $\sigma_{\text{СБ}} = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт/м}^2 \cdot \text{К}$.

Ответ: а) более 70 человек; б) более 18 человек.

2. До какой максимальной температуры $T_{\text{max}} [\text{К}]$ может нагреть CO_2 -лазер мощностью $P_l = 100 \text{ Вт}$ изолированную стальную металлическую мишень, имеющую форму тонкого диска площадью $S = 10 \text{ см}^2$ (радиус $r = 1,78 \text{ см}$) и толщиной $H = 1 \text{ мм}$. Сколько времени t_n потребуется для достижения температуры, равной $0,95T_{\text{max}}$, $0,99T_{\text{max}}$? Начальная температура мишени - комнатная ($T_0 = 300 \text{ К}$). Коэффициент отражения $R = 0,9$, излучающая способность $\varepsilon = 0,1$, плотность стали $\rho = 7,8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, теплоемкость $C = 0,46 \cdot 10^3 \text{ Дж/кг} \cdot \text{К}$.

Ответ: $T_{\text{max}} = 944 \text{ К}$ (671°C), $t_n(0,95T_{\text{max}}) = t_n(897 \text{ К}) = 417 \text{ с}$,
 $t_n(0,99T_{\text{max}}) = t_n(935 \text{ К}) = 571 \text{ с}$.

3. Какая мощность $P [\text{Вт}]$ должна быть у непрерывного лазера с расходимостью пучка $\theta = 10^{-3}$ рад, чтобы, используя линзу с фокусным расстоянием $F = 1 \text{ м}$, можно было бы выжигать узоры на деревянной доске? Излучательную способность дерева принять $\varepsilon = 1$. Коэффициент отражения считать $R = 0$, температура воспламенения дерева $T = 800 \text{ К}$. Теплопроводностью дерева пренебречь.

Ответ: $P > 1,8 \cdot 10^{-2} \text{ Вт}$.

4. Непрерывный лазер на Земле с расходимостью пучка $\theta = 10^{-5}$ рад облучает металлический искусственный спутник Земли (ИСЗ) и должен повысить его температуру на величину $\Delta T = 50 \text{ К}$ от начальной температуры $T_0 = 250 \text{ К}$ до конечной температуры $T_k = 300 \text{ К}$. Характеристики ИСЗ: высота над поверхностью Земли $H = 500 \text{ км}$, период обращения $T_{\text{ИСЗ}} = 94,5 \text{ мин}$, масса $M = 0,25 \text{ т}$, теплоемкость $C = 400 \text{ Дж/кг} \cdot \text{К}$, коэффициент отражения поверхности $R = 0,6$, ее излучательная способность $\varepsilon = 0,4$, форма ИСЗ - шар диаметром $D = 2 \text{ м}$ (облучаемая по-

верхность $S = \pi D^2/4$, полная поверхность $S_0 = \pi D^2$). Радиус Земли $R_z = 6371$ км. Постоянная Стефана-Больцмана $\sigma_{\text{СБ}} = 5,67 \cdot 10^{-8}$ Вт/м²К.

- а). Найти локальную нагревающую мощность лазерного излучения P_{L_n} [Вт], которую необходимо подводить к ИСЗ, чтобы нагреть его в течение времени $\Delta t_n(T_k) = 650$ сек, заданного временем прохождения ИСЗ видимого участка траектории. Временем распространения температуры по ИСЗ пренебречь.
- б). Оценить локальную нагревающую мощность лазерного излучения $P_{L_n}(T_{\text{max}} = 300 \text{ К})$ для вышеуказанного нагрева ИСЗ, если время нагрева - неограниченное ($T_k = T_{\text{max}} = 300 \text{ К}$). Каково время $\Delta t_n(0,99T_{\text{max}})$ нагрева ИСЗ мощностью $P_{L_n}(T_{\text{max}})$ до температуры $0,99T_{\text{max}} = 495 \text{ К}$?
- в). Во сколько раз каждое из времен: $\Delta t_n(T_k) = 650 \text{ с}$ п. а и $\Delta t_n(0,99T_{\text{max}})$ п. б больше того, которое потребовалось бы, если не учитывать потери на переизлучение по закону Стефана-Больцмана?
- г). Какова должна быть минимальная P_L^{min} и максимальная P_L^{max} мощности наземного лазера, чтобы обеспечить на ИСЗ локальную нагревающую мощность P_{L_n} ?

Ответ: а) $P_{L_n} = 1,6 \cdot 10^4$ Вт;

$$\text{б) } P_{L_n}(T_{\text{max}}) = 2,2 \cdot 10^3 \text{ Вт}, \Delta t_n(0,99T_{\text{max}}) = \tau_m [f(0,99) - f(0,67)] = 1,27 \cdot 10^4 \text{ с};$$

в) в 1,1 и 3,4 раза соответственно;

$$\text{г) } P_L^{\text{min}} = 3,2 \cdot 10^5 \text{ Вт}, P_L^{\text{max}} = 8,5 \cdot 10^6 \text{ Вт}.$$

5. Непрерывный лазер облучает металлический искусственный спутник Земли (ИСЗ) и должен повысить его температуру на величину $\Delta T = 200 \text{ К}$ от начальной ($T_0 = 300 \text{ К}$) до конечной температуры ($T_k = 500 \text{ К}$). Характеристики ИСЗ: масса $M = 0,5$ т, теплоемкость $C = 400$ Дж/кг·К, коэффициент отражения поверхности $R = 0,6$, ее излучательная способность $\varepsilon = 0,4$, форма ИСЗ - шар диаметром $D = 2$ м (полная поверхность $S_0 = \pi D^2$). Постоянная Стефана-Больцмана $\sigma_{\text{СБ}} = 5,67 \cdot 10^{-8}$ Вт/м²·К.
- а). Какова должна быть мощность лазера P_L для вышеуказанного нагрева ИСЗ, если время нагрева неограниченное?
- б). Каково было бы время Δt_n нагрева ИСЗ таким лазером до температуры $0,99T_k = 495 \text{ К}$?

в). Во сколько раз это время больше того, которое получается, если не учитывать потери на переизлучение по закону Стефана-Больцмана? Временем распространения температуры по ИСЗ пренебречь.

Ответ: а) $P_L = 5,6 \cdot 10^3$ Вт;

$$б) \Delta t_n = \tau_m [f(0,99) - f(0,67)] = 1,1 \tau_m = 6,2 \cdot 10^3 \text{ сек};$$

в) в 2,8 раза.

6. Найти ток $i[A]$, при котором расплавится ("перегорит") самодельный предохранитель - "жучок", изготовленный из медной проволоки диаметром $\varnothing = 0,2$ мм и длиной $L = 40$ мм, который вставлен в массивный держатель, обеспечивающий фиксированную (комнатную) температуру на концах предохранителя: $T(0) = T(L) = 300 \text{ К} = T_k$. Удельное сопротивление меди $\rho = 1,72 \cdot 10^{-8} \text{ Ом} \cdot \text{м}$, коэффициент теплопроводности $\kappa = 384 \text{ Вт/К} \cdot \text{м}$, температура плавления меди $T_{пл} = 1356 \text{ К}$, излучательная способность поверхности $\varepsilon = 0,5$.

Указание. Для оценки потерь тепла из-за теплопроводности пользоваться стационарным уравнением теплопроводности $q[\text{Вт/м}^2] = \kappa \frac{dT}{dx}$. Рас-

пределение температуры считать "треугольным" с максимальной температурой посередине $T_{пл} = 1356 \text{ К}$. Градиент температуры в этом слу-

чае: $\frac{dT}{dx} = (T_{пл} - T_k) \frac{L}{2}$. При вычислении тепловых потерь на излучение

по закону Стефана-Больцмана учесть распределение $T(x)$ температуры по длине предохранителя.

Ответ: $i = 16,4 \text{ А}$.

7. Одномодовый лазерный усилитель на длине волны $\lambda = 1$ мкм с полосой частот $\Delta\nu = 10^8$ Гц принимает световой импульсный сигнал длительностью $\tau = 10^{-8}$ сек в виде плоской волны. Приём ведется на фоне солнечного диска. На выходе усилителя расположен пространственный селектор мод, ограничивающий выходной сигнал в пределах угла дифракции на апертуре усилителя, а также фотоэлектрический приемник с температурой $T = 300 \text{ К}$, квантовой эффективностью $\eta = 0,1$ и нагрузочным сопротивлением $R = 10^2 \text{ Ом}$. Температура поверхности Солнца $T_c = 6000 \text{ К}$, солнечная постоянная $I_c = 1,3 \text{ кВт/м}^2$, расходимость солнечного излучения $\theta_c = 0,9 \cdot 10^{-2} \text{ рад}$.

а). Найти среднее число N_ϕ^c фотонов солнечного фона.

- б). Как изменится отношение сигнал/шум, если перед усилителем поставить телескоп с M -кратным увеличением и с диаметром окуляра равным диаметру усилителя?
- в). Для усилителя, работающего на одной пространственной моде, найти энергетический коэффициент усиления K , который обеспечит десятикратное превышение сигнала на нагрузочном сопротивлении приемника над тепловыми флуктуациями напряжения на том же нагрузочном сопротивлении при четырехкратном превышении входного сигнала над шумом.

Указание.

1. Для оценки спектральной селективности усилителя воспользоваться формулой Планка в форме распределения по частотам спектральной испускательной способности черного тела при температуре $T = 6000$ К. Пространственную селективность оценить, считая, что усиливается только сигнал, сосредоточенный в дифракционном угле (дифракция на круглой входной апертуре усилителя). Расчетная формула: $N_{\phi}^c = \frac{0,5 I_c \lambda^4 \Delta \nu \tau}{\theta_c^2 \hbar c^2}$.

2. Для оценки флуктуаций напряжения U_{ϕ} [В] на нагрузочном сопротивлении фотоприемника воспользоваться формулой Найквиста $U_{\phi} = \sqrt{kT \Delta \nu R}$. Световой и токовый импульсы считать прямоугольными.

Ответ: а) $N_{\phi}^c = 0,1$ фотона; б) отношение сигнал/шум увеличится в M^2 раз; в) $K > 10^4$.

ГЛАВА 2. ПЛАЗМА. ЕЕ ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА И ХАРАКТЕРИСТИКИ. ВИДЫ ПЛАЗМЫ: КЛАССИЧЕСКАЯ ИДЕАЛЬНАЯ, КЛАССИЧЕСКАЯ НЕИДЕАЛЬНАЯ, КВАНТОВАЯ

2.1. Определение плазмы. Состав: электроны, ионы, нейтральные частицы (нейтралы). Степень ионизации. Коллективные свойства. Квазинейтральность. Способы получения плазмы

Плазма - это обладающая *коллективными* свойствами материальная среда, состоящая из электронов, ионов и нейтральных частиц (атомов или молекул). Электроны и ионы взаимодействуют друг с другом посредством электростатических сил на расстояниях, на несколько порядков превышающих атомные. Коллективность свойств означает, что характеристики

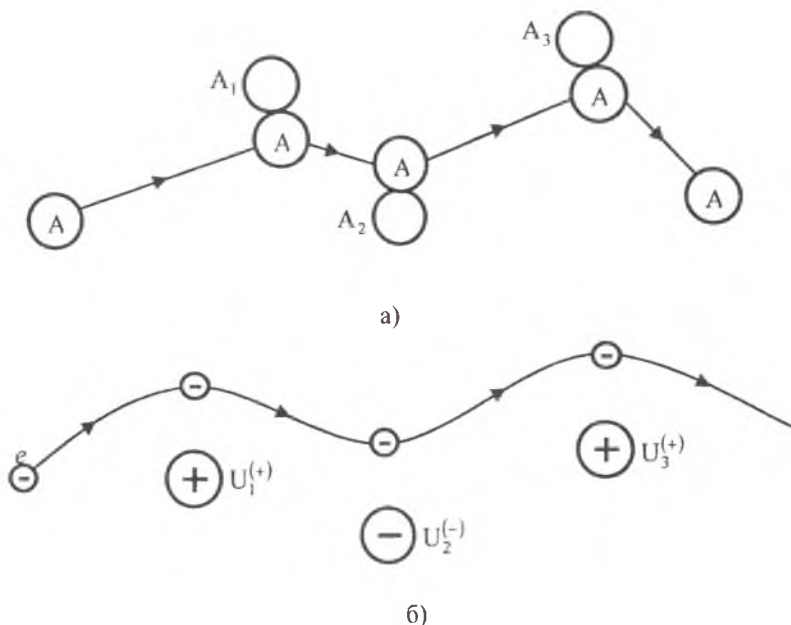


Рис. 2.1. Взаимодействие частиц в плазме и нейтральном газе:

- а) траектория атома (A) в нейтральном газе – ломаная линия;
- б) траектория электрона (e) в полностью ионизованной плазме – плавная кривая

отдельного электрона или иона зависят от совокупных (коллективных) свойств плазмы в целом. Коллективные свойства плазмы проявляются, например, в том, что электрическое поле одной частицы влияет на многие другие. И наоборот, одна заряженная частица одновременно подвергается воздействию со стороны многих других заряженных частиц. В обычном (нейтральном) газе такого нет: влияние одной частицы на другую - только локальное, например, при столкновениях (рис. 2.1).

Таким образом, плазмой называется удовлетворяющий определенным критериям коллективности ионизованный, но нейтральный в целом (квазинейтральный) газ, в котором все атомы (или значительная часть из них) потеряли по крайней мере по одному или по несколько электронов, превратившись, таким образом, в положительные ионы.

Итак, в общем случае плазма содержит три компоненты: электроны, положительные ионы, нейтральные атомы. Коэффициент α , равный отношению концентрации электронов $N_e[\text{м}^{-3}]$ (или ионов $N_i[\text{м}^{-3}]$) к концентрации $N_n[\text{м}^{-3}]$ нейтральных частиц ("нейтралов"), называется степенью ионизации: $\alpha = N_e / N_n$.

Существуют различные способы приготовления плазмы, например:

- *ионизация вещества ионизирующим излучением*. Так, ионосфера есть результат ионизации верхних слоев атмосферы солнечной радиацией. Электронно-дырочная плазма в полупроводниках может быть создана оптическим или электронным возбуждением;
- *термическая ионизация* - нагрев. Нейтральные атомы сталкиваются между собой. В результате таких столкновений возможна ионизация, вероятность которой тем выше, чем больше кинетическая энергия атомов, т.е. чем выше температура газа (формула Саха);
- *ионизация всесторонним ударным сжатием* - имплозия. Такое сжатие может сблизить атомы до расстояний, которые меньше размеров нейтрального атома, так что электронные оболочки "перемешиваются". В силу соотношения неопределенности координата-импульс, импульс электрона увеличивается настолько, что кинетическая энергия становится больше энергии ионизации. Образуется *квантовая*, или *вырожденная* плазма, а само вещество приобретает свойства металла (т.н. "металлический" водород);
- *лавиная ионизация*, то есть пробой вещества электрическим полем. Такой пробой может осуществляться как постоянным, так и переменным электрическим полем, например лазерным. Если поле достаточно сильное, то имеющиеся в наличии свободные электроны, ускоряясь, приобретают энергию, достаточную для ударной ионизации нейтральных атомов. Появившиеся при этом новые свободные электроны также увеличивают в поле свою энергию и ионизируют новые атомы. В результате об-

разуется электронная лавина. Отсюда и название - лавинная ионизация. Примерами могут служить газовый разряд при постоянном токе или высокочастотный СВЧ разряд, оптический пробой (лазерная искра);

- *туннельная ионизация* атомов или молекул постоянным или переменным (оптическим) полем;
- *многофотонная ионизация*.

2.2. Плазменные (лэнгмюровские) колебания

Электроны плазмы могут колебаться вокруг относительно тяжелых ионов, и в результате возникают так называемые *плазменные колебания*, которые характеризуются *плазменной частотой*. Это типичное явление, отражающее коллективные свойства плазмы.

Плазменные колебания оказывают решающее влияние на прохождение электромагнитных волн сквозь плазму. Она прозрачна для электромагнитного излучения, если его частота выше плазменной частоты. Плазма поглощает электромагнитную волну, отражает ее от своей границы, если частота электромагнитной волны ниже плазменной.

На таком отражении, например, основано распространение вокруг Земли коротких волн с длинами $10 \div 100$ м, так как их частота ниже частот плазменных колебаний различных слоев ионосферы. С другой стороны, частоты УКВ и СВЧ-диапазонов превышают плазменные частоты ионосферных слоев, ионосфера для них прозрачна.

Чтобы вычислить частоту плазменных колебаний, рассмотрим плазму, содержащую электроны с плотностью $N_e[\text{м}^{-3}]$ и ионы с плотностью $N_i[\text{м}^{-3}]$. Во всем объеме плазмы выполняется условие квазинейтральности:

$$N_e = N_i = N.$$

Однако в некоторых местах квазинейтральность может нарушаться. Рассмотрим такой участок длиной ξ и площадью S , из которого "убежали" электроны (рис.2.2). Электрическое поле, созданное ионами и действующее на электроны, находим из третьего уравнения Максвелла:

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = \frac{e^+ N}{\epsilon_0}. \quad (2.1)$$

Применяя к (2.1) теорему Гаусса, получим

$$\int \text{div} \vec{E} dV = SE = \frac{eNS\xi}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0}. \quad (2.2)$$

Из (2.2) находим возвращающую силу F , действующую на каждый отлетевший электрон:

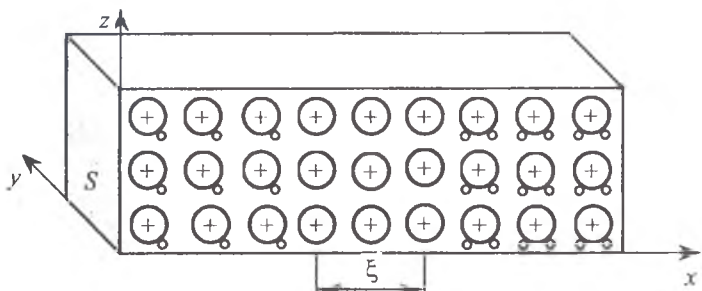


Рис. 2.2. Нарушение квазинейтральности в плазме. Электроны “убежали” из области длиной ξ . Образовался положительный объемный заряд $Q = eNS\xi$.

$$F = eE = -\frac{e^2 N}{\epsilon_0} \xi.$$

Направление возвращающей “упругой” силы F противоположно направлению смещения ξ , поэтому и появляется знак “-”.

Эта сила, согласно второму закону Ньютона, есть произведение массы электрона m_e на ускорение $\frac{d^2\xi}{dt^2}$:

$$m_e \frac{d^2\xi}{dt^2} = -\frac{e^2 N}{\epsilon_0} \xi. \quad (2.3)$$

Уравнение это осцилляторное. Оно описывает гармонические колебания (без затухания) с угловой частотой ω_p [рад/с], которая называется *плазменной частотой*. Из (2.3) следует, что

$$\omega_p^2 = \frac{e^2 N_e}{m_e \epsilon_0}. \quad (2.4)$$

Для практических оценок удобнее вместо (2.4) пользоваться соотношением, связывающим критическую концентрацию электронов $N_e [\text{м}^{-3}]$ и критическую длину электромагнитной волны $\lambda_c = 2\pi c / \omega_p$, а именно:

$$\lambda_c^2 N_e r_e = \pi. \quad (2.5)$$

Здесь $r_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} = 2,84 \cdot 10^{-15} \text{ м}$ - классический радиус электрона.

Формула (2.5) получается из (2.4) путем следующих тождественных преобразований. Введем понятие *критической длины электромагнитной волны*

$$\lambda_c = \frac{c}{\nu_p} = \frac{2\pi c}{\omega_p}.$$

где $c=3 \cdot 10^8$ м/с- скорость света. Тогда вместо (2.4) получим выражение для критической длины волны как функции заданной концентрации N_e электронов:

$$\frac{\pi v_p^2}{c^2} = \frac{\pi}{\lambda_c^2} = \frac{e^2 N_e}{4\pi \epsilon_0 m c^2} = r_e N_e.$$

Из этого соотношения следует формула (2.5). Если же задана длина волны λ , то соответствующую ей критическую концентрацию N_e находим из (2.5). Иногда удобно пользоваться также следующей расчетной формулой, которая связывает циклическую плазменную частоту ν_p [с⁻¹] с концентрацией электронов N_e [м⁻³]:

$$\nu_p [\text{Гц}] = 9\sqrt{N_e}. \quad (2.6)$$

Пользуясь формулой (2.5), не следует путать критическую длину электромагнитной волны $\lambda_c = c/\nu_p$ с длиной волны λ_p плазменных колебаний:

$$\lambda_p = \frac{v_p}{\nu_p},$$

где ν_p [м/с] - звуковая скорость распространения плазменных волн, причем $\nu_p \ll c$.

2.3. Дебаевский радиус

Дебаевский радиус r_D [м] - это такое максимальное расстояние, в пределах которого может нарушаться условие квазинейтральности (рис. 2.2). Дебаевский радиус тем больше, чем выше кинетическая энергия заряженных частиц (то есть чем выше температура плазмы), и тем меньше, чем больше их плотность.

Действительно, электроны, удаляясь от ионов, испытывают тормозящее действие электрического поля, которое тем больше, чем выше концентрация ионов. Действуя так же, как и при расчете плазменной частоты, применим теорему Гаусса к объему $V = Sr$ "обнажившихся" ионов. При этом будем полагать, что площадь этого объема в плоскости XY есть S . В этом случае имеем:

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = \frac{e^+ N}{\epsilon_0}. \quad (2.7)$$

Проинтегрируем по объему обе части (2.7):

$$\int_V \text{div} \vec{E} dv = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V e^+ N dv.$$

Применяя теорему Гаусса, получим:

$$SE = \frac{1}{\epsilon_0} e^+ NSr_D,$$

$$E = \frac{1}{\epsilon_0} e^+ N_e Sr_D.$$

Работа против сил электрического поля eEr_D равна кинетической энергии $\frac{mv_x^2}{2} = \frac{1}{2}kT$ убегающей частицы. Таким образом, используя поле в виде $E = \frac{N_e r}{\epsilon_0}$, получаем соотношение, из которого можно оценить дебаевский радиус

$$eEr_D = \frac{e^2 N_e r_D^2}{\epsilon_0} = \frac{1}{2}kT. \quad (2.8)$$

Окончательно для дебаевского радиуса получаем:

$$r_D = \left(\frac{\epsilon_0 kT}{2 N_e e^2} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\epsilon_0 k}{2 e^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{T}{N_e} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.9)$$

Подставляя значения $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Кл/В·м, $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж·К, $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл, получаем расчетную формулу

$$r_D = 48,8 \left(\frac{T[\text{К}]}{N_e [\text{м}^{-3}]} \right)^{1/2}.$$

Для оценки радиуса Дебая часто пользуются формулой (см. [6] с.18-22)

$$r_D = 69 \left(\frac{T[\text{К}]}{N_e [\text{м}^{-3}]} \right)^{1/2}. \quad (2.10)$$

Эта формула получается, если в предыдущую формулу для r_D справа поставить kT вместо $kT/2$.

2.4. Критерий существования плазмы (условие коллективности)

Чтобы ионизованный газ, в котором концентрация нейтральных частиц (нейтралов) $N_n [\text{м}^{-3}]$ больше концентрации $N_e [\text{м}^{-3}]$ электронов и ионов, обладал свойствами плазмы, нужно, чтобы плазменная частота ω_p была больше частоты столкновений $\nu_{en} [\text{с}^{-1}] = 1/\tau_{en}$ электронов с нейтрала-

ми: $\omega_p > \nu_{en} = 1/\tau_{en}$. Таким образом, критерий существования плазмы (условие коллективности) есть выполнение неравенства

$$\omega_p \tau_{en} > 1, \quad (2.11)$$

где $\tau_{en}[\text{с}]$ - время между столкновениями электронов с нейтрами. Чтобы было удобней делать численные оценки, неравенство (2.11) можно выразить через степень ионизации

$$\alpha = \frac{N_e}{N_n} \quad (2.12)$$

и температуру электронов $T_e[\text{К}]$. Для этого воспользуемся одним из основных соотношений кинетической теории газов:

$$\sigma_{\text{гк}} N_n \nu_e \tau_{en} = 1, \quad (2.13)$$

где $\sigma_{\text{гк}}[\text{м}^2]$ - газокинетическое сечение столкновений, а $\nu_e[\text{м/с}]$ - тепловая скорость электронов - самых быстрых частиц в плазме

$$\nu_e = \sqrt{\frac{3kT}{m}}. \quad (2.14)$$

Соотношение (2.12) следует из хорошо известного в молекулярной физике соотношения

$$\sigma_{\text{гк}} NL = 1,$$

где $L = \nu \tau_{\text{ср}}$ - длина свободного пробега. Используя соотношения (2.13) и (2.14), представим τ_{en} так:

$$\tau_{en} = \frac{1}{\sigma_{\text{гк}}} \frac{1}{N_n} \sqrt{\frac{m}{3kT}}.$$

Воспользуемся соотношением (2.4) и запишем ω_p в следующем виде:

$$\omega_p = \sqrt{\frac{e^2 N_e}{m_e \epsilon_0}}. \quad (2.15)$$

Критерий существования плазмы, то есть неравенство (2.11), будет выглядеть следующим образом:

$$\omega_p \tau_{en} > \frac{1}{\sigma_{\text{гк}}} \frac{1}{N_n} \sqrt{\frac{1}{3kT}} \sqrt{\frac{e^2 N_e}{\epsilon_0}}.$$

После перегруппировки членов неравенства получаем

$$\omega_p \tau_{en} > \frac{1}{\sigma_{\text{гк}}} \sqrt{\frac{e^2}{3k\epsilon_0}} \sqrt{\frac{\alpha}{TN_n}},$$

где $\alpha = N_e/N_n$ - степень ионизации, то есть отношение концентрации электронов $N_e[\text{м}^{-3}]$ к концентрации $N_n[\text{м}^{-3}]$ нейтралов. Подставив в это неравенство численные значения входящих в него величин $\sigma_{\text{гк}} = 10^{-19} \text{ м}^2$ - типичную величину газокинетического сечения столкновений,

$r_e = 2,84 \cdot 10^{-15}$ м, а также $m = 0,9 \cdot 10^{-30}$ кг, $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К и $c = 3 \cdot 10^8$ м/с, $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Кл/В·м, получим условие существования плазмы в следующем виде:

$$\omega_p \tau_{en} = 8,3 \cdot 10^{16} [\text{K}^{1/2} \text{м}^{-3/2}] \left(\frac{\alpha}{N_e T} \right)^{1/2} > 1 \quad (2.16)$$

или в виде неравенства для степени ионизации $\alpha = N_e / N_n$:

$$\alpha > 1,45 \cdot 10^{-34} [\text{м}^3 \text{К}^{-1}] N_n T_e.$$

Рассмотрим конкретный пример: лазер на смеси He-Ne с длинами волн $\lambda = 0,6328$ мкм и $1,15$ мкм. Температура электронов $T_e = 3 \cdot 10^4$ К, их концентрация $N_e = 3 \cdot 10^{17} \text{м}^{-3}$, концентрация нейтралов $N_n = 2 \cdot 10^{22} \text{м}^{-3}$, то есть $\alpha = N_e / N_n = 1,5 \cdot 10^{-5}$. Неравенство (2.16) выполняется:

$$\omega_p \tau_{en} = 8,3 \cdot 10^{16} \left(\frac{1,5 \cdot 10^{-5}}{2 \cdot 10^{22} \cdot 3 \cdot 10^4} \right)^{1/2} = 13 \gg 1.$$

2.5. Критерий идеальности плазмы

Плазму можно считать идеальным газом, если потенциальная энергия W_n взаимодействия каждой заряженной частицы с соседними частицами много меньше кинетической энергии W_k (ведь в идеальном газе вся его внутренняя энергия) - это кинетическая энергия его частиц). Расстояние r между частицами в газе с концентрацией N в среднем есть

$$r[\text{м}] = N^{-1/3} [\text{м}^{-3}].$$

Поэтому кулоновская потенциальная энергия W_n заряженной частицы (электрона) имеет вид:

$$W_n = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} N^{1/3}. \quad (2.17)$$

Кинетическая же энергия W_k частицы в невыраженной плазме, которую мы рассматриваем, есть

$$W_k = \frac{3}{2} kT.$$

Таким образом, критерий идеальности $W_n \ll W_k$ выглядит так:

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} N^{1/3} \ll \frac{3}{2} kT. \quad (2.18)$$

Граница между идеальной и неидеальной классической плазмой определяется равенством

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} N_e^{\frac{1}{3}} = \frac{3}{2} kT. \quad (2.19)$$

Эта граница на плоскости $\lg T_e - \lg N_e$ (см. рис 2.3) представляет собой прямую:

$$\lg T_e = \frac{1}{3} \lg N_e - 4,95.$$

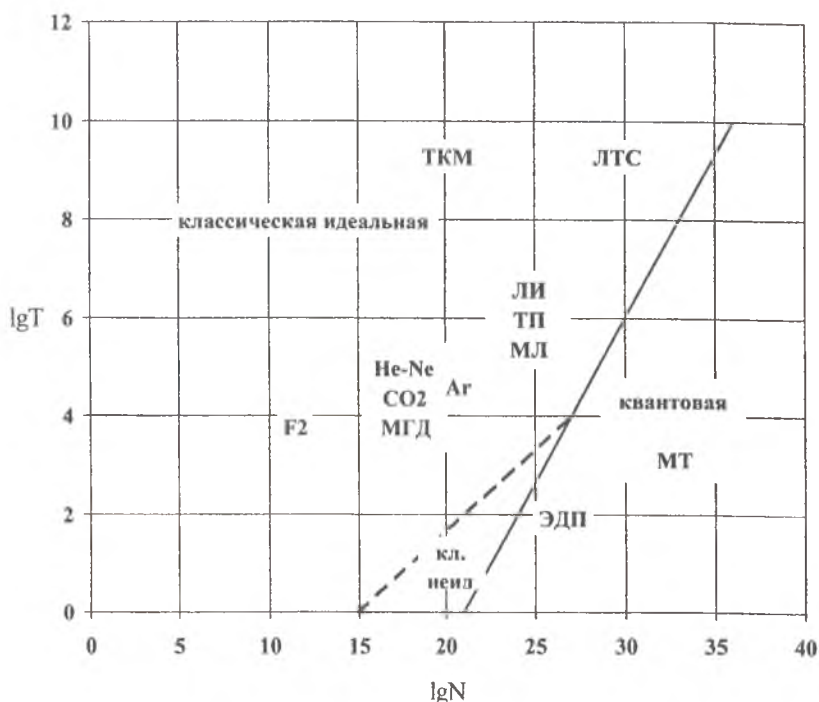


Рис. 2.3. Различные виды плазмы на диаграмме $\lg T_e - \lg N_e$.

$N_e[\text{м}^{-3}]$ - концентрация электронов, $T_e[\text{K}]$ - электронная температура, F2 - ионосфера (слой F_2 на высоте 250км), He-Ne - гелий-неоновый лазер, Ag - аргоновый лазер, CO2 - CO₂-лазер, МГД - плазма магнито-гидродинамических систем, ЛИ - лазерная искра в воздухе, ТП - технологическая лазерная плазма, МЛ - молния, ТКМ - токамаки, ЛТС - лазерный термоядерный синтез, ЭДП - вырожденная электронно-дырочная плазма в полупроводниковых лазерах, МТ - электроны в металлах

Неравенство (2.18) можно преобразовать следующим образом. Воспользуемся выражением (2.8), связывающим kT с радиусом Дебая:

$$\frac{e^2 N_e r_D^2}{\epsilon_0} = kT.$$

Подставим это значение kT в неравенство (2.18). В результате получим:

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} N^{1/3} < \frac{3 e^2 N_e r_D^2}{2 \epsilon_0}$$

или

$$r_D^2 N_e^{2/3} > \frac{1}{6} \pi$$

и окончательно

$$\frac{4\pi}{3} N_e r^3 >> 0,2. \quad (2.20)$$

Это неравенство означает, что в идеальной плазме число частиц в сфере с радиусом порядка дебаевского должно быть достаточно большим.

2.6. Зависимость степени ионизации газа от температуры, давления и энергии ионизации атомов (формула Саха)

Как уже отмечалось в п.2.1, ионизация может произойти в результате столкновений нейтральных атомов. Вероятность такой ионизации тем выше, чем больше энергия сталкивающихся атомов, а эта энергия растет с температурой.

Формула Саха связывает степень ионизации $\alpha = N_e / N_n$ (то есть отношение концентрации электронов N_e к концентрации нейтральных атомов N_n) с температурой, концентрацией нейтралов N_n и энергией ионизации атомов W_n [Дж]:

$$\alpha = \frac{N_e}{N_n} = \frac{(3mkT)^{3/4}}{N_n^{1/2} h^{3/2}} \exp\left\{-\frac{W_n}{2kT}\right\}. \quad (2.21)$$

В основе формулы Саха лежит распределение Больцмана с учетом *статистических весов* соответствующих уровней. Пусть имеются два уровня - нижний (1) и верхний (2), энергия которого больше нижнего на величину ΔW_{21} . Каждый из этих уровней имеет свой статистический вес g_1 и g_2 , то есть g_1 и g_2 свободных “ячеек” на каждом из уровней. Населенности этих уровней, согласно статистике Больцмана, связаны следующим соотношением:

$$\frac{N_2}{g_2} = \frac{N_1}{g_1} \exp\left\{-\frac{\Delta W_{21}}{kT}\right\} \quad (2.22)$$

или

$$N_2 = g_2 \frac{N_1}{g_1} \exp\left\{-\frac{\Delta W_{21}}{kT}\right\}. \quad (2.23)$$

Физический смысл этого выражения заключается в следующем. Чтобы оказаться на более высоком энергетическом уровне 2, частице необходимо увеличить свою энергию на величину ΔW_{21} . Для этого частице, пребывающей с вероятностью $w(1_i) = w(1)/g_1$ в некотором i -м состоянии (одном из g_1 состояний) на нижнем уровне 1, сначала необходимо подняться на более высокий энергетический уровень 2 и занять там некое j -е состояние. Вероятность $w(2_j)$ такого перехода в одно *определенное* (j -тое) состояние есть

$$w(2_j) = w(1_i) \exp\left\{-\frac{\Delta W_{21}}{kT}\right\}. \quad (2.24)$$

Поднявшаяся на уровень 2, частица имеет в своем распоряжении g_2 свободных конечных состояний (“ячеек”), то есть g_2 различных альтернативных переходов типа “или-или”. В соответствии с теорией вероятностей, полная вероятность $w(2)$ перехода в конечное состояние представляет собой сумму всех альтернативных вероятностей, каждая из которых в данном случае равна $w(2_j) = \frac{w(1)}{g_1} \exp\left\{-\frac{\Delta W_{21}}{kT}\right\}$. Число таких конечных состояний на уровне 2 равно g_2 . Таким образом,

$$w(2) = g_2 w(2_j) = g_2 \frac{w(1)}{g_1} \exp\left\{-\frac{\Delta W_{21}}{kT}\right\}, \quad (2.25)$$

откуда и следует формула (2.22). Следует заметить, что здесь складываются именно вероятности, а не амплитуды вероятностей, ибо у каждой частицы *разные* конечные состояния (ячейки 1, 2, 3, ... g_2). Амплитуды же вероятностей складываются при наличии неразличимых альтернатив перехода *в одно и то же конечное состояние*.

В нашем случае ионизации водородоподобного атома роль нижнего уровня 1 играет основное состояние такого атома, для которого $g_1 = 1$, а энергия равна энергии основного состояния, например на первом боровском радиусе атома водорода: $W_1 = -13,6 \text{ эВ}$. Энергия верхнего уровня тогда $W_2 = 0$ и, таким образом, $\Delta W_{21} = -W_1 = W_{\text{и}}$, где $W_{\text{и}}$ — энергия (потенциал) ионизации водородоподобного атома. Роль статистического веса g_2 верхнего уровня 2 играют состояния свободного электрона, “вырвавшегося на свободу” в результате ионизации.

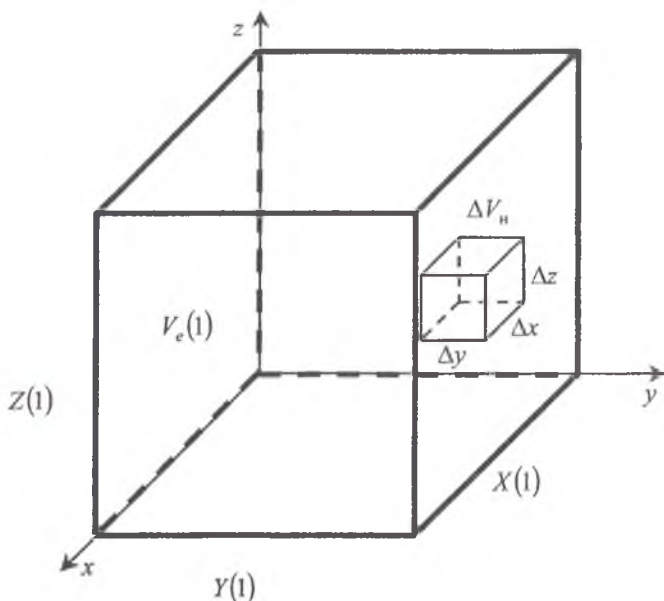


Рис. 2.4. Соотношение между одноэлектронным объемом $\Delta V_e(1) = X(1)Y(1)Z(1)$ и объемом неопределенности $\Delta V_n = \Delta x \Delta y \Delta z$ для классической плазмы: $V_e \gg \Delta V_n$

О статистическом весе g_2 свободного электрона следует сказать подробнее (рис. 2.4).

Дело в том, что для свободного электрона статистический вес g_2 в данном случае есть отношение одноэлектронного объема

$$V_e(1) = N_e^{-1} \quad (2.26)$$

к объему неопределенности:

$$\Delta V_n = \Delta x \Delta y \Delta z = (\Delta x)^3 = \frac{h^3}{(3mkT)^{3/2}} \quad (2.27)$$

Здесь Δx , Δy , Δz определяются из соотношения неопределенности координата-импульс: $\Delta x = h/\Delta p_x$, $\Delta y = h/\Delta p_y$, $\Delta z = h/\Delta p_z$. При этом $\Delta p_x = (3mkT)^{1/2}$, то есть неопределенность импульса равна его среднему значению, ибо нас интересует *минимально возможный объем неопределенности*. Таким образом,

$$g_e = \frac{(3mkT)^{3/2}}{N_e h^3}. \quad (2.28)$$

Физический смысл этого выражения можно пояснить так. Минимальный объем, который может занимать свободный электрон, - это объем не-

определенности (2.27). Для появления же “освободившегося” в результате ионизации электрона в одноэлектронном объеме (2.26) есть столько альтернативных возможностей, сколько раз можно разместить объем неопределенностей в одноэлектронном объеме, а именно

$$g_2 = \frac{V_e(1)}{\Delta V_n} = g_e = \frac{(3mkT)^{3/2}}{N_e h^3}.$$

Итак, в данном случае роль N_2 в (2.22) играет N_e - концентрация свободных электронов, а $N_1 = N_n$, где N_n - концентрация нейтральных атомов.

При этом формула (2.22) приобретает вид:

$$N_e = N_n \frac{(3mkT)^{3/2}}{N_e h^3} \exp\left\{-\frac{W_n}{kT}\right\}. \quad (2.29)$$

Умножим теперь обе части этой формулы на N_e , поделим на N_n^2 , извлечем квадратный корень из обеих частей и получим (2.21), то есть формулу Саха:

$$\alpha = \frac{N_e}{N_n} = \frac{(3mkT)^{3/4}}{N_n^{1/2} h^{3/2}} \exp\left\{-\frac{W_n}{2kT}\right\}.$$

Воспользовавшись уравнением состояния идеального газа в виде зависимости давления от температуры и концентрации

$$P[\text{Па}] = N_n kT \quad (2.30)$$

и подставив в (2.21) $N_n = P/kT$, получим формулу Саха для степени ионизации как функцию давления и температуры:

$$\alpha = \frac{N_e}{N_n} = (kT)^{1/2} \frac{(3mkT)^{3/4}}{P^{1/2} h^{3/2}} \exp\left\{-\frac{W_n}{2kT}\right\}. \quad (2.31)$$

Как видно рис 2.5, заметная ионизация воздуха начинается с температур $T \geq 10^3$ К и завершается при $T \sim 10^4$ К. При этом концентрация свободных электронов возрастает на 20 порядков!

Формула Саха справедлива для $\alpha < 1$. Хотя, как видно из (2.21), решающее значение имеет экспоненциальный член, тем не менее температура, при которой начинается заметная ионизация, зависит от начальной концентрации нейтральных атомов N_n , то есть от давления газа (2.31).

Сильно разреженные газы заметно ионизируются при относительно низких температурах. Типичный пример - ионосфера.

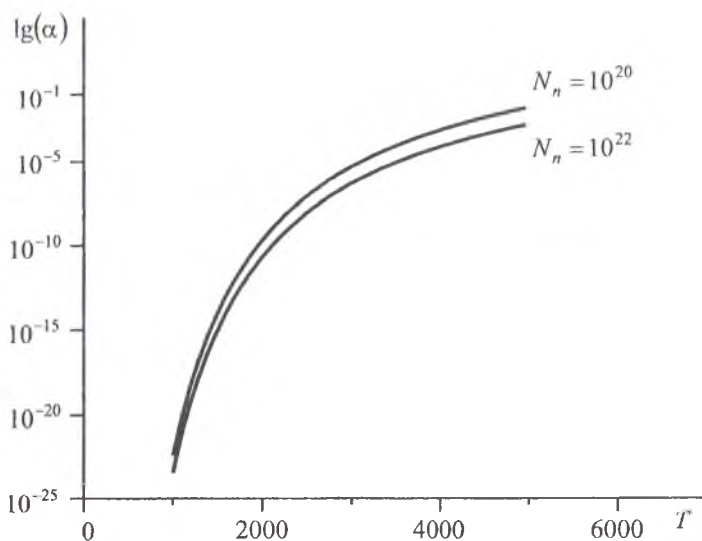


Рис. 2.5. Зависимость степени ионизации от температуры (формула Саха)

2.7. Вырожденная (квантовая) плазма

Определение. Плазма называется *квантовой (вырожденной)*, если кинетическая энергия ее электронов больше $\frac{3}{2}kT$ и определяется их концентрацией, то есть соотношением неопределенности координата-импульс.

2.7.1. Условие вырождения: равенство одноэлектронного объема и объема неопределенности. Температура вырождения

Пусть имеется идеальная термализованная плазма с температурой T , состоящая из электронов, ионов и нейтралов с концентрациями соответственно $N_e[\text{м}^{-3}]$, $N_i[\text{м}^{-3}]$ и $N_n[\text{м}^{-3}]$. Минимально возможный объем, в котором может быть локализован электрон, - это объем неопределенности, то есть тот объем, который определяется соотношением координата-импульс.

Средний тепловой импульс электрона есть

$$p_e = (3mkT)^{1/2}. \quad (2.32)$$

Можно полагать, что максимальная неопределенность Δp_x соответствующей компоненты импульса примерно равна p_e в (2.32), то есть

$$\Delta p_x \approx (3mkT)^{1/2}.$$

В соответствии с соотношением неопределенностей координата-импульс $\Delta x \Delta p_x = h$, минимальная неопределенность координаты Δx электрона будет:

$$\Delta x = \frac{h}{(3mkT)^{1/2}}. \quad (2.33)$$

Пространственный объем неопределенности ΔV_n очевидно есть

$$\Delta V_n = \Delta x \Delta y \Delta z = \frac{h^3}{(3mkT)^{3/2}}. \quad (2.34)$$

В свою очередь, средний объем $V(1)$, приходящийся на один электрон (одноэлектронный объем), есть

$$V_e(1) = N_e^{-1}. \quad (2.35)$$

Соответствующий "одноэлектронный" координатный интервал есть

$$X_e(1) = V_e^{1/3}(1) = N_e^{-1/3}. \quad (2.36)$$

Для классической идеальной плазмы справедливы неравенства

$$X(1) \cong N_e^{-1/3} \gg \frac{h}{(3mkT)^{1/2}} = \Delta x. \quad (2.37)$$

Таким образом, одноэлектронный объем (2.35) много больше объема неопределенности (2.34), то есть

$$N_e^{-1} = V(1) \gg \Delta x^3 = \frac{h^3}{(3mkT)^{3/2}}. \quad (2.38)$$

Неравенства (2.37) и (2.38) означают, что в "одноэлектронный" объем $\Delta V_e(1) = N_e^{-1}$ "вписывается" множество "объемов неопределенности" $\Delta V_n \cong \Delta x^3$, как это показано на рис. 2.6 а.

Отношение объемов $V(1)$ и ΔV_n , равнос

$$g_e = \frac{(3mkT)^{3/2}}{h^3 N_e}, \quad (2.39)$$

называется статистическим весом свободного электрона. Величина g_e уже встречалась ранее в п.2.6 при выводе формулы Саха. Электрон, локализованный в объеме неопределенности ΔV_n , может находиться в окрестностях любой точки x, y, z , занимая пространственный интервал неопределенности $[x, y, z, x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z]$, который, в свою очередь, находится в пределах одноэлектронного пространственного интервала (объема) $[0, X(1), Y(1), Z(1)]$.

Предположим теперь, что в такой идеальной плазме с постоянной температурой T мы каким-то способом начали увеличивать концентрацию

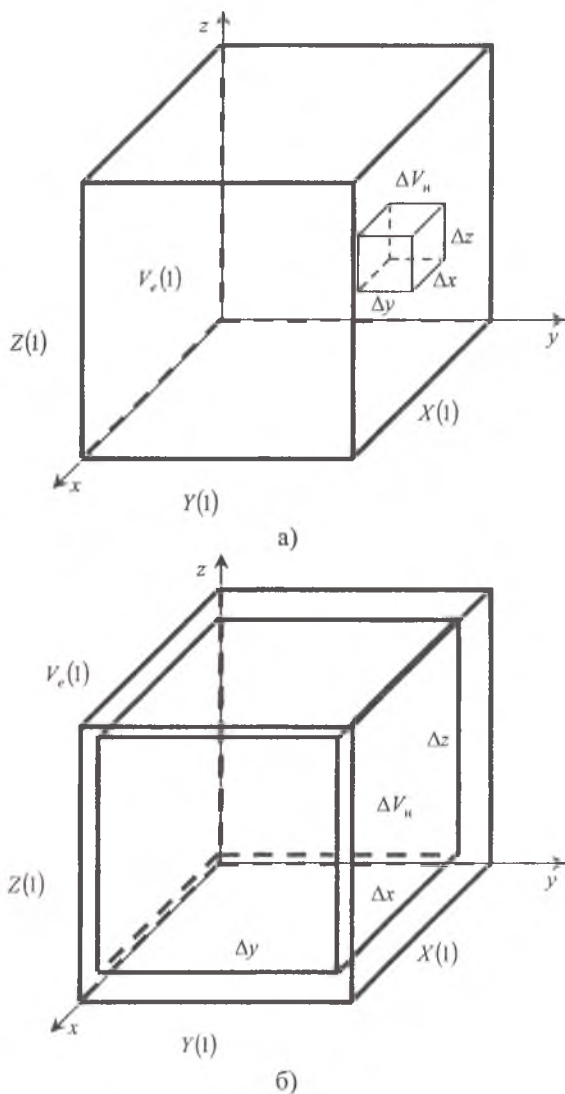


Рис. 2.6. Соотношение между одноэлектронным объемом $V_e(1) = X(1)Y(1)Z(1)$ и объемом неопределенности $\Delta V_n = \Delta x \Delta y \Delta z$ для классической плазмы:

$V_e(1) \gg \Delta V_n$ (а) и плазмы, приближающейся к состоянию вырождения, когда одноэлектронный объем стремится к объему неопределенности: $V_e(1) \rightarrow \Delta V_n$ (б)

электронов N_e (и ионов), например, внешним ионизирующим излучением или всесторонним изотермическим сжатием.

По мере роста $N_e [\text{м}^{-3}]$ будет уменьшаться "одноэлектронный" объем $V(1) = N_e^{-1}$ и, следовательно, ослабевать неравенства (2.37) и (2.38), ибо объем неопределенности при этом остается неизменным: согласно (2.34), он зависит лишь от температуры. В конце концов наступит ситуация (рис.2.6б), когда "одноэлектронный" объем $V(1)$ станет равным объему неопределенности ΔV_n , который окажется "вставленным" в $V(1)$:

$$V(1) = \Delta V_n.$$

При этом, как видно из (2.38), имеет место равенство

$$N_e^{-1} = \frac{h^3}{(3mkT)^{3/2}}, \quad (2.40)$$

которое эквивалентно значению $g_e = 1$ в (2.39).

Равенство (2.40) называется условием вырождения, а температура T_n , соответствующая этому равенству, называется температурой вырождения:

$$T_n = \frac{h^2}{3mk} N_e^{2/3}. \quad (2.41)$$

На практике часто бывает задана температура T , для которой нужно определить концентрацию вырождения N_e^n (например, найти концентрацию вырождения электронно-дырочной плазмы в полупроводниковом лазере при комнатной температуре). В этом случае, пользуясь равенством (2.40), получаем

$$N_e^n = \left(\frac{3mk}{h^2} \right)^{3/2} T^{3/2}.$$

Формула (2.41) описывает границу между классической и квантовой плазмой. На координатной плоскости $\lg T_e \div \lg N_e$ (см. рис. 2.3) эта граница представляет собой следующую прямую:

$$\frac{2}{3} \lg N_e - 14 = \lg T_e. \quad (2.42)$$

Таким образом, с момента выполнения равенства (2.40) минимальный объем неопределенности ΔV_n оказывается "вставленным" в одноэлектронный объем $V(1)$. При дальнейшем уменьшении $V(1)$, вызванном ростом N_e , будет уменьшаться и "вставленный" в него и равный ему минимальный объем неопределенности V_n . Таким образом, *одноэлектронный объем и есть теперь объем неопределенности*. Значит, по мере роста N_e каждый электрон в среднем будет иметь все меньшую и меньшую неопределенность координатного интервала Δx . Следовательно, в соответствии с соотноше-

нием неопределенности (2.36) координата-импульс будет расти средняя неопределенность импульса Δp_x , а вместе с Δp_x увеличиваться и неопределенность импульса Δp , ибо

$$\Delta p^2 = (\Delta p_x)^2 + (\Delta p_y)^2 + (\Delta p_z)^2.$$

Рост импульса электрона означает увеличение его максимального значения $p_{\max}$. $\Delta p \approx p_{\max}$, а значит, и максимальной кинетической энергии W_e , которая пропорционально квадрату импульса:

$$W_e = \frac{1}{2} p_{\max}^2. \quad (2.43)$$

Эта энергия может на несколько порядков превзойти тепловую $W_e = \frac{3}{2} kT$.

Такая плазма, в которой максимальное значение импульса $p_{\max}$ и максимальное значение энергии (2.43) определяются не температурой, а неопределенностью координаты электрона, обусловленной концентрацией этих электронов $N_e [\text{м}^{-3}]$, называется *вырожденной (квантовой)*, так как ряд ее свойств, например энергия электронов и т.п., определяются квантовомеханическими законами. В такой плазме электроны занимают все имеющиеся состояния.

Таким образом, в вырожденной плазме "внешним параметром", определяющим максимальную энергию электрона, является концентрация электронов N_e . В классической идеальной плазме таким внешним параметром, определяющим энергию электрона, является температура T .

2.7.2. Концентрация электронов, максимальный импульс, максимальная энергия, энергия Ферми

Найдем теперь связь между максимальным значением импульса электронов $p_{\max}$ и их концентрацией $N_e [\text{м}^{-3}]$. Для этого вычислим максимальную объемную плотность $M_e [\text{м}^{-3}]$ возможных состояний. Так как электроны - это фермионы, то есть они подчиняются статистике Ферми, то в каждом из возможных состояний может находиться не более двух электронов с противоположными спинами, следовательно,

$$N_e = 2 M_e. \quad (2.44)$$

Объемная плотность состояний $\Delta M_e [\text{м}^{-3}]$ электронов, находящихся в координатном интервале $[x, y, z; x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z]$, есть

$$\Delta M_e = (\Delta x \Delta y \Delta z)^{-1}. \quad (2.45)$$

В самом деле, полное число состояний M_e в рассматриваемом объеме $V [\text{м}^3]$ есть

$$M_e = \frac{V}{\Delta x \Delta y \Delta z} = \frac{V}{\Delta x^3}.$$

Отсюда

$$\Delta M_e [\text{м}^{-3}] = \frac{M_e}{V} = \frac{1}{\Delta x^3}.$$

С учетом соотношения неопределенности координата-импульс ($\Delta x \Delta p_x = h$) получим из (2.45)

$$dM_e = \frac{dp_x dp_y dp_z}{h^3} \quad (2.46)$$

или в сферических координатах

$$dM_e = \frac{1}{h^3} p^2 \sin \theta d\varphi d\theta dp. \quad (2.47)$$

Считая пространственное распределение импульсов изотропным, проинтегрируем (2.47) по углам $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ и $0 \leq \theta \leq \pi$ и получим

$$M_e = \frac{4\pi}{h^3} p^2 dp. \quad (2.48)$$

Мы уже встречались с этой формулой в главе 1 (формула Планка), когда вычисляли спектрально-объемную плотность мод (осцилляторов поля). Для фотона, согласно формуле де-Бройля, импульс равен

$$p = \frac{h}{2\pi} k,$$

и для фотонов с учетом двух взаимно ортогональных поляризаций мы получили тогда объемно-спектральную плотность мод $\mu_{v,v} [\text{м}^{-3} \text{Гц}^{-1}]$ в виде

$$\mu_{v,v} = \frac{8\pi v^2}{c^3}. \quad (2.49)$$

Теперь же мы имеем дело с электронами, и наша задача связать максимальное значение импульса электронов $p_{\max}$ с их концентрацией N_e . Так как, согласно (2.44), $N = 2M$, то, следовательно, имеем из (2.48)

$$dN_e = \frac{8\pi}{h^3} p^2 dp. \quad (2.50)$$

Эта формула дает концентрацию электронов $dN_e [\text{м}^{-3}]$, у которых величина импульса находится в интервале

$$[p, p+dp]. \quad (2.51)$$

Проинтегрировав (2.50) по p в пределах от 0 до $p_{\max}$, получим

$$N_e [\text{м}^{-3}] = \frac{8\pi}{3h^3} p_{\max}^3 \approx 8 \left(\frac{p_{\max}}{h} \right)^3 \quad (2.52)$$

$$p_{\max} \approx \frac{1}{2} h N_e^{1/3}. \quad (2.53)$$

Величина

$$W_F = \frac{1}{2m} p_{\max}^2 \approx \frac{1}{8m} h^2 N_e^{2/3} \quad (2.54)$$

представляет собой **кинетическую энергию** электрона с **максимальным импульсом** и называется *энергией Ферми, или уровнем Ферми*.

Температура вырождения T_v для *заданной* концентрации N_e получается из (2.54) при подстановке $W_F = kT$:

$$T_v = \frac{1}{8km} h^2 N_e^{2/3}. \quad (2.55)$$

Эта температура в $8/3$ раза ниже, чем даваемая формулой (2.41).

Концентрация вырождения N_e^B для *заданной* температуры $T[K]$ также получается из (2.54) при $W_F = kT$:

$$N_e \approx 8^{3/2} \left(\frac{mk}{h^2} \right)^{3/2} T^{3/2}. \quad (2.56)$$

Из сравнения с “классической” формулой (2.42) видно, что при одной и той же температуре “фермиевская” концентрация вырождения (2.44) выше в $(8/3)^{3/2} = 4,35$ раза. Это означает, что при использовании для создания плазмы, например, ионизирующего излучения его интенсивность должна быть в 4,35 раза выше, чем даваемая “классической” формулой (2.42).

Итак, концентрация электронов $N_e[m^{-3}]$ в вырожденной плазме - это максимально плотная их “упаковка”. Все возможные состояния, плотность которых определяется формулой (2.52), заняты: в каждом из возможных состояний по два электрона с противоположными спинами.

Заметим, что экстремальный случай предельно плотной упаковки представляет собой электронно-позитронный вакуум. Для него $p_{\max} = mc$ (отсюда комптоновская длина волны $\lambda_c = h/mc$ - из формулы де-Бройля)

2.7.3. Давление вырожденной плазмы

Из молекулярной физики (см. также п.2.5) известна следующая формула для давления $P[Па]$ газа, состоящая из частиц с концентрацией $N_e[m^{-3}]$ при средней энергии каждой частицы $W[Дж]$:

$$P = \frac{2}{3} WN. \quad (2.57)$$

Для давления $P_{\text{вп}}$ вырожденной плазмы с концентрацией электронов N_e при средней их энергии W_e имеем

$$P_{\text{вп}} = \frac{2}{3} W_e N_e. \quad (2.58)$$

Средняя энергия W_e определяется из следующего выражения:

$$W_e = \frac{1}{N_e} \int_0^{p_{\text{max}}} \frac{p^2}{2m} \frac{d^3 p}{h^3}. \quad (2.59)$$

Подставляя в эту формулу элемент $d^3 p$ объема p - пространства в сферических координатах, проинтегрировав и проведя тождественные преобразования, получим

$$W_e = \frac{1}{N_e} \frac{1}{2m} \frac{8\pi}{h^3} \frac{1}{5} p_{\text{max}}^5 = \frac{3}{5} \frac{1}{N_e} \frac{8\pi}{3} \frac{p_{\text{max}}^3}{h^3} \frac{p_{\text{max}}^2}{2m}. \quad (2.60)$$

Воспользовавшись формулами (2.52), (2.54), получим следующее соотношение между средней энергией W_e электрона и энергией Ферми:

$$W_e = \frac{3}{5} W_F. \quad (2.61)$$

Учитывая теперь (2.58), получаем формулу для давления $P_{\text{вп}}$ вырожденной плазмы в следующем виде:

$$P_{\text{вп}} = \frac{2}{5} W_F N_e. \quad (2.62)$$

Воспользовавшись (2.57), (2.60), (2.61), можно получить давление вырожденной плазмы $P_{\text{вп}}$ [Па] как функцию только концентрации электронов N_e [м⁻³], или энергии Ферми W_F [эВ], или средней энергии электронов W_e .

$$P_{\text{вп}} [\text{Па}] = \frac{2}{5} \frac{1}{2m} \left(\frac{3}{8\pi} \right)^{\frac{2}{3}} h^2 N_e^{5/3} = 2,37 \cdot 10^{-38} N_e^{5/3}. \quad (2.63)$$

$$P_{\text{вп}} [\text{Па}] = \frac{2}{5} \left(\frac{8\pi}{3} \right) \left(\frac{2m}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} W_e^{5/2}. \quad (2.64)$$

Как видно из (2.63), давление вырожденного электронного газа пропорционально его концентрации в степени 5/3. Это такая же величина, что входит в адиабату идеального газа (см. п.2.5). Принципиальной особенностью давления вырожденной плазмы является независимость давления от температуры. Плазма - квантовая, и давление определяется концентрацией частиц, то есть, в конечном счете, соотношением неопределенности. Давление вырожденной плазмы может быть очень большим. Например, при концентрации электронов $N_e = 6 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$ (это концентрация электронов в металле типа серебра) давление есть

$$P = 2 \cdot 10^{10} \text{ Па} = 2 \cdot 10^5 \text{ атм.}$$

2.7.4. Электроны в металлах

Типичным примером вырожденного электронного газа являются электроны в металлах. Можно, конечно, говорить и о вырожденной плазме металлов, хотя такая плазма очень специфична: ее ионы неподвижны и образуют кристаллическую решетку металла.

Оценим для примера энергию Ферми для серебра (Ag) и вольфрама (W). Для этого найдем соответствующие концентрации $N[\text{м}^{-3}]$ электронов, считая, что на один атом приходится один электрон. Атомный вес серебра $A_{\text{Ag}} = 107,9$, масса протона $M_p = 1,66 \cdot 10^{-27}$ кг. Таким образом, масса атома серебра M_{Ag} [кг] будет:

$$M_{\text{Ag}} = M_p A_{\text{Ag}} = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ кг} \cdot 107,9 = 1,79 \cdot 10^{-25} \text{ кг}. \quad (2.65)$$

Плотность серебра $d_{\text{Ag}}[\text{кг}/\text{м}^3]$ есть

$$d_{\text{Ag}} = 10,5 \cdot 10^3 \text{ кг}/\text{м}^3.$$

Отсюда имеем концентрацию атомов серебра $N_{\text{Ag}}[\text{м}^{-3}]$ и электронов N_e^{Ag} :

$$N_{\text{Ag}} = N_e^{\text{Ag}} = \frac{d_{\text{Ag}}}{M_{\text{Ag}}} = 5,86 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}. \quad (2.66)$$

Аналогично для вольфрама, у которого $A_W = 183,85$ и $d_W = 19 \cdot 10^3 \text{ кг}/\text{м}^3$, получим

$$N_W = N_e^W = 6,23 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}. \quad (2.67)$$

По формуле (2.54) находим энергию Ферми - для серебра:

$$W^{\text{Ag}} = 8,93 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 5,58 \text{ эВ} \quad (2.68)$$

для вольфрама:

$$W^W = 5,81 \text{ эВ}. \quad (2.69)$$

Работа выхода металла A_b связана с потенциалом ионизации W_n и энергией Ферми W_F :

$$A_b = W_n - W_F. \quad (2.70)$$

Работа выхода для серебра A^{Ag} и вольфрама A^W , соответственно, будет:

$$A^{\text{Ag}} = 4,3 \text{ эВ}, \quad A^W = 4,5 \text{ эВ}.$$

Отсюда для потенциалов ионизации получаем:

- для серебра $W^{\text{Ag}} = 9,88 \text{ эВ}$,

- для вольфрама $W^W = 10,35 \text{ эВ}$.

Температура вырождения T_b определяется также через энергию Ферми W_F из равенства

$$W_F = kT_b.$$

Через концентрацию электронов T_n выражается следующим образом:

$$T_n = \frac{W_F}{k} = \frac{1}{k} \frac{h^2}{2m} \left(\frac{3}{8\pi} \right)^{\frac{2}{3}} N_e^{2/3}. \quad (2.71)$$

Например, при атмосферной концентрации электронов в плазме $N_e = 2,6 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$ температура вырождения есть

$$T_n = 376 \text{ К.}$$

Таким образом, плазма газового разряда (например, в газоразрядных лазерах) классическая, ибо концентрация электронов в ней на несколько порядков ниже, чем $2,6 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$, а температура

$$T \geq 10^3 \text{ К.}$$

Иная картина складывается в металлах. Например, для серебра температура вырождения

$$T_n = \frac{W_F}{k} = 6,47 \cdot 10^4 \text{ К.}$$

2.7.5. Электронно-дырочная плазма в полупроводниках

Неравновесная электронно-дырочная плазма образуется, например, в полупроводниковом кристалле в результате облучения его лазерным пучком с интенсивностью $I_p [\text{Вт/м}^2]$ (рис. 2.7) с энергией фотона $h\nu_p$ больше ширины запрещенной зоны Δ :

$$h\nu_p > \Delta. \quad (2.72)$$

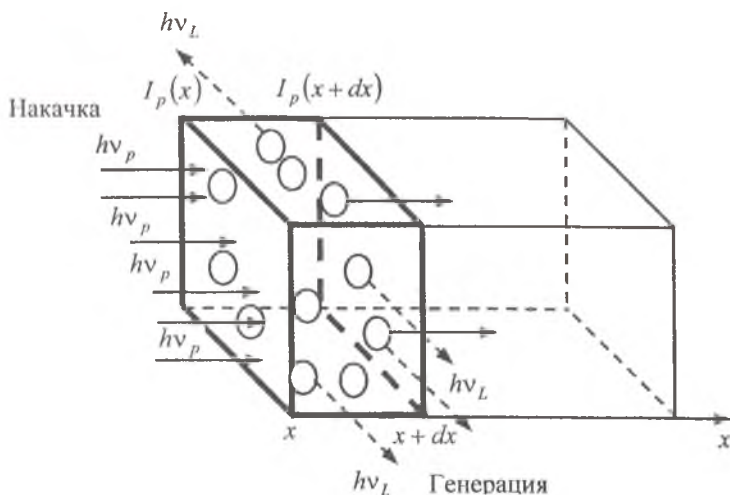


Рис. 2.7. Оптическое возбуждение полупроводникового кристалла (полупроводниковый лазер с оптической накачкой)

В результате поглощения фотона образуется электрон в зоне проводимости и дырка в валентной зоне (рис. 2.8). Мы рассматриваем случай $h\nu - \Delta \gg kT$. Это означает, что энергия W_e образовавшегося электрона

$$W_e = h\nu_p - \Delta \quad (2.73)$$

много больше тепловой kT . Соответственно, больше тепловой и его первоначальная скорость

$$v_e = \sqrt{\frac{2(h\nu_p - \Delta)}{m}} \quad (2.74)$$

Такой “горячий” электрон “остывает”, то есть теряет свою избыточную энергию, передавая ее кристаллической решетке в результате столкновений с ее атомами, концентрация которых $N_a [\text{м}^{-3}]$. В результате электрон занимает свободный энергетический уровень, наиболее близкий к дну зоны проводимости, как это показано на рис. 2.8. Время столкновений τ_{en}

определяется известной формулой

$$\tau_{en} = \frac{1}{\sigma_{en} N_a v_e}, \quad (2.75)$$

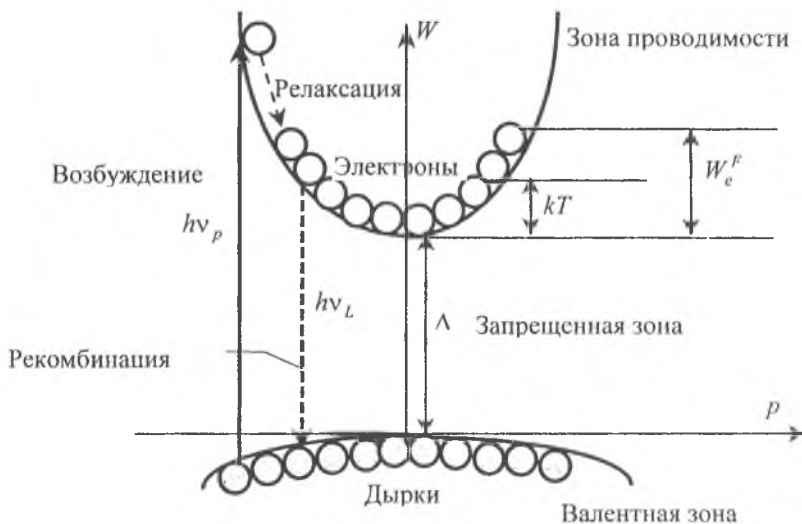


Рис. 2.8. Энергетическая диаграмма образования вырожденной электронно-дырочной плазмы в полупроводниковом лазере с оптической накачкой. В результате поглощения фотонов накачки с энергией $h\nu_p$ образуются “горячие” электроны, которые релаксируют и заполняют все более высокие энергетические уровни от дна зоны проводимости, так что квазиуровень Ферми W_e^F располагается выше kT

где $\sigma_{en}[\text{м}^2]$ - сечение столкновений, а v_e выражается формулой (2.74).
 Время τ_{en} обычно весьма мало по сравнению с временем $\tau_{cn} \sim 10^{-9}$ с спонтанной рекомбинации электрон-дырка, особенно в начале процесса остывания. Например, для GaAs ($\Delta = 1,5$ эВ), возбуждаемого светом рубинового лазера ($h\nu_p = 1,79$ эВ, $\lambda = 0,693$ мкм) из (2.74), получаем

$$\tau_{en} = 0,74 \cdot 10^{-15} \text{ с} \approx 1 \text{ фс}. \quad (2.76)$$

Время τ_T передачи энергии от электрона кристаллической решетке на несколько порядков больше:

$$\tau_T \approx \frac{M}{m} \tau_{en} = 10^5 \tau_{en} = 0,7 \cdot 10^{-10} \text{ с}. \quad (2.77)$$

Здесь $M[\text{кг}]$ и $m[\text{кг}]$, соответственно, эффективные массы атома и электрона. Однако время τ_T все же значительно меньше времени τ_{cn} спонтанной рекомбинации электрон-дырка, которое в оптическом диапазоне составляет обычно величину

$$\tau_{cn} \approx 10^{-9} \text{ с}. \quad (2.78)$$

Таким образом, образующиеся неравновесные электроны накапливаются у дна зоны проводимости. По мере роста их концентрации $N_e[\text{м}^{-3}]$ они занимают все более высокие энергетические уровни, ибо электроны - это фермионы, и в одном энергетическом состоянии их может быть не более двух (с противоположными спинами). Концентрация же $N_e[\text{м}^{-3}]$ неравновесных электронов, в свою очередь, тем выше, чем больше интенсивность $I_p[\text{Вт}/\text{м}^2]$ накачки. Концентрация $N_e[\text{м}^{-3}]$ неравновесных электронов связана с энергией Ферми W_e^F (т.н. *квазиуровень Ферми*) соотношением (2.54):

$$W_e^F \approx \frac{1}{8m} h^2 N_e^{2/3}.$$

Необходимым условием усиления света в активной (возбужденной) зоне полупроводника является *вырождение* электронного газа, состоящего из неравновесных электронов. В этом случае *квазиуровень Ферми* расположен на энергетической оси W выше величины $kT[\text{Дж}]$, то есть энергия Ферми неравновесных электронов больше, чем $kT[\text{Дж}]$:

$$W_e^F \approx \frac{1}{8m} h^2 N_e^{2/3} > kT. \quad (2.79)$$

Физический смысл этого неравенства состоит в том, что все энергетические уровни (или состояния) ниже kT заняты неравновесными электронами. Поэтому возможен лишь процесс *рекомбинации* (первоначально - *спонтанной рекомбинации*) электронов в зоне проводимости с дырками в валентной зоне. Образующиеся при этом спонтанные фотоны с энергией

$$h\nu \geq \Delta + kT \quad (2.80)$$

приводят к индуцированной (вынужденной) рекомбинации электронов с дырками.

Перелоплощения образующихся фотонов практически не происходит, ибо все соответствующие энергетические уровни вследствие вырождения заняты неравновесными электронами.

Найдем теперь связь между интенсивностью накачки $I_p [\text{Вт}/\text{м}^2]$ и концентрацией $N_e [\text{м}^{-3}]$ неравновесных электронов в зоне проводимости. Поглощение фотонов накачки происходит по закону Бугера и описывается соответствующим этому закону уравнением

$$\frac{dI_p}{dx} = -\alpha I_p, \quad (2.81)$$

где $\alpha [\text{м}^{-1}]$ - коэффициент поглощения.

Левую часть (2.81) можно представить как скорость уменьшения во времени объемной плотности фотонов накачки $N_p^\Phi [\text{м}^{-3}]$, которая связана с интенсивностью накачки $I_p [\text{Вт}/\text{м}^2]$ и энергией ее фотонов $h\nu_p$ известным соотношением

$$N_p^\Phi [\text{м}^{-3}] = \frac{I_p}{ch\nu_p}. \quad (2.82)$$

Из левой части (2.81) с учетом (2.82) и равенства $dx = cdt$ получаем

$$\frac{d \frac{I_p}{ch\nu_p}}{dx} = \frac{dN_p^\Phi}{dt}. \quad (2.83)$$

Каждый поглощенный фотон накачки рождает электронно-дырочную пару. Тем самым скорость **увеличения** во времени концентрации $N_e [\text{м}^{-3}]$ неравновесных электронов в зоне проводимости равна скорости уменьшения во времени концентрации $N_p^\Phi [\text{м}^{-3}]$ фотонов накачки:

$$\frac{dN_e}{dt} = \frac{dN_p^\Phi}{dt}. \quad (2.84)$$

Поделим теперь на $h\nu_p$ обе части уравнения (2.81). Воспользуемся тождеством (2.83) а также равенством (2.84). В результате получим соотношение

$$\frac{dN_e}{dt} = \alpha \frac{I_p}{h\nu_p}. \quad (2.85)$$

В стационарном случае скорость “наработки” $\frac{dN_e}{dt}$ неравновесных электронов с временем жизни $\tau_{\text{сп}}$ равна скорости их спонтанной рекомбинации $\frac{N_e}{\tau_{\text{сп}}}$, то есть имеет место равенство

$$\frac{dN_e}{dt} = \frac{N_e}{\tau_{\text{сп}}}. \quad (2.86)$$

Сравнивая правые части (2.85) и (2.86), имеем искомое соотношение между N_e и I_p :

$$\alpha \frac{I_p}{h\nu_p} = \frac{N_e}{\tau_{\text{сп}}}. \quad (2.87)$$

Усиление света вследствие индуцированной рекомбинации электронов и дырок будет в том случае, когда N_e больше концентрации вырождения N_e^B , которая, в свою очередь, определяется из неравенства (2.79)

$$\frac{1}{8m} h^2 N_e^{2/3} > kT.$$

Из этой формулы следует

$$N_e \geq \left(\frac{8m}{h^2} kT \right)^{3/2} = N_e^B. \quad (2.88)$$

Теперь из (2.87) и (2.88) можно получить уравнение для *пороговой интенсивности* I_p^{th} накачки, превысив которую найдем усиление света в полупроводнике при заданной температуре $T[\text{K}]$:

$$\alpha \frac{I_p^{\text{th}}}{h\nu_p} = \frac{N_e^B}{\tau_{\text{сп}}}. \quad (2.89)$$

Подставляя из (2.88) выражение для N_e^B , получаем расчетную формулу для I_p^{th} :

$$I_p^{\text{th}} = \frac{h\nu_p}{\alpha \tau_{\text{сп}}} N_e^B = \frac{h\nu_p}{\alpha \tau_{\text{сп}}} \left(\frac{8m}{h^2} kT \right)^{3/2}. \quad (2.90)$$

Задачи

1. Оценить статистический вес g_e свободного электрона в однократно ионизированной классической равновесной идеальной плазме, у которой концентрация электронов $N_e = 10^{24} \text{ м}^{-3}$, а их средняя кинетическая энер-

гия в 10 раз больше средней потенциальной. Неопределенность Δp импульса электрона считать равной его среднему значению: $\Delta p = (3mkT)^{\frac{1}{2}}$.

Ответ: $g_e = 10^3$.

2. а). Какова должна быть концентрация N_e электронов (и протонов), чтобы получить "металлический водород", то есть превратить его в вырожденную плазму? б). Какое давление P [Па] необходимо для этого? в). Почему такое давление достигается только при сходящейся к центру сферически симметричной ударной волне взрыва (имплозия)? Удельная энергия w_v взрывчатого вещества (ВВ) составляет величину порядка $w_v \approx 5 \cdot 10^9$ Дж/м³.

Ответ: а) $N_e > 4,8 \cdot 10^{29}$ м⁻³; б) $P = 6,7 \cdot 10^{11}$ Па; в) предельное давление в обычной (плоской) ударной волне взрыва не более $5 \cdot 10^9$ Па.

3. а). Оценить концентрацию вырождения N_e^* [м⁻³] неравновесных электронов в зоне проводимости полупроводника GaAs при "комнатной" температуре ($T = 300$ К).

Считая коэффициент поглощения $\alpha = 10^6$ м⁻¹, время спонтанной рекомбинации неравновесных электронов $\tau_{cn} = 10^{-9}$ с, найти: б) пороговую интенсивность I_L^{th} лазерного света на длине волны $\lambda_L = 700$ нм, который обеспечивает найденную концентрацию вырождения N_e^* ; в) Интенсивность I_L^M , при которой произойдет "металлизация" облучаемой поверхности, то есть резкое увеличение коэффициента отражения от нее лазерного излучения.

Ответ: а) $N_e^* = 1,8 \cdot 10^{25}$ м⁻³; б) $I_L^{th} = 0,5 \cdot 10^{10}$ Вт/м² (0,5 МВт/см²); в) $I_L^M = 6,4 \cdot 10^{11}$ Вт/м² (64 МВт/см²).

Указание.

1. Для оценки концентрации вырождения воспользуйтесь формулой

$$N_e^* \approx 8^{\frac{3}{2}} \left(\frac{mk}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} T^{\frac{3}{2}}.$$

2. Для решения п. в) необходимо воспользоваться формулой $\lambda_e^2 N_e r_e = \pi$, которая связывает критическую длину волны λ_e и концентрацию N_e электронов. $r_e = 2,84 \cdot 10^{-15}$ м - классический радиус электрона.

4. а). Какова температура вырождения T_v плазмы с "атмосферной" концентрацией электронов $N_e = 2,5 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$? б). Вычислить концентрацию вырождения N_e^v электронов в неравновесной электронно-дырочной плазме при температуре кипения жидкого азота ($T = 77 \text{ К}$).

Ответ: а) $T_v = 378 \text{ К}$; б) $N_e^v = 2,3 \cdot 10^{24} \text{ м}^{-3}$.

ГЛАВА 3. СТОЛКНОВЕНИЯ ЧАСТИЦ В ПЛАЗМЕ

3.1. Основные величины, характеризующие столкновения

Среднее время между столкновениями τ , скорость v , длина свободного пробега $L[\text{м}] = v\tau$. Сечение столкновений $\sigma_{\text{ст}}[\text{м}^2]$. Соотношение между сечением, длиной свободного пробега и концентрацией $N[\text{м}^{-3}]$ частиц ($\sigma_{\text{ст}}NL = 1$).

3.1.1. Среднее время между столкновениями. Функция распределения времени столкновений

Следуя [1] (выпуск 4), рассмотрим равновесный газ при температуре T , состоящий из одинаковых частиц массой M , которые сталкиваются между собой случайным образом. Если проследить за какой-нибудь одной частицей, то за достаточно долгий промежуток времени Δt частица испытает Λ ударов. Мы вполне обоснованно предполагаем, что число столкновений пропорционально промежутку времени Δt , то есть

$$\Lambda = \frac{\Delta t}{\tau}, \quad (3.1)$$

где τ - среднее время между столкновениями.

Здравый смысл подсказывает нам, что вероятность P столкновения частицы в течение малого времени dt есть

$$P = \frac{dt}{\tau}, \quad (3.2)$$

ибо при $dt \rightarrow \tau$ вероятность столкновения $P \rightarrow 1$. Обосновать соотношение (3.2) для вероятности столкновения одной частицы можно следующим образом. Мы предполагаем газ **равновесным**. Это значит, что ничто в нем не меняется **в среднем** во времени. Следовательно, если в некотором объеме находится N частиц, то за достаточно малый промежуток времени dt столкнутся между собой столько же частиц, сколько испытает столкновений одна из них за интервал Ndt . Вероятность же столкновения одной частицы за время dt , согласно нашему предположению (3.2), есть $\frac{dt}{\tau}$. Значит, за интервал $\Delta t = Ndt$ число столкновений $\Lambda_1(Ndt)$ одной частицы будет

$$\Lambda_1(Ndt) = \frac{Ndt}{\tau}. \quad (3.3)$$

Но этому числу должно быть равно $\Lambda_N(dt)$ - число столкновений N частиц за время dt :

$$\Lambda_N(dt) = NP_1, \quad (3.4)$$

где P_1 - вероятность столкновения **одной** частицы. Так как система (газ) у нас равновесная, то, следовательно,

$$\Lambda_1(Ndt) = \Lambda_N(dt). \quad (3.5)$$

Отсюда вероятность столкновения в расчете на одну частицу получим в виде (3.2):

$$P_1 = \frac{dt}{\tau}.$$

Следует подчеркнуть, что τ есть среднее время между столкновениями (время свободного пробега). Это время может быть разным для разных частиц и меняться от столкновения к столкновению. Так время свободного пробега ("время жизни") частицы можно представить в виде некоторого вероятностного распределения $\Lambda\Delta t$

$$f(t) = \frac{1}{\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right), \quad (3.6)$$

которое и дает среднее значение времени между столкновениями τ .

Любопытно, что "время жизни" τ до ближайшего столкновения может отсчитываться от произвольно взятого момента, начиная от последнего столкновения. Среднее время свободного пробега все равно будет равно τ . В этом нетрудно убедиться, вычислив среднее время $\langle t \rangle$ по распределению (3.6)

$$\langle t \rangle = \int_0^{\infty} f(t)t dt = \tau. \quad (3.7)$$

Справедливость распределения (3.6) можно доказать следующим образом. Пусть в некотором объеме находятся N_0 частиц газа. По истечении времени t в этом объеме останется некоторое число $N(t)$ частиц, которые не испытали столкновений (ясно, что $N(t) < N_0$). В момент $t + dt$, то есть через бесконечно малый промежуток времени dt , считая от t , нестолкнувшихся частиц останется $N(t + dt)$. Само собой разумеется, что

$$N(t + dt) < N(t). \quad (3.8)$$

Столкнувшихся же частиц на временном интервале $[t, t + dt]$, согласно (3.4) будет $\frac{dt}{\tau} N(t)$. В соответствии с законом сохранения частиц в нашем выделенном объеме справедливо следующее равенство:

$$N(t + dt) - N(t) = -N(t) \frac{dt}{\tau} \quad (3.9)$$

Знак "минус" в правой части обусловлен неравенством (3.8): число нестолкнувшихся частиц уменьшается со временем, а число столкнувшихся

частиц $N(t)\frac{dt}{\tau}$ - величина, разумеется, положительная. Физический смысл (3.9) ясен: число столкнувшихся в момент t и в течение dt частиц, то есть на промежуточном интервале $[t, t + dt]$, равно разности нестолкнувшихся в момент t и нестолкнувшихся в момент $t + dt$.

Из (3.9) получается дифференциальное уравнение:

$$\frac{dN}{dt} = -\frac{N}{\tau} \quad (3.10)$$

или в разделенных переменных:

$$\frac{dN}{N} = -\frac{dt}{\tau}$$

начальное условие есть: $N(0) = N_0$ решение (3.10) с учетом начального условия известно:

$$N = N_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right). \quad (3.11)$$

Таким образом, "бесстолкновительная" вероятность $P_{6/c}(t)$ того, что частица "проживет" время t от последнего столкновения, не испытав последующего столкновения, будет:

$$P_{6/c}(t) = \frac{N}{N_0} = \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right). \quad (3.12)$$

Как и следовало ожидать, эта вероятность экспоненциально уменьшается со временем.

Вероятность столкновения $P_{ст}(t)$ во временном интервале $[t, t + dt]$ есть вероятность для частиц **не столкнуться** к моменту времени t **минус** вероятность **не столкнуться** к моменту времени $t + dt$:

$$\begin{aligned} P_{ст}(t) &= P_{ст}[t, t + dt] = P_{6/c}(t) - P_{6/c}(t + dt) = \\ &= \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) - \exp\left(-\frac{t + dt}{\tau}\right) = \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \frac{dt}{\tau}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Здесь для малого промежутка времени dt мы воспользовались первым членом разложения функции $\exp\left(-\frac{dt}{\tau}\right)$ в ряд Тэйлора:

$$\exp\left(-\frac{dt}{\tau}\right) = 1 - \frac{dt}{\tau}. \quad (3.14)$$

Соотношение (3.13) тем точнее, чем меньше dt . Следуя теперь известной методике теории вероятностей, мы можем определить вероятность столкновения $P_{ст}(t)$ в течение dt (начиная с произвольного момента времени t) как некоторую функцию распределения $f_{\tau}(t)$, умноженную на dt (размерность $[f_{\tau}(t)] = 1/c$)

$$P_{\text{ст}}(t) = f_{\tau}(t)dt, \quad (3.15)$$

где

$$f_{\tau}(t) = \frac{1}{\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right). \quad (3.16)$$

$f_{\tau}(t)$ представляет собой функцию распределения (3.3) для времени столкновений. Так как столкновение когда-нибудь да произойдет, то должно выполняться условие нормировки:

$$\int_0^{\infty} f(t)dt = 1. \quad (3.17)$$

В чем нетрудно убедиться, проинтегрировав (3.17).

3.1.2. Длина свободного пробега, сечение столкновений, соотношение между сечением столкновений, длиной свободного пробега и концентрацией частиц

Длиной свободного пробега L [м] называется расстояние, которое частица, движущаяся со средней скоростью v [м/с], проходит за среднее время τ [с] между столкновениями

$$L = v\tau. \quad (3.18)$$

Обычно под средней скоростью v понимают величину $v = \left(\frac{3kT}{M}\right)^{\frac{1}{2}}$ -

это так называемая средняя квадратичная скорость (усреднение производится по распределению Максвелла для скоростей). Так как длина свободного пробега L определяется через среднее время τ между столкновениями, то можно повторить предыдущий вероятностный анализ для τ , применив его к L . Мы получим, в частности, функцию распределения для длины пробега:

$$f_L(x) = \frac{1}{L} \exp\left(-\frac{x}{L}\right), \quad (3.19)$$

а также вероятность столкновений $P_{\text{ст}}$ на различных интервалах: $[x, x + dx]$, $[0, dx]$:

$$P_{\text{ст}}[x, x + dx] = \frac{dx}{L} \exp\left(-\frac{x}{L}\right) \quad (3.20)$$

$$P_{\text{ст}}[0, dx] = \frac{dx}{L}. \quad (3.21)$$

При классическом описании нейтральных частиц они рассматриваются как сферы. Эффективное сечение столкновений $\sigma_{\text{ст}}$ для одинаковых частиц определяется в этом случае как площадь круга, радиус которого r равен радиусу частицы:

$$\sigma_{\text{ст}} \approx \pi r^2. \quad (3.22)$$

Если же сталкиваются заряженные частицы (например, электрон-ионные столкновения в плазме), то сечение столкновений сложным образом зависит от величины заряда, массы, температуры и т.д. (см. далее п. 3.3, 3.4.).

Как видно из рис.3.1, полное число частиц N_{Σ} при их концентрации $N[\text{м}^{-3}]$ в выделенном параллелепипеде объемом $V = Sdx$ будет:

$$N_{\Sigma} = NSdx. \quad (3.23)$$

На площадке $S[\text{м}^2]$ эти частицы занимают "площадь столкновений" $S_{\text{ст}}$:

$$S_{\text{ст}} = N_{\Sigma} \sigma_{\text{ст}} = \sigma_{\text{ст}} NSdx. \quad (3.24)$$

Вероятность столкновения $P_{\text{ст}}[0, dx]$ на длине dx равна отношению площадей $S_{\text{ст}}$ и S :

$$P_{\text{ст}}[0, dx] = \frac{S_{\text{ст}}}{S} = \sigma_{\text{ст}} N dx. \quad (3.25)$$

Сравнивая это выражение с (3.21), получаем:

$$\sigma_{\text{ст}} NL = 1. \quad (3.26)$$

Это соотношение можно получить из более наглядных, хотя и менее строгих, оценок, если на рис. 3.1а заменить dx на L . Тогда в среднем на длине L каждая из молекул испытает столкновение, а это значит, что все "цилиндры", которые "замегают" молекулы при движении, соприкасаются между собой боковыми стенками. В этом случае, как показано на рис. 3.1б, площадка $S[\text{м}^2]$ будет вся заполнена соприкасающимися кружками площадью $\sigma_{\text{ст}}[\text{м}^2]$ каждый. В этом случае занимаемая частицами площадка $S_{\text{ст}}$ ("площадь столкновений") будет почти равна S :

$$S_{\text{ст}} \leq S.$$

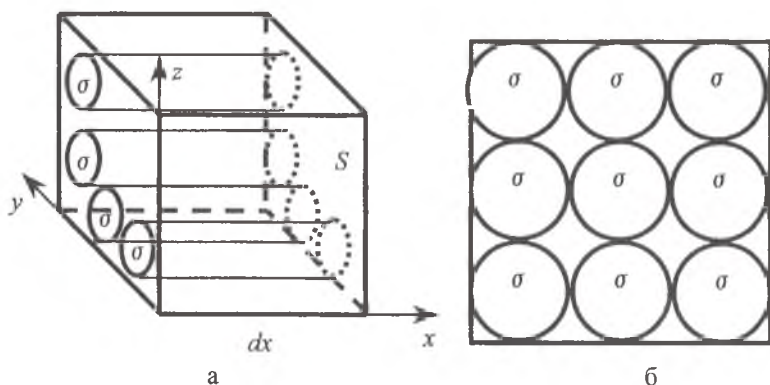


Рис. 3.1. К выводу соотношения между концентрацией $N[\text{м}^{-3}]$ частиц, сечением столкновений $\sigma_{\text{ст}}[\text{м}^2]$ и длиной свободного пробега $L[\text{м}]$: $\sigma_{\text{ст}} NL = 1$

Полное же число частиц N_{Σ} может быть выражено так:

$$N_{\Sigma} = \frac{S_{\text{ст}}}{\sigma_{\text{ст}}} = NSL.$$

Но так как теперь объем V параллелепипеда есть $V = SL$, то, следовательно,

$$\frac{S_{\text{ст}}}{\sigma_{\text{ст}}} = NSL.$$

Откуда следует (3.26):

$$\sigma_{\text{ст}}NL = 1.$$

Учитывая, что $L = v\tau$, получим:

$$N\sigma_{\text{ст}}v\tau = 1. \quad (3.27)$$

Для частоты столкновений $\nu_{\text{ст}}[1/\text{с}] = 1/\tau$ имеем следующее выражение:

$$\nu_{\text{ст}} = \frac{1}{\tau} = \sigma_{\text{ст}}Nv. \quad (3.28)$$

Соотношение (3.27) является весьма общим. Оно справедливо для любых сталкивающихся частиц: не только нейтральных, но и заряженных (столкновения электронов и ионов в плазме). Нужно только пользоваться правильными выражениями и величинами для $\sigma_{\text{ст}}$, L , v . Сечения электрон-ионных столкновений $\sigma_{\text{ст}}$, а также длина свободного пробега вычисляются ниже в п.3.4.

3.2. Частота столкновений электрона. Столкновения электронов с нейтральными частицами

В реальных физических опытах плазма не бывает полностью ионизированной. Это значит, что она содержит не только электроны и ионы, но и нейтральные частицы (атомы, молекулы). Столкновения происходят между всеми ними. Однако чаще всего испытывают столкновения электроны. Действительно, частота столкновений $\nu_{\text{ст}} = 1/\tau$ - время между столкновениями, определяется из известного соотношения между сечением столкновений $\sigma_{\text{ст}}[\text{м}^2]$, концентрацией частиц $N[\text{м}^{-3}]$ и длиной свободного пробега $L[\text{м}] = v\tau_{\text{ст}}$, где $v[\text{м/с}]$ - скорость частицы:

$$\sigma_{\text{ст}}NL \equiv \sigma_{\text{ст}}Nv\tau_{\text{ст}} = 1 \quad (3.29)$$

или

$$\nu_{\text{ст}} = \frac{1}{\tau_{\text{ст}}} = \sigma_{\text{ст}}Nv. \quad (3.30)$$

Из (3.30) видно, что частота столкновений пропорциональна скорости частицы. Эта скорость связана с температурой T соотношением

$\frac{mv^2}{2} = \frac{3}{2}kT$, где $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К - постоянная Больцмана, $m[\text{кг}]$ - масса частицы. Таким образом, наибольшую скорость при заданной температуре имеют электроны, и, следовательно, они сталкиваются чаще, чем любые другие частицы, образующие плазму.

Частота столкновений электрона $\nu_{\text{ст}}[1/\text{с}]$ с любой частицей складывается из частоты столкновений с ионами ν_{ei} и нейтральными частицами ν_{en} . Таким образом,

$$\nu_{\text{ст}} = \nu_{ei} + \nu_{en} \quad (3.31)$$

или

$$\frac{1}{\tau_{\text{ст}}} = \frac{1}{\tau_{ei}} + \frac{1}{\tau_{en}}. \quad (3.32)$$

Физическая картина столкновений электрона зависит от вида частиц, с которой электрон взаимодействует. Начнем с анализа столкновений с нейтральными атомами (молекулами). Электрон, столкнувшийся с нейтральной частицей, может упруго рассеяться от нее, изменив направление своего движения. Если же энергия электрона достаточно велика, например, значительно больше энергии ионизации атома, он может ионизовать атом или возбудить его. Сечение упругого рассеяния зависит от энергии электрона.

Резкие минимумы в зависимостях $\sigma_{\text{ст}}(W_e)$ сечения $\sigma_{\text{ст}}$ столкновения от энергии электрона W_e - проявление так называемого эффекта Рамзауэра. Это своего рода интерференция, эффект, в результате которого электрон как бы проходит **сквозь** атом. Такое становится возможным, когда дебройлевская длина волны электрона принимает значения, сравнимые с размерами атома. В случае взаимодействия электронов с Кг и Аг эффект Рамзауэра имеет место при энергиях электронов $W_e \sim 1$ эВ. Действительно, импульс частицы $p = mv$ связан с длиной волны λ соотношением де-Бройля

$p = \frac{h}{\lambda}$. Кроме того, $p = \sqrt{2mW_e}$, и для длины волны λ частицы имеем:

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mW_e}} = 1 \text{ нм}.$$

Таким образом, в данном случае эффект Рамзауэра для Кг и Аг имеет место, когда волна де-Бройля составляет ~ 1 нм. При энергиях электрона $5+20$ эВ типичное значение сечения столкновения электрона с нейтральными атомами близко к газокинетическому ($\sigma_{\text{гк}} = 10^{-19} \text{ м}^2$).

3.3. Столкновение электрона с одиночным заряженным центром (ионом). Прицельный параметр. Критерий столкновения

Под столкновением электрона с ионом понимают искривление на определенный угол траектории движения электрона в поле неподвижного точечного заряда (рис. 3.2). Считается, что столкновение произошло, если достигает определенной величины угол между начальной скоростью (до искривления траектории) и конечной скоростью после того, как траектория снова "выпрямится", как это показано на рис. 3.2. Фактически это означает, что достигла определенной величины центростремительная скорость $v_{\text{цс}}(t)$, т.е. скорость, которая всегда направлена по мгновенному радиусу-вектору, соединяющему электрон с ионом. Как будет показано ниже, эта центростремительная скорость достигает значения, равного v - первоначальной скорости электрона. Таким образом, критерием столкновения является соотношение

$$\frac{v_{\text{цс}}}{v} = 1, \quad (3.33)$$

Наиболее существенное искривление траектории происходит на ее участке АВ. Ближе всего к иону электрон находится, когда проходит через точку С. Здесь кривизна траектории - максимальная. Расстояние b от иона до точки С - ближайшей точки траектории - называется *прицельным параметром*, а в случае столкновения - *прицельным параметром столкновения* $b_{\text{ст}}$. Мы также вскоре убедимся, что в случае столкновения потенциальная энергия взаимодействия электрона с положительным ионом на расстоянии b равна значению кинетической энергии электрона до столкновения.

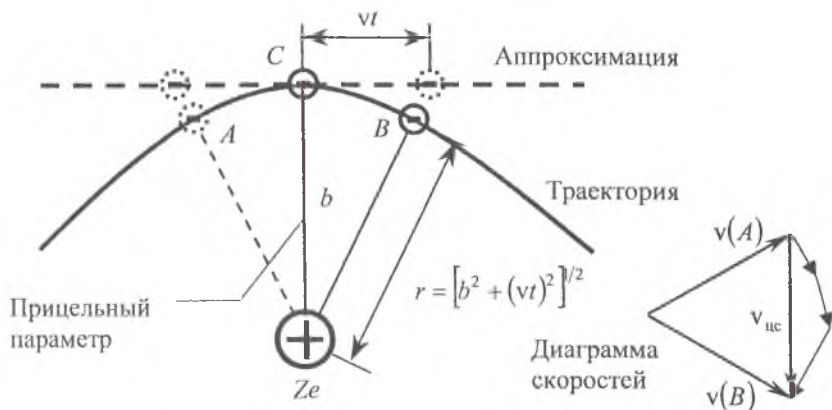


Рис. 3.2. Движение электрона в поле одиночного иона

Чтобы получить критерий столкновения (3.33), необходимо прежде всего вычислить центростремительную скорость v_{uc} электрона в течение всего времени его взаимодействия с ионом. Центростремительное ускорение $a_{uc}(t)$ электрона, как видно из рис. 3.2, зависит от времени и определяется соответствующей центростремительной кулоновской силой $F_{uc}(t) = ma_{uc}(t)$, действующей на электрон со стороны иона. В этом случае v_{uc} есть

$$v_{uc} = \int a_{uc}(t) dt = \frac{1}{m} \int F_{uc}(t) dt. \quad (3.34)$$

Чтобы облегчить вычисления (потеряв, правда, при этом в точности), аппроксимируем траекторию движения электрона прямой, касательной к реальной кривой в точке С (рис. 3.2). Потенциальная энергия электрона W_n на такой прямой будет:

$$W_n = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 [b^2 + (vt)^2]^{1/2}}. \quad (3.35)$$

Сила притяжения со стороны иона равна градиенту от W_n по b :

$$F_{uc}(t) = ma_{uc}(t) = \frac{\partial W_n}{\partial b} \frac{Ze^2 b}{4\pi\epsilon_0 [b^2 + (vt)^2]^{3/2}}. \quad (3.36)$$

Отсюда интегрируя по времени, находим v_{uc} центростремительную составляющую скорости

$$v_{uc} = \frac{2Ze^2 b}{4\pi\epsilon_0 m} \int_0^\infty \frac{dt}{[b^2 + (vt)^2]^{3/2}} = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m v b} \int_0^\infty \frac{d\xi}{(1 + \xi^2)^{3/2}}, \quad (3.37)$$

где $\xi = vt/b$.

Коэффициент 2 в (3.37) появился потому, что характер изменения центростремительной силы на участке АС точно такой же, как и на участке СВ. Поэтому отсчет времени интегрирования можно вести, начиная от момента, когда электрон находится в точке С и движется вправо к точке В. При этом учитывается лишь половина времени реального воздействия. Учесть же часть траектории, которая находится слева от С, можно, просто удвоив результат интегрирования.

Произведем замену переменных в (3.37):

$$\xi = \operatorname{tg} \alpha, \quad d\xi = \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha}, \quad (1 + \xi^2)^{-3/2} = \cos^3 \alpha.$$

В результате получаем

$$v_{uc} = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m v b} \int_0^{\pi/2} \cos \alpha d\alpha = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m v b}. \quad (3.38)$$

Отсюда получаем величину v_{uc}/v в виде отношения потенциальной энергии электрона к его кинетической энергии $W_{кин} = \frac{mv^2}{2} = \frac{3}{2}kT$:

$$\frac{v_{uc}}{v} = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 b(mv^2/2)} = \frac{W_{п}}{W_{кин}}. \quad (3.39)$$

Полагая в качестве критерия столкновения соотношение (3.33)

$$\frac{v_{uc}}{v} = 1,$$

получаем формулу для определения $b_{ст}$ - *прицельного параметра столкновения*:

$$b_{ст} = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 (mv^2/2)}. \quad (3.40)$$

Таким образом, прицельный параметр столкновения $b_{ст}$ - это такое значение прицельного параметра (то есть минимального расстояния между электроном и ионом), на котором потенциальная энергия электрона равна его кинетической энергии.

Можно было бы не прибегать к вычислению (3.36) силы F_{uc} по формуле (3.36), то есть через градиент от потенциальной энергии по прицельному параметру b , а записать силу в том виде, который дает закон Кулона применительно к ситуации, представленной на рис. 3.2:

$$F_{uc}(t) = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 [b^2 + (vt)^2]}. \quad (3.41)$$

Тогда формула (3.39) имела бы менее "изящный" вид:

$$\frac{v_{uc}}{v} = \frac{\pi}{2} \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 b(mv^2/2)}. \quad (3.42)$$

В этом можно убедиться, проведя интегрирование, аналогичное (3.37).

Теперь, когда найден прицельный параметр столкновения (3.40), казалось, можно получить сечение электрон-ионного столкновения $\sigma_{ei} [m^2]$ по формуле

$$\sigma_{ei} = \pi b_{ст}^2 = \pi \left[\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 (mv^2/2)} \right]^2 = \pi \left[\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 (3/2)kT} \right]^2. \quad (3.43)$$

Здесь произведена замена:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{3}{2}kT, \quad (3.44)$$

т.е. вместо $\frac{mv^2}{2}$ поставлено $\frac{3}{2}kT$ - обычное выражение для кинетической энергии частицы через температуру $T[K]$ газа (плазмы). Это результат ус-

реднения квадрата скорости v^2 по распределению $W_M[\text{с/м}]$ Максвелла для скоростей.

Выражение (3.43) для сечения электрон-ионных столкновений дает правильный характер зависимости от температуры, однако занижает значение σ_{ei} по сравнению с экспериментально наблюдаемыми величинами.

Дело в том, что проведенное рассмотрение не учитывает действие других ионов, а они также влияют на движение электрона, увеличивая сечение его столкновений. Чтобы получить истинную формулу для сечения электрон-ионного столкновения, необходимо учесть воздействие на электрон многих ионов.

3.4. Движение электрона в поле многих заряженных центров.

Длина свободного пробега. Кулоновский логарифм.

Сечение столкновений. Время между столкновениями

Электрон, движущийся в плазме, находится под воздействием полей многих заряженных центров (рис. 3.3). Относительное изменение любой скорости dv/v частицы, испытывающей столкновения, следующим образом связано с длиной свободного пробега L и элементарным отрезком dx пути, например, вдоль оси x :

$$-\frac{dv_x}{v} = \frac{dx}{L}. \quad (3.44)$$

Мы следим за изменением скорости вдоль одного выделенного направления (ось x), а знак "минус" учитывает тот факт, что в результате столкновений частица тормозится. Доказать соотношение (3.44) можно следующим образом. Ускорение частицы dv/dt , движущейся со скоростью v и испытывающей столкновения с другими частицами со средним временем между столкновениями τ_{ct} , можно представить как скорость v , деленную на τ_{ct} . Длина же свободного пробега L представляет собой произведение скорости частицы v на время τ_{ct} между столкновениями. Таким образом,

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{v_x}{\tau_{ct}}. \quad (3.45)$$

В свою очередь, $v=dx/dt$. Подставляя это выражение в правую часть (3.45), сократив на dt , поделив обе части на v и приняв во внимание, что $L = v\tau_{ct}$, получим соотношение (3.44).

Длина свободного пробега L связана с сечением столкновений $\sigma_{ct}[\text{м}^2]$ концентрацией частиц $N[\text{м}^{-3}]$ известным соотношением:

$$\sigma_{ct}NL = 1. \quad (3.46)$$

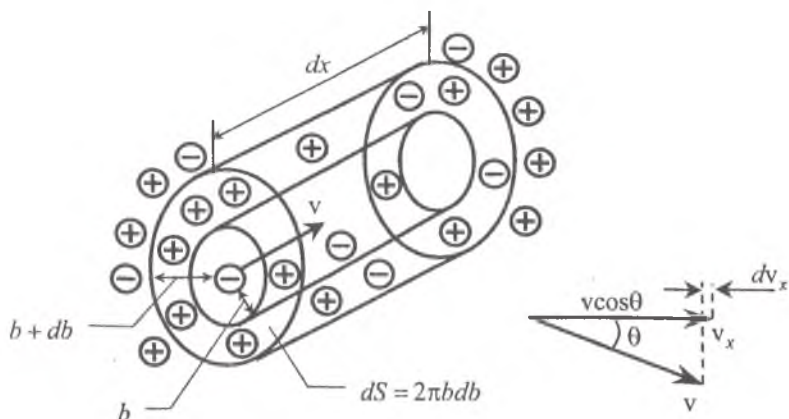


Рис. 3.3. Изменение скорости электрона под действием многих ионов

Если теперь мы каким-либо способом получим формулу для относительного изменения скорости dv_x/v_x в виде $dv_x/v_x = -\Lambda dx$, то в соответствии с (3.44) и (3.46) коэффициент Λ при dx будет равен обратной длине свободного пробега $1/L$, т.е. произведению $\sigma_{\text{ст}} N$:

$$\Lambda = \frac{1}{L} = \sigma_{\text{ст}} N. \quad (3.47)$$

Для вычисления явного вида dv_x/v_x рассмотрим диаграмму скоростей частицы, показанную на рис. 3.3, а затем учтем, что заряженных центров много. Из рис. 3.3 следует, что относительное изменение скорости вдоль оси x при каждом отдельном столкновении будет

$$\frac{dv_x^i}{v} = 1 - \cos \theta_i \cong \frac{1}{2} \theta_i^2(b) \cong \frac{1}{2} \left(\frac{v_{\text{ц}}^i}{v} \right)^2. \quad (3.48)$$

Скорость меняется по направлению, но не меняется по абсолютной величине.

Ранее в п. 3.3 было отмечено, что угол отклонения θ можно считать примерно равным $v_{\text{ц}}/v$. Сейчас мы следим за скоростью вдоль оси x , то есть $v = v_x$. Как уже было показано в п. 3.3 (3.38), центростремительная скорость $v_{\text{ц}}$ зависит от прицельного параметра b , а значит от b зависит и угол отклонения θ , что и отмечено в (3.48). Угол отклонения $\theta(b)$, согласно (3.39), есть

$$\theta(b) = \frac{v_{\text{ц}}(b)}{v} = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 b(mv^2/2)}. \quad (3.49)$$

Он представляет собой функцию прицельного параметра b , который зависит от положения заряженного центра относительно движущейся частицы.

Когда заряженных центров много, например N_i^s , то относительное изменение скорости dv_x/v представляет собой результат воздействия многих таких центров, каждый из которых дает свой вклад в $\theta^2(b)$:

$$\frac{dv_x}{v} = \sum \frac{v_{uc}(b_i)}{v} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N_i^s} \theta^2(b_j). \quad (3.50)$$

Число слагаемых равно числу центров, вносящих вклад в θ . Это означает, что суммирование производится по всем центрам N_i^s , способным оказать влияние на θ^2 , то есть имеющим прицельные параметры b_i от $b_{\max}$ до $b_{\min}$. Максимальное значение $b_i = b_{\max}$ равно дебаевскому радиусу r_D , где

$$r_D = 69 \frac{T}{N_e}.$$

Действительно, на электрон могут воздействовать лишь те заряженные центры (ионы), которые находятся от нее на расстояниях, не превышающих радиус Дебая r_D , ибо только в пределах r_D нарушается квазинейтральность и действуют электростатические кулоновские силы. Минимальное значение прицельного параметра $b_{\min}$ можно оценить, задавая некоторое максимальное значение угла отклонения θ , например полагая в (3.49) $\theta=1$. Правда, при этом мы не вполне корректно используем приближенную формулу (3.48). Тогда, согласно (3.40),

$$b_{\min} = b_{ct} = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 (mv^2/2)}. \quad (3.51)$$

Как видно из рис. 3.3, число заряженных центров dN_e , расположенных на элементарном отрезке длины dx и имеющих прицельные параметры в интервале $[b, b+db]$, есть непрерывная функция прицельного параметра b :

$$dN_s = N_i 2\pi b db dx. \quad (3.52)$$

Здесь $N_i[\text{м}^{-3}]$ - концентрация заряженных центров (ионов). Следовательно, сумму (3.50) можно заменить интегралом по переменной b , которая в пределах от $b_{\min} = b_{ct}$ до $b_{\max} = r_D$:

$$\frac{dv_x}{v} = \frac{1}{2} dx \int_{b_{\min}}^{b_{\max}} \left(\frac{v_{uc}}{v} \right)^2 N_i 2\pi b db, \quad (3.53)$$

в который подставить формулу (3.39):

$$\frac{v_{uc}}{v} = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 b (mv^2/2)}.$$

Интегрирование (3.44) приводит к следующему соотношению:

$$\frac{dv_x}{v} = \pi N_i \left[\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_o(mv^2/2)} \right]^2 \ln\left(\frac{b_{\max}}{b_{\min}}\right) dx. \quad (3.54)$$

Отсюда следует [см. (3.47)], что

$$\frac{1}{L} = N_i \sigma_{ei} = \pi N_i \left[\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_o(mv^2/2)} \right]^2 \ln\left(\frac{b_{\max}}{b_{\min}}\right). \quad (3.55)$$

И, следовательно, сечение σ_{ei} электрон-ионных столкновений есть

$$\sigma_{ei} = \pi \left[\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_o(mv^2/2)} \right]^2 \ln\left(\frac{b_{\max}}{b_{\min}}\right). \quad (3.56)$$

Учитывая, что $b_{\max} = r_D$ и $b_{\min} = b_{\text{ст}}$, получаем окончательную формулу для $\sigma_{ei} [M^2]$:

$$\sigma_{ei} = \pi \left[\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_o(mv^2/2)} \right]^2 \ln\left(\frac{r_D}{b_{\text{ст}}}\right). \quad (3.57)$$

Или в сокращенном виде

$$\sigma_{ei} = \pi b_{\text{ст}}^2 L_K, \quad (3.58)$$

где величина L_K

$$L_K = \ln\left(\frac{r_D}{b_{\text{ст}}}\right) \quad (3.59)$$

представляет собой так называемый кулоновский логарифм, учитывающий взаимодействие электрона со многими ионами.

3.5. Электронная и ионная температура. Учет столкновений с нейтральными частицами

До сих пор мы предполагали, что температура плазмы T - одинаковая как для электронов, так и для ионов, то есть средняя кинетическая энергия электрона равна средней энергии иона. В общем случае это не так, и надо различать температуры: электронную T_e и ионную T_i . Например, при разогреве плазмы электрическим разрядом в электрическом поле первыми приобретают энергию - "разгоняются" - электроны. Сталкиваясь с ионами и нейтральными частицами (нейтралями), электроны "термализуются": энергия, приобретенная ими за счет направленного движения в электрическом поле, распределяется по всем трем степеням свободы. Электроны тем самым приобретают некоторую температуру T_e . Однако разогрев ионов происходит значительно медленнее. Дело в том, что масса электрона m на несколько порядков (по крайней мере, на три порядка) меньше массы иона M_i . Это означает, что при каждом столкновении лишь незначительная

часть (порядка m/M_i от энергии электрона) передается иону. Это тот же самый эффект, который наблюдается в механике при упругом соударении шаров разной массы, когда действуют законы сохранения импульса и механической энергии. В предельном случае, если $m/M_i \approx 0$, передачи энергии вообще не происходит: это отражение "шарика" от упругой стены.

Действительно, рассмотрим ситуацию, когда на неподвижный шар массой M налетает маленький шарик массой $m \ll M$, движущийся со скоростью v_0 . Удар - центральный, движение - одномерное. Определим, какая энергия будет передана тяжелому шару M после столкновения. При упругом соударении выполняется как закон сохранения импульса, так и закон сохранения энергии. В соответствии с этими законами можно написать следующие два уравнения, связывающие начальную скорость v_0 легкого шарика m с его конечной скоростью v_1 , а также со скоростью v_M тяжелого шара после столкновения.

Закон сохранения импульса:

$$mv_0 = Mv_M + mv_1. \quad (3.60)$$

Закон сохранения кинетической энергии:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}Mv_M^2 + \frac{1}{2}mv_1^2. \quad (3.61)$$

Решение этой системы уравнений дает следующие результаты:

$$v_M = 2v_0 \frac{m/M}{1 + m/M}, \quad (3.62)$$

$$v_1 = -v_0 \frac{1 - m/M}{1 + m/M}. \quad (3.63)$$

Из (3.62) находим кинетическую энергию W_i [Дж], которую получит тяжелое тело (ион или нейтрал) массой M в результате столкновения с легким телом - электроном массой $m \ll M$:

$$W_i = \frac{1}{2}Mv_M^2 = \frac{2m^2}{M} \frac{v_0^2}{(1 + m/M)^2} \approx \frac{4m}{M} \frac{mv_0^2}{2}. \quad (3.64)$$

Таким образом, тяжелое тело (ион или нейтрал) получит лишь малую часть ($4m/M$) от энергии легкого тела (электрона). Учет "нецентральности" соударения шаров приводит к вдвое меньшей части переданной тяжелому шару энергии, а именно $2m/M$.

Все это означает, что для выравнивания (хотя бы приблизительного) энергий электрона и иона электрон должен много раз столкнуться с ионом. Время, необходимое для такого выравнивания энергии, а значит, выравнивания электронной и ионной температур ($T_e \approx T_i$) - время термализации τ_T - будет

$$\tau_T \sim \frac{M}{m} \tau_{ei}, \quad (3.65)$$

где τ_{ei} - время электрон-ионных столкновений.

Следует также заметить, что эта формула (3.65) для τ_T справедлива лишь при полностью ионизованном газе или во всяком случае тогда, когда степень ионизации высока настолько, что столкновениями электронов с нейтральными атомами можно пренебречь по сравнению со столкновениями электронов с ионами.

Если же это не так, то нужно учитывать столкновения с нейтрами. Среднее время τ любого столкновения электрона нужно оценивать по формуле

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_{ei}} + \frac{1}{\tau_{en}}. \quad (3.66)$$

Увеличение длины свободного пробега электронов с ростом температуры и соответствующее уменьшение частоты столкновений приводит к увеличению времени термализации плазмы, то есть выравниванию электронной и ионной температур.

Грубые оценки времени термализации τ_T для различных значений электронной температуры T_e [K] и плотности электронов N_e [м⁻³] можно сделать, если воспользоваться соответствующими формулами п.3.3 для сечения σ_{ei} электрон-ионных столкновений и с их помощью вычислять τ_{ei} - время электрон-ионных столкновений и затем учесть, что таких столкновений должно быть достаточно много ($\sim M_i/m$).

Более точно время термализации τ_T можно оценить из кинетического уравнения для функции распределения по энергии электронов и ионов с использованием интеграла столкновений (см. Гинзбург В.Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. М.: Наука, 1967; Арцимович Л.А. Сагдеев Р.З. Физика плазмы для физиков. М.: Атомиздат, 1979). Соответствующие расчеты дают следующую формулу для τ_T :

$$\tau_T = 2,5 \cdot 10^7 \frac{A}{Z^2} \frac{T_e^{3/2}}{N_e}, \quad (3.67)$$

где A - атомный вес атомов и ионов, входящих в состав плазмы.

Как видно из (3.67), τ_T примерно на три порядка превышает значение τ_T^e , которое дает (3.66). С учетом (3.66) можно говорить, что для термализации плазмы требуется порядка тысячи столкновений электрона с ионом.

Задачи

1. Оценить электропроводность σ_e [Ом⁻¹м⁻¹] полностью ионизованной водородной плазмы с концентрацией электронов $N_e = N_i$ и температурой $T = 10^8$ К. Найти время электрон-ионных столкновений τ_{ei} .

Ответ: $\sigma_e = 6 \cdot 10^8$ Ом⁻¹м⁻¹, $\tau_{ei} = 2 \cdot 10^{-4}$ с.

Указание. Оценить сечение $\sigma_{ei} = \pi b^2 \ln\left(\frac{r_d}{b}\right)$ электрон-ионных столкновений (r_d, b - соответственно, радиус Дебая и прицельный параметр столкновения). Найти тепловую скорость v_e электронов и воспользоваться соотношением $\sigma_{ei} N_e v_e \tau_{ei} = 1$.

2. Сфокусированный лазерный пучок на длине волны $\lambda = 1,06$ мкм с интенсивностью $I_L = 10^{14}$ Вт/м² производит световой пробой в газе атмосферного давления (атмосферная концентрация частиц газа $N = 2,6 \cdot 10^{25}$ м⁻³) и полностью его ионизует (концентрация свободных электронов $N_e = N$). Определить:

- а) максимальную энергию электронов $W^{\max}$ (отношение массы M иона к массе m электрона считать $6 \cdot 10^4$);
- б) кулоновский логарифм L_K ;
- в) сечение электрон-ионных столкновений σ_{ei} ;
- г) время τ_{ei} электрон-ионных столкновений;
- д) сечение $\sigma_{\text{отп}}$ обратнотормозного поглощения (столкновения - только электрон-ионные);
- е) коэффициент обратнотормозного поглощения $\alpha_{\text{отп}}$ [м⁻¹];
- ж) зависимость $\alpha_{\text{отп}}$ от интенсивности лазерного излучения I_L [Вт/м²].

Ответ: а) $W^{\max} = 48$ эВ; б) $L_K = 3$; в) $\sigma_{ei} = 0,9 \cdot 10^{-20}$ м²; г) $\tau_{ei} = 1,1 \cdot 10^{-13}$ с; д) $\sigma_{\text{отп}} = 3,1 \cdot 10^{-23}$ м²; е) $\alpha_{\text{отп}} = 8$ см⁻¹.

3. При лазерном моделировании планковского источника "черного" излучения достигалась температура плазмы $T = 10^6$ К. Для этого излучение лазера на длине волны $\lambda = 1,315$ мкм с энергией 100 Дж импульсе $3 \cdot 10^{-10}$ с фокусировалось внутрь золотой сферы радиу-

сом $R_m = 0,5$ мм. Предположив, что концентрация электронов составляет $N_e \approx 10^{28} \text{ м}^{-3}$ и что плазма излучает как черное тело, оценить:

- а) энергию W [Дж], испущенную за 0,3 нс, воспользовавшись законом Стефана-Больцмана ($\sigma_{\text{СБ}} = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт/м}^2 \text{ К}^4$);
 - б) длину волны λ_m , на которую приходится максимум спектральной испускательной способности, пользуясь законом смещения Вина ($\lambda_m T = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$);
 - в) Оптическую плотность $\alpha_{\text{отп}} R_m$ на длине волны λ_m ($\alpha_{\text{отп}} [\text{м}^{-1}]$ - коэффициент обратнотормозного поглощения (ОТП)).
- Ответ:** а) $W = 54$ Дж ; б) $\lambda_m = 2,9$ нм ; в) $\alpha_{\text{отп}} R_m \approx 1$.

Указание по п. в). Оценить сечение $\sigma_{\text{отп}}(\lambda_m)$ ОТП на длине волны λ_m . Для этого предварительно найти сечение σ_{ei} электрон-ионных столкновений, а также время τ_{ei} электрон-ионных столкновений.

4. Электрон массой m , движущийся со скоростью v_0 (кинетическая энергия $W_e = mv_0^2/2$), сталкивается с атомом массой $M \gg m$ и отражается от него под углом рассеяния θ . Считая столкновение упругим (выполняются законы сохранения импульса и энергии) найти усреднённую по θ часть энергии $\langle \Delta W_e \rangle_\theta$, которую теряет электрон в результате столкновения.

Ответ: $\langle \Delta W_e \rangle_\theta = \frac{2m}{M} W_e$.

Указание. Воспользоваться законом сохранения энергии и законом сохранения импульса в его векторной форме, применить теорему косинусов и усреднение по углам θ . При вычислениях пренебречь членами, содержащими $(m/M)^2$ в качестве множителя.

ГЛАВА 4. ПЛАЗМА В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ. ПРОХОЖДЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН СКВОЗЬ ПЛАЗМУ

4.1. Система Максвелла (в системе СИ). Физические законы, описываемые отдельными уравнениями. Некоторые основные следствия из системы уравнений Максвелла

4.1.1. Система уравнений Максвелла в системе СИ для векторов $\vec{H}, \vec{D}, \vec{E}, \vec{B}$. Связь между $\vec{H}$ и $\vec{D}$ (электрическая индукция), поляризация $\vec{P}$. Связь $\vec{H}$ и $\vec{B}$ (магнитная индукция). Постоянные ϵ_0 и μ_0 . Система уравнений Максвелла для векторов $\vec{B}$ и $\vec{E}$

Лазерное излучение - это электромагнитное излучение, отличающееся от обычного (теплого) прежде всего высокой степенью пространственной когерентности. Поэтому в рассматриваемых ниже физических моделях электромагнитное излучение считается монохроматическим (одночастотным). Для изучения различных процессов и явлений, в которых лазерный свет взаимодействует с веществом, в частности с плазмой, будут использоваться линейные уравнения Максвелла, которые в системе СИ имеют следующий вид:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}_f, \quad (4.1)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (4.2)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_f, \quad (4.3)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0. \quad (4.4)$$

Здесь введены обозначения:

$$\vec{\nabla} \times \vec{G} = \text{rot } \vec{G}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{G} = \text{div } \vec{G}, \quad \text{где } \vec{G} = \vec{H}, \vec{D}, \vec{E}, \vec{B}.$$

Здесь и далее индекс "f" обозначает свободные заряды и токи свободных зарядов ($f = \text{free}$ - свободный). Индекс "b" обозначает связанные заряды и токи связанных зарядов ($b = \text{bound}$ - связанный). Таким образом, здесь и далее $\vec{j}_f = eN_e \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}$ плотность тока свободных зарядов с концентрацией $N_e [\text{м}^{-3}]$, $\vec{u} [\text{м}]$ - смещение свободного заряда. N_b - концентрация связанных зарядов, которая в данном случае считается равной концентрации нейтральных частиц N_n .

Электрическое поле в среде $\vec{E}$ и вектор $\vec{D}$ (т.н. электрическая индукция) в изотропной среде связаны соотношением

$$\vec{D}[\text{Кл/м}^2] = \epsilon\epsilon_0\vec{E} = \epsilon_0\vec{E} + \vec{P}_b, \quad (4.5)$$

где $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Кл/В} \cdot \text{м}$ - так называемая “диэлектрическая проницаемость пустоты”, $\epsilon = 1 + \vec{P}_b/\epsilon_0\vec{E}$ - безразмерная (относительная) диэлектрическая проницаемость среды, содержащей только **связанные** заряды, $\vec{P}_b[\text{Кл/м}^2] = eN_b\vec{\xi}$ - поляризация вещества, обусловленная **связанными** зарядами, ξ - смещение связанных зарядов.

Вектор $\vec{D}$ называется также “электрическая индукция”. Его производная по времени $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ в (4.1), с учетом (4.5), представляет собой сумму плотности тока смещения:

$$\vec{J}_{\text{см}} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (4.6)$$

и тока связанных зарядов $\vec{J}_b$:

$$\vec{J}_b = \frac{\partial \vec{P}_b}{\partial t} = eN_b \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t}. \quad (4.7)$$

Таким образом,

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{J}_{\text{см}} + \vec{J}_b. \quad (4.8)$$

Как видно из (4.1), ток смещения $\vec{J}_{\text{см}} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ создает магнитное поле наряду с током связанных зарядов $\vec{J}_b = \frac{\partial \vec{P}_b}{\partial t}$ и током проводимости $\vec{J}_f[\text{А/м}^2]$ (т.е. тока свободных зарядов), который можно представить в форме, аналогичной (4.7):

$$\vec{J}_f = eN_e \vec{v} = eN_e \frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\partial \vec{P}_f}{\partial t}, \quad (4.9)$$

здесь $N_e[\text{м}^{-3}]$, - концентрация свободных электронов, $\vec{u}[\text{м}]$ - смещение электрона с зарядом $e[\text{Кл}]$ под действием электрического поля $\vec{E}$, $\vec{v} = \frac{d\vec{u}}{dt}$ - скорость свободного электрона, $\vec{P}_f = eN_e\vec{u}$ - поляризация свободных зарядов. $\rho_f[\text{Кл/м}^3]$ представляет собой объемную плотность свободных зарядов, например, на обкладках конденсатора.

Соотношение между магнитной индукцией $\vec{B}$ и магнитным полем $\vec{H}$ таково:

$$\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}. \quad (4.10)$$

Здесь размерная постоянная μ_0 - "магнитная проницаемость пустоты", а μ - безразмерная относительная магнитная проницаемость. Постоянные μ_0 и ϵ_0 связаны соотношением

$$\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} = c^2,$$

где $c = 3 \cdot 10^8$ м/с - скорость света в пустоте. Величина ρ_f [Кл/м³] - объемная плотность *свободных* зарядов, то есть зарядов, отличных от связанных зарядов материальной среды. Существенным обстоятельством, о котором следует помнить, является то, что в уравнениях Максвелла, записываемых в системе СИ, векторы $\vec{H}$, $\vec{D}$, $\vec{E}$, $\vec{B}$ имеют разную размерность: $\vec{E}$ [В/м], $\vec{D}$ [Кл/м²], $\vec{H}$ [А/м], $\vec{B}$ [В·с/м²].

В литературе [1] (выпуски 5, 6, 7) пользуются обычно одной парой векторов: $\vec{E}$ [В/м] - полное электрическое поле и $\vec{B}$ [В·с/м²] - полное магнитное поле (магнитная индукция). С этой парой векторов уравнения Максвелла выглядят так [1] (выпуск 7, с.51-54):

$$c^2 \epsilon_0 \vec{\nabla} \times \vec{B} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j}, \quad (4.11)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (4.12)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho, \quad (4.13)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (4.14)$$

здесь $\vec{j} = \vec{j}_f + \vec{j}_b$ - полная плотность тока зарядов (как свободных, так и связанных), а $\rho = \rho_f + \rho_b$ - полная объемная плотность заряда, включающая в себя как свободные заряды (ρ_f), так и связанные (ρ_b). При этом

$$\rho_b = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}_b. \quad (4.15)$$

В справедливости (4.15) можно убедиться, подставив (4.5) в (4.3). Физический смысл (4.15) обсуждается ниже в п. 4.1.4.

4.1.2. Обобщенный закон Био-Савара (первое уравнение Максвелла). Ток смещения. Полный ток зарядов в веществе как сумма тока свободных зарядов (ток проводимости) и тока связанных зарядов (поляризационный ток). Интегральная форма первого уравнения

Уравнение (4.1), а также эквивалентное ему уравнение (4.11) представляет собой обобщение закона Био-Савара и связывает вихревое маг-

нитное поле $\vec{H}[A/m] = c^2 \epsilon_0 \vec{B}[B \cdot c/m^2]$ с полной плотностью тока $\vec{j}_\Sigma[A/m^2] = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j}$.

$$c^2 \epsilon_0 \vec{\nabla} \times \vec{B} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j}.$$

Как видно из правой части (4.11), $\vec{j}_\Sigma[A/m^2]$ в свою очередь состоит из плотности тока смещения $\vec{j}_{см} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, плотности тока электрических зарядов $\vec{j}[A/m^2]$. В свою очередь $\vec{j}[A/m^2]$ представляет собой сумму поляризационного тока (связанных зарядов) $\vec{j}_b = \frac{\partial \vec{P}_b}{\partial t}$ (4.7) и (плотности) тока проводимости j_f (свободных зарядов) (4.9):

$$\vec{j} = \vec{j}_b + \vec{j}_f. \quad (4.16)$$

Таким образом, полный ток $\vec{j}_\Sigma$ есть

$$\vec{j}_\Sigma = \vec{j}_{см} + \vec{j}_b + \vec{j}_f = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}_b}{\partial t} + \vec{j}_f = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j}. \quad (4.17)$$

$\vec{E}[B/m]$ - электрическое поле, $\vec{P}_b[Kл/м^2]$ - поляризация связанных зарядов.

Если действующее внешнее электрическое поле - переменное (гармоническое), то формулы типа (4.7) можно использовать и для свободных зарядов. Например, ток проводимости $\vec{j}_f$ (т.е. ток свободных зарядов) можно представить как производную по времени от некой "поляризации" $\vec{P}_f[Kл/м^2]$, представленной выражением типа (4.9)

$$\vec{P}_f = e N_e \vec{u}. \quad (4.18)$$

Тогда

$$\vec{j}_f = \frac{\partial \vec{P}_f}{\partial t} = e N_e \vec{v} = e N_e \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}, \quad (4.19)$$

где $\vec{u}$ - смещение свободного электрона под действием электрического поля, $N_e[м^{-3}]$ - концентрация свободных электронов.

Таким образом, в уравнениях (4.11) и (4.13) величины $\vec{j}$ и ρ обозначают *полные* плотности всех токов и зарядов: как свободных (индекс "f") так и связанных - поляризационных (индекс "b"), например, в диэлектрике. Этой особенностью уравнения (4.11) и (4.13) принципиально отличаются от (4.1) и (4.3), в которых учитываются *только свободные* заряды и токи. Таким образом, полную плотность тока $\vec{j}$ можно представить в виде

$$\vec{j} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}, \quad (4.20)$$

где

$$\vec{P} = \vec{P}_b + \vec{P}_f. \quad (4.21)$$

В этом случае первое уравнение Максвелла (4.11) можно записать так:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = n^2 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (4.22)$$

Здесь n - коэффициент преломления определяется из соотношения

$$n = 1 + \frac{P}{\epsilon_0 E}, \quad (4.23)$$

а P [Кл/м²] определяется формулой (4.21).

Интегральная форма первого уравнения, применение теоремы Стокса. Ток зарядов и ток смещения как причина возникновения магнитного поля

Рассмотрим некоторую поверхность S , ограниченную контуром Γ . Сквозь эту поверхность проходит вихревой вектор $c^2 \epsilon_0 \vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{H}$, а также поле $\vec{E}$ [В/м] и ток зарядов плотностью $\vec{j}$ [А/м²]. Проинтегрируем обе части первого уравнения (4.11) по поверхности S :

$$c^2 \epsilon_0 \int_S \text{rot} \vec{B} ds = \epsilon_0 \frac{\partial \int_S \vec{E} ds}{\partial t} + \int_S \vec{j} ds. \quad (4.24)$$

Применим к левой части (4.24) теорему Стокса, которая гласит: “поток вихря ($\vec{\nabla} \times \vec{B}$) вектора ($\vec{B}$) через поверхность (S) равен циркуляции этого вектора ($\vec{B}$) по контуру (Γ), ограничивающему эту поверхность”. Для левой части (4.24) получаем

$$c^2 \epsilon_0 \int_S \text{rot} \vec{B} ds = c^2 \epsilon_0 \oint_{\Gamma} \vec{B} dl. \quad (4.25)$$

Уравнение (4.24) приобретает вид

$$c^2 \epsilon_0 \oint_{\Gamma} \vec{B} dl = i_{\text{см}} + i, \quad (4.26)$$

где $i_{\text{см}} [A] = \epsilon_0 \frac{\partial \int_S \vec{E} ds}{\partial t}$ - ток смещения, а $i [A] = \int_S \vec{j} ds$ - ток зарядов (свободных и связанных).

Физический смысл уравнения (4.26) можно изложить так: циркуляция магнитного поля ($\vec{H} = c^2 \epsilon_0 \vec{B}$) по контуру равна сумме тока смещения и тока электрических зарядов.

Или совсем кратко: магнитное поле создается током зарядов и (или) током смещения.

Ток зарядов $i[A]$ и ток смещения $i_{\text{см}}[A]$ могут быть пространственно разделены. Пусть, например, имеется плоский конденсатор, состоящий из двух круглых пластин радиуса r , который заряжается током проводимости, то есть током свободных зарядов: $i=i_f$ (рис. 4.1). Пусть имеется некоторая плоская поверхность площадью $S=\pi R^2$, ограниченная контуром Γ в виде окружности длиной $2\pi R (R>r)$. Рассмотрим ситуацию, когда поверхность находится в положении (1) вне конденсатора. В этом случае сквозь нее и по нормали к ней проходит зарядный ток i . Внутри контура Γ нет электрического поля, проходящего сквозь поверхность S ($E=0$). Магнитное поле обусловлено исключительно зарядным током (*током проводимости*).

$$c^2 \epsilon_0 \oint_{\Gamma} B dl = i_f. \quad (4.27)$$

Пусть теперь поверхность переместилась в положение (2), где она находится между обкладками конденсатора. В этом случае зарядный ток проводимости сквозь поверхность отсутствует ($i_f=0$). Зато есть меняющееся во времени электрическое поле $\vec{E}(t)$ между обкладками конденсатора

и значит есть ток смещения $i_{\text{см}}[A] = \epsilon_0 \frac{\partial \int E ds}{\partial t}$. Согласно уравнению (4.26), имеет место соотношение

$$c^2 \epsilon_0 \oint_{\Gamma} B dl = i_{\text{см}}. \quad (4.28)$$

Магнитное поле в данном месте пространства обусловлено исключительно *током смещения*.

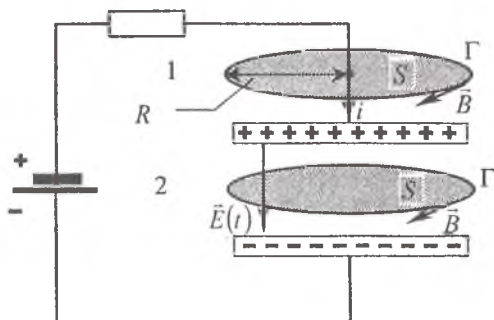


Рис. 4.1. Интегральная форма 1-го уравнения Максвелла на примере заряда конденсатора. Пространственное разделение тока зарядов и тока смещения

4.1.3. Закон электромагнитной индукции Фарадея (второе уравнение Максвелла)

Второе уравнение (4.12) системы Максвелла (4.11) - (4.14) в дифференциальной форме выглядит так:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Чтобы представить (4.12) в интегральной форме, применим теорему Стокса также как это было сделано в п.4.1.2. Для левой части (4.12) получаем

$$\oint_S \text{rot} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \oint_{\Gamma} \vec{E} d\vec{l}. \quad (4.29)$$

Здесь, как и в п.4.1.2, $\Gamma[m]$ - произвольный контур, а $S[m^2]$ - поверхность, ограниченная этим контуром.

Уравнение (4.12) приобретает вид

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} d\vec{l} = -\frac{\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} d\vec{s}}{\partial t}. \quad (4.30)$$

Это уравнение можно записать еще и так:

$$U = -\frac{\partial \Phi}{\partial t},$$

где $U[B] = \oint_{\Gamma} E d\vec{l}$ - ЭДС, наведенная в контуре *изменяющимся во времени*

магнитным потоком $\Phi[B \cdot c] = \int_S E d\vec{s}$ через поверхность $S[m^2]$, ограниченную контуром $\Gamma[m]$.

Магнитный поток может изменяться за счет изменения магнитного поля или (и) за счет изменения контура, например его деформации.

Общее условие для возникновения ЭДС - это наличие силы, действующей на свободные электроны в проводнике. В свою очередь, сила $F[H]$, действующая на заряд (например, электрон), есть

$$\vec{F} = e\vec{E} + e[\vec{v} \times \vec{B}]. \quad (4.31)$$

В движущемся проводнике при неизменном поле $\vec{B}$ движение электронов (и, следовательно, возникновение ЭДС) происходит под действием силы Лоренца:

$$\vec{F}_L = e[\vec{v} \times \vec{B}]. \quad (4.32)$$

В неподвижном проводнике ($\vec{v} = 0$) перемещение зарядов, приводящее к возникновению ЭДС, происходит под действием кулоновской силы $\vec{F}_K$:

$$\vec{F}_K = e\vec{E}, \quad (4.33)$$

где $\vec{E}[\text{В/м}]$ - электрическое поле, возникающее в результате изменения во времени поля $\vec{B}(t)$ в соответствии с уравнением (4.30).

4.1.4. Закон Гаусса (третье уравнение системы Максвелла). Пространственно неоднородная поляризация и объемная плотность связанных зарядов. Закон Кулона, кулоновский потенциал, классический радиус электрона

Третье уравнение Максвелла (4.13) представляет собой закон Гаусса, который в дифференциальной форме выглядит так:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho.$$

Применяя теорему Гаусса, получим третье уравнение (4.13) в интегральной форме

$$\int_s E ds = \frac{Q}{\epsilon_0}. \quad (4.34)$$

Как было отмечено в п.4.1.1, закон Гаусса (4.13) связывает электрическое поле $E[\text{В/м}]$ с полной объемной плотностью зарядов $\rho[\text{Кл/м}^3]$, которая равна сумме плотностей зарядов: свободных ρ_f и связанных ρ_b :

$$\rho = \rho_f + \rho_b.$$

В формуле (4.17) $\vec{P}_b$ есть поляризация среды, содержащей связанные электроны с концентрацией $N_b[\text{м}^{-3}]$, равной концентрации нейтральных частиц N_n . Связанные заряды под действием поля смещаются на конечное расстояние $\xi(t)$:

$$P_b = eN_n \xi(t). \quad (4.35)$$

При этом $N_n[\text{м}^{-3}]$ может быть пространственно неоднородной величиной:

$$N_n = N_n(x, y, z). \quad (4.36)$$

В этом случае в правой части третьего уравнения Максвелла (4.13) содержится плотность **связанных** зарядов

$$\rho_b = -\nabla \cdot \vec{P}_b = -e \nabla N_n(x, y, z), \quad (4.37)$$

как это видно из пояснений к уравнению (4.13) системы (4.11) - (4.13). На рис 4.2 представлен случай (одномерный), когда концентрация диполей нарастает в положительном направлении координаты x . Как видно из рисунка, поверхностный положительный заряд (то есть положительный поток поляризации), “проступивший” (слева направо) сквозь плоскость S_B из выделенного объема, больше, чем отрицательный, прошедший сквозь плоскость S_A внутрь объема, ограниченного плоскостями S_A и S_B , то есть суммарный заряд, покинувший выделенный объем (поток поляризации), -

положительный. Поэтому в соответствии с законом сохранения заряда внутри объема образовался связанный заряд противоположного знака (в данном случае - отрицательный).

Чисто математически в этом можно убедиться, проинтегрировав по объему обе части (4.37) и применив теорему Гаусса. В результате получим:

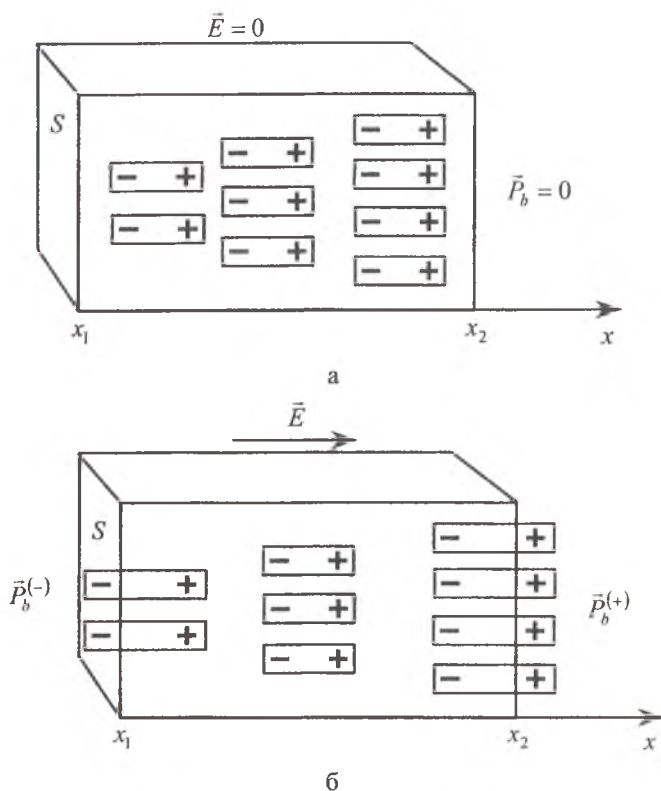


Рис. 4.2. Доказательство соотношения $\vec{\nabla} \cdot \vec{P}_b = -\rho_b$:

а) поля нет ($\vec{E} = 0$). Поляризации связанных зарядов нет $\vec{P}_b = 0$.

б) Если электрическое поле $\vec{E}$. Поляризация $\vec{P}_b$ нарастает слева направо, то есть

$\vec{\nabla} \cdot \vec{P}_b = \frac{\partial P_b}{\partial x} > 0$ ($P_b^{(+)}(x_2) > P_b^{(+)}(x_1)$). При этом заряд в выделенном объеме – отрицательный, ибо через границу x_2 выступило (ушло) больше положительных зарядов, чем выступило отрицательных зарядов через границу x_1 . Полный поток поляризации – положительный, в то время как заряд в объеме отрицательный. Таким образом, $\vec{\nabla} \cdot \vec{P}_b = -\rho_b$

$$Q_b = - \int_s P ds.$$

Но, как видно из рис. 4.2, суммарный поток поляризации положителен, то есть $\int_s P ds > 0$. Следовательно, $Q_b < 0$.

Для сферически симметрично расположенных зарядов, например в случае точечного заряда, закон Кулона можно получить из (4.13), воспользовавшись теоремой Гаусса. Окружив заряд q [Кл] с объемной плотностью ρ [Кл/м³] сферой радиусом r , получаем

$$\int \nabla \cdot E dV = 4\pi r^2 E = \int_{\epsilon_0} \frac{\rho}{\epsilon_0} dV = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (4.38)$$

Таким образом, закон Кулона имеет вид

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (4.39)$$

Кулоновский потенциал представляет собой работу W_k [Дж] по перенесению заряда e из бесконечности на расстояние R от заряда q :

$$W_k = eq \int E(r) dr = \frac{eq}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 R}, \quad (4.40)$$

если $q = Ze$.

Классический радиус электрона - это такое расстояние r_e от заряда $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл, на котором кулоновский потенциал равен mc^2 :

$$r_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc} = 2,84 \cdot 10^{-15} \text{ м}. \quad (4.41)$$

4.1.5. Закон сохранения заряда. Закон Ома. Релаксация Максвелла. Закон Джоуля-Ленца. Обратнотормозное поглощение

Закон сохранения заряда

Этот закон следует из первого уравнения Максвелла (4.11), если применить к правой и левой его частям операцию $\nabla \equiv \text{div}$. Так как для любого вектора $\vec{A}$ справедливо тождество

$$\text{div}(\text{rot} \vec{A}) \equiv 0, \quad (4.42)$$

то, следовательно, из первого уравнения имеем

$$\frac{\partial(\epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E})}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0. \quad (4.43)$$

Воспользовавшись третьим уравнением Максвелла (4.13), подставим в (4.43) значение $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon_0$. В результате для плотности тока j [А/м²] и объемной плотности зарядов ρ получаем так называемое уравнение непрерывности:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (4.44)$$

Это уравнение представляет собой закон сохранения заряда, в чем можно убедиться, рассмотрев одномерный случай, когда плотность тока j изменяется лишь вдоль одной координаты x (рис. 4.3). Пусть через сечение $S_x = S$ протекает ток с плотностью $j(x)$, а через сечение $S_{x+\Delta x} = S$ - ток с плотностью $j(x+\Delta x) > j(x)$. Из-за различных значений $j(x)$ и $j(x+\Delta x)$ из объема $\Delta V = S\Delta x$ за время Δt вытекает заряда больше, чем втекает. Это приводит к изменению (уменьшению) заряда на величину ΔQ [Кл] за время Δt :

$$[j(x+\Delta x) - j(x)]S\Delta t = -\Delta Q. \quad (4.45)$$

Так как $[j(x+\Delta x) - j(x)] = \frac{\partial j}{\partial x} \Delta x$, то, следовательно, из (4.45) имеем:

$$\frac{\partial j}{\partial x} = \left(\frac{\Delta Q}{\Delta t} \right) / (S\Delta x).$$

Так как $\frac{\Delta Q}{S\Delta x} = \frac{\Delta Q}{\Delta V} = \rho$ [Кл/м³], то, следовательно,

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t \Delta V} = \frac{\partial \rho}{\partial t},$$

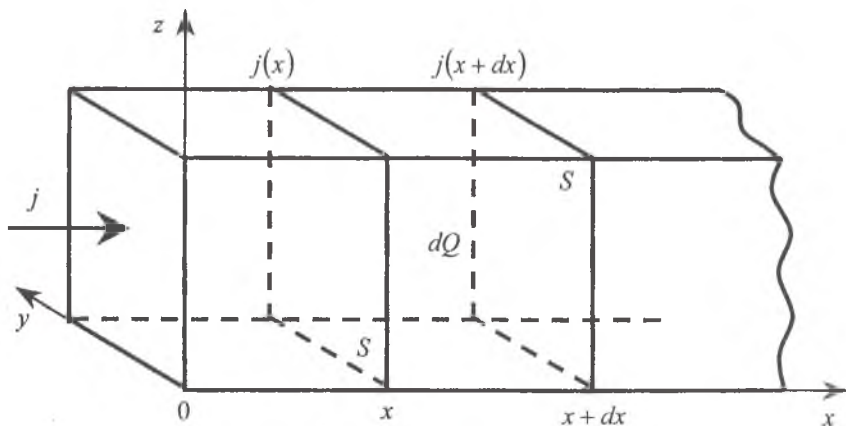


Рис. 4.3. Закон сохранения заряда

где $\rho[\text{Кл/м}^3] = \frac{\Delta Q}{\Delta V}$ - объемная плотность зарядов, соответственно

$$\frac{\partial j}{\partial x} = -\frac{\partial \rho}{\partial t},$$

что доказывает справедливость уравнения (4.44).

Заметим, что закон сохранения электрического заряда, или уравнение непрерывности (4.44), справедлив для *любых* токов и зарядов: как свободных, так и связанных (поляризационных).

Закон Ома

Закон Ома содержится в первом уравнении Максвелла (4.11). Он описывает связь плотности тока $\vec{j}_f$ свободных зарядов с полем $\vec{E}(t)$:

$$\vec{j}_f = \sigma_3 \vec{E}. \quad (4.46)$$

Коэффициент $\sigma_3[\text{Ом}^{-1}\text{м}^{-1}]$ - удельная электропроводность.

Если электрическое поле постоянное ($\omega=0$), то удельная электропроводность имеет вид:

$$\sigma_3 = \frac{e^2 N_e}{m} \tau_{ст}. \quad (4.47)$$

Здесь e и m - заряд и масса электронов, $N_e[\text{м}^{-3}]$ - их концентрации, $\tau_{ст}$ - время столкновений.

Формула (4.47) для $\sigma_3[\text{Ом}^{-1}\text{м}^{-1}]$ получается из уравнения для стационарного (дрейфового) движения со скоростью $v_{др}$ сталкивающегося электрона под действием постоянного поля E_n :

$$m \frac{v_{др}}{\tau_{ст}} = e E_n. \quad (4.48)$$

А так как

$$j_f = e N_e v_e, \quad (4.49)$$

то, следовательно,

$$j_f = \frac{e^2 N_e \tau_{ст}}{m} E_n. \quad (4.50)$$

Отсюда с учетом (4.46) и получаем (4.47). Для поля E , меняющегося по гармоническому закону с частотой ω , и амплитудой E_0 :

$$E = E_0 \cos \omega t \quad (4.51)$$

формула (4.46) имеет вид:

$$j_f = \frac{\sigma_3}{\omega^2 \tau^2 + 1} E_0 \cos(\omega t - \varphi), \quad (4.52)$$

где $\tau[\text{с}]$ - время столкновений электронов;

$$\operatorname{tg} \varphi = \omega \tau. \quad (4.53)$$

Справедливость (4.52) можно доказать следующим образом. По определению, плотность тока свободных зарядов j_b есть

$$j_f = eN_e v_e, \quad (4.54)$$

где $v_e = \frac{du}{dt}$ - скорость движения свободных электронов под действием поля. Согласно второму закону Ньютона, с учетом формулы Эйлера уравнение движения свободного электрона под действием поля есть

$$m \frac{dv}{dt} + m \frac{v}{\tau} = eE_0 \cos \omega t = \frac{1}{2} eE_0 \exp\{i\omega t\} + \text{к.с.}, \quad (4.55)$$

где к.с. означает комплексно-сопряженную величину. Решение уравнения (4.55) находим методом комплексных амплитуд. Оно имеет вид:

$$v(t) = \frac{eE_0}{2m\left(i\omega + \frac{1}{\tau}\right)} \exp\{i\omega t\} + \text{к.с.} = 2\operatorname{Re} \left[\frac{eE_0}{2m\left(i\omega + \frac{1}{\tau}\right)} \exp\{i\omega t\} \right], \quad (4.56)$$

ибо сумма двух комплексно-сопряженных величин равна удвоенной реальной части любой из них. Окончательно для скорости $v(t)$ получаем формулу

$$v(t) = \frac{eE_0}{m\left(\omega^2 + \frac{1}{\tau^2}\right)} \left(\frac{1}{\tau} \cos \omega t + \omega \sin \omega t \right). \quad (4.57)$$

Подставляя (4.57) в (4.54), получим с учетом (4.47)

$$j_f = \frac{\sigma_3}{\omega^2 \tau^2 + 1} E_0 (\cos \omega t + \omega \tau \sin \omega t) \quad (4.58)$$

или

$$j_f = \frac{\sigma_3}{\sqrt{\omega^2 \tau^2 + 1}} E_0 \cos(\omega t - \varphi), \quad (4.59)$$

где

$$\operatorname{tg} \varphi = \omega \tau. \quad (4.60)$$

Отсюда видно, что плотность тока $j_b(t)$ отстает по фазе от поля. При этом фазовый сдвиг тем ближе к $\pi/2$, чем больше произведение $\omega \tau$. При $\omega \tau \ll 1$ или $\omega = 0$ имеем закон Ома в "каноническом" виде:

$$\bar{j}_f = \sigma_3 \bar{E}. \quad (4.61)$$

Максвелловская релаксация свободных зарядов

Подставляя j_f в виде (4.61) в уравнение непрерывности (4.44), получаем

$$\sigma_3 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} + \frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (4.62)$$

Воспользовавшись третьим уравнением Максвелла (4.13)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0},$$

получим для неравновесной плотности $\Delta \rho_f$ следующее уравнение:

$$\frac{\partial \Delta \rho_f}{\partial t} + \sigma_3 \frac{\Delta \rho_f}{\epsilon_0} = 0. \quad (4.63)$$

Его решение есть

$$\Delta \rho_f = \Delta \rho_f(0) \exp\left(-\frac{\sigma_3}{\epsilon_0} t\right), \quad (4.64)$$

где $\Delta \rho_f(0)$ - начальное отклонение (возмущение) объемной плотности зарядов от равновесного значения.

Величина $\tau_M = \frac{\epsilon_0}{\sigma_3}$ называется временем максвелловской релаксации,

а $\frac{1}{\tau_M}$ - скоростью (частотой) максвелловской релаксации.

Время максвелловской релаксации τ_M необходимо учитывать при анализе взаимодействия электромагнитного излучения (света) с плазмой. В частности, распределение зарядов в плазме будет успевать следить за изменениями амплитуды поля (а значит, и за интенсивностью), если частота ν этих изменений много ниже частоты максвелловской релаксации

$$\nu \ll \frac{1}{\tau_M}. \quad (4.65)$$

Для металлов типа серебра, у которого удельная проводимость $\sigma_3^{Ag} = 6 \cdot 10^7 \text{ Ом}^{-1} \text{ м}^{-1}$, это неравенство выполняется для всех возможных частот, ибо для серебра $1/\tau_M$ - очень большая величина:

$$\frac{1}{\tau_M} = \frac{\sigma_3^{Ag}}{\epsilon_0} = 0,7 \cdot 10^{19} \text{ с}^{-1}.$$

Иная ситуация в слабоионизованной плазме. Например, плазма газоразрядного He-Ne лазера имеет следующие характеристики: концентрация электронов $N_e = 3 \cdot 10^{17} \text{ м}^{-3}$, электронная температура $T = 3 \cdot 10^4 \text{ К}$ т.е. энергия электронов $W_e = 2,66 \text{ эВ}$, а их тепловая скорость $v_e \cong 10^6 \text{ м/с}$; концентрация нейтральных атомов (нейтралов) $N_n = 2 \cdot 10^{22} \text{ м}^{-3}$, (т.е. степень ионизации $\alpha = N_e/N_n = 1,5 \cdot 10^{-5}$). Столкновения электронов происходят в основ-

ном с нейтралами. Следовательно, сечение столкновений - газокинетическое: $\sigma_{\text{гк}} \cong 10^{-19} \text{ м}^2$. Время между столкновениями есть

$$\tau = \frac{1}{\sigma_{\text{гк}} N_n v_e}.$$

Таким образом, удельная электропроводность $\sigma_{\text{He-Ne}}^{\text{He-Ne}} [\text{Ом}^{-1} \text{ м}^{-1}]$ плазмы He-Ne лазера равна

$$\sigma_{\text{He-Ne}} = \frac{e^2 N_e \tau}{m} = \frac{e^2 N_e}{m \sigma_{\text{гк}} N_n v_e} = \frac{e^2 \alpha}{m \sigma_{\text{гк}} v_e}.$$

Подставляя сюда значения $\alpha = 1,5 \cdot 10^{-5}$, $v_e = 10^5 \text{ м/с}$, $\sigma_{\text{гк}} = 10^{-19} \text{ м}^2$ получаем

$$\sigma_{\text{He-Ne}} = 4,27 \text{ Ом}^{-1} \text{ м}^{-1}.$$

Частота максвелловской релаксации $1/\tau_M$ в газоразрядной плазме He-Ne лазера в $1,5 \cdot 10^7$ раз меньше, чем для серебра:

$$\frac{1}{\tau_M} = 5 \cdot 10^{11} \text{ с}^{-1}.$$

Таким образом, неравенство (4.65) выполняется для частот, не превышающих частоты СВЧ-диапазона.

Закон Джоуля-Ленца. Обратнотормозное поглощение

Закон Джоуля-Ленца может быть получен из закона Ома в форме (4.50), если обе части (4.58) умножить на поле $E = E_0 \cos \omega t$ и усреднить по периоду колебаний $T = 2\pi/\omega$:

$$P_v^{\text{Д-Л}} [\text{Вт/м}^3] = \langle j(t) E(t) \rangle = \frac{\sigma_2}{\omega^2 \tau^2 + 1} \frac{E_0^2}{2}. \quad (4.66)$$

Закон Джоуля-Ленца в форме (4.66) описывает среднюю по времени объемную плотность мощности $P_v^{\text{Д-Л}} [\text{Вт/м}^3]$ тепловых потерь, возникающих в проводящей среде под действием поля с амплитудой $E_0 [\text{В/м}]$. Воспользовавшись (4.66), можно показать, что объемная плотность электрической энергии $w_E [\text{Дж/м}^3]$ может быть представлена следующей весьма полезной для практики формулой:

$$w_E = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2}.$$

Из (4.66), домножив числитель и знаменатель на ϵ_0 , получаем

$$P_v^{\text{Д-Л}} [\text{Вт/м}^3] = \frac{\sigma_2}{\epsilon_0} \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} = \frac{w_E}{\tau_M}, \quad (4.67)$$

где $w_E [\text{Дж}/\text{м}^3] = \epsilon_0 E_0^2 / 2$ - объемная плотность электрической энергии, а $\epsilon_0 / \sigma_3 = \tau_M$ - время максвелловской релаксации. Таким образом, удельная плотность потерь равна скорости максвелловской релаксации объемной плотности электрической энергии, поделенной на величину $\omega^2 \tau^2 + 1$. Для проводника длиной $L[\text{м}]$ и сечением $S[\text{м}^2]$ формула (4.67), описывающая закон Джоуля-Ленца тождественными преобразованиями, может быть приведена к привычному виду:

$$P_{\text{Д-Л}}[B\tau] = P_{\text{В}}^{\text{Д-Л}}[B\tau/\text{м}^3] \cdot S[\text{м}^2] \cdot L[\text{м}] = \frac{U^2}{R}. \quad (4.68)$$

Здесь $U[B] = E[B/\text{м}] \cdot L[\text{м}]$ - разность потенциалов на длине проводника, $R[\text{Ом}]$ - его сопротивление:

$$R = \frac{1}{\sigma_3} \frac{L}{S}. \quad (4.69)$$

E - эффективная напряженность поля, определяемая соотношением

$$\langle E^2(t) \rangle = \frac{E_0^2}{2}. \quad (4.70)$$

Из закона Джоуля-Ленца в форме (4.66) можно получить формулу для так называемого *обратнотормозного поглощения* (ОТП) света, распространяющегося в плазме (подробности - см. п.4.4.3). Поглощение называется обратнотормозным потому, что его физический механизм обусловлен столкновениями электронов и тем самым противоположен тормозному излучению.

Распространение света сквозь плазму, как известно из п.4.4.1, возможно, если частота колебаний электрического поля ω больше плазменной ω_p

$$\omega > \omega_p. \quad (4.71)$$

Напомним, что

$$\omega_p^2 = \frac{e^2 N_e}{\epsilon_0 m} \quad (4.72)$$

или

$$\lambda_c^2 r_e N_e = \pi, \quad (4.73)$$

где

$$r_e = \frac{e^2}{4\pi \cdot \epsilon_0 m c^2} = 2,84 \cdot 10^{-15} \text{ м} \quad (4.74)$$

- классический радиус электрона и $\lambda_c = 2\pi c / \omega_p$ - критическая длина волны.

Нетрудно убедиться в том, что условие (4.71) означает, что

$$\omega \tau \gg 1. \quad (4.75)$$

Действительно, как показано в п. 4.1, критерий существования плазмы (условие коллективности) - это выполнение неравенства

$$\omega_p \tau > 1. \quad (4.76)$$

Умножив обе части (4.71) на τ , получим

$$\omega \tau > \omega_p \tau, \quad (4.77)$$

следовательно,

$$\omega \tau \gg 1.$$

С учетом того, что $\omega \tau \gg 1$, перепишем (4.66) так:

$$P_{\nu}^{Д-Л} \left[\frac{B\Gamma}{M^3} \right] \cong \frac{\sigma_3}{(\omega \tau)^2} \frac{1}{2} E_0^2. \quad (4.78)$$

Принимая во внимание, что $\omega^{-2} = \frac{1}{4\pi^2 c^2} \frac{\lambda^2}{c^2}$, $\sigma_3 = \frac{e^2 N_e}{m} \tau$,

$$P_{\nu}^{Д-Л} = \frac{1}{\pi} \frac{e^2 N_e}{4\pi \cdot \epsilon_0 m c^2} \frac{\lambda^2}{c \tau^2} \frac{1}{2} E_0^2 \epsilon_0 c. \quad (4.79)$$

Учтем, что

$$c \epsilon_0 \frac{1}{2} E_0^2 = I \left[\frac{B\Gamma}{M^2} \right]$$

есть плотность мощности (интенсивность) излучения, распространяющегося сквозь плазму, а также что $\frac{e^2}{4\pi \cdot \epsilon_0 m c^2} = r_e$ - классический радиус электрона.

Теперь (4.79) можно записать так:

$$P_{\nu}^{Д-Л} = - \frac{1}{\pi} \frac{\lambda^2 r_e N_e}{c \tau} I = -\alpha_{отп} I. \quad (4.80)$$

Здесь $\alpha_{отп} [M^{-1}]$ - коэффициент так называемого обратнотормозного поглощения:

$$\alpha_{отп} [M^{-1}] = \sigma_{отп} N_e. \quad (4.81)$$

Он представляет собой произведение концентрации электронов N_e на сечение обратнотормозного поглощения $\sigma_{отп} [M^2]$:

$$\sigma_{отп} [M^2] = \frac{1}{\pi} \frac{\lambda^2 r_e}{c \tau}. \quad (4.82)$$

Так как, согласно соотношению (4.69), квадрат критической длины волны λ_e^2 есть

$$\lambda_e^2 = \frac{\pi}{r_e N_e},$$

то формула для $\alpha_{отп} [M^{-1}]$ может быть представлена еще и так:

$$\alpha_{\text{отт}} = \left(\frac{\lambda}{\lambda_c} \right)^2 \frac{1}{c\tau}.$$

4.1.6. Вектор Умова-Пойнтинга, его сущность и содержание. Объемная плотность электрической и магнитной энергий. Плотность мощности (интенсивность) электромагнитного излучения. Закон Джоуля-Ленца. Обратнотормозное поглощение

Чтобы найти вектор Умова-Пойнтинга, нужно получить формулу для соответствующего вектора $\vec{S}$, который представляет собой векторное произведение полей: электрического $\vec{E}$ и магнитного ($\vec{H}$ или $\vec{B}$). Среднее по времени от S представляет собой плотность потока $I[\text{Вт}/\text{м}^2]$ электромагнитного излучения (интенсивность):

$$S = I[\text{Вт}/\text{м}^2].$$

Как будет показано ниже, вектор Умова-Пойнтинга S функционально связан с объемной плотностью электрической энергии $w_v^E[\text{Дж}/\text{м}^3]$ и магнитной энергии $w_v^B[\text{Дж}/\text{м}^3]$, которые также необходимо получить в явном виде, а также с джоулевыми потерями $P_v^{Д-Л}[\text{Вт}/\text{м}^3]$ в среде, если среда - проводящая.

На языке формул это означает, что нужно получить следующее выражение:

$$\text{div} \vec{S}[\text{Вт}/\text{м}^2] = -\frac{\partial}{\partial t} w_v^E[\text{Дж}/\text{м}^3] - \frac{\partial}{\partial t} w_v^B[\text{Дж}/\text{м}^3] - P_v^{Д-Л}[\text{Дж}/\text{м}^3]. \quad (4.82)$$

Для получения этой формулы воспользуемся первым (4.11) и вторым (4.12) уравнениями Максвелла, записав их в виде

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial \epsilon_0 \vec{E}}{\partial t} + \vec{j}, \quad (4.83)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \mu_0 \vec{H}}{\partial t}. \quad (4.84)$$

Домножим обе части первого уравнения Максвелла (4.83) на $-\vec{E}[\text{В}/\text{м}]$, а обе части второго уравнения (4.84) на $\vec{H}[\text{А}/\text{м}]$, затем сложим оба эти уравнения. В правой части суммы учтем, что

$$\epsilon_0 \vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_0 E^2}{2} \right),$$

а также что

$$\mu_0 \vec{H} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mu_0 H^2}{2} \right).$$

В результате имеем

$$-\vec{E}[\vec{\nabla} \times \vec{H}] + \vec{H}[\vec{\nabla} \times \vec{E}] = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu_0 H^2}{2} \right) - \vec{E} \cdot \vec{j}. \quad (4.85)$$

Итак, часть нашей задачи решена: из вида правой части (4.85) следует, что объемная плотность электрической энергии есть

$$w_v^E [\text{Дж/м}^3] = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}, \quad (4.86)$$

а для объемной плотности магнитной энергии имеем

$$w_v^H [\text{Дж/м}^3] = \frac{\mu_0 H^2}{2}. \quad (4.87)$$

Однако с левой частью (4.85) надо разобраться. Для этого обратим внимание на свойство оператора $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \text{rot} \vec{A}$. Этот оператор, во-первых, векторный, а во-вторых - дифференциальный.

Из векторного анализа известно правило циклической перестановки для смешанного произведения трех векторов, например векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

$$\vec{a} \cdot [\vec{b} \times \vec{c}] = \vec{c} \cdot [\vec{a} \times \vec{b}] = \vec{b} \cdot [\vec{c} \times \vec{a}]. \quad (4.88)$$

Однако нам пока нельзя воспользоваться этим свойством цикличности для преобразования левой части (4.85). Ведь, как уже отмечалось, оператор $\vec{\nabla} \times$ есть не только векторный, но и дифференциальный, т.е. он действует на все, что стоит справа от него. Так что если мы сделаем двойную циклическую перестановку, например, в первом члене $\vec{E} \cdot [\vec{\nabla} \times \vec{H}]$ и получим $\vec{\nabla} \cdot [\vec{H} \times \vec{E}]$, то неправильно будет утверждать, что $\vec{E} \cdot [\vec{\nabla} \times \vec{H}]$ равно $\vec{\nabla} \cdot [\vec{H} \times \vec{E}]$.

Действительно, ведь $\vec{\nabla}$ - оператор дифференциальный, а значит, он будет действовать на оба сомножителя в векторном произведении $[\vec{H} \times \vec{E}]$, в то время как в выражении $\vec{E} \cdot [\vec{\nabla} \times \vec{H}]$ оператор $\vec{\nabla} \times$ действует лишь на $\vec{H}$, т.е. на один из сомножителей.

И все же, как показал Ф. Фейнман [1] (вып. 6), правилом циклической перестановки воспользоваться можно. Для этого перепишем левую часть (4.85) в следующем виде:

$$-\vec{E}[\vec{\nabla} \times \vec{H}] + \vec{H}[\vec{\nabla} \times \vec{E}] = -\vec{E}[\vec{\nabla}_H \times \vec{H}] + \vec{H}[\vec{\nabla}_E \times \vec{E}]. \quad (4.89)$$

Эта запись означает, что оператор $\vec{\nabla}_H$ действует только на $\vec{H}$, а оператор $\vec{\nabla}_E$ - только на $\vec{E}$. Теперь можно осуществить циклические перестановки, так как каждый из операторов $\vec{\nabla}_E$ и $\vec{\nabla}_H$ "знает", что он "имеет право" действовать только на "свое" поле. Поэтому теперь "местопребывание" такого

"частичного оператора" (будь то $\vec{\nabla}_E$ или $\vec{\nabla}_H$) в векторном произведении несущественно. Итак, в результате циклических перестановок получим:

$$-\vec{\nabla}_H[\vec{H} \times \vec{E}] + \vec{\nabla}_E[\vec{E} \times \vec{H}] = \vec{\nabla}_E[\vec{E} \times \vec{H}] + \vec{\nabla}_H[\vec{E} \times \vec{H}]. \quad (4.90)$$

Здесь дополнительно использовано свойство векторного произведения:

$$[\vec{H} \times \vec{E}] = -[\vec{E} \times \vec{H}].$$

Теперь соотношение (4.90) можно представить в нужной для нас форме:

$$\vec{\nabla}[\vec{E} \times \vec{H}] = \text{div}[\vec{E} \times \vec{H}], \quad (4.91)$$

ибо

$$\vec{\nabla} = \vec{\nabla}_E + \vec{\nabla}_H. \quad (4.92)$$

Действительно, пусть мы дифференцируем некоторую функцию $h(x)$, представляющую собой произведение двух функций $g(x)$ и $f(x)$:

$$h(x) = g(x) \cdot f(x).$$

Тогда по правилам дифференцирования произведения имеем

$$\frac{\partial h(x)}{\partial x} = g(x) \frac{\partial f(x)}{\partial x} + f(x) \frac{\partial g(x)}{\partial x}.$$

Введем теперь следующие обозначения для дифференциальных операторов:

$$\frac{\partial h(x)}{\partial x} = D h(x), \quad \frac{\partial f(x)}{\partial x} = D_f f(x), \quad \frac{\partial g(x)}{\partial x} = D_g g(x).$$

Теперь полную производную от функции $h(x) = g(x) \cdot f(x)$ можно записать так:

$$D h(x) = D(fg) = g(x) D_f f(x) + f(x) D_g g(x),$$

следовательно,

$$D = D_f + D_g.$$

Видно также, что "местопребывание" операторов D_f или D_g в производной несущественно, ибо, например, $D_g f g = f D_g g$. Итак, равенство (4.92):

$\vec{\nabla} = \vec{\nabla}_E + \vec{\nabla}_H$ - справедливо, а значит, и формулу (4.82) можно представить в нужной для нас форме:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{S} = \vec{\nabla} \cdot [\vec{E} \times \vec{H}] = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu_0 H^2}{2} \right) - jE \quad (4.93)$$

(не забудем, что $\vec{\nabla}[\vec{E} \times \vec{H}] = \text{div}[\vec{E} \times \vec{H}]$, ибо $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \text{div} \vec{A}$).

Сравнивая (4.93) с (4.83), видим, что мы получили следующие характеристики электромагнитного поля:

- вектор Умова-Пойнтинга:

$$\vec{S}[\text{Вт/м}^2] = [\vec{E} \times \vec{H}] = c^2 \epsilon_0 [\vec{E} \times \vec{B}]; \quad (4.94)$$

- объемную плотность электрической энергии;

$$w_v^E[\text{Дж/м}^3] = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}; \quad (4.95)$$

- объемную плотность магнитной энергии:

$$w_v^B[\text{Дж/м}^3] = \frac{\mu_0 H^2}{2} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{B^2}{2}; \quad (4.96)$$

- объемную плотность мощности джоулевых потерь - закон Джоуля-Ленца:

$$P_v^{\text{Д-Л}}[\text{Дж/м}^3] = jE. \quad (4.97)$$

Из формулы (4.94) следует, что в распространяющейся электромагнитной волне поля $\vec{E}$ и $\vec{B}$ взаимно перпендикулярны.

Обратнотормозное поглощение

Рассмотрим снова обратнотормозное поглощение (ОТП) теперь уже с учетом полученных представлений о свойствах вектора Умова-Пойнтинга.

Усредним (4.93) по периоду $T=2\pi/\omega$ электромагнитной волны:

$$\langle \vec{\nabla} \vec{S} \rangle = \langle \vec{\nabla} [\vec{E} \times \vec{H}] \rangle = \langle -j\vec{E} \rangle. \quad (4.98)$$

Так как в распространяющейся волне

$$\left\langle -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu_0 H^2}{2} \right) \right\rangle = 0, \quad (4.99)$$

усреднение правой части (4.98) приводит к следующему результату:

$$\langle j\vec{E} \rangle = \langle j_b \vec{E} \rangle + \langle j_f \vec{E} \rangle = \langle j_f \vec{E} \rangle = eN_e \langle \vec{v} \vec{E}(t) \rangle. \quad (4.100)$$

Как мы уже показали раньше, плотность поляризационного тока $j_b(t)$ смещена по фазе на $\pi/2$ по отношению к полю $E(t)$ и, следовательно, в среднем дает нуль. Действительно,

$$\vec{j}_b = eN_n \vec{\xi},$$

а смещение $\vec{\xi}$ -связанного электрона находится в фазе с силой $e\vec{E}(t)$.

Ограничиваясь одномерным случаем, получаем

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{S} = \nabla I = eN_e \langle \vec{v} \vec{E}(t) \rangle. \quad (4.101)$$

Ранее в п. 4.1.5 мы вычислили скорость $v_e = \frac{du}{dt}$ свободного сталкивающегося электрона, движущегося под действием гармонического поля $E = E_0 \cos \omega t$:

$$v(t) = \frac{eE_0}{m(\omega^2 + 1/\tau^2)} \left(\frac{1}{\tau} \cos \omega t + \omega \sin \omega t \right). \quad (4.102)$$

Подставляя это выражение для скорости и силы $eE_0 \cos \omega t$ в (4.101), производя усреднение по периоду, получим

$$\frac{dI}{dt} = -N_e \sigma_{\text{отп}} I = -\alpha_{\text{отп}} I. \quad (4.103)$$

Здесь $\sigma_{\text{отп}} [\text{м}^2]$ - сечение обратнотормозного поглощения

$$\sigma_{\text{отп}} = \frac{1}{\pi} \frac{\lambda^2 r_e}{c\tau}, \quad (4.104)$$

$r_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} = 2,84 \cdot 10^{-15} \text{ м}$ - классический радиус электрона,

$I [\text{Вт}/\text{м}^2] = \frac{c\epsilon_0 E_0^2}{2}$ - интенсивность, $\alpha_{\text{отп}} [\text{м}^{-1}] = \sigma_{\text{отп}} N_e$ - коэффициент обратнотормозного поглощения.

Заметим, что из равенства объемных плотностей электрической и магнитной энергий w_v^E и w_v^H , описываемых формулами (4.95) и (4.96), следует, что в электромагнитной волне $E = cB$. Следовательно, из формулы (4.94) для вектора Умова-Пойнтинга (4.94) для интенсивности $I [\text{Вт}/\text{м}^2]$ получаем

$$I = S = \langle c\epsilon_0 E^2 \rangle, \quad (4.105)$$

а так как $E = E_0 \cos \omega t$, то, следовательно,

$$I = \frac{c\epsilon_0 E_0^2}{2}. \quad (4.106)$$

Из (4.105) следует, что интенсивность электромагнитной волны в два раза больше той, которая получается, если объемную плотность электрической энергии $\frac{\epsilon_0 E^2}{2}$ умножить на c - скорость света. Это и понятно, ибо в распространяющейся электромагнитной волне половину энергии несет электрическое поле, а половину - магнитное.

Для практических расчетов электрического поля по заданной интенсивности из (4.106) получим для амплитуды поля E_0 следующую формулу:

$$E_0 [\text{В}/\text{м}] = \left\{ \frac{2}{\epsilon_0 c} I [\text{Вт}/\text{м}^2] \right\}^{\frac{1}{2}} = 27,5 \{ I [\text{Вт}/\text{м}^2] \}^{\frac{1}{2}}. \quad (4.107)$$

Наиболее просто физический смысл вектора Умова-Пойнтинга можно пояснить, если в правой части (4.93) положить $P^{\text{Д-Л}} = 0$ (среда непроводя-

щая). Тогда, взяв объемный интеграл от обеих частей (4.93) и воспользовавшись теоремой Гаусса:

$$\int_V \operatorname{div} S dV = \int_S S ds, \quad (4.108)$$

получим

$$\int_S S ds = -\frac{\partial}{\partial t} (W_E + W_M),$$

где $W_E[\text{Дж}] = \int_V w_V^E dV$ - полная электрическая энергия и $W_M[\text{Дж}] = \int_V w_V^M dV$ - полная магнитная энергия.

Таким образом, в непроводящей среде полный поток электромагнитного излучения, уходящего через некоторую замкнутую поверхность, равен скорости изменения (уменьшения) электромагнитной энергии в среде, ограниченной этой поверхностью.

Если же среда - проводящая, то аналогичным же образом нетрудно убедиться в следующем: джоулево тепло, его мощность, выделяющееся в проводящей среде, ограниченной некоторой поверхностью, равно потоку электромагнитного излучения через эту поверхность плюс изменение электромагнитной энергии, сосредоточенной в среде, ограниченной этой поверхностью.

Еще раз напомним, что все рассуждения относительно обратного поглощения пригодны лишь в случае, когда длина волны *короче* критической:

$$\lambda < \lambda_c.$$

4.1.7. Волновое уравнение Максвелла и его решение. Характеристики вещества в электромагнитном поле. Поляризация, диэлектрическая проницаемость, диэлектрическая восприимчивость, коэффициент преломления. Комплексный показатель преломления. Коэффициенты ослабления электрического поля и плотности мощности (интенсивности), коэффициент отражения. Решающая роль свободных электронов

Для решения многих практических задач, связанных с распространением электромагнитного излучения в веществе и взаимодействия с ним, используется так называемое *волновое уравнение Максвелла*. Чтобы его получить, воспользуемся первым (4.11) и вторым (4.12) уравнениями системы (4.11) - (4.14) п. 4.1.1. Эта система выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} c^2 \epsilon_0 \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j}, \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \end{aligned}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho,$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0.$$

Здесь $\vec{E}$ [В/м] - полное электрическое поле, $\vec{B}$ [В·с/м] - полное магнитное поле (магнитная индукция), $\vec{j}$ [А/м²] = $\vec{j}_f + \vec{j}_b$ - полная плотность тока зарядов свободных $\vec{j}_f$ и связанных $\vec{j}_b$, а $\rho = \rho_f + \rho_b$ - полная объемная плотность заряда, включающая в себя как свободные заряды (ρ_f), так и связанные (ρ_b). При этом

$$\rho_b = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}_b.$$

Задача состоит в том, чтобы исключить из этих уравнений магнитное поле $\vec{B}$ и получить дифференциальное уравнение второго порядка в частных производных относительно электрического поля $\vec{E}$ [В/м], плотности тока $\vec{j}$ [А/м²] или поляризации $\vec{P}$ [Кл/м²].

Поддействуем на обе части (4.11) оператором $\partial/\partial t$, а на обе части (4.12) - оператором $c^2 \epsilon_0 \vec{\nabla} \times$. Уравнения (4.11) и (4.12) примут вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} (c^2 \epsilon_0 \vec{\nabla} \times \vec{B}) = \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}, \quad (4.109)$$

$$-c^2 \epsilon_0 \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = c^2 \epsilon_0 \vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (4.110)$$

Дифференциальные операторы $\partial/\partial t$ и $\vec{\nabla} \times$ - линейные, поэтому левая часть (4.109) равна правой части (4.110), то есть

$$\frac{\partial}{\partial t} (c^2 \epsilon_0 \vec{\nabla} \times \vec{B}) = c^2 \epsilon_0 \vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Отсюда следует равенство

$$-c^2 \epsilon_0 \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}. \quad (4.111)$$

Введем обозначения для векторов:

$$\vec{a} = -c^2 \epsilon_0 \vec{\nabla},$$

$$\vec{b} = \vec{\nabla},$$

$$\vec{c} = \vec{E}.$$

Учтем, что $\vec{\nabla} \times = \text{rot}$, $\vec{\nabla} \cdot = \text{div}$ и воспользуемся известными свойствами двойного векторного произведения:

$$\vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c} = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}). \quad (4.112)$$

Применяя это равенство к левой части (4.111), получим

$$-c^2 \epsilon_0 \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = -c^2 \epsilon_0 \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) + c^2 \epsilon_0 \vec{\nabla}^2 \vec{E}. \quad (4.113)$$

Действительно, третье уравнение системы (4.11) - (4.14) есть

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho.$$

Поэтому

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = \text{grad}(\text{div} E) = \frac{1}{\epsilon_0} \text{grad} \rho. \quad (4.114)$$

Мы предполагаем, что объемная плотность зарядов ρ [Кл/м³] не зависит от координат, следовательно,

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = \frac{1}{\epsilon_0} \text{grad} \rho = 0. \quad (4.115)$$

Из уравнения (4.111) с учетом (4.114) - (4.115) получаем *волновое уравнение Максвелла*:

$$c^2 \epsilon_0 \vec{\nabla}^2 \vec{E} = \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}, \quad (4.116)$$

которое в более распространенной записи выглядит следующим образом:

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2 \epsilon_0} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}. \quad (4.117)$$

Напомним, что $\vec{j}$ [А/м²] = $\vec{j}_f + \vec{j}_b$ - это полная плотность тока зарядов, которая включает в себя две компоненты: $\vec{j}_f$ - плотность тока свободных зарядов и $\vec{j}_b$ - плотность тока связанных зарядов.

Правую часть волнового уравнения (4.117) можно записать в виде второй производной от полной поляризации вещества $\vec{P}$ [Кл/м²] = $\vec{P}_f + \vec{P}_b$:

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2 \epsilon_0} \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2}. \quad (4.118)$$

Действительно,

$$\vec{P} = \vec{P}_f + \vec{P}_b. \quad (4.119)$$

В свою очередь

$$\vec{P}_b = e \vec{\xi} N_b \quad (4.120)$$

есть поляризация связанных зарядов (электронов), у которых $\vec{\xi}$ [м] - смещение и N_b - концентрация, причем N_b [м⁻³] = N_n , где N_n - концентрация нейтральных атомов. Для свободных электронов имеем соответственно соотношение для поляризации $\vec{P}_f$, смещения $\vec{u}$ и концентрации N_e :

$$\vec{P}_f = e \vec{u} N_e. \quad (4.121)$$

Разумеется, такие понятия, как *поляризация* ($\vec{P}_f$), *смещение* ($\vec{u}$) и другие связанные с ними величины, для **свободных** зарядов имеют смысл

лишь при воздействии **переменного** поля $\vec{E}(t)$, ибо только в этом случае как $\vec{u}$, так и $\vec{P}_f$ имеют определенные и конечные значения.

Из (4.119), (4.120), (4.121) следует, что

$$\vec{j} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t},$$

ибо

$$\vec{j}_f = e\vec{v}_f N_e = e \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} N_e$$

и

$$\vec{j}_b = e\vec{v}_b N_b = e \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} N_b.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2}.$$

Произведение заряда электрона $e[\text{Кл}]$ на соответствующее смещение $\vec{\xi}[\text{м}]$ или $\vec{u}[\text{м}]$ представляет собой дипольный момент $\mu[\text{Кл} \cdot \text{м}]$: $\mu_{\text{пл}} = e\xi$, $\mu_{\text{св}} = eu$. Поэтому о поляризации $\vec{P}$ говорят, что она представляет собой объемную концентрацию дипольных моментов $\vec{P}[\text{Кл} \cdot \text{м}/\text{м}^3]$. Так как размерность поляризации в конечном счете есть $\text{Кл}/\text{м}^2$, то иногда говорят, что поляризация - это поверхностная плотность зарядов (связанных и (или) свободных), выступающих на граничной поверхности среды под действием электрического поля.

Мы рассматриваем здесь так называемую линейную среду, в которой смещения ξ и u описываются линейными дифференциальными уравнениями. Поэтому поляризация P линейно зависит от электрического поля:

$$P = \epsilon_0 \chi E. \quad (4.122)$$

Здесь χ - диэлектрическая восприимчивость. В соответствии с (4.119), как χ , так и P состоит из двух компонент:

$$\chi = \chi_b + \chi_f, \quad (4.123)$$

где

$$\chi_b = N_b \alpha_b \text{ и } \chi_f = N_e \alpha_f \quad (4.124)$$

$\alpha_b[\text{м}^3]$, $\alpha_f[\text{м}^3]$ - это так называемые поляризуемости соответственно связанных и свободных электронов.

Используя все эти соотношения, можно привести волновое уравнение к следующему виду:

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0, \quad (4.125)$$

где n - коэффициент преломления, который, как это следует из формулы (4.118), определяется формулой

$$\varepsilon = n^2 = 1 + \frac{P}{\varepsilon_0 E} \quad (4.126)$$

или

$$\varepsilon = n^2 = 1 + \chi = 1 + \chi_b + \chi_f, \quad (4.127)$$

где ε - диэлектрическая проницаемость.

Из (4.120) и (4.121) следует, что

$$\chi_b = \frac{P_b}{\varepsilon_0 E} = \frac{e \xi N_b}{\varepsilon_0 E}, \quad (4.128)$$

$$\chi_f = \frac{P_f}{\varepsilon_0 E} = \frac{eu N_e}{\varepsilon_0 E}. \quad (4.129)$$

Ограничимся для простоты одномерным случаем ($\nabla^2 = \partial^2 / \partial z^2$) и будем искать решение волнового уравнения (4.125) в виде плоской волны, бегущей вдоль координаты z :

$$E = E_0 \exp \{ i(\omega t + kz) \}. \quad (4.130)$$

Здесь $k = n\omega/c$ - волновое число, n - показатель преломления, описываемый формулами (4.126), (4.127), z , x , y - декартовы координаты.

Условия распространения волны $E(z, t)$ и ее поведение в пространстве определяются видом n . Пусть, например, n - комплексная величина:

$$n = n' - in''.$$

Тогда подстановка такого n в (4.125) показывает, что локальная амплитуда $E_0(z)$ экспоненциально уменьшается вдоль оси z :

$$E = E_0 \exp \{ -\beta z \} \exp \{ -i(\omega t - k'z) \}. \quad (4.131)$$

Здесь $\beta[\text{м}^{-1}] = \frac{n''\omega}{c} = \frac{2\pi n''}{\lambda}$ - коэффициент ослабления электрического поля,

а волновое число $k'[\text{м}^{-1}]$ есть $k' = \frac{n'\omega}{c} = \frac{2\pi n'}{\lambda}$.

Соответственно, для интенсивности $I[\text{Вт}/\text{м}^2]$ имеет место следующий закон ослабления:

$$I = c\varepsilon_0 \langle E^2 \rangle_t = \frac{1}{2} c\varepsilon_0 E_0^2 \exp \{ -2\beta z \} = I_0 \exp \{ -\alpha z \}. \quad (4.132)$$

Здесь $\langle E^2 \rangle_t$ - среднее по времени от квадрата поля (для гармонического поля $E = E_0 \cos \omega t$ имеем $\langle E^2 \rangle_t = \frac{E_0^2}{2}$), $I_0 = I(0) = \frac{1}{2} c\varepsilon_0 E_0^2$ - начальная (граничная) интенсивность, а величина $\alpha[\text{м}^{-1}] = 2\beta$ представляет собой *коэф-*

коэффициент ослабления интенсивности, который следующим образом связан с мнимой частью n'' коэффициента преломления n :

$$\alpha = 2\beta = \frac{4\pi n''}{\lambda}.$$

Чтобы получить коэффициент преломления n , нужно вычислить поляризацию P . Для этого, в свою очередь, надо найти смещения $\xi[m]$ и $u[m]$, решив соответствующие дифференциальные уравнения, описывающие движение связанного и свободного электрона под действием гармонического поля.

Для связанного электрона это уравнение гармонического осциллятора с собственной частотой ω_0 и декрементом затухания δ :

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + 2\delta \frac{d\xi}{dt} + \omega_0^2 \xi = \frac{eE_0}{m} \exp\{i\omega t\}. \quad (4.133)$$

Для свободного электрона это уравнение движения, учитывающее столкновения со средним временем τ между ними:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{du}{dt} = \frac{eE_0}{m} \exp\{i\omega t\} \quad (4.134)$$

или для скорости $v = \frac{du}{dt}$:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{\tau} v = \frac{eE_0}{m} \exp\{i\omega t\}. \quad (4.135)$$

Оценим диэлектрическую восприимчивость χ_b , вносимую в (4.128) связанными электронами. Для этого нужно найти ξ , решив уравнение (4.133). Пренебрегая для простоты затуханием ($\delta = 0$), получим

$$\xi = \frac{eE_0}{m} \frac{\exp\{i\omega t\}}{-\omega^2 + \omega_0^2}. \quad (4.136)$$

Для поляризуемости $\alpha_b[m^3]$ и восприимчивости $\chi_b = N_n \alpha_b$, согласно (4.128), имеем следующее соотношение (напомним, что $N_n[m^{-3}]$ - концентрация нейтралов):

$$\xi = \frac{e^2}{\epsilon_0 m} \frac{1}{-\omega^2 + \omega_0^2} \quad (4.137)$$

$$\chi_b = N_n \alpha_b = \frac{e^2}{\epsilon_0 m} \frac{1}{-\omega^2 + \omega_0^2}$$

или

$$\chi_b = \frac{\omega_n^2 / \omega_0^2}{1 - \omega^2 / \omega_0^2} = \frac{\lambda_0^2 / \lambda_n^2}{1 - \lambda_0^2 / \lambda^2}. \quad (4.138)$$

Частота ω_0 и соответствующая ей длина волны $\lambda_0 = 2\pi c/\omega_0$ определяется полной энергией $W_0[\text{эВ}]$ основного состояния связанного электрона, которая равна энергии ионизации атома:

$$\lambda[\text{м}] = \frac{hc}{W_0[\text{эВ}] \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж/эВ}}. \quad (4.139)$$

Полагая, например, $W_0 = 10 \text{ эВ}$, получим

$$\lambda_0 = 0,124 \text{ мкм}.$$

Кроме того, выражение

$$\omega_n^2 = \frac{e^2 N_n}{\epsilon_0 m} \quad (4.140)$$

аналогично известной формуле (см. п. 2.2) для плазменной частоты ω_p :

$$\omega_p^2 = \frac{e^2 N_e}{m \epsilon_0}. \quad (4.141)$$

Роль $N_e[\text{м}^{-3}]$ - концентрации свободных электронов - играет в (4.140) концентрация нейтралов $N_n[\text{м}^{-3}]$, которую мы считаем равной концентрации связанных электронов. Преобразуя тождественно (4.140) аналогично преобразованию, проведенному в п. 2.2, получаем такое же по виду соотношение:

$$\lambda_n^2 N_n r_e = \pi. \quad (4.142)$$

Здесь, как обычно, $r_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} = 2,84 \cdot 10^{-15} \text{ м}$ - классический радиус электрона, а

$$\lambda_n = \frac{2\pi c}{\omega_n} \quad (4.143)$$

есть некая характеристическая "длина волны", введенная для удобства оценок. Значения λ_n для различных N_n представлены в таблице 4.1. Напомним, что в идеальном газе атмосферного давления концентрация частиц $N_{na} = 2,6 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$, а для воды аналогичная величина составляет $N_{nw} = 3,3 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$.

Из таблицы 4.1 видно, что связанные электроны дают лишь малую положительную и действительную прибавку к единице в виде χ_b в формуле (4.127) для коэффициента преломления. Как будет видно из дальнейшего, решающий вклад в n в смысле его влияния на распространение электромагнитной волны дают **свободные электроны**.

Решение уравнения (4.134) для свободного электрона есть

Таблица 4.1

Значения λ_n и диэлектрической восприимчивости χ_b для различных значений N_n - концентрации связанных электронов ($\lambda = 1,06$ мкм, $\lambda_0 = 0,124$ мкм)

$\frac{N_n}{N_{na}} = \frac{N_n [\text{м}^{-3}]}{2,6 \cdot 10^{25} \text{м}^{-3}}$	1	10	100	1000
$\lambda_n [\text{мкм}]$	6,52	2,06	0,652	0,206
$\chi_b = \frac{\lambda_0^2 / \lambda_n^2}{1 - \lambda_0^2 / \lambda_n^2}$	$3,6 \cdot 10^{-4}$	$3,6 \cdot 10^{-3}$	$3,6 \cdot 10^{-2}$	0,36

$$u = \frac{eE_0/m}{-\omega^2 + i\omega/\tau} \exp\{i\omega t\} = -\frac{eE_0/m\omega^2}{1 - i/\omega\tau} \exp\{i\omega t\}. \quad (4.144)$$

Для поляризуемости α_f и восприимчивости $\chi_f = N_e \alpha_f$ свободных электронов в соответствии с (4.129) получаем

$$\alpha_f = -\frac{e^2/m\epsilon_0}{\omega^2(1 - i/\omega\tau)},$$

$$\chi_f = N_e \alpha_f = -\frac{e^2 N_e / m\epsilon_0}{\omega^2(1 - i/\omega\tau)} = -\frac{\omega_p^2}{\omega^2(1 - i/\omega\tau)} \quad (4.145)$$

или

$$\chi_f = -\frac{\lambda^2/\lambda_c^2}{(1 - i/\omega\tau)} = -\frac{(\lambda^2/\lambda_c^2)(1 + i/\omega\tau)}{(1 + (\omega\tau)^{-2})}, \quad (4.146)$$

где $\omega_p^2 = \frac{e^2 N_e}{m\epsilon_0}$ - квадрат угловой плазменной частоты. Тожественными

преобразованиями (см п. 2.2) это выражение можно привести к виду

$$\lambda_c^2 N_e r_e = \pi,$$

где $\lambda_c = \frac{2\pi c}{\omega_p}$ - критическая длина волны.

Из (4.146) видно, что свободные электроны приводят к наличию мнимой части в диэлектрической проницаемости ϵ (а следовательно, и в коэффициенте преломления!). Действительно, согласно данным таблицы 4.1, можно пренебречь в (4.127) величиной χ_b по сравнению с единицей и тогда

$$\epsilon = n^2 \approx 1 - \frac{(\lambda^2/\lambda_c^2)(1 + i/\omega\tau)}{(1 + (\omega\tau)^{-2})}. \quad (4.147)$$

Иногда (например, для СВЧ-диапазона) удобно использовать (4.145)

$$\varepsilon = n^2 \approx 1 - \frac{e^2 N_e / m \varepsilon_0}{\omega^2 (1 - i/\omega\tau)}. \quad (4.148)$$

Для коэффициента преломления имеем следующие формулы:

$$n \approx \pm \left\{ 1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_c^2} - i \frac{\lambda^2}{\lambda_c^2} \frac{1}{\omega\tau(1 + (\omega\tau)^{-2})} \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (4.149)$$

$$n \approx \pm \left\{ 1 - \frac{e^2 N_e / m \varepsilon_0}{\omega^2 (1 - i/\omega\tau)} \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (4.150)$$

Таким образом, свойства и особенности коэффициента преломления $n = n' - in''$ определяют такие величины, как критическая длина волны λ_c , частота ω и длина волны $\lambda = 2\pi c/\omega$ электромагнитного излучения и среднее время между столкновениями τ . Соотношение между λ и λ_c и τ определяют, будет ли n комплексной, чисто мнимой или действительной величиной.

Подробный анализ коэффициента преломления n , а с ним и поведения электромагнитной волны в веществе будет приведен ниже в п. 4.2 - 4.4. Пока же заметим, что, например, при $\lambda > \lambda_c$ отрицательная восприимчивость χ_f может быть по модулю значительно больше единицы. Это означает, что $n^2 < 0$, $n^2 < 0$, и коэффициент преломления - чисто мнимый $n = in''$, причем $n'' \gg 1$.

В этом случае значительное ослабление поля по мере распространения волны в веществе может происходить на длине порядка и меньше длины волны λ .

4.2. Плазма в переменном электрическом поле. Коэффициент поглощения, его определение с помощью мнимой части коэффициента преломления. Уравнение движения для электрона. Диэлектрическая проницаемость и коэффициент преломления

Наша задача заключается в том, чтобы, вычислив коэффициент преломления $n = \sqrt{\varepsilon}$ среды, найти коэффициенты ослабления плотности мощности (интенсивности) света. Здесь используется термин “ослабление”, а не “поглощение”, так как ослабление поля или интенсивности по мере проникновения в среду может быть связано не с поглощением, а с отражением света или его рассеянием.

Электрическое поле $E(z, t)$, которое удовлетворяет волновому уравнению Максвелла, то есть описывает бегущую волну в среде с коэффициентом преломления n , выглядит следующим образом:

$$E(z, t) = E_0 \exp\{i(\omega t - kz)\} = E_0 \exp\left\{i\omega t - i\frac{\omega n}{c} z\right\}, \quad (4.151)$$

ибо $k = \omega n / c$.

Зная аналитическое выражение для коэффициента преломления n , мы подставим его в (4.151) и увидим, как ведет себя электромагнитная волна в плазме. Действительно, если, например, n - комплексная величина и имеет вид

$$n = n' - in'', \quad (4.152)$$

то по мере распространения вдоль координаты z поле ослабляется экспоненциально:

$$E = E_0 \exp\{-\alpha z\} \exp\left\{i\left(\omega t - \frac{\omega n'}{c} z\right)\right\}, \quad (4.153)$$

где $\alpha [\text{м}^{-1}] = \frac{\omega}{c} n''$.

Так как на практике обычно имеют дело с плотностью мощности (интенсивностью) $I [\text{Вт}/\text{м}^2]$, где $I = c\epsilon_0 E^2$, то для коэффициента ослабления имеем

$$\alpha = 2\frac{\omega}{c} n''. \quad (4.154)$$

В свою очередь, коэффициент поглощения $\alpha [\text{м}^{-1}]$ связан с сечением поглощения $\sigma [\text{м}^2]$ известным соотношением $\alpha = \sigma N_e$, где $N_e [\text{м}^{-3}]$ - концентрация поглощающих центров. Таким образом, задача нахождения коэффициента поглощения α связана с определением n'' - мнимой части коэффициента преломления.

Плазма под действием переменного электрического поля ведет себя совсем не так, как диэлектрик. В плазме заряды - свободные и движутся под действием силы $eE(t)$, где $e [\text{Кл}]$ - заряд частицы, а $E(t)$ - переменное электрическое поле. Существенно, однако, что столкновения частиц между собой со средним временем $\tau_{\text{ст}}$ между столкновениями вносят силу трения $F_{\text{тр}}$:

$$F_{\text{тр}} = \frac{mv}{\tau_{\text{ст}}} = m \frac{1}{\tau_{\text{ст}}} \frac{du}{dt},$$

где $v = \frac{du}{dt}$ - скорость частицы, $u(t)$ - ее смещение. Таким образом, согласно второму закону Ньютона, уравнение движения частицы под действием

гармонически меняющейся (с частотой ω) силы $F=eE(t)=eE_0\cos\omega t$ выглядит следующим образом:

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{m}{\tau_{ст}} \frac{du}{dt} = \frac{eE_0}{2} \exp\{i\omega t\} + \text{к.с.} \quad (4.156)$$

Решение уравнения (4.156) ищем в виде:

$$u = U \exp\{i\omega t\}, \quad (4.157)$$

где $U(\omega)$ - комплексная амплитуда смещения. Ее нужно найти, чтобы затем (так же, как и в случае диэлектрика) вычислить диэлектрическую проницаемость ϵ плазмы с концентрацией *заряженных частиц* $N_e[\text{м}^{-3}]$.

Для этого используем известную формулу (см. п. 4.1):

$$\epsilon = n^2 = 1 + \frac{P}{\epsilon_0 E}, \quad (4.158)$$

где $P[\text{Кл}/\text{м}^2]$ - поляризация. В свою очередь, поляризация P - это объемная концентрация диполей с моментом $\mu(t)=eX(t)$:

$$P = \mu[\text{Кл} \cdot \text{м}] N_e[\text{м}^{-3}].$$

Так как в нашем случае $\mu=eX(\omega)$, то получаем

$$\epsilon = n^2 = 1 + \frac{e N_e X(\omega)}{\epsilon_0 E}. \quad (4.159)$$

Подставляя в (4.156) выражение (4.157), находим

$$U(\omega) = \frac{\frac{1}{2} \frac{e E_0}{m}}{-\omega^2 + \frac{i\omega}{\tau_{ст}}}. \quad (4.160)$$

Аналогично для скорости $v = \frac{du}{dt}$ находим ее комплексную амплитуду

$$v(\omega) = \frac{\frac{1}{2} \frac{e E_0}{m}}{i\omega + \frac{1}{\tau_{ст}}}. \quad (4.161)$$

Пользуясь (4.158), находим формулу для относительной диэлектрической проницаемости, а значит, и для квадрата коэффициента преломления:

$$\epsilon = n^2 = 1 + \frac{e^2 N_e}{\epsilon_0 m \left(-\omega^2 + i \frac{\omega}{\tau_{ст}} \right)}. \quad (4.162)$$

Соотношение (4.162) включает в себя два предельных варианта:

- *низкочастотный*, когда

$$\omega \ll \tau_{\text{ст}}, \quad (4.163)$$

- высокочастотный, когда

$$\omega \gg \tau_{\text{ст}}. \quad (4.164)$$

Таким образом, критерием в данном случае является соотношение между частотой ω и частотой столкновений $1/\tau_{\text{ст}}$. Рассмотрим последовательно оба предельных случая.

4.3. Низкие частоты. Низкочастотный скин-эффект

Как уже отмечалось, термин "низкочастотный" означает, что $\omega\tau_{\text{ст}} \ll 1$. Формулу (4.162) представим в следующем виде:

$$n^2 = 1 + \frac{e^2 N_e \tau_{\text{ст}}}{\varepsilon_0 m i \omega (\omega \tau_{\text{ст}} + 1)}, \quad (4.165)$$

пренебрегая $\omega\tau_{\text{ст}}$ по сравнению с единицей, имеем

$$\varepsilon_0 = n^2 = 1 - i \frac{e^2 N_e \tau_{\text{ст}}}{\varepsilon_0 m} = 1 - i \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0 \omega}, \quad (4.166)$$

где

$$\sigma_2 [\text{Ом}^{-1} \text{м}^{-1}] = \frac{e^2 N_e \tau_{\text{ст}}}{m} \quad (4.167)$$

- проводимость (удельная электропроводность) плазмы.

Можно показать, что в случае низких частот, когда выполняется неравенство (4.163), одновременно выполняется и неравенство

$$\omega \ll \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0}, \quad (4.168)$$

то есть мы находимся в области частот, которые меньше частоты максвелловской релаксации

$$\frac{1}{\tau_M} = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0}. \quad (4.169)$$

Действительно, условие коллективности плазмы (без которого ее просто нет) представляет собой (см. п. 4.1) следующее неравенство:

$$\omega_p \tau_{\text{ст}} > 1. \quad (4.170)$$

Более сильным будет неравенство

$$(\omega_p \tau_{\text{ст}})^2 \gg 1, \quad (4.171)$$

но так как $\omega\tau_{\text{ст}} \ll 1$, то значит, еще более сильным является неравенство

$$(\omega_p \tau_{\text{ст}})^2 \gg \omega \tau_{\text{ст}}. \quad (4.172)$$

Сокращая на $\tau_{\text{ст}}$, получим (4.172) в следующем виде:

$$\omega_p^2 \tau_{\text{ст}} \gg \omega. \quad (4.173)$$

Отсюда следует (4.168), ибо, как показано в п. 4.1, квадрат плазменной частоты есть

$$\omega_p^2 = \frac{e^2 N_e}{\epsilon_0 m}, \quad (4.174)$$

а проводимость σ , согласно (4.167), есть $\sigma = \frac{e^2 N_e}{m} \tau_{\text{ст}}$.

Теперь можно с достаточной точностью записать (4.166) так:

$$\epsilon = n^2 \cong -i \frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega}, \quad (4.175)$$

ибо (4.173) равносильно тому, что $\sigma/\epsilon_0 \omega \gg 1$. Коэффициент преломления n вычисляем, извлекая корень из (4.175). Для этого, пользуясь формулой Эйлера, представим $-i$ в виде

$$-i = \exp\left\{-i \frac{\pi}{2}\right\}.$$

Подставив это выражение в (4.175), извлекая корень и снова применяя формулу Эйлера

$$\exp\left\{-i \frac{\pi}{4}\right\} = \left(\frac{\sigma}{2\epsilon_0 \omega}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1-i}{\sqrt{2}},$$

получим

$$n = \left(\frac{\sigma}{2\epsilon_0 \omega}\right)^{\frac{1}{2}} (1-i). \quad (4.176)$$

Таким образом, $n'' = \left(\frac{\sigma}{2\epsilon_0 \omega}\right)^{\frac{1}{2}}$ и коэффициент $\alpha[\text{м}^{-1}]$ для интенсивности света, согласно (4.154), будет

$$\alpha = 2 \frac{\omega}{c} \left(\frac{\sigma}{2\epsilon_0 \omega}\right)^{\frac{1}{2}} = 2 \left(\frac{\pi \sigma}{-\lambda \epsilon_0}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.177)$$

Прежде чем приступить к численным оценкам по формуле (4.177) для α , определим максимальную частоту, при которой можно пользоваться формулой (4.177). Как уже отмечалось выше, формула (4.177) тем точнее, чем сильнее неравенство (4.163):

$$\omega \tau_{\text{ст}} < 1.$$

Это значит, что циклическая частота $\nu = \omega/2\pi$ должна удовлетворять неравенству

$$\nu < \frac{1}{2\pi \tau_{\text{ст}}}. \quad (4.178)$$

Время столкновений $\tau_{ст}$ можно найти, зная электропроводность среды:

$$\sigma_s [\text{Ом}^{-1}\text{м}^{-1}] = \frac{e^2 N_e}{m} \tau_{ст}, \quad (4.179)$$

где $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл и $m = 0,91 \cdot 10^{-30}$ кг, соответственно, заряд и масса электрона, $N[\text{м}^{-3}]$ - концентрация заряженных частиц (электрона). Возьмем для примера вырожденную плазму в металлах. Плазма эта, правда, специфическая: в ней подвижны только электроны. Для серебра, например, $\sigma_s = 6,25 \cdot 10^7 \text{ Ом}^{-1}\text{м}^{-1}$. Концентрацию электронов найдем, определив концентрацию атомов и полагая (вполне обоснованно, впрочем), что на каждый атом приходится один свободный электрон. Концентрация $N[\text{м}^{-3}]$ атомов в веществе определяется из соотношения

$$N[\text{м}^{-3}] = \frac{d[\text{кг}/\text{м}^3]}{M_{Ag}[\text{кг}]}. \quad (4.180)$$

Здесь $d = 10,5 \cdot 10^3 \text{ кг}/\text{м}^3$ - плотность, M_{Ag} - масса атома серебра, причем $M_{Ag} = A M_H$, где $A = 107,9$ - атомный вес, $M_H = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$ - масса протона. Подставляя в (4.180) эти значения, получаем

$$N_A = N_e = 5,86 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}.$$

Теперь из (4.179) находим

$$\tau_{ст} = 3,8 \cdot 10^{14} \text{ с}.$$

Таким образом, частота должна удовлетворять неравенству

$$\nu \ll 4 \cdot 10^{12} \text{ с}^{-1}.$$

Следует заметить, что максимально допустимая частота, определяемая этим неравенством, значительно ниже, чем та, которая определяется неравенством (4.168):

$$\nu \ll \frac{1}{2\pi} \frac{\sigma_s}{\epsilon_0} = 3,41 \cdot 10^{17} \text{ Гц}.$$

Итак, частота должна быть много меньше, чем $4 \cdot 10^{12} \text{ Гц}$. Возьмем для примера $\nu = 10^{10} \text{ Гц}$ ($\lambda = 3 \text{ см}$, т.е. СВЧ-диапазон). Подставляя в (4.177) значения $\sigma_s = 6,25 \cdot 10^7 \text{ Ом}^{-1}\text{м}^{-1}$, $\omega = 6,28 \cdot 10^{10} \text{ рад/с}$ и $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$, получим:

$$\alpha[\text{м}^{-1}] = 1,56 \cdot 10^6 \text{ м}^{-1}.$$

Отсюда ясно, что глубина проникновения электромагнитного излучения СВЧ-диапазона в высокопроводящий металл (серебро) составляет $1/\alpha \leq 1 \text{ мкм}$. Это явление носит название *скин-эффект (низкочастотный)*. Оно используется в технике СВЧ. Волноводы покрывают тонким слоем серебра (толщиной $\sim 10 \text{ мкм}$), и так как глубина проникновения излучения

составляет величину менее 1 мкм, то покрытие толщиной всего лишь в несколько мкм дает такой же эффект, как если бы весь волновод был изготовлен из серебра!

4.4. Высокие частоты. Область подкритических частот. Высокочастотный скин-эффект. Область надкритических частот. Коэффициент и сечение ослабления интенсивности света, проходящего сквозь плазму. Фазовая и групповая скорости света

Рассмотрим теперь случай высоких частот, для которых выполняется неравенство (4.164):

$$\omega\tau_{\text{ст}} \gg 1. \quad (4.181)$$

Это означает, что угловая частота поля ω много выше частоты столкновений $1/\tau_{\text{ст}}$. Формулу (4.162) для квадрата коэффициента преломления можно записать следующим образом:

$$\varepsilon = n^2 = 1 + \frac{\omega_p^2}{-\omega^2 + i \frac{\omega}{\tau_{\text{ст}}}} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{1}{1 - i \frac{1}{\omega\tau_{\text{ст}}}} = 1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_c^2} - i \frac{\lambda^2}{\lambda_c^2} \frac{1}{\omega\tau_{\text{ст}}}, \quad (4.182)$$

где $\omega_p^2 = \frac{e^2 N_e}{\varepsilon_0 m}$ - квадрат угловой плазменной частоты.

Высокочастотный случай, в свою очередь, содержит две области частот:

- **подкритические частоты** $\omega < \omega_p$, когда длина волны λ больше ее т.н. критического значения $\lambda > \lambda_c$, где λ_c - критическая длина;

- **надкритические частоты** $\omega > \omega_p$ ($\lambda < \lambda_c$).

Для подкритических частот, когда $\lambda > \lambda_c$, коэффициент преломления $n = \sqrt{\varepsilon}$ получаем из (в-2) в следующем виде:

$$n = \left[1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_c^2} - i \frac{\lambda^2}{\lambda_c^2} \frac{1}{\omega\tau_{\text{ст}}} \right]^{\frac{1}{2}} = i \left[\frac{\lambda^2}{\lambda_c^2} - 1 \right]^{\frac{1}{2}} \left[1 + i \frac{\frac{\lambda^2}{\lambda_c^2}}{\omega\tau_{\text{ст}} \left(\frac{\lambda^2}{\lambda_c^2} - 1 \right)} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (4.183)$$

Так как $\omega\tau_{\text{ст}} \gg 1$ и $\frac{\lambda^2}{\lambda_c^2} > 1$, то

$$n' \approx \frac{\frac{\lambda^2}{\lambda_c^2}}{2\omega\tau_{\text{ст}} \left(\frac{\lambda^2}{\lambda_c^2} - 1 \right)} \ll 1. \quad (4.184)$$

Следовательно, для n имеем

$$n \cong i \left[\frac{\lambda^2}{\lambda_c^2} - 1 \right]^{\frac{1}{2}} \left[1 + i \frac{1}{2\omega\tau_{\text{ст}} \left(\frac{\lambda^2}{\lambda_c^2} - 1 \right)} \right]. \quad (4.185)$$

Отсюда, с учетом неравенства (4.184), получаем мнимую часть коэффициента преломления:

$$n'' \cong \left[\frac{\lambda^2}{\lambda_c^2} - 1 \right]^{\frac{1}{2}} \gg n'. \quad (4.186)$$

Коэффициент ослабления $\alpha = 2 \frac{\omega}{c} n''$ имеет вид:

$$\alpha = \frac{4\pi}{\lambda} \left[\frac{\lambda^2}{\lambda_c^2} - 1 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (4.187)$$

При $\lambda \gg \lambda_c$ получаем

$$\alpha \cong \frac{4\pi}{\lambda_c}. \quad (4.188)$$

То есть весь свет ослабляется на длине, которая меньше критической длины волны λ_c . В оптическом диапазоне, то есть при $\lambda < 1$ мкм, такое явление называется **высокочастотным скин-эффектом**. Свет практически полностью отражается с коэффициентом отражения:

$$R = \left| \frac{n-1}{n+1} \right|^2 = \left| \frac{n'-1-in''}{n'+1+in''} \right|^2 = \frac{(n'-1)^2 + (n'')^2}{(n'+1)^2 + (n'')^2} \approx 1. \quad (4.189)$$

Для надкритических частот, когда $\lambda < \lambda_c$, из (4.182) имеем аналогично предыдущему

$$n \approx \left[1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_c^2} \right]^{\frac{1}{2}} \left[1 + i \frac{1}{\omega\tau_{\text{ст}} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_c^2} \right)} \right]. \quad (4.190)$$

Мнимая часть n'' коэффициента преломления есть

$$n'' \approx \frac{1}{2} \frac{1}{\omega \tau_{\text{ст}}} \frac{\frac{\lambda^2}{\lambda_c^2}}{\left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_c^2}\right)^{\frac{1}{2}}}. \quad (4.191)$$

А действительная часть n' представляет собой выражение

$$n' = \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_c^2}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.192)$$

Коэффициент поглощения $\alpha = 2 \frac{\omega}{c} n''$, получаем в виде:

$$\alpha = \frac{1}{c \tau_{\text{ст}}} \frac{\frac{\lambda^2}{\lambda_c^2}}{\left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_c^2}\right)^{\frac{1}{2}}}. \quad (4.193)$$

Используя соотношение (2.5) для критической длины волны

$$\lambda_c^2 N_e r_e = \pi, \quad \lambda_c^2 = \frac{1}{N_e r_e},$$

получаем

$$\alpha = \frac{1}{c \tau_{\text{ст}}} \frac{\lambda^2 N_e r_e}{\left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_c^2}\right)^{1/2}}. \quad (4.194)$$

Для сечения $\sigma_0 [\text{м}^2]$ ослабления из обычного соотношения $\alpha = \sigma N$ имеем

$$\sigma_0 = \frac{1}{\pi} \frac{1}{c \tau_{\text{ст}}} \frac{\lambda^2 r_e}{\left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_c^2}\right)^{\frac{1}{2}}}. \quad (4.195)$$

Ослабление интенсивности света обуславливают два фактора: отражение света от плазмы и обратнотормозное поглощение (ОТП), которое обусловлено столкновениями электронов с ионами и нейтралами и о котором будет сказано ниже - в п. 4.5 и 4.6.

Множитель $n' = \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_c^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ в (4.195) ответствен за отражение, а сомно-

житель

$$\sigma_{\text{отп}} = \frac{1}{\pi} \frac{1}{c\tau_{\text{ст}}} \lambda^2 r_e \quad (4.196)$$

представляет собой собственно ОТП.

Итак, если длина волны внешнего поля меньше критической, то в плазме может распространяться электромагнитная волна как в среде с действительным показателем преломления n' , который меньше единицы и описывается формулой (4.192).

При этом происходит ослабление света с коэффициентом (4.195), который обусловлен как отражением света, так и ОТП.

Тот факт, что $n < 1$ означает, что фазовая скорость в плазме $v_\phi = \frac{\omega}{k}$ больше скорости света c в пустоте, а групповая $v_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{dk}$ - меньше c . Действительно, по определению, $v_\phi = \frac{\omega}{k}$, где $k = \frac{n'\omega}{c}$ - волновое число. Следовательно,

$$v_\phi = \frac{c}{n'} = \frac{c}{\left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_c^2}\right)^{\frac{1}{2}}} > c. \quad (4.197)$$

Групповая скорость $v_{\text{гр}}$ по определению есть

$$v_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{dk}. \quad (4.198)$$

В данном случае формула для волнового числа k выглядит так:

$$k = \frac{n'\omega}{c} = \frac{\omega}{c} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{c} (\omega^2 - \omega_p^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.199)$$

Дифференциал от k есть $dk = \frac{\omega}{c} (\omega^2 - \omega_p^2)^{-\frac{1}{2}} d\omega$, поэтому

$$v_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c}{\omega} (\omega^2 - \omega_p^2)^{\frac{1}{2}} = c \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_c^2}\right)^{\frac{1}{2}} < c, \quad (4.200)$$

то есть групповая скорость меньше скорости света в вакууме. Произведение же фазовой и групповой скоростей, как это видно из выражений (4.197) и (4.198), равно квадрату скорости света c в пустоте:

$$v_\phi v_{\text{гр}} = c^2. \quad (4.201)$$

4.5. Механизм поглощения света на свободных электронах из-за столкновений (обратнотормозное поглощение - ОТП)

Рассмотрим свободный электрон с энергией $W_e(t)$ и средним временем столкновений τ . На этот сталкивающийся электрон действует лазерное излучение с длиной волны $\lambda = \frac{2\pi}{\omega}$, интенсивностью $I_L [\text{Вт}/\text{м}^2]$, которая связана с амплитудой электрического поля $E_0 [\text{В}/\text{м}]$ известным соотношением (4.105):

$$I_L = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2, \quad (4.202)$$

где $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Кл}/\text{В} \cdot \text{м}$ - диэлектрическая проницаемость пустоты.

Среднюю скорость $\frac{dW_e^{(+)}}{dt}$ увеличения энергии свободного электрона в световом поле в результате столкновений (приобретаемую мощность $P_e^{(+)} [\text{Вт}]$) можно вычислить, непосредственно рассмотрев взаимодействие электрона с внешним (лазерным) электрическим полем $E(t)$:

$$E(t) = E_0 \cos \omega t. \quad (4.203)$$

Пользуясь формулой Эйлера:

$$\cos \omega t = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2},$$

представим силу $F(t) = eE(t)$, действующую на электрон, в следующем виде:

$$F(t) = eE_0 \cos \omega t = \frac{eE_0}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) = \frac{eE_0}{2} e^{i\omega t} + \frac{eE_0}{2} e^{-i\omega t}. \quad (4.204)$$

Применяя второй закон Ньютона для электрона, движущегося со скоростью $v(t)$, запишем уравнение движения для сталкивающегося электрона под действием внешней силы $F(t)$ с учетом тормозящей “силы трения” $\frac{mv}{\tau}$, обусловленной столкновениями

$$m \frac{dv}{dt} + m \frac{v}{\tau} = \frac{eE_0}{2} e^{i\omega t} + \frac{eE_0}{2} e^{-i\omega t}. \quad (4.205)$$

Применяя метод комплексных амплитуд, найдем решение (4.205) для каждого из двух комплексно-сопряженных слагаемых правой части:

$$v_1(t) = \frac{eE_0}{2m} \left(\frac{1}{i\omega + \frac{1}{\tau}} \right) e^{i\omega t}, \quad (4.206)$$

$$v_2(t) = \frac{eE_0}{2m} \left(\frac{1}{-i\omega + \frac{1}{\tau}} \right) e^{-i\omega t} = v_1^* \quad (4.207)$$

Согласно принципу суперпозиции, полное решение (4.202) представляет собой сумму $v_1(t)$ и $v_2(t)$, где $v_2 = v_1^*$.

Таким образом,

$$v(t) = v_1(t) + v_1^*(t) = 2 \operatorname{Re}(v_1(t)) = \frac{eE_0}{m} \operatorname{Re} \left(\frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega + \frac{1}{\tau}} \right) \quad (4.208)$$

Воспользуемся теперь следующей формулой Эйлера:

$$e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t \quad (4.209)$$

Получим скорость сталкивающегося электрона, движущегося под действием гармонического (лазерного) поля, с амплитудой E_0 в следующем виде:

$$v(t) = \frac{eE_0/m}{\omega^2 + 1/\tau^2} (\frac{1}{\tau} \cos \omega t + \omega \sin \omega t) \quad (4.210)$$

Скорость увеличения энергии электрона $\frac{dW_e^{(+)}}{dt}$, которая равна приобретаемой у светового поля $P_e^{(+)} [\text{Вт}]$ мощности, найдем, умножив скорость (4.207) на действующую со стороны поля силу $F = eE_0 \cos \omega t$ и усреднив полученное произведение по периоду колебаний $T = \frac{2\pi}{\omega}$:

$$P_e^{(+)} = \frac{dW_e^{(+)}}{dt} = \langle F(t)v(t) \rangle = \left\langle \frac{eE_0/m}{\omega^2 + 1/\tau^2} \left(\frac{1}{\tau} \cos \omega t + \omega \sin \omega t \right) eE_0 \cos \omega t \right\rangle \quad (4.211)$$

Знак усреднения $\langle \rangle$ означает, что вычисляется обычный для таких операций интеграл:

$$P_e^{(+)} = \frac{1}{T} \int_0^T F(t)v(t)dt, \quad (4.212)$$

где $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

В результате для правой части (4.211) имеем

$$\frac{1}{T} \int_0^T \cos^2 \omega t dt = \frac{1}{2},$$

а также

$$\frac{1}{T} \int_0^T \cos \omega t \sin \omega t dt = 0.$$

Таким образом, из (4.211) получаем

$$\frac{dW_e^{(+)}}{dt} = P_e^{(+)} = \frac{e^2 \frac{1}{2} E_o^2}{m(\omega^2 + \frac{1}{\tau^2})} \frac{1}{\tau}. \quad (4.213)$$

Если мы рассматриваем случай, когда $\omega \gg \frac{1}{\tau}$, то

$$\frac{dW_e^{(+)}}{dt} \cong \frac{e^2 \frac{1}{2} E_o^2}{m\omega^2} \frac{1}{\tau}. \quad (4.214)$$

Запишем теперь (4.211) таким образом, чтобы справа была интенсивность I_L лазерного света, которая связана с амплитудой поля соотношением (4.202)

$$I[\text{Вт/м}^2] = \frac{1}{2} E_o^2 c \epsilon_0.$$

Множитель $1/2$ в (4.202) появился потому, что E_o - это амплитуда поля $E = E_o \cos \omega t$, то есть имеет место обычное выражение для интенсивности:

$$I[\text{Вт/м}^2] = c \epsilon_0 \langle E^2 \rangle = \frac{1}{2} c \epsilon_0 E_o^2.$$

Теперь (4.213), (4.214) принимают вид

$$\frac{dW_e^{(+)}}{dt} = P_e^{(+)} = \sigma_{\text{отп}} I_L, \quad (4.215)$$

где $\sigma_{\text{отп}}[\text{м}^2]$ - сечение обратнотормозного поглощения (ОТП):

$$\sigma_{\text{отп}} = \frac{1}{\pi} \frac{\lambda^2 r_e}{c \tau} \frac{1}{1 + \frac{1}{(\omega \tau)^2}}. \quad (4.216)$$

Если $\omega \gg \frac{1}{\tau}$, то

$$\sigma_{\text{отп}} \cong \frac{1}{\pi} \frac{\lambda^2 r_e}{c \tau}. \quad (4.217)$$

Здесь $r_e[\text{м}]$ - так называемый классический радиус электрона:

$$r_e = \frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 m c^2} = 2,83 \cdot 10^{-15} \text{ м}.$$

Умножив $\sigma_{\text{отп}}[\text{м}^2]$ на концентрацию свободных электронов $N_e[\text{м}^{-3}]$, получим коэффициент обратнотормозного поглощения $\alpha_{\text{отп}}[\text{м}^{-1}]$:

$$\alpha_{\text{отп}} = N_e \sigma_{\text{отп}}. \quad (4.218)$$

Формула (4.216) аналогична (4.195), однако не содержит множителя $\frac{1}{\sqrt{1-(\lambda/\lambda_c)^2}}$, который учитывает, в какой мере длина волны лазерного света λ короче критической λ_c и учитывает отражение света от плазмы.

Пользуясь формулой (4.210) для скорости электрона с учетом столкновений, можно вычислить кинетическую энергию W_e^q *нерелятивистского* “бесстолкновительного” электрона, то есть энергию, которую в среднем набирает электрон за время, равное периоду T светового поля. Для этого усредним по периоду T квадрат скорости v и, учитывая, что отсутствие столкновений равносильно $\tau = \infty$, получим выражение

$$W_e^q = \frac{1}{2\pi} \frac{\lambda^2 r_{e0} I_L}{c}. \quad (4.219)$$

4.6. Зависимость энергии свободного сталкивающегося электрона от времени воздействия светового поля с учетом потерь энергии при столкновениях. Предельная энергия, которую может набрать сталкивающийся электрон в плазме под действием электромагнитного поля. Возможная зависимость сечения ОТП и коэффициента ОТП от интенсивности света

Из (4.215) следует, что скорость набора энергии сталкивающимся электроном постоянна, то есть его энергия увеличивается линейно со временем. Однако это вовсе не значит, что с течением времени энергия электрона станет сколь угодно большой.

Дело в том, что при столкновении электрона с тяжелой частицей, масса которой велика (по сравнению с массой электрона), но конечна, он теряет часть своей энергии, отдавая ее массивной частице. Эта потерянная часть тем больше, чем больше его энергия и чем меньше масса тяжелой частицы. На начальном этапе взаимодействия, пока энергия электрона мала (по сравнению с той, которую он приобретает между столкновениями), он в целом увеличивает свою энергию. Однако по мере ее роста потерянная часть при каждом столкновении будет также увеличиваться и в конце концов станет равной той энергии, которая приобретается между столкновениями и в нерелятивистском случае - формулой (4.219). Таким образом, предел росту энергии электрона во времени ставят те же самые электрон-ионные и электрон-атомные столкновения, которые обеспечивают обрат-

нотормозное поглощение света и на начальном этапе взаимодействия увеличивают энергию свободного электрона от столкновения к столкновению.

На языке формул это выглядит следующим образом. При упругом столкновении электрона, масса которого m , импульс p_e и энергия W_e , с тяжелой частицей массой $M \gg m$ (ионом или нейтралом) эта тяжелая частица в соответствии с законом сохранения импульса приобретает импульс ΔP_i , а вместе с ним и энергию $\Delta W_i = \frac{1}{2M} \Delta P_i^2$. Эта энергия (в соответствии с законом сохранения энергии) равна энергии $\Delta W_e = \frac{1}{2m} \Delta p_e^2$, которую потерял электрон при столкновении с ионом.

Здесь Δp_e - изменение импульса электрона в результате столкновения с ионом. Соответствующие расчеты показывают, что энергия отдачи ΔW_i , полученная ионом и потерянная электроном (ΔW_e), пропорциональна энергии электрона W_e и имеет вид

$$\Delta W_i = \frac{1}{2M} \Delta P_i^2 = 2 \frac{m}{M} (1 - \langle \cos \theta \rangle) W_e. \quad (4.220)$$

Здесь $W_e = \frac{p_e^2}{2m}$ - колебательная энергия электрона, а $\langle \cos \theta \rangle$ - среднее значение косинуса угла рассеяния при столкновениях.

Полагая $\langle \cos \theta \rangle = 0$ (так называемая модель сильных столкновений), получим

$$\Delta W_e = -2 \frac{m}{M} W_e. \quad (4.221)$$

Коль скоро в результате одного столкновения с ионом электрон, согласно (4.221), теряет энергию $\Delta W_e = 2 \frac{m}{M} W_e$, то *средняя скорость потерь энергии* (мощность потерь) $P_e^{(-)}$ [Вт] будет

$$P_e^{(-)} = \frac{\Delta W_e}{\tau} = -2 \frac{m}{M} \frac{1}{\tau} W_e. \quad (4.222)$$

Теперь можно записать *суммарную среднюю скорость* $\frac{dW_e}{dt}$ изменения энергии электрона, которая учитывает как увеличение (4.213), так и уменьшение (4.222) ее во времени:

$$\frac{dW_e}{dt} = P_e^{(+)} + P_e^{(-)}$$

и с учетом (4.213), (4.222) получить следующее уравнение:

$$\frac{dW_e}{dt} = \sigma_{\text{отн}} I_L - 2 \frac{m}{M} \frac{1}{\tau} W_e \quad (4.223)$$

с начальным условием

$$W_e = 0. \quad (4.224)$$

Из (4.223) следует, что формула (4.215) справедлива лишь при достаточно малых значениях $W_e(t)$, когда $P_e^{(+)} \gg P_e^{(-)}$, то есть когда выполняется неравенство

$$W_e \ll \frac{M}{m} \sigma_{\text{отп}} I_L \tau. \quad (4.225)$$

Уравнение типа (4.223) обычно решают методом вариации постоянной. Но в данном случае можно физически нагляднее получить решение, если сначала тождественными преобразованиями привести (4.223) к следующему виду:

$$\frac{dW_e}{dt} = -\frac{1}{\tau_T} (W_e - b). \quad (4.226)$$

Здесь

$$\tau_T = \frac{M}{2m} \tau \quad (4.227)$$

- время, в течение которого электрон передает свою энергию иону в результате многих столкновений (так называемое время термализации), а постоянная b представляет собой следующее выражение:

$$b = \frac{M}{2m} \tau \sigma_{\text{отп}} I_L = \frac{1}{\pi} \frac{\lambda^2 r_e}{c} \frac{1}{1 + \frac{1}{(\omega\tau)^2}} \frac{M}{2m} I_L, \quad (4.228)$$

ибо, согласно (4.216),

$$\sigma_{\text{отп}} = \frac{1}{\pi} \frac{\lambda^2 r_e}{c\tau} \frac{1}{1 + \frac{1}{(\omega\tau)^2}}.$$

Введем новую переменную

$$S = W_e - b. \quad (4.229)$$

Теперь (4.226) превращается в совсем простое уравнение

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{S}{\tau_T} \quad (4.230)$$

с начальным условием

$$S(0) = -b. \quad (4.231)$$

Решение (4.230) с учетом (4.231) есть

$$S(t) = -b \exp\left(-\frac{t}{\tau_T}\right). \quad (4.232)$$

Переходя теперь к исходной переменной W_e (энергия электрона) с учетом (4.229), получаем

$$W_e(t) = b \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_T}\right) \right]. \quad (4.233)$$

В развернутом виде, то есть с учетом (4.227), (4.228):

$$W_e(t) = \frac{1}{\pi} \frac{\lambda^2 r_e}{c} \frac{1}{1 + \frac{1}{(\omega\tau)^2}} \frac{M}{2m} I_L \left[1 - \exp\left(-\frac{2m}{M} \frac{t}{\tau}\right) \right] \quad (4.234)$$

или с учетом (4.227), (4.228) и формулы (4.215) для энергии W_e^q “бес-
столкновительного” нерелятивистского электрона

$$W_e(t) = W_e^q \frac{M}{m} \left(1 + \frac{1}{(\omega\tau)^2} \right)^{-1} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_T}\right) \right]. \quad (4.235)$$

Максимальная колебательная энергия $W_e^{\max}$, которую способен набрать электрон при заданной интенсивности света I_L , очевидно, соответствует $t = \infty$ в (4.224) или $\frac{dW_e}{dt} = 0$ в (4.223), когда неравенство (4.225) превращается в равенство. В любом случае для $W_e^{\max}$ имеем

$$W_e^{\max} = \frac{1}{\pi} \frac{\lambda^2 r_e}{c} \frac{1}{1 + \frac{1}{(\omega\tau)^2}} \frac{M}{2m} I_L \quad (4.236)$$

или

$$W_e^{\max} = W_e^q \frac{M}{m} \left(1 + \frac{1}{(\omega\tau)^2} \right)^{-1}. \quad (4.237)$$

Из (4.236), (4.237) понятно, почему мы не учитываем электрон-электронные столкновения. Из-за равенства масс сталкивающихся электронов предельная энергия $W^{\max}$ будет на несколько порядков ниже, чем при столкновениях с ионами и нейтралами.

Оценим для примера максимальную энергию электрона, которую он способен набрать в столкновительной плазме. Например, плазмы, полученной в благородном газе атмосферного давления под воздействием света неодимового лазера с длиной волны $\lambda = 1,06$ мкм интенсивностью $I_L = 10^{14}$ Вт/м² (световой пробой).

Подчеркнем, что световой пробой мы рассматриваем пока именно в благородном газе, ибо в формулах (4.229), (4.230) величина M равна массе атома (иона) только для благородных газов. В воздухе необходимо учитывать колебательные и вращательные возбуждения молекул, поэтому

отношение $\frac{M}{m}$ будет на порядок и даже два порядка меньше, чем для благородных газов.

Сразу же заметим, что плотность электронов даже в полностью ионизованном газе атмосферного давления еще далека от критической, если используется лазерный свет с длиной волны $\lambda_L = 1 \text{ мкм}$. Действительно, пользуясь уже известным соотношением (2.5), связывающим критическую длину волны λ_c и концентрацию свободных электронов $N_e [\text{м}^{-3}]$,

$$\lambda_c^2 r_e N_e = \pi. \quad (4.238)$$

При $N_e = 3 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$, $r_e \cong 3 \cdot 10^{-15} \text{ м}$ получим для критической длины волны: $\lambda_c = 6 \text{ мкм} > \lambda_L = 1 \text{ мкм}$.

Подставляя теперь в (4.238) $I_L = 10^{14} \text{ Вт/м}^2$, $\frac{M}{m} = 3 \cdot 10^4$, $\lambda_L = 1 \text{ мкм}$, $r_e \cong 3 \cdot 10^{-15} \text{ м}$, $\omega \tau \gg 1$, $1 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$, $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$, получим максимальную энергию $W_e^{\text{max}} [\text{эВ}]$ электрона для заданного значения интенсивности света:

$$W_e^{\text{max}} [\text{эВ}] = 30 \text{ эВ}.$$

Эта энергия электронов равна энергии ионов из-за интенсивного обмена между электронами и ионами плазмы в результате столкновений. Как говорят, плазма "термализована".

Температура связана с кинетической энергией частицы известным соотношением

$$W_e = \frac{3}{2} kT. \quad (4.239)$$

Таким образом, в данном случае температура плазмы $T [\text{К}]$ будет

$$T = 2 \cdot 10^5 \text{ К},$$

коэффициент обратнотормозного поглощения $\alpha_{\text{отп}} [\text{м}^{-1}]$ связан с сечением ОТП $\sigma_{\text{отп}} [\text{м}^2]$ известным соотношением

$$\alpha_{\text{отп}} [\text{м}^{-1}] = \sigma_{\text{отп}} [\text{м}^2] N_e [\text{м}^{-3}]. \quad (4.240)$$

Следует заметить, что в сильно ионизованной плазме сечение ОТП, а с ним и коэффициент ОТП могут зависеть от интенсивности света, если эта интенсивность достаточно велика, то есть такая, что максимальная энергия электрона W_e^{max} , достигаемая за счет ОТП (см. (4.234)), порядка или больше

тепловой энергии $W_e^T = \frac{3}{2} kT$:

$$W_e^T \leq W_e^{\text{max}}$$

или

$$\frac{3}{2}kT \leq \frac{1}{\pi} \frac{\lambda^2 r_e}{c} \frac{1}{1 + \frac{1}{(\omega\tau)^2}} \frac{M}{2m} I_L. \quad (4.241)$$

Отсюда получаем условие для интенсивности:

$$I_L > \frac{3}{2}kT \left[\frac{1}{\pi} \frac{\lambda^2 r_e}{c} \frac{1}{1 + \frac{1}{(\omega\tau)^2}} \frac{M}{2m} \right]^{-1}. \quad (4.242)$$

Например, в случае ОТП в металле типа серебра излучения УФ-лазера с длиной $\lambda = 0,1 \text{ мкм}$ (в Ag критическая длина волны $\lambda_c = 0,12 \text{ мкм}$) при комнатной температуре имеем: $T = 300 \text{ К}$, $\frac{M}{2m} = 10^4$, $r_e = 2,84 \cdot 10^{-15} \text{ м}$, $\omega\tau \gg 1$, $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$, $k = 1,38 \cdot 10^{23} \text{ Дж/К}$.

Тогда получаем следующее условие на интенсивность:

$$I_L > 2 \cdot 10^{13} \text{ Вт/м}^2. \quad (4.243)$$

В случае выполнения этого неравенства поглощение света происходит уже не по закону Бугера, то есть не по экспоненте.

Выясним теперь, какова зависимость $\sigma_{\text{отп}}$ от интенсивности $I_L [\text{Вт/м}^2]$, если соответствующие условия выполнены, то есть интенсивность света достаточно велика.

Как видно из формул (4.216), (4.217), сечение ОТП $\sigma_{\text{отп}}$ обратно пропорционально τ - времени столкновений. В свою очередь, величина τ связана с сечением столкновений $\sigma_{\text{ст}} [\text{м}^2]$, скоростью частицы $v [\text{м/с}]$ и концентрацией сталкивающихся частиц $N [\text{м}^{-3}]$ известным соотношением кинетической теории:

$$N\sigma_{\text{ст}}v\tau = 1. \quad (4.244)$$

В случае полностью ионизованной плазмы имеем $N = N_e - N_i$ (плазма состоит из электронов и ионов), $\sigma_{\text{ст}} = \sigma_{ei}$, $\tau = \tau_{ei}$ (столкновения только электрон-ионные). Из (4.244) имеем

$$\frac{1}{\tau_{ei}} = \sigma_{ei} N_e v. \quad (4.245)$$

Как показано в п.3.4, сечение электрон-ионных столкновений имеет вид

$$\sigma_{ei} = \pi b^2 L_K. \quad (4.246)$$

Здесь $b [\text{м}]$ - прицельный параметр, L_K - кулоновский логарифм. Из формулы для $b = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 W_e}$ видно, что σ_{ei} обратно пропорционально W_e^2 - квадрату энергии электрона. Его скорость v также связана с W_e соотношением

$v = \sqrt{\frac{2W_e}{m}}$. Таким образом, как это следует из (4.245) и соответствующих формул для входящих в (4.245) величин, имеет место следующая зависимость сечения ОТП от интенсивности I_L :

$$\sigma_{\text{отп}} \sim W_e^{-3/2} \sim I_L^{-3/2}, \quad (4.247)$$

то есть высокоионизованная плазма “просветляется” под действием достаточно интенсивного излучения. Зависимость $I_L(x)$ интенсивности света от глубины x [м] проникновения в плазму можно оценить, воспользовавшись исходным соотношением, которое связывает коэффициент ОТП $\alpha_{\text{отп}} = N_e \sigma_{\text{отп}}$ со скоростью изменения интенсивности по глубине проникновения $\frac{dI_L}{dx}$:

$$\frac{dI_L}{dx} = -N_e \sigma_{\text{отп}} I_L(x). \quad (4.248)$$

С учетом (4.247) уравнение (4.248) преобразуется к виду

$$d(I_L^{3/2}) = -\beta dx. \quad (4.249)$$

Интегрирование с учетом граничного условия $I_L(0) = I_{L0}$ дает следующую зависимость:

$$I_L(x) = (I_{L0}^{3/2} - \beta x)^{2/3}. \quad (4.250)$$

Эта формула дает существенно менее резкую зависимость интенсивности от глубины проникновения по сравнению с экспоненциальной и справедлива лишь для таких значений координаты x , при которых интенсивность еще достаточно велика, то есть справедливо соотношение (4.242).

Если сама плазма создана лазерным светом, например в результате оптического пробоя, и если такая плазма термализована, то тепловая энергия электронов и ионов близка к W_e^{max} , ОТП может отличаться от экспоненциального закона.

4.7. Взаимодействие света со свободными электронами при отсутствии столкновений. Диполь Герца

Из формулы (4.214) п.4.5 для сечения обратнотормозного поглощения (ОТП), казалось бы, следует, что при отсутствии столкновений, когда время столкновений $\tau_{\text{ст}}$ бесконечно велико ($\tau_{\text{ст}} = \infty$), свет должен проходить через плазму без потерь. Однако такие потери света все же будут иметь место из-за рассеяния света свободными несталкивающимися электронами. В реальных физических ситуациях столкновения можно не учитывать (даже когда они в принципе имеют место), если время взаимодействия $\tau_{\text{вз}}$

света с электроном меньше времени столкновений $\tau_{ст}$. Такое бывает, например, если лазерный свет облучает пучок свободных электронов в ускорителе. Бесстолкновительное взаимодействие возможно и в плазме, если длительность лазерного импульса $\tau_{л}$ меньше времени столкновений:

$$\tau_{л} \ll \tau_{ст}.$$

Современная техника позволяет получать столь короткие лазерные импульсы, что это неравенство может выполняться и для довольно плотной плазмы с “атмосферной” концентрацией электронов $N_e \approx 2,6 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$ (однократно ионизованный газ атмосферного давления). Действительно, как показывают оценки, время столкновений при плотностях $N_e \approx 2,6 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$ составляет

$$\tau_{ст} \sim 3 \cdot 10^{-12} \text{ с} = 3 \text{ пс}.$$

Для бесстолкновительного взаимодействия достаточно, чтобы длительность лазерного импульса τ была $\tau_{л} \ll 3 \text{ пс}$, что вполне достижимо, ибо уже имеются установки с длительностью импульса много меньше 10^{-13} при энергиях в импульсе $\sim 1 \text{ Дж}$.

Основной механизм потерь света с длиной волны λ , облучающего такие бесстолкновительные электроны - это так называемое томсоновское рассеяние. Оно возникает из-за того, что свободный электрон с зарядом $e[\text{Кл}]$ и массой $m[\text{кг}]$ колеблется с угловой частотой $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$ под действием переменного гармонического электрического поля $E_L(t)$ электромагнитной (лазерной) волны с амплитудой E_{L0} :

$$E_L(t) = E_{L0} \cos \omega t, \quad (4.251)$$

при этом ускорение $a[\text{м/с}^2]$ есть

$$a(t) = \frac{e}{m} E_L(t) = \frac{e}{m} E_{L0} \cos \omega t. \quad (4.252)$$

Согласно законам электродинамики, любой ускоренный заряд излучает электромагнитные волны. Действительно, рассмотрим диполь Герца - свободный заряд $e[\text{Кл}]$, движущийся с ускорением $a[\text{м/с}^2]$ вдоль оси z . Электрическое поле $E[\text{В/м}]$, создаваемое им в некоторой точке А, направлено по нормали к радиусу-вектору $\vec{r}$, соединяющему начало координат с точкой А. Это поле $E[\text{В/м}]$ лежит в плоскости, в которой находится радиус-вектор $\vec{r}$ и вектор ускорения $\vec{a}[\text{м/с}^2]$, и выражается следующей формулой ([1] глава 29):

$$E(t) = e \frac{a(t - \frac{r}{c}) \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 c^2 r}. \quad (4.253)$$

Здесь θ - угол между осью z и $\vec{r}$.

Наличие поля $E(t)$ свидетельствует о том, что имеет место излучение. Его интенсивность $I[\text{Вт}/\text{м}^2]$ выражается известной формулой

$$I = c\epsilon_0 \langle E^2 \rangle, \quad (4.254)$$

где знак $\langle \rangle$ означает усреднение по времени.

Испускаемая зарядом мощность $P[\text{Вт}]$ есть интеграл по поверхности сферы, окружающей заряд:

$$P = \int I ds. \quad (4.255)$$

Здесь ds - элемент поверхности. В сферической системе координат ds есть

$$ds = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (4.256)$$

В данном случае поле E изотропно по φ , то есть не зависит от азимутального угла φ , поэтому

$$ds = 2\pi r^2 \sin \theta d\theta. \quad (4.257)$$

Наш свободный электрон, колеблющийся под действием лазерного поля, то есть движущийся с ускорением, становится источником излучения, забирая энергию у падающего на него лазерного света. Задача состоит в том, чтобы выразить испускаемую электроном мощность $P[\text{Вт}]$ как функцию интенсивности $I_L[\text{Вт}/\text{м}^2]$ лазерного света:

$$P = \sigma I_L. \quad (4.258)$$

Тогда коэффициент пропорциональности $\sigma[\text{м}^2]$ между P и I_L будет, по определению, *сечением рассеяния* (в нашем случае - сечением томсоновского рассеяния σ_T).

В данном случае на заряд действует гармоническое элетрическое поле, поэтому ускорение $a[\text{м}/\text{с}^2]$, согласно второму закону Ньютона, есть (4.252)

$$a = \frac{e}{m} E_{L0} \cos \omega t.$$

Подставляя в (4.253) эту формулу для ускорения $a[\text{м}/\text{с}^2]$ и учитывая, что выражение

$$r_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} = 2,84 \cdot 10^{-15} \text{ м} \quad (4.259)$$

представляет собой классический радиус r_e электрона, получаем излучаемое "томсоновское" поле $E_T(t)$ в следующем виде:

$$E_T(t) = \frac{r_e}{r} E_0 \sin \theta \cos \omega t. \quad (4.260)$$

Интенсивность $I_T[\text{Вт}/\text{м}^2]$ “томсоновского” электромагнитного излучения от ускоренно движущегося заряда $e[\text{Кл}]$ есть, согласно (4.254),

$$I_T = c\epsilon_0 \langle E_T^2 \rangle. \quad (4.261)$$

Знак $\langle \rangle$ усреднения по времени в данном случае означает усреднение по периоду $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Подставив (4.260) в (4.261) и учитывая, что $\langle \cos^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2}$, получим

$$I_T = \left(\frac{r_e}{r} \right)^2 c\epsilon_0 \frac{1}{2} E_{L0}^2 \sin^2 \theta. \quad (4.262)$$

Полную излучаемую мощность томсоновского рассеяния $P_T[\text{Вт}]$ получим, интегрируя (4.262) по поверхности сферы, окружающей заряд. Элемент площади ds в сферических координатах в данном случае имеет вид (4.257):

$$ds = 2\pi r^2 \sin \theta d\theta.$$

В результате получим следующую формулу для мощности $P_T[\text{Вт}]$, которую испускает наш колеблющийся свободный электрон:

$$P_T = \int I_T(\theta) ds = \int 2\pi \frac{1}{2} E_{L0}^2 c\epsilon_0 r_e^2 \sin^3 \theta d\theta = I_L 2\pi r_e^2 \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta. \quad (4.263)$$

Произведя замену переменных: $\cos \theta = x$; $dx = -\sin \theta d\theta$, получим для интеграла, входящего в (4.263),

$$\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \int_{-1}^1 (1-x^2) dx = \frac{4}{3}. \quad (4.264)$$

Подставляя (4.264) в (4.263), получаем мощность $P_T[\text{Вт}]$, которую испускает свободный несталкивающийся электрон, колеблющийся под действием гармонического внешнего электрического поля:

$$P_T = \frac{8\pi}{3} r_e^2 I_L. \quad (4.265)$$

Формулу (4.265) мы можем представить в форме (4.257):

$$P_T[\text{Вт}] = \sigma_T[\text{м}^2] I_L[\text{Вт}/\text{м}^2], \quad (4.266)$$

где в соответствии с общим соотношением (4.257) имеем следующее выражение для сечения:

$$\sigma_T[\text{м}^2] = \frac{8\pi}{3} r_e^2 = 2,537 \cdot 10^{-29} \text{ м}^2. \quad (4.267)$$

$\sigma_T[\text{м}^2]$ называется сечением томсоновского рассеяния. Потери лазерного света из-за такого рассеяния хотя и конечны, но весьма незначительны. Действительно, если плотность электронов $N_e = 2,6 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$ (ионизован-

ный газ атмосферного давления), то коэффициент потерь $\alpha[\text{м}^{-1}] = \sigma_T N_e$ будет

$$\alpha = 6,3 \cdot 10^{-4} \text{ м}^{-1}.$$

Даже в металлах, где $N_e \sim 5 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$, $N_e \sim 5 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$, коэффициент потерь будет

$$\alpha \approx 1,2 \text{ м}^{-1}.$$

Впрочем, весьма мудро поставить эксперимент по бесстолкновительному взаимодействию лазерного света с электронами в металле. Как выше, в п. 4.6, время $\tau_{\text{ст}}$ между столкновениями электронов в металле (медь): $\tau_{\text{ст}} = 2,3 \cdot 10^{-14} \text{ с}$. Таким образом, нужны импульсы короче $2,3 \cdot 10^{-14} \text{ с}$.

4.8. Диполь Герца и вибратор Герца (антенна)

Формула Фейнмана (4.253) позволяет вычислить мощность излучения, испускаемого как одиночным ускоренным зарядом (диполь Герца), так и совокупностью ускоренных зарядов в проводнике (вибратор Герца - антенна).

Рассмотрим снова диполь Герца, т.е. одиночный заряд, движущийся с ускорением $a[\text{м/с}^2] = \frac{d^2 z}{dt^2}$ вдоль оси z . Однако в отличие от случая, рассмотренного в предыдущем п. 4.7, не будем исключать ускорение, выражая его через действующую на заряд внешнюю силу. Для такого одиночного заряда интенсивность $I[\text{Вт/м}^2]$ его излучения в соответствии с формулами (4.253) и (4.254) будет

$$I = c \epsilon_0 \left\langle |E(t)|^2 \right\rangle = c \epsilon_0 \left\langle \left| \frac{a \left(t - \frac{r}{c} \right) \sin \theta}{4 \pi \epsilon_0 c^2 r} \right|^2 \right\rangle. \quad (4.268)$$

Ориентируя координату z в направлении движения заряда, имеем соотношение между координатой $z[\text{м}]$ заряда и его ускорением $a[\text{м/с}^2]$

$$a = \frac{d^2 z}{dt^2}. \quad (4.269)$$

Введем дипольный момент $\mu[\text{Кл} \cdot \text{м}]$

$$\mu = e z. \quad (4.270)$$

Получим интенсивность (4.268) в следующей форме:

$$I = c\epsilon_0 \left\langle \left| \frac{d^2\mu}{dt^2} \sin\theta \right|^2 \right\rangle \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \quad (4.271)$$

Мощность $P[\text{Вт}]$, испускаемая таким диполем, в соответствии с (4.255), (4.257) с учетом (4.268) есть

$$P = \int I ds = c\epsilon_0 \frac{\left(\frac{d^2\mu}{dt^2} \right)^2}{(4\pi)^2 \epsilon_0 c^3} \quad (4.272)$$

Отсюда с учетом (4.264) получим

$$P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{3} \frac{\left(\frac{d^2\mu}{dt^2} \right)^2}{c^3} \quad (4.273)$$

Чтобы получить соответствующую формулу в системе СГС, нужно в (4.273) положить $4\pi\epsilon_0 = 1$, и тогда имеем мощность $P[\text{эрг/с}]$:

$$P = \frac{2}{3} \frac{\left(\frac{d^2\mu}{dt^2} \right)^2}{c^3} \quad (4.274)$$

Здесь $\mu[\text{эсКл} \cdot \text{см}] = e[\text{эсКл}]z[\text{см}]$, $c = 3 \cdot 10^{10} \text{ см/с}$.

Мощность излучения, испускаемую макроскопическим отрезком проводника - *вибратором Герца* (антенной), можно вычислить следующим образом. Рассмотрим отрезок проводника длиной $L[\text{м}]$, сечением $S[\text{м}^2]$ с концентрацией свободных электронов $N_e[\text{м}^{-3}]$. Будем считать, что под действием внешнего гармонического поля с частотой $\omega[\text{рад/с}]$ все электроны колеблются с частотой ω синхронно и синфазно. Это возможно, вообще говоря, лишь в том случае, когда $L < \lambda$, где $\lambda = \frac{2\pi}{\omega}$ - длина волны вынуждающего поля (при $L > \lambda$ необходимо учитывать запаздывание вынуждающей силы, которое будет различным в различных точках проводника). Если все электроны движутся синхронно и синфазно, то создаваемые ими поля - когерентны. Чтобы получить полное поле в некоторой точке пространства со сферическими координатами r, θ, ϕ , необходимо сложить все поля от всех электронов проводника. Число N_Σ этих электронов есть

$$N_\Sigma = N_e L S \quad (4.275)$$

Полное поле $E_\Sigma[\text{В/м}]$ будет:

$$E_{\Sigma}[B/m] = N_{\Sigma} E(r, \theta), \quad (4.276)$$

где E - поле от каждого отдельного электрона-диполя, описываемое формулой (4.253). Ускорение $a[m/c^2]$ есть производная по времени от скорости $v_z = \frac{dz}{dt}$:

$$a = \frac{dv_z}{dt}. \quad (4.277)$$

В свою очередь, плотность тока $j_z[A/m^2]$ есть, как известно,

$$j_z = eN_e v_z. \quad (4.278)$$

Таким образом, сила тока $i[A]$ в проводнике будет:

$$i = S j_z = S e N_e v_z. \quad (4.279)$$

Подставляя (4.275) в (4.276) и учитывая соотношения (4.277), (4.278), (4.279), получаем

$$E_{\Sigma} = \frac{\sin \theta}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \frac{di}{dt}. \quad (4.280)$$

Внешнюю возбуждающую силу, действующую на каждый электрон, мы считаем гармонической. Поэтому ток $i(t)$ - также гармоническая функция с амплитудой i_0 :

$$i = i_0 \cos \omega t. \quad (4.281)$$

Таким образом,

$$\frac{di}{dt} = -\omega i_0 \sin \omega t.$$

Формула (4.280) приобретает вид:

$$E_{\Sigma} = -\frac{\sin \theta}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \omega i_0 \sin \omega t. \quad (4.282)$$

Для интенсивности излучения вибратора $I_{\Sigma}[Вт/м^2]$ воспользуемся формулой, аналогичной (4.278)

$$I_{\Sigma} = c\epsilon_0 \langle E_{\Sigma}^2 \rangle. \quad (4.283)$$

Знак $\langle \rangle$, как и в (4.261), означает усреднение по периоду $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\lambda}{c}$. Под-

ставив сюда (4.282) и учитывая, что $\langle \sin^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2}$, получим

$$I_{\Sigma}(r, \theta) = c\epsilon_0 \left(\frac{L \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \right)^2 \frac{\omega^2 i_0^2}{2}. \quad (4.284)$$

Полную мощность P_{Σ} [Вт], испускаемую вибратором Герца (антенной), получим по формуле $P_{\Sigma} = \int I_{\Sigma}(r, \theta) ds$, интегрируя по сфере, где элементарная площадка $ds = 2\pi r^2 \sin \theta d\theta$:

$$P_{\Sigma} = \frac{\pi}{2c\epsilon_0} c\epsilon_0 \left(\frac{L}{\lambda}\right)^2 \frac{i_0^2}{2} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{2\pi}{3} \frac{1}{c\epsilon_0} \left(\frac{L}{\lambda}\right)^2 \frac{i_0^2}{2}. \quad (4.285)$$

Величина $\frac{1}{c\epsilon_0} = 377 \text{ Ом}$ - сопротивление вакуума, поэтому излучаемую мощность (4.285) можно представить так:

$$P_{\Sigma} = R_{\text{изл}} i_{\text{эф}}^2, \quad (4.286)$$

где $R_{\text{изл}}$ - так называемое *сопротивление излучения*:

$$R_{\text{изл}} = \frac{2\pi}{3c\epsilon_0} \left(\frac{L}{\lambda}\right)^2, \quad (4.287)$$

а $i_{\text{эф}}$ - эффективное значение тока, которое определяется из соотношения

$$i_{\text{эф}}^2 = \langle i^2 \rangle = \frac{i_0^2}{2}. \quad (4.288)$$

Для полуволнового вибратора $\left(L = \frac{\lambda}{2}\right)$ сопротивление излучения будет:

$$R_{\text{изл}} \approx 200 \text{ Ом}.$$

Итак, формула Фейнмана (4.253) для поля ускоренного заряда позволяет вычислить следующие величины:

- сечение (4.267) томсоновского рассеяния:

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} r_e^2,$$

где $r_e = 2,84 \cdot 10^{-15} \text{ м}$ - классический радиус электрона;

- мощность излучения P [Вт] (4.273), которую испускает ускоренный заряд (диполь Герца):

$$P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{3} \frac{\left(\frac{d^2\mu}{dt^2}\right)^2}{c^3}$$

- мощность излучения (4.286) вибратора Герца (антенны), через который течет переменный ток с амплитудой колебания i_0 [А]:

$$P_{\Sigma} = R_{\text{изл}} i_{\text{эф}}^2.$$

Задачи

1. а). Меньше какого критического значения λ_c должна быть длина волны λ электромагнитного излучения, чтобы оно смогло проникнуть в металл типа серебра ($N^{Ag} = 6 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$).

б). Найти коэффициент $\alpha_{\text{отп}} [\text{м}^{-1}]$ обратнотормозного поглощения (ОТП) при $\lambda = 0,5\lambda_c$. Время столкновений τ электронов с решеткой оценить, считая электропроводность серебра равной $\sigma_s = 6,8 \cdot 10^7 \text{ Ом}^{-1} \text{ м}^{-1}$, классический радиус электрона $r_e = 2,84 \cdot 10^{-15} \text{ м}$.

Ответ: а) $\lambda_c = 134 \text{ нм}$; б) $\alpha_{\text{отп}} = 2 \cdot 10^4 \text{ м}^{-1}$.

Указание. а) Воспользоваться соотношением: $\lambda_c^2 r_e N_e = \pi$; б) Предста-

вить $\alpha_{\text{отп}}$ в виде: $\alpha_{\text{отп}} = \left(\frac{\lambda}{\lambda_c} \right)^2 \frac{1}{c\tau}$.

2. Определить длину волны λ , которую должно иметь электромагнитное излучение, чтобы пройти сквозь стальной лист толщиной $L = 2 \text{ мм}$ с потерями 10% ($\alpha_{\text{отп}} L = 0,1$). Электропроводность стали $\sigma_s = 5 \cdot 10^6 \text{ Ом}^{-1} \text{ м}^{-1}$, концентрация электронов $N_e = 5 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$.

Ответ: $\lambda = 1 \text{ нм}$.

Указание. Поглощение считать обратнотормозным; вычислить коэффициент $\alpha_{\text{отп}} [\text{м}^{-1}]$ обратнотормозного поглощения. Время столкновений $\tau_{\text{сг}}$ электронов с решеткой найти из формулы для σ_s .

3. Для серебра (проводимость $\sigma_s = 6,25 \cdot 10^7 \text{ Ом}^{-1} \text{ м}^{-1}$, концентрация электронов $N_e = 6 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$) оценить:

а) глубину скин-слоя при длине волны $\lambda_{\text{свч}} = 10 \text{ см}$. Показать, что имеет место низкочастотный скин-эффект ($\omega_{\text{свч}} \tau_{\text{сг}} \ll 1$);

б) глубину скин-слоя при длине $\lambda_{\text{ИК}} = 1,06 \text{ мкм}$. Доказать, что в данном случае имеет место высокочастотный скин-эффект (длина волны $\lambda_{\text{ИК}}$ больше критической λ_0 и $\omega_{\text{ИК}} \tau_{\text{сг}} \gg 1$).

Ответ: а) 100 нм; б) 10 нм.

Указание. Чтобы найти $\tau_{\text{сг}}$, необходимо воспользоваться формулой для удельной проводимости $\sigma_s [\text{Ом}^{-1} \text{ м}^{-1}]$.

4. Температура $D-T$ плазмы в опытах по лазерному термоядерному синтезу достигает 10 кэВ, то есть $T \sim 10^7 - 10^8$ К. При этом концентрация электронов составляет $N_e = 10^{29} \text{ м}^{-3}$. Предположив, что плазма излучает как черное тело, оценить:

а) энергию $W_{\text{СБ}}$, испущенную за 1 нс поверхностью мишени площадью 12 мм^2 (радиус мишени $R_m = 1 \text{ мм}$) при температуре $T = 1 \text{ кэВ}$, воспользовавшись законом Стефана-Больцмана ($\sigma_{\text{СБ}} = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт/м}^2 \text{ К}^4$);

б) длину волны λ_m , на которую приходится максимум спектральной испускающей способности, пользуясь законом смещения Вина ($\lambda_m T = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$);

в) почему ничего подобного не наблюдается?

Ответ: а) $W_{\text{СБ}} = 7 \cdot 10^6 \text{ Дж}$; б) $\lambda_m = 0,29 \text{ нм}$; в) ЛТС-плазма - не черное тело.

Указание. Доказать, что ЛТС-плазма - не черное тело, то есть ее оптическая плотность мала: $\alpha_{\text{отп}} R_m \ll 1$. Для этого оценить сечение $\sigma_{\text{отп}} [\text{м}^2]$ обратнотормозного поглощения на длине волны λ_m , а также коэффициент ОТП-поглощения $\alpha_{\text{отп}} [\text{м}^{-1}]$.

5. Свободный электрон движется без столкновений под действием лазерного излучения с интенсивностью $I_L [\text{Вт/м}^2]$ и длиной волны $\lambda [\text{м}]$. Найти:

а) колебательную энергию W_e^q электрона как функцию интенсивности I_L с учетом релятивистской зависимости массы m электрона от его колебательной скорости v_q ;

б) численное значение W_e^q при $I_L = 10^{25} \text{ Вт/м}^2$ и $\lambda = 1,06 \text{ мкм}$ (Nd-лазер).

Ответ: а) $W_e^q = m_0 c^2 [\sqrt{1+a} - 1]$, где $a = \frac{1}{\pi} \frac{\lambda^2 r_{e0} I_L}{c m_0 c^2}$, $r_{e0} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_0 c^2} = 2,84 \cdot 10^{-15} \text{ м}$ - классический радиус электрона, $m_0 = 0,9 \cdot 10^{-30} \text{ кг}$ - масса покоя электрона, $m_0 c^2 = 0,5 \text{ МэВ}$ - энергия покоя электрона; б) $W_e^q = 9 \text{ МэВ}$.

Указание. Колебательную энергию W_e^q электрона вычислять по формуле релятивистской механики $W_e^q = W_e - m_0 c^2$. Использовать формулу для

полной энергии W_e электрона в виде $W_e = mc^2 = m_0 c^2 \sqrt{1 + \left(\frac{pc}{m_0 c^2}\right)^2}$, где p - релятивистский импульс. Электрическое поле $E[\text{В/м}]$ считать гармоническим: $E(t) = E_0 \cos \omega t$ (здесь $\omega = 2\pi c/\lambda$), $I_L = c\epsilon_0 E_0^2/2$. Применить второй закон Ньютона в виде $\frac{dp}{dt} = eE_0 \cos \omega t$. Выражение $\left(\frac{pc}{m_0 c^2}\right)^2$ усреднить по периоду лазерного поля.

6. На плотную (закритическую) плазму воздействует лазерный свет, интенсивность $I_L[\text{Вт/м}^2]$ которого такова, что уже нельзя пренебрегать v_q^2 - средним квадратом колебательной скорости свободного электрона по сравнению с квадратом скорости света c^2 . Найти:
 а) зависимость критической концентрации N_{ec} электронов от интенсивности $I_L[\text{Вт/м}^2]$;
 б) зависимость критической длины волны λ_c от интенсивности.

Ответ: а) $N_{ec} = N_{ec0} \sqrt{1+a}$, где $a = \frac{1}{\pi} \frac{\lambda^2 r_{e0} I_L}{c} \frac{1}{m_0 c^2} = \left\langle \left(\frac{pc}{m_0 c^2}\right)^2 \right\rangle$, p -

релятивистский импульс, $r_{e0} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_0 c^2} = 2,84 \cdot 10^{-15} \text{ м}$ - классический радиус электрона, $m_0 = 0,9 \cdot 10^{-30} \text{ кг}$ - масса покоя электрона, $m_0 c^2 = 0,5 \text{ МэВ}$ - энергия покоя электрона, N_{ec0} - нерелятивистская критическая концентрация электронов; б) $\lambda_c = \lambda_{c0} (1+a)^{1/4}$.

Указание. Воспользоваться соотношением $\lambda_c^2 N_e r_e = \pi$, учесть в формуле для r_e и для импульса p релятивистскую зависимость массы m электрона от скорости v_q : $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v_q^2/c^2}}$, выразить v_q^2/c^2 и $1 - v_q^2/c^2$ через

a . Для вычисления релятивистского импульса p применить второй закон Ньютона в виде $\frac{dp}{dt} = eE_0 \cos \omega t$ ($\omega = 2\pi c/\lambda$).

7. а). Найти зависимость коэффициента $\alpha_{отп}[\text{м}^{-1}]$ обратнотормозного поглощения (ОТП) от интенсивности $I_L[\text{Вт/м}^2]$ лазерного света

для слабо ионизованного газа: $N_e = N_i \ll N_n = 2,6 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$. Степень ионизации $\beta = N_e / N_n = 10^{-4}$.

б). Оценить $\alpha_{\text{отп}}$ при $I_L = 10^{12} \text{ Вт/м}^2$, полагая $\lambda = 1 \text{ мкм}$, $M_i / m_e = 10^4$. Газокинетическое сечение $\sigma_{\text{гк}}$ принять равным $\sigma_{\text{гк}} = 10^{-19} \text{ м}^2$, классический радиус электрона $r_e = 2,84 \cdot 10^{-15} \text{ м}$.

Ответ: а) $\alpha_{\text{отп}} = \gamma \sqrt{I_L}$, где $\gamma = \beta \frac{\sigma_{\text{гк}}}{\sqrt{m_e}} \sqrt{\frac{M_i}{m_e}} \left(\frac{\lambda^2 r_e}{\pi c} \right)^{\frac{3}{2}} N_n^2$;

б) $\alpha_{\text{отп}} = 3 \cdot 10^{-3} \text{ м}^{-1}$.

ГЛАВА 5. ДАВЛЕНИЕ ПЛАЗМЫ И СВЕТОВОЕ ДАВЛЕНИЕ

5.1. Давление как скорость передачи нормальных компонент импульсов частиц (на единицу площади поверхности) и как объемная плотность энергии

По определению, давление $P[\text{Н/м}^2]$ на какую-либо поверхность - это направленная по нормали к ней сила $F[\text{Н}]$, поделенная на площадь $S[\text{м}^2]$ поверхности:

$$P[\text{Н/м}^2] = \frac{F[\text{Н}]}{S[\text{м}^2]}.$$

Газ (плазма) представляют собой коллектив частиц, движущихся во всех направлениях и имеющих различные направления импульсов $p = mv$. Чтобы вычислить давление газа, нужно определить силу, действующую на стенки сосуда.

Согласно второму закону Ньютона, сила F равна скорости изменения импульса p во времени.

$$F = \frac{dp}{dt}.$$

Давление $P[\text{Н/м}^2]$ как сила $F_n[\text{Н}]$, направленная по нормали к поверхности $S[\text{м}^2]$, будет:

$$\frac{F_n}{S_n} = P[\text{Па}] = \frac{1}{S_n} \frac{dp_n^\Sigma}{dt}. \quad (5.1)$$

Здесь dp_n^Σ - сумма всех нормальных к поверхности компонент импульсов, переданных поверхности за время dt .

Таким образом, задача по вычислению давления сводится к нахождению величины $\frac{dp_n^\Sigma}{dt}$ через измеряемые величины.

Рассмотрим выделенный на поверхности некоторый объем газа в виде параллелепипеда с площадью грани S_{yz} с ребром $v_x \Delta t$. Здесь v_x - составляющая скорости частицы вдоль оси x , а Δt - некоторый промежуток времени, например, $\Delta t < \tau_{\text{ст}}$, где $\tau_{\text{ст}}$ - среднее время между столкновениями (рис. 5.1).

Систему координат ориентируем так, чтобы участок площадью S_{yz} был параллелен плоскости yz . Если $N[\text{м}^{-3}]$ - концентрация частиц в объеме $V[\text{м}^3]$, где $V = S_{yz} v_x \Delta t$, то полное число частиц N_Σ в объеме V будет

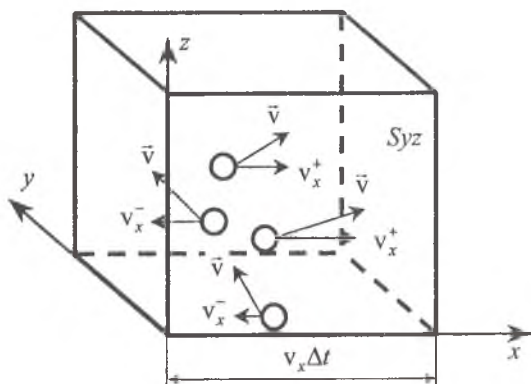


Рис. 5.1. К вычислению давления частиц газа на площадку S_{yz} , расположенную перпендикулярно оси x . v_x^+ и v_x^- - соответственно положительные и отрицательные проекции скорости $\vec{v}$ на ось x

$$N_{\Sigma} = N S_{yz} v_x \Delta t = S_{yz} J_x^{(+)} \Delta t, \quad (5.2)$$

где

$$J_x^{(+)} = N v_x. \quad (5.3)$$

Здесь $J_x^{+} [1/\text{м}^2 \cdot \text{с}]$ - есть x - компонента плотности потока частиц, движущихся в положительном направлении оси x , то есть в сторону поверхности S_{yz} по нормали к ней.

Действительно, сравнивая правую и левую части формулы (5.2), видим, что $J_x^{(+)}$ содержит поток частиц $\Pi [\text{с}^{-1}] = \frac{N_{\Sigma}}{\Delta t}$ (через S_{yz}), поделенный на S_{yz} :

$$J_x^{(+)} = \frac{\Pi}{S_{yz}}. \quad (5.4)$$

Поток, поделенный на площадь, через которую он проходит по нормали к ней, есть, очевидно, интенсивность (плотность потока) $J_x^{(+)}$.

В самом общем случае формула типа (5.3) имеет векторный вид:

$$\vec{J} = N \vec{v}, \quad (5.5)$$

где $\vec{J}$ и $\vec{v}$ - векторы:

$$\begin{aligned} \vec{J} &= \{J_x, J_y, J_z\} \\ \vec{v} &= \{v_x, v_y, v_z\}. \end{aligned}$$

Формула (5.5) - это весьма общее и полезное для расчетов соотношение, связывающее плотность потока (интенсивность) $J [1/\text{м}^2 \cdot \text{с}]$ частиц, их концентрацию $N [\text{м}^{-3}]$ и скорость движения $v [\text{м}/\text{с}]$. Нормальная состав-

ляющая Δp_n^Σ полного (суммарного) импульса частиц, переданного поверхности S_{yz} с коэффициентом отражения r за время Δt , есть

$$\Delta p_n^\Sigma = p_x^S S_{yz} N v^{(+)} \Delta t = (1+r) p_x S_{yz} N v^{(+)} \Delta t. \quad (5.6)$$

Применяя формулу (5.1) и учитывая, что в данном случае $p_x \equiv p_n$, $S_{yz} = S_n$, получаем выражение для давления $P[\text{Па}]$:

$$P[\text{Па}] = \frac{1}{S_n} \frac{dp_n^\Sigma}{dt} = \frac{1}{S_n} \frac{\Delta p_n^\Sigma}{\Delta t} = (1+r) p_x N v^{(+)} \quad (5.7)$$

или

$$P[\text{Па}] = (1+r) p_x J_x^{(+)}. \quad (5.8)$$

Это выражение надо еще усреднить по скоростям частиц. Такое усреднение мы проведем несколько позже. А пока будем считать, что оно уже выполнено, чтобы можно было дать следующее общее определение давления газа:

давление есть (усредненное по нормальным компонентам скоростей) произведение нормальной компоненты импульса $p_n^S = (1+r)p_n$, передаваемого частицей поверхности, на нормальную компоненту плотности потока частиц $J_n = N v_n$, движущихся к этой поверхности.

Можно дать и такое определение:

давление - это (усредненное по нормальным компонентам скоростей) нормальная компонента плотности потока нормальной компоненты импульса, передаваемого частицей поверхности.

Оба определения можно выразить следующей формулой:

$$P = \langle p_n^S J_n \rangle. \quad (5.9)$$

В случае моноскоростного пучка частиц (каждая - с импульсом $\vec{p}$), падающего на плоскую поверхность под углом падения α , усреднение по скоростям не требуется, и формула (5.9) приобретает вид:

$$P = p_n^S J_n = (1+r) p J \cos^2 \alpha, \quad (5.10)$$

ибо в данном случае $p_n^S = p \cos \alpha$ и, кроме того, $J_n = J \cos \alpha$.

В частности, в случае лазерного (фотонного) пучка $p = \frac{h\nu}{c}$ для давления света $P_{\text{св}}[\text{Па}]$ на плоскую поверхность имеем

$$P_{\text{св}} = (1+r) \frac{I}{c} \cos^2 \alpha, \quad (5.11)$$

где $I[\text{Вт}/\text{м}^2] = h\nu J$ - энергетическая интенсивность лазерного пучка, то есть плотность мощности (или поверхностная плотность энергетического светового потока).

Если воспользоваться соотношением (5.5) между плотностью потока J , скоростью частиц v и их концентрацией $N[\text{м}^{-3}]$, формулу для давления $P[\text{Па}]$ можно записать так:

$$P = p_n^S \bar{v}_n N. \quad (5.12)$$

Формула (5.12) позволяет дать еще и такое определение давления.

Давление - это произведение следующих трех величин: средней нормальной компоненты импульса p_n^S , передаваемого частицей поверхности, средней нормальной компоненты скорости v_n частицы и объемной плотности частиц $N[\text{м}^{-3}]$.

Для практических расчетов годится любая из формул - (5.10) или (5.12) - в зависимости от конкретных условий.

Так, в газе обычно известно давление, то есть концентрация частиц N и температура $T[\text{К}]$, которая однозначно определяет скорость v . Для газов удобно пользоваться (5.12).

В тех случаях, когда приходится иметь дело с пучками частиц (фотоны, электроны, ионы, атомы), задана обычно плотность их потока J , и лучше пользоваться формулой (5.10).

Вернемся теперь к формулам (5.9), (5.12) и проведем их усреднение по времени или равносильное ему усреднение по скоростям. Ведь фактически рис. 5.1 - это мгновенная фотография быстро меняющейся картины. Усреднение по скоростям v_x равносильно усреднению по времени, ибо поток, бомбардирующий S_{yz} , содержит частицы с самыми разными v_x . Усреднение по v_x нужно выполнять, строго говоря, используя распределение Максвелла $W(v_x)$ по проекциям скоростей

$$W(v_x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp \left\{ - \left(\frac{v_x}{u} \right)^2 \right\} \frac{dv_x}{u},$$

где $u = \sqrt{\frac{2kT}{M}}$ - средняя тепловая скорость частиц. Здесь мы воспользуемся более математически простым приемом и начнем с усреднения по направлениям. Положительное значение скорости v_x имеет примерно половина всех частиц. У другой половины v_x - отрицательная (рис. 5.1). Это равносильно утверждению, что в формулы (5.3), (5.5) для $J^{(+)}$ дает вклад лишь величина $N/2$, то есть половина всех частиц (в единице объема) и, таким образом,

$$J_x = (Nv_x)^{(+)} = \frac{N}{2} v_x.$$

Каждая частица несет свой, нормальный к поверхности S_{yx} импульс $p_x^{(+)} = Mv_x^{(+)}$, который также направлен в сторону положительных значений оси x , ибо знак импульса определяется знаком скорости $v_x^{(+)}$. Таким образом, формула (5.9) для давления приобретает следующий вид:

$$P[\text{Па}] = \frac{1}{2}(1+r)p_x v_x N. \quad (5.13)$$

Здесь $N[\text{м}^{-3}]$ - концентрация частиц, а индексы $(+)$ опущены за ненадобностью, ибо $p_x v_x > 0$. Теперь необходимо выразить произведение $p_x v_x$, имеющее размерность энергии, через $\bar{w}[\text{Дж}]$ - среднюю энергию частицы. Это нужно для того, чтобы получить из (5.12) такую формулу для давления, которая включала бы в себя макроскопические измеряемые величины, например среднюю энергию $w \approx \frac{3}{2}kT$. В самом деле, если $p_x v_x \sim w$, то из (5.12) получим давление в следующем виде:

$$P \sim wN, \quad (5.14)$$

то есть давление можно будет оценивать, зная wN - объемную плотность (концентрацию) внутренней энергии газа $U = N_{\Sigma} w$, содержащей N_{Σ} частиц в объеме $V[\text{м}^3]$:

$$P = \frac{N_{\Sigma}}{V} w = \frac{U}{V}. \quad (5.15)$$

Чтобы всего этого добиться, необходимо произведение $p_x v_x$ усреднить по скоростям частиц нашего ансамбля (газа). Из статистической физики, базирующейся на аппарате теории вероятностей, известно, что энергия частиц газа равномерно распределяется по степеням свободы. В данном случае их всего три, ибо для частиц возможно лишь поступательное движение, которое полностью характеризуется тремя взаимно перпендикулярными координатами x, y, z . Так как энергия пропорциональна квадрату скорости, то, следовательно, для средних квадратов скоростей имеем

$$\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle. \quad (5.16)$$

Здесь усреднение $\langle \rangle$ производится по всему ансамблю.

В свою очередь, скорость v каждой частицы выражается через ее x, y, z -компоненты следующим образом:

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2. \quad (5.17)$$

Отсюда с учетом (5.16) получаем

$$v_x^2 = v_y^2 = v_z^2 = \frac{1}{3}v^2. \quad (5.18)$$

Так как

$$p_x v_x = Mv_x^2,$$

$$p_y v_y = M v_y^2,$$

$$p_z v_z = M v_z^2,$$

где M - масса частицы, то среднее по скоростям от произведения $p_x v_x$ есть просто равенство (5.17), умноженное на M .

$$p_x v_x = p_y v_y = p_z v_z = M \frac{1}{3} v^2.$$

Выразим теперь полученное значение $p_x v_x = M \frac{1}{3} v^2$ через среднюю энергию, приходящуюся на частицу, и рассмотрим два случая: идеальный газ и фотонный газ.

5.2. Давление газа (идеальный газ, плазма, фотонный газ)

5.2.1. Идеальный газ или классическая идеальная плазма

Для идеального газа, состоящего из частиц массой M , средняя кинетическая энергия w , приходящаяся на частицу, есть

$$w = \frac{1}{2} M v^2. \quad (5.19)$$

Следовательно,

$$p_x v_x = \frac{1}{3} M v^2 = \frac{2}{3} w. \quad (5.20)$$

Формула (5.13) для давления приобретает следующий вид:

$$P = \frac{1+r}{2} \frac{2}{3} N w = \frac{1+r}{2} (\gamma - 1) N w = \frac{1+r}{2} (\gamma - 1) \frac{U}{V}. \quad (5.21)$$

Здесь $\gamma = \frac{5}{3} = \frac{C_p}{C_v}$, где C_p [Дж/кг·К] и C_v [Дж/кг·К] - соответственно теплоемкости газа при постоянном давлении и постоянном объеме, U [Дж] = w [Дж] N [м⁻³] V [м³] - его внутренняя энергия, V [м³] - объем, занимаемый газом.

Как видно из (5.21), давление идеального газа по порядку величины близко к значению объемной плотности (концентрации) его внутренней энергии. В некоторых типичных случаях можно упростить эту формулу. Например, если температура стенки $T_{ст}$ сосуда равна температуре газа T , то $r = 1$ (столкновения со стенками - упругие). Кроме того, средняя энергия частицы, согласно кинетической теории, есть

$$w = \frac{3}{2} k T,$$

где $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К - постоянная Больцмана.

Соотношение (5.21) в этом случае сводится к хорошо известному соотношению

$$P[\text{Па}] = NkT. \quad (5.22)$$

Это уравнение состояния идеального газа (уравнение Клапейрона). Действительно, если в объеме V содержится N_{Σ} частиц, то их концентрация $N[\text{м}^{-3}]$ есть

$$N = \frac{N_{\Sigma}}{V}. \quad (5.23)$$

В этом случае из (5.22) получаем

$$PV = N_{\Sigma}kT. \quad (5.24)$$

Умножим и поделим правую часть на массу $M[\text{кг}]$. Тогда $N_{\Sigma}M = M_r$ - есть масса газа. Кроме того, $k = \frac{R}{N_A}$, где $R = 8,314$ [Дж/моль·К] - универсальная газовая постоянная, а $N_A = 6,03 \cdot 10^{23}$ [1/моль] - число Авогадро. Введя в рассмотрение величину $N_A M = \mu$ [кг/моль] - молярную массу газа, получим уравнение состояния идеального газа в его наиболее распространенном виде:

$$PV = \frac{M_r}{\mu} RT. \quad (5.25)$$

Плазма состоит из электронов и ионов. Масса покоя электрона $m = 0,9 \cdot 10^{-30}$ кг на три и более порядка меньше массы ионов $M_{\text{и}}$. Однако если температура электронов и ионов одинакова (как говорят, плазма термализована), то как электроны, так и ионы имеют среднюю энергию $\frac{3}{2}kT$, и уравнение (5.22) справедливо для такой термализованной плазмы.

В проведенных выше оценках мы полагали, что частицы упруго отражаются от стенок (коэффициент отражения $r = 1$). Это справедливо для равновесной системы, когда температура стенок $T_{\text{ст}}$ равна температуре газа.

Система будет неравновесной при $T_{\text{ст}} \neq T$. Если, например, стенки "холодные" (то есть $T_{\text{ст}} < T$), то частицы будут "примерзать" к стенкам, и в среднем будет $r < 1$. Такое примерзание имеет место в так называемых азотных ловушках, которые используются для удаления примесей из откачиваемого объема. Ловушка представляет собой охлаждаемую жидким азотом ($T = 77$ К) металлическую поверхность, которая помещается в откачиваемый объем. Частицы нежелательных примесей (масло и т.п.), имеющие относительно высокую температуру конденсации, в буквальном

смысле примерзают к охлажденной поверхности ловушки. Таким образом, для этих частиц $r \approx 0$.

Из формулы для давления (5.21) можно получить уравнение, описывающее поведение газа, изолированного от внешней среды ("термостата"). Это адиабата идеального газа, которая имеет хорошо известный вид:

$$PV^\gamma = \text{const}, \quad (5.26)$$

где $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$.

Чтобы убедиться в этом, положим в (5.21) $r = 1$ (система равновесная) и продифференцируем (5.21). Получим

$$PdV + VdP = (\gamma - 1)dU. \quad (5.27)$$

Приращение внутренней энергии dU можно выразить с помощью соотношения между P , dV и dU , которое имеет место при сжатии газа при постоянном давлении:

$$dU = -PdV. \quad (5.28)$$

Действительно, если мы сжимаем газ ($dV < 0$) при постоянном давлении P , то вся затраченная на это работа идет на увеличение внутренней энергии U , то есть $dU > 0$. Тогда, подставляя (5.28) в (5.27), приводя подобные члены и разделяя переменные, имеем:

$$\frac{dP}{P} = -\gamma \frac{dV}{V}. \quad (5.29).$$

Интегрируя это уравнение, получаем адиабату (5.26).

Как сейчас будет показано, уравнение адиабаты типа (5.26) получается и для излучения, если оно содержится в замкнутой полости с отражающими стенками ("зеркальный ящик").

5.2.2. Фотонный газ

Если свет находится в полости, ограниченной отражающими стенками, то такой свет можно рассматривать как газ, состоящий из релятивистских частиц - фотонов (рис. 5.1). В формуле (5.12) для давления необходимо привести усреднение произведения $p_x v_x$, так же как это было сделано для идеального газа, но с учетом специфики фотонов как релятивистских частиц, не имеющих массы покоя. Мы воспользуемся релятивистской массой M_ϕ фотона, которая получается из известного соотношения между массой M и энергией W :

$$W = Mc^2. \quad (5.30)$$

В нашем случае $W = W_\phi = h\nu = M_\phi c^2$, то есть

$$M_\phi = \frac{h\nu}{c^2}. \quad (5.31)$$

Компоненты вектора импульса $p = \{p_x, p_y, p_z\}$ будут равны

$$p_x = M_\phi v_x, \quad p_y = M_\phi v_y, \quad p_z = M_\phi v_z. \quad (5.32)$$

Следовательно,

$$p_x v_x = M_\phi v_x^2. \quad (5.33)$$

Фотоны, находящиеся в зеркальном ящике, двигаются хаотично. Поэтому ось x - лишь одно из трех взаимно ортогональных и совершенно равноправных направлений (x, y, z). В соответствии с вероятностными законами, средний квадрат скорости v^2 по одному из таких равноправных направлений равен среднему квадрату по любому другому:

$$\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle. \quad (5.34)$$

Полная скорость фотона есть $c = 3 \cdot 10^8$ м/с. Если имеются три отличные от нуля проекции v_x, v_y, v_z , то, как следует из векторной алгебры,

$$v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = c^2.$$

При усреднении с учетом (5.34) получим

$$\langle v_{x,y,z}^2 \rangle = \frac{1}{3} c^2. \quad (5.35)$$

Усредняя теперь (5.32) по всем возможным скоростям v_x с учетом (5.35), получаем

$$p_x v_x = M_\phi v_x^2 = M_\phi \frac{1}{3} c^2 = \frac{1}{3} \frac{h\nu}{c}. \quad (5.36)$$

Для давления фотонного газа P_ϕ [Па] получаем из (5.32):

$$P_\phi = \frac{1+r}{2} \frac{1}{3} h\nu N_\phi = \frac{1+r}{2} (\gamma_\phi - 1) h\nu N_\phi = \frac{1+r}{2} (\gamma_\phi - 1) \frac{U}{V}. \quad (5.37)$$

Здесь $\gamma_\phi = \frac{4}{3}$, U [Дж] = $h\nu N_\Sigma$ - внутренняя энергия фотонного газа, содержащего N_Σ фотонов в объеме V . Можно записать (5.37) и так:

$$P_\phi V_\phi = \frac{1+r}{2} (\gamma_\phi - 1) U. \quad (5.38)$$

Точно так же, как и для идеального газа, давление света примерно равно объемной плотности (концентрации) энергии:

$$P = \frac{1}{2} (1+r) (\gamma - 1) \frac{U}{V},$$

при $r = 1$

$$P = (\gamma_\phi - 1) \frac{U}{V}.$$

Полагая $r = 1$, получим (точно так же, как и для идеального газа) фотонную адиабату:

$$P_\phi V_\phi^\gamma = \text{const}. \quad (5.39)$$

В отличие от адиабаты идеального газа, у которого $\gamma = \frac{5}{3}$, здесь показатель фотонной адиабаты $\gamma_\phi = \frac{4}{3}$.

Мы рассмотрели монохроматический (лазерный) фотонный газ, состоящий из одинаковых фотонов. Спектральная плотность такого излучения бесконечна, следовательно, нет смысла говорить о температуре. Она практически бесконечна, если определять ее как температуру черного тела, спектрально-объемная плотность которого $\rho_{\nu, \nu} [\text{Дж}/\text{м}^3 \cdot \text{Гц}]$ подчиняется формуле Планка:

$$\rho_{\nu, \nu} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}. \quad (5.40)$$

5.2.3. Оценка давления

Для обычного излучения черного тела с температурой T можно воспользоваться законом Стефана-Больцмана, связывающего полную интенсивность излучения $I [\text{Вт}/\text{м}^2]$ на всех частотах с температурой

$$I \approx \varepsilon \sigma_{\text{СБ}} T^4.$$

Здесь $\sigma_{\text{СБ}} = 5,67 \cdot 10^{-8} [\text{Вт}/\text{м}^2 \cdot \text{К}]$ - постоянная Стефана-Больцмана, $\varepsilon \leq 1$ - излучательная способность.

Как мы уже знаем, давление P по порядку величины примерно равно объемной плотности $w_\nu [\text{Дж}/\text{м}^3]$ (концентрации) энергии. Для излучения с интенсивностью $I [\text{Вт}/\text{м}^2]$ такая концентрация есть

$$w_\nu = \frac{I}{c}.$$

Таким образом, из (5.14) давление равновесного излучения в полости с абсолютно поглощающими (и переизлучающими) стенками есть

$$P \approx \varepsilon \sigma_{\text{СБ}} \frac{T^4}{c}. \quad (5.41)$$

5.3. Давление однонаправленного пучка одинаковых частиц на плоскую поверхность при нормальном или наклонном падении

Пучок, о котором идет речь, может представлять собой, например, монохроматический лазерный пучок с малой (дифракционной) расходимостью, которой пренебрежем в расчетах. Такой пучок состоит из *одинаковых фотонов*, т.е. фотонов, находящихся в *одном и том же состоянии*. Это

означает, что все они двигаются со скоростью света c , имеют одну и ту же частоту ν и направление распространения, которое характеризуется волновым вектором $\vec{k}$ ($|\vec{k}| = \frac{2\pi\nu}{c}$), Вектор $\vec{k}$ связан с импульсом $\vec{p}$ известным

соотношением де-Бройля: $\vec{p} = \hbar\vec{k}$ (напомним, что $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, а импульс фотона $p = \frac{h\nu}{c}$).

Для лазерного пучка такие характеристики означают высокую степень когерентности: как временной (монохроматичность), так и пространственной (малая расходимость).

Пучок может также состоять из моноскоростных электронов, ионов или нейтральных атомов. Важно лишь, что у всех частиц импульсы p одинаковы как по абсолютной величине, так и по направлению. Методика вычисления давления не зависит от природы пучка.

Давление на плоскость $S[m^2]$ можно вычислить чисто формально, воспользовавшись уже известными формулами п. 5.1. Как было показано выше (5.10-5.11), из самого определения давления $P[Па]$ как скорости передачи импульса в расчете на единицу площади следует, что

$$P = p_n^S J_n = (1+r)p_n J_n \quad (5.42)$$

или

$$P = p_n^S N J_n = (1+r)N p_n J_n. \quad (5.43)$$

Здесь $J_n[l/m^2 \cdot c]$, $p_n[kg \cdot m/c]$ - соответственно нормальные компоненты плотности потока частиц и импульса, $N[m^{-3}]$ - их концентрация в пучке, r - коэффициент отражения, $p_n^S = (1+r)p_n$ - импульс, передаваемый поверхности каждой частицей (индекс "s" означает "source" - поверхность). Здесь использована формула

$$J = Nv, \quad (5.44)$$

которая представляет собой весьма общее соотношение между плотностью потока частиц $J[l/m^2 \cdot c]$, их концентрацией $N[m^{-3}]$ и скоростью $v[m/c]$. Следует отметить, что в формулы для давления (5.42), (5.43) входят нормальные компоненты J_n , p_n . Именно их надо учитывать при произвольной ориентации направления движения частиц относительно поверхности.

5.3.1. Нормальное падение пучка

Рассмотрим плоскую площадку площадью $S[m^2]$ с коэффициентом отражения r , на которую падает по нормали к ней пучок частиц с импульсом $p[kg \cdot m/c]$ с плотностью потока $J[l/m^2 \cdot c]$ (рис. 5.2). Поток $\Pi[l/c]$ через поверхность

$$\Pi = JS. \quad (5.45)$$

Действующая на поверхность по нормали к ней сила $F[\text{Н}]$ в соответствии со вторым законом Ньютона есть

$$F = p\Pi = pJS. \quad (5.46)$$

Отсюда получаем давление $P[\text{Па}]$:

$$P = \frac{F}{S} = pJ. \quad (5.47)$$

В случае перпендикулярного (нормального) падения однонаправленного пучка частиц (рис. 5.2) нормальные компоненты плотности тока J_n , импульса p_n и скорости v_n равны соответственно полным абсолютным значениям плотности потока J , импульса p и скорости v :

$$\begin{aligned} J_n &= J, \\ p_n &= p, \\ v_n &= v. \end{aligned} \quad (5.48)$$

Нам не нужно здесь проводить усреднение ни по направлению, ни по скоростям. Можно сразу воспользоваться формулой (5.43) для лазерного пучка с заданной интенсивностью $I_\lambda[\text{Вт}/\text{м}^2]$, частотой ν и коэффициентом отражения r . Имеем (см. приложение 5.1) для плотности потока $J[\text{л}/\text{м}^2 \cdot \text{с}]$, импульса фотона p , импульса p^S , передаваемого поверхности каждым фотоном,

$$J = \frac{I_\lambda}{h\nu}, \quad (5.49)$$

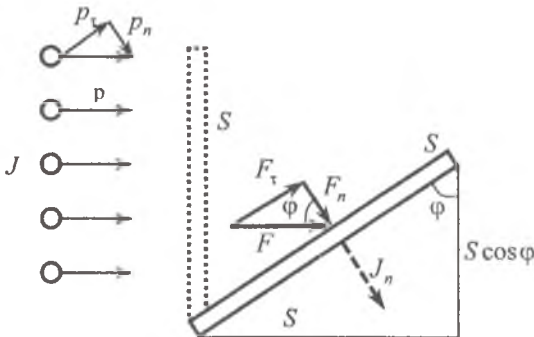


Рис. 5.2. Наклонное падение однонаправленного пучка одинаковых частиц на плоскость S с коэффициентом отражения r :

φ - угол падения; p - импульс частицы, например, фотона ($p = h\nu/c$) или электрона ($p = mv$); $p_n = p \cos \varphi$, $p_\tau = p \sin \varphi$ - соответственно нормальная и тангенциальная компоненты импульса p частицы

$$p = \frac{h\nu}{c}, \quad (5.50)$$

$$p^S = (1+r)p = (1+r)\frac{h\nu}{c}. \quad (5.51)$$

Отсюда из (5.42) получаем

$$P = (1+r)\frac{I_n}{c}. \quad (5.52)$$

Подставим для примера сюда численные значения $I_n = 3 \cdot 10^{10}$ Вт/м², $r = 1$, $c = 3 \cdot 10^8$ м/с. Получим $P = 200$ Па.

Отметим, что в формулу для давления (5.52) не входит частота света, а только его интенсивность I_n [Вт/м²].

Если пучок - электронный (ионный, атомный), то вид формулы для давления зависит от того, насколько близка скорость частиц v к скорости света $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

Рассмотрим сначала релятивистский пучок, в котором кинетическая энергия частицы W_k много больше энергии покоя $m_0 c^2$, то есть $W_k \gg m_0 c^2$. Для электронного пучка это означает, что $W_k = eU \gg m_0 c^2 = 0,5$ МэВ, где U [В] - разность потенциалов, которую электрон проходит в ускорителе, $m_0 = 0,9 \cdot 10^{-30}$ кг - масса покоя электрона, $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл - заряд электрона.

В этом случае импульс электрона следует оценивать, пользуясь релятивистской формулой, представленной в приложении 5.1.

$$W^2 - (pc)^2 = m^2 c^4 \quad (5.53)$$

или

$$p = \frac{W}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{m_0 c^2}{W} \right)^2}, \quad (5.54)$$

где $W = mc^2$ - полная энергия, $p = mv$ - полный импульс, $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ -

релятивистская масса, m_0 - масса покоя.

Так как $W_k = eU \gg m_0 c^2 = 0,5$ МэВ $= 0,5 \cdot 10^6$ эВ, то можно положить $W \cong eU$, и тогда из (5.54) для импульса имеем

$$p \cong \frac{W}{c} \cong \frac{eU}{c}. \quad (5.55)$$

Импульс, который каждая частица передает поверхности, есть

$$p^S = (1+r)p = (1+r) \frac{eU}{c}. \quad (5.56)$$

Воспользовавшись формулой для давления в виде (5.9), получим

$$P = (1+r)J_e \frac{eU}{c} = \frac{1+r}{c} j_e U = (1+r) \frac{I_e}{c}. \quad (5.57)$$

Здесь $J_e [1/\text{м}^2 \cdot \text{с}]$ - плотность потока электронов, и, следовательно, плотность электрического тока $j_e [\text{А}/\text{м}^2]$ есть

$$j_e [\text{А}/\text{м}^2] = e [\text{Кл}] J_e [1/\text{м}^2 \cdot \text{с}]. \quad (5.58)$$

Отсюда плотность мощности (интенсивность) $I_e [\text{Вт}/\text{м}^2]$ пучка электронов имеем в следующем виде:

$$I_e [\text{Вт}/\text{м}^2] = j_e U. \quad (5.59)$$

Для релятивистских частиц (электронов) выражение (5.57) для давления по форме совпадает с соотношением (5.52), полученным для фотонов.

Пример

Пусть плотность тока электронного пучка $eJ_e = j_e = 3 \cdot 10^4 \text{ А}/\text{м}^2$, энергия электрона $eU = 10 \text{ МэВ}$, коэффициент отражения $r = 0$. Интенсивность I_e в этом случае в соответствии с формулой (5.59) равна:

$$I_e = 3 \cdot 10^4 [\text{А}/\text{м}^2] \cdot 10^7 [\text{В}] = 3 \cdot 10^{11} \text{ Вт}/\text{м}^2.$$

Из (5.57) получаем давление электронного пучка при нормальном падении:

$$P [\text{Па}] = 10^3 \text{ Па} \cong 10^{-2} \text{ атм.}$$

Если же электроны не релятивистские, то есть $eU \ll m_0 c^2$, то импульс электрона p определяется из нерелятивистской формулы, связывающей его с кинетической энергией W_k :

$$W_k = \frac{m}{2} p^2.$$

Отсюда

$$p = \sqrt{2meU},$$

и для давления имеем следующее выражение:

$$P [\text{Па}] = (1+r)J_e p = (1+r) \frac{j_e U}{eU} \sqrt{2meU} = (1+r) \frac{I_e}{v},$$

где $v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$ - скорость электрона. При $eU = 50 \text{ кэВ} = 5 \cdot 10^4 \text{ эВ}$, $r = 0$,

$j_e = 10^4 \text{ А}/\text{м}^2$ имеем $v = 1,3 \cdot 10^8 \text{ м}/\text{с}$ и для давления получаем

$$P = 2 \text{ Па}.$$

5.3.2. Наклонное падение пучка

В случае наклонного падения пучок (света, электронов с импульсом $p[\text{кг} \cdot \text{м}/\text{с}]$ каждый) с плотностью потока $J[1/\text{м}^2 \cdot \text{с}]$ облучает плоскую поверхность (например, пластинку) площадью $S[\text{м}^2]$ с коэффициентом отражения r . На эту поверхность частицы падают не по нормали, а под углом падения $\varphi > 0$ (рис. 5.2). В результате поток $\Pi[1/\text{с}]$ через пластину уменьшается и составляет теперь

$$\Pi(\varphi) = JS \cos \varphi. \quad (5.60)$$

Сила $F(\varphi)$, действующая на наклонную пластину, есть произведение потока на импульс, переданный пластине частицей

$$F(\varphi) = (1+r)p\Pi = (1+r)pJS \cos \varphi. \quad (5.61)$$

Нормальная к поверхности компонента силы $F_n(\varphi)$ будет теперь

$$F_n(\varphi) = F(\varphi) \cos \varphi = p_n^S \Pi(\varphi) = (1+r)p \cos \varphi \Pi(\varphi) = (1+r)pSJ \cos^2 \varphi. \quad (5.62)$$

Здесь $p_n^S = (1+r)p \cos \varphi$ - нормальная компонента импульса, которая передается поверхности от каждой падающей на нее частицы.

Давление $P[\text{Па}]$ таким образом есть

$$P = \frac{F_n}{S} = p_n^S \cos^2 \varphi = (1+r)pJ \cos^2 \varphi. \quad (5.63)$$

Если поверхность неограниченна, то можно просто воспользоваться формулами (5.10) - (5.11), которые описывают давление света.

Как видно из рис. 5.2, в отличие от предыдущих случаев нормального падения, теперь у импульса p и скорости v имеются две компоненты по отношению к S : нормальная p_n и тангенциальная p_τ . Эти компоненты связаны с абсолютной величиной импульса p следующими соотношениями:

$$p_n = p \cos \varphi, \quad (5.64)$$

$$p_\tau = p \sin \varphi. \quad (5.65)$$

Таким образом, нормальная компонента каждой падающей на S частицы передает поверхности импульс

$$p^S = (1+r)p_x = (1+r)p \cos \varphi. \quad (5.66)$$

Точно так же плотность потока частиц $J[1/\text{м}^2 \cdot \text{с}]$, если формально рассматривать ее как вектор $\vec{J} = N\vec{v}$, имеет теперь две компоненты: нормальную J_n и тангенциальную J_τ , которые следующим образом связаны с абсолютной величиной J :

$$J_n = J \cos \varphi, \quad (5.67)$$

$$J_\tau = J \sin \varphi. \quad (5.68)$$

Для вычисления давления P [Па] нужны нормальные составляющие импульса (p_n) и плотности потока (J_n), представленные соответственно в (5.67) и (5.68). Подставляя их в (5.60), а также беря значение p , p^S и J из (5.64) (световой пучок) или из (5.56), (5.58) (пучок релятивистских электронов), получаем для давления P [Па]

$$P = (1 + r) \frac{I}{c} \cos^2 \varphi, \quad (5.69)$$

где I [Вт/м²] - плотность мощности.

Для пучка нерелятивистских электронов, в соответствии с формулой (5.10), давление P [Па] есть

$$P = (1 + r) \frac{I_e}{v} \cos^2 \varphi, \quad (5.70)$$

где v - скорость; I_e [Вт/м²] - плотность мощности электронного пучка.

Следует заметить, что при наклонном падении на плоскую поверхность S при конечном поглощении ($r < 1$) пучок создает на ней *тангенциальное напряжение* σ_τ [Н/м²]. Действительно, каждая поглощенная поверхностью частица передает ей тангенциальную компоненту своего импульса, которая, согласно (5.65), есть

$$p_\tau = p \sin \varphi. \quad (5.71)$$

Подобно нормальному давлению, тангенциальное напряжение σ_τ [Па] равно скорости передачи тангенциальных компонент импульсов, падающих на поверхность частиц, в расчете на единицу площади. Плотность $J_{\text{погл}}$ поглощаемого поверхностью потока частиц есть

$$J_{\text{погл}} = (1 - r) J \cos \varphi. \quad (5.72)$$

Каждая поглощенная частица отдает поверхности свою тангенциальную компоненту импульса:

$$p_\tau = p \sin \varphi. \quad (5.73)$$

Подставляя в (5.42) выражение (5.72) для $J_{\text{погл}}$ вместо J_n и (5.73) для p^S вместо p_n , получаем

$$\sigma_\tau = (1 - r) J p \sin \varphi \cos \varphi. \quad (5.74)$$

Подставляя соответствующие значения J [1/м²·сек] и p из (5.72), (5.74), получаем для пучков релятивистских частиц (фотоны, релятивистские электроны)

$$\sigma_\tau = \frac{1 - r}{2c} I \sin 2\varphi, \quad (5.75)$$

где I [Вт/м²] - плотность мощности пучка; c - скорость света.

Для нерелятивистских электронов

$$\sigma_{\tau} = \frac{1-r}{2v} I_e \sin 2\varphi, \quad (5.76)$$

где $v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$ - скорость электрона.

При облучении поверхности ненаправленным светом (фотонный газ), в котором фотоны движутся по всем направлениям, тангенциальное направление равно нулю из-за усреднения (5.74) по всем возможным углам падения (от 0 до $\pi/2$). В то же время в результате аналогичного усреднения формулы (5.63) *среднее давление* имеет величину порядка

$$P[\text{Па}] \approx \frac{1+r}{2c} I.$$

5.4. Давление плазмы при испарении вещества лазерным излучением

5.4.1. Образование плазмы при равновесном стационарном нагреве металлической мишени лазерным излучением. Пороговая интенсивность плазмообразования

Плазма образуется в результате нагрева мишени лазерным излучением, если его интенсивность $I_L [\text{Вт}/\text{м}^2]$ превышает некоторое пороговое значение $I_L^{\text{пр}}$ - *пороговую интенсивность плазмообразования*. Излучение превратит металл в идеальную плазму, если температура нагрева $T[\text{К}]$ станет выше *критической температуры* $T_k[\text{К}]$ для материала мишени (см. гл. 2). Для металлов $T_k[\text{К}]$ должна удовлетворять равенству

$$kT_k = W_F, \quad (5.77)$$

где $W_F \approx 5 \text{ эВ}$ - энергия Ферми для металлов, а $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$ - постоянная Больцмана.

Будем считать, что концентрация образующейся плазмы достаточно низкая, т.е. много меньше критической $N_c [\text{м}^{-3}]$ для данной длины волны λ лазерного излучения. Напомним, что N_c и λ связаны известным соотношением

$$\lambda^2 N_c r_e = \pi, \quad (5.78)$$

где $r_e = 2,84 \cdot 10^{-15} \text{ м}$ - классический радиус электрона.

В этом случае плазму можно считать практически прозрачной для лазерного излучения. Оно поглощается в основном на поверхности мишени, и температура возникающей плазмы равна температуре мишени.

Чтобы оценить пороговую интенсивность плазмообразования I_L^{th} , соответствующую критической температуре T_k при таком стационарном равновесном нагреве металлической мишени, когда плазма прозрачна, можно пользоваться законом Стефана-Больцмана, записав его в следующем виде:

$$(1-r)I_L^{th} = \varepsilon \sigma_{CB} T_k^4. \quad (5.79)$$

Здесь $\sigma_{CB} = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт/м}^2\text{К}$ - постоянная Стефана-Больцмана, $R < 1$ - коэффициент отражения мишени, $\varepsilon < 1$ - ее излучательная способность.

Отсюда имеем следующее выражение для $I_L^{th} [\text{Вт/м}^2]$:

$$I_L^{th} = \frac{\varepsilon}{1-r} \sigma_{CB} T_k^4. \quad (5.80)$$

Полагая, что

$$\frac{\varepsilon}{1-r} \approx 1 \quad (5.81)$$

и взяв T_k из соотношения (5.77), при $W_F \approx 5 \text{ эВ}$ получаем

$$I_L^{th} = 6,4 \cdot 10^{11} \text{ Вт/м}^2. \quad (5.82)$$

При $I_L > I_L^{th}$ происходит не только испарение вещества мишени, но также ионизация испаряющихся атомов. В результате вблизи мишени образуется плазма, состоящая из электронов, ионов и нейтральных частиц (атомов) с концентрациями соответственно $N_e [\text{м}^{-3}]$, $N_i [\text{м}^{-3}]$, $N_n [\text{м}^{-3}]$. Мы рассматриваем в данном случае однократно ионизованную плазму, у которой

$$N_e [\text{м}^{-3}] \approx N_i [\text{м}^{-3}] \gg N_n [\text{м}^{-3}]. \quad (5.83)$$

Заметим, что $I_L^{th} [\text{Вт/м}^2]$ - это такая интенсивность, при которой образуется именно плазма, а не нейтральный газ. Действительно, обычное испарение вещества возможно и при значительно меньших интенсивностях $I_L^{исп}$, когда температура поверхности $T [\text{К}]$ всего лишь выше порога кипения металла $T_{кип} \approx 3 \cdot 10^3 \text{ К}$. Подставив это значение $T_{кип}$ в (5.80), получим с учетом (5.81)

$$I_L^{исп} \geq 4,6 \cdot 10^6 \text{ Вт/м}^2. \quad (5.84)$$

Видно, что интенсивность испарения $I_L^{исп}$ почти на пять порядков меньше интенсивности плазмообразования I_L^{th} . При $I_L = I_L^{исп}$ ионизации не происходит, и испаренное вещество состоит из нейтральных атомов.

5.4.2. Соотношение между давлением лазерного излучения и давлением плазмы, созданной этим излучением вблизи поверхности мишени

Одно из замечательных и важных для практики свойств лазерной плазмы состоит в том, что ее давление на мишень может многократно пре-
взойти давление света, который эту плазму создает.

Природу такого свойства можно понять из следующих рассуждений. При облучении мишени лазерным светом часть его энергии превращается в энергию плазмы. Каждый атом или ион массой $M[\text{кг}]$, отлетающий от мишени, уносит из нее импульс $p = Mv$. По закону сохранения импульса, такой же импульс $p^T = p$ передается мишени. Нормальная к ее поверхности компонента p_n^T импульса, переданная мишени, дает вклад в давление, которое мишень испытывает в результате испарения вещества. Импульс $p = Mv$, как правило, на несколько порядков больше импульса фотона $h\nu/c$. Следовательно, и давление, создаваемое плазмой, будет также многократно превышать световое, несмотря на то, что каждый ион плазмы образуется в результате поглощения нескольких фотонов.

Проведем теперь соответствующие оценки.

Если нормальная к поверхности мишени компонента плотности потока отлетающих атомов есть $J_n[\text{л/м}^2 \cdot \text{с}]$, то давление $P_{\text{пл}}[\text{Па}]$, которое испытывает облучаемая поверхность со стороны плазмы, есть

$$P_{\text{пл}} = p_n^T J_n. \quad (5.85)$$

Эта формула тождественными преобразованиями сводится к известному выражению для давления идеального газа, которое представляет собой следующее выражение:

$$P_{\text{пл}} = \frac{2}{3} wN = NkT. \quad (5.86)$$

Здесь $w = \frac{3}{2} kT$ - средняя энергия частиц плазмы (электроны, ионы), $N[\text{м}^{-3}]$ - их концентрация.

В п. 5.2 показано, что давление коллектива частиц, например, атомов или ионов (идеальный газ, плазма), фотонов (световое давление) по порядку величины равно объемной плотности энергии этих частиц. Объемная же плотность энергии плазмы в данном случае есть не что иное, как величина NkT , то есть правая часть (5.86).

Для однонаправленного светового пучка, состоящего из одинаковых фотонов с импульсом $h\nu/c$ каждый и движущихся со скоростью c (например, лазерный пучок с интенсивностью $I_L[\text{Вт/м}^2]$), световое давление $P_{\text{св}}[\text{Па}]$, согласно формуле (5.85), равно

$$P_{\text{св}} = (1 + r) \frac{I_L}{c} = (1 + r) w_V \quad (5.87)$$

Здесь $w_V [\text{Дж}/\text{м}^3] = \frac{I_L}{c}$ - объемная плотность световой энергии, R - коэффициент отражения.

Итак, чем выше объемная плотность энергии коллектива частиц (будь то плазма, фотонный газ или однонаправленный лазерный пучок), тем выше производимое этими частицами давление на поверхность мишени.

Покажем, что объемная плотность энергии лазерной плазмы может быть на несколько порядков выше, чем объемная плотность создавшей ее световой (лазерной) энергии. Для этого рассмотрим рис. 5.3, на котором схематически изображен лазерный пучок с площадью поперечного сечения $S[\text{м}^2]$ и интенсивностью $I_L [\text{Вт}/\text{м}^2]$, создающий плазму вблизи поверхности мишени.

За время $\Delta t[\text{с}]$ энергия $W_L [\text{Дж}]$, облучившая поверхность мишени и поглощенная в ней (считаем для простоты, что коэффициент отражения $R = 0$), может быть представлена выражением

$$W_L = I_L S \Delta t. \quad (5.88)$$

Эта энергия занимает объем $V_L [\text{м}^3]$, равный

$$V_L = S c \Delta t. \quad (5.89)$$

Таким образом, объемная плотность световой (лазерной) энергии

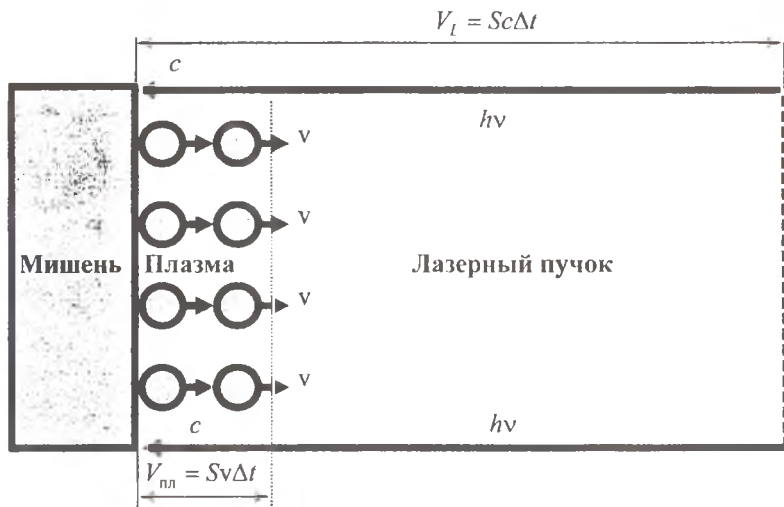


Рис. 5.3. Соотношение давлений света и плазмы. Из-за значительно меньшей скорости движения лазерная плазма занимает во много раз меньший объем, чем световой импульс. В результате объемная плотность энергии плазмы (а значит, и давление) много выше, чем у лазерного света

$w_V^L [\text{Дж}/\text{м}^3]$, а значит, и световое давление $P_L [\text{Па}]$, составляет величину порядка

$$P_L = \frac{I_L}{c} = w_V^L = \frac{W_L}{V_L}, \quad (5.90)$$

ибо $\frac{I_L}{c} = w_V^L$.

В то же время часть лазерной энергии W_L , поглощенной мишенью, превратилась в плазму с энергией $W_{\text{пл}} [\text{Дж}]$, которую можно представить так:

$$W_{\text{пл}} = \eta W_L. \quad (5.91)$$

Здесь $\eta < 1$ η - коэффициент преобразования световой (лазерной) энергии в энергию плазмы. Эта плазма занимает объем $V_p [\text{м}^3]$, равный

$$V_p = Sv\Delta t. \quad (5.92)$$

Такой плазменный объем $V_p [\text{м}^3]$ много меньше объема V_L (5.89), в котором сосредоточен лазерный импульс, ибо $v [\text{м}/\text{с}]$ - средняя скорость разлета плазмы - во много раз меньше скорости света $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м}/\text{с}$. Давление лазерной плазмы $P_{\text{пл}} [\text{Па}]$ определяет ее объемная энергия $w_V^{\text{пл}} [\text{Дж}/\text{м}^3]$, которая представляет собой следующее выражение:

$$w_V^{\text{пл}} = \frac{W_{\text{пл}}}{V_p} = \frac{\eta W_L}{Sv\Delta t}. \quad (5.93)$$

Отношение давления лазерной плазмы $P_{\text{пл}} [\text{Па}]$ (5.93) к давлению $P_L [\text{Па}]$ (5.90) порождающего ее лазерного света есть

$$\frac{P_{\text{пл}}}{P_L} = \frac{w_V^{\text{пл}}}{w_V^L} = \eta \frac{c}{v}. \quad (5.94)$$

При η не слишком малом (например, $\eta = 0,5$) имеем

$$\frac{P_{\text{пл}}}{P_L} = 0,5 \frac{c}{v}.$$

Величина c/v может составлять **несколько порядков!**

Итак, пользуясь выражением (5.94), учитывая, что, согласно (5.90), световое давление $P_L [\text{Па}]$ есть $P_L = \frac{I_L}{c}$, давление лазерной плазмы $P_{\text{пл}} [\text{Па}]$ можно представить следующим образом:

$$P_{\text{пл}} = \eta \frac{I_L}{v}. \quad (5.95)$$

Конечная цель наших расчетов состоит в том, чтобы получить функциональную зависимость

$$P_{\text{пл}} = P_{\text{пл}}(I_L), \quad (5.96)$$

то есть найти давление плазмы $P_{\text{пл}}[\text{Па}]$ как функцию лазерной интенсивности $I_L[\text{Вт}/\text{м}^2]$. Как видно из (5.95), для этого в свою очередь необходимо знать, как зависит скорость движения плазмы $v[\text{м}/\text{с}]$ от $I_L[\text{Вт}/\text{м}^2]$. Из общих физических соображений следует, что чем выше интенсивность $I_L[\text{Вт}/\text{м}^2]$, тем больше скорость $v[\text{м}/\text{с}]$. Действительно, с ростом интенсивности излучения растет температура плазмы, а значит, и скорость ее движения, которая примерно равна средней скорости тяжелых частиц (ионов и атомов) и связана с температурой известным соотношением

$$v \approx \left(\frac{kT}{M} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (5.97)$$

где $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж} \cdot \text{К}$ - постоянная Больцмана, $M[\text{кг}]$ - масса иона (атома).

Таким образом, задача нахождения формулы $P_{\text{пл}} = P_{\text{пл}}(I_L)$ сводится к тому, чтобы, зная скорость v как функцию температуры T , эту температуру, в свою очередь, выразить через интенсивность I_L , то есть получить зависимость $v(I_L)$. Тогда из (5.95) найдем искомую зависимость (5.96).

5.4.3. Давление и температура плазмы с концентрацией плазмы меньше критической. Закон Стефана-Больцмана и пределы его применимости. "Интенсивность отсечки"

При относительно низких значениях $I_L[\text{Вт}/\text{м}^2]$, когда концентрация образующейся плазмы ниже критической, она прозрачна для излучения, которое поглощается поверхностью мишени. При этом температура $T[\text{К}]$ плазмы равна температуре поверхности мишени, которую можно оценить из закона Стефана-Больцмана (5.79).

Сразу же заметим, что при сравнительно больших интенсивностях I_L , когда концентрация $N[\text{м}^{-3}]$ образующейся плазмы близка к критической (5.78), закон Стефана-Больцмана применять нельзя. В этом случае температуру и скорость плазмы можно оценить, пользуясь другими (гидродинамическим) соотношениями.

Из закона сохранения энергии имеем следующее соотношение между лазерной интенсивностью I_L и плотностью потока $J[1/\text{м}^2 \cdot \text{с}]$ частиц плазмы с плотностью $N[\text{м}^{-3}]$, движущейся от мишени со скоростью $v[\text{м}/\text{с}]$

$$\eta I_L = JkT. \quad (5.98)$$

Здесь η - КПД преобразования излучения в плазму ($\eta < 1$). Плотность потока $J[1/\text{м}^2 \cdot \text{с}]$ ионов (и электронов) выражается через концентрацию N_i ионов массой $M[\text{кг}]$ (или электронов N_e) и их скорости

$$v = \left(\frac{kT}{M} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.99)$$

известным соотношением

$$J = N_i v. \quad (5.100)$$

Будем предполагать, что вся энергия, не превратившаяся в энергию плазмы, переизлучается по закону Стефана-Больцмана, который в данном случае выглядит так:

$$(1 - \eta)I_L = \varepsilon \sigma_{\text{СБ}} T^4. \quad (5.101)$$

Из (5.101) находим температуру плазмы $T[\text{К}]$:

$$T = \left(\frac{1 - \eta}{\varepsilon \sigma_{\text{СБ}}} \right)^{\frac{1}{4}} I_L^{1/4}. \quad (5.102)$$

Подставляя (5.102) в (5.99), находим формулу для скорости движения плазмы $v[\text{м/с}]$:

$$v = \left(\frac{k}{M} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1 - \eta}{\varepsilon \sigma_{\text{СБ}}} \right)^{\frac{1}{8}} I_L^{1/8}. \quad (5.103)$$

Подставив теперь выражение для скорости (5.103) в (5.95), получим давление $P_{\text{пл}}^{\text{СБ}}[\text{Па}]$ плазмы в следующем виде:

$$P_{\text{пл}}^{\text{СБ}} = \eta \left(\frac{k}{M} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{1 - \eta}{\varepsilon \sigma_{\text{СБ}}} \right)^{-\frac{1}{8}} I_L^{7/8}. \quad (5.104)$$

Для проведения численных оценок зависимости давления плазмы от интенсивности можно воспользоваться соотношением $\varepsilon \approx 1 - \eta$. Приняв значения $\eta \approx 0,5$, $M = 10^{-25} \text{ кг}$, получим формулу (5.104) в виде

$$P_{\text{пл}}^{\text{СБ}}[\text{Па}] = 5,3 \cdot 10^{-3} I_L^{7/8} [\text{Вт/м}^2]. \quad (5.105)$$

Формула (5.104) справедлива лишь в определенном диапазоне интенсивностей $I_L[\text{Вт/м}^2]$ лазерного излучения:

$$I_L^{\min} < I_L < I_L^{\max}. \quad (5.106)$$

О минимальном (пороговом) значении интенсивности $I_L^{\min} = I_L^{\text{th}}$ речь уже шла выше [см. формулы (5.80), (5.82)]. Максимальное значение интенсивности $I_L^{\max}$, выше которой формула (5.104) неприменима, определяется критической интенсивностью I_L^c - "интенсивностью отсечки", то есть такой интенсивностью, при которой плотность плазмы $N[\text{м}^{-3}]$ близка или

равна критической N_c (то есть $N = N_i = N_e = N_c$) для данной длины волны $\lambda[\text{м}]$. В п. 4.1 показано, что величины N_c и λ связаны известным соотношением (5.78):

$$\lambda^2 N_c r_e = \pi.$$

Отсюда следует, что

$$N_c = \frac{\pi}{\lambda^2} r_e.$$

Оценить величину I_L^c можно следующим образом. Из закона сохранения энергии имеем следующее соотношение:

$$\eta I_L = J k T. \quad (5.107)$$

Здесь $J[1/\text{м}^2 \cdot \text{с}]$ - плотность потока ионов (и электронов), которая выражается через концентрацию N_i ионов и их скорость $v = \left(\frac{kT}{M} \right)^{\frac{1}{2}}$ известным соотношением

$$J = N_i v. \quad (5.108)$$

Коль скоро теперь $N_i = N_c = \frac{\pi}{\lambda^2} r_e$, то формула (5.107) приобретает следующий вид:

$$\frac{\pi}{\lambda^2} r_e k T v = \eta I_L^c. \quad (5.109)$$

Выразим скорость v через температуру T и массу иона M

$$v = \left(\frac{kT}{M} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (5.110)$$

Получим вместо (5.109) следующее соотношение:

$$\frac{\pi}{\lambda^2} r_e \left(\frac{k^3}{M} \right)^{\frac{1}{2}} T^{3/2} = \eta I_L^c. \quad (5.111)$$

Критическую интенсивность (*интенсивность отсечки*) можно теперь получить, если подставить в (5.111) вместо температуры T ее выражение через интенсивность I_L , воспользовавшись формулой (5.102):

$$T = \left(\frac{1 - \eta}{\varepsilon \sigma_{\text{СВ}}} \right)^{\frac{1}{4}} I_L^{1/4}.$$

Сделав соответствующую подстановку, имеем

$$\frac{\pi}{\lambda^2} r_e \left(\frac{k^3}{M} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1 - \eta}{\varepsilon \sigma_{\text{СВ}}} \right)^{\frac{3}{8}} I_L^{3/8} = \eta I_L^c$$

или

$$\frac{\pi}{\lambda^2} r_e \left(\frac{k^3}{M} \right)^2 \left(\frac{1-\eta}{\epsilon \sigma_{CB}} \right)^8 = \eta (I_L^c)^{\frac{5}{8}}.$$

Возведя обе части в степень 8/5, получим окончательную формулу для критической интенсивности (интенсивности отсечки) $I_L^c [\text{Вт}/\text{м}^2]$:

$$I_L^c = \left(\frac{\pi}{\lambda^2} r_e \right)^{\frac{8}{5}} \left(\frac{k^3}{M} \right)^{\frac{4}{5}} \left(\frac{1}{\eta} \right)^{\frac{8}{5}} \left(\frac{1-\eta}{\epsilon \sigma_{CB}} \right)^{\frac{3}{5}}. \quad (5.112)$$

Для удобства практических оценок величины I_L^c при различных λ можно ввести нормировочную длину волны λ_0 , например $\lambda_0 = 1,06$ мкм (длина волны Nd - лазера). Тогда (5.112) приобретает вид:

$$I_L^c = \left(\frac{\lambda_0}{\lambda} \right)^{\frac{16}{5}} (\lambda_0)^{\frac{16}{5}} (\pi r_e)^{\frac{8}{5}} \left(\frac{k^3}{M} \right)^{\frac{4}{5}} \left(\frac{1}{\eta} \right)^{\frac{8}{5}} \left(\frac{1-\eta}{\epsilon \sigma_{CB}} \right)^{\frac{3}{5}}. \quad (5.113)$$

Задавшись величинами $M = 10^{-25}$ кг, $\eta = 0,5$ и $\epsilon = 0,5$, получим из (5.113) рабочую формулу для оценок

$$I_L^c = \left(\frac{\lambda_0}{\lambda} \right)^{\frac{16}{5}} \cdot 2,7 \cdot 10^{13} \text{ Вт}/\text{м}^2. \quad (5.114)$$

5.4.4. Давление и температура плазмы при ее концентрации, близкой к критической (гидродинамический режим)

Найдем теперь давление плазмы, когда ее концентрация $N[\text{м}^{-3}] \approx N_i[\text{м}^{-3}] \approx N_e[\text{м}^{-3}]$ близка к критической N_c , которая, согласно (5.78), есть

$$N_c = \frac{\pi}{\lambda^2} r_e. \quad (5.115)$$

Это бывает, когда лазерная интенсивность I_L превышает I_L^c - “интенсивность отсечки”, которая определяется формулами (5.113) и (5.114). В этом случае поглощение лазерного света происходит не на поверхности мишени (свет до нее не доходит), а внутри самой плазмы, в той ее части, где концентрация близка к критической, как это показано на рис. 5.4. Необходимая для испарения вещества энергия поступает теперь на мишень за счет теплопроводности.

Для вычисления давления плазмы снова воспользуемся формулой (5.95):

$$P_{\text{пл}} = \eta \frac{I_L}{v}.$$

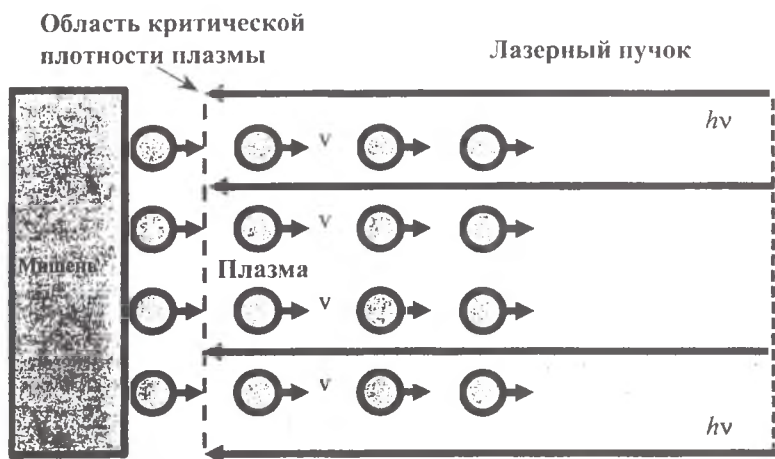


Рис. 5.4. Свет не доходит до поверхности мишени. Он поглощается в плазме, в области, где ее плотность близка к критической

Чтобы определить скорость движения плазмы v [м/с] через интенсивность I_L и другие измеряемые величины, воспользуемся уравнением Брннулли в следующем виде:

$$\frac{\rho v^2}{2} = NkT. \quad (5.116)$$

Здесь ρ [кг/м³] = NM - плотность плазмы. Подставив значение ρ в (5.116), получим достаточно очевидное выражение

$$\frac{Mv^2}{2} = kT. \quad (5.117)$$

Воспользуемся теперь уже известным соотношением (5.98)

$$\eta I_L = JkT.$$

Так как, согласно (5.100), $J = Nv$, то, подставляя в (5.98) это выражение для J , а также формулу (5.117) для kT , получаем

$$\eta I_L = \frac{MNv^3}{2}.$$

Отсюда имеем следующую формулу для скорости v :

$$v = \left(\frac{2\eta I_L}{MN} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (5.118)$$

Используя выражение (5.115) для критической концентрации электронов

$$N_e = N = N_c = \frac{\pi}{\lambda^2} r_e, \text{ имеем скорость в следующем виде:}$$

$$v = \left(\frac{2\eta r_e}{M\pi} \right)^{\frac{1}{3}} (\lambda^2 I_L)^{\frac{1}{3}}. \quad (5.119)$$

Подставив это выражение для v в (5.95), получаем формулу для давления плазмы $P_{пл}$ [Па] вблизи критической концентрации:

$$P_{пл} = \left(\frac{M\pi}{2r_e} \right)^{\frac{1}{3}} \eta^{2/3} \left(\frac{I_L}{\lambda} \right)^{\frac{2}{3}}. \quad (5.120)$$

Для практических оценок при $\lambda = 1$ мкм, $\eta = 0,5$ и $M = 10^{-25}$ кг имеем формулу

$$P_{пл} [\text{Па}] = 2,4 \cdot (I_L [\text{Вт/м}^2])^{\frac{2}{3}}.$$

Формула (5.120) применима в области значений длин волн

$$\lambda > \lambda_{\min} = \left(\frac{\pi}{r_e} N_e^{TT} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (5.121)$$

где N_e^{TT} - концентрация электронов в твердом теле. Для металлов $N_e^{TT} \sim 6 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$, поэтому для металлических мишеней

$$\lambda_{\min} \sim 120 \text{ нм}. \quad (5.122)$$

Подставив (5.119) в (5.117), получим формулу для оценки температуры плазмы в области критической концентрации:

$$kT = \left(\frac{M}{2} \right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{\eta r_e}{\pi} \right)^{\frac{2}{3}} (\lambda^2 I_L)^{\frac{2}{3}}. \quad (5.123)$$

На рис. 5.5 показана зависимость давления плазмы от интенсивности лазерного излучения.

Приложение 5.1

Формулу (5.36) $p_x v_x = \frac{1}{3} \frac{h\nu}{c}$ можно получить из равномерного распределения энергий фотонов по степеням свободы при их хаотичном движении, что соответствует случаю фотонного газа. Для этого рассмотрим релятивистское уравнение, связывающее энергию частицы W [Дж], ее импульс $p = Mv$ и массу покоя M_0 :

$$W^2 - (pc)^2 = M_0^2 c^4. \quad (5.124)$$

Это уравнение следует из релятивистских соотношений для массы M и энергии W :

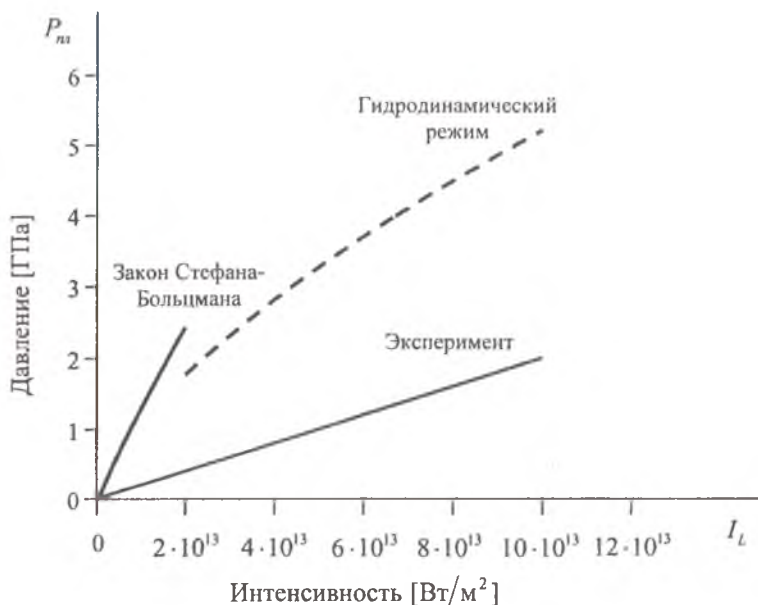


Рис. 5.5. Зависимость давления лазерной плазмы от интенсивности лазерного излучения. Расчетные кривые: “закон Стефана-Больцмана” - по формулам (5.104)-(5.105) в диапазоне интенсивностей $I_L^h < I_L < 10^{13}$ Вт/м². “гидродинамический режим” - по формуле (5.120) в диапазоне интенсивностей $I_L > 10^{13}$ Вт/м²

$$M = \frac{M_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (5.125)$$

$$W = Mc^2. \quad (5.126)$$

Так как для фотона $M_0 = 0$, то из (5.124) имеем для квадрата импульса фотона

$$p^2 = \frac{W^2}{c^2} = M_\phi W = M_\phi h\nu, \quad (5.127)$$

где $M_\phi = \frac{W}{c^2}$ - масса фотона, а $W = h\nu$ - его энергия.

С учетом x, y и z компонент энергии и импульса имеем

$$p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 = M_\phi (W_x + W_y + W_z). \quad (5.128)$$

Отсюда следует:

$$p_x^2 = M_\phi^2 v_x^2 = M_\phi W_x,$$

то есть

$$p_x = M_\Phi v_x,$$

и, следовательно,

$$p_x v_x = M_\Phi v_x^2 = W_x. \quad (5.129)$$

Из равномерного распределения энергии по степеням свободы следует равенство средних значений энергий:

$$W_x = W_y = W_z = \frac{1}{3} h\nu. \quad (5.130)$$

Усредняя по скоростям (5.129), с учетом (5.130) получим

$$p_x v_x = \frac{1}{3} h\nu.$$

Приложение 5.2

Давление пучка частиц, падающих под углом падения φ на пластину конечной площади $S[\text{м}^2]$, можно представить физически более наглядно, если рассмотреть силы, действующие на пластину площадью $S[\text{м}^2]$, как это показано на рис. 5.2. По определению, в общем случае давление на плоскую поверхность - это перпендикулярная к этой поверхности сила в расчете на единицу площади, т.е. *нормальная компонента полной* силы, действующей на всю поверхность S , поделенная на *площадь* этой поверхности. Полная сила $\vec{F}[\text{Н}]$ равна произведению потока $\Pi(\varphi)$ через пластину на импульс $p^S[\text{кг} \cdot \text{м/с}]$ передаваемый поверхности $S[\text{м}^2]$:

$$F = p^S \Pi(\varphi) = p^S JS(\varphi). \quad (5.131)$$

Однако из-за отклонения пластины на угол φ от нормали по отношению к направлению потока (это прежнее положение пластины обозначено на рис. 5.2 пунктиром) поток через пластину уменьшился и составляет теперь следующую величину:

$$\Pi(\varphi) = \Pi \cos \varphi = JS \cos \varphi. \quad (5.132)$$

Тем самым полная сила $F(\varphi)$, действующая на *всю поверхность* $S[\text{м}^2]$, уменьшилась (по сравнению со случаем нормального падения) и есть

$$F(\varphi) = p^S JS \cos \varphi. \quad (5.133)$$

Нормальная к поверхности S компонента $F_n(\varphi)$ этой силы равна

$$F_n(\varphi) = F(\varphi) \cos \varphi = p^S JS \cos^2 \varphi. \quad (5.134)$$

Отсюда получаем давление на поверхность S в уже известном по формуле (5.69) виде:

$$P[\text{Па}] = Jp^S \cos^2 \varphi = (1+r)Jp \cos^2 \varphi. \quad (5.135)$$

Для фотонов (лазерный пучок) имеем световое давление $P_{\text{св}}[\text{Па}]$:

$$P_{\text{св}} = (1+r) \frac{I_L}{c} \cos^2 \varphi, \quad (5.136)$$

ибо для фотонов $p = \frac{h\nu}{c}$, $p^S = (1+r) \frac{h\nu}{c}$, $I_L = Jh\nu$.

Задачи

1. Пучок неодимового лазера (длина волны $\lambda = 1,06$ мкм) интенсивностью $I_L = 10^{12}$ Вт/м² облучает поверхность стальной мишени. Найти: а) световое давление $P_{\text{св}}$ на мишень при коэффициенте отражения $R = 0,5$; б) давление на мишень $P_{\text{в}}^{\text{св}}$, которое окажет испаряющееся вещество, если воспользоваться законом Стефана-Больцмана, считая КПД преобразования лазерного света в плазму $\eta = 0,5$, излучательную способность $\epsilon = 0,3$, температуру плазмы равной температуре поверхности мишени; в) интенсивность “отсечки”, то есть интенсивность $I_L = I_{\text{max}}^{\text{св}}$ лазерного излучения, при которой плотность плазмы становится критической для $\lambda = 1,06$ мкм. Атомный вес железа $A_{\text{Fe}} = 57$, масса протона $M_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$ кг.

Ответ: а) $P_{\text{св}} = 5 \cdot 10^3$ Па; б) $P_{\text{в}}^{\text{св}} = 3,4 \cdot 10^8$ Па; в) $I_{\text{max}}^{\text{св}} = 2,7 \cdot 10^{13}$ Вт/м².

Указание. а) воспользоваться соотношением $(1-\eta)I_L = \sigma_{\text{св}} T^4$; б) воспользоваться соотношениями $\eta I_L = jkT$, $j = N_e v_M$, $v_M = \sqrt{kT/M}$, $\lambda_e^2 r_e N_e = \pi$, $r_e = 2,84 \cdot 10^{-15}$ м - классический радиус электрона, $M = A_{\text{Fe}} M_p$.

2. Лазерный пучок с интенсивностью $I = 10^4$ Вт/м² облучает в вакууме под углом падения $\alpha = 60^\circ$ плоскую металлическую поверхность с коэффициентом отражения $R = 0,8$. а) найти давление света P [Па] и возникающее при этом тангенциальное (сдвиговое) напряжение τ [Н/м²]; б) изменится ли давление света на эту же поверхность при тех же I [Вт/м²] и R , если ее поместить в прозрачную среду с коэффициентом преломления $n > 1$?

Ответ: а) $P = 1,5 \cdot 10^{-5}$ Па, $\tau = 2,9 \cdot 10^{-6}$ Н/м²; б) не изменится.

Указание. Учесть, что при переходе от вакуума к оптической среде плотность потока фотонов J [1/м²·с] не меняется. Показать (используя формулы релятивистской механики для энергии W и импульса p), что при

этом не меняется и импульс фотона, который есть всегда $p = h\nu/c$, независимо от среды, через которую он распространяется.

ГЛАВА 6. ТУННЕЛЬНАЯ ИОНИЗАЦИЯ

Туннельная ионизация - это ионизация за счет так называемого туннельного эффекта. *Туннельный эффект* - есть квантово-механическое явление, заключающееся в прохождении элементарной частицы сквозь *потенциальный барьер* - классически запрещенную для ее пребывания область пространства. Для связанного электрона в атоме водорода потенциальный барьер возникает в результате воздействия на атом внешнего электрического поля. Для лучшего понимания этого явления рассмотрим сначала энергетические характеристики атома водорода без внешнего поля.

6.1. Основные характеристики водородоподобного боровского атома, получаемые в результате квантования по Бору (потенциальная, кинетическая, полная энергии, радиусы боровских орбит, частоты переходов)

Первый постулат Бора о существовании стационарных состояний атома связан с условием квантования орбитального момента импульса электрона. Это условие можно сформулировать так: произведение импульса p_n связанного электрона n -й круговой орбиты на радиус r_n этой орбиты равно целому числу $n=1,2,3,\dots$, умноженному на $\hbar=1,05\cdot 10^{-34}$ Дж·с - постоянную Планка $h=6,63\cdot 10^{-34}$ Дж·с, поделенную на 2π $\hbar=\frac{h}{2\pi}$:

$$p_n r_n = \hbar n. \quad (6.1)$$

Следуя [1] (выпуск 8), воспользуемся этим соотношением, чтобы представить *кинетическую энергию* электрона $T_k = \frac{p^2}{2m}$, где p - импульс электрона, в следующем виде:

$$T_{kn} = \frac{1}{2m} \frac{(\hbar n)^2}{r_n^2}. \quad (6.22)$$

Потенциальная кулоновская энергия $W_n = \text{const}$ есть

$$W_p^K = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad (6.3)$$

при $r=r_n$ имеем

$$W_p^K = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_n}. \quad (6.4)$$

Полная энергия W_n электрона на радиусе r_n равна алгебраической сумме энергий: кинетической T_{kn} (6.2) и потенциальной (6.4):

$$W_n = \frac{1}{2m} \frac{(\hbar n)^2}{r_n^2} - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_n}. \quad (6.5)$$

Условие минимума полной энергии - это равенство нулю производной от W_n по r_n . Дифференцируя (6.5) по r_n и приравнивая нулю производную $\frac{dW_n}{dr_n}$, находим значение r_n , которое соответствует минимальной полной энергии:

$$r_n = \frac{(n\hbar)^2 4\pi\epsilon_0}{mZe^2} = n^2 r_1, \quad (6.6)$$

где

$$r_1 = \frac{\hbar^2 4\pi\epsilon_0}{mZe^2} = 5,3 \cdot 10^{-11} \quad (6.7)$$

есть первый боровский радиус, соответствующий $n = 1$ в (6.6).

Так как, согласно постулату Бора, $r_n = \frac{\hbar n}{p_n}$, то, следовательно,

$$p_n = m \left(\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar n} \right) = m v_n. \quad (6.8)$$

Отсюда получаем выражения для кинетической T_{kn} , потенциальной (кулоновской) W_{pn}^K и полной W_n энергий связанного электрона на n -й стационарной боровской орбите:

$$T_k = \frac{p_n^2}{2m} = \frac{m v_n^2}{2} = \frac{1}{2} m \left(\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar n} \right)^2, \quad (6.9)$$

$$W_{pn}^K = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_n} = -m \left(\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar n} \right)^2 = -2T_{kn}. \quad (6.10)$$

$$W_n = -\frac{1}{2} m \left(\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar n} \right)^2 = \frac{1}{2} W_{pn}^K = -\frac{1}{2} \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_n} = -\Phi_n = -T_{kn}. \quad (6.11)$$

Здесь $\Phi_n = \frac{1}{2} \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_n} = -W_n$ - энергия ионизации, введенная для удобства

дальнейших вычислений. Таким образом, полная энергия электрона на n -й орбите равна по абсолютной величине кинетической и вдвое больше потенциальной кулоновской (то есть вдвое меньше ее по абсолютной величине). Так как

$$W_n = -\frac{1}{2} m \left(\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar n} \right)^2 = \frac{1}{2} W_{pn}^K = -\frac{1}{2} \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_n} = -\Phi_n,$$

а кулоновская потенциальная энергия есть $W_{pn}^K = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_n}$, то, как видно из (6.11), *полная энергия электрона равна потенциальной на удвоенном боровском радиусе*, то есть

$$W_n = 2r_n W_{pn}^K. \quad (6.12)$$

Воспользовавшись выражением (6.2) и (6.11), можно записать (6.1) в форме, которая будет полезна при дальнейших вычислениях

$$p_n = \sqrt{2m\Phi_n} r_n = n\hbar. \quad (6.13)$$

Из (6.11) следует, что

$$W_n = \frac{W_1}{n^2}, \quad (6.14)$$

где W_1 - полная энергия основного состояния

$$W_1 = W_{n=1} = -\frac{1}{2} m \left(\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar} \right)^2. \quad (6.15)$$

Отсюда можно получить частоты ν_{nk} излучательных переходов между энергетическими уровнями с главными квантовыми числами соответственно n (конечное состояние) и $k > n$ (начальное состояние):

$$\nu_{nk} = \frac{W_1}{\hbar} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2} \right). \quad (6.16)$$

Эта формула в зависимости от значения n описывает частоты известных спектральных серий: серию Бальмера ($n = 2, k = 3, 4, 5, \dots$), Лаймана ($n = 1, k = 2, 3, 4, \dots$), Пашена ($n = 3, k = 4, 5, 6, \dots$).

Энергетические уровни и переходы между ними, соответствующие спектральным сериям Бальмера и Лаймана, показаны на рис. 6.1.

6.2. Проникновение электрона в “стену” потенциальной ямы

Итак, связанный электрон, полная энергия которого квантуется в соответствии с (6.11), (6.14), находится в потенциальной “яме”, у которой “стенами” служит потенциальная энергия, описываемая формулой (6.3):

$$W_p^K = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (6.17)$$

Поведение электрона в квантовой механике описывается вероятностными законами. Например, вероятность ΔP нахождения электрона в определенной области пространства объемом ΔV определяется с помощью так называемой Ψ -функции, которая подчиняется уравнению Шредингера и есть *амплитуда плотности вероятности* положения частицы в пространстве, так что

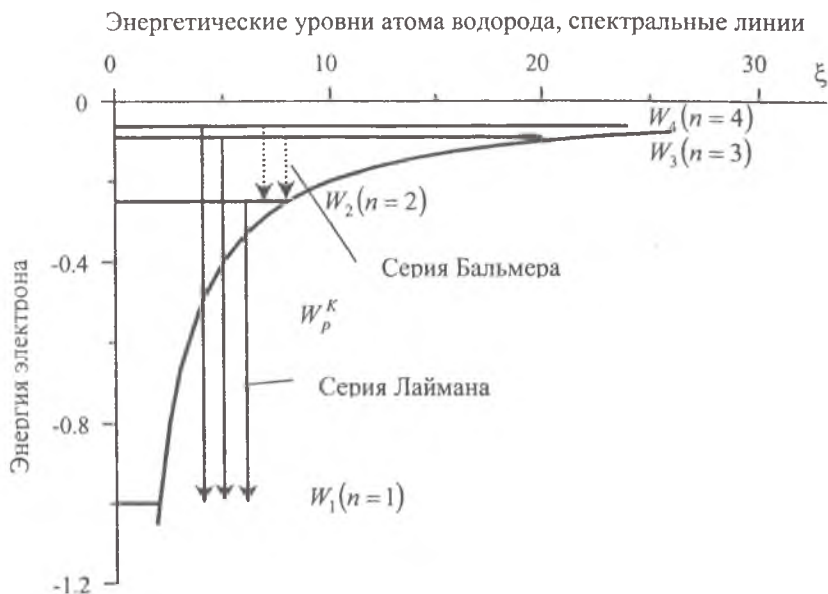


Рис. 6.1. Энергетические уровни атома водорода: $n = 1$ (основной), $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$. Линии спектральных серий: Бальмера (частоты ν_{24} , ν_{23}), Лаймана (ν_{14} , ν_{13} , ν_{12}). $\xi = r/r_1$ - расстояние до ядра (r_1 - первый боровский радиус). $W_p^\kappa = 2/\xi$ - кулоновская потенциальная энергия, W_1 , W_2 , W_3 , W_4 - полные энергии уровней, соответствующие значениям главного квантового числа $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$. Величины энергий нормированы на значение, равное потенциалу ионизации $\Phi = -W_1$ электрона из основного состояния

$$\Delta P = |\Psi|^2 \Delta V. \quad (6.18)$$

Благодаря такому вероятностному поведению связанного электрона существует конечная вероятность проникновения электрона вглубь потенциальной "стены" на определенную конечную глубину. Вероятность такого проникновения можно оценить следующим образом.

Считая движение одномерным и используя оператор импульса $-i\hbar \frac{\partial}{\partial r}$, запишем уравнение Шредингера для электрона:

$$-i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial r} = p\Psi, \quad (6.19)$$

где импульс p выразим через полную W_n и потенциальную W_p энергии:

$$p = \sqrt{2mT_k} = \sqrt{2m(W_n - W_p)}. \quad (6.20)$$

Решая уравнение (6.19) с учетом (6.20), получаем следующее выражение для Ψ -функции в точке r_2 через значение Ψ -функции в точке r_1 :

$$\Psi(r_2) = \Psi(r_1) \exp \left(\frac{i}{\hbar} \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{2m(W_n - W_p)} dr \right). \quad (6.21)$$

Как видно из (6.1-6.12), при $r = 2r_n$ потенциальная (кулоновская) энергия становится равной полной энергии:

$$W_p^K(2r_n) = W_n. \quad (6.22)$$

При этом кинетическая энергия T_{kn} становится равной нулю. При дальнейшем увеличении радиуса r потенциальная энергия становится больше полной:

$$W_p^K(r > 2r_n) > W_n, \quad (6.23)$$

кинетическая - отрицательной,

$$T_k < 0, \quad (6.24)$$

а импульс - мнимой (!) величиной:

$$p = i \sqrt{2m(W_p^K - W_n)}. \quad (6.25)$$

При подстановке такого импульса в (6.21) справа получится затухающая экспонента:

$$\Psi(r) = \Psi(2r_n) \exp \left(- \frac{1}{\hbar} \int_{2r_n}^r \sqrt{2m(W_p - W_n)} dr \right). \quad (6.26)$$

Коэффициент пропускания $D_n(\Delta r)$ слоя толщиной $\Delta r = r - 2r_n$ "стен" потенциальной ямы для электрона, находящегося на n -ом энергетическом уровне, будет выглядеть следующим образом:

$$D_n(\Delta r) = \frac{|\Psi(r)|^2}{|\Psi(2r_n)|^2}. \quad (6.27)$$

Ранее уже была введена в рассмотрение положительная величина - энергия (потенциал) ионизации Φ_n с n -го уровня, которая равна полной энергии с обратным знаком:

$$\Phi_n = -W_p(2r_n). \quad (6.28)$$

Введем также новую переменную интегрирования $\xi = \frac{r}{r_n} > 2$.

Теперь (6.27), используя (6.26), можно представить в следующем виде:

$$D_n(\Delta r) = \exp \left\{ \frac{-2(2m\Phi_n)^{1/2} r_n}{\hbar} \int_2^{r/r_n} \sqrt{1 - \frac{2}{\xi}} d\xi \right\} = \exp \left\{ -2n \int_2^{r/r_n} \sqrt{1 - \frac{2}{\xi}} d\xi \right\}. \quad (6.29)$$

Действительно, из (6.17) видно, что кулоновская потенциальная энергия W_p^K есть

$$W_p^K = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_n} \frac{r}{r_n} = 2W_n \frac{1}{r/r_n} = -2\Phi_n \frac{1}{r/r_n} = -\Phi_n \frac{2}{\xi}.$$

Кроме того, в соответствии с соотношением (6.1), записанным в виде (6.13), имеет место равенство

$$\frac{\sqrt{2m\Phi_n}}{\hbar} = n.$$

При $\xi = \frac{r}{r_n} \gg 2$ можно в подкоренном выражении интеграла (6.29)

пренебречь величиной $\frac{2}{\xi}$ по сравнению с единицей. Тогда формула (6.29) для коэффициента пропускания (прозрачности) $D_n(\Delta r)$ слоя потенциальной “стены” толщиной $\Delta r = r - 2r_n$ может быть представлена так:

$$D_n(\Delta r) = \exp\left\{-2n\left(\frac{r}{r_n} - 2\right)\right\} = \exp\left\{-4n\left(\frac{r}{2r_n} - 1\right)\right\}. \quad (6.30)$$

То есть $D=1$ при $r=2r_n$ и далее экспоненциально падает с ростом $r > 2r_n$. Так как, согласно (6.6), $r_n = n^2 r_1$, где r_1 - первый борковский радиус, то при $r \gg 2r_n$ формула (6.30) принимает вид:

$$D_n(\Delta r) \cong \exp\left(-\frac{4r}{nr_1}\right). \quad (6.31)$$

Самое быстрое уменьшение $D_n(\Delta r)$ с ростом r имеет место при $n=1$, то есть для электрона в основном состоянии.

6.3. Атом во внешнем электрическом поле.

Туннельный эффект

6.3.1. Потенциальный барьер, его ширина и высота

Наложение внешнего электрического поля с напряженностью E [В/м], например, переменного лазерного $E = E_0 \cos \omega t$ с частотой $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$, где λ - длина волны, означает, что на электрон действует новая сила $F_E = eE_0 \cos \omega t$, стремящаяся оторвать электрон от ядра. Потенциальная энергия W_p^K такой силы есть

$$W_p^E = -eEr. \quad (6.32)$$

Знак “минус” показывает, что внешняя “отрывающая” сила - отрицательная:

$$F_E = \frac{\partial W_p^E}{\partial r} = -eE < 0. \quad (6.33)$$

Она направлена противоположно кулоновской положительной силе притяжения F_K :

$$F_K = \frac{\partial W_p^K}{\partial r} = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} > 0.$$

Теперь суммарная потенциальная энергия $W_p^{K,E}$ электрона имеет следующий вид:

$$W_p^{K,E} = W_p^K + W_p^E = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} - eEr. \quad (6.34)$$

Если поле $E[\text{В/м}]$ меньше некоторой величины $E_{\text{нб}}$, конкретное выражение для которого будет дано ниже, то существует некоторая *конечная* область значений координаты r , в которой потенциальная энергия (6.34) *больше* полной $W_n = -\Phi_n$:

$$W_p^{K,E} > W_n. \quad (6.35)$$

Так же, как и в случае, описанном выше в п. 6.2, в области, где выполняется неравенство (6.35), кинетическая энергия электрона будет отрицательной, и импульс - мнимой величиной. Принципиальное отличие от предыдущего случая п. 6.2 здесь состоит в том, что область существования неравенства (6.35) является *конечной*. Другими словами, теперь вместо бесконечно “толстой стены” существует *потенциальный барьер* конечной ширины и высоты (рис. 6.2).

Уравнение, определяющее координаты r_{61} и r_{62} потенциального барьера, представляет собой равенство $W_p^{K,E}$ и полной энергии $W_n = -\Phi_n$, где $\Phi_n > 0$ есть потенциал ионизации:

$$W_p^{K,E} = W_n \quad (6.36)$$

или

$$\Phi_n - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} - eEr = 0. \quad (6.37)$$

Как видно из рис. 6.2, кривая $W_p^{K,E}$ пересекается с прямой $W_n = -\Phi_n = \text{const}$ в двух точках с координатами $r_{61}[\text{м}]$ и $r_{62}[\text{м}]$. Так же, как и в п. 6.2, введем нормированные (безразмерные) величины. Для этого поделим все члены уравнения (6.37) на потенциал ионизации Φ_n , а вместо r

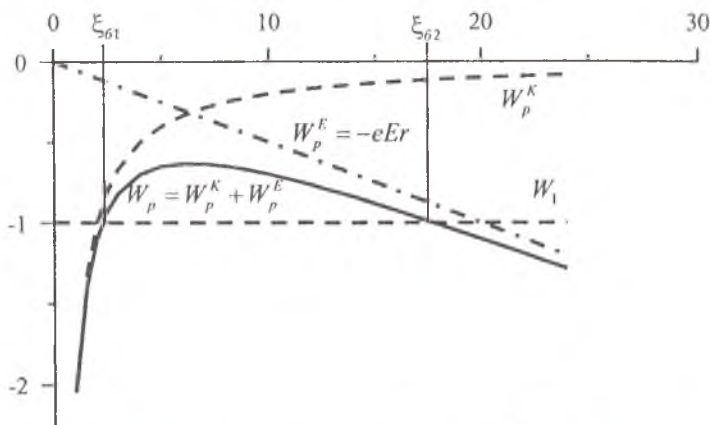


Рис. 6.2. Атом водорода во внешнем поле $\beta_1 = \frac{E[\text{В/м}]}{E_{нб}} = 0,4$. $E_{нб}[\text{В/м}]$ - значение

поля, при котором исчезает потенциальный барьер. $\xi = \frac{r}{r_1}$ - расстояние $r[\text{м}]$ от

ядра, нормированное на первый боровский радиус $r_1 = 5 \cdot 10^{-11} \text{ м}$. $\xi_{61} = \frac{r_{61}}{r_1}$ и

$\xi_{62} = \frac{r_{62}}{r_1}$ - границы потенциального барьера. W_p^K - кулоновская потенциальная

энергия, W_p^E - потенциальная энергия внешнего поля, $W_p = W_p^K + W_p^E$ - суммарная потенциальная энергия, формирующая потенциальный барьер, W_1 - полная энергия основного состояния. Показанные на рисунке численные значения:

$$W_p^K = -\frac{2}{\xi}, W_p^E = -\frac{1}{8}\beta_1\xi, W_p = -\frac{2}{\xi} - \frac{1}{8}\beta_1\xi, W_1 = -1 - \text{результат нормировки на}$$

$$\text{энергию ионизации } \Phi_1 = -W_1$$

будем использовать безразмерную переменную $\xi = \frac{r}{r_n}$, где r_n - есть n -й

радиус Бора. Уравнение (6.37) принимает следующий вид:

$$1 - \frac{2}{\xi} - \frac{eEr_n}{\Phi_n} \xi = 0. \quad (6.38)$$

или $\theta(\xi) = 0$.

Функция

$$\theta(\xi) = 1 - \frac{2}{\xi} - \frac{eEr_n}{\Phi_n} \xi, \quad (6.39)$$

представляющая собой левую часть (6.38), есть разность между нормированной потенциальной энергией $\frac{W_p^{K,E}}{\Phi_n}$:

$$\frac{W_p^{K,E}}{\Phi_n} = -\frac{2}{\xi} - \frac{eEr_n}{\Phi_n} \xi \quad (6.40)$$

и нормированной полной энергией $\frac{W_n}{\Phi_n}$, а именно:

$$\frac{W_n}{\Phi_n} = -1. \quad (6.41)$$

Теперь неравенство (6.35), являющееся условием существования барьера, выглядит так:

$$\theta(\xi) = 1 - \frac{2}{\xi} - \frac{eEr_n}{\Phi_n} \xi > 0. \quad (6.42)$$

Таким образом, $\theta(\xi)$ есть не что иное, как нормированная на Φ_n кинетическая энергия с обратным знаком. На рис. 6.2 показан потенциальный барьер с нормированными (безразмерными) координатами: $\xi_{61} = \frac{r_{61}}{r_n}$ и

$$\xi_{62} = \frac{r_{62}}{r_n}.$$

Потенциальный барьер имеет конечную ширину $\Delta\xi_6$:

$$\Delta\xi_6 = \xi_{62} - \xi_{61}, \quad (6.43)$$

где ξ_{61} и ξ_{62} - нормированные на r_n координаты пересечения суммарной потенциальной энергии с полной энергией, а также конечную высоту $\theta(\xi_{\max})$ или

$$\theta(\xi_{\max}) = 1 - \frac{2}{\xi_{\max}} - \frac{eEr_n}{\Phi_n} \xi_{\max}. \quad (6.44)$$

Величина $\xi_{\max}$ определяется из условия максимума функции $\theta(\xi)$:

$$\frac{d\theta}{d\xi} = 0.$$

Таким образом, для электрона существуют три характерные области пространства, которые показаны на рис. 6.3. Область связанных состояний - **B** (**B** = bound - связанный), классически запрещенная область - **FB** (**FB** = forbidden - запрещенный) и **F** - область свободных состояний (**F** = free - свободный). Вероятность пребывания электрона в каждой из этих областей **B**, **FB** или **F** определяется значением квадрата модуля соответствующей Ψ -функции: $|\Psi_B|^2$, $|\Psi_{FB}|^2$, $|\Psi_F|^2$.

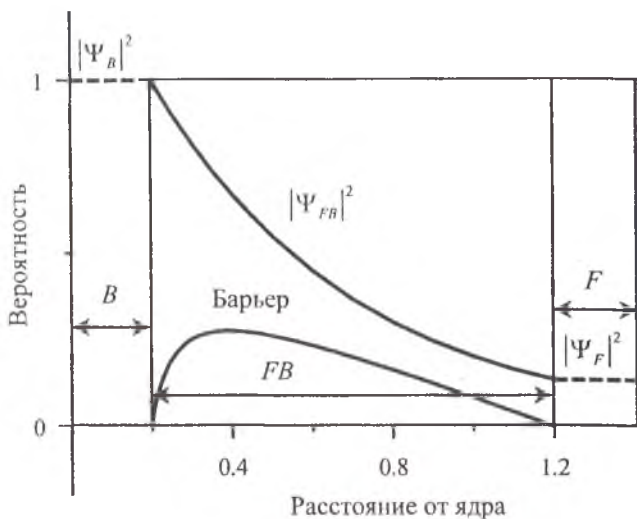


Рис. 6.3. Вероятность пребывания электрона в различных областях пространства. **В** - область связанных состояний, **FB** - классически запрещенная область, **F** - область свободных состояний. Вероятность пребывания электрона в каждой из этих областей **В**, **FB** или **F** определяется значением квадрата модуля соответствующей Ψ - функции: $|\Psi_B|^2$, $|\Psi_{FB}|^2$, $|\Psi_F|^2$

6.3.2. Коэффициент прозрачности потенциального барьера

Коэффициент прозрачности D_6 потенциального барьера есть отношение вероятности $P_F \sim |\Psi_F|^2$ пребывания электрона в свободном состоянии к вероятности $P_B \sim |\Psi_B|^2$ нахождения его в связанном состоянии. D_6 определяется тем же способом, что и в п. 6.2, и представляет собой выражение

$$D_6 = \frac{P_F}{P_B} = \frac{|\Psi_F|^2}{|\Psi_B|^2}, \quad (6.45)$$

которое вследствие непрерывности Ψ - функции эквивалентно соотношению

$$D_6 = \frac{|\Psi_F(r_{62})|^2}{|\Psi_B(r_{61})|^2}. \quad (6.46)$$

Формулу для оценки D_6 можно получить из (6.29), если в подкоренное выражение добавить $\frac{W_p^{K,E}}{\Phi_n} = -\frac{eEr_n}{\Phi_n} \xi$, то есть нормированную на Φ_n потенциальную энергию внешнего поля. Соответствующая формула для D_6 выглядит так:

$$D_6 = \exp \left\{ -2n \int_{\xi_{61}}^{\xi_{62}} \sqrt{1 - \frac{2}{\xi} - \frac{eEr_n}{\Phi_n} \xi} d\xi \right\}. \quad (6.47)$$

Пределы интегрирования ξ_{61} и ξ_{62} - это координаты границ потенциального барьера, которые вычислим ниже.

Для удобства дальнейших расчетов нормируем также внешнее поле E на такое его значение $E_{н6}$, при котором *исчезает* потенциальный барьер и возможна так называемая *надбарьерная ионизация*, о которой подробнее будет сказано ниже. Исчезновение потенциального барьера равносильно тому, что обе его координаты, $\xi_{61} = \frac{r_{61}}{r_n}$ и $\xi_{62} = \frac{r_{62}}{r_n}$, становятся равными.

Для того чтобы найти выражение для $E_{н6}$, необходимо вычислить ξ_{61} и ξ_{62} , затем приравнять их друг другу и из этого равенства определить значение $E_{н6}$. Нормированные координаты ξ_{61} и ξ_{62} потенциального барьера получаются из уравнения (6.34), преобразованного к следующему виду:

$$\frac{eEr_n}{\Phi_n} \xi^2 - \xi + 2 = 0. \quad (6.48)$$

Корни этого уравнения ξ_{61} и ξ_{62} :

$$\xi_{61,62} = \frac{\Phi_n \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{8eEr_n}{\Phi_n}} \right)}{2eEr_n}. \quad (6.49)$$

Как видно из этого выражения, исчезновение потенциального барьера, то есть условие

$$\xi_{61} = \xi_{62},$$

имеет место тогда, когда электрическое поле $E_{н6}$ удовлетворяет соотношению

$$E_{н6} = \frac{\Phi_n}{8er_n}. \quad (6.50)$$

Так как, согласно (6.11),

$$\Phi_n = \frac{1}{2} \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_n},$$

то есть

$$r_n = \frac{1}{2} \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0\Phi_n},$$

следовательно, $E_{нб}$ можно представить как функцию Φ_n и выразить в виде следующей формулы:

$$E_{нб} = \frac{4\pi\epsilon_0\Phi_n^2}{4Ze^3}. \quad (6.51)$$

Соответственно надбарьерная интенсивность $I_{нб}$ [Вт/м²] равна

$$I_{нб} = \frac{c\epsilon_0}{2} E_{нб}^2. \quad (6.52)$$

Из (6.50) имеем

$$r_n = \frac{\Phi_n}{8eE_{нб}}. \quad (6.53)$$

Подставив это значение r_n в (6.47), получим коэффициент прозрачности D_6 в следующем виде:

$$D_6 = \exp\left(-2n \int_{\xi_{61}}^{\xi_{62}} \sqrt{1 - \frac{2}{\xi} - \frac{1}{8}\beta_n\xi d\xi}\right) \quad (6.54)$$

или так

$$D_6 = \exp\left(-2n \int_{\xi_{61}}^{\xi_{62}} \sqrt{\theta(\xi, \beta_n)} d\xi\right),$$

где β_n - электрическое поле E , нормированное на его надбарьерное значение $E_{нб}$:

$$\beta_n = \frac{E}{E_{нб}}, \quad (6.55)$$

а функция $\theta(\xi, \beta_n)$ определяется из (6.54) с учетом (6.55):

$$\theta(\xi, \beta_n) = 1 - \frac{2}{\xi} - \frac{1}{8}\beta_n\xi. \quad (6.56)$$

Нормированные координаты потенциального барьера $\xi_{61,62}$ находим из уравнения $\theta(\xi, \beta_n) = 0$, а именно:

$$1 - \frac{2}{\xi} - \frac{1}{8}\beta_n\xi = 0 \quad (6.57)$$

или в обычном для квадратного уравнения “каноническом” виде:

$$\frac{1}{8}\beta_n\xi^2 - \xi + 2 = 0. \quad (6.58)$$

Пределы интегрирования ξ_{61} , ξ_{62} теперь имеют следующий вид:

$$\xi_{61,62} = 4 \frac{1 \pm \sqrt{1 - \beta_n}}{\beta_n}, \quad (6.59)$$

а нормированная ширина $\Delta \xi_6^{(n)}$ потенциального барьера выглядит так:

$$\Delta \xi_6^{(n)} = \xi_{62}^{(n)} - \xi_{61}^{(n)} = \frac{8\sqrt{1 - \beta_n}}{\beta_n}. \quad (6.60)$$

Напомним, что ширина барьера в размерных величинах (например, в метрах) есть

$$\Delta r^{(n)}[\text{м}] = r_n \Delta \xi_6^{(n)}, \quad (6.61)$$

где $r_n[\text{м}]$ - боровский радиус электрона на n -ом энергетическом уровне.

Таким образом, нахождение коэффициента прозрачности потенциального барьера сводится к вычислению следующего интеграла в показателе экспоненты (6.54):

$$J(\beta_n) = \int_{\xi_{61}}^{\xi_{62}} \sqrt{1 - \frac{2}{\xi} - \frac{1}{8}\beta_n \xi} d\xi. \quad (6.62)$$

Пределы интегрирования $\xi_{61}^{(n)}$ и $\xi_{62}^{(n)}$ определяются формулой (6.59). Этот интеграл не берется в элементарных функциях. Однако приближенную аналитическую формулу для $J(\beta_n)$ и соответственно для $D_6(\beta_n)$ можно все же получить, если аппроксимировать подкоренную функцию $\theta(\xi)$ в интеграле (6.62):

$$\theta(\xi) = 1 - \frac{2}{\xi} - \frac{1}{8}\beta_n \xi \quad (6.63)$$

прямоугольным треугольником, как это показано на рис. 6.4. Один из катетов такого треугольника равен ширине барьера $\Delta \xi_6^{(n)} = \frac{8\sqrt{1 - \beta_n}}{\beta_n}$ (6.59).

Другой катет равен максимальному значению функции $\theta(\xi)$ (то есть высоте $\theta_{\max}$) барьера:

$$\theta_{\max} = \theta(\xi_{\max}). \quad (6.64)$$

Нормированную координату $\xi_{\max}$ находим как обычно, приравняв нулю производную от $\theta(\xi)$ по ξ в (6.63) и решая полученное уравнение:

$$\frac{d\theta}{d\xi} = 0 = \frac{2}{\xi^2} - \frac{1}{8}\beta_n, \quad (6.65)$$

$$\xi_{\max}^{(n)} = \frac{4}{\sqrt{\beta_n}}. \quad (6.66)$$

Подставляя это значение $\xi_{\max}^{(n)}$ в (6.63), получим

$$\theta_{\max} = \theta(\xi_{\max}) = 1 - \sqrt{\beta_n}. \quad (6.67)$$

С учетом этого выражения, а также (6.54) получим $\theta_a(x)$ - аппроксимированную прямоугольным треугольником подкоренную функцию в интеграле (6.62):

$$\theta_a(x) = \left(1 - \sqrt{\beta_n}\right) \left(1 - \frac{x}{\Delta\xi_6^{(n)}}\right), \quad (6.68)$$

где $x = \xi - \xi_{61}$.

Приближение это тем точнее, чем меньше разность между площадью реальной кривой и площадью аппроксимирующего треугольника (рис. 6.4).

Теперь интеграл (6.62) превратился в упрощенный (аппроксимационный) интеграл J_a :

$$J_a = \int_0^{\Delta\xi_6^{(n)}} \sqrt{\left(1 - \sqrt{\beta_n}\right) \left(1 - \frac{x}{\Delta\xi_6^{(n)}}\right)} dx, \quad (6.69)$$

который легко берется заменой переменных:

$$1 - \frac{x}{\Delta\xi_6^{(n)}} = \eta, \quad d\eta = -\frac{dx}{\Delta\xi_6^{(n)}}, \quad dx = -\Delta\xi_6^{(n)} d\eta. \quad (6.70)$$

В результате получаем

$$J_a = \Delta\xi_6^{(n)} \sqrt{1 - \sqrt{\beta_n}} \int_0^1 \sqrt{\eta} d\eta = \frac{2}{3} \Delta\xi_6^{(n)} \sqrt{1 - \sqrt{\beta_n}}. \quad (6.71)$$

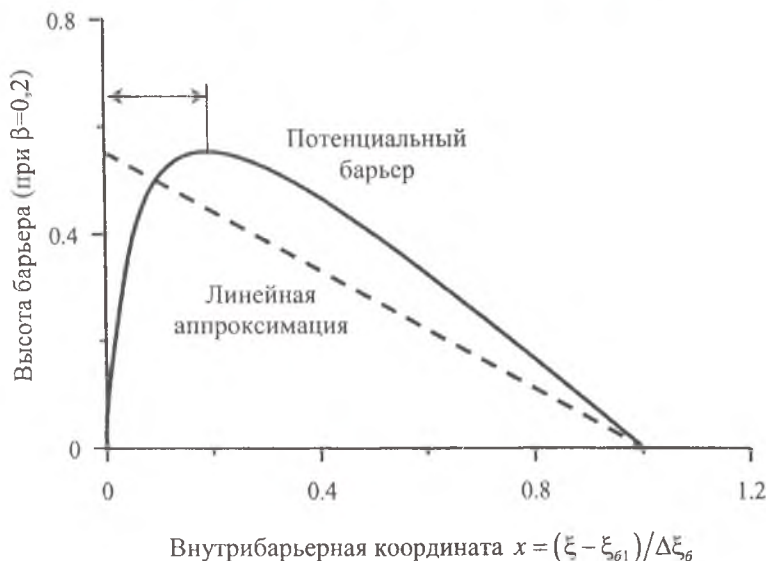


Рис. 6.4. Аппроксимация кривой, описывающей потенциальный барьер, линейной функцией для получения аналитической формулы коэффициента прозрачности потенциального барьера

С учетом всех этих приближений получаем формулу для аппроксимационного коэффициента прозрачности D_6^a потенциального барьера как аналитическую функцию параметра β_n .

$$D_6^a(\beta_n, n) = \exp \left(-n \frac{32}{3} \frac{\sqrt{(1-\sqrt{\beta_n})(1-\beta_n)}}{\beta_n} \right). \quad (6.72)$$

Зависимость $D_6^a(\beta_n)$ представлена на рис. 6.5.

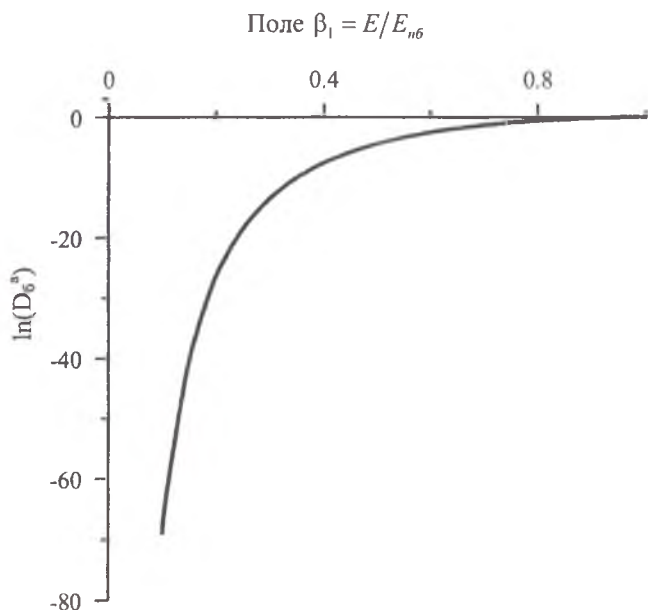


Рис. 6.5. Зависимость коэффициента прозрачности $D_6^a(\beta_n)$ потенциального барьера (линейная аппроксимация) от нормированной величины поля $\beta_n = E/E_{нб}$. $E_{нб}$ - величина поля, при которой исчезает потенциальный барьер и происходит надбарьерная ионизация

6.4. Область частот, электрических полей и интенсивностей, в которой возможен туннельный эффект. Параметр Келдыша. Туннельный эффект и многофотонная ионизация. Условие квазистатичности. Граничное (минимальное) поле как условие существования туннельного эффекта для заданной частоты - граница раздела между туннельным эффектом и многофотонной ионизацией, зависимость граничного поля от частоты

Определим теперь границы применимости формул (6.62) и (6.72), с помощью которых можно вычислить коэффициент прозрачности D_6 потенциального барьера. Найдём те области переменных электрических полей ($\beta_n < 1$), а также интенсивностей ($\beta_n^2 < 1$) лазерного излучения, в которых справедливо приближение туннельного эффекта, а следовательно, действуют формулы (6.62) и (6.72).

Туннельный эффект в переменном (лазерном) электрическом поле с частотой ν_L (длиной волны $\lambda_L = \frac{c}{\nu_L}$) возможен лишь в том случае, когда электрическое поле существенно не меняется в течение времени туннелирования τ_{tun} [с] (так называемое *условие квазистатичности*). Время туннелирования τ_{tun} по порядку величины есть

$$\tau_{tun} = \frac{\Delta r_6}{v_n}. \quad (6.73)$$

Здесь $\Delta r_6 = r_n \xi_6^{(n)}$ - ширина потенциального барьера, определяемого формулой, $v_n = \sqrt{\frac{\Phi_n}{2m}}$ - скорость электрона на орбите.

Например, в качестве условия квазистатичности можно потребовать, чтобы время туннелирования τ_{tun} было в π раз меньше полупериода $\frac{T}{2} = \frac{1}{2\nu}$ электрического (лазерного) поля. Тогда критерием медленности изменения поля во времени будет неравенство

$$\tau_{tun} < \frac{1}{\pi} \frac{T_L}{2} = \frac{1}{2\pi\nu_L} = \frac{\lambda_L}{2\pi c}, \quad (6.74)$$

которое можно представить в виде неравенства и используя так называемый *параметр Келдыша*:

$$\gamma = 2\pi\nu_L \tau_{tun}. \quad (6.75)$$

Л.В. Келдыш в 1964 г. показал, что туннельный эффект в переменном (лазерном) поле и многофотонная ионизация - явления одной и той же

природы. При $\gamma < 1$ имеет место туннельный эффект, а при $\gamma > 1$ - многофотонная ионизация. Как будет показано ниже, параметр Келдыша γ зависит не только от частоты $\nu_L [1/c]$ электрического (лазерного) поля

$\left(\nu_L = \frac{c}{\lambda} \right)$, но и от его напряженности $E [B/M]$, то есть, в конечном счете, от

интенсивности $I [Bt/M^2] = c\epsilon_0 E^2$ электромагнитного излучения и, кроме того, еще от величины энергии ионизации (потенциала ионизации) Φ_n . Параметр γ тем меньше, чем выше I и чем больше Φ_n . Таким образом, при одном и том же Φ_n туннельный эффект имеет место при относительно низких частотах и высоких интенсивностях излучения, а многофотонная ионизация - при относительно низких интенсивностях и высоких частотах.

Условие применимости формул, описывающих туннельный эффект (условие квазистатичности), представляет собой неравенство

$$\gamma = 2\pi\nu_L \tau_{unn} < 1. \quad (6.76)$$

Из (6.60) мы знаем выражение для $\Delta r_6^{(n)}$ - ширины потенциального барьера

$$\Delta r_6^{(n)} = r_n \Delta \xi_6^{(n)} = r_n \frac{8\sqrt{1-\beta_n}}{\beta_n}.$$

Используя эту формулу для $\Delta r_6^{(n)}$, неравенство (6.75) (условие квазистатичности) можно привести к виду:

$$\gamma = 2\pi\nu_L \frac{r_n \Delta \xi_6^{(n)}}{\nu_n} = 2\pi\nu_L \frac{r_n}{\nu_n} \frac{8\sqrt{1-\beta_n}}{\beta_n} < 1. \quad (6.77)$$

Из (6.1) следует, что $r_n = \frac{n\hbar}{m\nu_n}$, поэтому $\frac{r_n}{\nu_n} = \frac{n\hbar}{m\nu_n^2} = \frac{n\hbar}{2\Phi_n} \left(\hbar = \frac{h}{2\pi} \right)$.

Подставляя значение $\frac{r_n}{\nu_n} = \frac{n\hbar}{2\Phi_n}$ в (6.77), получаем

$$\gamma = a_n \frac{\sqrt{1-\beta_n}}{\beta_n} < 1, \quad (6.78)$$

где

$$a_n = \frac{4n\hbar\nu_L}{\Phi_n}. \quad (6.79)$$

Возведем в квадрат обе части неравенства (6.78). Получим

$$a_n^2 \frac{1-\beta_n}{\beta_n^2} < 1$$

или неравенство

$$\beta_n^2 + a_n^2 \beta_n - a_n^2 > 0. \quad (6.80)$$

Используя теорему Виста, запишем (6.80) в виде

$$(\beta_n - \beta_n^{\text{гп}})(\beta_n - \beta_n^{\text{гп}2}) > 0.$$

Сократив неравенство на положительную величину $(\beta_n - \beta_n^{\text{гп}2})$, получим условие, которому должно удовлетворять β_n , чтобы выполнялось условие квазистатичности, то есть неравенство (6.80):

$$\beta_n > \frac{a_n}{2} \left(-a_n + \sqrt{4 + a_n^2} \right) = \beta_n^{\text{гп}}. \quad (6.81)$$

Таким образом, граница квазистатичности представляет собой кривую:

$$\beta_n^{\text{гп}}(a_n) = \frac{a_n}{2} \left(-a_n + \sqrt{4 + a_n^2} \right). \quad (6.82)$$

Эта граница раздела показана на рис. 6.6. Значения $\beta_n^{\text{гп}}$, расположенные выше кривой, относятся к туннельному эффекту, а ниже кривой - к многофотонной ионизации.

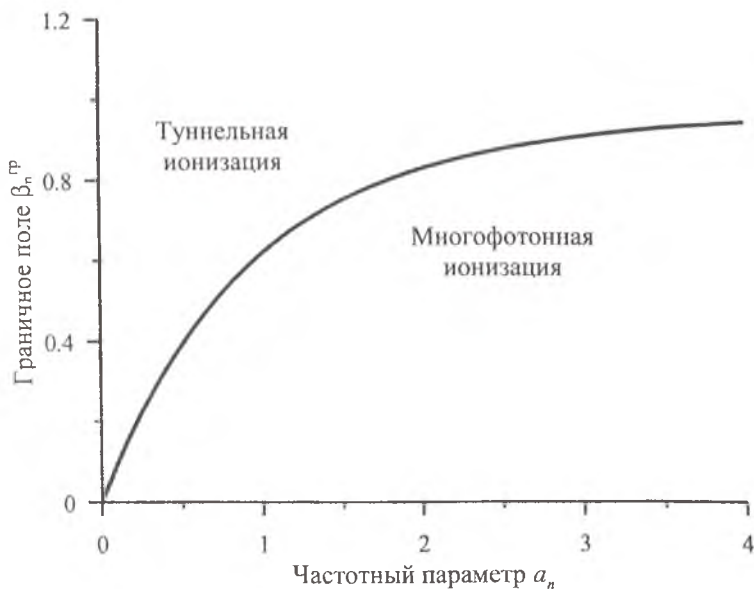


Рис. 6.6. Туннельная и многофотонная ионизация. Области нормированных значений поля (β_n) и его частоты (a_n), в которых преимущественно происходит либо туннельная, либо многофотонная ионизация. Кривая $\beta_n^{\text{гп}}(a_n)$ - граница раздела между областями как функция частоты (граница квазистатичности)

6.5. Вероятность туннельной ионизации. Туннельная ионизация вещества при лазерном воздействии. Надбарьерная ионизация

Теперь можно проследить за самим процессом *туннельной ионизации вещества*.

Пусть на атом воздействует электромагнитное излучение с интенсивностью $I [\text{Вт}/\text{м}^2] = \beta_n^2 I_{\text{нб}}$ достаточно большой, чтобы выполнялось условие квазистатичности (6.81), то есть $\beta_n > \beta_n^{\text{гр}}$. Тогда из формулы (6.72) можно определить коэффициент прозрачности $D_6(\beta_n)$ потенциального барьера. Вероятность $w [1/\text{с}]$ *туннельной ионизации* атома есть

$$w \cong \left(\frac{\Phi_n}{\hbar} \right) D_6(\beta_n). \quad (6.83)$$

Действительно, частота ν_n обращения связанного электрона вокруг ядра есть

$$\nu_n = \frac{\Phi_n}{\hbar}. \quad (6.84)$$

При каждом таком обороте электрон имеет конечную вероятность $D_6(\beta_n)$ пройти сквозь потенциальный барьер и “вырваться на свободу”. Если исходная концентрация нейтральных атомов $N_a [\text{м}^{-3}]$, то в результате лазерного воздействия в течение времени τ_L образуются свободные электроны с концентрацией $N_e [\text{м}^{-3}]$, такой, что

$$N_e = N_a w \tau_L \cong \nu_n \tau_L N_a D_6(\beta_n). \quad (6.85)$$

Степень ионизации $\alpha = \frac{N_e}{N_a}$ вещества, достигаемая за время τ_L воздействия лазерного излучения, будет

$$\alpha = \frac{N_e}{N_a} \cong \nu_n \tau_L D_6(\beta_n). \quad (6.86)$$

Полная ионизация вещества означает, что $\alpha = 1$. Таким образом, время $\tau_L^* [\text{с}]$, в течение которого при заданной интенсивности, то есть при известном $D_6(\beta_n)$, достигается полная ионизация за счет туннельного эффекта, определяется из соотношения

$$\tau_L^* [\text{с}] = \frac{1}{\nu_n D_6(\beta_n)}. \quad (6.87)$$

Если задана длина волны лазера $\lambda_L = \frac{c}{\nu_L}$ и известен потенциал ионизации Φ_n [эВ], то тем самым определена величина $a_n = \frac{4n\hbar\nu_L}{\Phi_n}$. Значит, в соответствии с условием квазистатичности (6.81), задано минимальное $\beta_n = \beta_n^{\text{rp}}$ и, следовательно, в соответствии с формулой (6.72) и минимальная величина коэффициента прозрачности $(D_6^a)_{\min} = D_6^a(\beta_n^{\text{rp}})$ потенциально-го барьера. Тогда из (6.87) известно максимальное время $(\tau_L^u)_{\max}$ лазерного воздействия, в течение которого достигается полная туннельная ионизация. Необходимая для этого минимальная интенсивность $I_L^{\min}$ находится из соотношения

$$I_L^{\min} = (\beta_n^{\text{rp}})^2 I_{\text{нб}}, \quad (6.88)$$

где $I_{\text{нб}} = \frac{c\epsilon_0 E_{\text{нб}}^2}{2}$, а $E_{\text{нб}}$, в свою очередь, согласно (6.51), однозначно определяется значением потенциала ионизации Φ_n :

$$E_{\text{нб}} = \frac{4\pi\epsilon_0\Phi_n^2}{4Ze^3}.$$

Пусть, например, $\lambda_L = 1,06$ мкм (Nd-лазер, $\hbar\nu_L = 1,17$ эВ), $Z = 1$, $n = 1$ (атом в основном состоянии), $\Phi_1 = 10$ эВ $= 1,6 \cdot 10^{-18}$ Дж $\left(\nu_1 = \frac{\Phi_1}{\hbar} = 2,4 \cdot 10^{15} \text{ 1/c} \right)$. Тогда для a_1 имеем: $a_1 = \frac{4\hbar\nu_L}{\Phi_1} = 0,468$. Из (6.82) находим

$\beta_n^{\text{rp}} = 0,371$ и $(\beta_n^{\text{rp}})^2 = 0,138$. Теперь из (6.72), подставив туда значение $\beta_n^{\text{rp}} = 0,371$, находим минимальный коэффициент прозрачности $D_6^a(\beta_1^{\text{rp}}) = \exp(-14,26) = 6,43 \cdot 10^{-7}$. Из (6.87) получаем максимальное время полной туннельной ионизации:

$$\tau_L^u[\text{c}] = \frac{1}{\nu_1 D_6(\beta_1)} = 0,64 \cdot 10^{-10} \text{ c} = 0,64 \text{ нс}.$$

Необходимую (минимальную) интенсивность $I_L^{\min}$ оцениваем следующим образом. Из (6.51) имеем надбарьерное поле

$$E_{\text{нб}} = 1,7 \cdot 10^{10} \text{ В/м} \quad (6.89)$$

и надбарьерную интенсивность

$$I_{\text{нб}} = \frac{c\epsilon_0 E_{\text{нб}}^2}{2} = 4 \cdot 10^{17} \text{ Вт/м}^2. \quad (6.90)$$

Отсюда получаем

$$I_L^{\min} = (\beta_{\pi}^{\text{сп}})^2 I_{\text{нб}} = 5,36 \cdot 10^{16} \text{ Вт/м}^2. \quad (6.91)$$

Если интенсивность I_L превосходит надбарьерное значение $I_{\text{нб}} = \frac{c\epsilon_0 E_{\text{нб}}^2}{2}$, где $E_{\text{нб}}$, в свою очередь, определяется формулой (6.51), потенциальный барьер исчезает, и возможна так называемая *надбарьерная ионизация*. В этом случае внешнее поле попросту “отрывает” электроны от атома, причем время отрыва много меньше периода световой волны, то есть процесс этот - квазистатистический. Действительно, воспользуемся вышеприведенными оценками $E_{\text{нб}}$ и $I_{\text{нб}}$ (6.89), (6.90) и оценим время Δt_0 , в течение которого под действием поля $E_{\text{нб}} = 1,7 \cdot 10^{10} \text{ В/м}$ электрон с массой $m = 0,9 \cdot 10^{-30} \text{ кг}$, двигаясь с ускорением $a = \frac{E_{\text{нб}}}{m}$, достаточно далеко отлетит от ядра, скажем, на расстояние $S = 100r_{\text{Б}}$, где $r_{\text{Б}} = 5 \cdot 10^{-11} \text{ м}$ - первый боровский радиус. Пользуясь классической формулой $S = \frac{a\Delta t_0^2}{2}$, получим $\Delta t_0 = 1,1 \cdot 10^{-15} \text{ с}$. Это время составляет менее одной десятой периода колебаний для зеленого света с длиной волны $\lambda = 500 \text{ нм}$.

Справедливость формул типа (6.89), (6.90) для пороговых значений поля и интенсивности надбарьерной ионизации подтверждена экспериментально в 1989 г. [August S., Strickland D., Meyerhofer D.D., Chin S.L. and Eberly J.H.: “Tunneling Ionization of Noble Gases in a High Intensity Laser Field”. Physical Review Letters. V.63. №20. P.2212-2215. 13 November. 1989]. В этой работе использовался лазер на неодимовом стекле (длина волны $\lambda = 1,06 \text{ мкм}$) с энергией до 0,1 Дж в ультракоротком импульсе длительностью 10^{-12} с . При фокусировке лазерного пучка в фокусе линзы достигалась интенсивность 10^{20} Вт/м^2 . Лазерный пучок фокусировался в откачиваемую камеру, которая заполнялась различными благородными газами (Xe, Kr, Ar) при давлении $\sim 10^{-6} \text{ Тор}$. Ионы, получавшиеся в результате воздействия интенсивного света на атомы, изучались с помощью масс-спектрографа с временным разрешением. В опытах, в частности, измерялись пороговые интенсивности света, при которых появлялись ионы определенной кратности. Эти интенсивности сопоставлялись с теоретическими, вычисленными по формуле типа (6.90). Найденные экспериментально пороговые интенсивности надбарьерной ионизации оказались близки к теоретическим значениям.

Задачи

1. Водородоподобный атом с зарядом ядра Ze , находящийся в основном состоянии с полной энергией электрона $W_1 = -\Phi_1$ (Φ_1 - положительная величина), помещен в переменное (лазерное) электрическое поле с напряженностью E [В/м]. При этом потенциальная энергия W_p электрона есть $W_p = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} - eEr$, где $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл - заряд электрона, r - радиус его орбиты, $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Кл/В·м. Найти: а) величину $E_{нб}$ поля, при котором исчезает потенциальный барьер и происходит так называемая надбарьерная ионизация атома, выразив $E_{нб}$ через F, e, Z . Полагая $\Phi_1 = 10$ эВ, $Z = 1$, оценить $E_{нб}$ [В/м], а также соответствующую $E_{нб}$ “надбарьерную” интенсивность $I_{нб}$ [Вт/м²] лазерного излучения; б) ширину потенциального барьера Δr как функцию нормированного поля $\beta = E/E_{нб}$.

Ответ: а) $E_{нб} = \frac{\Phi_1}{8er_1} = \frac{4\pi\epsilon_0\Phi_1^2}{4Ze^3} = 1,7 \cdot 10^{10}$ В/м, $I_{нб} = 3 \cdot 10^{17}$ Вт/м²;

б) $\Delta r = r_1 \frac{8\sqrt{1-\beta}}{\beta}$.

Указание. а) барьер исчезает, когда сравниваются координаты начала и конца барьера: $r_{16} = r_{26}$. При этом выполняется равенство $\Phi_1/8er_1 = E_{нб}$, где r_1 - первый боровский радиус; б) для нахождения r_{16} и r_{26} воспользоваться уравнением: $W_p(r) = -\Phi_1$.

2. Исходя из соотношения неопределенностей координата - импульс для фотона, получить формулу для дифракционной расходимости θ_d светового пучка диаметром D при длине волны света λ .

Ответ: $\theta_d = 2\lambda/D$.

Указание. Воспользоваться формулой де-Бройля $p = \hbar k$ применительно к фотону.

3. Водородоподобный атом с зарядом ядра Ze , находящийся в основном состоянии с полной энергией электрона $W_1 = -\Phi_1 = 10$ эВ (Φ_1 - положительная величина), облучается лазерным светом с интенсивностью $I = c\epsilon_0 E_0/2 = 10^{17}$ Вт/м². Потенциальная энергия W_p электрона в лазерном поле есть $W_p = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} - eEr$, где

$e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл - заряд электрона, $m = 0,9 \cdot 10^{-30}$ кг - его масса, r - расстояние до ядра, $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Кл/В·м, $E = E_0 \cos \omega t$, $\omega = 2\pi/\lambda$, $\lambda = 1,06$ мкм (Nd-лазер), $Z = 1$. Найти: а) ширину Δr_6 потенциального барьера, соответствующую $I = 10^{17}$ Вт/м²; б) параметр Келдыша $\gamma = \omega \tau_{\text{тун}}$, где $\tau_{\text{тун}} = \Delta r_6/v_1$ - время туннелирования, $v_1 = \sqrt{\frac{2\Phi_1}{m}}$ - скорость электрона; в) интенсивность I_{th} , при которой $\gamma = 1$.

Ответ: а) $\Delta r_6 = r_1 \frac{8\sqrt{1-\beta}}{\beta} = 5,6 \cdot 10^{-10}$ м; б) $\gamma = a \frac{\sqrt{1-\beta}}{\beta} = 0,42$;

в) $\beta_{\text{th}} = \frac{a}{2}(-a + \sqrt{4+a^2}) = 0,33$, $I_{\text{th}} = \beta_{\text{th}}^2 I_{\text{нб}} = 8,3 \cdot 10^{16}$ Вт/м².

Указание. Δr_6 найти из уравнения $W_i = W_p$, которое привести к виду

$$1 - \frac{2}{\xi} - \frac{1}{8}\beta\xi = 0, \text{ где } \xi = \frac{r}{r_1}, \quad r_1 = 0,5 \cdot 10^{-10} \text{ м} - \text{первый борковский радиус,}$$

$$\beta = \frac{E}{E_{\text{нб}}} = 0,6, \quad E_{\text{нб}} = \frac{\Phi_1}{8r_1 e} = 2,5 \cdot 10^{16} \text{ В/м}, \quad I_{\text{нб}} = 8,3 \cdot 10^{17} \text{ Вт/м}^2, \quad a = \frac{2\pi c}{\lambda} \frac{8r_1}{v_1}.$$

ГЛАВА 7. ЛАВИННАЯ ИОНИЗАЦИЯ

7.1. Механизм лавинной ионизации. Развитие электронной лавины

Механизм ионизации атомов лазерным излучением состоит в следующем. Электрическое поле световой волны ускоряет каждый из имеющихся в веществе свободных электронов. Тем самым такой свободный электрон приобретает определенную (конечную) кинетическую энергию, которая пропорциональна интенсивности света и квадрату длины волны (см. приложение 7.1). Пока столкновения не произошло, эта энергия остается постоянной, так как электрон в течение одного полупериода ускоряется, а в течение другого - тормозится. В результате в стационарном режиме сдвиг фазы между скоростью электрона и действующей на него силой составляет $\pi/2$, т.е. средняя за период мощность, получаемая электроном от поля, равна нулю.

Однако ситуация принципиально меняется, если есть столкновения. После каждого такого столкновения электрон "забывает" вышеупомянутый сдвиг фазы и способен снова приобрести энергию, равную первоначальной. Тем самым суммарная энергия электрона нарастает от столкновения к столкновению, как это показано на рис 7.1, до тех пор пока она не превысит потенциал ионизации атома. Тогда при очередном столкновении электрон может ионизовать атом, выбив из него связанный электрон, который, в свою очередь, набирает энергию точно так же, как это делал его "прародитель", и процесс ионизации будет повторяться. В результате развивается электронная лавина, которая превращает первоначально нейтральный газ в плазму.

Пусть, например, $N_0[\text{м}^{-3}]$ - начальная концентрация свободных электронов. Если считать, что при каждом акте ударной ионизации число свободных электронов удваивается, то через Λ последовательных этапов концентрации $N_\Lambda[\text{м}^{-3}]$ свободных электронов будет

$$N_\Lambda = 2^\Lambda N_0. \quad (7.1)$$

Следовательно,

$$\Lambda = \frac{\lg(N_\Lambda/N_0)}{\lg 2}. \quad (7.2)$$

Например, если в начальный момент взаимодействия $N_0 = 2,6 \cdot 10^6 \text{ м}^{-3}$, а через Λ этапов ионизации $N_\Lambda = 2,6 \cdot 10^{19} \text{ м}^{-3}$, то есть $N_\Lambda/N_0 = 10^{19}$, то получаем для Λ значение $\Lambda = 63$. В дальнейшем для оценок будем пользоваться значением

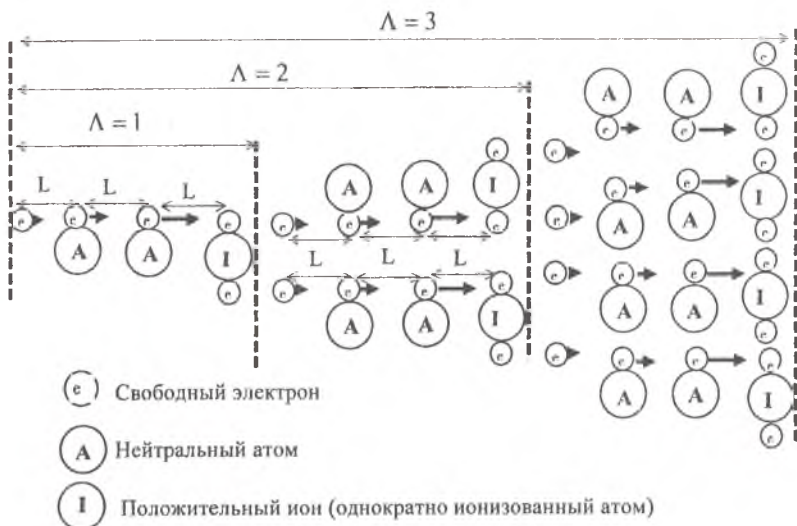


Рис. 7.1. Схема развития электронной лавины при лазерном пробое газа. Свободный электрон увеличивает свою энергию от столкновения к столкновению до тех пор, пока она не станет достаточной для ударной ионизации нейтрального атома при очередном столкновении. Образовавшиеся при этом свободные электроны набирают энергию тем же способом, и ударная ионизация повторяется. После Λ -го этапа ионизации концентрация свободных электронов (и положительных ионов) увеличивается в 2^Λ раз. Более длинная стрелка у электрона означает более высокую его энергию. L - длина свободного пробега, на которой электрон получает от светового поля определенную кинетическую энергию в соответствии с формулой (7.36)

$$\Lambda = 63. \quad (7.3)$$

7.2. Пороговая интенсивность ионизации, ее зависимость от давления газа, длительности лазерного импульса и длины волны

Теперь можно оценить пороговую интенсивность лавинной ионизации, в результате которой концентрация свободных электронов увеличится в 2^Λ раз. Воспользуемся для этого результатами п. 4.6, где исследуется изменение (нарастание) во времени энергии свободного сталкивающегося электрона при воздействии светового (лазерного) поля с учетом потерь энергии при столкновениях. Решение (4.234) уравнения (4.226) описывает зависимость от времени $t[\text{с}]$ энергии $W_e[\text{Дж}]$ электрона массой $m[\text{кг}]$, на-

ходящегося под действием лазерного излучения с интенсивностью $I_L [\text{Вт/м}^2]$ и длиной волны $\lambda [\text{м}]$ и сталкивающегося (с временем столкновений $\tau [\text{с}]$) с тяжелыми частицами (нейтралями и ионами) массой $M [\text{кг}] \gg m$. Решение (4.226) имеет следующий вид:

$$W_e(t) = \frac{1}{\pi} \frac{\lambda^2 r_e}{c} \frac{1}{1 + \frac{1}{(\omega\tau)^2}} \frac{M}{2m} I_L \left[1 - \exp\left(-\frac{2m}{M} \frac{t}{\tau}\right) \right]. \quad (7.4)$$

Здесь $r_e = 2,84 \cdot 10^{-15} \text{ м}$ - классический радиус электрона, $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ - скорость света, $\omega [\text{рад/с}] = \frac{2\pi c}{\lambda}$.

Из (7.4) можно найти минимальную (пороговую) лазерную интенсивность $I_L^{th} [\text{Вт/м}^2]$, при которой начинает развиваться электронная лавина и лавинный оптический пробой вещества. Пусть на вещество (газ) воздействует лазерный импульс длительностью $\tau_L [\text{с}]$. Электронная лавина с числом этапов Λ разовьется в том случае, если в течение каждого этапа длительностью $\frac{\tau_L}{\Lambda}$ электрон, сталкивающийся с нейтралями, успеет набрать энергию $W_e\left(\frac{\tau_L}{\Lambda}\right)$, равную энергии (потенциалу) ионизации $W_n [\text{Дж}]$ атома вещества. Таким образом, лазерная интенсивность $I_L [\text{Вт/м}^2]$ равна пороговой $I_L^{th} [\text{Вт/м}^2]$ (т.е. $I_L = I_L^{th}$), если в формуле (7.4) при $t = \frac{\tau_L}{\Lambda}$ слева получится $W_e\left(\frac{\tau_L}{\Lambda}\right) = W_n$. Таким образом, из (7.4) получаем соотношение

$$W_n = \frac{1}{\pi} \frac{\lambda^2 r_e}{c} \frac{1}{1 + \frac{1}{(\omega\tau)^2}} \frac{M}{2m} I_L^{th} \left[1 - \exp\left(-\frac{2m}{M} \frac{\tau_L}{\Lambda\tau}\right) \right], \quad (7.5)$$

из которого следует формула для $I_L^{th} [\text{Вт/м}^2]$ - *пороговой интенсивности лавинного пробоя*:

$$I_L^{th} = \left[1 + \frac{1}{(\omega\tau)^2} \right] \frac{I_W}{\frac{M}{2m} \left[1 - \exp\left(-\frac{2m}{M\tau} \frac{\tau_L}{\Lambda}\right) \right]}, \quad (7.5)$$

где интенсивность $I_W [\text{Вт/м}^2]$ представляет собой выражение

$$I_W = \frac{W_n}{\frac{1}{\pi} \frac{\lambda^2 r_e}{c}}. \quad (7.6)$$

При $W_{и} = 10 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-18} \text{ Дж}$ и $\lambda = 1,06 \text{ мкм}$ (Nd -лазер) для I_w имеем ($r_e = 2,84 \cdot 10^{-15} \text{ м}$, $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$)

$$I_w \approx 6 \cdot 10^{17} \text{ Вт/м}^2. \quad (7.7)$$

Физический смысл интенсивности I_w в (7.6) можно понять из формулы (7.37) приложения 7.1. I_w - это такая интенсивность, при которой колебательная энергия свободного бесстолкновительного электрона равна $2W_{и}$ - удвоенной энергии ионизации.

Поясним также физический смысл других величин, входящих в формулу (7.5). $M[\text{кг}]$ и $m[\text{кг}]$ - соответственно массы атома и электрона. Поэтому

$$\frac{M}{2m} = \mu \approx 10^4. \quad (7.8)$$

Выражение

$$\delta\tau_L[\text{с}] = \frac{\tau_L}{\Lambda} \quad (7.9)$$

есть длительность одного этапа лавинной ионизации.

Произведение

$$\mu\tau = \tau_T[\text{с}]$$

представляет собой так называемое *время термализации*. Это время, в течение которого электрон передает свою энергию ионам в результате ряда последовательных столкновений с ними.

Для удобства дальнейшего анализа проведем преобразование некоторых величин, входящих в формулу (7.5).

Из кинетической теории газов известно соотношение между концентрацией газа $N[\text{м}^{-3}]$, газокинетическим сечением столкновений $\sigma_{гк}[\text{м}^2]$, скоростью частиц $v[\text{м/с}]$ и временем столкновений $\tau[\text{с}]$

$$\sigma_{гк} N v \tau = 1. \quad (7.10)$$

В данном случае

$$v = \left(\frac{3kT}{m} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (7.11)$$

- это скорость электрона, масса которого $m = 0,9 \cdot 10^{-30} \text{ кг}$, $\sigma_{гк} \approx 10^{-19} \text{ м}^2$ - сечение его столкновений с нейтралами.

Умножим и поделим (7.10) на $N_1 = 2,6 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$ - концентрацию газа при атмосферном давлении. Безразмерная величина

$$\zeta = \frac{N^*}{N_1} \quad (5.12)$$

представляет собой относительную плотность газа в амага (amagat).

По аналогии с (7.10) можно написать соотношение

$$\sigma_{\text{ст}} N_1 v \tau_1 = 1, \quad (7.13)$$

где $\tau_1[\text{с}]$ - время столкновений при атмосферном давлении. Оценить значение τ_1 при комнатной температуре $T = 300 \text{ К}$ можно, беря типичное значение величины $\sigma_{\text{ст}} \approx 10^{-19} \text{ м}^2$ и оценив v из (7.11): $v = 10^5 \text{ м/с}$. Получим

$$\tau_1 \approx 3 \cdot 10^{-12} \text{ с}. \quad (7.14)$$

Из (7.10) с учетом (7.12) и (7.13) получаем достаточно очевидное выражение для времени столкновений τ электрона с нейтрами

$$\tau = \frac{\tau_1}{\zeta}. \quad (7.15)$$

Теперь формулу (7.5) можно записать следующим образом:

$$I_L^{\text{th}} = \left[1 + \frac{\zeta}{(\omega \tau_1)^2} \right] \frac{I_W}{\mu \left[1 - \exp \left(- \frac{\tau_L \zeta}{\mu \Lambda \tau_1} \right) \right]} \quad (7.16)$$

или же так:

$$I_L^{\text{th}} = \left[1 + \frac{\zeta}{(\omega \tau_1)^2} \right] \frac{I_W}{\mu \left[1 - \exp \left(- \frac{\theta \zeta}{\mu} \right) \right]}. \quad (7.17)$$

Здесь введено дополнительное обозначение величины $\tau_L / \Lambda \tau_1$ и дано ее типичное значение

$$\theta = \frac{\tau_L}{\Lambda \tau_1} \approx \frac{\tau_L[\text{с}]}{1,8 \cdot 10^{-10} \text{ с}}. \quad (7.18)$$

Из (7.16), (7.17) видно, что длительность лазерного импульса τ_L и давление газа входят в показатель экспоненты в виде произведения. Поэтому удлинение светового импульса при постоянном давлении газа влияет на пороговую интенсивность лавинного пробоя точно так же, как увеличение давления при постоянной длительности импульса.

Так как при давлениях вплоть до сотен атмосфер справедливо неравенство

$$\left(\frac{\zeta}{\omega \tau_1} \right)^2 \ll 1, \quad (7.19)$$

то формулу (7.17) можно использовать в упрощенном виде:

$$I_L^{\text{th}} = \frac{I_W}{\mu \left[1 - \exp \left(- \frac{\theta \zeta}{\mu} \right) \right]}. \quad (7.20)$$

Минимальная пороговая интенсивность ионизации получается в случае, когда показатель экспоненты в (7.17) много больше единицы:

$$\frac{\theta\zeta}{\mu} \gg 1. \quad (7.21)$$

Неравенство означает, что временной промежуток одного этапа лавины τ_L/Λ много больше времени $\mu\zeta\tau_i$ термализации, то есть $\frac{\tau_L}{\Lambda} \gg \frac{\tau_i\mu}{\zeta}$.

Как видно из обозначений (7.18), (7.12), (7.8), это имеет место при достаточно больших длительностях лазерного импульса и (или) при высоких давлениях. Воспользовавшись уже проведенными выше оценками величин θ , μ , можно переписать (7.21) в виде

$$\frac{\theta\zeta}{\mu} = a\zeta = 10^6 [1/c] \cdot \tau_L [c] \cdot \zeta [\text{amagat}] \gg 1. \quad (7.22)$$

В этом случае, как следует из (7.7) и (7.8) пороговая интенсивность лавинного пробоя минимальна и равна

$$I_L^{th} = \frac{I_W}{\mu} = I_0 \approx 6 \cdot 10^{13} \text{ Вт/м}^2. \quad (7.23)$$

В случае, если неравенство имеет обратный знак

$$\frac{\theta\zeta}{\mu} \ll 1, \quad (7.24)$$

из (7.17) имеем

$$I_L^{th} = \frac{I_W}{\theta\zeta} = 10^{10} [1/\text{сек}] \cdot \tau_L [\text{сек}] \cdot \zeta [\text{amagat}]. \quad (7.25)$$

Для удобства вычислений общую формулу (7.16) для любых значений длительности импульса τ_L и давления ζ можно записать в нормированном виде с учетом обозначений, употребляемых в (7.17) и (7.18):

$$I_L^{th} = \frac{I_W}{\mu[1 - \exp(-a\zeta)]}. \quad (7.26)$$

Зависимость I_L^{th} от ζ при различных τ_L представлена на рис. 7.2.

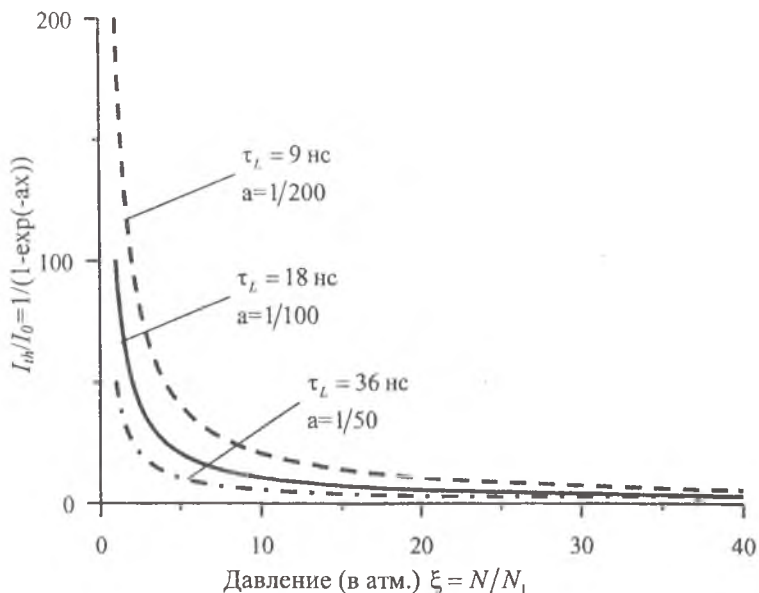


Рис. 7.2. Зависимость нормированной пороговой интенсивности лавинной ионизации (световой пробой) от давления газа в атм (плотность в амага) при различных длительностях лазерного импульса. Область низких и средних давлений

($\omega_L \tau_{cr} < 1$). Обозначения: $I_{th}/I_0 = 1/(1 - \exp(-ax))$; $I_0 = W_n / [(\lambda^2 r_e \mu) / \pi c]$;

$\mu = M/2m$; M - масса атома, m - масса электрона $a = \theta_{Li} \mu$; $\theta_{Li} = (\tau_L / \Lambda) / \tau_{cr}^1$;

$\tau_L [c]$ - длительность лазерного импульса; $\tau_{cr}^1 = 1/(\sigma_{ГК} N_1 v) \approx 3 \cdot 10^{-12} c$ (при

$T = 3000K$) - время столкновений; $N_1 = 2,6 \cdot 10^{25} m^{-3}$ - концентрация атомов при атмосферном давлении и комнатной температуре ($T = 3000K$); $r_e = 2,84 \cdot 10^{-15} m$ - классический радиус электрона. $\sigma_{ГК} = 10^{-19} m^2$ - газокинетическое сечение столкновений. $\zeta = N/N_1$ - плотность газа в амага (давление в атм); $W_n [Дж]$ - потенциал ионизации; $\lambda [m]$ - длина световой волны

Колебательная энергия W_e^q [Дж] свободного электрона, движущегося без столкновений в лазерном поле, как функция интенсивности света I_L [Вт/м²] и длины волны λ [м]

Рассмотрим свободный электрон, который движется без столкновений под действием лазерного излучения с интенсивностью I_L [Вт/м²] и длиной волны λ [м]. Его колебательная энергия электрона W_e^q как функция интенсивности I_L с учетом релятивистской зависимости массы m от колебательной скорости v_q определяется формулой

$$W_e^q = (m - m_0)c^2, \quad (7.27)$$

то есть представляет собой разность между полной энергией mc^2 и энергией покоя $m_0c^2 = 0,5$ МэВ. Здесь $m_0 = 0,9 \cdot 10^{-30}$ кг - масса покоя электрона,

$m = \frac{m_0}{(1 - v_q^2/c^2)^{1/2}}$ - релятивистская масса, c - скорость света.

Электрическое поле E [В/м] лазера можно считать гармоническим:

$$E = E_0 \cos \omega t, \quad (7.28)$$

где $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$ - круговая частота, E_0 - амплитуда. Тогда лазерная интенсивность I_L представляет собой известное выражение (см. гл. 4):

$$I_L = \langle c\epsilon_0 E^2(t) \rangle = \frac{c\epsilon_0 E_0^2}{2}, \quad (7.29)$$

где $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Кл/В·м.

Сила F [Н], действующая на электрон со стороны лазерного поля, есть

$$F(t) = eE_0 \cos \omega t. \quad (7.30)$$

Воспользуемся вторым законом Ньютона в виде

$$\frac{d(mv_q)}{dt} = eE_0 \cos \omega t. \quad (7.31)$$

Интегрирование этого уравнения дает следующее выражение:

$$\frac{m_0 v_q}{(1 - v_q^2/c^2)^{1/2}} = \frac{eE_0}{\omega} \sin \omega t. \quad (7.32)$$

Умножим правую и левую части (7.32) на c , возведем в квадрат обе части этого уравнения, усредним правую часть по времени, учтем, что $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$ и

что среднее по времени от $\sin^2 \omega t$ равно $1/2$. Получим после тождественных преобразований следующее уравнение:

$$\frac{x}{1-x} = a. \quad (7.33)$$

Здесь величина a есть

$$a = \frac{1}{\pi} \frac{\lambda^2 r_{e0} I_L}{c m_0 c^2}, \quad (7.34)$$

где $r_{e0} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_0 c^2} = 2,84 \cdot 10^{-15} \text{ м}$ - классический радиус электрона.

Разрешая (7.33) относительно величины $x = \frac{v^2}{c^2}$, получим релятивистскую массу m в следующем виде:

$$m = m_0 (1+a)^{1/2}. \quad (7.35)$$

Подставляя это выражение в (7.27), находим формулу для кинетической энергии W_e^q электрона:

$$W_e^q = (m - m_0) c^2 = m_0 c^2 \left\{ (1+a)^{1/2} - 1 \right\}. \quad (7.36)$$

Если интенсивность лазерного излучения такова, что $a \ll 1$ (электроны - нерелятивистские), то для W_e^q получаем приближенную формулу

$$W_e^q \approx m_0 c^2 \frac{a}{2} = \frac{1}{2\pi} \frac{\lambda^2 r_{e0} I_L}{c}. \quad (7.37)$$

При достаточно больших интенсивностях, когда $a \gg 1$, электроны - релятивистские и формула для W_e^q имеет вид

$$W_e^q \approx m_0 c^2 a^{1/2}. \quad (7.38)$$

Например, численное значение $W_e^q [\text{эВ}]$ при $I_L = 10^{25} \text{ Вт/м}^2$ и $\lambda = 1,06 \text{ мкм}$ (Nd-лазер) есть

$$W_e^q = 10 \text{ МэВ}.$$

Электрон можно считать релятивистским, когда его кинетическая энергия становится равной энергии покоя:

$$W_e^q \approx m_0 c^2. \quad (7.39)$$

Как видно из (7.36), это имеет место при $a = 3$. Соответствующая интенсивность $I_L [\text{Вт/м}^2]$ лазерного излучения при этом, согласно (7.34), есть

$$I_L = \frac{3\pi m_0 c^3}{\lambda^2 r_{e0}}. \quad (7.40)$$

При $\lambda = 1,06 \text{ мкм}$ (Nd-лазер) интенсивность составляет $I_L = 7 \cdot 10^{22} \text{ Вт/м}^2$.

Решение задачи в виде (7.36) можно также получить, если воспользоваться известным релятивистским соотношением между полной энергией $W = mc^2$, импульсом p и энергией покоя m_0c^2 :

$$W = \sqrt{(m_0c^2)^2 + (pc)^2} \quad (7.41)$$

или в такой форме:

$$W = m_0c^2 \sqrt{1 + \left(\frac{pc}{m_0c^2}\right)^2}. \quad (7.42)$$

Напомним, что эти формулы получаются из выражений для релятивистского импульса p и полной энергии W :

$$pc = \frac{cm_0v_q}{\sqrt{1 - v_q^2/c^2}}, \quad (7.43)$$

$$W = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - v_q^2/c^2}}. \quad (7.44)$$

Поделив почленно правые и левые части (7.43) и (7.44), получим следующее выражение для v_q/c :

$$\frac{v_q}{c} = \frac{pc}{W}. \quad (7.45)$$

Возведем обе части (7.45) в квадрат, подставим v_q^2/c^2 в правую часть (7.44), разрешим уравнение относительно W и получим (7.41) и (7.42).

Теперь заметим, что правая часть (7.32) есть выражение для релятивистского импульса электрона через действующее на него переменное (лазерное) поле $E = E_0 \cos \omega t$, т.е.

$$p = \frac{eE_0}{\omega} \sin \omega t. \quad (7.46)$$

Подставив это выражение в правую часть (7.41) и повторив описанные выше преобразования и усреднение по времени $\langle \rangle$ над выражением

$\left(\frac{pc}{m_0c^2}\right)^2$, получим величину a , которая описывается формулой (7.34):

$$\left\langle \left(\frac{pc}{m_0c^2}\right)^2 \right\rangle = a. \quad (7.47)$$

Теперь из (7.42) имеем

$$W = mc^2 = \sqrt{1 + a} \quad (7.48)$$

и окончательно

$$W_e^q = W - m_0c^2 = (m - m_0)c^2 = m_0c^2(\sqrt{1 + a} - 1). \quad (7.49)$$

Задачи

1. Излучение Nd лазера ($\lambda = 1,06$ мкм) с расходимостью пучка $\theta = 10^{-3}$ рад и длительностью импульса $\tau_L = 60$ нс фокусируется линзой с фокусным расстоянием $F = 0,1$ м в газе атмосферного давления (концентрация атомов $N = 2,6 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$). Найти энергию W_L^{th} [Дж] лазерного импульса, достаточную для оптического пробоя. Сечение столкновений σ_{en} [м²] электрона с нейтрами $\sigma_{en} = 10^{-19} \text{ м}^2$, начальная температура газа $T = 300$ К, энергия (потенциал) ионизации $W_{и} = 10$ эВ, число Λ этапов электронной лавины $\Lambda = 60$. Отношение массы M атома к массе m электрона равно $6 \cdot 10^4$ ($\mu = M/2m$).

Ответ: $W_L^{th} = 1$ Дж.

2. Какова должна быть пороговая интенсивность I_{Ln} [Вт/м²] излучения Nd лазера (длина волны $\lambda = 1,06$ мкм) с длительностью импульса $\tau_L = 600$ нс, чтобы инициировать оптический пробой в газе комнатной температуры ($T = 300$ К), состоящего из атомов массой M с энергией ионизации $W_{и} = 10$ эВ и с концентрацией $N = 2,6 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$ (атмосферное давление). Какой должна быть пороговая энергия лазера W_{Ln} [Дж] в импульсе, чтобы осуществить такой пробой в фокусе линзы с фокусным расстоянием $F = 0,3$ м Э расходимостью лазерного пучка $\theta = 10^{-3}$ рад? Чему должны быть равны I_{Ln} [Вт/м²] и W_{Ln} [Дж] при длительностях импульса: 1) $\tau_L = 60$ нс 2) $\tau_L = 30$ мкс 3) $\tau_L = 300$ мкс? Считать отношение $M/2m = 3 \cdot 10^4$, число ступеней лавинной ионизации $\Lambda = 60$, сечение столкновений σ_{en} электрона с атомами на этапе развития лавины - газокинетическое ($\sigma_{en} = 10^{-19} \text{ м}^2$), классический радиус электрона $r_e = 2,83 \cdot 10^{-15} \text{ м}$.

Ответ: $I_{Ln} = 1,7 \cdot 10^{14} \text{ Вт/м}^2$, $W_{Ln} = 7$ Дж. 1) $I_{Ln} = 1,7 \cdot 10^{15} \text{ Вт/м}^2$, $W_{Ln} = 7$ Дж; 2) $I_{Ln} = 1,8 \cdot 10^{13} \text{ Вт/м}^2$, $W_{Ln} = 54$ Дж; 3) $I_{Ln} = 1,8 \cdot 10^{13} \text{ Вт/м}^2$, $W_{Ln} = 540$ Дж.

Указание. Воспользоваться формулой для энергии электрона $W_e(t)$ в ла-

зерном поле: $W_e(t) = \sigma_{en} I_L \tau_T \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_T}\right) \right]$, где $\tau_T = \frac{M}{2m} \tau_{en}$ при $t = \frac{t_L}{\Lambda \tau_T}$ и

$$W_e(t_L / \Lambda \tau_T) = W_{и}.$$

ГЛАВА 8. ЛАЗЕРНЫЙ ТЕРМОЯДЕРНЫЙ СИНТЕЗ

8.1. История

Об управляемом термоядерном синтезе впервые открыто заговорили в 1956 г., когда И.В.Курчатов выступил в Харуэльском (Harwell) атомном центре (Великобритания) и рассказал об исследованиях, проводимых в СССР по управляемому термоядерному синтезу (УТС). С этого дня была снята секретность с исследований по УТС во всем мире. Физики отказались от секретности потому, что уже в середине 50-х годов стало ясно, что УТС - проблема многих десятилетий. Она несравненно более трудная, чем изготовление ядерной бомбы - будь то урановая или водородная. И решение проблемы УТС возможно лишь в результате совместных усилий ученых многих стран.

До начала 60-х годов в работах по УТС господствовал один общий подход. Он включал в себя создание высокотемпературной плазмы за счет газового разряда и попытки удержать эту плазму в различного рода магнитных ловушках.

Вскоре после появления лазеров Н.Г. Басовым и О.Н. Крохиным была выдвинута идея создания высокотемпературной плотной плазмы лазерным нагревом мишени. В 1968 г. Н.Г. Басовым с сотрудниками были получены первые "лазерные нейтроны" в мишени, нагреваемой мощным лазерным импульсом длительностью 10^{-10} с, то есть были зарегистрированы термоядерные реакции с выделением нейтронов. Появился новый термин "лазерный термоядерный синтез" (ЛТС). С тех пор оба направления - газоразрядный и лазерный - развиваются параллельно.

8.2. Термоядерные реакции

Термоядерными называются реакции, в которых происходит слияние (синтез) ядер. Например, два дейтона (ядра изотопа водорода-дейтерия, каждое из которых состоит из одного нейтрона) могут слиться, образовав ядро гелия-3 (^3He), включающее в себя два протона и один нейтрон. Дейтон и тритон, то есть ядро трития, содержащее один протон и два нейтрона, в результате синтеза образуют ядро гелия 4 (^4He), включающее в себя два протона и два нейтрона. При этом за счет дефекта массы выделяется огромная энергия: в зависимости от вида реакции - от 2 до 17 МэВ. Для того, чтобы произошла реакция синтеза, ядра необходимо сблизить на расстояние $\sim 10^{-14}$ м (на этом расстоянии действуют ядерные силы притяжения). Однако сближению ядер препятствуют силы кулоновского отталки-

вания. В горячей плазме преодолеть такое отталкивание помогает до определенных пределов кинетическая энергия W_k ядер, которая связана с температурой равновесной плазмы T известным соотношением, которое по существу и является определением температуры:

$$W_k = \frac{3}{2} kT.$$

В классической плазме, как и во всяком идеальном газе, полная энергия ядра W_T дейтерия (дейтрона) или трития (тритона) практически равна кинетической.

Заряженные частицы (ядра) могут сблизиться на такое расстояние R_T , при котором полная энергия ядра дейтерия W_T равна потенциальной кулоновской энергии взаимодействия ядер W_p^K . При этом кинетическая энергия равна нулю. Она затрачена на работу против сил отталкивания и превратилась в потенциальную энергию “сжатой пружины” - энергию взаимодействия ядер. Такая ситуация схематически представлена на рис. 8.1.

Итак, на некотором расстоянии R_T полная энергия W_T становится равной кулоновской потенциальной W_p^K , ибо $W_k = 0$. Потенциальную и полную энергию можно представить так:

$$W_T = W_p^K = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 R_T}. \quad (8.1)$$

Но так как на относительно далеком расстоянии $R \gg R_T$ полная энергия W_T равняется кинетической, то есть $W_T = W_k$, где $W_k = \frac{3}{2} kT$, то, следовательно, справедливо равенство

$$W_T = \frac{3}{2} kT = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 R_T} = W_p^K.$$

Отсюда получаем формулу для равновесной температуры плазмы, при которой возможен термоядерный синтез:

$$T = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 R_T (3/2)k}. \quad (8.2)$$

Здесь $q = 1,9 \cdot 10^{-19}$ Кл - заряд ядра (численно равный заряду электрона); $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Кл/В·м, $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К - постоянная Больцмана.

Если бы ядра вели себя как классические частицы, то в (8.2) нужно было бы подставить значение $R_T \cong 10^{-15}$ м - межъядерное расстояние, например расстояние между нуклонами в ядре гелия. В этом случае выражение (8.2) дает значение температуры:

$$T > 10^9 \text{ К.}$$

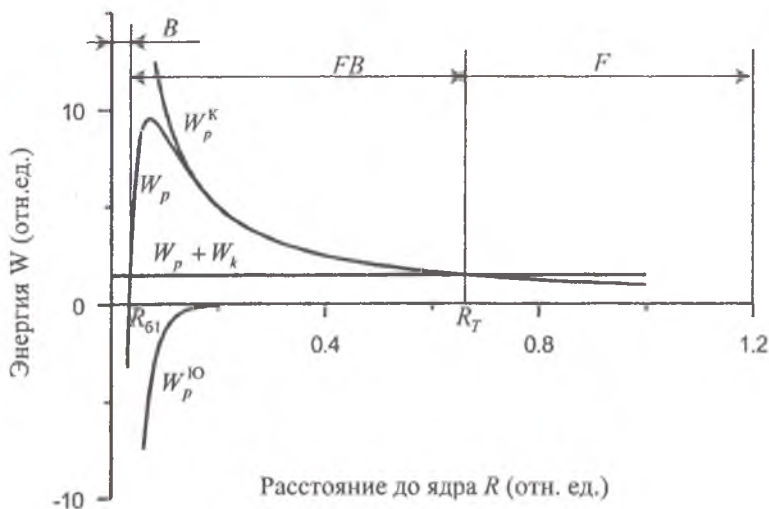


Рис. 8.1. Межядерные расстояния; полная, кинетическая и потенциальная энергии; разрешенные и запрещенные области пространства; потенциальный барьер и туннельный эффект - в реакции термоядерного синтеза. Здесь для наглядности изображена лишь принципиальная схема взаимодействия ядер. В действительности $R_T/R_{01} \sim 10^2$. $W_p^K = Zq^2/4\pi\epsilon_0 R$ - кулоновская потенциальная энергия, ответственная за силу отталкивания, $W_p^{Ю} = -\frac{C \exp(-R/R_0)}{R}$ - потенциальная энергия ядерных сил (потенциал Юкавы), обеспечивающая притяжение ядер на близких расстояниях $R < R_0$, W_k - кинетическая энергия ядра, $W_p = W_p^K + W_p^{Ю}$ - суммарная потенциальная энергия взаимодействия ядер, $W_T = W_p + W_k$ - полная энергия ядра. **FB** (forbidden) - классически запрещенная область. **B** (bound - связанные состояния) и **F** (free - свободные состояния) - классически разрешенные области пространства

Однако столь высокая температура, пока практически не достижимая, не требуется для "зажигания" термоядерной реакции. Во-первых, "помогает" распределение Максвелла по скоростям, благодаря которому при значительно меньших температурах ($T \cong 10^8$ К) всегда есть достаточно быстрые ядра, способные сблизиться на нужное расстояние. Правда, таких быстрых ядер относительно мало, и обеспечить поджиг реакции они не могут. Во-вторых, и это главное обстоятельство, помогает *туннельный эффект*. Для данной физической ситуации он описан ниже - в п. 8.3. Пока же, забегая вперед, заметим, что именно благодаря туннельному эффекту ядра способны сблизиться на столь малые расстояния, при которых происходят реакции ядерного синтеза.

Существуют различные виды термоядерных реакций. В водородной бомбе, например, идут следующие реакции:



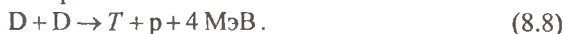
8.3. Туннельный эффект в реакциях термоядерного синтеза.

Сечение реакции

Как уже было отмечено выше, одна из наиболее типичных реакций термоядерного синтеза - это реакция слияния двух ядер дейтерия. В результате может образоваться ядро гелия-3 (${}^3\text{He}$) и нейтрон с энергией 3,3 МэВ:



Та же реакция примерно с той же вероятностью приводит к рождению ядра трития (Т) и протона с энергией 4 МэВ:



Такие реакции могут происходить в высокотемпературной плазме. Для этого кинетическая энергия ядер в ней должна быть достаточно высокой, чтобы ядра могли преодолеть кулоновскую силу отталкивания и сблизиться на расстояние, при котором возможно слияние (синтез) ядер (рис. 8.1). Дело в том, что на сближающиеся ядра дейтерия с зарядом q каждое, находящееся на расстоянии R , действуют две противоположные силы. Одна из них - это кулоновская сила отталкивания:

$$F = -\frac{Zq^2}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{\partial W_p^K}{\partial R}. \quad (8.9)$$

Здесь $Z = 1$, а W_p^K - кулоновская потенциальная энергия:

$$W_p^K = \frac{Zq^2}{4\pi\epsilon_0 R}. \quad (8.10)$$

Другая сила

$$F_{\text{я}} = \frac{\partial W_p^{Ю}}{\partial R} \quad (8.11)$$

представляет собой силу межъядерного притяжения. Потенциальная энергия $W_p^{Ю}$ [Дж] называется *потенциалом Юкава*. Этот потенциал выглядит следующим образом:

$$W_p^{Ю} = -C_{Ю} \frac{\exp\left(-\frac{R}{R_0}\right)}{R}. \quad (8.12)$$

Здесь $C_{Ю}[\text{Дж} \cdot \text{м}]$ - размерная постоянная, такая, что $C_{Ю} > \frac{Zq^2}{4\pi\epsilon_0}$, а расстояние R_0 есть

$$R_0 = \frac{h}{2\pi\mu c} \cong 10^{-15} \text{ м}, \quad (8.13)$$

то есть R_0 - величина порядка размеров ядра, ибо $\mu = 300m_e = 2,7 \cdot 10^{-28} \text{ кг}$, - масса μ -мезона. Фактически $R_0 \cong 10^{-15} \text{ м}$ - это комптоновская длина волны для μ -мезона, $m_e = 0,9 \cdot 10^{-30} \text{ кг}$ - масса электрона; $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ - скорость света. Постоянную $C_{Ю}$ можно оценить из соотношения

$$W_p^K(R_0) = W_p^{Ю}(R_0),$$

откуда с учетом (8.10) и (8.12)

$$C_{Ю} = e^1 \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} = 6,25 \cdot 10^{-28} \text{ Дж} \cdot \text{м}.$$

Из (8.10), (8.11) и (8.12) следует, что сила межъядерного притяжения - короткодействующая: она быстро убывает при $R > R_0$, но доминирует над кулоновской силой отталкивания при $R < R_0$. Оценим соотношения этих

сил. Вводя обозначение $x = \frac{R}{R_0}$ и используя (8.10)-(8.13), получим

$$\frac{F_a}{F_K} = \left(\frac{\partial W_p^{Ю}}{\partial R} \right) / \left(\frac{\partial W_p^K}{\partial R} \right) = \frac{4\pi\epsilon_0}{Zq^2} C_{Ю} (x+1) e^{-x}.$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} \frac{F_a}{F_K} &= 0 \quad \text{при } x \gg 1, \\ \frac{F_a}{F_K} &> 1 \quad \text{при } x \ll 1, \end{aligned} \quad (8.14)$$

ибо $C_{Ю} \left(\frac{4\pi\epsilon_0}{Zq^2} \right)^{-1} > 1$.

Значит, если сталкивающиеся ядра каким-либо образом окажутся на расстоянии $R < R_0$, где сила межъядерного притяжения превышает кулоновское отталкивание, то произойдет слияние (синтез) ядер. Однако такому сближению препятствует кулоновская сила отталкивания, которая превалирует на расстояниях $R > R_0$. Учтем теперь обе силы: и F_K , и $F_{Ю}$.

Из рис. 8.2 видно, что суперпозиция потенциальных кривых $W^{Ю}$ и W^K

рис. 8.2 видно, что суперпозиция потенциальных кривых W^{10} и W^K приводит к образованию потенциального барьера. Его высота W_B , показанная на рис. 8.2, составляет в данном случае величину $W_B \cong 300$ кэВ.

Чтобы барьер высотой $W_B \cong 300$ кэВ могла преодолеть классическая частица плазмы, ее температура должна быть огромной: ведь для этого нужно, чтобы полная энергия W_T частицы была порядка W_B . Следовательно, требующаяся температура T плазмы есть

$$T = \frac{W_B}{k} \cong 2,5 \cdot 10^9 \text{ К.} \quad (8.15)$$

Однако, как уже отмечалось, термоядерные реакции происходят при температуре почти на два порядка ниже, чем полученная в (8.15). Причина этого, как уже отмечалось выше, - *туннельный эффект*.

Для ядра с полной энергией $W_T(T)$ существует конечная вероятность “пронизать” потенциальный барьер и войти в зону действия ядерных сил притяжения. Такая ситуация обратна туннелированию электрона при ионизации атома внешним полем: там связанный электрон должен вырваться “на свободу”, а тут, наоборот, свободные ядра дейтерия должны связаться

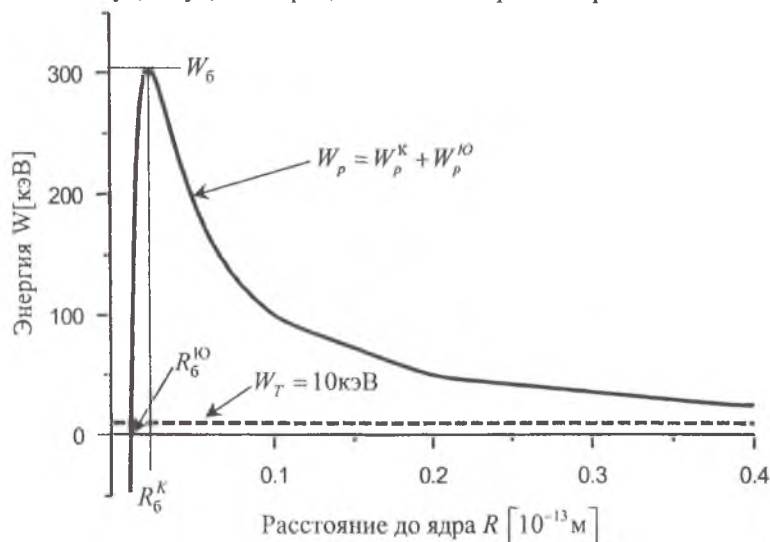


Рис. 8.2. Потенциальная энергия взаимодействия между ядрами W_p как функция

межъядерного расстояния R при $D-D$ реакции термоядерного синтеза в масштабе, близком к реальному. Потенциальный барьер W_B - максимальное значение

ние W_p

и образовать ядро гелия.

Физическая сущность явления аналогична описанному в гл. 6. Как и там, имеются три характерные области пространства, представленные на рис. 8.3. Две из них, а именно **F** и **B** - классически разрешенные: в них полная энергия W больше потенциальной W_p :

$$W_p < W. \quad (8.16)$$

Область **FB** - классически запрещенная: в ней потенциальная энергия W_p больше полной энергии ядра:

$$W_p > W.$$

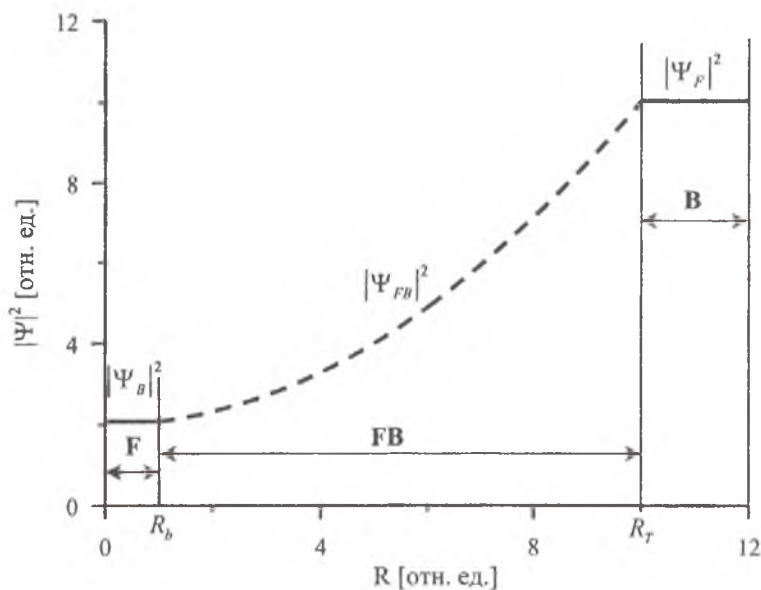


Рис. 8.3. Плотность вероятности $|\Psi(R)|^2$ пребывания ядра в различных областях пространства как функция расстояния R между сталкивающимися ядрами. **F** (free - свободный) - область свободных состояний, в которой пребывает ядро до начала термоядерной реакции **FB** (forbidden - запрещенный) - область потенциального барьера, через которую "туннелирует" ядро. **B** (bound - связанный) - область связанных состояний, в которую попадает ядро после реакции ядерного синтеза (в результате туннельного эффекта). **F** и **B** - классически разрешенные области. **FB** - классически запрещенная область. Здесь показан лишь принципиальный характер зависимости $|\Psi(R)|^2$. В действительности $\frac{R_T}{R_e} \sim 10^2$ и

$$\frac{|\Psi_B(R_e)|^2}{|\Psi_F(R_T)|^2} \ll 1$$

Амплитуда плотности вероятности пребывания частицы в каждой из областей описывается соответствующей Ψ -функцией ($\Psi_F, \Psi_{FB}, \Psi_B$) плотности вероятности, это $|\Psi_{F,FB,B}|^2$, а вероятность $P_{F,FB,B}$ пребывания частицы в какой-либо из этих областей на отрезке dR есть

$$P_{F,FB,B} = |\Psi_{F,FB,B}|^2 dR.$$

Все рассуждения здесь аналогичны п. 6.3 гл. 6, с той только разницей, что в данном случае частица пронизывает потенциальный барьер справа налево. Плотность вероятности нахождения частицы в области **FB** есть $|\Psi_{F,FB,B}|^2$. Как показано в гл. 6, эта плотность вероятности экспоненциально уменьшается по мере проникновения вглубь запрещенной зоны, то есть в данном случае по мере удаления от границы с областью **F**. Коэффициент прозрачности D_6 потенциального барьера - это отношение вероятности P_B обнаружить частицу на некотором интервале dR за барьером к вероятности ее пребывания перед барьером, то есть

$$D_6 = \frac{|\Psi_B(R_6)|^2}{|\Psi_F(R_T)|^2}. \quad (8.17)$$

Из условия непрерывности Ψ -функции на границах областей **F** и **FB**, **FB** и **B** следуют равенства

$$\begin{aligned} |\Psi_B(R_6)|^2 &= |\Psi_{FB}(R_6)|^2, \\ |\Psi_F(R_T)|^2 &= |\Psi_{FB}(R_T)|^2. \end{aligned}$$

Поэтому формула (8.17) для D_6 равносильна выражению

$$D_6 = \frac{|\Psi_{FB}(R_6)|^2}{|\Psi_{FB}(R_T)|^2}.$$

Координата R_6 (ближайшая к ядру) должна определяться с учетом потенциала Юкавы W_p^{JO} (8.12), то есть из равенства

$$W(T) = W_p(R_6^{JO}),$$

где

$$W_p = W_p^K + W_p^{JO}. \quad (8.18)$$

Однако для упрощения расчетов мы определим R_6 , используя лишь кулоновскую часть потенциальной энергии из приближенного выражения (см. рис. 8.1):

$$W_p^K(R_p^K) = W_B = 300 \text{ кэВ}.$$

Таким образом,

$$R_6^K \cong \frac{Zq^2}{4\pi\epsilon_0 W_B}. \quad (8.19)$$

Подставляя сюда $W_B = 300$ кэВ, получим $R_6^K = 4,8 \cdot 10^{-15}$ м. Это значение хотя и близко к величине $R_0 \cong 1,3 \cdot 10^{-15}$ м, определяемой из (8.13), но все же заметно больше того более точного значения R_6^{JO} , которое получается, если учесть потенциал Юкава W_p^{JO} .

Как уже было отмечено выше, эту координату R_6^{JO} потенциального барьера можно найти, решив следующее уравнение (8.18):

$$W_p^K(R_{61}) + W_p^{JO}(R_{61}) = W_T.$$

Подставив сюда формулы (8.10) и (8.12) - соответственно для кулоновского потенциала и потенциала Юкава, получим уравнение для R_6^{JO} :

$$\frac{Zq^2}{4\pi\epsilon_0 R} - C_{JO} \frac{\exp\left(-\frac{R}{R_0}\right)}{R} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 R_T}, \quad (8.20)$$

ибо, согласно (8.1),

$$W_T = \frac{3}{2} kT = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 R_T}.$$

Решение (8.20) дает следующее выражение для R_6^{JO} :

$$R_6^{JO} = R_0 \ln K \cong 1,3 \cdot 10^{-15} \text{ м} \quad (8.21)$$

(величина $K \geq 3$).

Расстояние R_T определяется из соотношения (8.1) (см. также рис. 8.1):

$$W_T = \frac{Zq^2}{4\pi\epsilon_0 R_T}. \quad (8.22)$$

Следовательно, R_T - это прицельный параметр столкновения (см. гл. 3):

$$R_T = \frac{Zq^2}{4\pi\epsilon_0 W(T)} = \frac{Zq^2}{4\pi\epsilon_0 (3/2) kT}. \quad (8.23)$$

R_T - это расстояние, на котором кинетическая энергия ядра равна нулю, и полная энергия равна потенциальной, которая в данном случае практически равна кулоновской. Действительно, как видно из (8.12), $W_p^{JO} \approx 0$, ибо $R_T \gg R_6$ (например, при $kT = 10$ кэВ имеем $R_T \cong 1,4 \cdot 10^{-13}$ м, то есть величину, почти на два порядка большую, чем $R_6^K \cong 4,8 \cdot 10^{-15}$ м).

Все рассуждения и расчеты далее полностью аналогичны тем, которые приведены в п. 6.3 гл. 6. Точно так же кинетическая энергия

$W_{\text{кин}} = W(T) - W_p^K(R)$ частицы в запрещенной зоне становится отрицательной величиной, а импульс представляет собой мнимую величину:

$$p = i\sqrt{2M} \sqrt{W_p^K(R) - W(T)}.$$

Здесь $M[\text{кг}]$ - масса дейтрона.

В результате из (8.17) с учетом (8.24) и (8.25) следует, что коэффициент прозрачности D_6 барьера имеет вид:

$$D_6 = \exp \left\{ -\frac{2\sqrt{2M}}{\hbar} \int_{R_6}^{R_T} \sqrt{W_p^K(R) - W(T)} dR \right\} \quad (8.26)$$

или

$$D_6 = \exp(-J),$$

где J имеет вид:

$$J = \frac{2\sqrt{2M}}{\hbar} \int_{R_6}^{R_T} \sqrt{W_p^K(R) - W(T)} dR. \quad (8.27)$$

Мы проводим интегрирование от R_T до R_6 . Но так как в этом случае $dR < 0$, можно поменять пределы интегрирования, то есть брать интеграл в пределах, указанных в (8.26).

Вынесем из-под знака корня полную энергию $W(T)$, представленную в виде (8.1)

$$W = W_p^K(R_T) = \frac{Z_d^2}{4\pi\epsilon_0 R_T}.$$

Введем новую переменную $\xi = \frac{R}{R_T}$.

Тогда (8.27) после некоторых тождественных преобразований принимает вид:

$$J = a \sqrt{\frac{1}{T/T_0}} \int_{R_6/R_T}^1 \sqrt{\frac{1}{\xi} - 1} d\xi. \quad (8.28)$$

Здесь T_0 - некоторая постоянная температура, безразмерный коэффициент a есть

$$a = \frac{2Zq^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar} \sqrt{\frac{M}{3kT_0}}. \quad (8.29)$$

Например, при $T_0 = 1 \text{ кэВ}$ имеем безразмерную величину $a = 28$, и тогда величина J принимает вид:

$$J = 28T^{-1/2} [\text{кэВ}] \int_{R_6/R_T}^1 \sqrt{\frac{1}{\xi} - 1} d\xi. \quad (8.30)$$

Введем новую переменную $\xi = \sin^2 \theta$, где $\theta = \arcsin \left(\sqrt{\frac{R}{R_T}} \right)$. Тогда интеграл (8.30) берется в элементарных функциях, и мы имеем в результате

$$J = 28T^{-1/2} [\text{кэВ}] \left\{ \frac{\pi}{2} - \arcsin \left(\sqrt{\frac{W_T}{W_6}} \right) - \frac{1}{2} \sin \left[2 \arcsin \left(\sqrt{\frac{W_T}{W_6}} \right) \right] \right\}. \quad (8.31)$$

Коэффициент прозрачности D_6 имеет, таким образом, вид:

$$D_6 = \exp(-J), \quad (8.32)$$

где J представлен выражением (8.31).

Результаты расчетов коэффициента прозрачности D_6 с использованием (8.28) для различных энергий ядра дейтерия представлены в табл. 8.1 и на рис. 8.4.

Сечение термоядерной реакции $\sigma^{\text{т}}[\text{м}^2]$ - это сечение столкновений $\sigma_{\text{ст}}[\text{м}^2]$, умноженное на величину D_6 - коэффициент прозрачности потенциального барьера. Действительно, ведь только те ядра вступают в реакцию, которые при столкновении преодолеют потенциальный барьер. Та-

Таблица 8.1.

Коэффициент прозрачности D_6 потенциального барьера, сечение $D-D$ столкновений $\sigma_{\text{ст}}[\text{м}^2] = pb_{\text{ст}}^2 L_K$, сечение термоядерной $D-D$ реакции $\sigma_{D-D}^{\text{т}}[\text{м}^2] = D_6 \sigma_{\text{ст}}[\text{м}^2]$, тепловая скорость ядер $v_D[\text{м/с}]$, произведение $\sigma_{D-D}^{\text{т}} v_D[\text{м}^3/\text{с}]$ - для различных значений кинетической (тепловой) энергии $W_T[\text{кэВ}]$ ядер дейтерия.

$W_T[\text{кэВ}]$	2	4	6	8	10	20
$\sigma_{\text{ст}}[\text{м}^2]$	$5,86 \cdot 10^{-24}$	$1,7 \cdot 10^{-24}$	$0,8 \cdot 10^{-24}$	$5 \cdot 10^{-25}$	$3,3 \cdot 10^{-25}$	$0,92 \cdot 10^{-24}$
D_6	$2,08 \cdot 10^{-13}$	$1,53 \cdot 10^{-9}$	$0,92 \cdot 10^{-7}$	$1,5 \cdot 10^{-6}$	$5 \cdot 10^{-6}$	$2,88 \cdot 10^{-4}$
$\sigma_{D-D}^{\text{т}}[\text{м}^2]$	$3,6 \cdot 10^{-36}$	10^{-32}	$2,9 \cdot 10^{-31}$	$2 \cdot 10^{-30}$	$6,6 \cdot 10^{-30}$	$1,15 \cdot 10^{-28}$
$v_D[\text{м/с}]$	$0,5 \cdot 10^6$	$0,7 \cdot 10^6$	$0,87 \cdot 10^6$	10^6	$1,1 \cdot 10^6$	$1,56 \cdot 10^6$
$\sigma_{D-D}^{\text{т}} v_D[\text{м}^3/\text{с}]$	$0,6 \cdot 10^{-30}$	$1,7 \cdot 10^{-27}$	$0,64 \cdot 10^{-26}$	$0,75 \cdot 10^{-24}$	$1,9 \cdot 10^{-24}$	$0,4 \cdot 10^{-22}$
L_K	6,05	7,14	7,73	8,18	8,5	9,5

Здесь $b_{\text{ст}}[\text{м}] = Zq^2 / 4\pi\epsilon_0 W_T$ - прицельный параметр столкновения,

$L_K = \ln r_D / b_{\text{ст}}$ - кулоновский логарифм, $r_D = 69 \sqrt{T/N_D}$ - радиус Дебая,

$T[\text{К}]$ - температура плазмы, $N_D[\text{м}^{-3}]$ - концентрация ядер дейтерия,

$v_D[\text{м/с}] = \sqrt{3kT/M_D}$, $M_D[\text{кг}]$ - масса ядра дейтерия.

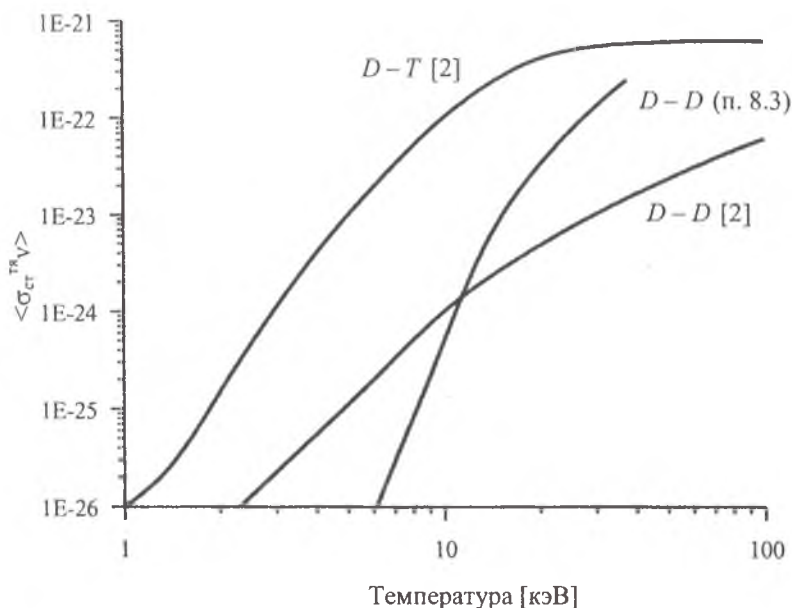


Рис. 8.4. Произведение сечения $\sigma_{D-D}^{tr} [m^2] = D_6 \sigma_{ct} [m^2]$ термоядерной $D-D$ реакции на скорость $v_D [m/c]$ налетающего ядра как функция энергии $W_T [эВ]$ ядра.

Температура плазмы $kT [кДж] = 2W_T/3$, где $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К - постоянная Больцмана. Коэффициент прозрачности D_6 потенциального барьера вычислен по формуле (8.32), а сечение столкновений $\sigma_{ct} [m^2]$ - по формулам п.3.4. Зависимости произведений $\langle \sigma_{D-D}^{tr} v_D \rangle [m^3/c]$ и $\langle \sigma_{D-T}^{tr} v \rangle [m^3/c]$ соответственно для $D-D$ $D-T$ реакций представлены по данным [2]

ким образом,

$$\sigma^{tr} [m^2] = D_6 \sigma_{ct} [m^2]. \quad (8.33)$$

В табл. 8.1 сечение столкновений $\sigma_{ct} [m^2]$ оценивалось по формуле (3.29) п. 3.2.4. На рис. 8.4 показана теоретическая зависимость произведения $\sigma_{D-D}^{tr} v_D [m^3/c]$ от температуры $T [кэВ]$ плазмы для термоядерной $D-D$ реакции, вычисленная с помощью формул (8.31) и (8.32). Здесь же представлены приведенные в [2] зависимости от температуры $T [кэВ]$ плазмы характерной для термоядерных реакций $D-D$ и $D-T$ величины $\langle \sigma_{D-D}^{tr} v_D \rangle [m^3/c]$, которая представляет собой усредненное по распределению Максвелла произведение сечения термоядерной реакции σ_{D-D}^{tr} на скорость v_D .

Несмотря на количественное различие между вычисленной здесь теоретической кривой и более точными зависимостями, приведенными в [2], рис. 8.4 свидетельствует о качественно правильном описании физических процессов термоядерного синтеза с помощью упрощенных формул для туннельного эффекта. Количественное отличие произведения $\sigma_{D-D}^{Ta} v_D [m^3/c]$ от данных [2] объясняется, во-первых, большим (на 1-2 порядка) значением сечения столкновения, которое дает упрощенная формула (3.29) в п.3.4, и, во-вторых, заменой реальной потенциальной энергии $W_p = W_p^K + W_p^{JO}$ ее кулоновским "макетом", что приводит к уменьшению величины J в (8.30), то есть к увеличению значения коэффициента прозрачности D_6 .

8.4. Условие самоподдерживания термоядерной реакции (критерий Лоусона)

Созданную горячую плазму нужно некоторое время удерживать, чтобы ядра успели вступить в реакцию синтеза. Очевидно также, что чем плотнее плазма, тем меньше время требуется для удержания такой плазмы, чтобы в ней прошли термоядерные реакции. Критерий Лоусона - это такое *соотношение* между плотностью плазмы, временем ее удержания и температурой, при которой выделяющаяся термоядерная энергия полностью компенсирует энергетические потери.

Пусть дейтериево-тритиевая смесь имеет плотность (концентрацию) $N_{DT}[m^{-3}]$. При этом $N_{DT}/2$ - концентрация ядер трития, а $N_{DT}/2$ - ядер дейтерия. Предположим также, что ионная и электронная температуры одинаковы, то есть плазма имеет равновесную температуру $T[K]$, а смесь представляет собой полностью ионизованную плазму, содержащую равное число электронов и ионов. Тогда полная концентрация заряженных частиц в плазме равна

$$N_{DT}(\text{электроны}) + N_{DT}(\text{ионы}) = 2N_{DT}.$$

В соответствии с кинетической теорией, на каждую частицу в плазме, находящейся при температуре T , приходится энергия $\frac{3}{2}kT$. Таким образом, полная удельная (объемная) тепловая энергия $w_v [Дж/см^3]$ плазмы есть

$$w_v [Дж/см^3] = 3N_{DT}kT.$$

Если время удержания плазмы $\tau_y [с]$, то удельная (объемная) мощность потерь $p_v^T [Вт/м^3]$ будет

$$p_v^T [Вт/м^3] = \frac{3kTN_{DT}}{\tau_y}. \quad (8.34)$$

Концентрация ядер дейтерия (N_D) и трития (N_T), участвующих в реакции в нашей смеси, составляет соответственно

$$N_D = \frac{N_{DT}}{2}$$

и

$$N_T = \frac{N_{DT}}{2}.$$

Нас интересует $D-T$ реакция, вызванная столкновениями дейтрона (D) с тритоном (T).

Определим частоту $\nu_{ст}$ таких столкновений ядер, каждое из которых вызывает $D-T$ реакцию. Из теории столкновений (см. гл. 3) известно следующее соотношение:

$$\sigma_{ст}NL = 1, \quad (8.35)$$

где $\sigma_{ст}[\text{м}^2]$ - сечение столкновений, $N[\text{м}^{-3}]$ - концентрация частиц, а

$L = \nu t_{ст}$ - длина свободного пробега, ν - тепловая скорость, $t_{ст} = \frac{1}{\nu_{ст}}$ - время между столкновениями. Следовательно, частота столкновений $\nu_{ст}$ есть

$$\nu_{ст}[1/\text{с}] = \sigma_{ст}\nu N.$$

Нас, однако, интересуют лишь те столкновения, при которых происходит термоядерная $D-T$ реакция. Но как уже было показано выше (см. п. 8.3), эта реакция, в свою очередь, происходит только тогда, когда свободно движущееся ядро благодаря туннельному эффекту преодолевает потенциальный барьер, вызванный кулоновской силой отталкивания. Вероятность преодоления этого потенциального барьера при столкновении характеризуется коэффициентом прозрачности барьера $D_6 < 1$ (см. табл. 8.1). Таким образом, мы можем считать, что термоядерная реакция происходит при каждом столкновении, если вместо сечения столкновений $\sigma_{ст}$ будем использовать величину $\sigma^{тЯ}[\text{м}^2]$, называемую *сечением термоядерной реакции*. Согласно (8.32), такое сечение термоядерной реакции $\sigma^{тЯ}[\text{м}^2]$ равно произведению коэффициента прозрачности D_6 и обычного сечения столкновения ядер $\sigma_{ст}$:

$$\sigma^{тЯ} = D_6\sigma_{ст}.$$

Итак, частота $\nu_{тЯ}[1/\text{с}]$ термоядерных реакций будет

$$\nu_{тЯ} = D_6\sigma_{ст}\nu N. \quad (8.36)$$

Усредним в (8.36) произведение $\sigma_{ст}\nu$ по распределению Максвелла по скоростям. Учтем, что вклад дают лишь $D-T$ столкновения, то есть в данном случае $N = N_{DT}/2$. Получим следующую формулу для частоты термоядерных $D-T$ реакций:

$$v_{DT}^{т\pi} = D_6 \langle \sigma_{ст} v \rangle \frac{N_{DT}}{2} = \langle \sigma_{DT}^{т\pi} v \rangle \frac{N_{DT}}{2}. \quad (8.37)$$

Каждая такая термоядерная $D-T$ реакция, сопровождающаяся выделением энергии Q [Дж], удельная термоядерная мощность $p_V^{т\pi}$ [Вт/м³], выделяющаяся в смеси, равна произведению частоты $v_{DT}^{т\pi}$ термоядерных реакций концентрации $D-T$ пар $N_{DT}/2$ и энергии Q :

$$p_V^{т\pi} [\text{Вт/м}^3] = \frac{N_{DT}}{2} [\text{м}^{-3}] v_{DT}^{т\pi} [1/\text{сек}] Q [\text{Дж}] \quad (8.38)$$

или, пользуясь (8.37), имеем:

$$p_V^{т\pi} = \left(\frac{N_{DT}}{2} \right)^2 \langle \sigma_{DT}^{т\pi} v \rangle Q. \quad (8.39)$$

Энергетический коэффициент усиления G - это отношение выделяющейся термоядерной удельной мощности $p_V^{т\pi}$ к удельной мощности потерь p_V^* , определяемой (8.34):

$$G = \frac{p_V^{т\pi}}{p_V^*} = \frac{N_{DT} \langle \sigma_{DT}^{т\pi} v \rangle Q \tau_y}{12kT}. \quad (8.40)$$

Для случая, когда $G=1$ (выделяющаяся энергия равна потерям), мы получаем критерий Лоусона:

$$N_{DT} \tau_y = \frac{12kT}{\langle \sigma_{DT}^{т\pi} v \rangle Q}. \quad (8.41)$$

Из (8.40) следует, в частности, что чем больше средняя величина $\langle \sigma_{DT}^{т\pi} v \rangle$ и чем больше энергетический выход Q , тем меньше произведение $N_{DT} \tau_y$ и тем легче выполнить критерий Лоусона (8.41). Как видно из рис. 8.4, оптимальной температурой является значение $T \sim 10^8$ К (10^4 кэВ), поэтому имеем следующее значение величины $\langle \sigma^{т\pi} v \rangle$:

для $D-T$ реакции

$$\langle \sigma_{DT}^{т\pi} v \rangle \sim 10^{-22} \text{ м}^3 \text{ с}^{-1};$$

для $D-D$ реакции

$$\langle \sigma_{DD}^{т\pi} v \rangle \sim 10^{-24} \text{ м}^3 \text{ с}^{-1}.$$

Подставляя соответствующее значение в (8.41), получим численное значение критерия Лоусона для $D-T$ реакции:

$$N_{DT} \tau_y = 10^{20} \text{ с/м}^3. \quad (8.42)$$

При длительности лазерного импульса $\tau_L = \tau_y = 10^{-9}$ с имеем $N_{DT} = 10^{29} \text{ м}^{-3}$. Это значит, что плазменную $D-T$ смесь нужно сжать так,

чтобы концентрация ядер была как в твердом теле и даже больше. Для этого используется так называемый метод всестороннего сжатия облучаемой мишени, при котором в настоящее время достигнута плотность в 200 раз большая, чем твердая (замороженная) $D-T$ мишень.

8.5. Радиус $D-T$ мишени. Пороговая энергия лазера

Как следует из (8.42), концентрации сжатой дейтериево-тритиевой ($D-T$) смеси $N_{DT} = 10^{29} \text{ м}^{-3}$ соответствует время удержания $\tau_y = 10^{-9} \text{ с}$. Радиус мишени - это то расстояние, которое пройдет ударная волна сжатия за время $\tau_y = 10^{-9} \text{ с}$, двигаясь к центру мишени. Скорость движения такой волны есть скорость звука $C_{зв}$ при температуре “зажигания” термоядерной реакции $T \cong 10^8 \text{ К}$ (энергия ядер $W = 10^4 \text{ кэВ}$). Таким образом,

$$C_{зв} = \sqrt{\frac{3kT}{M}} = 10^6 \text{ м/с}. \quad (8.43)$$

Отсюда находим радиус $R_m[\text{м}]$ мишени:

$$R_m = C_{зв} \tau_y = 10^{-3} \text{ м}. \quad (8.44)$$

Пороговая энергия $W_L^{th}[\text{Дж}]$ лазерного импульса - это та энергия, которая необходима для создания плазмы с температурой 10 кэВ в объеме $V[\text{м}^3]$ мишени, где величина $V[\text{м}^3]$ есть

$$V = \frac{4}{3} \pi R_m^3. \quad (8.45)$$

Умножая эту величину на объемную концентрацию тепловой энергии $D-T$ смеси $3kTN_{DT}[\text{Дж/м}^3]$ в мишени, получим (при $N_{DT} = 10^{29} \text{ м}^{-3}$ и $T = 10^8 \text{ К}$) пороговую энергию $W_L^{th}[\text{Дж}]$ лазера:

$$W_L^{th} = \frac{4}{3} \pi R_m^3 3kTN_{DT} = 2 \cdot 10^6 \text{ Дж}. \quad (8.46)$$

Библиографический список

1. Фейнман Р.П. Фейнмановские лекции по физике. М.: Мир, 1977.
2. Коротеев Н.И., Шумай И.Л. Физика мощного лазерного излучения. М.: Наука, 1991.
3. Делоне Н.Б. Взаимодействие лазерного излучения с веществом: Курс лекций. М.: Наука, 1989.
4. Арцимович Л.А. Элементарная физика плазмы. М.: Атомиздат, 1969.
5. Арцимович Л.А., Сагдеев Р.З. Физика плазмы для физиков. М.: Атомиздат, 1979.
6. Чен Ф. Введение в физику плазмы. М.: Мир, 1987.
7. Райзер Ю.П. Лазерная искра и распространение разрядов. М.: Наука, 1974.
8. Райзер Ю.П. Физика газового разряда. М.: Наука, 1987.
9. Фейнман Р. КЭД - странная теория света и вещества. М.: Наука, 1988.
10. Ландсберг Г.С. Оптика. М.: Наука, 1976.
11. Поль Р.В. Оптика и атомная физика. М.: Наука, 1966.
12. Ахманов С.А., Никитин С.Ю. Физическая оптика. М.: Изд-во МГУ, 1998.
13. Карлов Н.В. Лекции по квантовой электронике. М.: Наука, 1988.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА 1. ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ, УПРАВЛЯЮЩИЕ ИЗЛУЧЕНИЕМ. ФОРМУЛА ПЛАНКА И СЛЕДСТВИЯ ИЗ НЕЕ В МАКРО-, МИКРО- И МЕГАМИРЕ	3
1.1. Формула Планка как распределение по частотам ν спектрально-объемной плотности энергии $\rho_{\nu,\nu}$ [Дж/м ³ · Гц] при заданной температуре T [K]. Физический смысл отдельных сомножителей в распределении $\rho_{\nu,\nu}(\nu, T)$: спектрально-объемная плотность мод, средняя энергия осциллятора, средняя энергия фотона, число фотонов в моде. Формула планка как распределение по длинам волн: $\rho_{\nu,\lambda}(\lambda, T) = \rho_{\nu,\lambda}$ [Дж/м ³ · м]. Формула Планка как распределение по частотам (или по длинам волн) спектральной испускательной способности S_ν [Вт/м ² Гц] (или S_λ [Вт/м ² м]). Соотношение между ρ и s	3
1.2. Вывод формулы Планка (распределение по частотам)	9
1.2.1. Средняя энергия квантового осциллятора Планка.....	9
1.2.2. Объемно-спектральная плотность возможных состояний элементарных частиц. Объемно-спектральная плотность мод	12
1.3. Форма планковской кривой, положение максимума. Закон смещения Вина.....	14
1.3.1. Распределение Планка по длинам волн.....	14
1.3.2. Распределение по частотам	16
1.4. Закон Стефана-Больцмана. Стационарный нагрев вещества излучением	20
1.4.1. Вывод закона Стефана-Больцмана из формулы Планка	20
1.4.2. Температура мишени при нагреве тепловым источником (Солнце).....	22
1.4.3. Температура мишени при нагреве излучением лазера. Равновесная (максимальная) температура. Процесс установления равновесной (максимальной) температуры.....	26
1.5. Принципиальное отличие лазерного нагрева от нагрева тепловым источником. “Температура” лазерного излучения.....	37
1.6. Формула Планка в представлении Эйнштейна	39
1.6.1. Вынужденные и спонтанные переходы. Вероятности переходов. Коэффициенты Эйнштейна.....	39
1.6.2. Вынужденные переходы (поглощение и испускание) как процесс рассеяния фотонов на атомах и молекулах.	

Сечение вынужденного перехода. Поглощение и усиление света.....	45
1.6.3. Усиление света с учетом спонтанного излучения как следствие формулы Планка (в записи Эйнштейна)	52
1.6.3.1. Испускание и поглощение света в активной среде. Объемная плотность мощности излучения (и поглощения). Ее пропорциональность числу n основных фотонов в моде. Вычисление n - среднего числа фотонов в моде. Ширина спектральной линии и ее форм-фактор. Сечение вынужденного перехода (сечения усиления и поглощения). Коэффициент линейного усиления (или поглощения)	52
1.6.3.2. Спонтанные переходы. Объемная плотность мощности вынужденного и спонтанного излучения как пространственная производная от интенсивности света. Уравнение, описывающее усиления света и его решение.....	56
1.6.3.3. Линейный режим усиления (без учета эффекта насыщения). Оптические квантовые усилители: суперлюминесцентные и усилители внешнего сигнала. Предельная чувствительность оптического усилителя. Особенности усиления света при учете спонтанного излучения.	58
1.6.3.4. Нелинейный режим усиления. Эффект насыщения: снижение усиления с ростом усиленного сигнала из-за уменьшения инверсной населенности. Зависимость выходного усиленного излучения от инкремента усиления и от величины входного сигнала.....	63
1.6.5. Предельная длина усилителя в режиме насыщения	66
1.7. Формула Планка в масштабах Вселенной.....	67
1.7.1 "Стандартная модель" Вселенной. (теория большого взрыва, остывание "горячей Вселенной"). Реликтовое излучение как проявление закона Планка в масштабах Вселенной.	68
1.7.2. Понижение температуры равновесного излучения в расширяющейся полости (модель остывания "горячей" Вселенной).....	72
Задачи.....	76

ГЛАВА 2. ПЛАЗМА. ЕЁ ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА И ХАРАКТЕРИСТИКИ. ВИДЫ ПЛАЗМЫ: КЛАССИЧЕСКАЯ ИДЕАЛЬНАЯ, КЛАССИЧЕСКАЯ НЕИДЕАЛЬНАЯ, КВАНТОВАЯ	81
2.1. Определение плазмы. Состав: электроны, ионы, нейтральные частицы (нейтралы). Степень ионизации. Коллективные свойства. Квазинейтральность. Способы получения плазмы	81
2.2. Плазменные (лэнгмюровские) колебания	83
2.3. Дебаевский радиус	85
2.4. Критерий существования плазмы (условие коллективности).....	86
2.5. Критерий идеальности плазмы.....	88
2.6. Зависимость степени ионизации газа от температуры, давле- ния и энергии ионизации атомов (формула Саха)	90
2.7. Вырожденная (квантовая) плазма	94
2.7.1. Условие вырождения: равенство одноэлектронного объема и объема неопределенности. Температура выро- ждения.....	94
2.7.2. Концентрация электронов, максимальный импульс, максимальная энергия, энергия Ферми	98
2.7.3. Давление вырожденной плазмы	100
2.7.4. Электроны в металлах	102
2.7.5. Электронно-дырочная плазма в полупроводниках	103
Задачи	107
ГЛАВА 3. СТОЛКНОВЕНИЯ ЧАСТИЦ В ПЛАЗМЕ.....	110
3.1. Основные величины, характеризующие столкновения	110
3.1.1. Среднее время между столкновениями. Функция рас- пределения времени столкновений.....	110
3.1.2. Длина свободного пробега, сечение столкновений, со- отношение между сечением столкновений, длиной сво- бодного пробега и концентрацией частиц	113
3.2. Частота столкновений электрона. Столкновения электронов с нейтральными частицами	115
3.3. Столкновение электрона с одиночным заряженным центром (ионом). Прицельный параметр. Критерий столкновения.	117
3.4. Движение электрона в поле многих заряженных центров. Длина свободного пробега. Кулоновский логарифм. Сечение столкновений. Время между столкновениями.....	120
3.5. Электронная и ионная температура. Учет столкновений с нейтральными частицами	123
Задачи	126

ГЛАВА 4. ПЛАЗМА В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ.

ПРОХОЖДЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН СКВОЗЬ ПЛАЗМУ	128
4.1. Система Максвелла (в системе Си). Физические законы, описываемые отдельными уравнениями. Некоторые основные следствия из системы уравнений Максвелла.....	128
4.1.1. Система уравнений Максвелла в системе Си для векторов $\vec{H}, \vec{D}, \vec{E}, \vec{B}$. Связь между $\vec{H}$ и $\vec{D}$ (электрическая индукция), поляризация $\vec{P}$. Связь $\vec{H}$ и $\vec{B}$ (магнитная индукция). Постоянные ϵ_0 и μ_0 . Система уравнений Максвелла для векторов $\vec{B}$ и $\vec{E}$	128
4.1.2. Обобщенный закон Био-Савара (первое уравнение Максвелла). Ток смещения. Полный ток зарядов в веществе как сумма тока свободных зарядов (ток проводимости) и тока связанных зарядов (поляризационный ток). Интегральная форма первого уравнения.....	130
4.1.3. Закон электромагнитной индукции Фарадея (второе уравнение Максвелла)	134
4.1.4. Закон Гаусса (третье уравнение системы Максвелла). Пространственно неоднородная поляризация и объемная плотность связанных зарядов. Закон Кулона, кулоновский потенциал, классический радиус электрона	135
4.1.5. Закон сохранения заряда. Закон Ома. Релаксация Максвелла. Закон Джоуля-Ленца. Обратнотормозное поглощение.....	137
4.1.6. Вектор Умова-Пойнтинга, его сущность и содержание. Объемная плотность электрической и магнитной энергий. Плотность мощности (интенсивность) электромагнитного излучения. Закон Джоуля-Ленца. Обратнотормозное поглощение	145
4.1.7. Волновое уравнение Максвелла и его решение. Характеристики вещества в электромагнитном поле. Поляризация, диэлектрическая проницаемость, диэлектрическая восприимчивость, коэффициент преломления. Комплексный показатель преломления. Коэффициенты ослабления электрического поля и плотности мощности (интенсивности), коэффициент отражения. Решающая роль свободных электронов.....	150
4.2. Плазма в переменном электрическом поле. Коэффициент поглощения, его определение с помощью мнимой части коэффициента преломления. Уравнение движения для электрона.	

Диэлектрическая проницаемость и коэффициент преломления	158
4.3. Низкие частоты. Низкочастотный скин-эффект.....	161
4.4. Высокие частоты. Область подкритических частот. Высоко- частотный скин-эффект. Область надкритических частот. Коэффициент и сечение ослабления интенсивности света, проходящего сквозь плазму. Фазовая и групповая скорости света.....	164
4.5. Механизм поглощения света на свободных электронах из-за столкновений (обратнотормозное поглощение - ОТП)	168
4.6. Зависимость энергии свободного сталкивающегося электрона от времени воздействия светового поля с учетом потерь энергии при столкновениях. Предельная энергия, которую может набрать сталкивающийся электрон в плазме под дей- ствием электромагнитного поля. Возможная зависимость се- чения ОТП и коэффициента ОТП от интенсивности света.....	172
4.7. Взаимодействие света со свободными электронами при от- сутствии столкновений. Диполь Герца.....	177
4.8. Диполь Герца и вибратор Герца (антенна).....	181
Задачи	185
ГЛАВА 5. ДАВЛЕНИЕ ПЛАЗМЫ И СВЕТОВОЕ ДАВЛЕНИЕ.....	189
5.1. Давление как скорость передачи нормальных компонент им- пульсов частиц (на единицу площади поверхности) и как объемная плотность энергии.	189
5.2. Давление газа (идеальный газ, плазма, фотонный газ).....	194
5.2.1. Идеальный газ, или классическая идеальная плазма	194
5.2.2. Фотонный газ	196
5.2.3. Оценка давления	198
5.3. Давление однонаправленного пучка одинаковых частиц на плоскую поверхность при нормальном или наклонном паде- нии	198
5.3.1. Нормальное падение пучка.....	199
5.3.2. Наклонное падение пучка	203
5.4. Давление плазмы при испарении вещества лазерным излуче- нием	205
5.4.1. Образование плазмы при равновесном стационарном нагреве металлической мишени лазерным излучением. Пороговая интенсивность плазмообразования.....	205
5.4.2. Соотношение между давлением лазерного излучения и давлением плазмы, созданной этим излучением вблизи поверхности мишени	207

5.4.3. Давление и температура плазмы с концентрацией плазмы меньше критической. Закон Стефана-Больцмана и пределы его применимости. "Интенсивность отсечки"	210
5.4.4. Давление и температура плазмы при ее концентрации близкой к критической (гидродинамический режим).	213
Приложение 5.1	215
Приложение 5.2	217
Задачи	218
ГЛАВА 6. ТУННЕЛЬНАЯ ИОНИЗАЦИЯ	220
6.1. Основные характеристики водородоподобного боровского атома, получаемые в результате квантования по Бору (потенциальная, кинетическая, полная энергии, радиусы боровских орбит, частоты переходов).....	220
6.2. Проникновение электрона в "стену" потенциальной ямы	222
6.3. Атом во внешнем электрическом поле. Туннельный эффект	225
6.3.1. Потенциальный барьер, его ширина и высота.....	225
6.3.2. Коэффициент прозрачности потенциального барьера	229
6.4. Область частот, электрических полей и интенсивностей, в которой возможен туннельный эффект. Параметр Келдыша. Туннельный эффект и многофотонная ионизация. Условие квазистатичности. Граничное (минимальное) поле как условие существования туннельного эффекта для заданной частоты - граница раздела между туннельным эффектом и многофотонной ионизацией, зависимость граничного поля от частоты.....	235
6.5. Вероятность туннельной ионизации. Туннельная ионизация вещества при лазерном воздействии. Надбарьерная ионизация	238
Задачи	241
ГЛАВА 7. ЛАВИННАЯ ИОНИЗАЦИЯ	243
7.1. Механизм лавинной ионизации. Развитие электронной лавины	243
7.2. Пороговая интенсивность ионизации ее зависимость от давления газа, длительности лазерного импульса и длины волны	244
Приложение 7.1. Колебательная энергия W_e^q [Дж] свободного электрона, движущегося без столкновений в лазерном поле как функция интенсивности света I_L [Вт/м ²] и длины волны λ [м]	250
Задачи	253
ГЛАВА 8. ЛАЗЕРНЫЙ ТЕРМОЯДЕРНЫЙ СИНТЕЗ	254
8.1. История	254

8.2. Термоядерные реакции.....	254
8.3. Туннельный эффект в реакциях термоядерного синтеза. Сечение реакции.....	257
8.4. Условие самоподдерживания термоядерной реакции (критерий Лоусона)	266
8.5. Радиус $D - T$ мишени. Пороговая энергия лазера	269
Библиографический список	270

Грасюк Аркадий Захарьевич

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ИЗЛУЧЕНИЯ С ВЕЩЕСТВОМ

Учебное пособие

Редактор Н.А. Волынкина

Компьютерная верстка, макет В.И.Никонов

ЛР №020316 от 04.12.96. Подписано в печать 17.06.02. Формат 60×84/16.
Бумага офсетная. Печать оперативная. Усл.-печ. л. 17,38; уч.-изд. л. 18,68.

Гарнитура "Times New Roman"

Тираж 100. экз. Заказ №846.

Издательство "Самарский университет",
443011, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.
УОП СамГУ, ПЛД №67-43 от 19.02.98.