МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Е. А. ДЕНИСКИНА, А. Г. ГЛУШКОВА

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Рекомендовано редакционно-издательским советом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С. П. Королева» в качестве практикума для обучающихся по основным образовательным программам высшего образования по специальности 24.05.01 Проектирование, производство и эксплуатация ракет и ракетно-космических комплексов и направлению подготовки 24.03.01 Ракетные комплексы и космонавтика

САМАРА
Издательство Самарского университета
2024

УДК 512.2(075)
ББК В161.113я7
Д332

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук, доц. А. В. Дорошин,
канд. физ.-мат. наук, доц. С. Н. Богданов

Денискина, Екатерина Александровна
Д332 **Дифференциальное исчисление функций одной переменной:** практикум / *Е. А. Денискина, А. Г. Глушкова.* – Самара: Издательство Самарского университета, 2024. — 96 с.

ISBN 978-5-7883-2146-2

Практикум содержит основные теоретические сведения, разбор типовых задач, а также задачи для практических занятий и самостоятельной работы обучающихся по одному из разделов высшей математики «Дифференциальное исчисление функций одной переменной». Все задачи снабжены ответами.

Выполнен на кафедре высшей математики и предназначен для обучающихся первого курса направлений подготовки 24.03.01 Ракетные комплексы и космонавтика, 24.03.04 Авиастроение и специальности 24.05.01 Проектирование, производство и эксплуатация ракет и ракетно-космических комплексов.

УДК 512.2(075)
ББК В161.113я7

ISBN 978-5-7883-2146-2

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Дифференциальное исчисление — раздел математического анализа, центральными понятиями которого являются понятия производной и дифференциала.

Основы дифференциального исчисления были заложены во второй половине 17 века Исааком Ньютоном и Готфридом Лейбницем. Они сформулировали основные положения дифференциального исчисления и чётко указали на взаимно обратный характер операций дифференцирования и интегрирования. Интересно, что Ньютон и Лейбниц создавали аппарат дифференциального исчисления параллельно и независимо друг от друга примерно в одно и то же время.

Следующим этапом в развитии дифференциального исчисления были работы Леонарда Эйлера и Жозефа Луи Лагранжа (18 век). Эйлер впервые стал излагать его как аналитическую дисциплину, независимо от геометрии и механики. Лагранж пытался строить теорию дифференциального исчисления алгебраически, пользуясь разложением функций в степенные ряды; ему, в частности, принадлежит введение термина «производная» и обозначение y'.

В начале 19 века была решена задача обоснования дифференциального исчисления на основе теории пределов. Это было выполнено, главным образом, благодаря работам Огюстена Луи Коши, Бернарда Больцано и Карла Фридриха Гаусса.

Создание дифференциального исчисления открыло новую эпоху в развитии математики, положив начало теории рядов, теории дифференциальных уравнений, дифференциальной геометрии и вариационного исчисления. Неизмеримо расширилась область приложений математики в естественных науках и технике. Сегодня дифференциальное исчисление позволяет решать множество задач, связанных с оптимизацией, анализом графиков функций, построением математических моделей. Оно имеет важное значение как для теоретических исследований, так и для практических расчетов и прогнозирования результатов различных процессов в физике, химии, биологии, медицине, экономике и т. д.

В предлагаемой работе рассматриваются основы теории дифференциального исчисления для функций одной переменной. Пособие содержит краткие теоретические сведения по всем ключевым разделам дифференциального исчисления. В каждом разделе приведены подробные решения основных типовых задач указанного курса и перечень задач для самостоятельного решения различного уровня сложности, снабжёнными ответами. Кроме того, пособие содержит условия вариантов контрольных работ по дифференциальному исчислению функции одной переменной.

1 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ. ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Теоретический материал

Понятие производной — одно из основных понятий математики. Сформулируем определение производной.

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, определённую на некотором множестве D. Выберем произвольное значение аргумента x из множества D, придадим аргументу x приращение $\Delta x \neq 0$ такое, что новое значение аргумента $x + \Delta x \in D$. Приращение аргумента вызовет приращение функции Δy:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Составим отношение:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Определение:

Производной функции $y = f(x)$ называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при условии стремления приращения аргумента к нулю, если этот предел существует.

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Способы обозначения производной:

$$y', \quad y'_x, \quad \frac{dy}{dx}, \quad \dot{y}.$$

Определение:

Функция $y = f(x)$, имеющая производную в точке x_0, называется дифференцируемой в этой точке, а операция нахождения производной функции называется дифференцированием.

Производная функции $y = f(x)$ в точке x_0, в отличие от производной функции, является числом и может быть обозначена одним из следующих способов:

$$y'(x_0)\,, \quad y'_x\Big|_{x=x_0}, \quad \frac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0}, \quad \dot{y}(x_0)\,.$$

Определение:

Функция $y = f(x)$, имеющая производную в каждой точке интервала $(a; b)$, называется дифференцируемой в этом интервале.

Для формулировки геометрического смысла производной введём понятие касательной к графику функции.

Возьмём на непрерывной кривой L две точки M и M_1 и соединим их прямой (рис. 1). Прямую MM_1, проходящую через эти точки, называют секущей. Пусть точка M_1, двигаясь вдоль кривой L, неограниченно приближается к точке M. Тогда секущая, поворачиваясь вокруг точки M, стремится к некоторому предельному положению MT.

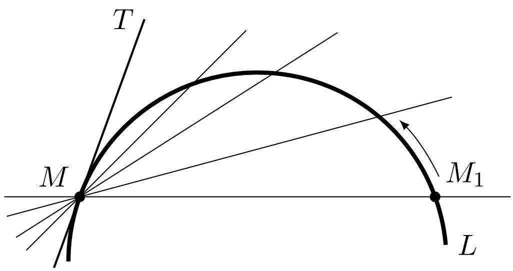


Рисунок 1 – Касательная к графику функции

Определение:

Касательной к непрерывной кривой L, проведённой в точке M этой кривой, называется предельное положение MT секущей MM_1, когда точка M_1 на кривой неограниченно приближается по кривой к точке M.

Геометрически производная в точке x_0 представляет собой угловой коэффициент касательной k, проведённой к графику непрерывной функции $y = f(x)$ в точке $M\left(x_0; f\left(x_0\right)\right)$,

$$k = \operatorname{tg}\alpha = y'\left(x_0\right),$$

где α — угол между касательной, проведённой к графику непрерывной функции $y = f(x)$ в точке $M(x_0; f(x_0))$, и положительным направлением оси Ox (рис. 2).

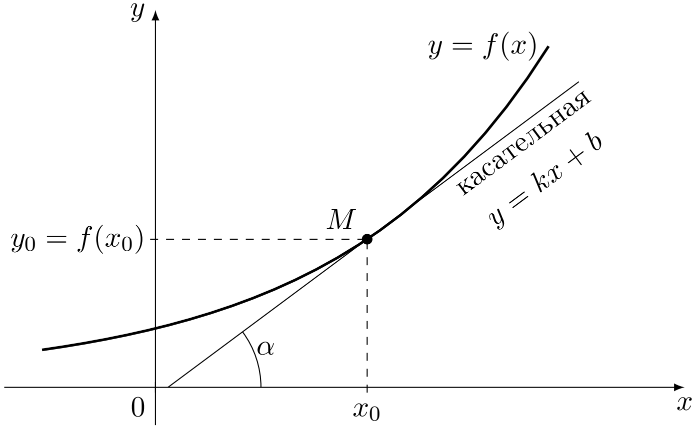


Рисунок 2 – Геометрический смысл производной

Механический смысл производной заключается в том, что скорость прямолинейного движения материальной точки в момент времени t есть производная от пути $s(t)$ по времени t.

$$v(t) = s'(t).$$

Теорема (о связи между непрерывностью и дифференцируемостью):

Если функция дифференцируема в некоторой точке x_0, то в этой точке функция непрерывна. Обратное верно не всегда.

Основные правила дифференцирования функций сформулируем в виде теорем.

Теорема 1 (производная постоянной):

Производная любой постоянной (константы) равна нулю.

$$\boxed{C' = 0.}$$

Теорема 2 (производная суммы):

Производная алгебраической суммы конечного числа дифференцируемых функций равна алгебраической сумме производных этих функций.

$$\boxed{(u + v)' = u' + v'.}$$

Теорема 3 (производная произведения):

Производная произведения двух дифференцируемых функций равна сумме произведения производной первого сомножителя на второй без изменения и произведения первого сомножителя без изменения на производную второго.

$$\boxed{(u \cdot v)' = u'v + u\,v'.}$$

Теорема 4 (производная частного):

Производная частного двух дифференцируемых функций, при условии, что знаменатель отличен от нуля, равна отношению разности произведения производной числителя на знаменатель без изменения и произведения числителя без изменения на производную знаменателя к квадрату знаменателя.

$$\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - u\,v'}{v^2}, \quad v \neq 0.}$$

Следствие 1:

Константу можно выносить за знак производной.

$$(C \cdot u)' = C \cdot u'.$$

Следствие 2:

Формула дифференцирования произведения применима и для случая числа сомножителей больше двух. Например, формула дифференцирования произведения трёх функций имеет вид:

$$(u \cdot v \cdot w)' = u'v\,w + u\,v'w + u\,v\,w'.$$

Следствие 3:

Формулу дифференцирования частного рационально использовать, только если и числитель, и знаменатель — функции независимой переменной.

Теорема:

Производная сложной функции равна произведению производной заданной функции по промежуточному аргументу на производную промежуточного аргумента по независимой переменной.

$$y = f\big(u\,(x)\big) \Longrightarrow y' = f'_u \cdot u'_x.$$

Используя определение производной и основные правила дифференцирования можно вывести формулы для нахождения производных основных элементарных функций. Однако, при решении задач чаще встречаются сложные функции, поэтому приведём только таблицу производных сложных функций.

Таблица производных сложных функций

1. $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$
2. $\left(u^2\right)' = 2 \cdot u \cdot u'$
3. $(\sqrt{u})' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$
4. $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{1}{u^2} \cdot u'$
5. $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$
6. $(e^u)' = e^u \cdot u'$
7. $(\log_a u)' = \dfrac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$
8. $(\ln u)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$
9. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
10. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
11. $(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$
12. $(\operatorname{ctg} u)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$
13. $(\arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
14. $(\arccos u)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
15. $(\operatorname{arctg} u)' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$
16. $(\operatorname{arcctg} u)' = -\dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$
17. $(\operatorname{sh} u)' = \operatorname{ch} u \cdot u'$
18. $(\operatorname{ch} u)' = \operatorname{sh} u \cdot u'$
19. $(\operatorname{th} u)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 u} \cdot u'$
20. $(\operatorname{cth} u)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 u} \cdot u'$

Примеры решения задач

1.1 По определению найти производную функции $y=\sqrt{2x+3}$.

Область определения функции $y=\sqrt{2x+3}$ — это промежуток $\left[-\dfrac{3}{2};+\infty\right)$.

Возьмём произвольное $x\in\left(-\dfrac{3}{2};+\infty\right)$.

Придадим выбранному значению аргумента приращение $\Delta x\neq 0$ такое, что новая точка $x+\Delta x\in\left(-\dfrac{3}{2};+\infty\right)$.

Приращение аргумента вызовет приращение функции $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=\sqrt{2\,(x+\Delta x)+3}-\sqrt{2x+3}$.

Составим отношение приращения функции к приращению аргумента

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sqrt{2\,(x+\Delta x)+3}-\sqrt{2x+3}}{\Delta x}.$$

Вычислим предел данного отношения при $\Delta x\to 0$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{2\,(x+\Delta x)+3}-\sqrt{2x+3}}{\Delta x}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\left[\begin{array}{l}\text{домножим и разделим дробь на выражение,}\\ \text{сопряжённое к числителю}\end{array}\right]=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(\sqrt{2(x+\Delta x)+3}-\sqrt{2x+3}\right)\left(\sqrt{2(x+\Delta x)+3}+\sqrt{2x+3}\right)}{\Delta x\left(\sqrt{2\,(x+\Delta x)+3}+\sqrt{2x+3}\right)}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cancel{2x}+2\Delta x+\cancel{3}-\cancel{2x}-\cancel{3}}{\Delta x\left(\sqrt{2\,(x+\Delta x)+3}+\sqrt{2x+3}\right)}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}\left(\sqrt{2\,(x+\Delta x)+3}+\sqrt{2x+3}\right)}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2}{\sqrt{2\,(x+\Delta x)+3}+\sqrt{2x+3}}=\frac{1}{\sqrt{2x+3}}.$$

Таким образом, полученное значение предела и есть производная функции $y = \sqrt{2x+3}$ для любого $x \in \left(-\dfrac{3}{2}; +\infty\right)$.

$$y' = \frac{1}{\sqrt{2x+3}}.$$

1.2 По определению найти производную функции $y = \sin 3x$.

Область определения функции $y = \sin 3x$ — это интервал $(-\infty; +\infty)$, т. е. $D\left(x\right) = \mathbb{R}$.

Возьмём произвольное $x \in \mathbb{R}$. Придадим выбранному значению аргумента приращение $\Delta x \neq 0$. Новая точка $x + \Delta x \in D\left(x\right)$.

Приращение аргумента вызовет приращение функции $\Delta y = \sin\bigl(3(x+\Delta x)\bigr) - \sin 3x$.

Составим отношение приращения функции к приращению аргумента

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin\bigl(3(x+\Delta x)\bigr) - \sin 3x}{\Delta x}.$$

Вычислим предел данного отношения при $\Delta x \to 0$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\bigl(3(x+\Delta x)\bigr) - \sin 3x}{\Delta x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \left[\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right] =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin\dfrac{3\Delta x}{2}\cos\dfrac{6x+3\Delta x}{2}}{\Delta x} = \left[\begin{array}{l} \sin\dfrac{3\Delta x}{2} \sim \dfrac{3\Delta x}{2} \\ \Delta x \to 0 \end{array}\right] =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{2}\dfrac{3\cancel{\Delta x}}{\cancel{2}}\cos\dfrac{6x+3\Delta x}{2}}{\cancel{\Delta x}} = \lim_{\Delta x \to 0} 3\cos\frac{6x+3\Delta x}{2} = 3\cos 3x.$$

Таким образом, полученное значение предела и есть производная функции $y = \sin 3x$ для любого $x \in \mathbb{R}$.

$$y' = 3\cos 3x.$$

1.3 По определению найти производную функции $y = \log_5\left(x^2+1\right)$.

Область определения функции $y = \log_5\left(x^2+1\right)$ — это интервал $(-\infty;+\infty)$, т. е. $D\left(x\right) = \mathbb{R}$.

Возьмём произвольное $x \in D(x)$. Придадим выбранному значению аргумента приращение $\Delta x \neq 0$. Новая точка $x+\Delta x \in D(x)$.

Приращение аргумента вызовет приращение функции

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = \log_5\left((x+\Delta x)^2+1\right) - \log_5\left(x^2+1\right) =$$
$$= \log_5\frac{(x+\Delta x)^2+1}{x^2+1} = \log_5\frac{x^2+1+2\,x\,\Delta x+\Delta x^2}{x^2+1} =$$
$$= \log_5\left(1+\frac{2\,x\,\Delta x+\Delta x^2}{x^2+1}\right).$$

Составим отношение приращения функции к приращению аргумента

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log_5\left(1+\dfrac{2\,x\,\Delta x+\Delta x^2}{x^2+1}\right)}{\Delta x}.$$

Вычислим предел данного отношения при $\Delta x \to 0$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_5\left(1+\dfrac{2\,x\,\Delta x+\Delta x^2}{x^2+1}\right)}{\Delta x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$
$$= \left[\begin{array}{l}\log_5\left(1+\dfrac{2\,x\,\Delta x+\Delta x^2}{x^2+1}\right) \sim \dfrac{2\,x\,\Delta x+\Delta x^2}{\ln 5\,(x^2+1)}\\ \Delta x \to 0\end{array}\right] =$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\,x\,\Delta x+\Delta x^2}{\Delta x\ln 5\,(x^2+1)} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\,x+\Delta x}{\ln 5\,(x^2+1)} = \frac{2\,x}{\ln 5\,(x^2+1)}.$$

Таким образом, полученное значение предела и есть производная функции $y = \log_5\left(x^2+1\right)$ для любого $x \in \mathbb{R}$.

$$y' = \frac{2\,x}{(x^2+1)\ln 5}.$$

1.4 По определению найти производную функции $y = 2^{3x-1}$ в точке $x = 1$.

Область определения функции $y = 2^{3x-1}$ — это интервал $(-\infty; +\infty)$, т. е. $D(x) = \mathbb{R}$.

$x = 1 \in D(x)$, придадим $x = 1$ приращение $\Delta x \neq 0$. Новая точка $x + \Delta x = 1 + \Delta x \in D(x)$.

Приращение аргумента вызовет приращение функции
$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = f(1+\Delta x) - f(1) = 2^{3\cdot(1+\Delta x)-1} - 2^{3\cdot 1-1} = 2^{3\Delta x+2} - 2^2 = 2^{3\Delta x}\cdot 2^2 - 2^2 = 4\left(2^{3\Delta x} - 1\right).$

Составим отношение приращения функции к приращению аргумента

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4\left(2^{3\Delta x}-1\right)}{\Delta x}.$$

Вычислим предел данного отношения при $\Delta x \to 0$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{4\left(2^{3\Delta x}-1\right)}{\Delta x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \left[\begin{array}{l} 2^{3\,\Delta x} - 1 \sim 3\,\Delta x\cdot\ln 2 \\ \Delta x \to 0 \end{array}\right] = $$
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{4\cdot 3\cancel{\Delta x}\cdot\ln 2}{\cancel{\Delta x}} = 12\ln 2.$$

Таким образом, полученное значение предела и есть производная функции $y = 2^{3x-1}$ в точке $x = 1$.

$$y'\big|_{x=1} = 12\ln 2.$$

1.5 Найти производную функции $y = (2x+3)^{10}$.

Функция $y = (2x+3)^{10}$ — сложная функция. Начнём дифференцировать как степенную функцию, далее умножим на производную основания.

$$y' = \left((2x+3)^{10}\right)' = \left[(u^n)' = n\cdot u^{n-1}\cdot u'\right] =$$
$$= 10\cdot(2x+3)^9\cdot(2x+3)' = 10\cdot(2x+3)^9\cdot 2 = 20\cdot(2x+3)^9.$$

$$y' = 20\,(2x+3)^9.$$

1.6 Найти производную функции $y = 2\cos^3(3x+5)$.

Функция $y = 2\cos^3(3x+5)$ — сложная функция. Постоянный множитель 2 вынесем за знак производной. Начнём дифференцировать как степенную функцию, далее умножим на производную основания.

$$y' = \left(2\cos^3(3x+5)\right)' = 2\cdot\left(\cos^3(3x+5)\right)' = \left[(u^n)' = n\cdot u^{n-1}\cdot u'\right] =$$
$$= 2\cdot 3\cdot\cos^2(3x+5)\cdot(\cos(3x+5))' = \left[(\cos u)' = -\sin u\cdot u'\right] =$$
$$= 6\cdot\cos^2(3x+5)\cdot(-\sin(3x+5))\cdot(3x+5)' =$$
$$= -6\cdot\cos^2(3x+5)\cdot\sin(3x+5)\cdot 3 = -18\cdot\cos^2(3x+5)\cdot\sin(3x+5).$$

$$y' = -18\cos^2(3x+5)\,\sin(3x+5).$$

1.7 Найти $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}$ для функции $y = \left(4x^2+1\right)\cdot\operatorname{arctg} 2x$.

Применим формулу дифференцирования произведения двух функций, приняв $u = 4x^2+1$, $v = \operatorname{arctg} 2x$.

$$\frac{dy}{dx} = y' = \left(\left(4x^2+1\right)\cdot\operatorname{arctg} 2x\right)' = \left[(u\cdot v)' = u'v + u\,v'\right] =$$
$$= \left(4x^2+1\right)'\cdot\operatorname{arctg} 2x + \left(4x^2+1\right)\cdot(\operatorname{arctg} 2x)' =$$
$$= \left[\begin{array}{l} (u^n)' = n\cdot u^{n-1}\cdot u' \\ (\operatorname{arctg} u)' = \dfrac{1}{1+u^2}\cdot u' \end{array}\right] =$$
$$= 8x\cdot\operatorname{arctg} 2x + \left(4x^2+1\right)\cdot\frac{1}{1+(2x)^2}\cdot(2x)' =$$
$$= 8x\cdot\operatorname{arctg} 2x + \cancel{\left(4x^2+1\right)}\cdot\frac{1}{\cancel{1+4x^2}}\cdot 2 = 8x\cdot\operatorname{arctg} 2x + 2.$$

Вычислим значение найденной производной при $x = 0$:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = \left.y'\right|_{x=0} = 2.$$

1.8 Найти производную функции $y = \dfrac{\arccos 3x}{\sqrt{1-9x^2}}$.

Применим формулу дифференцирования частного двух функций, приняв за $u = \arccos 3x$, $v = \sqrt{1-9x^2}$.

$$y' = \left(\frac{\arccos 3x}{\sqrt{1-9x^2}}\right)' = \left[\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - u\,v'}{v^2}\right] =$$

$$= \frac{(\arccos 3x)' \cdot \sqrt{1-9x^2} - \arccos 3x \cdot \left(\sqrt{1-9x^2}\right)'}{\left(\sqrt{1-9x^2}\right)^2} =$$

$$= \left[\begin{array}{l} (\arccos u)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u' \\ (\sqrt{u})' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u' \end{array}\right] =$$

$$= \frac{\dfrac{-1}{\cancel{\sqrt{1-9x^2}}} \cdot (3x)' \cdot \cancel{\sqrt{1-9x^2}} - \arccos 3x \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{1-9x^2}} \cdot \left(1-9x^2\right)'}{1-9x^2} =$$

$$= \frac{-3 - \arccos 3x \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{1-9x^2}} \cdot (-18x)}{1-9x^2} = \frac{-3 + \dfrac{9x \cdot \arccos 3x}{\sqrt{1-9x^2}}}{1-9x^2} =$$

$$= \frac{-3 \cdot \sqrt{1-9x^2} + 9x \cdot \arccos 3x}{(1-9x^2)^{3/2}}.$$

$$y' = \frac{9x \arccos 3x - 3\sqrt{1-9x^2}}{\sqrt{\left(1-9x^2\right)^3}}.$$

1.9 Найти $\dfrac{dy}{dx}$ функции $y = \dfrac{\ln 2}{\operatorname{tg}^3 2x}$.

Числитель функции не зависит от переменной x, т. е. является константой, поэтому дифференцировать функцию как частное нерационально. Постоянный множитель $\ln 2$ вынесем за знак производной, далее будем дифференцировать как степенную функцию.

$$\frac{dy}{dx} = y' = \left(\frac{\ln 2}{\operatorname{tg}^3 2x}\right)' = \ln 2 \cdot \left(\operatorname{tg}^{-3} 2x\right)' = \left[(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'\right] =$$

$$= \ln 2 \cdot (-3) \cdot \operatorname{tg}^{-4} 2x \cdot (\operatorname{tg} 2x)' = \left[(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'\right] =$$

$$= -3 \ln 2 \cdot \operatorname{tg}^{-4} 2x \cdot \frac{1}{\cos^2 2x} \cdot (2x)' = \frac{-6 \ln 2}{\operatorname{tg}^4 2x \cdot \cos^2 2x} = \frac{-6 \ln 2 \cos^2 2x}{\sin^4 2x}.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-6 \ln 2 \cos^2 2x}{\sin^4 2x}.$$

Задачи

Найти производные следующих функции, используя определение:

1.10 $y = 2x^2 - 3x + 4$, $y'(1) = ?$ Ответ: $y'(x) = 4x - 3$, $y'(1) = 1$.

1.11 $y = x^3 + 2x$. Ответ: $y' = 3x^2 + 2$.

1.12 $y = \sin \frac{x}{2}$. Ответ: $y' = \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2}$.

1.13 $y = \cos 4x$. Ответ: $y' = -4 \sin 4x$.

1.14 $y = \sqrt{x^2 + 3}$, $y'(1) = ?$ Ответ: $y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}}$, $y'(1) = \frac{1}{2}$.

1.15 $y = \sqrt[3]{2x - 1}$. Ответ: $y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{(2x-1)^2}}$.

1.16 $y = \log_2(3 - 2x)$. Ответ: $y' = \frac{-2}{\ln 2 \cdot (3 - 2x)}$.

1.17 $y = 2^{3x^2+1}$. Ответ: $y' = 2^{3x^2+1} \cdot \ln 2 \cdot 6x$.

1.18 $y=\dfrac{1}{2x+3}$. Ответ: $y'=\dfrac{-2}{(2x+3)^2}$.

1.19 $y=\dfrac{4}{x^2+5}$. Ответ: $y'=\dfrac{-8x}{(x^2+5)^2}$.

1.20 $y=e^{2-x^3}$, $y'\big|_{x=1}=?$ Ответ: $y'=-3x^2e^{2-x^3}$, $y'\big|_{x=1}=-3e$.

Найти указанные производные.

1.21 $y=5\sqrt[3]{x}+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{3}{\sqrt[5]{x^2}}+\dfrac{x^4}{3}-2,\quad \dfrac{dy}{dx}=?$

Ответ: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{5}{3\sqrt[3]{x^2}}-\dfrac{2}{x^3}+\dfrac{6}{5x\sqrt[5]{x^2}}+\dfrac{4}{3}x^3$.

1.22 $y=\operatorname{tg}2x$, $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=\frac{\pi}{3}}=?$ Ответ: $y'=\dfrac{2}{\cos^2 2x}$, $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=\frac{\pi}{3}}=8$.

1.23 $y=\dfrac{2}{\cos^3 5x}$, $y'=?$ Ответ: $y'=30\dfrac{\sin 5x}{\cos^4 5x}$.

1.24 $y=\ln^2(\ln x)$, $y'=?$ Ответ: $y'=\dfrac{2\ln(\ln x)}{x\ln x}$.

1.25 $y=\sqrt{1-3x^2}$, $y'=?$ Ответ: $y'=\dfrac{-3x}{\sqrt{1-3x^2}}$.

1.26 $y=e^{\operatorname{ctg}\frac{2}{x}}$, $\dfrac{dy}{dx}=?$ Ответ: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2e^{\operatorname{ctg}\frac{2}{x}}}{x^2\sin^2\dfrac{2}{x}}$.

1.27 $y=2^{e^{x^2}}$, $y'=?$ Ответ: $y'=2^{e^{x^2}}\cdot\ln 2\cdot e^{x^2}\cdot 2x$.

1.28 $y=\operatorname{arctg}\sqrt{9x^4-1}$, $\dfrac{dy}{dx}=?$ Ответ: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2}{x\sqrt{9x^4-1}}$.

1.29 $y=\ln\dfrac{x^5}{x^5+2}$, $y'=?$ Ответ: $y'=\dfrac{10}{x(x^5+2)}$.

1.30 $y=\dfrac{\sin x^2}{x}$, $y'=?$ Ответ: $y'=\dfrac{2x^2\cos x^2-\sin x^2}{x^2}$.

1.31 $y=\cos^2\dfrac{x}{3}\cdot\operatorname{tg}\dfrac{x}{2},\quad y'=?$

Ответ: $y'=\dfrac{\cos^2\dfrac{x}{3}}{2\cos^2\dfrac{x}{2}}-\dfrac{1}{3}\sin\dfrac{2x}{3}\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}.$

1.32 $y=\sqrt[4]{3x-1}\cdot\sin 2x,\quad y'=?$

Ответ: $y'=\dfrac{3\sin 2x}{4\sqrt[4]{(3x-1)^3}}+2\cos 2x\sqrt[4]{3x-1}.$

1.33 $y=\dfrac{\left(1-x^3\right)\sqrt{7x+1}}{5},\quad y'=?$

Ответ: $y'=-\dfrac{3}{5}x^2\sqrt{7x+1}+\dfrac{7(1-x^3)}{10\sqrt{7x+1}}.$

1.34 $y=\dfrac{\arcsin(2x-1)}{\sqrt{x}+3},\quad \dfrac{dy}{dx}=?$

Ответ: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+3\right)-\sqrt{x-x^2}\arcsin(2x-1)}{2\sqrt{x^2-x^3}\left(\sqrt{x}+3\right)^2}.$

1.35 $y=\dfrac{4}{(2x+5)^6},\quad y'_x\big|_{x=-2}=?$

Ответ: $y'=\dfrac{-48}{(2x+5)^7},\quad y'_x\big|_{x=-2}=-48.$

1.36 $y=\left(3+5\sin^2\dfrac{x}{2}\right)^4,\quad y'=?$

Ответ: $y'=10\sin x\left(3+5\sin^2\dfrac{x}{2}\right)^3.$

1.37 $y=\sqrt{\log_2(4-x^2)},\quad \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=\sqrt{2}}=?$

Ответ: $y'=\dfrac{x}{\ln 2\cdot(x^2-4)\sqrt{\log_2(4-x^2)}},\quad \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2\ln 2}.$

1.38 $y=\dfrac{4}{\operatorname{ctg}^3(x-\sqrt{x})},\quad y'_x=?$

Ответ: $y'_x=\dfrac{6\left(2\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}\cdot\operatorname{ctg}^4(x-\sqrt{x})\cdot\sin^2(x-\sqrt{x})}.$

1.39 $y = 2^{x^2+3} \cdot \cos^3 \dfrac{x}{2}, \qquad \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0} =?$

Ответ: $y' = 2^{x^2+2} \cos^2 \dfrac{x}{2} \left(4 \ln 2 \cdot x \cos \dfrac{x}{2} - 3 \sin \dfrac{x}{2}\right), \qquad \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0} = 0.$

1.40 $y = \dfrac{\operatorname{arctg}^5 \sqrt{4-x^2}}{\ln 2}, \quad y' =?$

Ответ: $y' = \dfrac{5\, x \operatorname{arctg}^4 \sqrt{4-x^2}}{\ln 2 \cdot (x^2-5) \sqrt{4-x^2}}.$

1.41 $y = \dfrac{\operatorname{sh}(\ln 3x)}{x^3}, \quad y' =?$

Ответ: $y' = \dfrac{\operatorname{ch}(\ln 3x) - 3\ \operatorname{sh}(\ln 3x)}{x^4}.$

1.42 $y = \dfrac{\sin 2}{\left(7 - 4\, x^3\right)^5}, \qquad \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=1} =?$

Ответ: $y' = \dfrac{60 \sin 2 \cdot x^2}{\left(7 - 4\, x^3\right)^6}, \qquad \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=1} = \dfrac{20}{243} \cdot \sin 2.$

1.43 $y = \sqrt[3]{\operatorname{ctg}^2 \dfrac{3}{x}}, \quad y' =? \qquad$ Ответ: $y' = \dfrac{2}{x^2 \cdot \sin^2 \dfrac{3}{x} \cdot \sqrt[3]{\operatorname{ctg} \dfrac{3}{x}}}.$

1.44 $y = 2^{1-3x} \cdot \cos^3 \dfrac{4}{\sqrt{x}}, \quad y'_x =?$

Ответ: $y'_x = 3 \cdot 2^{1-3x} \cdot \cos^2 \dfrac{4}{\sqrt{x}} \cdot \left(\dfrac{2}{\sqrt{x^3}} \cdot \sin \dfrac{4}{\sqrt{x}} - \ln 2 \cdot \cos \dfrac{4}{\sqrt{x}}\right).$

1.45 $y = \dfrac{\lg 5 \cdot \arcsin\left(6 - 5x^2\right)}{7}, \quad \dfrac{dy}{dx} =?$

Ответ: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-10 \lg 5}{7} \cdot \dfrac{x}{\sqrt{1 - \left(6 - 5x^2\right)^2}}.$

1.46 $y = \dfrac{4}{x\left(x^2+3\right)}, \quad \left.y'_x\right|_{x=1} =?$

Ответ: $y'_x = -\dfrac{12\left(x^2+1\right)}{x^2\left(x^2+3\right)^2}, \quad \left.y'_x\right|_{x=1} = -\dfrac{3}{2}.$

1.47 $y = \dfrac{\operatorname{ch} 5x}{\ln(3 - x^4)}, \quad y' =?$

Ответ: $y' = \dfrac{5 \operatorname{sh} 5x}{\ln(3 - x^4)} + \dfrac{4\, x^3 \cdot \operatorname{ch} 5x}{(3 - x^4) \cdot \ln^2(3 - x^4)}.$

1.48 $y = 3^{\cos 3x} \cdot \sqrt{1 - 2x}, \quad y'(0) =?$

Ответ: $y' = -\dfrac{3^{\cos 3x}}{\sqrt{1 - 2x}} \big(1 + 3 \ln 3 \cdot (1 - 2x) \sin 3x\big), \quad y'(0) = -3.$

1.49 $y = \dfrac{\arccos \dfrac{2}{3}}{\arcsin \sqrt{3x^2 - 2}}, \quad y' =?$

Ответ: $y' = -\dfrac{\sqrt{3} \arccos \dfrac{2}{3} \cdot x}{\sqrt{1 - x^2} \cdot \sqrt{3x^2 - 2} \cdot \arcsin^2 \sqrt{3x^2 - 2}}.$

1.50 $y = \dfrac{5 \operatorname{arctg} 3x}{\log_2(1 + 9x^2)}, \quad \dfrac{dy}{dx} =?$

Ответ: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{15 \ln 2}{(1 + 9x^2) \cdot \ln^2(1 + 9x^2)} \cdot \big(\ln\big(1 + 9x^2\big) - 6x \cdot \operatorname{arctg} 3x\big).$

1.51 $y = \dfrac{\operatorname{ch}^3 2x \cdot \operatorname{th} 2x}{\sqrt{5}}, \quad y' =?$

Ответ: $y' = \dfrac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{ch} 2x \left(3 \operatorname{sh}^2 2x + 1\right).$

1.52 $y = x \cdot 3^{5 - 4x^2} \cdot \ln 3x, \quad y'_x =?$

Ответ: $y'_x = 3^{5 - 4x^2} \cdot \big(\ln 3x - 8 \ln 3 \cdot x^2 \cdot \ln 3x + 1\big).$

1.53 $y = \dfrac{2}{\sqrt{\arccos \dfrac{2}{x + 1}}}, \quad \dfrac{dy}{dx} =?$

Ответ: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-2}{(x + 1) \cdot \sqrt{x^2 + 2x - 3} \cdot \sqrt{\arccos^3 \dfrac{2}{x + 1}}}.$

1.54 $y = \left(1-5x^2\right)^3 \cdot \left(2x^3+5\right)^2, \quad y'_x = ?$
Ответ: $y'_x = 6x \cdot \left(1-5x^2\right)^2 \cdot \left(2x^3+5\right) \cdot \left(2x - 20\,x^3 - 25\right)$.

1.55 $y = \operatorname{ctg}^2\left(\arcsin\dfrac{2+x}{\sqrt{x}}\right), \quad y' = ?$ Ответ: $y' = \dfrac{2-x}{(x+2)^3}$.

1.56 $y = \sin\left(2^{x^2}\right) \cdot \cos(\operatorname{sh} 2x), \quad \dfrac{dy}{dx} = ?$ Ответ: $\dfrac{dy}{dx} =$
$= 2\ln 2 \cdot x \cdot 2^{x^2} \cdot \cos\left(2^{x^2}\right) \cdot \cos(\operatorname{sh} 2x) - 2\sin\left(2^{x^2}\right) \cdot \sin(\operatorname{sh} 2x) \cdot \operatorname{ch} 2x$.

1.57 $y = \dfrac{x \cdot \sqrt{1-x^2}}{2x-1}, \quad y'(0) = ?$
Ответ: $y' = \dfrac{2\,x^2 - 2\,x^3 - 1}{\sqrt{1-x^2}\,(2x-1)^2}, \quad y'(0) = -1$.

1.58 $y = \left(\sin\dfrac{x}{2} - \cos\dfrac{x}{2}\right)^2, \quad y' = ?$ Ответ: $y' = -\cos x$.

1.59 $y = x \cdot \ln\left(\operatorname{tg}\dfrac{2x+1}{4}\right), \quad \dfrac{dy}{dx} = ?$
Ответ: $\dfrac{dy}{dx} = \ln\left(\operatorname{tg}\dfrac{2x+1}{4}\right) + \dfrac{x}{\sin\dfrac{2x+1}{2}}$.

1.60 $y = 7^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}, \quad y'(0) = ?$
Ответ: $y' = -\dfrac{7^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}\ln 7}{\sqrt{1-x^2}(1+x)}, \quad y'(0) = -7\ln 7$.

1.61 $y = \dfrac{\cos^2\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}, \quad y'_x = ?$
Ответ: $y'_x = -\dfrac{x \cdot \sqrt{x^2+1} \cdot \sin\left(2\sqrt{x^2+1}\right) + x \cdot \cos^2\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}}$.

1.62 $y = \sin 2x \cdot e^{\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 2x}, \quad \dfrac{dy}{dx} = ?$

Ответ: $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2\cos^3 2x}{\sin^2 2x} \cdot e^{\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 2x}.$

1.63 $y = 2^{-x^2} \cdot \sqrt{\sin \dfrac{x}{2}}, \quad y' = ?$

Ответ: $y' = \dfrac{2^{-x^2}}{\sqrt{\sin \dfrac{x}{2}}} \cdot \left(\dfrac{1}{4}\cos\dfrac{x}{2} - 2\ln 2 \cdot x \cdot \sin\dfrac{x}{2}\right).$

1.64 $y = \sqrt{\sin x} \cdot e^{\sqrt{\sin x}}, \quad \dfrac{dy}{dx} = ?$

Ответ: $\dfrac{dy}{dx} = e^{\sqrt{\sin x}} \cdot \dfrac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}} \left(1 + \sqrt{\sin x}\right).$

1.65 $y = -\operatorname{ctg}^2 \dfrac{x}{2} - 2\ln\left(\sin\dfrac{x}{2}\right), \quad y' = ?$ Ответ: $y' = \operatorname{ctg}^3 \dfrac{x}{2}.$

1.66 $y = \arcsin 2^x + \arcsin\sqrt{1 - 4^x}, \quad y' = ?$ Ответ: $y' = 0.$

1.67 $y = 1 - e^{\sin^2 3x} \cdot \cos^2 3x, \quad \dfrac{dy}{dx} = ?$

Ответ: $\dfrac{dy}{dx} = 3\sin 6x \cdot \sin^2 3x \cdot e^{\sin^2 3x}.$

1.68 $y = \left(\dfrac{\sin x}{1 + \cos x}\right)^2, \quad y' = ?$ Ответ: $y' = \dfrac{2\sin x}{(1 + \cos x)^2}.$

1.69 $y = \arcsin\dfrac{\sin x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}, \quad \dfrac{dy}{dx} = ?$ Ответ: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\cos x}{1 + \sin^2 x}.$

1.70 $y = \operatorname{arctg}(x + 1) + \dfrac{x + 1}{x^2 + 2x + 2}, \quad y'\big|_{x=-1} = ?$

Ответ: $y' = \dfrac{2}{(x^2 + 2x + 2)^2}, \quad y'\big|_{x=-1} = 2.$

1.71 $y = \operatorname{arcctg}^2 \dfrac{3x - x^2}{1 - 3x^2}, \quad y' = ?$

Ответ: $y' = -2 \operatorname{arcctg} \dfrac{3x - x^2}{1 - 3x^2} \cdot \dfrac{9x^2 - 2x + 3}{(1 - 3x^2)^2 + (3x - x^2)^2}.$

1.72 $y = \dfrac{1}{2} \operatorname{tg}^2(\sin x) + \ln(\cos(\sin x)), \quad y' = ?$

Ответ: $y' = \cos x \cdot \operatorname{tg}^3(\sin x).$

1.73 $y = \left(\dfrac{x - 1}{x + 1}\right)^3, \quad y'_x = ?$ Ответ: $y'_x = 6 \dfrac{(x - 1)^2}{(x + 1)^4}.$

1.74 $y = \arccos\left(2x\sqrt{1 - x^2}\right), \quad \dfrac{dy}{dx} = ?$ Ответ: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-2}{\sqrt{1 - x^2}}.$

1.75 $y = \operatorname{arcctg}\left(\dfrac{1}{\operatorname{ch} 2x}\right) \cdot \operatorname{sh} 2x, \quad \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0} = ?$

Ответ: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2 \operatorname{sh}^2 2x}{1 + \operatorname{ch}^2 2x} + 2 \operatorname{ch} 2x \cdot \operatorname{arcctg} \dfrac{1}{\operatorname{ch} 2x}, \quad \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0} = \dfrac{\pi}{2}.$

1.76 $y = \dfrac{\ln 3}{\sqrt[3]{3 - 2\arcsin\sqrt{1 - 2x}}}, \quad y' = ?$

Ответ: $y' = -\dfrac{2\ln 3}{3} \cdot \dfrac{1}{\sqrt[3]{\left(3 - 2\arcsin\sqrt{1 - 2x}\right)^4}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2x(1 - 2x)}}.$

1.77 $y = e^x \cdot \sqrt{1 - e^{2x}} - \arccos e^x, \quad y'_x = ?$

Ответ: $y'_x = 2e^{2x} \cdot \sqrt{1 - e^{2x}}.$

1.78 $y = \ln\left(\dfrac{1}{x} + \sqrt{\dfrac{1}{x^2} + 1}\right), \quad y' = ?$ Ответ: $y' = -\dfrac{1}{x\sqrt{x^2 + 1}}.$

1.79 $y = x^2 \cdot \operatorname{arctg} \dfrac{2x^4}{1 - x^8}, \quad y' = ?$

Ответ: $y' = \dfrac{8x^5}{1 + x^8} + 2x \cdot \operatorname{arctg} \dfrac{2x^4}{1 - x^8}.$

1.80 $y=\dfrac{\operatorname{sh}^3 2x}{1+\operatorname{ch}^2 2x},\quad \dfrac{dy}{dx}=?$
Ответ: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2\operatorname{sh}^2 2x\cdot\operatorname{ch}2x\cdot\left(5+\operatorname{ch}^2 2x\right)}{\left(1+\operatorname{ch}^2 2x\right)^2}.$

1.81 $y=\dfrac{\operatorname{cth}^4\left(\operatorname{sh}\dfrac{2}{x}\right)}{\operatorname{ch}^2 4},\quad y'=?$ Ответ: $y'=\dfrac{8\operatorname{cth}^3\left(\operatorname{sh}\dfrac{2}{x}\right)\cdot\operatorname{ch}\dfrac{2}{x}}{\operatorname{ch}^2 4\cdot x^2\cdot\operatorname{sh}^2\left(\operatorname{sh}\dfrac{2}{x}\right)}.$

1.82 $y=\dfrac{\log_3(\operatorname{arctg}(1-x))}{2-2x+x^2},\quad y'=?$
Ответ: $y'=\dfrac{2\ln 3\,(1-x)\cdot\operatorname{arctg}(1-x)\cdot\log_3(\operatorname{arctg}(1-x))-1}{\ln 3\cdot(2-2x+x^2)^2\cdot\operatorname{arctg}(1-x)}.$

1.83 $y=\dfrac{7}{x\cdot\arcsin\sqrt{1-x^2}},\quad \dfrac{dy}{dx}=?$
Ответ: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-7}{x^2\cdot\arcsin^2\sqrt{1-x^2}}\cdot\left(\arcsin\sqrt{1-x^2}-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right).$

1.84 Найти точки, в которых касательная к графику функции $y=2x^2-3x+1$ параллельна оси абсцисс, образует угол в 45°.
Ответ: $\left(\dfrac{3}{4};-\dfrac{1}{8}\right)$, $(1;0)$.

1.85 Определить точки, в которых угловой коэффициент касательной к кубической параболе $y=x^3$ равен 3.
Ответ: $(1;1)$, $(-1;-1)$.

1.86 Может ли касательная к кубической параболе $y=x^3$ образовывать с положительным направлением оси абсцисс тупой угол.
Ответ: нет.

1.87 Определить угол пересечения параболы $y = \sqrt{x}$ и гиперболы $y = \dfrac{1}{x}$.
Ответ: $\operatorname{arctg} 3$.

1.88 Закон движения точки определяется равенством $s = \dfrac{1}{3t+2}$. Найти скорость точки в момент времени $t = 1$.
Ответ: $-\dfrac{3}{25}$.

1.89 Закон движения материальной точки определяется равенством $s = \dfrac{1}{3}\,t^3 - 2\,t^2 - 11t + 275$. В какой момент времени её скорость будет равна $10\,$м/с?
Ответ: $7\,$с.

1.90 По оси Ox движутся две материальные точки, законы движения которых $s_1 = 3\,t^2 - 8$ и $s_2 = 2\,t^2 + 5t + 6$. С какой скоростью удаляются эти точки друг от друга в момент встречи?
Ответ: $77\,$м/с.

1.91 По оси Ox движутся две материальные точки, законы движения которых $s_1 = \dfrac{4}{3}\,t^3 - 7t + 16$ и $s_2 = 2\,t^2 + 5t - 8$. В какой момент времени их скорости окажутся равными?
Ответ: $6\,$с.

2 ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ НЕЯВНО ЗАДАННЫХ ФУНКЦИЙ

Теоретический материал

Уравнение $F(x;y) = 0$, не разрешенное относительно y, определяет неявным образом функцию $y = f(x)$.

Например, $y + 2x - 1 = 0$ — неявно заданная функция, а $y = 1 - 2x$ — явно заданная функция.

Правило дифференцирования неявно заданной функции: для нахождения производной неявно заданной функции уравнение $F(x;y) = 0$ дифференцируют слева направо, используя все известные формулы и правила дифференцирования, с учётом того, что производная от x, как от независимой переменной, равна 1, а производная от y, как от функции независимой переменной, равна y'. Далее полученное уравнение разрешают относительно y'.

Производная неявной функции выражается через независимую переменную x и функцию y.

Примеры решения задач

2.1 Найти производную функции $y(x)$, заданной уравнением $y^2 + 2xy - x^2 + 5 = 0$.

Функция $y(x)$ задана неявно. Продифференцируем по переменной x данное равенство

$$2y \cdot y' + 2\left(1 \cdot y + x \cdot y'\right) - 2x = 0,$$
$$y\,y' + y + x\,y' - x = 0.$$

Разрешим полученное уравнение относительно y':

$$y'\left(y + x\right) = x - y,$$
$$y' = \frac{x - y}{x + y}.$$

2.2 Найти производную функции $y(x)$, заданной уравнением $y \cdot e^x = x^2 - y^2$ в точке с абсциссой 0 ($y > 0$).

Функция $y(x)$ задана неявно. Продифференцируем данное равенство по переменной x:

$$y' \cdot e^x + y \cdot e^x = 2x - 2y \cdot y'.$$

Разрешим полученное уравнение относительно y':

$$y'\left(e^x + 2y\right) = 2x - y \cdot e^x,$$
$$y' = \frac{2x - y \cdot e^x}{e^x + 2y}.$$

Производная y' выражена через независимую переменную x и функцию y, поэтому для вычисления значения производной в точке необходимо знать обе координаты точки. По условию $x = 0$, определим вторую координату точки

$$y \cdot e^0 = 0 - y^2,$$
$$y + y^2 = 0,$$
$$y\left(y + 1\right) = 0,$$
$$y_1 = 0, \qquad y_2 = -1.$$

Значение y_1 не удовлетворяет условию $y > 0$, таким образом, точка имеет координаты $(0; -1)$.

Вычислим значение производной в этой точке.

$$y'\Big|_{\substack{x=0\\ y=-1}} = \frac{0 + 1 \cdot e^0}{e^0 - 2} = \frac{1}{-1} = -1.$$

Задачи

2.3 $5x^2 + 3xy - 2y^2 + 2 = 0, \quad y' = ?$ Ответ: $y' = -\dfrac{10x + 3y}{3x - 4y}$.

2.4 $xy - \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y} = 2, \quad y'_x = ?$ Ответ: $y'_x = \dfrac{y\left(1 - x^2 - y^2\right)}{x\left(1 + x^2 + y^2\right)}$.

2.5 $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 3, \quad \dfrac{dy}{dx} = ?$ Ответ: $\dfrac{dy}{dx} = -\sqrt[3]{\dfrac{y^2}{x^2}}$.

2.6 $e^{x^2y^2} - x^4 + y^4 = 1, \quad y'_x = ?$ Ответ: $y'_x = \dfrac{2x^3 - xy^2 e^{x^2y^2}}{x^2y\, e^{x^2y^2} + 2y^3}.$

2.7 $2^x + 2^y = 2^{x+y} + 1, \quad \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=1} = ?$
Ответ: $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=1} = \left.\dfrac{2^x\,(1-2^y)}{2^y\,(2^x-1)}\right|_{\substack{x=1\\ y=0}} = 0.$

2.8 $xy^2 - y^3 = 4x - 10, \quad \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{y=1} = ?$
Ответ: $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{y=1} = \left.\dfrac{4-y^2}{2xy-3y^2}\right|_{\substack{x=3\\ y=1}} = 1.$

2.9 $\ln y + \dfrac{x}{y} = x + y, \quad y'_x = ?$ Ответ: $y'_x = \dfrac{y-y^2}{y^2+x-y}.$

2.10 $(x+y)^3 = 27\,(x-y)\,, \quad \dfrac{dy}{dx} = ?$ Ответ: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{9-(x+y)^2}{9+(x+y)^2}.$

2.11 $x^3y^2 + 5x = 4y + 2, \quad y'_x\big|_{x=1} = ? \quad (y>2)$
Ответ: $y'_x\big|_{x=1} = \left.\dfrac{5+3x^2y^2}{4-2x^3y}\right|_{\substack{x=1\\ y=3}} = -16.$

2.12 $x^2 - y^3 + xy = 7, \quad y'_x\big|_{y=2} = ? \quad (x>0)$
Ответ: $y'_x\big|_{y=2} = \left.\dfrac{2x+y}{3y^2-x}\right|_{\substack{x=3\\ y=2}} = \dfrac{8}{9}.$

2.13 $x^3 + \ln y - x^2e^y = 0, \quad y' = ?$ Ответ: $y' = \dfrac{y\left(2x\,e^y - 3\,x^2\right)}{1 - x^2y\,e^y}.$

2.14 $x\sin y + y\sin x = 4, \quad y' = ?$ Ответ: $y' = -\dfrac{y\cos x + \sin y}{x\cos y + \sin x}.$

2.15 $y\cos\dfrac{y}{x} = e^{x\,y}, \quad y' = ?$
Ответ: $y' = \dfrac{y\left(x^2e^{x\,y} - y\sin\dfrac{y}{x}\right)}{x\left(x\cos\dfrac{y}{x} - y\sin\dfrac{y}{x} - x^2e^{x\,y}\right)}.$

3 ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ПОКАЗАТЕЛЬНО-СТЕПЕННЫХ ФУНКЦИЙ. ЛОГАРИФМИЧЕСКОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

Теоретический материал

Определение:

Функция $y = [u(x)]^{v(x)}$ называется показательно-степенной, если и основание $u(x)$, и показатель степени $v(x)$ являются некоторыми функциями, зависящими от переменной x.

Правило дифференцирования:

Производная показательно-степенной функции равна сумме производных от данной функции как от показательной и как от степенной при условии, что функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы.

Правило можно записать следующей формулой:

$$\boxed{(u^v)' = u^v \cdot \ln u \cdot v' + v \cdot u^{v-1} \cdot u'.}$$

Формула доказывается с помощью логарифмического дифференцирования. Суть метода заключается в логарифмировании данной функции и, далее, дифференцировании полученной функции как неявной.

$$y = u^v \quad \Rightarrow \quad \ln y = v \cdot \ln u.$$

Продифференцируем полученное равенство как неявно заданную функцию:

$$\frac{1}{y} \cdot y' = v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{1}{u} \cdot u',$$

$$y' = u^v \left(v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{1}{u} \cdot u' \right),$$

$$y' = u^v \cdot v' \cdot \ln u + u^{v-1} \cdot v \cdot u'.$$

Замечание:

Логарифмическое дифференцирование применяют не только для нахождения производных показательно-степенных функций, а также в случае наличия в функции большого числа сомножителей и/или делителей в виде степенных функций.

Примеры решения задач

3.1 Найти производную функции $y = (\cos x)^{x^2+1}$.

1 способ. Данная функция является показательно-степенной. Будем искать производную как сумму производных данной функции как от показательной и как от степенной.

$$y' = (\cos x)^{x^2+1} \cdot \ln(\cos x) \cdot 2x + \left(x^2+1\right) \cdot (\cos x)^{x^2} \cdot (-\sin x);$$

$$y' = (\cos x)^{x^2} \cdot \left(2x \cdot \cos x \cdot \ln(\cos x) - \left(x^2+1\right) \cdot \sin x\right).$$

2 способ. Воспользуемся логарифмическим дифференцированием. Прологарифмируем данную функцию по основанию числа e

$$\ln y = \ln(\cos x)^{x^2+1}.$$

По свойству логарифма:

$$\ln y = \left(x^2+1\right) \cdot \ln(\cos x).$$

Полученное равенство неявным образом задает функцию $y(x)$. Продифференцируем его по переменной x.

$$\frac{1}{y} \cdot y' = 2x \ln(\cos x) + \left(x^2+1\right) \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x);$$

$$\frac{y'}{y} = 2x \ln(\cos x) - \left(x^2+1\right) \operatorname{tg} x.$$

Выразим y':

$$y' = y\left(2x \ln(\cos x) - \left(x^2+1\right) \operatorname{tg} x\right).$$

Учитывая, что по условию $y = (\cos x)^{x^2+1}$, получим

$$y' = (\cos x)^{x^2+1}\left(2x \ln(\cos x) - \left(x^2+1\right) \operatorname{tg} x\right).$$

Отметим, что производные, найденные первым и вторым способами, совпадают.

3.2 Найти производную функции $y = \dfrac{\sqrt[3]{x+1} \cdot 2^{x^2} \cdot \left(1 - x^3\right)}{x \cdot \sqrt[5]{\sin^3 2x}}$.

Производную данной функции можно найти, используя правила дифференцирования произведения и частного, однако, в силу громоздкости выражения в правой части равенства, велики шансы допущения ошибки.

Воспользуемся логарифмическим дифференцированием.

$$\ln y = \ln \frac{\sqrt[3]{x+1} \cdot 2^{x^2} \cdot \left(1 - x^3\right)}{x \cdot \sqrt[5]{\sin^3 2x}}.$$

По свойствам логарифма:

$$\ln y = \frac{1}{3} \ln (x+1) + x^2 \ln 2 + \ln \left(1 - x^3\right) - \ln x - \frac{3}{5} \ln (\sin 2x).$$

Продифференцируем полученное равенство по переменной x как неявно заданную функцию

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{1}{3\,(x+1)} + 2x \ln 2 - \frac{3x^2}{1 - x^3} - \frac{1}{x} - \frac{3}{5} \cdot \frac{\cos 2x \cdot 2}{\sin 2x};$$

$$y' = y \left(\frac{1}{3\,(x+1)} + 2x \ln 2 - \frac{3x^2}{1 - x^3} - \frac{1}{x} - \frac{6}{5} \operatorname{ctg} 2x \right).$$

Подставим вместо y выражение $\dfrac{\sqrt[3]{x+1} \cdot 2^{x^2} \cdot \left(1 - x^3\right)}{x \cdot \sqrt[5]{\sin^3 2x}}$:

$$y' = \frac{\sqrt[3]{x+1}\,\left(1 - x^3\right) 2^{x^2}}{x\,\sqrt[5]{\sin^3 2x}} \left(\frac{1}{3(x+1)} + 2x \ln 2 - \frac{3\,x^2}{1-x^3} - \frac{1}{x} - \frac{6}{5} \operatorname{ctg} 2x \right).$$

Задачи

Найти указанные производные.

3.3 $y = (2x-1)^{2^{x^2}}$, $\quad \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=1} = ?$ $\qquad$ Ответ: $\dfrac{dy}{dx} =$

$= (2x-1)^{2^{x^2}} \cdot 2^{x^2+1} \cdot \left(\dfrac{1}{2x-1} + \ln 2 \cdot x \cdot \ln(2x-1) \right)$, $\;\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=1} = 4.$

3.4 $y=(\sin 2x)^{(x-1)^2}, \quad \dfrac{dy}{dx}=?$

Ответ: $\dfrac{dy}{dx}=2(x-1)\cdot(\sin 2x)^{(x-1)^2}\cdot\Big((x-1)\operatorname{ctg}2x+\ln(\sin 2x)\Big).$

3.5 $y=(\operatorname{sh}2x)^{\operatorname{ch}^2 2x}, \quad y'_x=?$

Ответ: $y'_x=2\,(\operatorname{sh}2x)^{\operatorname{ch}^2 2x}\cdot\left(\dfrac{\operatorname{ch}^3 2x}{\operatorname{sh}2x}+\operatorname{sh}4x\cdot\ln(\operatorname{sh}2x)\right).$

3.6 $y=\left(\log_2\dfrac{x}{4}\right)^{\frac{2}{x}}, \quad y'\big|_{x=8}=?$ Ответ: $y'\big|_{x=8}=$

$$=\frac{2\left(\log_2\dfrac{x}{4}\right)^{\frac{2}{x}-1}}{\ln 2\cdot x^2}\cdot\left(1-\ln 2\cdot\log_2\frac{x}{4}\cdot\ln\left(\log_2\frac{x}{4}\right)\right)\Bigg|_{x=8}=\frac{1}{32\ln 2}.$$

3.7 $y=(\cos 3x)^{\frac{1}{\ln 2x}}, \quad y'_x=?$

Ответ: $y'_x=-\dfrac{(\cos 3x)^{\frac{1}{\ln 2x}-1}}{\ln 2x}\cdot\left(3\sin 3x+\dfrac{\cos 3x\cdot\ln(\cos 3x)}{x\ln 2x}\right).$

3.8 $y=(\operatorname{arctg}x)^{\sqrt{x^2+1}}, \quad \dfrac{dy}{dx}=?$

Ответ: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{(\operatorname{arctg}x)^{\sqrt{x^2+1}-1}}{\sqrt{x^2+1}}\cdot(1+x\cdot\operatorname{arctg}x\cdot\ln(\operatorname{arctg}x)).$

3.9 $y=\left(x^2+1\right)^{\arcsin 3x}, \quad y'=?$

Ответ: $y'=\left(x^2+1\right)^{\arcsin 3x}\cdot\left(\dfrac{2x\cdot\arcsin 3x}{x^2+1}+\dfrac{3\ln\left(x^2+1\right)}{\sqrt{1-9x^2}}\right).$

3.10 $y=\dfrac{2^x\cdot(x+1)^3}{\sqrt{3-2x}\cdot\sin^2 2x\cdot\ln 2x}, \quad y'=?$

Ответ: $y'=\dfrac{2^x\cdot(x+1)^3}{\sqrt{3-2x}\cdot\sin^2 2x\cdot\ln 2x}\cdot\left(\ln 2+\dfrac{3}{x+1}+\dfrac{1}{3-2x}-\right.$

$\left.-4\operatorname{ctg}2x-\dfrac{1}{x\ln 2x}\right).$

3.11 $y = \dfrac{\sqrt[3]{x^3+2} \cdot \operatorname{arctg}^2 2x \cdot x^4}{\operatorname{ch}^2 2x \cdot (1-x)^3}$, $\quad \dfrac{dy}{dx} = ?$

Ответ: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sqrt[3]{x^3+2} \cdot \operatorname{arctg}^2 2x \cdot x^4}{\operatorname{ch}^2 2x \cdot (1-x)^3} \cdot \left(\dfrac{x^2}{x^3+2} + \dfrac{4}{x} + \dfrac{3}{1-x} + \right.$
$\left. + \dfrac{4}{(1+4x^2)\operatorname{arctg} 2x} - 4 \operatorname{th} 2x \right).$

3.12 $y = \left(\operatorname{cth} \dfrac{1}{x} \right)^{2\cos^3 \frac{1}{x}}$, $\quad \dfrac{dy}{dx} = ?$ $\qquad$ Ответ: $\dfrac{dy}{dx} =$
$= \dfrac{2}{x^2} \cdot \cos^2 \dfrac{1}{x} \cdot \left(\operatorname{cth} \dfrac{1}{x} \right)^{2\cos^3 \frac{1}{x} - 1} \cdot \left(\dfrac{\cos \dfrac{1}{x}}{\operatorname{sh}^2 \dfrac{1}{x}} + 3 \operatorname{cth} \dfrac{1}{x} \cdot \ln \left(\operatorname{cth} \dfrac{1}{x} \right) \cdot \sin \dfrac{1}{x} \right).$

3.13 $y = (\log_2 3x)^{2^{1-x^2}}$, $\quad y' = ?$ $\qquad$ Ответ: $y' =$
$= \dfrac{2^{1-x^2} \cdot (\log_2 3x)^{2^{1-x^2}-1}}{\ln 2 \cdot x} \cdot \Big(1 - 2\ln^2 2 \cdot x^2 \cdot \log_3 3x \cdot \ln(\log_2 3x) \Big).$

3.14 $y = \dfrac{\cos^2 4x \cdot \operatorname{ch}^3 2x \cdot \sqrt{\sin 3x}}{x \cdot \sqrt[4]{\operatorname{tg}^3 5x}}$, $\quad y'_x = ?$

Ответ: $y'_x = \dfrac{\cos^2 4x \cdot \operatorname{ch}^3 2x \cdot \sqrt{\sin 3x}}{x \cdot \sqrt[4]{\operatorname{tg}^3 5x}} \cdot (6 \operatorname{th} 2x - 8 \operatorname{tg} 4x +$
$\left. + \dfrac{3}{2} \operatorname{ctg} 3x - \dfrac{1}{x} - \dfrac{15}{2 \sin 10x} \right).$

3.15 $y = (x \cdot \cos 2x)^{\sqrt{1-x}}$, $\quad y' = ?$
Ответ: $y' = \sqrt{1-x} \cdot \big(x \cdot \cos 2x \big)^{\sqrt{1-x}} \cdot \left(\dfrac{1}{x} - 2 \operatorname{tg} 2x - \dfrac{\ln(x \cdot \cos 2x)}{2(1-x)} \right).$

3.16 $y = \left(\arccos \sqrt{1-x} \right)^{1+\sqrt{x}}$, $\quad y'_x = ?$ $\qquad$ Ответ: $y'_x =$
$= \dfrac{\left(\arccos \sqrt{1-x} \right)^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} \cdot \left(\arccos \sqrt{1-x} \cdot \ln \left(\arccos \sqrt{1-x} \right) + \dfrac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} \right).$

4 ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ ЗАДАННЫХ ФУНКЦИЙ

Теоретический материал

Пусть зависимость между аргументом x и функцией y задана параметрически в виде двух уравнений

$$\begin{cases} x = \varphi(t); \\ y = f(t), \end{cases}$$

где t — независимая (вспомогательная) переменная, называемая параметром. Такой способ задания функции $y = f(x)$ называется параметрическим.

Приведём примеры часто встречающихся кривых, одним из способов задания которых является параметрическое задание.

1. Окружность — множество точек плоскости, равноудалённых от одной заданной точки, называемой центром (рис. 3).

   Окружность может быть задана в декартовой системе координат как привычным нам каноническим уравнением $x^2 + y^2 = R^2$, так и параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = R\cos t; \\ y = R\sin t. \end{cases}$

2. Эллипс — множество точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек плоскости F_1 и F_2, называемых фокусами, есть величина постоянная, бóльшая, чем расстояние между фокусами (рис. 4).

   Эллипс может быть задан в декартовой системе координат как каноническим уравнением $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, так и параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = a\cos t; \\ y = b\sin t. \end{cases}$

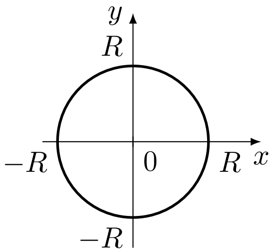


Рисунок 3 – Окружность

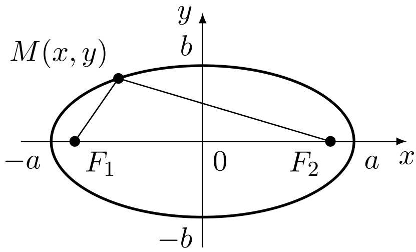


Рисунок 4 – Эллипс

3. Циклоида — линия, описываемая точкой окружности радиуса a, катящейся без скольжения по прямой (рис. 5).

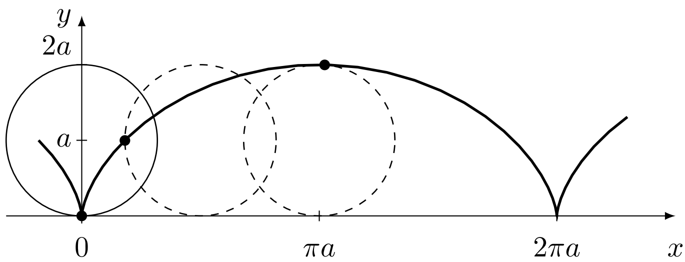


Рисунок 5 – Циклоида

   Циклоида может быть задана в декартовой системе координат уравнением $x = a \arccos \dfrac{a-y}{a} - \sqrt{2ay - y^2}$ или параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = a\,(t - \sin t); \\ y = a\,(1 - \cos t). \end{cases}$

4. Астроида — линия, описываемая точкой окружности радиуса $\dfrac{a}{4}$, катящейся без скольжения по окружности радиуса a (рис. 6).

   Астроида может быть задана в декартовой системе координат уравнением $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ или параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = a\cos^3 t; \\ y = a\,\sin^3 t. \end{cases}$

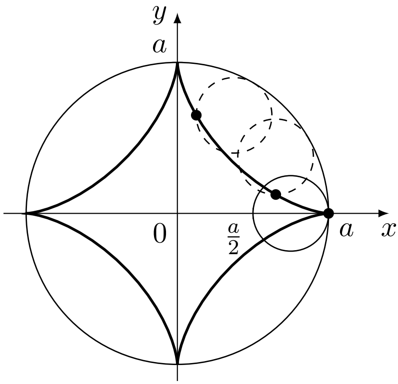


Рисунок 6 – Астроида

Производная параметрически заданной функции $\begin{cases} x=\varphi(t); \\ y=f(t), \end{cases}$ определяется по формуле:

$$\boxed{y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.}$$

Приведённая формула позволяет находить производную от функции y по независимой переменной x от параметрически заданной функции, не находя непосредственной зависимости y от x.

Примеры решения задач

4.1 Найти производную y'_x от функции $\begin{cases} x = \ln\left(1+4t^2\right); \\ y = \operatorname{arctg}^2 2t. \end{cases}$

Функция задана параметрически, её производная определяется формулой:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

$y'_t = 2\operatorname{arctg} 2t \cdot \dfrac{2}{1+4t^2} = \dfrac{4\operatorname{arctg} 2t}{1+4t^2};$

$x'_t = \dfrac{8t}{1+4t^2};$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{4\operatorname{arctg} 2t}{1+4t^2} \cdot \frac{1+4t^2}{8t} = \frac{\operatorname{arctg} 2t}{2t}.$$

Учитывая, что y'_x тоже задана параметрически, то ответ запишем в виде системы

$$\begin{cases} y'_x = \dfrac{\operatorname{arctg} 2t}{2t}; \\ x = \ln\left(1+4t^2\right). \end{cases}$$

4.2 Найти значение производной y'_x от функции $\begin{cases} x = \sqrt{4t+5}; \\ y = t^3+1 \end{cases}$ в точке с ординатой 2.

Функция задана параметрически, её производная определяется формулой:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

$$y'_t = 3\,t^2;$$

$$x'_t = \frac{4}{2\sqrt{4\,t+5}} = \frac{2}{\sqrt{4\,t+5}};$$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = 3\,t^2 \cdot \frac{\sqrt{4\,t+5}}{2} = \frac{3}{2}\,t^2\sqrt{4\,t+5}.$$

Найдём значение параметра t, соответствующее $y = 2$. Для этого подставим во второе уравнение системы $y = t^3 + 1$ вместо y значение 2.

$$2 = t^3 + 1;$$

$$t^3 = 1;$$

$$t_1 = 1, \quad t_{2,\,3} \notin \mathbb{R}.$$

Вычислим значение производной при $t = 1$:

$$y'_x\big|_{y=2} = y'_x\big|_{t=1} = \frac{3}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{4+5} = \frac{9}{2}.$$

Задачи

Найти указанные производные.

4.3 $\begin{cases} x = 2\cos^3 t; \\ y = 3\sin^2 t. \end{cases}$ $y'_x = ?$ Ответ: $\begin{cases} y'_x = \dfrac{-1}{\cos t} \\ x = 2\cos^3 t \end{cases}.$

4.4 $\begin{cases} x = \sqrt{1-t^2}; \\ y = \dfrac{1}{t^2}. \end{cases}$ $y'_x = ?$ Ответ: $\begin{cases} y'_x = \dfrac{2\sqrt{1-t^2}}{t^4} \\ x = \sqrt{1-t^2} \end{cases}.$

4.5 $\begin{cases} x = \dfrac{\ln t}{t}; \\ y = t^2 \ln t. \end{cases}$ $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0} = ?$

Ответ: $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(2\ln t + 1)\, t^3}{1 - \ln t}; \\ x = \dfrac{\ln t}{t}, \end{cases}$ $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0} = \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=1} = 1.$

4.6 $\begin{cases} x = \sqrt{1+t}; \\ y = \operatorname{arctg}^2 \sqrt{t}. \end{cases}$ $\dfrac{dy}{dx} = ?$ Ответ: $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2\operatorname{arctg}\sqrt{t}}{\sqrt{t\,(1+t)}} \\ x = \sqrt{1+t} \end{cases}.$

4.7 $\begin{cases} x = e^{\cos 2t}; \\ y = \ln(\sin t)\,. \end{cases}$ $y'_x = ?$ Ответ: $\begin{cases} y'_x = \dfrac{-1}{4\, e^{\cos 2t} \cdot \sin^2 t} \\ x = e^{\cos 2t} \end{cases}.$

4.8 $\begin{cases} x = t + \ln(\cos t)\,; \\ y = t - \ln(\sin t)\,. \end{cases}$ $y'_x = ?$ Ответ: $\begin{cases} y'_x = -\operatorname{ctg} t \\ x = t + \ln(\cos t) \end{cases}.$

4.9 $\begin{cases} x = \dfrac{t}{1+t^3}; \\ y = \dfrac{t^2}{1+t^3}. \end{cases}$ $\dfrac{dy}{dx} = ?$ Ответ: $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{t\left(2-t^3\right)}{1-2\,t^3} \\ x = \dfrac{t}{1+t^3} \end{cases}.$

4.10 $\begin{cases} x = \dfrac{2\,t}{1+t^2}; \\ y = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}. \end{cases} \quad \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{y=-\frac{3}{5}} = ? \quad (t > 0)$

Ответ: $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2\,t}{t^2-1}; \\ x = \dfrac{2\,t}{1+t^2}, \end{cases} \quad \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{y=-\frac{3}{5}} = \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=2} = \dfrac{4}{3}.$

4.11 $\begin{cases} x = \dfrac{1}{t+1}; \\ y = \left(\dfrac{t}{t+1}\right)^2. \end{cases} \quad y'_x = ?$ Ответ: $\begin{cases} y'_x = \dfrac{-2\,t}{t+1} \\ x = \dfrac{1}{t+1} \end{cases}.$

4.12 $\begin{cases} x = \sqrt{t^2+1}; \\ y = \dfrac{t-1}{\sqrt{t^2+1}}. \end{cases} \quad y'_x\big|_{t=1} = ?$

Ответ: $\begin{cases} y'_x = \dfrac{t+1}{t\,(t^2+1)}; \\ x = \sqrt{t^2+1}, \end{cases} \quad y'_x\big|_{t=1} = 1.$

4.13 $\begin{cases} x = \arccos \dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}}; \\ y = \arcsin \dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}}. \end{cases} \quad \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=\frac{\pi}{4}} = ? \quad (t > 0)$

Ответ: $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 1; \\ x = \arccos \dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}}, \end{cases} \quad \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=\frac{\pi}{4}} = \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=1} = 1.$

5 ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

Теоретический материал

Определение 1:

Дифференциалом функции $y = f(x)$, имеющей производную, называется произведение её производной на приращение независимой переменной

$$\boxed{dy = y'\Delta x.}$$

Очевидно, что существование дифференциала равносильно существованию производной.

Дифференциал является линейной функцией от Δx.

Дифференциал независимой переменной совпадает с приращением независимой переменной $dx = \Delta x$.

$$\boxed{dy = y'dx.}$$

Определение 2:

Дифференциалом функции $y = f(x)$ называется главная часть её приращения, линейная относительно Δx

$$\Delta y = dy + o(\Delta x).$$

Геометрический смысл дифференциала:

Пусть к графику непрерывной функции $y = f(x)$ в точке $M(x, y)$ проведена касательная, которая образует с положительным направлением оси Ox угол α (рис. 7).

Учитывая, что $f'(x) = \operatorname{tg}\alpha$, получаем, что дифференциалу $dy = f'(x)\,dx$ соответствует отрезок AB. Таким образом, дифференциал функции $y = f(x)$ в точке x равен приращению ординаты касательной к графику функции в этой точке, когда x получает приращение Δx.

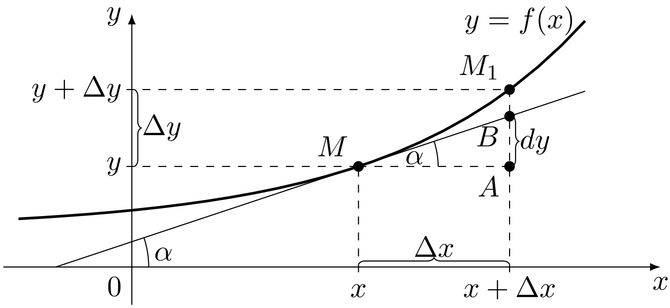


Рисунок 7 – Геометрический смысл дифференциала

Свойства дифференциалов:

1. Таблица дифференциалов основных элементарных функций следует непосредственно из определения дифференциала $dy = y'dx$ и таблицы производных основных элементарных функций.
2. Формулы для нахождения дифференциалов результатов арифметических действий аналогичны формулам для нахождения производных результатов арифметических действий:

$$d\,(C \cdot u) = C \cdot du,$$

$$d\,(u + v) = du + dv,$$

$$d\,(u \cdot v) = v \cdot du + u \cdot dv,$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \cdot du - u \cdot dv}{v^2}, \quad v \neq 0.$$

3. Дифференциал функции сохраняет одно и то же выражение независимо от того, является её аргумент независимой переменной или функцией от независимой переменной. Это свойство называется свойством инвариантности (неизменности) дифференциала.

Применение дифференциала к приближённому вычислению:

Применение дифференциала к приближенному вычислению значений функций основаны на замене приращения функции $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ более простым выражением $f'(x_0)\,dx$, т. е. $\Delta y \approx dy$. Причём равенство тем точнее, чем меньше Δx.

$$f\left(x_0 + \Delta x\right) - f\left(x_0\right) \approx f'\left(x_0\right) \cdot \Delta x,$$

$$\boxed{f\left(x_0 + \Delta x\right) \approx f\left(x_0\right) + f'\left(x_0\right) \cdot \Delta x.}$$

Полученная формула используется для вычисления приближённых значений функций.

Примеры решения задач

5.1 Найти дифференциал функции $y = \dfrac{1}{\left(x^2+5\right)^3}$.

Согласно определению $dy = y'dx$.

$$y' = -3 \cdot \frac{1}{\left(x^2+5\right)^4} \cdot 2x = \frac{-6x}{\left(x^2+5\right)^4},$$

$$dy = \frac{-6x}{\left(x^2+5\right)^4}dx.$$

5.2 Вычислить значение дифференциала функции $y = \ln\left(2\,x + \cos x\right)$, если $x = 0$, $\Delta x = 0{,}1$.

$$dy = y' \cdot \Delta x,$$

$$y' = \frac{2 - \sin x}{2\,x + \cos x},$$

$$dy = \frac{2 - \sin x}{2\,x + \cos x}\Delta x,$$

$$dy\Big|_{\substack{x=0\\ \Delta x=0{,}1}} = \frac{2 - \sin 0}{0 + \cos 0} \cdot 0{,}1 = 2 \cdot 0{,}1 = 0{,}2.$$

5.3 Вычислить приближённо $\sqrt{3{,}88}$.

Рассмотрим функцию $y = \sqrt{x}$ и вычислим приближённое значение функции при $x = 3{,}88$.

Воспользуемся формулой $f\left(x_0 + \Delta x\right) \approx f\left(x_0\right) + f'\left(x_0\right) \cdot \Delta x$.

Примем $x_0 = 4$, $\Delta x = -0{,}12$, тогда $x_0 + \Delta x = 3{,}88$.

$$f\left(x_0\right) = f(4) = \sqrt{4} = 2,$$

$$f'\left(x\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

$$f'\left(x_0\right) = f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4},$$

$$f\left(3{,}88\right) \approx 2 + \frac{1}{4} \cdot (-0{,}12) = 2 - 0{,}03 = 1{,}97.$$

Вычислим абсолютную погрешность ε.

Точное значение $\sqrt{3{,}88} = 1{,}96977156$.

$$\varepsilon = |1{,}96977156 - 1{,}97| \approx 0{,}0002.$$

Задачи

Найти указанные дифференциалы.

5.4 $y = \operatorname{arctg} \dfrac{2\,x^4}{1 - x^8}$, $\quad dy = ?$ $\qquad$ Ответ: $dy = \dfrac{8\,x^3}{1 + x^8}\,dx$.

5.5 $y = \dfrac{e^x \cdot 2^{5x}}{3^{4x}}$, $\quad dy = ?$ $\qquad$ Ответ: $dy = \dfrac{e^x \cdot 2^{5x}}{3^{4x}} \left(1 + \ln \dfrac{32}{81}\right) dx$.

5.6 $y = x\,e^{y^2}$, $\quad dy = ?$ $\qquad$ Ответ: $dy = \dfrac{e^{y^2}}{1 - 2\,x\,y\,e^{y^2}}\,dx$.

5.7 $y = (x + 1)^{\sin^3 2x}$, $\quad dy = ?$

Ответ: $dy = (x + 1)^{\sin^3 2x} \cdot \sin^2 2x \cdot \left(6 \cos 2x \cdot \ln(x + 1) + \dfrac{\sin 2x}{x + 1}\right) dx$.

5.8 $y^2 - x^2 = x^2 y^2 + x + y + 5$, $\quad dy = ?$

Ответ: $dy = \dfrac{2\,x + 1 + 2\,x\,y^2}{2\,y - 1 - 2\,x^2 y}\,dx.$

5.9 $y = \left(\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x^2}\right)^{1+\frac{2}{x^2}}, \quad dy = ?$ Ответ: $dy =$

$$= -\frac{2}{x}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{2}{x^2}}\left(\frac{x^2+2}{x^4+1} + \frac{2}{x^2}\operatorname{arctg}\frac{1}{x^2}\cdot\ln\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x^2}\right)\right)dx.$$

5.10 $x^2 y + 2\,x = y^3 + 4, \quad dy\Big|_{\substack{y=0\\ \Delta x=0{,}1}} = ?$

Ответ: $dy = \dfrac{2 + 2x\,y}{3\,y^2 - x^2}\,dx, \quad dy\Big|_{\substack{x=2\\ y=0\\ \Delta x=0{,}1}} = -0{,}05.$

5.11 $y = \sqrt{\dfrac{x+3}{(2x-5)^4}\,(3-x)^5}, \quad dy\Big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0{,}2}} = ?$

Ответ: $dy = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{(x+3)\,(3-x)^5}{(2x-5)^4}}\cdot\left(\dfrac{1}{x+3} - \dfrac{5}{3-x} - \dfrac{8}{2x-5}\right)dx,$

$dy\Big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0{,}2}} = \dfrac{8\sqrt{5}}{25}.$

5.12 $y = \ln\dfrac{\sqrt{x^4+1} - x^2}{\sqrt{x^4+1} + x^2}, \quad dy = ?$ Ответ: $dy = \dfrac{-4\,x}{\sqrt{x^4+1}}\,dx.$

Вычислить приближённо с помощью дифференциала следующие значения, оценить абсолютную погрешность.

5.13 $\operatorname{arctg} 1{,}04.$ Ответ: 0,805.

5.14 $\ln 1{,}2.$ Ответ: 0,2.

5.15 $4^{1{,}2}.$ Ответ: 5,109.

5.16 $\sqrt[3]{26{,}19}$. Ответ: 2,97.

5.17 $\arcsin 0{,}4$. Ответ: 0,408.

5.18 $\sqrt[4]{16{,}64}$. Ответ: 2,02.

5.19 $e^{0{,}2}$. Ответ: 1,2.

5.20 $\lg 9$. Ответ: 0,957.

5.21 $\dfrac{2{,}9}{\sqrt{2{,}9^2+16}}$. Ответ: 0,0528.

5.22 Найти приближённое значение функции $y=\sqrt[3]{\dfrac{1-x}{1+x}}$ при $x=0{,}1$, оценить абсолютную погрешность.
Ответ: 0,933.

5.23 Найти приближённое значение функции $y=\sqrt{x^2-7x+10}$ при $x=0{,}98$, оценить абсолютную погрешность.
Ответ: 2,025.

6 ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Теоретический материал

Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную первого порядка $y' = f'(x)$.

Определение:

Производная от производной первого порядка, если она существует, называется производной второго порядка или второй производной от функции $y = f(x)$.

$$\boxed{(y')' = y''.}$$

Обозначения: y'', $\quad y''_{xx}$, $\quad \dfrac{d^2y}{dx^2}$, $\quad y^{(2)}$, $\quad \ddot{y}$.

Определение:

Производной n-го порядка от функции $y=f(x)$ называется производная от производной $(n-1)$-го порядка, если она существует.

$$\boxed{\left(y^{(n-1)}\right)' = y^{(n)}.}$$

Обозначения: $\dfrac{d^ny}{dx^n}$, $\quad y^{(n)}$.

Если функция $y=f(x)$ задана неявно уравнением $F(x;y)=0$, то процесс нахождения производной второго порядка состоит из следующих шагов:

1. Дифференцируем уравнение $F(x;y)=0$ по независимой переменной, полученное уравнение разрешаем относительно y':
$$y'=\Phi(x;y).$$
2. Уравнение $y' = \Phi(x;y)$ дифференцируем по тем же принципам, в результате в левой части равенства получаем y'', а в

правой — функцию, зависящую от x, y, y'. Подставляя в правую часть равенства вместо y' найденное ранее выражение, получаем окончательное выражение для второй производной.

Аналогично можно найти производную более высокого порядка.

Если функция $y = f(x)$ задана параметрически $\begin{cases} x = \varphi(t); \\ y = f(t), \end{cases}$ то производная второго порядка определяется формулой:

$$\boxed{y''_{xx} = \left(y'_x\right)'_x = \frac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t}.}$$

Пусть функция $y = f\,(x)$ имеет дифференциал первого порядка $dy = y'dx$.

Определение:

Дифференциалом второго порядка или вторым дифференциалом от функции $y = f(x)$ называется дифференциал от дифференциала первого порядка, если он существует:

$$d^2y = d\,(dy).$$

Если x — независимая переменная, то

$$d^2y = y''dx^2.$$

Определение:

Дифференциалом n-го порядка от функции $y = f(x)$ называется дифференциал от дифференциала $(n-1)$-го порядка, если он существует:

$$\boxed{d^ny = y^{(n)}dx^n.}$$

Замечание: дифференциалы высших порядков не обладают свойством инвариантности.

Примеры решения задач

6.1 Найти y''' от функции $y = 5\cos^2 2x$.

Найдём последовательно производные первого, второго и третьего порядков.

$y' = 10 \cdot \cos 2x \cdot (-\sin 2x) \cdot 2 = -10\sin 4x;$

$y'' = -10\cos 4x \cdot 4 = -40\cos 4x;$

$y''' = -40 \cdot (-\sin 4x) \cdot 4 = 160\sin 4x.$

$$y''' = 160\sin 4x.$$

6.2 Найти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ для функции $y - x^2 = 4 - e^y$.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y''_{xx}.$$

Функция задана неявно, найдём сначала первую производную.

$$y' - 2x = -e^y \cdot y',$$

$$y'(1 + e^y) = 2x,$$

$$y' = \frac{2x}{1 + e^y}.$$

Найдём вторую производную.

$$y'' = \frac{2\cdot(1 + e^y) - 2x\cdot e^y\cdot y'}{(1 + e^y)^2} = 2\,\frac{1 + e^y - x\,y'e^y}{(1 + e^y)^2} = \left[\begin{array}{l}\text{Подставим}\\ y' = \dfrac{2x}{1 + e^y}\end{array}\right] =$$

$$= 2\,\frac{1 + e^y - x\cdot\dfrac{2x}{1 + e^y}\cdot e^y}{(1 + e^y)^2} = 2\,\frac{(1 + e^y)^2 - 2x^2e^y}{(1 + e^y)^3}.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2\,\frac{(1 + e^y)^2 - 2x^2e^y}{(1 + e^y)^3}.$$

6.3 Вычислить $y''_{xx}\Big|_{t=\frac{\pi}{8}}$ для функции $\begin{cases} x = \sin 2t; \\ y = \operatorname{tg} 2t. \end{cases}$

Функция задана параметрически, производную второго порядка будем искать по формуле:

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}.$$

Найдём сначала производную первого порядка $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$.

$$y'_t = \frac{2}{\cos^2 2t},$$
$$x'_t = 2\cos 2t,$$
$$y'_x = \frac{2}{\cos^2 2t \cdot 2 \cdot \cos 2t} = \frac{1}{\cos^3 2t},$$
$$(y'_x)'_t = -\frac{3}{\cos^4 2t} \cdot (-\sin 2t) \cdot 2 = \frac{6\sin 2t}{\cos^4 2t},$$
$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{6\sin 2t}{\cos^4 2t} \cdot \frac{1}{2\cos 2t} = \frac{3\sin 2t}{\cos^5 2t};$$

$$y''_{xx}\Big|_{t=\frac{\pi}{8}} = \frac{3\sin\dfrac{\pi}{4}}{\cos^5\dfrac{\pi}{4}} = 3 \cdot \frac{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^5} = 3 \cdot 4 = 12.$$

6.4 Найти $d^2y\Big|_{\substack{x=1\\ \Delta x=0{,}5}}$ для функции $y = x \operatorname{arctg} 2x$.

$$d^2y = y''\Delta x^2.$$

Найдём последовательно первую и вторую производные.

$$y' = 1 \cdot \operatorname{arctg} 2x + x \cdot \frac{2}{1+4x^2} = \operatorname{arctg} 2x + \frac{2x}{1+4x^2},$$

$$y'' = \frac{x}{1+4x^2} + 2 \cdot \frac{1 \cdot \left(1+4x^2\right) - x \cdot 8x}{\left(1+4x^2\right)^2} =$$

$$= \frac{2\left(1+4x^2\right) + 2\left(1+4x^2\right) - 16x^2}{\left(1+4x^2\right)^2} = \frac{4}{\left(1+4x^2\right)^2},$$

$$d^2y = \frac{4}{(1+4x^2)^2} \cdot \Delta x^2;$$

$$d^2y\Big|_{\substack{x=1\\ \Delta x=0,5}} = \frac{4}{25} \cdot (0{,}5)^2 = 0{,}04.$$

6.5 Найти производную n-го порядка для функции $y = \ln x$.

Последовательно найдём несколько первых производных, пока не увидим закономерность.

$$y' = \frac{1}{x},$$

$$y'' = -\frac{1}{x^2},$$

$$y''' = -\frac{-2}{x^3} = \frac{2}{x^3},$$

$$y^{IV} = \frac{2 \cdot (-3)}{x^4} = -\frac{2 \cdot 3}{x^4},$$

$$y^{V} = -\frac{2 \cdot 3 \cdot (-4)}{x^5} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{x^5},$$

$$y^{VI} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot (-5)}{x^6} = -\frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{x^6}.$$

Обратим внимание, что знак у производной нечётного порядка «+», чётного — «−». Чередование знаков можно записать как $(-1)^{n+1}$.

В числителе с нахождением каждой последующей производной появляется дополнительный множитель, отличающийся от порядка производной на единицу, такое произведение можем описать через факториал

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) = (n-1)!$$

В знаменателе каждой производной стоит степенная функция, показатель степени которой совпадает с порядком производной — x^n.

Таким образом, получаем

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^n (n-1)!}{x^n}.$$

Выражение, полученное для производной n-го порядка, верно для любого $n \in \mathbb{N}$.

Задачи

6.6 Показать, что функция $y = e^x + 3e^{2x}$ удовлетворяет уравнению $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$.

6.7 Показать, что функция $y = e^{2x}\sin 5x$ удовлетворяет уравнению $y'' - 4y' + 29y = 0$.

6.8 При прямолинейном движении материальной точки зависимость пути от времени определяется уравнением $s = \sqrt{t}$. Найти ускорение движущейся точки в конце четвёртой секунды.
Ответ: $-\dfrac{1}{32}$ м/с^2.

Найти указанные производные и дифференциалы.

6.9 $y = x^7 + 5x^6 - 3x^4 + 7x^2 - 8. \quad y''' =?$
Ответ: $y''' = 210x^4 + 600x^3 - 72x$.

6.10 $y = e^{x^2}. \quad \dfrac{d^2y}{dx^2} =?$ Ответ: $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 2e^{x^2}\left(2x^2+1\right)$.

6.11 $\begin{cases} x = t^3; \\ y = 3\sqrt{t}. \end{cases} \quad \left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=64} =?$

Ответ: $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{-5}{12\sqrt{t^{11}}}, \quad \left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=64} = \left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=4} = -\dfrac{5}{24576}$.

6.12 $y = x\cdot e^y. \quad y''_{xx} =?$ Ответ: $y''_{xx} = \dfrac{(2 - xe^y)\, e^{2y}}{(1-xe^y)^3}$.

6.13 $2x^2 + 3y^2 = 5x - 2y + 4. \quad y''_{xx} =?$

Ответ: $y''_{xx} = -\dfrac{(48x^2 - 120x + 72y^2 + 48y + 83)}{4(3y+1)^3}.$

6.14 $x \cdot y = e^{x-y}. \quad d^2y =?$

Ответ: $d^2y = \dfrac{y\,(y+1)^2 + y\,(x-1)^2}{x^2(y+1)^3}\,dx^2.$

6.15 $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t; \\ y = \ln\left(1+t^2\right). \end{cases} \quad \dfrac{d^2y}{dx^2} =? \qquad$ Ответ: $\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} = 2\,(1+t^2) \\ x = \operatorname{arctg} t \end{cases}.$

6.16 $\begin{cases} x = 2\cos^3 t; \\ y = 3\sin^3 t. \end{cases} \quad y''_{xx} =? \qquad$ Ответ: $\begin{cases} y''_{xx} = \dfrac{1}{4\sin t\cos^4 t} \\ x = 2\cos^3 t \end{cases}.$

6.17 $y = \sin^2 3x. \quad d^2y\Big|_{\substack{x=\frac{\pi}{2} \\ \Delta x = 0{,}1}} =?$

Ответ: $d^2y = 18\cos 6x\,dx^2, \quad d^2y\Big|_{\substack{x=\frac{\pi}{2} \\ \Delta x = 0{,}1}} = -1{,}8.$

6.18 $y = (\ln x)^x. \quad d^2y =?$

Ответ: $d^2y = (\ln x)^x \cdot \left(\left(\ln(\ln x) + \dfrac{1}{\ln x}\right)^2 + \dfrac{1}{x\,\ln x} - \dfrac{1}{x\ln^2 x}\right) dx^2.$

6.19 $2x - y = xy. \quad y''_{xx}\Big|_{y=1} =?$

Ответ: $y''_{xx} = \dfrac{2(y-2)}{(x+1)^2}, \quad y''_{xx}\Big|_{y=1} = y''_{xx}\Big|_{\substack{x=1 \\ y=1}} = -\dfrac{1}{2}.$

6.20 $y = \ln(x-1). \quad y'''(2) =?$

Ответ: $y''' = \dfrac{2}{(x-1)^3}, \quad y'''(2) = 2.$

6.21 $y = \left(1 + x^2\right) \cdot \operatorname{arctg} x. \quad d^2y\Big|_{\substack{x=1\\ \Delta x=0{,}2}} = ?$

Ответ: $d^2y = 2\left(\operatorname{arctg} x + \dfrac{x}{1+x^2}\right) dx^2, \quad d^2y\Big|_{\substack{x=1\\ \Delta x=0{,}2}} = \dfrac{\pi + 2}{10}.$

6.22 $\begin{cases} x = \arcsin t; \\ y = \ln\left(1 - t^2\right). \end{cases} \quad \dfrac{d^2y}{dx^2}\bigg|_{\substack{x=0\\ y=0}} = ?$

Ответ: $\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{2}{t^2 - 1}; \\ x = \arcsin t, \end{cases} \quad \dfrac{d^2y}{dx^2}\bigg|_{\substack{x=0\\ y=0}} = \dfrac{d^2y}{dx^2}\bigg|_{t=0} = -2.$

6.23 $y = 5^x, \quad y^{(n)} = ?$ Ответ: $y^{(n)} = 5^x \ln^n 5.$

6.24 $y = \ln(4+x), \quad \dfrac{d^ny}{dx^n} = ?$ Ответ: $\dfrac{d^ny}{dx^n} = (-1)^{n+1} \dfrac{(n-1)!}{(x+4)^n}.$

6.25 $y = \dfrac{1}{x-6}, \quad d^ny = ?$ Ответ: $d^ny = (-1)^n \dfrac{n!}{(x-6)^{n+1}}\, dx^n.$

6.26 $y = \cos 3x, \quad \dfrac{d^ny}{dx^n} = ?$ Ответ: $\dfrac{d^ny}{dx^n} = 3^n \cos\left(3x + \dfrac{\pi}{2} n\right).$

6.27 $y = \sqrt{x}. \quad y^{(n)} = ?$ Ответ: $y^{(n)} = (-1)^{n+1} \dfrac{(2n-3)!!}{2^n \sqrt{x^{2n-1}}}.$

7 УРАВНЕНИЯ КАСАТЕЛЬНОЙ И НОРМАЛИ К КРИВОЙ

Теоретический материал

Из геометрического смысла производной следует, что производная в точке x_0 равна угловому коэффициенту касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0.

$$k = \operatorname{tg}\alpha = y'(x_0).$$

Составим уравнения касательной и нормали к графику непрерывной функции $y = f(x)$ в точке $M\,(x_0; y_0)$.

Из линейной алгебры и аналитической геометрии известно, что уравнение прямой, проходящей через заданную точку с известным угловым коэффициентом, имеет вид:

$$y - y_0 = k\,(x - x_0).$$

Так как $k = \operatorname{tg}\alpha = y'(x_0)$, получаем уравнение касательной к графику непрерывной функции $y = f(x)$ в точке $M\,(x_0; y_0)$:

$$\boxed{y - y_0 = y'(x_0)\,(x - x_0).}$$

Определение:

Нормалью к графику непрерывной функции $y = f(x)$ в точке $M\,(x_0; y_0)$ называется перпендикуляр к касательной, проведенной к графику функции в точке $M\,(x_0; y_0)$ (рис. 8).

Используем условие перпендикулярности двух прямых с угловыми коэффициентами k_1 и k_2:

$$k_1 \cdot k_2 = -1.$$

$$k_{\text{кас}} = \operatorname{tg}\alpha = y'(x_0) \quad \Rightarrow \quad k_{\text{норм}} = -\frac{1}{y'(x_0)}.$$

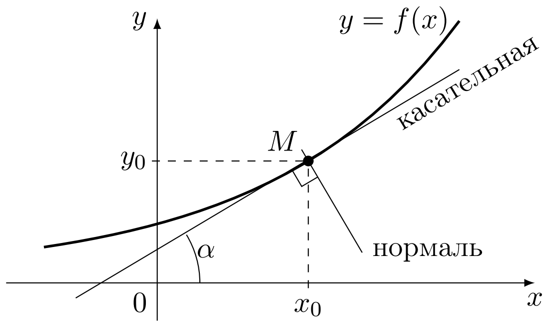


Рисунок 8 – Касательная и нормаль к графику функции

Таким образом, получаем уравнение нормали к графику непрерывной функции $y = f(x)$ в точке $M(x_0; y_0)$:

$$\boxed{y - y_0 = -\frac{1}{y'(x_0)}\,(x - x_0).}$$

<u>Замечание</u>:

Если функция $y = f(x)$ определена и непрерывна в точке x_0, то в случае $y'(x_0) = 0$, касательная параллельна оси Ox и имеет уравнение $y = y_0$, а нормаль параллельна оси Oy и имеет уравнение $x = x_0$.

Примеры решения задач

7.1 Составить уравнения касательной и нормали к графику функции $y = x^3 - 2x + 1$ в точке с абсциссой -1.

Уравнения касательной и нормали к графику непрерывной функции $y = f(x)$ в точке $M_0\,(x_0; y_0)$ имеют вид:

$$y - y_0 = y'(x_0)\,(x - x_0);$$
$$y - y_0 = -\frac{1}{y'(x_0)}\,(x - x_0).$$

Найдём ординату точки касания $y_0 = y(-1) = -1+2+1 = 2$.

Вычислим значения угловых коэффициентов касательной и нормали $k_{\text{кас}} = y'(x_0)$, $k_{\text{норм}} = -\dfrac{1}{y'(x_0)}$.

$$y' = 3x^2 - 2,$$

$$y'(x_0) = y(-1) = 3 - 2 = 1 \quad \Rightarrow \quad k_{\text{кас}} = 1,\ k_{\text{норм}} = -1.$$

Составим уравнение касательной:

$$y - 2 = 1 \cdot (x + 1),$$

$$x - y - 3 = 0.$$

Составим уравнение нормали:

$$y - 2 = -\frac{1}{1} \cdot (x + 1),$$

$$x + y - 1 = 0.$$

7.2 Составить уравнения касательной и нормали к графику функции $x^2 + y^2 = 2x - 4y + 5$ в точке пересечения с осью Oy, находящейся в верхней полуплоскости.

Уравнения касательной и нормали:

$$y - y_0 = y'(x_0)\,(x - x_0);$$

$$y - y_0 = -\frac{1}{y'(x_0)}\,(x - x_0).$$

Исходя из условий $x_0 = 0$, $y_0 > 0$, найдём ординату точки касания:

$$0 + y^2 = 0 - 4y + 5,$$

$$y^2 + 4y - 5 = 0,$$

$$y_1 = 1, \quad y_2 = -5 \ \text{(не удовлетворяет условию } y_0 > 0\text{)}.$$

$$y_0 = 1.$$

Для нахождения производной в точке касания продифференцируем заданную функцию как неявную

$$2x + 2y \cdot y' = 2 - 4y',$$
$$x + y \cdot y' = 1 - 2y',$$
$$y'(y+2) = 1 - x,$$
$$y' = \frac{1-x}{y+2}.$$

Вычислим угловые коэффициенты касательной и нормали в точке касания $k_{\text{кас}} = y'(x_0)$, $k_{\text{норм}} = -\dfrac{1}{y'(x_0)}$.

$$y'\Big|_{\substack{x_0=0\\ y_0=1}} = \frac{1-0}{1+2} = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad k_{\text{кас}} = \frac{1}{3},\ k_{\text{норм}} = -3.$$

Составим уравнения касательной:

$$y - 1 = \frac{1}{3} \cdot (x - 0),$$
$$x - 3y + 3 = 0.$$

Составим уравнение нормали:

$$y - 1 = -3 \cdot (x - 0),$$
$$3x + y - 1 = 0.$$

7.3 Составить уравнение касательной и нормали к кривой $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = \sin t \end{cases}$ в точке с ординатой 1.

Из условия следует, что $y_0 = 1$. Выясним, какое значение параметра t соответствует ординате точки. Для этого подставим во второе уравнение системы $y = 1$.

$$1 = \sin t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Возьмём в качестве $t_0 = \dfrac{\pi}{2}$, тогда $x_0 = x\left(t_0\right) = 2\cos\dfrac{\pi}{2} = 0$.

Для записи уравнения касательной нужно знать значение производной в точке касания, для параметрически заданной функции — значение производной при значении параметра, соответствующего точке касания.

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \left[\begin{array}{l} x'_t = -2\sin t \\ y'_t = \cos t \end{array}\right] = \frac{\cos t}{-2\sin t} = -\frac{1}{2}\operatorname{ctg} t.$$

$y'_x(t_0) = 0$, следовательно, касательная параллельна оси Ox. Тогда уравнение касательной имеет вид $y = 1$, а уравнение нормали — $x = 0$ (рис. 9).

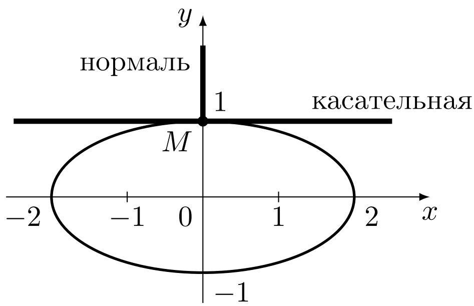


Рисунок 9 – Иллюстрация к задаче 7.3

Задачи

Составить уравнения касательной и нормали к графику функции в заданной точке.

7.4 $y = x^2 - 5x + 4$ в точке с абсциссой -1.

Ответ: $7x + y - 3 = 0;\quad x - 7y + 71 = 0.$

7.5 $y = \ln^2(e + \cos x)$ в точке, где $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

Ответ: $2x + e\,y - e - \pi = 0;\quad e\,x - 2y + 2 - \dfrac{\pi}{2}\,e = 0.$

7.6 $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0$ в точках пересечения кривой с осью Ox.

Ответ: в точке $M_1(-1;0)$: $x - y + 1 = 0$; $\quad x + y + 1 = 0$;
в точке $M_2(3;0)$: $x + y - 3 = 0$; $\quad x - y - 3 = 0$.

7.7 $x^3 + y^2 + 2x - 6 = 0$ в точке с ординатой 3.

Ответ: $5x + 6y - 13 = 0$; $\quad 6x - 5y + 21 = 0$.

7.8 $\begin{cases} x = 2\cos t - \cos 2t; \\ y = 2\sin t - \sin 2t \end{cases}$ в точке, где $t = \dfrac{\pi}{2}$.

Ответ: $x + y - 3 = 0$; $\quad x - y + 1 = 0$.

7.9 $\begin{cases} x = 3(t - \sin t); \\ y = 3(1 - \cos t) \end{cases}$ в точке $M\left(3\left(\dfrac{\pi}{2} - 1\right); 3\right)$.

Ответ: $x - y + 6 - \dfrac{3\pi}{2} = 0$; $\quad x + y - \dfrac{3\pi}{2} = 0$.

7.10 $\begin{cases} x = \dfrac{1+t}{t^3}; \\ y = \dfrac{3}{2t^2} + \dfrac{1}{2t} \end{cases}$ в точке с абсциссой 2.

Ответ: $7x - 10y + 6 = 0$; $\quad 10x + 7y - 34 = 0$.

7.11 $y = (e + x)^{\sin 2x}$ в точке, где $x = 0$.

Ответ: $2x - y + 1 = 0$; $\quad x + 2y - 2 = 0$.

7.12 $y = (\operatorname{arctg} x)^{x^3}$, если $x_0 = 1$.

Ответ: $\left(2 + 3\pi \ln \dfrac{\pi}{4}\right) x - 4y + \pi - \left(2 + 3\pi \ln \dfrac{\pi}{4}\right) = 0$;
$4x + \left(2 + 3\pi \ln \dfrac{\pi}{4}\right) y - 4 - \dfrac{\pi}{4}\left(2 + 3\pi \ln \dfrac{\pi}{4}\right) = 0$.

7.13 $x^2 + 2y^3 - xy = 3x - 2$ в точке $M(2; 0)$.
Ответ: $x - 2y - 2 = 0; \quad 2x + y - 4 = 0$.

7.14 $\begin{cases} x = t - \sin t; \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$ в точке, где $t = \pi$.
Ответ: $y = 2; \quad x = \pi$.

7.15 $\begin{cases} x = 4\cos t; \\ y = 2\sin t \end{cases}$ в точке с ординатой 2.
Ответ: $y = 2; \quad x = 0$.

7.16 $x^2 + y^2 - 4y = 6x + 3$ в точке с ординатой 2 $(x_0 < 0)$.
Ответ: $x = -1; \quad y = 2$.

7.17 $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 3\sin t \end{cases}$ в точке с абсциссой 2.
Ответ: $x = 2; \quad y = 0$.

8 ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Теоретический материал

Теорема Ролля:

Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, дифференцируема в интервале $(a;b)$ и в концах отрезка принимает равные значения $f(a)=f(b)$, тогда найдётся точка c из интервала $(a;b)$ такая, что производная в этой точке равна нулю $f'(c)=0$.

Геометрический смысл теоремы Ролля:

На графике непрерывной на отрезке $[a;b]$ и дифференцируемой на интервале $(a;b)$ функции, принимающей на концах отрезка равные значения $f(a)=f(b)$, найдётся точка $(c,f(c))$, в которой касательная параллельна оси Ox (рис. 10).

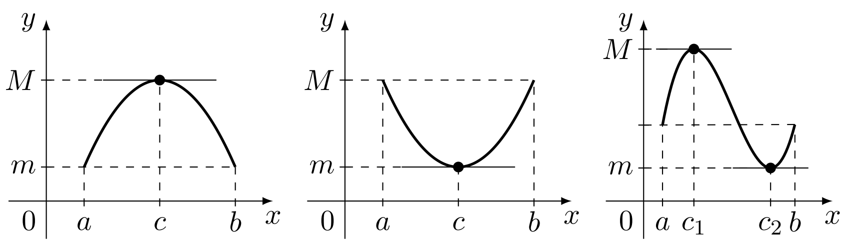


Рисунок 10 – Иллюстрация к теореме Ролля

Теорема Лагранжа:

Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, дифференцируема в интервале $(a;b)$, тогда найдётся точка c из интервала $(a;b)$, в которой выполняется равенство

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c).$$

Геометрический смысл теоремы Лагранжа:

Величина $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ является угловым коэффициентом секущей, проходящей через точки $A\,(a, f(a))$ и $B\,(b, f(b))$; $f'\,(c)$ — угловой коэффициент касательной, проведённой к графику функции $y = f(x)$ в точке $(c, f(c))$. Следовательно, из теоремы Лагранжа следует, что существует точка $c \in (a; b)$, в которой касательная параллельна секущей AB (рис. 11).

Теорема Коши:

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a; b]$, дифференцируемы в интервале $(a; b)$ и $g'(x) \neq 0\ \forall x \in (a; b)$, тогда найдётся точка c из интервала $(a; b)$ такая, что выполняется равенство:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

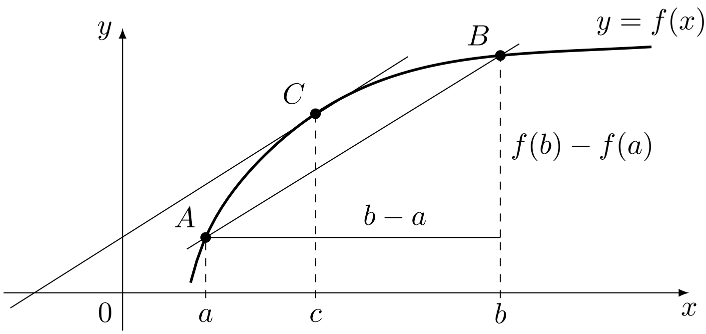


Рисунок 11 – Иллюстрация к теореме Лагранжа

Геометрический смысл теоремы Коши:

Теорема Коши выражает тот же факт, что и теорема Лагранжа, но для случая параметрического задания функции $\begin{cases} x = g(t), \\ y = f(t). \end{cases}$

Пусть параметр $t \in [a; b]$, тогда $A\big(g(a), f(a)\big)$ и $B\big(g(b), f(b)\big)$ — начальная и конечная точки кривой соответственно. Согласно теореме Коши на кривой AB найдётся такая точка $C\big(g(c), f(c)\big)$, что угловой коэффициент секущей AB, стягивающей начальную и конечную точки кривой AB, будет равен угловому коэффициенту касательной, проведённой к кривой в точке C, т. е. касательная будет параллельна секущей.

Теорема Лопиталя:

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны и дифференцируемы в окрестности точки x_0, возможно, за исключением точки x_0, и пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ стремятся к нулю или бесконечности при $x \to x_0$. Если существует предел отношения производных этих функций при $x \to x_0$, то предел отношения функций равен пределу отношения производных этих функций при $x \to x_0$:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Замечания:

1. Теорема Лопиталя применима и для случая $x \to \infty$.
2. Теорема позволяет раскрыть неопределённости вида $\left[\frac{0}{0}\right], \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.
3. Теорема применима, если предел отношения производных функций существует при заданном стремлении аргумента.
4. Теорема может применяться в одной задаче несколько раз.
5. Применение теоремы возможно для раскрытия неопределённостей $\left[1^{\infty}\right]$, $\left[\infty^{0}\right]$, $\left[0^{0}\right]$. Для этого к функции, стоящей под знаком предела, применяют основное логарифмическое тождество $a^b = e^{b \ln a}$.

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} [f(x)]^{g(x)} = \Big[[1^{\infty}], [\infty^{0}], [0^{0}]\Big] = e^{\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} g(x) \cdot \ln f(x)}.$$

Примеры решения задач

Вычислить следующие пределы:

8.1 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x+3x}{x\cdot e^x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\begin{bmatrix}\text{применим}\\ \text{правило}\\ \text{Лопиталя}\end{bmatrix}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cos 2x+3}{e^x+x\cdot e^x}=$
$=\dfrac{2+3}{1+0}=5.$

8.2 $\lim\limits_{x\to 1+0}(x-1)\cdot\ln(x-1)=[0\cdot\infty]=\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{\ln(x-1)}{\dfrac{1}{x-1}}=$

$=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\begin{bmatrix}\text{применим}\\ \text{правило}\\ \text{Лопиталя}\end{bmatrix}=\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{\dfrac{1}{x-1}}{-\dfrac{1}{(x-1)^2}}=-\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{(x-1)^2}{x-1}=$
$=-\lim\limits_{x\to 1+0}(x-1)=0.$

8.3 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+2\cos 2x}{3x+1}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\begin{bmatrix}\text{применим правило}\\ \text{Лопиталя}\end{bmatrix}=$
$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-4\sin 2x}{3}.$

Полученный предел не существует, поэтому получить ответ по теореме Лопиталя в данной задаче нельзя. Воспользуемся стандартным методом раскрытия неопределенности вида $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+2\cos 2x}{3x+1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\dfrac{2\cos 2x}{x}}{3+\dfrac{1}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1+2\cdot\dfrac{1}{x}\cdot\cos 2x}{3+\dfrac{1}{x}}=\frac{1}{3}.$$

8.4 $\lim\limits_{x\to 0+0}(\sin 2x)^x=\left[0^0\right]=\begin{bmatrix}\text{воспользуемся основным}\\ \text{логарифмическим тождеством}\end{bmatrix}=$

$=e^{\lim\limits_{x\to 0+0}x\cdot\ln(\sin 2x)}.$

Вычислим отдельно предел, стоящий в показателе степени.

$$\lim_{x\to 0+0} x\cdot\ln(\sin 2x) = [0\cdot\infty] = \lim_{x\to 0+0}\frac{\ln(\sin 2x)}{\dfrac{1}{x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0+0}\frac{\dfrac{2\cos 2x}{\sin 2x}}{-\dfrac{1}{x^2}} = -2\lim_{x\to 0+0} x^2\cdot\frac{\cos 2x}{\sin 2x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \begin{bmatrix}\sin 2x\sim 2x\\ x\to 0\end{bmatrix} =$$

$$= -2\lim_{x\to 0+0}\frac{x^2\cdot\cos 2x}{2x} = -\lim_{x\to 0+0} x\cdot\cos 2x = 0.$$

$$\lim_{x\to 0+0}(\sin 2x)^x = e^{\lim\limits_{x\to 0+0} x\cdot\ln(\sin 2x)} = e^0 = 1.$$

Задачи

8.5 Справедлива ли теорема Ролля:

1) для функции $f(x) = x^2 + 6x - 35$ на отрезке $[-5; -1]$;

2) для функции $f(x) = (x-4)^{\frac{3}{2}}$ на отрезке $[0; 8]$?

8.6 На дуге AB кривой $y = x^3 - 3x$ найти точку, в которой касательная параллельна хорде, соединяющей точки $A(-1; 2)$ и $B(3; 18)$.

Ответ: $\left(\sqrt{\dfrac{7}{3}}; -\dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{7}{3}}\right)$.

8.7 Записав формулу Коши для функций $f(x) = 2x^3 + 5x + 1$ и $g(x) = x^2 + 4$ на отрезке $[0; 2]$, найти значения c.

Ответ: $\dfrac{1}{2}, \dfrac{5}{3}$.

8.8 Проверить, что функции $f(x) = x^2 + 4x$ и $\varphi(x) = x^2 - x - 2$ удовлетворяют условиям теоремы Коши на отрезке $[1; 2]$, и найти соответствующее значение c.

Ответ: $c = 1{,}5$.

Вычислить следующие пределы:

8.9 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x}$. Ответ: 0.

8.10 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{x \cdot \cos x}$. Ответ: 2.

8.11 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 - 4\,x^2 + 5x - 2}{x^3 - 5\,x^2 + 7x - 3}$. Ответ: $\dfrac{1}{2}$.

8.12 $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\ln(9 - 2\,x^2)}{\sin 2\pi x}$. Ответ: $-\dfrac{4}{\pi}$.

8.13 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$. Ответ: 2.

8.14 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos 2x}{1 - \operatorname{tg} 2x}$. Ответ: 1.

8.15 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 - 1}{\ln^2 x}$. Ответ: ∞.

8.16 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$. Ответ: $\dfrac{1}{3}$.

8.17 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 \cdot e^{-x}$. Ответ: 0.

8.18 $\lim\limits_{x\to 0+0} x^3 \ln x$. Ответ: 0.

8.19 $\lim\limits_{x\to 1} (x - 1) \operatorname{ctg} 2\pi x$. Ответ: $\dfrac{1}{2\pi}$.

8.20 $\lim\limits_{x\to 1} \ln x \cdot \ln(x - 1)$. Ответ: 0.

8.21 $\lim\limits_{x\to+\infty} (\pi - 2 \operatorname{arctg} x) \cdot x$. Ответ: 2.

8.22 $\lim\limits_{x\to 0+0} \dfrac{\ln(1 - \cos x)}{\ln(\operatorname{tg} x)}$. Ответ: 2.

8.23 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg} x-\dfrac{1}{x}\right).$ Ответ: 0.

8.24 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}+\dfrac{1}{1-x}\right).$ Ответ: $\dfrac{1}{2}.$

8.25 $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(x\cdot\operatorname{tg} x-\dfrac{\pi}{2\cos x}\right).$ Ответ: $-1.$

8.26 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right).$ Ответ: $\dfrac{1}{2}.$

8.27 $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}}.$ Ответ: 1.

8.28 $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x-1}\right)^{2x+5}.$ Ответ: $e^2.$

8.29 $\lim\limits_{x\to +\infty}(x+2^x)^{\frac{1}{x}}.$ Ответ: 2.

8.30 $\lim\limits_{x\to 0+0}(\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}}.$ Ответ: $\dfrac{1}{e}.$

8.31 $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(\pi-2x)^{\cos x}.$ Ответ: 1.

8.32 $\lim\limits_{x\to 0+0} x^{\sin^2 2x}.$ Ответ: 1.

8.33 $\lim\limits_{x\to \pi}(1+3\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x}.$ Ответ: $e^3.$

8.34 $\lim\limits_{x\to 2\pi}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 2x}}.$ Ответ: $e^{-\frac{1}{8}}.$

9 ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНЫХ К ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИЙ

Теоретический материал

Определение:

Функция $y = f(x)$ называется строго возрастающей (убывающей) на интервале $(a;b)$, если большему значению аргумента соответствует большее (меньшее) значение функции.

Данное определение в символьной записи имеет вид:

$y=f(x) \nearrow$ на $(a;b) \;\Leftrightarrow\; \forall x_1, x_2 \in (a;b) : x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) < f(x_2)$.

$y=f(x) \searrow$ на $(a;b) \;\Leftrightarrow\; \forall x_1, x_2 \in (a;b) : x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) > f(x_2)$.

Определение:

Возрастающая и убывающая на интервале $(a;b)$ функции называются монотонными на этом интервале.

Теорема (необходимый признак монотонности функции):

Пусть функция $y=f(x)$ дифференцируема в интервале $(a;b)$.

1) Если функция $y = f(x)$ возрастает на интервале $(a;b)$, то её производная $f'(x)$ неотрицательна в любой точке интервала $(a;b)$:

$$y=f(x) \nearrow \text{ на } (a;b) \;\Rightarrow\; f'(x) \geqslant 0 \;\forall x \in (a;b).$$

2) Если функция $y = f(x)$ убывает на интервале $(a;b)$, то её производная $f'(x)$ неположительна в любой точке интервала $(a;b)$:

$$y=f(x) \searrow \text{ на } (a;b) \;\Rightarrow\; f'(x) \leqslant 0 \;\forall x \in (a;b).$$

Геометрический смысл теоремы:

Для графика возрастающей дифференцируемой функции касательные образуют с положительным направлением оси Ox острые углы или в некоторых точках параллельны оси Ox (рис. 12).

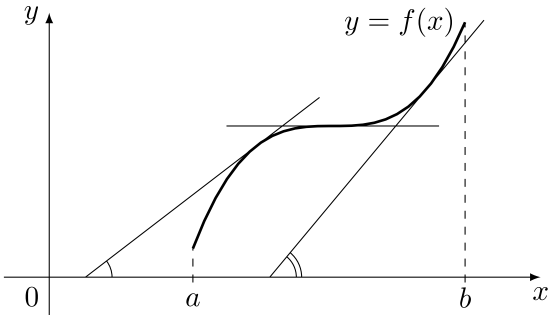


Рисунок 12 – Геометрический смысл необходимого признака монотонности функции

Теорема (достаточный признак монотонности функции):

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в интервале $(a; b)$.

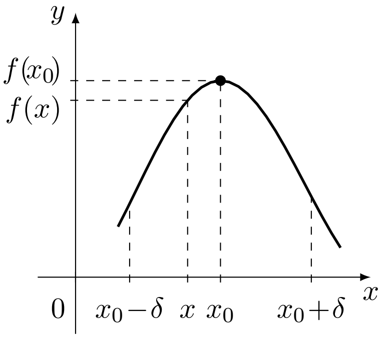
1) Если производная $f'(x)$ положительна в каждой точке интервала $(a; b)$, то функция $y = f(x)$ возрастает в интервале $(a; b)$:
$$f'(x) > 0 \ \forall x \in (a; b) \ \Rightarrow \ f(x) \nearrow \text{ при } x \in (a; b).$$
2) Если производная $f'(x)$ отрицательна в каждой точке интервала $(a; b)$, то функция $y = f(x)$ убывает в интервале $(a; b)$:
$$f'(x) < 0 \ \forall x \in (a; b) \ \Rightarrow \ f(x) \searrow \text{ при } x \in (a; b).$$

Определение:

Точка x_0 называется точкой локального максимума (минимума) функции $y = f(x)$, если в точке x_0 функция принимает своё наибольшее (наименьшее) значение в некоторой окрестности точки x_0 (рис. 13), т. е.

$$f(x) < f(x_0) \ \big(f(x) > f(x_0)\big) \ \forall x \in O(x_0).$$

Локальные максимум и минимум называют локальными экстремумами. Функция может иметь несколько локальных экстремумов (рис. 14).



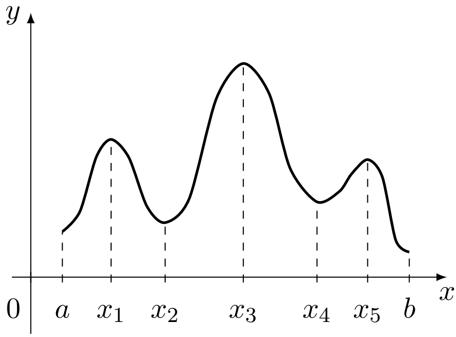


Рисунок 13 – Окрестность точки локального максимума

Рисунок 14 – График функции, имеющей несколько локальных экстремумов

Определение:

Точки из области определения, в которых производная функции $y = f(x)$ равна нулю, называются стационарными точками.

Определение:

Точки из области определения, в которых производная функции $y = f(x)$ не существует, называются точками острия.

Определение:

Точки из области определения, в которых производная функции $y = f(x)$ равна нулю или не существует, называются критическими точками по первой производной.

Теорема (необходимый признак существования локального экстремума):

Если дифференцируемая функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 локальный экстремум, то производная функции $y = f(x)$ в точке x_0 равна нулю или не существует:

$$x_0 \text{ — точка } loc\,extr \;\Rightarrow\; f'(x_0) = 0 \text{ или } f'(x_0) \nexists.$$

Теорема (первый достаточный признак существования локального экстремума):

Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна в точке x_0 и некоторой её окрестности, а также имеет производную в каждой точке окрестности точки x_0, за исключением, возможно, самой точки x_0.

Если при переходе через точку x_0 производная меняет знак, то x_0 — точка локального экстремума:

1) если при переходе через точку x_0 слева направо производная меняет знак с «$-$» на «$+$», x_0 — точка локального минимума;
2) если при переходе через точку x_0 слева направо производная меняет знак с «$+$» на «$-$», x_0 — точка локального максимума.

Схема исследования функции на локальный экстремум:

Пусть дана функция $y = f(x)$. Требуется исследовать функцию на локальный экстремум.

1. Найдём область определения функции $D(x)$.
2. Найдём критические точки по первой производной — точки из области определения функции, в которых $f'(x) = 0$ или $f'(x)$ не существует.
3. Разобьём $D(x)$ критическими точками на интервалы и расставим знаки производной $f'(x)$ в полученных интервалах.
4. Исходя из первого достаточного признака существования локального экстремума, сделаем вывод о наличии точек локального экстремума, найдём локальные экстремумы.

Теорема (второй достаточный признак существования локального экстремума):

Если функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема в точке x_0, $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) \neq 0$, тогда функция имеет локальный экстремум в точке x_0, причём

1) если $f''(x_0) > 0$, то x_0 — точка локального минимума;
2) если $f''(x_0) < 0$, то x_0 — точка локального максимума.

Определение:

Глобальным максимумом (минимумом) функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$ называется наибольшее (наименьшее) значение функции, достигаемое на отрезке $[a; b]$.

Функция может иметь только один глобальный максимум и один глобальный минимум. Глобальный экстремум достигается или в граничной точке отрезка, или в критической точке по первой производной из отрезка $[a; b]$. Например, из рис. 14 видно, что наименьшее значение функции достигается в точке b: $m = f(b)$, а наибольшее значение функции достигается в точке x_3: $M = f(x_3)$.

Схема исследования функции на глобальный экстремум:

Пусть дана функция $y = f(x)$. Требуется исследовать функцию на глобальный экстремум (наибольшее/наименьшее значение функции) на отрезке $[a; b]$.

1. Найдём область определения функции $D(x)$. Проверим, что $[a; b] \subset D(x)$.
2. Найдём критические точки по первой производной — точки из области определения функции, в которых $f'(x) = 0$ или $f'(x)$ не существует.
3. Вычислим значения функции в тех критических точках по первой производной, которые попадают в отрезок $[a; b]$, и в граничных точках отрезка.
4. Выберем из полученных значений функции наибольшее и наименьшее.

Определение:

График дифференцируемой функции $y = f(x)$ называется выпуклым вверх (вниз) на интервале $(a; b)$, если дуга кривой лежит под (над) касательной, проведённой в любой точке кривой с абсциссой $x \in (a; b)$ (рис. 15, 16).

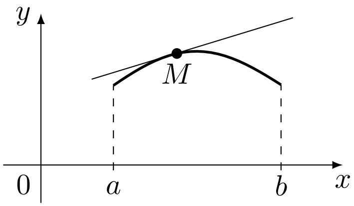


Рисунок 15 – График функции, выпуклый вверх

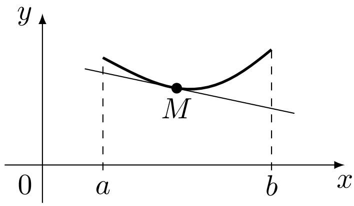


Рисунок 16 – График функции, выпуклый вниз

Теорема (достаточный признак выпуклости графика функции вверх/вниз):

Пусть функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема на интервале $(a; b)$.

1) Если $f''(x)$ положительна в каждой точке интервала $(a; b)$, то график функции является выпуклым вниз на интервале $(a; b)$:

   $f''(x) > 0\ \forall x \in (a; b) \ \Rightarrow$ график функции $\smile$ при $x \in (a; b)$.

2) Если $f''(x)$ отрицательна в каждой точке интервала $(a; b)$, то график функции является выпуклым вверх на интервале $(a; b)$:

   $f''(x) < 0\ \forall x \in (a; b) \ \Rightarrow$ график функции $\frown$ при $x \in (a; b)$.

Определение:

Точкой перегиба графика дифференцируемой функции $y = f(x)$ называется точка графика, при переходе через которую кривая меняет направление выпуклости (рис. 17).

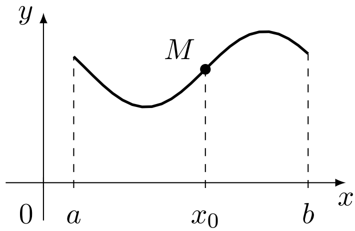


Рисунок 17 – Точка перегиба графика функции

Определение:

Точки из области определения, в которых вторая производная функции $y = f(x)$ равна нулю или не существует, называются критическими точками по второй производной.

Теорема (необходимый признак существования точки перегиба):

Если функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0 и точка $(x_0, f(x_0))$ является точкой перегиба графика функции $y = f(x)$, то вторая производная в точке x_0 равна нулю или не существует:

$$x_0 \text{ — абсцисса точки перегиба } \Rightarrow f''(x_0) = 0 \text{ или } f''(x_0) \nexists.$$

Теорема (достаточный признак существования точки перегиба):

Если функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема на интервале $(a; b)$ и при переходе через точку x_0 вторая производная меняет свой знак, то точка с абсциссой x_0 является точкой перегиба графика функции $y = f(x)$.

Схема исследования графика функции на наличие точек перегиба:

Пусть дана функция $y = f(x)$. Требуется исследовать график функции на наличие точек перегиба.

1. Найдём область определения функции $D(x)$.

2. Найдём критические точки по второй производной — точки из области определения функции, в которых $f''(x) = 0$ или $f''(x)$ не существует.
3. Разобьём $D(x)$ критическими точками по второй производной на интервалы и расставим знаки $f''(x)$ в полученных интервалах.
4. Исходя из достаточного признака существования точек перегиба, сделаем вывод о наличии точек перегиба, вычислим их координаты.

Определение:

Прямая l называется асимптотой графика функции $y = f(x)$, если расстояние d от точки $M(x; y)$ на графике функции $y = f(x)$ до прямой l стремится к нулю, при неограниченном удалении точки графика от начала координат (рис. 18).

Замечание:

График функции может неограниченное количество раз пересекать асимптоту (рис. 19)

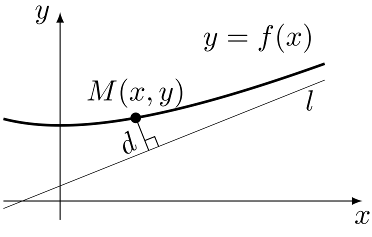


Рисунок 18 – Асимптота графика функции

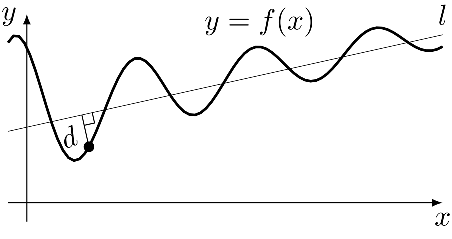


Рисунок 19 – Пересечение асимптоты графиком функции

Различают наклонные и вертикальные асимптоты:

1. Пусть график функции $y = f(x)$ имеет вертикальную асимптоту $x = x_0$, тогда при $x \to x_0$, согласно определению асимптоты, $f(x) \to \infty$. Это возможно, если $x = x_0$ — точка разрыва второго рода.

Таким образом, если x_0 – точка разрыва второго рода, то $x = x_0$ — уравнение вертикальной асимптоты.

2. Пусть график функции $y = f(x)$ имеет наклонную асимптоту с уравнением $y = kx + b$.
   Если $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ существует и конечен, то он равен k.
   Если $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \big(f(x) - kx\big)$ существует и конечен, то он равен b.

<u>Замечания</u>:

1. Наклонная асимптота к графику функции существует только если существуют и конечны пределы, соответствующие коэффициентам k и b.
2. В общем случае в формулах для нахождения коэффициентов k и b $x \to \pm\infty$, однако для некоторых функций (например, e^x, $\operatorname{arctg} x$, $\ln x$) значения соответствующих пределов при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$ будут различны и, следовательно, необходимо рассматривать отдельно два случая при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$. В результате, могут быть получены два уравнения наклонных асимптот — левой и правой.

Все изложенные выше теоремы позволяют провести полное исследование функции методами дифференциального исчисления, конечной целью которого является построение графика функции. В простых случаях нас не затруднит построить график функции, используя элементарные геометрические преобразования, однако свойства и графические изображения более сложных функций далеко не очевидны, именно поэтому и необходимо целое исследование.

Следует отметить, что количество пунктов исследования, порядок их выполнения и стиль оформления могут существенно различаться. В предлагаемом практикуме будем придерживаться приведённого ниже порядка исследования.

<u>Порядок полного исследования графика функции:</u>

1. Нахождение области определения функции.
2. Проверка функции на чётность, нечётность, периодичность.
3. Исследование функции на непрерывность и наличие точек разрыва, определение типа точек разрыва.
4. Исследование функции на локальные экстремумы, определение интервалов монотонности функции.
5. Исследование графика функции на наличие точек перегиба, определение интервалов выпуклости графика функции вверх/вниз.
6. Нахождение асимптот графика функции.
7. Определение точек пересечения графика функции с осями координат.
8. Определение дополнительных точек графика функции (в случае необходимости).
9. Построение графика функции.

Примеры решения задач

9.1 Исследовать функцию $y = \sqrt[3]{x^2-1}$ на наличие точек локального экстремума.

1. Найдём область определения: $D(x) = \mathbb{R}$.
2. Определим производную первого порядка:

$$y' = \frac{2x}{3\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}}.$$

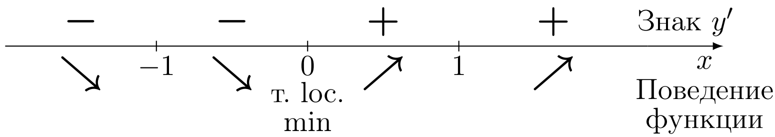
Найдём критические точки по первой производной:

$$y' = 0: \qquad 2x = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x = 0 \in D(x).$$

Производная не существует при $x = \pm 1 \in D(x)$.

Критические точки по первой производной: $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$.

3. Разобьём область определения критическими точками на интервалы и расставим знаки производной по полученным интервалам:



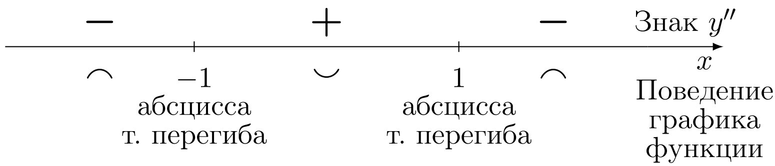
4. При переходе слева направо через точку $x = 0$ производная меняет знак с «−» на «+», следовательно, $x = 0$ — точка локального минимума. Найдём сам локальный минимум: $y_{\min} = y(0) = -1$.

9.2 Исследовать функцию $y = 3\,x^3 + \dfrac{9}{2}\,x^2 - 4x + 1$ на глобальный экстремум на отрезке $[0; 2]$.

1. Найдём область определения: $D(x) = \mathbb{R}$; $[0; 2] \subset \mathbb{R}$.
2. Определим производную первого порядка:
$$y' = 9\,x^2 + 9x - 4.$$
Найдём критические точки по первой производной:
$$y' = 0 : 9\,x^2 + 9x - 4 = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{1}{3} \in [0; 2],\; x = -\frac{4}{3} \notin [0; 2].$$
Точек, в которых y' не существует, нет.
Таким образом, критические точки по первой производной из отрезка $[0; 2]$: $x = \dfrac{1}{3}$.
3. Вычислим значения функции в найденной критической точке и в граничных точках отрезка:
$$y(0) = 1; \qquad y\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{5}{18}; \qquad y(2) = 35.$$
4. Выберем из полученных значений функции наибольшее и наименьшее:
$x = \dfrac{1}{3}$ — точка глобального минимума, $y_{\text{наим}} = y\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{5}{18}$;
$x = 2$ — точка глобального максимума, $y_{\text{наиб}} = y(2) = 35$.

9.3 Исследовать график функции $y = \ln\left(1 + x^2\right)$ на наличие точек перегиба.

1. Найдём область определения: $D(x) = \mathbb{R}$.
2. Определим производные первого и второго порядков:
$$y' = \frac{2x}{1 + x^2}.$$
$$y'' = 2\,\frac{1 + x^2 - 2\,x^2}{\left(1 + x^2\right)^2} = 2\,\frac{1 - x^2}{\left(1 + x^2\right)^2}.$$
Найдём критические точки по второй производной:
$$y'' = 0: \quad 1 - x^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \pm 1 \in D(x).$$
Точек, в которых y'' не существует, нет.
Критические точки по второй производной: $x = 1$, $x = -1$.
3. Разобьём область определения критическими точками на интервалы и расставим знаки второй производной по полученным интервалам:



4. Вторая производная меняет знак при переходе через $x = 1$, $x = -1$, следовательно, $x = 1$, $x = -1$ — абсциссы точек перегиба, $M\,(-1; \ln 2)$ и $N\,(1; \ln 2)$ — точки перегиба.

9.4 Найти все асимптоты графика функции $y = \dfrac{2^x}{x}$.

1. Найдём область определения: $D\,(x) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
2. Проверим наличие вертикальных асимптот. Вертикальная асимптота возникает в точке разрыва второго рода.
$x = 0$ — точка разрыва, т. к. $f(0)$ не существует.

Для определения типа точки разрыва вычислим односторонние пределы функции при $x \to 0$.

$$\lim_{x\to 0-0} \frac{2^x}{x} = \left[\frac{1}{-\text{б.м.}}\right] = -\infty; \quad \lim_{x\to 0+0} \frac{2^x}{x} = \left[\frac{1}{+\text{б.м.}}\right] = +\infty.$$

Следовательно, $x = 0$ — точка разрыва второго рода $\Longrightarrow$ $x = 0$ — уравнение вертикальной асимптоты.

3. Проверим наличие наклонных асимптот. Наклонная асимптота имеет уравнение $y = kx + b$.

   $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k$, если этот предел существует и конечен.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2^x}{x^2} = \begin{cases} 0, & x \to -\infty; \\ +\infty, & x \to +\infty. \end{cases} \quad \Longrightarrow$$

   При $x \to -\infty$ $k = 0$, при $x \to +\infty$ наклонной асимптоты не существует.

   $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \big(f(x) - kx\big) = b$, если предел существует и конечен.

   Так как при $x \to +\infty$ наклонной асимптоты не существует, то будем искать коэффициент b только для случая $x \to -\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} \big(f(x) - kx\big) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{2^x}{x} - 0\right) = 0 \Rightarrow b = 0 \text{ при } x \to -\infty.$$

Таким образом, уравнение левой (при $x \to -\infty$) наклонной асимптоты $y = 0$.

9.5 Провести полное исследование функции $y = \dfrac{x^3 - 4}{x^2}$ и построить её график.

В ходе исследования функции рекомендуем использовать макет (черновик графика), т. к. каждый этап задания приносит новую информацию о графике функции.

1. Найдём область определения функции.

   $D(x) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

2. Проверим функцию на чётность, нечётность, периодичность.
   $y(-x) = \dfrac{(-x)^3 - 4}{(-x)^2} = \dfrac{-x^3 - 4}{x^2}$.
   Т. к. $y(-x) \neq y(x)$ и $y(-x) \neq -y(x)$, то $y(x)$ — функция ни чётная, ни нечётная, т. е. функция общего вида. Следовательно, график функции несимметричен относительно начала координат и оси Oy.

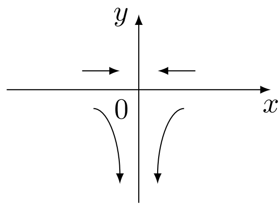
   $y(x)$ — непериодическая функция, т. к. не является тригонометрической.

3. Исследуем функцию на непрерывность и точки разрыва.

   $x = 0$ — точка разрыва, т. к. $y(0)$ не существует.

   Для определения типа точки разрыва найдём односторонние пределы.

$$\lim_{x\to 0-0} \frac{x^3 - 4}{x^2} = \left[\frac{-4}{+\text{б.м.}}\right] = -\infty.$$
$$\lim_{x\to 0+0} \frac{x^3 - 4}{x^2} = \left[\frac{-4}{+\text{б.м.}}\right] = -\infty.$$



   $x = 0$ — точка разрыва II рода.

4. Определим интервалы монотонности функции, локальные экстремумы.

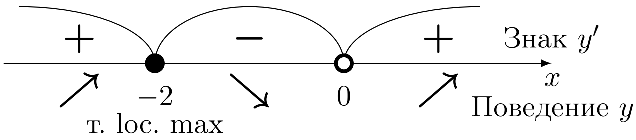
$$y'(x) = \left(\frac{x^3 - 4}{x^2}\right)' = \left(x - \frac{4}{x^2}\right)' = 1 + \frac{8}{x^3} = \frac{x^3 + 8}{x^3}.$$

   Найдём критические точки по первой производной.

$$y' = 0 : \quad \frac{x^3 + 8}{x^3} = 0,$$
$$x^3 + 8 = 0,$$
$$(x + 2) \cdot \left(x^2 - 2x + 4\right) = 0,$$
$$x + 2 = 0 \;\Rightarrow x = -2 \in D(x) \text{ — стационарная точка;}$$
$$x^2 - 2x + 4 = 0,\; D < 0 \Rightarrow \text{действительных корней нет.}$$

Производная y' не существует при $x = 0$, но $x = 0 \notin D(x)$. Следовательно, точки острия отсутствуют.

Таким образом, $x = -2$ — критическая точка по первой производной.



При переходе слева направо через точку $x = -2$ первая производная меняет знак с «−» на «+», следовательно, точка $x = -2$ — точка локального максимума,

$y_{\max} = y(-2) = \dfrac{-8-4}{4} = -3.$

$y(x) \nearrow$ при $x \in (-\infty; -2),\ (0; +\infty)$; $\quad y(x) \searrow$ при $x \in (-2; 0)$.

5. Определим интервалы выпуклости графика функции вверх/вниз, точки перегиба.

   $y''(x) = \left(1 + \dfrac{8}{x^3}\right)' = -\dfrac{24}{x^4}.$

   Найдём критические точки по второй производной.

   $y'' = 0 : \quad$ нет таких точек.

   Вторая производная не существует при $x=0$, но $x=0 \notin D(x)$. Критических точек по второй производной нет, следовательно, точек перегиба нет.

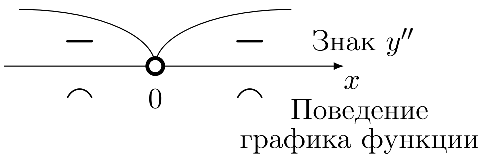


   График функции $\frown$ при $x \in (-\infty; 0), (0; +\infty)$.

6. Найдём асимптоты графика функции.

   1) Вертикальные асимптоты

   $x = 0$ — уравнение вертикальной асимптоты, т. к. $x = 0$ — точка разрыва II рода.

2) Наклонные асимптоты

Наклонная асимптота имеет уравнение $y = kx + b$.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3-4}{x^3} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3\,x^2}{3\,x^2} = 1 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow k = 1 \quad \text{(ответ не зависит от } x \to +\infty \text{ или } x \to -\infty\text{);}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\Big(f(x) - k\,x\Big) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3-4}{x^2} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{-4}{x^2} = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow b = 0 \quad \text{(ответ не зависит от } x \to +\infty \text{ или } x \to -\infty\text{).}$$

$y = x$ — уравнение наклонной асимптоты.

7. Найдём точки пересечения графика функции с осями координат.

   С осью Ox: $\qquad y = 0 \;\Rightarrow x^3 - 4 = 0,$

   $$\left(x - \sqrt[3]{4}\right)\cdot\left(x^2 + \sqrt[3]{4}x + \sqrt[3]{16}\right) = 0,$$

   $x = \sqrt[3]{4}, \quad x \approx 1{,}32.$

   $x^2 + \sqrt[3]{4}x + \sqrt[3]{16} = 0,\; D < 0 \Rightarrow$ действительных корней нет.

   $(1{,}32; 0)$ — точка пересечения с Ox.

   С осью Oy нет точек пересечения, т. к. $x = 0 \;\notin D(x)$.

8. Определим дополнительные точки.

   Дополнительные точки носят уточняющий характер для построения графика функции, их не должно быть много.

   Для исследуемой функции возьмём четыре дополнительные точки, позволяющие понять, как быстро график функции приближается к своим асимптотам (табл. 1).

Таблица 1 – Дополнительные точки для задачи 9.5

x	-4	-1	1	3
y	$-4{,}25$	-5	-3	$2{,}56$

9. Построим график функции (рис. 20).

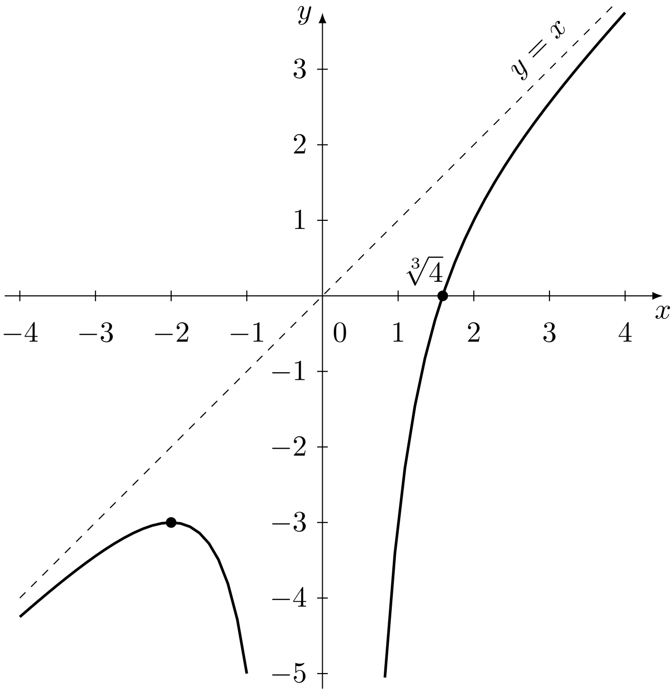


Рисунок 20 – График функции к задаче 9.5

Задачи

Исследовать функцию на локальный экстремум, определить интервалы монотонности функции.

9.6 $y = x^4 + 4\,x^3 - 2\,x^2 - 12x + 5$.

Ответ: $y_{\min} = y(-3) = -4$, $y_{\max} = y(-1) = 12$, $y_{\min} = y(1) = -4$.

$y(x) \nearrow$ при $x \in (-3;-1)$, $(1;+\infty)$; $y(x) \searrow$ при $x \in (-\infty;-3)$, $(-1;1)$.

9.7 $y = (2-x)\,(x+1)^2$.

Ответ: $y_{\min} = y(-1) = 0$, $y_{\max} = y(1) = 4$.

$y(x) \nearrow$ при $x \in (-1;1)$; $y(x) \searrow$ при $x \in (-\infty;-1)$, $(1;+\infty)$.

9.8 $y = \dfrac{2x+3}{3x-5}$.

Ответ: $y(x) \searrow$ при $x \in \left(-\infty; \dfrac{5}{3}\right)$, $\left(\dfrac{5}{3}; +\infty\right)$.

9.9 $y = \sqrt[3]{\left(x^2-6x+5\right)^2}$.

Ответ: $y_{\min} = y(1) = 0$, $y_{\max} = y(3) = \sqrt[3]{16}$, $y_{\min} = y(5) = 0$.

$y(x) \nearrow$ при $x \in (1;3)$, $(5;+\infty)$; $y(x) \searrow$ при $x \in (-\infty;1)$, $(3;5)$.

9.10 $y = x\,\ln^2 x$.

Ответ: $y_{\min} = y(1) = 0$, $y_{\max} = y\left(e^{-2}\right) = 4\,e^{-2}$.

$y(x) \nearrow$ при $x \in \left(0; e^{-2}\right)$, $(1;+\infty)$; $y(x) \searrow$ при $x \in \left(e^{-2}; 1\right)$.

9.11 $y = \sqrt[3]{x^2} - x$.

Ответ: $y_{\min} = y(0) = 0$, $y_{\max} = y\left(\dfrac{8}{27}\right) = \dfrac{4}{27}$.

$y(x) \nearrow$ при $x \in \left(0; \dfrac{8}{27}\right)$; $y(x) \searrow$ при $x \in (-\infty; 0)$, $\left(\dfrac{8}{27}; +\infty\right)$.

9.12 $y = x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Ответ: $y_{\min} = y(-1) = -\dfrac{1}{\sqrt{e}}$, $y_{\max} = y\,(1) = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$.

$y(x) \nearrow$ при $x \in (1;-1)$; $y(x) \searrow$ при $x \in (-\infty;-1)$, $(1;+\infty)$.

9.13 $y = x\sqrt{1-x^2}$.

Ответ: $y_{\min} = y\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\dfrac{1}{2}$, $\quad y_{\max} = y\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$.

$y(x) \nearrow$ при $x \in \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}; \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

$y(x) \searrow$ при $x \in \left(-1; -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}; 1\right)$.

9.14 $y=(2x+1)\sqrt[3]{(x-2)^2}$.

Ответ: $y_{\min}=y(2)=0,\;\; y_{\max}=y(1)=3$.

$y(x)\nearrow$ при $x\in(-\infty;1),\,(2;+\infty);\;\; y(x)\searrow$ при $x\in(1;2)$.

9.15 $y=\dfrac{5}{4\,x^3-9\,x^2+6x}$.

Ответ: $y_{\min}=y\left(\dfrac{1}{2}\right)=4,\;\; y_{\max}=y\,(1)=5$.

$y(x)\nearrow$ при $x\in\left(\dfrac{1}{2};1\right);\;\; y(x)\searrow$ при $x\in(-\infty;0),\;\left(0;\dfrac{1}{2}\right),\;(1;+\infty)$.

Найти наибольшее и наименьшее значения функции.

9.16 $y=-3\,x^4+6\,x^2$ на $[-2;2]$.

Ответ: $y_{\text{наиб}}=y\,(-1)=y(1)=3,\quad y_{\text{наим}}=y\,(-2)=y(2)=-24$.

9.17 $y=2\,x^3-12\,x^2+18x+3$ на $[-1;2]$.

Ответ: $y_{\text{наиб}}=y\,(1)=1,\quad y_{\text{наим}}=y\,(-1)=-29$.

9.18 $y=\dfrac{1-x+x^2}{1+x-x^2}$ на $[0;1]$.

Ответ: $y_{\text{наиб}}=y\,(0)=y(1)=1,\quad y_{\text{наим}}=y\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{5}$.

9.19 $y=2x-\sqrt{x}$ на $[0;4]$.

Ответ: $y_{\text{наиб}}=y\,(4)=6,\quad y_{\text{наим}}=y\left(\dfrac{1}{16}\right)=-\dfrac{1}{8}$.

9.20 $y=\dfrac{x}{x^2+2}$ на $\left[\dfrac{5}{4};4\right]$.

Ответ: $y_{\text{наиб}}=y\left(\sqrt{2}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{4},\quad y_{\text{наим}}=y\,(4)=\dfrac{2}{9}$.

9.21 $y=\sqrt[3]{x}\,(x+1)$ на $[-8;0\,]$.

Ответ: $y_{\text{наиб}}=y\,(-8)=14,\quad y_{\text{наим}}=y\left(-\dfrac{1}{4}\right)=-\dfrac{3}{4\sqrt[3]{4}}$.

9.22 Объём открытого бассейна с квадратным дном равен 32 м^3. Определить размеры бассейна так, чтобы на облицовку его стен и дна пошло наименьшее количество материалов.
Ответ: $4\,\text{м} \times 4\,\text{м} \times 2\,\text{м}$.

9.23 Число 36 разложить на два натуральных множителя, чтобы сумма их квадратов была наименьшей. Ответ: 6 и 6.

9.24 Какое положительное число, будучи сложено с обратным ему числом, даёт наименьшую сумму? Ответ: 1.

9.25 Из квадратного листа жести, сторона которого равна $2a$, требуется сделать открытый сверху ящик наибольшего объёма, вырезая равные квадраты по углам, удаляя их и затем загибая жесть, чтобы образовались бока ящика. Какова должна быть длина стороны у вырезаемых квадратов? Ответ: $\dfrac{a}{3}$.

9.26 Из трёх досок одинаковой ширины сколачивается жёлоб для подачи воды. При каком угле α наклона боковых стенок к днищу жёлоба площадь поперечного сечения жёлоба будет наибольшей? Ответ: $\alpha = \dfrac{2\pi}{3}$.

Исследовать график функции на наличие точек перегиба, определить интервалы сохранения направления выпуклости.

9.27 $y = x^4 - 2\,x^3 - 12\,x^2 - 6x + 5$. Ответ: $M_1(-1;2)$, $M_2(2;-55)$. График функции $\frown$ при $x \in (-1;2)$, $\smile$ при $x \in (-\infty;-1), (2;+\infty)$.

9.28 $y = \dfrac{x^3}{3 - x^2}$. Ответ: $M(0;0)$. График функции $\frown$ при $x \in \left(-\sqrt{3};0\right), \left(\sqrt{3};+\infty\right)$; $\smile$ при $x \in \left(-\infty;-\sqrt{3}\right), \left(0;\sqrt{3}\right)$.

9.29 $y = x^2 e^{-x}$. Ответ: $M_1\left(2-\sqrt{2}; \dfrac{\left(2-\sqrt{2}\right)^2}{e^{2-\sqrt{2}}}\right)$, $M_2\left(2+\sqrt{2}; \dfrac{\left(2+\sqrt{2}\right)^2}{e^{2+\sqrt{2}}}\right)$. График функции $\frown$ при $x \in \left(2-\sqrt{2}; 2+\sqrt{2}\right)$; $\smile$ при $x \in \left(-\infty; 2-\sqrt{2}\right), \left(2+\sqrt{2}; +\infty\right)$.

9.30 $y = \dfrac{x}{1+x^2}$. Ответ: $M_1\left(\sqrt{3}; \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$, $M_2\left(-\sqrt{3}; -\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$, $M_3(0;0)$. График функции $\frown$ при $x \in \left(-\infty; -\sqrt{3}\right), \left(0; \sqrt{3}\right)$; $\smile$ при $x \in \left(-\sqrt{3}; 0\right), \left(\sqrt{3}; +\infty\right)$.

9.31 $y = \sqrt[3]{6\,x^2 - x^3}$. Ответ: $M(6;0)$. График функции $\frown$ при $x \in (-\infty; 0), (0; 6)$; $\smile$ при $x \in (6; +\infty)$.

9.32 $y = \ln\left(x^2 + 2x + 2\right)$. Ответ: $M_1\,(-2; \ln 2)$, $M_2\,(0; \ln 2)$. График функции $\frown$ при $x \in (-\infty; -2), (0; +\infty)$; $\smile$ при $x \in (-2; 0)$.

9.33 $y = e^{\frac{1}{x+2}}$. Ответ: $M\left(-\dfrac{5}{2}; e^{-2}\right)$. График функции $\frown$ при $x \in \left(-\infty; -\dfrac{5}{2}\right)$; $\smile$ при $x \in \left(-\dfrac{5}{2}; 2\right), (-2; +\infty)$.

9.34 $y = x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$. Ответ: $M_1\left(-\sqrt{3}; -\sqrt{3}\cdot e^{-\frac{3}{2}}\right)$, $M_2(0;0)$, $M_3\left(\sqrt{3}; \sqrt{3}\cdot e^{-\frac{3}{2}}\right)$. График функции $\frown$ при $x \in \left(-\infty; -\sqrt{3}\right)$; $\left(0; \sqrt{3}\right)$; $\smile$ при $x \in \left(-\sqrt{3}; 0\right), \left(\sqrt{3}; +\infty\right)$.

Найти все асимптоты графика функции.

9.35 $y = x \cdot \operatorname{arctg} x$. Ответ: $y_{\text{прав}} = \dfrac{\pi}{2}\,x - 1$, $y_{\text{лев}} = -\dfrac{\pi}{2}\,x - 1$.

9.36 $y = \dfrac{x^3}{2\,(x+3)^2}$. Ответ: $x = -3, \quad y = \dfrac{1}{2}\,x - 3$.

9.37 $y = x^2 \cdot e^{-x}$. Ответ: $y_{\text{прав}} = 0$.

9.38 $y = \dfrac{1}{e^x - 1}$. Ответ: $x = 0, \quad y_{\text{прав}} = 0, \quad y_{\text{лев}} = -1$.

9.39 $y = \sqrt{4 + x^2}$. Ответ: $y_{\text{прав}} = x, \quad y_{\text{лев}} = -x$.

9.40 $y = 2\,\ln\dfrac{x-1}{x} + 1$. Ответ: $x = 0, \quad x = 1, \quad y = 1$.

9.41 $y = x \cdot e^{-\frac{2}{x}} + 1$. Ответ: $x = 0, \quad y = x - 1$.

9.42 $y = (x+5) \cdot e^{2-x}$. Ответ: $y_{\text{прав}} = 0$.

Провести полное исследование функции, построить график.

9.43 $y = \dfrac{x^3}{2(x+5)^2}$.

Ответ: $D(x) = (-\infty; -5) \cup (-5; +\infty)$. $y_{\max} = y(-15) = -\dfrac{135}{8}$.
$y \nearrow$ при $x \in (-\infty; -15),\ (-5; 0),\ (0; +\infty)$; $y \searrow$ при $x \in (-15; -5)$.
График функции $\frown$ при $x \in (-\infty; -5),\ (-5; 0)$; график функции $\smile$ при $x \in (0; +\infty)$. $M(0; 0)$ — точка перегиба.
Асимптоты: $x = -5$, $y = \dfrac{1}{2}\,x - 5$.

9.44 $y = \dfrac{e^x}{x}$.

Ответ: $D(x) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. $y \nearrow$ при $x \in (1; +\infty)$;
$y \searrow$ при $x \in (-\infty; 0),\ (0; 1)$. $y_{\min} = y(1) = e$. График функции $\frown$ при $x \in (-\infty; 0)$; график функции $\smile$ при $x \in (0; +\infty)$.
Точек перегиба нет. Асимптоты: $x = 0$, $y_{\text{лев}} = 0$.

9.45 $y=\sqrt[3]{(2-x)\,(x+2)^2}$.

Ответ: $D(x)=\mathbb{R}$. $y_{\min}=y(-2)=0$, $y_{\max}=y\left(\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{4}{3}\sqrt[3]{4}$.

$y\nearrow$ при $x\in\left(-2;\dfrac{2}{3}\right)$; $y\searrow$ при $x\in(-\infty;-2)$, $\left(\dfrac{2}{3};+\infty\right)$. График функции $\frown$ при $x\in(-\infty;2)$; график функции $\smile$ при $x\in(2;+\infty)$. Точка перегиба $M(2;0)$. Асимптота: $y=-x-\dfrac{2}{3}$.

9.46 $y=x\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)-2$.

Ответ: $D(x)=(-\infty;-1)\cup(0;+\infty)$. $y\searrow$ при $x\in(-\infty;-1)$, $(0;+\infty)$. *loc extr* нет. График функции $\frown$ при $x\in(-\infty;-1)$; график функции $\smile$ при $x\in(0;+\infty)$. Точек перегиба нет. Асимптоты: $x=1$, $x=0$, $y=-3$.

ВАРИАНТЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ

Вариант 1

1. Составить уравнение касательной и нормали к кривой в точке с абсциссой равной 3 ($y > 0$): $\begin{cases} x = 3\log_2\left(1+t^2\right); \\ y = \dfrac{4}{\pi}\ \operatorname{arctg} t. \end{cases}$
2. Найти производную функции $y = \sin 2x$ по определению.
3. Вычислить предел с помощью правила Лопиталя:
$\lim\limits_{x\to 4}\left(2 - \dfrac{x}{4}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{8}}.$
4. $3y = e^y - x, \qquad y''_{xx}\Big|_{y=0} = ?$
5. $y = \left(\log_3 \sin 2x\right)^{\sqrt[3]{\operatorname{tg} 3x}}, \qquad \dfrac{dy}{dx} = ?$
6. $y = \dfrac{\sin 5 \cdot 3^{\cos 2x}}{\sqrt{1 - 2\ln 3x}}, \qquad dy = ?$
7. $\begin{cases} x = \dfrac{2t}{1+t^3}; \\ y = \dfrac{t^2}{1+t^2}, \end{cases} \qquad \dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=1} = ?$

Ответы:

1. $3\pi y - 2\ln 2\, x - 3\pi + 6\ln 2 = 0,\ 2\ln 2\, y + 3\pi x - 2\ln 2 - 9\pi = 0.$

2. $y' = 2\cos 2x.$ 3. $e^{\frac{2}{\pi}}.$ 4. $y''_{xx} = -\dfrac{e^y}{\left(e^y - 3\right)^3},\ y''_{xx}\Big|_{\substack{x_0=1 \\ y_0=0}} = \dfrac{1}{8}.$

5. $\dfrac{dy}{dx} = \left(\log_3 \sin 2x\right)^{\sqrt[3]{\operatorname{tg} 3x}} \cdot \ln\left(\log_3 \sin 2x\right) \cdot \dfrac{1}{\sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 3x}} \cdot \dfrac{1}{\cos^2 3x} +$

$+ \sqrt[3]{\operatorname{tg} 3x} \cdot \left(\log_3 \sin 2x\right)^{\sqrt[3]{\operatorname{tg} 3x} - 1} \cdot \dfrac{2\cos 2x}{\ln 3 \sin 2x}.$

6. $dy = -\dfrac{\sin 5 \cdot 3^{\cos 2x}}{x\sqrt{\left(1 - 2\ln 3x\right)^3}} \cdot \Big(2\ln 3x \cdot \sin 2x \cdot (1 - 2\ln 3x) - 1\Big) dx.$

7. $\begin{cases} y'_x = \dfrac{t\left(1+t^3\right)^2}{\left(1+t^2\right)^2\left(1-2t^3\right)}; \\ x = \dfrac{2t}{1+t^3}, \end{cases} \qquad \dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=1} = \dfrac{dy}{dx}\Big|_{t=1} = -1.$

Вариант 2

1. Составить уравнение касательной и нормали к кривой $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$ в точке с ординатой равной 1.
2. Найти производную функции $y = 2^{3x+1}$ по определению.
3. Вычислить предел с помощью правила Лопиталя: $\lim\limits_{x\to 1+0} \ln x \cdot \ln(x-1)$.
4. $y = \left(\arccos \dfrac{2}{x}\right)^{\cos^3(5-x)}, \qquad dy = ?$
5. $\begin{cases} x = \dfrac{6}{\sqrt{1-t^2}}; \\ y = \dfrac{\arcsin t}{2}, \end{cases} \qquad \dfrac{d^2y}{dx^2} = ?$
6. $y^2x^3 + 2x = \dfrac{x}{y} + 5, \qquad \dfrac{dy}{dx} = ?$
7. $y = \dfrac{\operatorname{arcctg}^3\sqrt{x} \cdot \sqrt[5]{\operatorname{ctg}^2 3x}}{2^{5-x^2} \cdot \ln(2x) \cdot \sin(\cos 2)}, \qquad y' = ?$

Ответы:

1. $y = 1,\ x = 3.$ 2. $y' = 3\ln 2 \cdot 2^{3x+1}.$ 3. $0.$

4. $dy = \cos^2(5-x) \cdot \left(\arccos \dfrac{2}{x}\right)^{\cos^3(5-x)} \cdot \left(\dfrac{2\cos(5-x)}{x\sqrt{x^2-4}\arccos\dfrac{2}{x}} + \right.$
$\left. + 3\sin(5-x) \cdot \ln\left(\arccos \dfrac{2}{x}\right)\right) dx.$

5. $\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{\left(t^4-1\right)\sqrt{1-t^2}}{72\,t^3}; \\ x = \dfrac{6}{\sqrt{1-t^2}}. \end{cases}$ 6. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y\left(1 - 3\,x^2y^3 - 2y\right)}{x\left(1 + 2\,x^2y^3\right)}.$

7. $y' = \dfrac{\operatorname{arcctg}^3\sqrt{x} \cdot \sqrt[5]{\operatorname{ctg}^2 3x}}{2^{5-x^2} \cdot \ln(2x) \cdot \sin(\cos 2)} \cdot \left(2\ln 2\,x - \dfrac{3}{2(x+1)\sqrt{x}\operatorname{arcctg}\sqrt{x}} - \right.$
$\left. - \dfrac{12}{5\sin 6x} - \dfrac{1}{x\ln 2x}\right).$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Краткий курс высшей математики: учебник / К. В. Балдин, А. В. Рукосуев, Ф. К. Балдин [и др]. — М. : Дашков и К, 2015. — 512 с.
2. Бермант, А. Ф. Краткий курс математического анализа / А. Ф. Бермант, И. Г. Араманович. — М. : Наука, 1973. — 720 с.
3. Бугров, Я. С. Сборник задач по высшей математике / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. — М. : Физматлит, 2011. — 301 с.
4. Математика в примерах и задачах / Л. Н. Журбенко, Г. А. Никонова, Н. В. Никонова [и др]. — М. : Инфра-М, 2015. — 372 с.
5. Демидович, Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу / Б. П. Демидович. — М. : Лань, 2023. — 624 с.
6. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике / Д. Т. Письменный. — М. : Айрис-пресс, 2022. — 608 с.
7. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления / Н. С. Пискунов. — М. : Наука, Т. 1, 2006. — 416 с.
8. Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления / Г. М. Фихтенгольц. — М. : Лань, 2024. — 608 с.

Учебное издание

Денискина Екатерина Александровна,
Глушкова Антонина Грачевна

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Практикум

Редакционно-издательская обработка
издательства Самарского университета

Подписано в печать 27.12.2024. Формат 60x84 1/16.
Бумага офсетная. Печ. л. 6,0.
Тираж 27 экз. Заказ . Арт. – 10(Р2ПР)/2024.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

443086, САМАРА, МОСКОВСКОЕ ШОССЕ, 34.

Издательство Самарского университета.

443086, Самара, Московское шоссе, 34.