МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Е. А. БАРОВА

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

Рекомендовано редакционно-издательским советом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева» в качестве учебного пособия для обучающихся по основной образовательной программе высшего образования по направлению подготовки 03.03.01 Прикладные математика и физика

САМАРА
Издательство Самарского университета
2024

УДК 517.9(075)
ББК В161.61я7
Б256

Рецензенты: канд. физ.-мат. наук, доц. Н. П. Б а л а б а е в а,
канд. техн. наук, доц. У. В. Б о я р к и н а

Барова, Евгения Анатольевна

Б256 **Обыкновенные дифференциальные уравнения и их применение**: учебное пособие / *Е. А. Барова*. – Самара: Издательство Самарского университета, 2024. – 160 с.

ISBN 978-5-7883-2120-2

В учебном пособии приведены теоретические материалы по теме «Обыкновенные дифференциальные уравнения», рассмотрены различные дифференциальные уравнения как первого порядка, так и высших порядков, а также системы дифференциальных уравнений.

Издание адресовано студентам направления подготовки 03.03.01 Прикладные математика и физика.

УДК 517.9(075)
ББК В161.61я7

ISBN 978-5-7883-2120-2 © Самарский университет, 2024

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение 5

1. Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка 6

1.1. Основные понятия 6

1.2. Дифференциальные уравнения с разделёнными переменными….15

1.3. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными 17

1.4. Однородные уравнения первого порядка и приводящиеся к ним 20

1.5. Обобщенно-однородные уравнения и приводящиеся к ним 27

1.6. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка 32

1.7. Уравнение Бернулли 36

1.8. Уравнение в полных дифференциалах 40

1.9. Уравнение Риккати 47

1.10. Уравнения, неразрешенные относительно производной 51

2. Обыкновенные дифференциальные уравнения высших порядков 60

2.1. Уравнения, решаемые в квадратурах 62

2.2. Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка 72

2.3. Линейные дифференциальные уравнения *n*-го порядка 75

2.4. Линейные однородные дифференциальные уравнения *n*-го порядка 76

2.5. Линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами 83

2.6. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения *n*-го порядка с постоянными коэффициентами 91
3. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений 100
3.1. Метод исключения 100
3.2. Метод собственных значений и собственных векторов 105
4. Устойчивость решений дифференциальных уравнений 119
4.1. Устойчивость по Ляпунову 119
4.2. Устойчивость по первому приближению 131
4.3. Положения равновесия линейных автономных систем 134
Список литературы 159

ВВЕДЕНИЕ

Дифференциальные уравнения – одна из основных дисциплин по программе бакалавриата направления подготовки 03.03.01 Прикладные математика и физика очной формы обучения.

Целью дисциплины является изучение теоретических основ, задач, моделей и методов теории обыкновенных дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений, а также формирование у студентов умения самостоятельно решать задачи научной и прикладной значимости.

Задачи курса:

1) сформировать у студентов теоретические знания и практические навыки в области нахождения решений обыкновенных дифференциальных уравнений первого и высших порядков;

2) сформировать у студентов теоретические знания и практические навыки в области нахождения решений систем дифференциальных уравнений;

3) сформировать умение использовать математический аппарат теории дифференциальных уравнений при решении задач прикладного характера, определять тип исследуемого уравнения и выбирать адекватный метод решения, самостоятельно находить ответы на возникающие в процессе изучения дисциплины вопросы;

4) обеспечение базовой фундаментальной подготовки для дальнейшего изучения образовательных дисциплин, связанных с дифференциальными уравнениями.

В данном пособии приведен теоретический материал по обыкновенным дифференциальным уравнениям первого и высших порядков, по системам дифференциальных уравнений, а также по теории устойчивости.

1. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

1.1. Основные понятия

Определение. *Дифференциальным уравнением* называется уравнение, содержащее независимую переменную x, неизвестную функцию y, зависящую от x, и ее производные y', y'', …, y^n.

$$F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0.$$

Определение. *Порядком дифференциального уравнения* называется порядок старшей производной этого уравнения.

Например, $x^2(y')^3 + \frac{y}{\sin x + 1} = 0$ – дифференциальное уравнение первого порядка, $3y''' - xy''(y')^2 + \ln x\, y = e^x$ – дифференциальное уравнение третьего порядка.

Определение. *Решением дифференциального уравнения n-го порядка* называется функция $y = \varphi(x)$, дифференцируемая n раз и обращающая это дифференциальное уравнение в верное функциональное равенство.

Определение. *Общим решением дифференциального уравнения* называется множество всех решений этого уравнения.

Определение. *Интегральной кривой дифференциального уравнения* называется график решения $y = \varphi(x)$ этого дифференциального уравнения.

Определение. *Семейством интегральных кривых дифференциального уравнения* называется множество всех интегральных кривых дифференциального уравнения.

Если задачу об отыскании всех решений дифференциального уравнения удается свести к вычислению конечного числа интегралов и производных от известных функций и к алгебраическим операциям, то говорят, что *уравнение интегрируется в квадратурах.*

Определение. Дифференциальное уравнение вида

$$y' = f(x, y) \qquad (1)$$

называется *дифференциальным уравнением первого порядка, разрешенным относительно производной* y'.

Замечание. $y' = \frac{dy}{dx}$, при этом символ $\frac{dy}{dx}$ можно рассматривать не только как символ производной, но и как обычное частное двух дифференциалов dy и dx. Тогда уравнение (1) можно записать в виде

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad \leftrightarrow \quad dy = f(x, y)dx.$$

Получили запись уравнения (1) через дифференциалы.

В более общем случае уравнение первого порядка записывается в дифференциальной форме:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0.$$

Задача Коши для дифференциального уравнения первого порядка состоит в нахождении того решения $y = \varphi(x)$ дифференциального уравнения (1), которое удовлетворяет условию $y|_{x=x_0} = y_0$ или $\varphi(x_0) = y_0$, где x_0, y_0 – заранее заданные числа, называемые *начальными условиями задачи Коши*.

Определение. *Частным решением дифференциального уравнения* называется то решение этого уравнения, которое получается из формулы общего решения при каком-либо значении постоянной C.

Например, для дифференциального уравнения $y' - \cos x = 0$ частным решением, удовлетворяющим условию $y|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0$, является функция $y = \sin x - 1$. Это связано с тем, что общее решение уравнения имеет вид $y = \sin x + C$, а при подстановке в него условия $y|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0$, получаем $C = -1$.

Лемма Гронуолла-Беллмана. Если непрерывная функция $Z(x)$ удовлетворяет условию при $x \geq x_0$

$$0 \le Z(x) \le k \int_{x_0}^{x} Z(\tau)d\tau + g(x), \;\; k = \text{const},$$

то выполняется оценка

$$0 \le Z(x) \le k \int_{x_0}^{x} g(\tau)e^{k(x-\tau)}d\tau + g(x).$$

Теорема 1 (теорема Коши о существовании и единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения, разрешенного относительно производной). Пусть для дифференциального уравнения (1) выполняются условия:

1) функция $f(x,y)$ непрерывна в замкнутой области $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon \; |x - x_0| \le a, \;\; |y - y_0| \le b\}$,
2) функция $f(x,y)$ удовлетворяет в области D условию Липшица по y, то есть для любых $y_1,\; y_2 \in [y_0 - b;\; y_0 + b]$ выполняется неравенство $|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \le N(y_1 - y_2)$.

Тогда существует единственное решение $y = \varphi(x)$ дифференциального уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию $\varphi(x_0) = y_0$.

Доказательство. Сначала покажем, что задача Коши для уравнения первого порядка (1) эквивалентна интегральному уравнению

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\tau, y)d\tau\,, \;\; x \in [x_0 - a; x_0 + a]. \qquad (2)$$

Пусть $y = \varphi(x)$ – решение задачи Коши для уравнения (1). Подставив это решение в уравнение (1) получим тождество

$$\varphi'(x) = f\big(x, \varphi(x)\big).$$

Выполним замену $x = \tau$ и проинтегрируем тождество по $\tau \in [x_0; x]$:

$$\int_{x_0}^{x} \varphi'(\tau)d\tau = \int_{x_0}^{x} f\big(\tau, \varphi(\tau)\big)d\tau.$$

Отсюда

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) = \int_{x_0}^{x} f\big(\tau, \varphi(\tau)\big) d\tau.$$

Учитывая, что $\varphi(x) = y$, $\varphi(x_0) = y_0$, $\varphi(\tau) = y$, в результате получим интегральное уравнение (2). Следовательно, любое решение задачи Коши является решением интегрального уравнения.

Докажем теперь эквивалентность в обратную сторону. Пусть существует решение интегрального уравнения (2). Подставив это решение в интегральное уравнение, получим тождество, которое можно продифференцировать. Тогда получим дифференциальное уравнение (1). Следовательно, любое решение интегрального уравнения является решением задачи Коши.

Теперь докажем единственность решения задачи Коши для уравнения (1) с начальным условием $\varphi(x_0) = y_0$. Рассмотрим интегральное уравнение (2), эквивалентное решению задачи Коши. Предположим, что оно имеет два решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$. Тогда их разность $U(x) = y_1(x) - y_2(x)$ удовлетворяет, согласно уравнению (2), интегральному соотношению

$$U(x) = \int_{x_0}^{x} \Big(f\big(\tau, y_1(\tau)\big) - f\big(\tau, y_2(\tau)\big)\Big)\, d\tau\,, \quad U(x_0) = 0.$$

Выполним оценку $U(x)$. Используя условия Липшица

$$|f(\tau, y_1) - f(\tau, y_2)| \le N|y_1 - y_2| = N|U(\tau)|,$$

получаем

$$|U(x)| = \left| \int_{x_0}^{x} \Big(f\big(\tau, y_1(\tau)\big) - f\big(\tau, y_2(\tau)\big)\Big)\, d\tau \right| \le$$

$$\le \int_{x_0}^{x} \big|f\big(\tau, y_1(\tau)\big) - f\big(\tau, y_2(\tau)\big)\big| d\tau \le \int_{x_0}^{x} N|U(\tau)| d\tau = N \int_{x_0}^{x} |U(\tau)| d\tau$$

при $x \in [x_0; x_0 + a]$. Так как $N = \text{const}$, то по лемме Гронуолла-Беллмана из неравенства при $g(x) = 0$ следует

$$|U(x)| \leq N \int_{x_0}^{x} g(x) e^{N(x-\tau)} d\tau + g(x) = 0.$$

Следовательно, $U(x) = 0$.Откуда получаем $y_1(x) = y_2(x)$, что и доказывает единственность решения задачи Коши. Теорема доказана.

Геометрический смысл задачи Коши. Пусть функция $f(x, y)$ в уравнении (1) определена в некоторой области D, непрерывна и имеет в ней ограниченную частную производную $\frac{\partial f}{\partial y}$. Следовательно, через точку $(x_0, y_0) \in D$ проходит единственная интегральная кривая $y = y(x)$, определенная в некоторой окрестности $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$. Тогда каждой точке этой области, согласно уравнению (1), ставится в соответствие определенное значение производной y'. Геометрически производная y' интерпретируется как тангенс угла наклона к оси Ox касательной к интегральной кривой $y = y(x)$. Значит каждой точке области D ставится в соответствие элемент касательной (см. рис. 1). Этому элементу можно придать направление, отметив его стрелкой. Положительное направление стрелки можно брать произвольно, так как $\text{arctg}\frac{dy}{dx}$ определяет угол лишь с точностью до π.

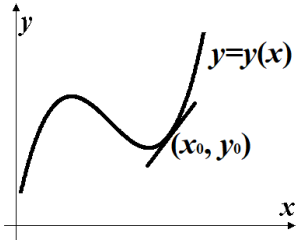

Рис. 1. Геометрический смысл задачи Коши

В этом смысле уравнение (1) определяет в области D *поле направлений*, а задача интегрирования уравнения сводится к построению интегральных кривых, каждая из которых в каждой своей точке

касается поля направлений, то есть касательная в каждой точке кривой имеет направление, совпадающее с направлением поля в этой точке.

Определение. *Изоклиной* называется геометрическое место точек плоскости xOy, в которых касательные к искомым интегральным кривым имеют одно и то же направление ($y' = \text{const}$).

Из этого определения следует, что семейство изоклин дифференциального уравнения (1) задается уравнением $f(x, y) = k$, где k – параметр. Если придать параметру k близкие числовые значения, то можно найти достаточно густую сеть изоклин, с помощью которых приближенно построить интегральные кривые дифференциального уравнения. Нулевая изоклина $f(x, y) = 0$ определяет геометрическое место возможных точек экстремума интегральных кривых.

Например, для уравнения $y' = x$ семейство изоклин задается уравнением $x = k$. Полагая $k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$, получаем изоклины $x = 0, x = \pm 1, x = \pm 2, \ldots$ Через точки каждой изоклины строим касательные к интегральным кривым, при этом $\operatorname{tg}\alpha = k$, где α – угол наклона касательной к положительному направлению оси Ox. Нулевая изоклина $x = 0$ определяет геометрическое место возможных точек экстремума интегральных кривых. Затем приближенно строим интегральные кривые дифференциального уравнения (см. рис. 2).

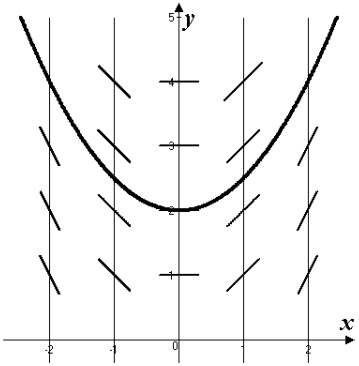

Рис. 2. Интегральная кривая по методу изоклин

Определение. Общим решением дифференциального уравнения первого порядка называется функция вида $y = \varphi(x, C)$, удовлетворяющая условиям:

1) при каждом допустимом значении C функция $y = \varphi(x, C)$ является решением дифференциального уравнения;
2) при любых допустимых начальных условиях существует единственное значение постоянной $C = C_0$ такое, что функция $y = \varphi(x, C_0)$ является решением задачи Коши дифференциального уравнения с заданными начальными условиями.

Иногда в процессе решения дифференциального уравнения общее решение получается заданным неявно соотношением вида $\Phi(x, y, C) = 0$ или $\Phi(x, y) = C$. Эти соотношения называют *общим интегралом дифференциального уравнения.*

Определение. Дифференциальное уравнение вида

$$F(x, y, y') = 0 \qquad (3)$$

называется *дифференциальным уравнением первого порядка, неразрешенным относительно производной*.

Теорема 2 (теорема Коши о существовании и единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения, неразрешенного относительно производной). Существует единственное решение $y = \varphi(x)$ уравнения (3), удовлетворяющее условиям $y(x_0) = y_0$ и $y'(x_0) = t_0$, где t_0 – один из действительных корней уравнения $F(x_0, y_o, t_0) = 0$, если в некоторой окрестности точки (x_0, y_o, t_0) выполнены условия:

1) функция $F(x, y, t)$ – непрерывна по всем трем аргументам;
2) частная производная $\frac{\partial F}{\partial t}$ существует и $\frac{\partial F(x_0, y_o, t_0)}{\partial t} \neq 0$;
3) существует ограниченная по модулю частная производная $\frac{\partial F}{\partial y}$.

Доказательство. Так как по условию теоремы частная производная $\frac{\partial F}{\partial t}$ непрерывна в некоторой окрестности точки (x_0, y_o, t_0) и

$\frac{\partial F(x_0,y_o,t_0)}{\partial t} \neq 0$, то $\frac{\partial F}{\partial t} \neq 0$ в некоторой окрестности точки (x_0, y_o, t_0). Следовательно, в этой окрестности уравнение (3) можно разрешить относительно производной y' и получить уравнение $y' = f(x, y)$, причем $y'(x_0) = t_0 = f(x_0, y_0)$. Тогда мы получаем задачу Коши:

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y), \ \ x \in [x_0, x_0 + \varepsilon], \\ y(x_0) = y_0, \ \ y'(x_0) = f(x_0, y_0), \end{cases} \tag{4}$$

для уравнения, разрешенного относительно производной. Причем ε определяет окрестность $|x - x_0| < \varepsilon$.

Для доказательства существования и единственности решения уравнения $F(x, y, t) = 0$ в окрестности точки (x_0, y_o, t_0) достаточно проверить, выполняются ли условия теоремы 1 о единственности и существования решения для задачи Коши (4).

Согласно теореме 1, должны выполняться условия непрерывности функции $f(x, y)$ и условие Липшица для $f(x, y)$ по y. Так как $F(x, y, t)$ и $\frac{\partial F}{\partial t}$ непрерывны по совокупности аргументов, то при разрешимости уравнения $F(x, y, t) = 0$ относительно t получаем непрерывную функцию $f(x, y)$. Следовательно, условие (1) теоремы 1 существования и единственности выполнено.

Условие Липшица для $f(x, y)$ по y также выполнено, так как выполняется более сильное условие существования непрерывной производной $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ в окрестности точки (x_0, y_o, t_0). Для доказательства этого утверждения вычислим $\frac{\partial t}{\partial y}$ из неявной функции, заданной уравнением $F(x, y, t) = 0$:

$$\frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial t}}.$$

Так как по условию теоремы $\frac{\partial F}{\partial y}$ и $\frac{\partial F}{\partial t}$ непрерывны и $\frac{\partial F}{\partial t} \neq 0$ в окрестности точки (x_0, y_o, t_0), то $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывна в окрестности этой точки.

Следовательно, решение задачи Коши (4) существует и единственно. Однако, в окрестности точки (x_0, y_o, t_0) задача Коши (4) эквивалентна задаче Коши для уравнения (3) с начальными условиями $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = t_0$. Таким образом, задача Коши для уравнения (3) имеет решение, и притом единственное, в окрестности точки (x_0, y_o, t_0). Теорема доказана.

Определение. Точки (x, y), в которых нарушается единственность решений уравнения (3), называются *особыми.*

Если удовлетворяются условия 1) и 3) теоремы существования и единственности, то в особых точках должны одновременно выполняться равенства

$$F(x, y, t) = 0, \quad \frac{\partial F(x, y, t)}{\partial t} = 0, \tag{5}$$

которые представляют собой параметрическую запись t*-дискриминантной кривой.* Исключая из равенств (5) параметр t, в ряде случаев можно получить уравнение этой кривой в неявном виде $\Psi(x, y) = 0$. Если какая-нибудь ветвь $y = \psi(x)$ кривой $\Psi(x, y) = 0$ состоит из особых точек и одновременно является интегральной кривой, то она называется *особой интегральной кривой,* а функция $y = \psi(x)$ – *особым решением* уравнения (3).

Особые решения можно найти путем определения *огибающей семейства интегральных кривых* $\Phi(x, y, C) = 0$ уравнения (3). Огибающая входит в состав C*-дискриминантной кривой*, которая задается уравнениями

$$\Phi(x, y, C) = 0, \quad \frac{\partial \Phi(x, y, C)}{\partial C} = 0.$$

1.2. Дифференциальные уравнения с разделёнными переменными

Определение. *Дифференциальным уравнением с разделёнными переменными* называется дифференциальное уравнение вида

$$M(x)dx + N(y)dy = 0. \qquad (6)$$

Решение уравнения основано на следующей теореме.

Теорема. Если функции $M(x)$ и $N(y)$ интегрируемы, то общий интеграл дифференциального уравнения (6) имеет вид

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C, \qquad (7)$$

где C – произвольная постоянная.

Доказательство. Пусть функция $y = \varphi(x)$ является решением дифференциального уравнения (6). Тогда при подстановке этой функции в уравнение получаем верное тождество

$$M(x)dx + N\big(\varphi(x)\big)d\big(\varphi(x)\big) = 0$$

или

$$\Big(M(x) + N\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)\Big)\,dx = 0.$$

Проинтегрируем обе части равенства:

$$\int \Big(M(x) + N\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)\Big)\,dx = \int 0dx.$$

Тогда

$$\int M(x)dx + \int N\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)dx = C, \;\; C = \text{const}.$$

Выполнив во втором интеграле слева замену $y = \varphi(x)$, получим

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C.$$

Теорема доказана.

Замечание. Если в уравнении (6) разделить обе части на dx, то дифференциальное уравнение примет вид:

$$M(x) + N(y)y' = 0.$$

► Рассмотрим применение теоремы для дифференциального уравнения

$$(x^2+1)dx+\frac{y}{y^2-1}dy=0.$$

Имеем дифференциальное уравнение первого порядка с разделёнными переменными. Найдем первообразные каждого слагаемого дифференциального уравнения

$$\int(x^2+1)dx+\int\frac{y}{y^2-1}dy=C.$$

Тогда общий интеграл рассматриваемого дифференциального уравнения принимает вид:

$$\frac{1}{3}x^3+x+\frac{1}{2}\ln|y^2-1|=C,\ \ C\in\mathbb{R}.\ \blacktriangleleft$$

Замечание. Если в левой части равенства (7) стоит сумма логарифмов, то удобно записать $C=\log_a C_1$, где C_1 – произвольная положительная постоянная.

► Рассмотрим замечание для дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{y}+\frac{dx}{x}=0.$$

Имеем дифференциальное уравнение первого порядка с разделёнными переменными. Найдем первообразные каждого слагаемого дифференциального уравнения

$$\int\frac{dy}{y}+\int\frac{dx}{x}=C_0.$$

Тогда общий интеграл примет вид:

$$\ln|y|+\ln|x|=C_0,\quad C_0\in\mathbb{R}.$$

Обозначим $C_0=\ln|C|, C\neq 0$. Тогда последнее равенство примет вид

$$\ln|yx|=\ln|C|,\ \ C\neq 0.$$

Отсюда находим общее решение рассматриваемого уравнения

$$y=\frac{C}{x},\ \ C\neq 0.\ \blacktriangleleft$$

1.3. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Определение. *Дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными* называется уравнение вида

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0. \qquad (8)$$

Приведём уравнение (8) к уравнению с разделёнными переменными, разделив обе части уравнения на произведение $N_1(y)M_2(x) \neq 0$.

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0.$$

Далее находим первообразные каждого слагаемого записанного равенства, учитывая, что первообразная правой части равна C. Получим общий интеграл или общее решение дифференциального уравнения.

Затем возвращаемся к условию $N_1(y)M_2(x) = 0$ и выясняем, являются ли решения этого уравнения решениями дифференциального уравнения. Если да, то содержаться ли эти решения в общем решение дифференциального уравнения или являются особыми. При наличии особых решений дифференциального уравнения их выносят в ответ наряду с общим решением этого уравнения.

► Применим вышеизложенное к двум дифференциальным уравнениям. Сначала рассмотрим уравнение

$$x(y^2 - 1)dx + y(x^2 - 1)dy = 0.$$

Имеем дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. Разделим переменные, поделив на $(y^2 - 1)(x^2 - 1) \neq 0$. Тогда уравнение примет вид:

$$\frac{x}{x^2 - 1}dx + \frac{y}{y^2 - 1}dy = 0.$$

Это дифференциальное уравнение первого порядка с разделёнными переменными. Вычислив первообразные, получим общий интеграл

$$\ln|x^2 - 1| + \ln|y^2 - 1| = \ln|C|, \;\; C \neq 0,$$

$$(x^2 - 1)(y^2 - 1) = C, \;\; C \neq 0.$$

Результат получен при условии, что $(y^2-1)(x^2-1)\neq 0$. Пусть теперь $(y^2-1)(x^2-1)=0$. Функции $y=\pm 1$, $x=\pm 1$ являются решениями заданного дифференциального уравнения. Очевидно, что эти решения получаются из общего решения дифференциального уравнения при $C=0$. Поэтому выражение

$$(x^2-1)(y^2-1)=C$$

является общим интегралом данного дифференциального уравнения при любом $C\in\mathbb{R}$. ◄

► Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y'+\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}=0.$$

Запишем уравнение в виде

$$\frac{dy}{dx}+\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}=0.$$

Имеем дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Для его решения умножим обе части на dx и разделим на $\sqrt{1-y^2}\neq 0$:

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=0.$$

Получили дифференциальное уравнение первого порядка с разделёнными переменными. Вычислив первообразные, получим общий интеграл уравнения:

$$\arcsin x+\arcsin y=C,\ \ C\in\mathbb{R},$$

или общее решение

$$y=\sin(C-\arcsin x),\ \ C\in\mathbb{R}.$$

Результат получен при условии, что $\sqrt{1-y^2}\neq 0$. Пусть теперь $\sqrt{1-y^2}=0$. Функции $y=\pm 1$ являются решениями заданного уравнения, но не могут быть получены из общего решения ни при каких

значениях C, поэтому они являются особыми решениями дифференциального уравнения.

Итак, решениями данного дифференциального уравнения являются функции $y = \pm 1$, $y = \sin(C - \arcsin x)$, $C \in \mathbb{R}$. ◄

Замечание. Уравнение вида

$$y' = f(ax + by)$$

сводится к уравнению с разделяющимися переменными при помощи замены $z = ax + by$. В этом случае $z' = a + by'$, откуда $y' = \frac{z' - a}{b}$, при этом дифференциальное уравнение принимает вид:

$$z' = bf(z) + a.$$

Разделив обе части уравнения на $bf(z) + a \neq 0$ и умножив на dx, получаем дифференциальное уравнение с разделёнными переменными:

$$\frac{dz}{bf(z) + a} = dx.$$

Решаем получившееся уравнение, и рассматриваем случай, когда $bf(z) + a = 0$.

► Рассмотрим применение замечания для дифференциального уравнения

$$y'(x - y)^2 = 1.$$

Разделим обе части уравнения на $(x - y)^2 \neq 0$. Тогда

$$y' = \frac{1}{(x - y)^2}.$$

Выполним замену $z = x - y$. Отсюда $z' = 1 - y'$ или $y' = 1 - z'$. Следовательно, дифференциальное уравнение примет вид:

$$1 - z' = \frac{1}{z^2},$$

$$z' = \frac{z^2 - 1}{z^2}.$$

Получили дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Умножим обе части уравнения на dx и разделим на $\frac{z^2-1}{z^2} \neq 0$. Тогда имеем

$$\frac{z^2}{z^2-1}dz = dx.$$

Вычислив первообразные, получим

$$\int \frac{z^2}{z^2-1}dz = \int dx + C,$$

$$z + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right| = x + C \quad - \quad \text{общий интеграл.}$$

Рассмотрим случай, когда $\frac{z^2-1}{z^2} = 0$. Функции $z = \pm 1$ являются решениями дифференциального уравнения и не получаются из общего интеграла ни при каком C, следовательно, являются особыми решениями.

Выполнив обратную замену $z = x - y$, получим общий интеграл

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-y-1}{x-y+1}\right| - y = C$$

и особые решения $y = x \pm 1$. ◄

1.4. Однородные уравнения первого порядка и приводящиеся к ним

Определение. Функция $f(x, y)$ называется *однородной функцией степени* α, если в результате умножения обоих ее аргументов x и y на одну и ту же величину t она приобретает множитель t^α, то есть $f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y)$.

Например,

1) функция $f(x, y) = 3x^2 + y^2 - 2xy$ является однородной функцией второй степени однородности, так как

$$f(tx, ty) = 3(tx)^2 + (ty)^2 - 2txty =$$
$$= t^2(3x^2 + y^2 - 2xy) = t^2 f(x, y);$$

2) функция $f(x,y)=\ln\frac{x}{y}-\frac{\sqrt[3]{x^2y}}{x-y}$ является однородной функцией нулевой степени, так как

$$f(tx,ty)=\ln\frac{tx}{ty}-\frac{\sqrt[3]{(tx)^2ty}}{tx-ty}=\ln\frac{x}{y}-\frac{\sqrt[3]{x^2y}}{x-y}=f(x,y).$$

Теорема Эйлера. Для однородной функции степени α справедливо тождество Эйлера:

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=\alpha f.$$

Доказательство. Рассмотрим однородную функцию $f(x,y)$ степени однородности α. Тогда имеет место равенство:

$$f(tx,ty)=t^{\alpha}f(x,y).$$

Продифференцируем последнее равенство по t:

$$\frac{\partial f}{\partial(tx)}\cdot\frac{\partial(tx)}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial(ty)}\cdot\frac{\partial(ty)}{\partial t}=\alpha t^{\alpha-1}f(x,y),$$

$$\frac{\partial f}{\partial(tx)}\cdot x+\frac{\partial f}{\partial(ty)}\cdot y=\alpha t^{\alpha-1}f(x,y).$$

Положим $t=1$. Тогда получим:

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=\alpha f.$$

Теорема доказана.

Определение. Уравнение вида

$$y'=f(x,y) \tag{9}$$

называется *однородным*, если функция $f(x,y)$ является однородной функцией нулевой степени однородности, то есть для любого t выполняется равенство

$$f(tx,ty)=f(x,y). \tag{10}$$

Замечание. Дифференциальное уравнение вида

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$$

является однородным уравнением, если $M(x,y)$ и $N(x,y)$ – однородные функции одной и той же степени однородности. В этом случае уравнение можно представить в виде $y' = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$.

Рассмотрим уравнение (9), где $f(x,y)$ – однородная функция нулевой степени, то есть выполняется равенство (10) для любого t, а значит и для $t = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$. Тогда равенство (10) примет вид:

$$f\left(\frac{1}{x} \cdot x, \frac{1}{x} \cdot y\right) = f(x,y)$$

или

$$f(x,y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right).$$

Обозначим

$$f(x,y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right) = F\left(\frac{y}{x}\right).$$

Таким образом, дифференциальное уравнение (9) принимает вид:

$$y' = F\left(\frac{y}{x}\right).$$

Выполним замену $\frac{y}{x} = z$. Отсюда $y = xz$, $y' = z + xz'$. Тогда

$$z + xz' = F(z).$$

Решим данное дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

$$x\frac{dz}{dx} = F(z) - z,$$

$$xdz = (F(z) - z)dx.$$

Разделим обе части уравнения на $(F(z) - z)x \neq 0$:

$$\frac{dz}{F(z) - z} = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируя, находим $z = z(x, C)$, а затем функцию $y = x \cdot z(x, C)$. Далее рассматриваем особый случай, когда $F(z) - z = 0$ ($x \neq 0$ из условия замены).

► Применим рассмотренный метод к дифференциальному уравнению

$$y' = -\frac{x^2 + y^2 + xy}{x^2}.$$

Определим тип дифференциального уравнения первого порядка. Для этого рассмотрим функцию $f(x, y) = -\frac{x^2+y^2+xy}{x^2}$. Так как

$$f(tx, ty) = -\frac{(tx)^2 + (ty)^2 + txty}{(tx)^2} = -\frac{x^2 + y^2 + xy}{x^2} = f(x, y),$$

то функция $f(x, y)$ – однородная функция нулевой степени. Значит, уравнение является однородным дифференциальным уравнением.

Введем замену $z = \frac{y}{x}$. Тогда $y = xz$, $y' = z + xz'$ и уравнение примет вид

$$z + xz' = -\frac{x^2 + x^2z^2 + x^2z}{x^2},$$

$$xz' + (z + 1)^2 = 0,$$

$$xdz + (z + 1)^2dx = 0.$$

Разделив обе части уравнения на $(z + 1)^2x \neq 0$, получим

$$\frac{dx}{x} + \frac{dz}{(z + 1)^2} = 0.$$

Интегрируя каждое слагаемое, находим

$$\ln|x| - \frac{1}{z + 1} = C,$$

$$z = \frac{1}{\ln|x| - C} - 1.$$

Рассмотрим случай, когда $(z + 1)^2 = 0$. Функция $z = -1$ является решением заданного дифференциального уравнения, но не получается из общего решения, следовательно, является особым решением.

Выполнив обратную замену, получим общее решение $y = x\left(\frac{1}{\ln|x|-C} - 1\right)$ и особое решение $y = -x$. ◄

Замечание. К однородному уравнению приводится уравнение

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right).$$

Если $a_1x + b_1y = k(a_2x + b_2y)$, то уравнение сводится к виду $y' = f(ax + by)$.

Если $a_1x + b_1y \neq k(a_2x + b_2y)$, то вводим новые переменные

$$\xi = x - x_0, \quad \eta = y - y_0,$$

где постоянные x_0 и y_0 являются решениями системы

$$\begin{cases} a_1x_0 + b_1y_0 + c_1 = 0, \\ a_2x_0 + b_2y_0 + c_2 = 0. \end{cases}$$

В результате для функции $\eta = \eta(\xi)$ получим уравнение

$$\eta' = f\left(\frac{a_1\xi + b_1\eta}{a_2\xi + b_2\eta}\right).$$

Последнее, после деления числителя и знаменателя аргумента функции f на ξ, принимает вид однородного уравнения, правая часть которого зависит только от отношения переменных $\frac{\eta}{\xi}$.

► Проиллюстрируем замечание на дифференциальном уравнении

$$y' = \frac{y - x - 1}{y + x - 3}.$$

Находим точку пересечения прямых, полученных приравниванием к нулю числителя и знаменателя:

$$\begin{cases} y_0 - x_0 - 1 = 0, \\ y_0 + x_0 - 3 = 0. \end{cases}$$

Отсюда $x_0 = 1$, $y_0 = 2$. После замены $\xi = x - 1$, $\eta = y - 2$ уравнение принимает вид

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\eta - \xi}{\eta + \xi}.$$

Получили однородное уравнение, которое решается заменой $z = \frac{\eta}{\xi}$.

Отсюда $\eta = z\xi$, $\eta' = z + z'\xi$. Тогда уравнение примет вид:

$$z + z'\xi = \frac{z\xi - \xi}{z\xi + \xi},$$

$$\xi\frac{dz}{d\xi}=-\frac{z^2+1}{z+1}.$$

Умножим обе части на $d\xi$ и разделим на $\frac{z^2+1}{z+1}\xi\neq 0$. Получим дифференциальное уравнение с разделёнными переменными

$$\frac{z+1}{z^2+1}dz=-\frac{d\xi}{\xi}.$$

Решая его, находим

$$\int\frac{z+1}{z^2+1}dz=-\int\frac{d\xi}{\xi}+C_0,$$

$$\frac{1}{2}\ln|z^2+1|+\operatorname{arctg}z=-\ln|\xi|+C_0.$$

Выполнив замену $C_0=\ln|C|$, где $C\neq 0$, получим

$$\ln\left|\xi\sqrt{z^2+1}\right|=\ln|Ce^{-\operatorname{arctg}z}|,$$

$$\xi\sqrt{z^2+1}=Ce^{-\operatorname{arctg}z}.$$

Выполнив замену $z=\frac{\eta}{\xi}$, получим

$$\xi\cdot\sqrt{\left(\frac{\eta}{\xi}\right)^2+1}=Ce^{-\operatorname{arctg}\frac{\eta}{\xi}},$$

$$\sqrt{\eta^2+\xi^2}=Ce^{-\operatorname{arctg}\frac{\eta}{\xi}}.$$

Выполнив замену $\xi=x-1$, $\eta=y-2$, находим общий интеграл заданного дифференциального уравнения:

$$\sqrt{(y-2)^2+(x-1)^2}=Ce^{-\operatorname{arctg}\frac{y-2}{x-1}}.\ \blacktriangleleft$$

Замечание. Уравнение вида

$$xy'=y+f(x)g\left(\frac{y}{x}\right)$$

приводится к уравнению с разделяющимися переменными при помощи замены $z=\frac{y}{x}$. В этом случае $y=zx$, откуда $y'=z'x+z$. При этом заданное дифференциальное уравнение принимает вид:

$$x(z'x + z) = zx + f(x)g(z),$$
$$z'x^2 = f(x)g(z).$$

Разделив обе части уравнения на $x^2 g(z) \neq 0$ и умножив на dx, получаем дифференциальное уравнение с разделёнными переменными:

$$\frac{dz}{g(z)} = \frac{f(x)}{x^2}dx.$$

Решаем полученное уравнение, и рассматриваем случай, когда $g(z) = 0$.

► Рассмотрим замечание для дифференциального уравнения

$$xy' = y + \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Запишем уравнение в виде:

$$xy' = y + x\sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}.$$

Выполним замену $z = \frac{y}{x}$. В этом случае $y = zx$, откуда $y' = z'x + z$, при этом заданное дифференциальное уравнение принимает вид:

$$z'x^2 = x\sqrt{1 + z^2}.$$

Получили дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Разделим его на $x^2\sqrt{1 + z^2} \neq 0$. Получим уравнение с разделёнными переменными:

$$\frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}} = \frac{dx}{x}.$$

Отсюда

$$\ln\left|z + \sqrt{1 + z^2}\right| = \ln|x| + C_0.$$

Или, обозначив $C_0 = \ln|C|$,

$$z + \sqrt{1 + z^2} = Cx.$$

Выполнив обратную замену $z = \frac{y}{x}$, получим искомый общий интеграл:

$$y + \sqrt{x^2 + y^2} = Cx^2. \blacktriangleleft$$

1.5. Обобщенно-однородные уравнения и приводящиеся к ним

Определение. Уравнение вида

$$y' = x^{k-1} f(x, y) \tag{11}$$

называется *обобщенно-однородным дифференциальным уравнением*, если для любого t выполняется равенство

$$f\left(tx,\ t^k y\right) = f(x, y). \tag{12}$$

Рассмотрим уравнение (11). Пусть для функции $f(x, y)$ выполняется равенство (12). Оно выполняется для любого t, а значит и для $t = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$. Таким образом, равенство (12) примет вид:

$$f\left(\frac{1}{x} \cdot x, \left(\frac{1}{x}\right)^k \cdot y\right) = f(x, y),$$

$$f(x, y) = f\left(1, \frac{y}{x^k}\right).$$

Обозначим

$$f(x, y) = f\left(1, \frac{y}{x^k}\right) = F\left(\frac{y}{x^k}\right).$$

Таким образом дифференциальное уравнение (11) принимает вид:

$$y' = x^{k-1} F\left(\frac{y}{x^k}\right).$$

Выполним замену $\frac{y}{x^k} = z$. Отсюда $y = x^k z$, $y' = kx^{k-1} z + x^k z'$. Тогда последнее уравнение примет вид:

$$kx^{k-1} z + x^k z' = x^{k-1} F(z).$$

Разделив на x^{k-1}, получим

$$xz' = F(z) - kz.$$

Решая дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными, находим $z = z(x, C)$, а затем функцию $y = x^k z(x, C)$.

► Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y^2 dx = \left(\frac{y^2}{x} + x^3\right) dy.$$

Запишем его в виде:

$$y' = x\frac{y^2}{y^2 + x^4}.$$

Сравним полученное уравнение с общим видом обобщенно однородного уравнения. Тогда $k - 1 = 1$, то есть $k = 2$, $f(x, y) = \frac{y^2}{y^2+x^4}$. Так как

$$f(tx, t^2y) = \frac{t^4y^2}{t^4y^2 + t^4x^4} = \frac{y^2}{y^2 + x^4},$$

то имеем обобщенно-однородное уравнение.

Выполним замену $\frac{y}{x^2} = z$. Отсюда $y = x^2z$, $y' = 2xz + x^2z'$. В результате уравнение примет вид:

$$2xz + x^2z' = \frac{x(x^2z)^2}{(x^2z)^2 + x^4},$$

$$2xz + x^2z' = \frac{xz^2}{z^2 + 1}\Bigg| : x \neq 0,$$

$$2z + xz' = \frac{z^2}{z^2 + 1},$$

$$xdz = \frac{z^2 - 2z^3 - 2z}{z^2 + 1}dx.$$

Получили дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Разделим обе части на $x\frac{z^2-2z^3-2z}{z^2+1} \neq 0$. Получили дифференциальное уравнение с разделёнными переменными

$$\frac{z^2 + 1}{z^2 - 2z^3 - 2z}dz = \frac{dx}{x}.$$

Найдем первообразные каждого слагаемого:

$$\int \frac{z^2 + 1}{z^2 - 2z^3 - 2z}dz = \int \frac{dx}{x} + C.$$

Интеграл левой части уравнения вычисляется путем разложения дроби на сумму простейших дробей:

$$\int \frac{z^2+1}{z^2-2z^3-2z}dz = -\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{2z^2-z+2}\right)dz =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\frac{dz}{z} - \frac{1}{4}\int\frac{dz}{\left(z-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{15}{16}} = -\frac{1}{2}\ln|z| - \frac{1}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\frac{4z-1}{\sqrt{15}}.$$

В результате получаем общий интеграл дифференциального уравнения:

$$-\frac{1}{2}\ln|z| - \frac{1}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\frac{4z-1}{\sqrt{15}} = \ln|x| + C.$$

Выполнив обратную замену $z = \frac{y}{x^2}$, получим общий интеграл заданного дифференциального уравнения:

$$-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{y}{x^2}\right| - \frac{1}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\frac{4y-x^2}{\sqrt{15}x^2} = \ln|x| + C.$$

Рассмотрим случай, когда $x\frac{z^2-2z^3-2z}{z^2+1} = 0$. Функция $x = 0$ не является решением дифференциального уравнения в силу его записи, а функция $z = 0$ является решением дифференциального уравнения, при этом не входит в общий интеграл ни при каком задании C, то есть является особым решением.

В результате получили общий интеграл

$$\frac{1}{2}\ln|y| + \frac{1}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\frac{4y-x^2}{\sqrt{15}x^2} = -C$$

и особое решение $y = 0$. ◄

Замечание. К обобщенно-однородному уравнению сводится уравнение

$$y' = y\,f\left(e^{\lambda x}y\right).$$

Для этого надо сделать замену $z = e^x$ и положить $\lambda = -k$. Учитывая, что

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dz}\cdot e^x = \frac{dy}{dz}\cdot z,$$

получим

$$\frac{dy}{dz} \cdot z = y\, f\left(\frac{y}{z^k}\right)$$

или

$$\frac{dy}{dz} = \frac{y}{z}\, f\left(\frac{y}{z^k}\right).$$

Выполним замену $\frac{y}{z^k} = u$. Тогда $y = z^k u$ и $\frac{dy}{dz} = kz^{k-1}u + z^k u'$. Следовательно, дифференциальное уравнение примет вид:

$$kz^{k-1}u + z^k u' = \frac{z^k u}{z}\, f(u).$$

Разделив на $z^{k-1} \neq 0$, получим

$$ku + zu' = u\, f(u)$$

или

$$zu' = u\, f(u) - ku.$$

Получили дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Решая его, находим $u = u(z, C)$, а затем функцию $y = z^k u(z, C)$ и выполняем обратную замену $z = e^x$ и $k = -\lambda$. Таким образом, получаем общее решение дифференциального уравнения:

$$y = \frac{u(e^x, C)}{e^{\lambda x}}.$$

► Рассмотрим применение замечания для дифференциального уравнения

$$y' = \frac{y}{ye^{2x} - 1}.$$

Выполнив замену $z = e^x$, получим

$$y' = \frac{y}{yz^2 - 1}.$$

Обозначим $k = -\lambda = -2$. Тогда

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot e^x = z\frac{dy}{dz}.$$

В этом случае уравнение примет вид

$$z\frac{dy}{dz} = \frac{y}{yz^2 - 1}.$$

Выполним замену $\frac{y}{z^k} = u$, то есть $yz^2 = u$. Отсюда

$$y = \frac{u}{z^2}, \qquad \frac{dy}{dz} = \frac{u'z^2 - 2zu}{z^4} = \frac{u'z - 2u}{z^3}.$$

Значит уравнение примет вид:

$$z\frac{u'z - 2u}{z^3} = \frac{u}{z^2} \cdot \frac{1}{u - 1}.$$

Выполним преобразования:

$$zu' - 2u = \frac{u}{u - 1},$$

$$zu' = \frac{2u^2 - u}{u - 1},$$

$$zdu = \frac{2u^2 - u}{u - 1}dz.$$

Получили дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Разделив обе части на $z\frac{2u^2-u}{u-1} \neq 0$, получим дифференциальное уравнение с разделёнными переменными:

$$\frac{u - 1}{2u^2 - u}du = \frac{dz}{z}.$$

Решим его, вычислив первообразные каждого слагаемого.

$$\int \frac{u - 1}{2u^2 - u}du = \int \frac{dz}{z} + C_0.$$

Вычислим левый интеграл

$$\ln\left|\frac{u}{\sqrt{2u - 1}}\right| = \ln|z| + C_0.$$

Переобозначив $C_0 = \ln|C|$, $C \neq 0$, получаем общий интеграл дифференциального уравнения:

$$\ln\left|\frac{u}{\sqrt{2u - 1}}\right| = \ln|z| + \ln|C|, \quad C \neq 0,$$

$$u = Cz\sqrt{2u - 1}, \quad C \neq 0.$$

Рассмотрим случай $z\frac{2u^2-u}{u-1} = 0$. Функции $u = 0$ и $u = \frac{1}{2}$ являются решениями дифференциального уравнения, но $u = 0$ получаются из общего при $C = 0$, а $u = \frac{1}{2}$ не получается из общего решения ни при

каком действительном значении C, то есть является особым решением. Тогда дифференциальное уравнение имеет общий интеграл

$$u = Cz\sqrt{2u-1},\ \ C \in \mathbb{R},$$

и особое решение $u = \frac{1}{2}$.

Выполнив обратную замену $u = yz^2$ и $z = e^x$, получим решения заданного дифференциального уравнения:

$$yz^2 = Cz\sqrt{2yz^2-1},\ \ C \in \mathbb{R},\ \ y = \frac{1}{2z^2},$$

$$yz = C\sqrt{2yz^2-1},\ \ C \in \mathbb{R},\ \ y = \frac{1}{2z^2},$$

$$ye^x = C\sqrt{2ye^{2x}-1},\ \ C \in \mathbb{R},\ \ y = \frac{1}{2e^{2x}}.$$

1.6. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Определение. *Линейным дифференциальным уравнением первого порядка* называется уравнение вида

$$y' + p(x)y = q(x), \qquad (13)$$

где $p(x)$ и $q(x)$ – непрерывные в интервале (a, b) функции.

Линейное дифференциальное уравнение (13) будет однородным, если $q(x) \equiv 0$, и неоднородным, если $q(x) \neq 0$.

Однородное линейное дифференциальное уравнение легко сводится к уравнению с разделяющимися переменными. Запишем уравнение $y' + p(x)y = 0$ в виде

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0.$$

Умножив обе части уравнения на dx и разделив на $yp(x) \neq 0$, получим дифференциальное уравнение с разделёнными переменными, решив которое, получим общий интеграл дифференциального уравнения

$$\ln|y| + \int p(x)dx = C.$$

Откуда, выразив y, найдем общее решение линейного однородного дифференциального уравнения

$$y = C\, e^{-\int p(x)dx}.$$

Для решения линейного неоднородного дифференциального уравнения (13) существует несколько способов.

I способ. *Метод вариации произвольной постоянной (метод Лагранжа).*

Метод заключается в том, что общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения (13) ищется в том же виде, что и общее решение соответствующего однородного уравнения, в котором вместо произвольной постоянной берётся произвольная функция:

$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx}.$$

Так как функция y является решением уравнения (13), то она обращает его в верное функциональное равенство:

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x).$$

Тем самым задача по отысканию общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения сводится к нахождению функции $C(x)$.

$$C'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx}.$$

Отсюда

$$C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C.$$

Подставив найденную функцию $C(x)$ в формулу общего решения, получим общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения первого порядка

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right).$$

► Рассмотрим метод Лагранжа для уравнения

$$y' - \frac{2x}{1+x^2}y = 1 + x^2.$$

Заданное уравнение является неоднородным линейным дифференциальным уравнением первого порядка.

Рассмотрим соответствующее однородное уравнение

$$y' - \frac{2x}{1+x^2}y = 0.$$

Это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Решим его, умножив на dx и разделив на $y \neq 0$:

$$\frac{dy}{y} - \frac{2xdx}{1+x^2} = 0,$$

$$\int \frac{dy}{y} - \int \frac{2xdx}{1+x^2} = C_0,$$

$$\ln|y| - \ln|1+x^2| = C_0 = \ln|C|,$$

$$y = C(1+x^2).$$

Общее решение неоднородного дифференциального уравнения будем искать в виде

$$y = C(x)(1+x^2).$$

Для определения неизвестной функции $C(x)$ подставим функцию y в данное уравнение, получим тождество

$$C'(x)(1+x^2) + C(x)2x - 2xC(x) = 1 + x^2.$$

Тогда $C'(x) = 1$, $C(x) = x + C$.

Итак, общее решение данного дифференциального уравнения имеет вид

$$y = (x + C)(1+x^2). \blacktriangleleft$$

II способ. *Метод Бернулли.* Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения (13) ищется в виде $y = U(x)V(x)$, где $U(x)$, $V(x)$ – непрерывно дифференцируемые произвольные функции. Продемонстрируем метод пошагово.

Так как функция y является решением уравнения (13), то она обращает его в верное функциональное равенство. Подставив её в уравнение, получим

$$U'(x)V(x) + U(x)V'(x) + p(x)U(x)V(x) = q(x).$$

Сгруппируем второе и третье слагаемые

$$U'(x)V(x) + U(x)\big(V'(x) + p(x)V(x)\big) = q(x). \qquad (14)$$

Функцию $V(x)$ ищем как частное решение уравнения

$$V'(x) + p(x)V(x) = 0.$$

Например, при равенстве произвольной постоянной нулю, имеем

$$V(x) = e^{-\int p(x)dx}.$$

Подставив найденную функцию $V(x)$ в равенство (14), получим уравнение

$$U'(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x).$$

Отсюда

$$U(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C.$$

Записываем общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения

$$y = U(x)V(x) = e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right).$$

► Рассмотрим метод Бернулли для рассмотренного в методу Лагранжа дифференциального уравнения

$$y' - \frac{2x}{1+x^2}y = 1 + x^2.$$

Решение ищем в виде $y = U(x)V(x)$. Подставим функцию в данное уравнение, получим верное функциональное тождество

$$U'(x)V(x) + U(x)V'(x) - \frac{2x}{1+x^2}\,U(x)V(x) = 1 + x^2.$$

Сгруппируем второе и третье слагаемые.

$$U'(x)V(x) + U(x)\left(V'(x) - \frac{2x}{1+x^2}V(x)\right) = 1 + x^2.$$

Будем считать, что функция $V(x)$ такова, что

$$V'(x) - \frac{2x}{1+x^2}V(x) = 0.$$

Отсюда

$$\frac{dV}{V} - \frac{2x}{1+x^2}dx = 0.$$

$$\ln|V| - \ln|1+x^2| = C.$$

Будем считать, что $C = 0$. Тогда $V(x) = 1 + x^2$. Следовательно, тождество вида (14) примет вид

$$U'(x)(1+x^2) = 1 + x^2.$$

Отсюда $U'(x) = 1$, $U(x) = x + C$.

Таким образом, общее решение заданного уравнения будет

$$y = (x + C)(1 + x^2). \blacktriangleleft$$

1.7. Уравнение Бернулли

Определение. *Уравнением Бернулли* называется уравнение вида

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha}, \quad \alpha \neq 0;\ 1, \tag{15}$$

где $p(x)$ и $q(x)$ непрерывные в интервале (a, b) функции.

I способ. *Метод Бернулли.* Общее решение дифференциального уравнения ищется в виде $y = U(x)V(x)$, где $U(x)$, $V(x)$ – непрерывно дифференцируемые произвольные функции.

Так как функция y является решением уравнения (15), то она обращает его в верное функциональное равенство. Подставив её в уравнение, получим

$$U'(x)V(x) + U(x)V'(x) + p(x)U(x)V(x) = q(x)\big(U(x)V(x)\big)^{\alpha}.$$

Сгруппируем второе и третье слагаемые

$$U'(x)V(x) + U(x)\big(V'(x) + p(x)V(x)\big) = q(x)\big(U(x)V(x)\big)^{\alpha}. \tag{16}$$

Функцию $V(x)$ ищем как частное решение уравнения

$$V'(x) + p(x)V(x) = 0.$$

Например, при равенстве произвольной постоянной нулю, имеем

$$V(x) = e^{-\int p(x)dx}.$$

Подставив найденную функцию $V(x)$ в равенство (16), получим уравнение

$$U'(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x)\left(U(x)e^{-\int p(x)dx}\right)^{\alpha},$$

$$U'(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x)\left(U(x)\right)^{\alpha}e^{-\alpha\int p(x)dx},$$

$$U'(x) = q(x)\left(U(x)\right)^{\alpha}e^{(1-\alpha)\int p(x)dx}.$$

Получили дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Разделив обе части на $\left(U(x)\right)^{\alpha} \neq 0$, решаем дифференциальное уравнение с разделёнными переменными

$$\left(U(x)\right)^{-\alpha}d\left(U(x)\right) = q(x)e^{(1-\alpha)\int p(x)dx}dx,$$

из которого находим функцию $U(x)$:

$$\int \left(U(x)\right)^{-\alpha}d\left(U(x)\right) = \int q(x)e^{(1-\alpha)\int p(x)dx}dx + C,$$

$$\frac{1}{1-\alpha}\left(U(x)\right)^{1-\alpha} = \int q(x)e^{(1-\alpha)\int p(x)dx}dx + C.$$

Если $(1-\alpha)$ – нечетное число, то выражаем функцию $U(x)$

$$U(x) = \left((1-\alpha)\int q(x)e^{(1-\alpha)\int p(x)dx}dx + C\right)^{\alpha}.$$

и находим общее решение дифференциального уравнения (53):

$$y = U(x)V(x) =$$

$$= e^{-\int p(x)dx}\left((1-\alpha)\int q(x)e^{(1-\alpha)\int p(x)dx}dx + C\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Если $(1-\alpha)$ – четное число, то находим общий интеграл дифференциального уравнения (15):

$$y^{1-\alpha} = U(x)^{1-\alpha}V(x)^{1-\alpha} =$$

$$= e^{-(1-\alpha)\int p(x)dx}\left((1-\alpha)\int q(x)e^{(1-\alpha)\int p(x)dx}dx + C\right).$$

Если $\alpha > 0$, то дифференциальное уравнение (15) имеет особое решение $y = 0$.

► Рассмотрим метод Бернулли для уравнения

$$y' + \frac{y}{x} = 2y^2 \ln x.$$

Решение будем искать в виде $y = U(x)V(x)$. Подставим функцию в данное уравнение, получим верное функциональное тождество

$$U'(x)V(x) + U(x)V'(x) + \frac{1}{x}\,U(x)V(x) = 2\big(U(x)V(x)\big)^2 \ln x.$$

Сгруппируем второе и третье слагаемые.

$$U'(x)V(x) + U(x)\left(V'(x) + \frac{1}{x}V(x)\right) = 2\big(U(x)V(x)\big)^2 \ln x. \quad (17)$$

Будем считать, что функция $V(x)$ такова, что

$$V'(x) + \frac{1}{x}V(x) = 0.$$

Решая данное уравнение, получаем

$$\ln|V| + \ln|x| = C.$$

При $C = 0$ получим $V(x) = \frac{1}{x}$. Тогда равенство (17) примет вид

$$U'(x)\frac{1}{x} = 2\left(U(x)\frac{1}{x}\right)^2 \ln x,$$

$$U'(x) = 2\big(U(x)\big)^2 \frac{1}{x}\ln x.$$

Получили дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Разделяя переменные, получим дифференциальное уравнение с разделёнными переменными:

$$\big(U(x)\big)^{-2} d\big(U(x)\big) = 2\frac{1}{x}\ln x\, dx.$$

Решая его, найдем функцию $U(x)$:

$$\int \big(U(x)\big)^{-2} d\big(U(x)\big) = 2\int \ln x\, d(\ln x) + C,$$

$$-\frac{1}{U(x)} = \ln^2 x + C \quad \Longrightarrow \quad U(x) = -\frac{1}{\ln^2 x + C}.$$

Таким образом, общее решение рассматриваемого дифференциального уравнения запишется следующим образом:

$$y = U(x)V(x) = -\frac{1}{x(\ln^2 x + C)}.$$

Рассмотрим функцию $y = 0$, которя решением заданного дифференциального уравнения и не входит в общее решение ни при каком значении C. Следовательно, является особым решением. ◄

II способ. *Метод подстановки.* С помощью подстановки можно свести уравнение Бернулли (15) к линейному неоднородному дифференциальному уравнению.

$$z = y^{1-\alpha} \quad \rightarrow \quad z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'.$$

Для удобства умножим обе части уравнения (15) на $(1-\alpha)y^{-\alpha}$:

$$\underbrace{(1-\alpha)y^{-\alpha}y'}_{z'} + (1-\alpha)\underbrace{y^{1-\alpha}}_{z}p(x) = (1-\alpha)q(x),$$

$$z' + (1-\alpha)p(x)z = (1-\alpha)q(x).$$

Получили линейное уравнение относительно функции z. Решая его, находим $z = z(x, C)$. А затем из формулы замены находим $y = \sqrt[1-\alpha]{z(x, C)}$.

► Рассмотрим этот метод для дифференциального уравнения

$$y' + 2xy = xe^{\frac{x^2}{2}}\sqrt{y}.$$

Дано уравнение Бернулли. Выполним подстановку $z = y^{1-\frac{1}{2}} = \sqrt{y}$. Тогда $z' = \frac{1}{2\sqrt{y}}y'$. Умножим обе части уравнения на $\frac{1}{2\sqrt{y}}$. Получим:

$$\frac{1}{2\sqrt{y}}y' + x\sqrt{y} = \frac{1}{2}xe^{\frac{x^2}{2}}.$$

После замены получаем линейное дифференциальное уравнение первого порядка

$$z' + xz = \frac{1}{2}xe^{\frac{x^2}{2}}. \qquad (18)$$

Решение уравнения (18) будем искать в виде

$$z = C(x)e^{-\int x dx} = C(x)e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Тогда уравнение примет вид:

$$C'(x)e^{-\frac{x^2}{2}} - xC(x)e^{-\frac{x^2}{2}} + xC(x)e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{2}xe^{\frac{x^2}{2}},$$

$$C'(x)e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{2}xe^{\frac{x^2}{2}},$$

$$C'(x) = \frac{1}{2}xe^{x^2} \quad \rightarrow \quad C(x) = \frac{1}{4}e^{x^2} + C.$$

Итак, общее решение дифференциального уравнения (18):

$$z = \left(\frac{1}{4}e^{x^2} + C\right)e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Отсюда общее решение заданного дифференциального уравнения:

$$y = z^2 = \left(\frac{1}{4}e^{\frac{x^2}{2}} + Ce^{-\frac{x^2}{2}}\right)^2.$$

Рассмотрим функцию $y = 0$. Эта функция является решением заданного дифференциального уравнения и не входит в общее решение ни при каком значении C. Следовательно, является особым решением. ◄

1.8. Уравнение в полных дифференциалах

Определение. Дифференциальное уравнение

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \qquad (19)$$

называется *уравнением в полных дифференциалах*, если левая часть этого уравнения представляет собой полный дифференциал некоторой функции $u(x,y)$, то есть

$$du = P(x,y)dx + Q(x,y)dy. \qquad (20)$$

Для того чтобы выражение $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ являлось полным дифференциалом некоторой функции $u(x,y)$ по теореме об эквивалентности четырёх предложений необходимо, чтобы функции $P(x,y)$, $Q(x,y)$ были непрерывны вместе с частными производными $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ в некоторой односвязной области D и $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ в этой области.

Теорема. Если функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывны в ограниченной односвязной замкнутой области D и имеют в этой области непрерывные частные производные первого порядка $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$, то следующие четыре предложения эквивалентны:

1) $\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$, где C – любой замкнутый кусочно-гладкий контур, целиком лежащий в области D;
2) $\int_{\overline{AB}} Pdx + Qdy$ не зависит от пути интегрирования в области D;
3) выражение $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ является полным дифференциалом некоторой функции двух переменных $f(x,y)$ в области D;
4) всюду в области D выполняется равенство $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

Схема решения дифференциального уравнения в полных дифференциалах

Учитывая равенство (20), дифференциальное уравнение (19) принимает вид: $du = 0$. Отсюда общий интеграл дифференциального уравнения (19) имеет вид

$$u(x,y) = C. \tag{21}$$

Найдем $u(x,y)$. Используем формулу полного дифференциала:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy. \tag{22}$$

Сравнивая равенства (22) и (20), получим

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y), \tag{23}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y). \tag{24}$$

Интегрируем равенство (23) по переменной x, считая $y = \text{const}$:

$$u(x,y) = \int P(x,y)dx + \varphi(y), \tag{25}$$

где $\varphi(y)$ – произвольная функция, зависящая от y. Для нахождения функции $\varphi(y)$ продифференцируем равенство (25) по y и результат сравним с равенством (24):

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int P(x,y)dx\right) + \varphi'(y) = Q(x,y).$$

Найденную функцию $\varphi(y)$ подставляем в равенство (25). Полученную функцию $u(x,y)$ подставляем в равенство (21) и находим общий интеграл дифференциального уравнения (19).

► Применим схему к дифференциальному уравнению

$$(x + y - 1)dx + (x + y^3 - 2)dy = 0.$$

Определим тип уравнения. Обозначим $P(x,y) = x + y - 1$, $Q(x,y) = x + y^3 - 2$. Тогда $\frac{\partial P}{\partial y} = 1$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 1$. Так как $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, то имеем уравнение в полных дифференциалах, то есть левая часть уравнения является полным дифференциалом некоторой функции

$$du = (x + y - 1)dx + (x + y^3 - 2)dy$$

и уравнение можно записать в виде $du = 0$. Отсюда $u(x,y) = C$ – общий интеграл уравнения. Задача свелась к отысканию вида функции $u(x,y)$.

Мы получили с одной стороны

$$du = (x + y - 1)dx + (x + y^3 - 2)dy,$$

а с другой стороны – полный дифференциал функции двух переменных записывается в виде

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy.$$

Тогда

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = x + y - 1, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = x + y^3 - 2. \end{cases}$$

Интегрируя первое равенство системы по x, получаем

$$u(x,y) = \int (x + y - 1)dx + \varphi(y) = \frac{x^2}{2} + yx - x + \varphi(y).$$

Найдем $\varphi(y)$. Для этого продифференцируем функцию $u(x,y)$ по y.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x + \varphi'(y).$$

Учитывая второе равенство системы, получаем

$$x + \varphi'(y) = x + y^3 - 2.$$

Отсюда

$$\varphi'(y) = y^3 - 2 \quad \Rightarrow \quad \varphi(y) = \frac{y^4}{4} - 2y.$$

Следовательно, функция $u(x,y)$ примет вид

$$u(x,y) = \frac{x^2}{2} + yx - x + \frac{y^4}{4} - 2y.$$

Подставив $u(x,y)$ в общий интеграл уравнения, получим

$$\tfrac{1}{2}x^2 + yx - x + \tfrac{1}{4}y^4 - 2y = C. \blacktriangleleft$$

Замечание. Если уравнение (19) является однородным уравнением в полных дифференциалах, то оно интегрируется непосредственно, без квадратур.

Теорема. Пусть уравнение (19) является однородным уравнением в полных дифференциалах, а $P(x,y)$, $Q(x,y)$ – однородные функции степени α, $\alpha \neq -1$. Тогда общий интеграл уравнения (19) задается формулой:

$$xP(x,y) + yQ(x,y) = C.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$f(x,y) = xP(x,y) + yQ(x,y)$$

и докажем, что она является решением уравнения (19), то есть $df = 0$.

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

Найдем $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$. При этом учтем два факта:

1) так как уравнение (19) – дифференциальное уравнение в полных дифференциалах, то $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$,

2) так как $P(x,y)$, $Q(x,y)$ – однородные функции степени α, $\alpha \neq -1$, то по теореме Эйлера

$$x\frac{\partial P}{\partial x}+y\frac{\partial P}{\partial y}=\alpha P,\quad x\frac{\partial Q}{\partial x}+y\frac{\partial Q}{\partial y}=\alpha Q.$$

Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial x}=P+x\frac{\partial P}{\partial x}+y\frac{\partial Q}{\partial x}=P+x\frac{\partial P}{\partial x}+y\frac{\partial P}{\partial y}=P+\alpha P=(\alpha+1)P,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=x\frac{\partial P}{\partial y}+Q+y\frac{\partial Q}{\partial y}=x\frac{\partial Q}{\partial x}+Q+y\frac{\partial Q}{\partial y}=Q+\alpha Q=(\alpha+1)Q.$$

Следовательно,

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=(\alpha+1)(Pdx+Qdy).$$

Отсюда

$$Pdx+Qdy=\frac{df}{\alpha+1}.$$

Учитывая уравнение (19), получим $\frac{df}{\alpha+1}=0$. Следовательно, $df=0$. Теорема доказана.

► Применим теорему к дифференциальному уравнению

$$(3x^2+10xy)dx+(5x^2-9y^2)dy=0.$$

Обозначим $P(x,y)=3x^2+10xy$, $Q(x,y)=5x^2-9y^2$. Так как $\frac{\partial P}{\partial y}=10x$, $\frac{\partial Q}{\partial x}=10x$, то $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$. Следовательно, имеем уравнение в полных дифференциалах. Так как $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ – однородные функции второй степени однородности, то рассматриваемое уравнение – однородное уравнение в полных дифференциалах. Тогда общий интеграл уравнения можно записать в виде:

$$x(3x^2+10xy)+y(5x^2-9y^2)=C$$

или

$$3x^3+15x^2y-9y^3=0.\ ◄$$

Интегрирующий множитель

Пусть уравнение (19) не является уравнением в полных дифференциалах. Тогда необходимо найти функцию $\mu(x,y)$ такую, что после умножения уравнения (19) на μ получается уравнение в полных дифференциалах:

$$\mu(Pdx + Qdy) = df.$$

Функция $\mu(x,y)$ называется *интегрирующим множителем* и должна удовлетворять соотношению

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu P) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu Q).$$

Интегрирующий множитель всегда существует, но найти его в явном виде найти можно в редких, но важных случаях. Но, если известно частное решение этого уравнения, то исходное уравнение интегрируемо в квадратурах.

► Рассмотрим применение интегрирующего множителя к дифференциальному уравнению

$$(y - xy^2 \ln x)dx + x\,dy = 0.$$

Для нахождения функции $\mu(x,y)$ используем равенство

$$\frac{\partial}{\partial y}\big(\mu(x,y)\cdot(y - xy^2\ln x)\big) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu(x,y)\cdot x).$$

Попытаемся найти частное решение в виде $\mu(x,y) = x^n y^m$. Тогда последнее тождество принимает вид:

$$\frac{\partial}{\partial y}\big(x^n y^m(y - xy^2\ln x)\big) = \frac{\partial}{\partial x}(x^n y^m x),$$

$$x^n\big(my^{m-1}(y - xy^2\ln x) + y^m(1 - 2xy\ln x)\big) = (n+1)x^n y^m,$$

$$(m-n)x^n y^m = (m+2)x^{n+1}y^{m+1}\ln x.$$

Для того, чтобы получить верное тождество, необходимо, чтобы выполнялась система уравнений

$$\begin{cases} m - n = 0, \\ m + 2 = 0. \end{cases}$$

Отсюда $n = m = -2$. Следовательно, $\mu = x^{-2}y^{-2} = \frac{1}{x^2y^2}$.

Умножая исходное уравнение на эту функцию, превращаем его в уравнение в полных дифференциалах:

$$\frac{1}{x^2y^2}\left((y - xy^2 \ln x)dx + x\, dy\right) = 0,$$

$$\left(\frac{1}{x^2y} - \frac{\ln x}{x}\right)dx + \frac{1}{xy^2}dy = 0.$$

Отсюда $u(x, y) = C$ – общий интеграл уравнения. Задача свелась к отысканию вида функции $u(x, y)$. Мы получили с одной стороны

$$du = \left(\frac{1}{x^2y} - \frac{\ln x}{x}\right)dx + \frac{1}{xy^2}dy,$$

с другой стороны, полный дифференциал функции двух переменных записывается в виде

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy.$$

Тогда

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{1}{x^2y} - \dfrac{\ln x}{x}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{1}{xy^2}. \end{cases}$$

Интегрируя первое равенство системы по x, получаем

$$u(x, y) = \int \left(\frac{1}{x^2y} - \frac{\ln x}{x}\right)dx = -\frac{1}{xy} - \frac{\ln^2 x}{2} + \varphi(y).$$

Найдем $\varphi(y)$, для чего продифференцируем функцию $u(x, y)$ по y:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{xy^2} + \varphi'(y).$$

Учитывая второе равенство системы, получаем

$$\frac{1}{xy^2} + \varphi'(y) = \frac{1}{xy^2}.$$

Отсюда $\varphi'(y) = 0$, $\varphi(y) = 0$. Тогда функция $u(x, y)$ примет вид

$$u(x, y) = -\frac{1}{xy} - \frac{\ln^2 x}{2}.$$

Подставив $u(x, y)$ в общий интеграл уравнения, получим

$$-\frac{1}{xy} - \frac{\ln^2 x}{2} = C.$$

1.9. Уравнение Риккати

Общее уравнение Риккати имеет вид

$$y' = f_2(x)y^2 + f_1(x)y + f_0(x). \qquad (26)$$

При $f_2(x) \equiv 0$ оно вырождается в линейное уравнение, а при $f_0(x) \equiv 0$ – в уравнение Бернулли. При произвольных функциях $f_i(x)$, $i = \overline{1,3}$, уравнение Риккати в квадратурах не интегрируется.

Рассмотрим некоторые случаи, когда уравнение Риккати интегрируется в квадратурах.

1. Функции $f_i(x)$, $i = \overline{1,3}$ пропорциональны:

$$y' = \varphi(x)(ay^2 + by + c),$$

где $a, b, c = \text{const}$. Это уравнение с разделяющимися переменными.

2. Уравнение Риккати вида

$$y' = \frac{a}{x^2}y^2 + \frac{b}{x}y + c$$

является однородным.

3. Уравнение Риккати вида

$$y' = ax^n y^2 + \frac{b}{x}y + cx^{-n-2}$$

является обобщенно-однородным (при $k = -n - 1$). Замена $z = x^{n+1}y$ приводит его к уравнению с разделяющимися переменными $xz' = az^2 + (b + n + 1)z + c$.

4. Уравнение Риккати вида

$$y' = ax^{2n}y^2 + \frac{m-n}{x}y + cx^{2m}$$

с помощью подстановки $y = x^{m-n}z$ приводится к уравнению с разделяющимися переменными $x^{-n-m}z' = az^2 + c$.

Использование частных решений для построения общего решения

Случай 1. Пусть известно частное решение $y_1 = y_1(x)$ уравнения (26).

Положим $y = y_1(x) + z(x)$, где $z(x)$ – новая неизвестная функция. Подставим эту функцию в уравнение (26):

$$y_1' + z' = f_2(x)(y_1 + z)^2 + f_1(x)(y_1 + z) + f_0(x),$$

$$y_1' - f_2(x)y_1^2 - f_1(x)y_1 - f_0(x) =$$

$$= -z' + 2f_2(x)y_1 z + f_2(x)z^2 + f_1(x)z.$$

Так как $y = y_1(x)$ – решение уравнения (26), то

$$y_1' - f_2(x)y_1^2 - f_1(x)y_1 - f_0(x) = 0.$$

Тогда

$$-z' + 2f_2(x)y_1 z + f_2(x)z^2 + f_1(x)z = 0,$$

$$z' - \big(2f_2(x)y_1 + f_1(x)\big)z = f_2(x)z^2. \qquad (27)$$

Получили уравнение Бернулли.

Замечание. Подстановка $y = y_1 + \frac{1}{z}$ приводит к линейному уравнению для z и, следовательно, уравнение Риккати решается в квадратурах.

► Покажем на примере дифференциального уравнения

$$xy' - (2x + 1)y + y^2 + x^2 = 0.$$

Будем искать частное решение в виде $y_1 = ax^n$. Подставляя это решение в уравнение, находим a:

$$x \cdot anx^{n-1} - (2x + 1) \cdot ax^n + (ax^n)^2 + x^2 = 0,$$

$$a(n - 1)x^n - 2ax^{n+1} + a^2x^{2n} + x^2 = 0.$$

Уравнение обращается в тождество, если $n = 1$, $a = 1$. Тогда частное решение примет вид: $y_1 = x$.

Выполним подстановку $y = x + \frac{1}{z}$. Тогда исходное уравнение примет вид:

$$x\left(1 - \frac{1}{z^2}z'\right) - (2x + 1)\left(x + \frac{1}{z}\right) + \left(x + \frac{1}{z}\right)^2 + x^2 = 0.$$

Упрощая, получим линейное дифференциальное уравнение первого порядка

$$z' + \frac{z}{x} = \frac{1}{x}.$$

Общее решение будем искать в виде:

$$z = C(x)e^{-\int \frac{dx}{x}} = \frac{C(x)}{x}.$$

Подставим в дифференциальное уравнение:

$$\frac{C'(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{C(x)}{x} = \frac{1}{x},$$

$$C'(x) = 1,$$

$$C(x) = x + C.$$

Получили общее решение:

$$z = \frac{x + C}{x}.$$

Выполнив обратную замену $y = x + \frac{1}{z}$ получим общее решение

$$y = x + \frac{x}{x + C}.$$

Случай 2. Пусть $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ – два различных частных решения уравнения (26).

Положим $y = y_1(x) + z(x)$, где $z(x)$ – новая неизвестная функция. Подставляя её в уравнение (26) и, учитывая, что $y_1 = y_1(x)$ – решение уравнения (26), получим тождество (27). Разделим обе части равенства (27) на z и выполним обратную замену $z = y - y_1$:

$$\frac{(y - y_1)'}{y - y_1} - 2f_2(x)y_1 - f_1(x) = f_2(x)(y - y_1),$$

$$\frac{d(\ln(y - y_1))}{dx} = f_2(x)(y + y_1) + f_1(x). \qquad (28)$$

Для второго частного решения $y_2 = y_2(x)$ аналогично находим:

$$\frac{d(\ln(y - y_2))}{dx} = f_2(x)(y + y_2) + f_1(x). \qquad (29)$$

Вычитая из равенства (29) равенство (28), получаем:

$$\frac{d}{dx}\left(\ln\frac{y-y_2}{y-y_1}\right)=f_2(x)(y_2-y_1).$$

Откуда

$$\frac{y-y_2}{y-y_1}=Ce^{\int f_2(x)(y_2-y_1)dx}. \qquad (30)$$

Частному решению $y_1(x)$ соответствует значение $C=\infty$, а решению $y_2(x)$ – значение $C=0$.

► Проиллюстрируем случай 2 с помощью уравнения

$$y'=\frac{m^2}{x^2}-y^2, \quad m=\text{const}.$$

Оно имеет частные решения

$$y_1=\frac{1}{x}+\frac{m}{x^2}, \qquad y_2=\frac{1}{x}-\frac{m}{x^2}.$$

Найти его общее решение.

Найдем интеграл правой части в равенстве (30):

$$e^{\int f_2(x)(y_2-y_1)dx}=e^{\int(-1)\cdot\left(\frac{1}{x}-\frac{m}{x^2}-\left(\frac{1}{x}+\frac{m}{x^2}\right)\right)dx}=e^{2m\int\frac{dx}{x^2}}=e^{-\frac{2m}{x}}.$$

Тогда общий интеграл исходного дифференциального уравнения примет вид:

$$\frac{y-\left(\frac{1}{x}-\frac{m}{x^2}\right)}{y-\left(\frac{1}{x}+\frac{m}{x^2}\right)}=Ce^{-\frac{2m}{x}}.$$

Случай 3. Пусть $y_1=y_1(x)$, $y_2=y_2(x)$ и $y_3=y_3(x)$ – три различных частных решения уравнения (26). Тогда общее решение находится без квадратур:

$$\frac{y-y_2}{y-y_1}\cdot\frac{y_3-y_2}{y_3-y_1}=C.$$

Следовательно, уравнение Риккати имеет фундаментальную систему решений.

1.10. Уравнения, неразрешенные относительно производной

В общем случае уравнение, неразрешенное относительно производной

$$F(x, y, y') = 0 \tag{31}$$

представим в эквивалентном виде с помощью замены $y' = t$:

$$F(x, y, t) = 0. \tag{32}$$

Ищем решение в параметрической форме

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$$

Чтобы выразить x и y через параметр t, рассмотрим F как функцию трех переменных x, y, t, и найдём её дифференциал.

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial t}dt = 0. \tag{33}$$

Учитывая, что $y' = t$, то есть $dy = tdx$, исключим последовательно dy и dx в выражении (33).

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}tdx + \frac{\partial F}{\partial t}dt = 0,$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x} + t\frac{\partial F}{\partial y}\right)dx + \frac{\partial F}{\partial t}dt = 0,$$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial t}}{\frac{\partial F}{\partial x} + t\frac{\partial F}{\partial y}}.$$

Аналогично получается

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{t\frac{\partial F}{\partial t}}{\frac{\partial F}{\partial x} + t\frac{\partial F}{\partial y}}.$$

В результате приходим к системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial t}}{\dfrac{\partial F}{\partial x} + t\dfrac{\partial F}{\partial y}}, \\ \dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{t\dfrac{\partial F}{\partial t}}{\dfrac{\partial F}{\partial x} + t\dfrac{\partial F}{\partial y}}. \end{cases}$$

Если удается решить эту систему, то решение исходного уравнения (31) получается в параметрической форме

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$$

Замечание 1. При использовании данного метода возможна потеря отдельных решений (этот вопрос надо исследовать дополнительно).

Замечание 2. Этот метод особенно удобен, если уравнение (31) легко разрешается относительно y (или x). Тогда, дифференцируя полученное выражение по x (или по y) и, считая t функцией от x (или от y), получим уравнение, разрешенное относительно производной.

► Применим замечание 2 к дифференциальному уравнению

$$(y')^2 - xy' - y + \frac{x^2}{2} = 0.$$

Полагая $y' = t$, находим

$$t^2 - xt - y + \frac{x^2}{2} = 0. \qquad (34)$$

Продифференцируем по переменной x:

$$2t\frac{dt}{dx} - t - x\frac{dt}{dx} - \frac{dy}{dx} + x = 0,$$

$$(2t - x)\frac{dt}{dx} - t - \frac{dy}{dx} + x = 0.$$

Так как $\frac{dy}{dx} = t$, то получаем

$$(2t - x)\frac{dt}{dx} - t - t + x = 0,$$

$$(2t - x)\left(\frac{dt}{dx} - 1\right) = 0.$$

Решая полученное дифференциальное уравнение, находим

$$t = \frac{x}{2} \text{ (особое решение)} \quad \text{или} \quad t = x + C.$$

Вернемся к равенству (34), из которого выразим функцию y:

$$y = t^2 - xt + \frac{x^2}{2}.$$

Если $t = x + C$, то получаем общее решение:

$$y = (x + C)^2 - x(x + C) + \frac{x^2}{2},$$

$$y = \frac{x^2}{2} + Cx + C^2.$$

Если $t = \frac{x}{2}$, то получаем особое решение:

$$y = \left(\frac{x}{2}\right)^2 - x\frac{x}{2} + \frac{x^2}{2},$$

$$y = \frac{x^2}{4}.$$

Итак, получили решения дифференциального уравнения: $y = \frac{1}{2}x^2 + Cx + C^2$, $y = \frac{1}{4}x^2$. ◄

Уравнение вида $y = f(y')$

Это уравнение является частным случаем уравнения (31), если

$$F(x, y, t) = y - f(t).$$

Рассмотрим F как функцию трех переменных x, y, t, и найдём её дифференциал. Так как $F(x, y, t) = 0$, то $dF = 0$ или

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial t}dt = 0,$$

$$0 \cdot dx + 1 \cdot dy - f'(t)dt = 0,$$

$$dy = f'(t)dt.$$

Так как $y' = t$, то $dy = tdx$ и, соответственно,

$$tdx = f'(t)dt.$$

Отсюда

$$\frac{dx}{dt} = \frac{f'(t)}{t}.$$

Таким образом, получаем систему:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{f'(t)}{t}, \\ y = f(t). \end{cases}$$

Интегрируя первое уравнение по t, получим решение в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = \displaystyle\int \frac{f'(t)}{t}dt + C, \\ y = f(t). \end{cases}$$

►Применим метод решения к дифференциальному уравнению

$$y = y' - \ln y'.$$

Обозначим $y' = t$ и рассмотрим функцию

$$F(x, y, t) = y - t + \ln t.$$

Найдем ее полный дифференциал, учитывая, что

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial t}dt = 0:$$

$$0 \cdot dx + 1 \cdot dy + \left(-1 + \frac{1}{t}\right)dt = 0.$$

Так как $y' = t$, то есть $dy = tdx$, то

$$tdx + \left(-1 + \frac{1}{t}\right)dt = 0,$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2}.$$

Учитывая заданное дифференциальное уравнение, получаем параметрическую систему:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t^2}, \\ y = t - \ln t. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = \displaystyle\int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2}\right) dt = \ln t + \frac{1}{t} + C, \\ y = t - \ln t. \end{cases}$$

Получили общее решение в параметрической форме. ◄

Уравнение вида $x = f(y')$

Это уравнение является частным случаем уравнения (31), если

$$F(x, y, t) = x - f(t).$$

Рассмотрим F как функцию трех переменных x, y, t, и найдём её дифференциал, при этом будем учитывать, что $dF = 0$.

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial t} dt = 0,$$

$$1 \cdot dx + 0 \cdot dy - f'(t)dt = 0,$$

$$dx = f'(t)dt.$$

Учитывая, что $y' = t$, то есть $dy = tdx$ или $dx = \frac{dy}{t}$, получаем:

$$\frac{dy}{t} = f'(t)dt,$$

$$\frac{dy}{dt} = tf'(t).$$

В результате получаем систему:

$$\begin{cases} x = f(t), \\ \dfrac{dy}{dt} = tf'(t). \end{cases}$$

Интегрируя по t, получим решение в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = f(t), \\ y = \displaystyle\int tf'(t)dt + C. \end{cases}$$

►Применим метод решения к дифференциальному уравнению

$$xy' = \ln y'.$$

Обозначим $y' = t$ и, разделив уравнение на t, рассмотрим функцию $F(x, y, t) = x - \frac{\ln t}{t}$. Найдем ее полный дифференциал:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial t}dt = 0,$$
$$1 \cdot dx + 0 \cdot dy + \left(\frac{\ln t}{t^2} - \frac{1}{t^2}\right)dt = 0.$$

Отсюда

$$dx = \left(\frac{1}{t^2} - \frac{\ln t}{t^2}\right)dt.$$

Так как $y' = t$, то есть $dy = tdx$ или $dx = \frac{dy}{t}$, то

$$\frac{dy}{t} = \left(\frac{1}{t^2} - \frac{\ln t}{t^2}\right)dt,$$
$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{t} - \frac{\ln t}{t}.$$

В результате получаем параметрическую систему:

$$\begin{cases} x = \dfrac{\ln t}{t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{t} - \dfrac{\ln t}{t}. \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} x = \dfrac{\ln t}{t}, \\ y = \displaystyle\int \left(\frac{1}{t} - \frac{\ln t}{t}\right)dt = \ln t - \frac{1}{2}\ln^2 t + C. \end{cases}$$

Получили общее решение в параметрической форме. ◄

Уравнение Лагранжа

Определение. Дифференциальное уравнение

$$y = \varphi(y')x + \psi(y') \qquad (35)$$

называется *уравнением Лагранжа*, если $\varphi(y') \neq y'$.

Решение строится в параметрической форме с помощью замены $y' = t$, где t – параметр. После замены получим уравнение

$$y = \varphi(t)x + \psi(t).$$

Чтобы выразить x через параметр t, рассмотрим y как функцию двух переменных x и t, и найдём её дифференциал:

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x}dx + \frac{\partial y}{\partial t}dt = \varphi(t)dx + (\varphi'(t)x + \psi'(t))dt.$$

Учитывая, что $y' = t$, то есть $dy = tdx$, получим равенство

$$\varphi(t)dx + (\varphi'(t)x + \psi'(t))dt = tdx,$$
$$(\varphi(t) - t)dx + (\varphi'(t)x + \psi'(t))dt = 0.$$

Это равенство, при условии, что $\varphi(t) - t \neq 0$, является дифференциальным уравнением первого порядка, линейным относительно x.

$$(\varphi(t) - t)\frac{dx}{dt} + \varphi'(t)x + \psi'(t) = 0,$$

$$\frac{dx}{dt} + \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t) - t}x = -\frac{\psi'(t)}{\varphi(t) - t}.$$

Отсюда находим $x = f(t, C)$.

В результате получаем общее решение уравнения Лагранжа в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = f(t, C), \\ y = \varphi(t)x + \psi(t). \end{cases}$$

Вернёмся к равенству $\varphi(t) - t = 0$. Разрешая его относительно t, если это возможно, и подставляя найденные значения t в равенство $y = \varphi(t)x + \psi(t)$, получаем уравнения прямых линий, которые могут быть особыми решениями уравнения Лагранжа.

► Применим записанный метод к уравнению

$$y = -xy' + (y')^2.$$

Дано дифференциальное уравнение первого порядка, неразрешимое относительно y', которое является уравнением Лагранжа.

Сделав замену $y' = t$, получим $y = -xt + t^2$. Найдём дифференциал функции y как функции переменных x и t:

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x}dx + \frac{\partial y}{\partial t}dt = -tdx + (-x + 2t)dt.$$

Учитывая, что $dy = tdx$, получим

$$-tdx + (-x + 2t)dt = tdx,$$

$$-2tdx + (-x + 2t)dt = 0.$$

При $t \neq 0$ имеем неоднородное линейное дифференциальное уравнение первого порядка относительно x:

$$-2t\frac{dx}{dt} + (-x + 2t) = 0,$$

$$\frac{dx}{dt} + \frac{1}{2t}x = 1.$$

Общее решение будем искать в виде

$$x = C(t)e^{-\int\frac{dt}{2t}} = C(t)e^{\ln\frac{1}{\sqrt{t}}} = \frac{C(t)}{\sqrt{t}}.$$

Подставим его в дифференциальное уравнение и найдем $C(t)$:

$$\frac{C'(t)}{\sqrt{t}} - \frac{C(t)}{2\sqrt{t^3}} + \frac{1}{2t}\frac{C(t)}{\sqrt{t}} = 1,$$

$$C'(t) = \sqrt{t},$$

$$C(t) = \int \sqrt{t}dt = \frac{2}{3}\sqrt{t^3} + C.$$

Таким образом,

$$x = \frac{C(t)}{\sqrt{t}} = \frac{\frac{2}{3}\sqrt{t^3} + C}{\sqrt{t}} = \frac{2}{3}t + \frac{C}{\sqrt{t}}.$$

Тогда общее решение уравнения Лагранжа имеет вид

$$\begin{cases} x = \frac{2}{3}t + \frac{C}{\sqrt{t}}, \\ y = -xt + t^2 = -t\left(\frac{2}{3}t + \frac{C}{\sqrt{t}}\right) + t^2 = \frac{t^2}{4} - C\sqrt{t}. \end{cases}$$

При $t = 0$ из равенства $y = -xt + t^2$ получим особое уравнения Лагранжа $y = 0$. ◄

Уравнение Клеро

Определение. Дифференциальное уравнение

$$y = xy' + \psi(y') \qquad (36)$$

называется *уравнением Клеро*.

При решении уравнения Клеро применяется тот же метод, что и при решении уравнения Лагранжа (35). Производим замену $y' = t$, где t – параметр, тогда $y = xt + \psi(t)$. Находим дифференциал:

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x}dx + \frac{\partial y}{\partial t}dt = tdx + (x + \psi'(t))dt.$$

Учитывая, что $dy = tdx$, приходим к равенству

$$tdx + (x + \psi'(t))dt = tdx,$$
$$(x + \psi'(t))dt = 0,$$

из которого $x + \psi'(t) = 0$, и тогда $x = -\psi'(t)$ – особое решение, или, $dt = 0$, и, тогда $t = C$ – общее решение.

Итак, общее решение уравнения Клеро получаем из равенства $y = xt + \psi(t)$ при $t = C$.

Кроме того, получаем решение уравнения Клеро в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = -\psi'(t), \\ y = -t\psi'(t) + \psi(t), \end{cases}$$

которое может быть особым.

►Рассмотрим уравнение Клеро

$$y = xy' - (y')^2.$$

Сделав замену $y' = t$, получим $y = xt - t^2$. Найдём дифференциал функции y как функции переменных x и t:

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x}dx + \frac{\partial y}{\partial t}dt = tdx + (x - 2t)dt.$$

Учитывая, что $dy = tdx$, получим

$$tdx + (x - 2t)dt = tdx,$$
$$(x - 2t)dt = 0.$$

Если $dt = 0$, то $t = C$ и получаем общее решение исходного дифференциального уравнения:

$$y = Cx - C^2.$$

Если $x - 2t = 0$, то получаем решение в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = 2t, \\ y = xt - t^2, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 2t, \\ y = t^2. \end{cases}$$

Отсюда $y = \frac{x^2}{4}$. Получено особое решение исходного дифференциального уравнения. ◄

2. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Определение. *Дифференциальное уравнение n-го порядка* – это уравнение вида

$$F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0, \qquad (1)$$

где x – независимая переменная, y – искомая функция. Функция F является непрерывной в некоторой области G изменения своих аргументов.

В виде, разрешенном относительно старшей производной, уравнение (1) записывается как

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}\right), \qquad (2)$$

где функция f непрерывна в некоторой области D изменения своих аргументов.

Определение. Решением дифференциального уравнения (2) называется функция $y = \varphi(x)$, заданная на (a, b) и удовлетворяющая следующим условиям:

- функция $y = \varphi(x)$ непрерывно дифференцируема n раз на интервале (a, b),
- для любого значения $x \in (a, b)$ соответствующая точка $M\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}\right) \in D$,
- функция $y = \varphi(x)$ обращает уравнение (2) в тождество при всех $x \in (a, b)$.

Задача Коши для дифференциального уравнения n-го порядка (2) состоит в нахождении того решения $y = \varphi(x)$ дифференциального уравнения (2), которое удовлетворяет следующим начальным условиям

$$\varphi(x_0) = y_0, \;\; \varphi'(x_0) = y_1, \;\; \dots, \;\; \varphi^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}, \qquad (3)$$

где x_0, y_0, y_1, …, y_{n-1} – заданные числа.

Теорема Коши. Если функция f непрерывна в замкнутой области D, содержащей точку $M\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}\right)$, и имеет непрерывные частные производные по $y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$, то существует единственное решение $y = \varphi(x)$ дифференциального уравнения (2), удовлетворяющее начальным условиям (3) задачи Коши.

Определение. *Общим решением дифференциального уравнения (1) (или (2))* называется функция $y = \varphi(x, C_1, \dots, C_n)$, которая при любых допустимых значениях произвольных постоянных $C_1, \dots, C_n$, является решением этого дифференциального уравнения и для любой задачи Коши с условиями (3) найдутся единственные значения этих постоянных.

Определение. *Общим интегралом дифференциального уравнения (1) (или (2))* называется соотношение

$$\Phi(x, y, C_1, \dots, C_n) = 0, \qquad (4)$$

определяющее общее решение в неявном виде.

Определение. *Частным решением дифференциального уравнения* называется решение, полученное из общего решения при фиксированных значениях произвольных постоянных. Аналогично определяется и *частный интеграл* при фиксированных значениях.

Определение. График любого частного решения уравнения (1) или (2) представляет собой линию, называемую *интегральной* кривой дифференциального уравнения. Общее решение (общий интеграл) представляет собой *семейство интегральных кривых* на плоскости, зависящее от n параметров C_1, …, C_n.

2.1. Уравнения, решаемые в квадратурах

Уравнение вида $y^{(n)} = f(x)$

Проинтегрируем это уравнение последовательно n раз в пределах от x_0 до x. Получаем следующие выражения для производных и для самой функции $y(x)$:

$$y^{(n-1)}(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)dx + C_1,$$

$$y^{(n-2)}(x) = \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} f(x)dx + C_1(x - x_0) + C_2,$$

$$\dots,$$

$$y(x) = \underbrace{\int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} dx \dots \int_{x_0}^{x} f(x)dx}_{n \text{ раз}} + C_1\frac{(x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!} +$$

$$+C_2\frac{(x - x_0)^{n-2}}{(n-2)!} + \dots + C_{n-1}(x - x_0) + C_n.$$

Последняя формула представляет собой общее решение дифференциального уравнения в квадратурах. При $x = x_0$ мы получим частное решение, удовлетворяющее начальным условиям

$y(x_0) = C_n$, $y'(x_0) = C_{n-1}$, ..., $y^{(n-2)}(x_0) = C_2$, $y^{(n-1)}(x_0) = C_1$,

где C_1, C_2, …, C_n – некоторый заданный набор чисел.

Повторный интеграл в выражении для $y(x)$можно преобразовать к однократному интегралу. Рассмотрим случай $n = 2$. Тогда

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} f(\tau)d\tau,$$

в котором через τ обозначена переменная интегрирования во внутреннем интеграле. Данный повторный интеграл задан в треугольной области $D(x, \tau)$, изображенной на рис. 1. Меняя порядок интегрирования, сводим двукратный интеграл к однократному.

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} f(\tau)d\tau \int_{\tau}^{x} dx = \int_{x_0}^{x} f(\tau)(x-\tau)d\tau = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-\tau)}{1!} f(\tau)d\tau.$$

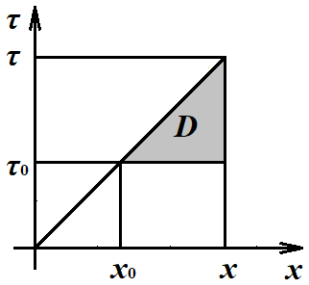

Рис. 1. Область $D(x,\tau)$

Аналогичным образом можно упростить трехкратный повторный интеграл в случае $n = 3$:

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} f(\tau)d\tau = \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} \frac{(x-\tau)}{1!} f(\tau)d\tau =$$

$$= \int_{x_0}^{x} f(\tau)d\tau \int_{\tau}^{x} \frac{(x-\tau)}{1!} dx = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-\tau)^2}{2!} f(\tau)d\tau.$$

Для повторного интеграла произвольной кратности n будет справедливо выражение

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} f(\tau)d\tau, \qquad (5)$$

которое называется *формулой Коши для повторных интегралов*.

Полученное выражение представляет собой частное решение дифференциального уравнения $y^{(n)} = f(x)$ при нулевых начальных условиях

$$y(x_0) = y'(x_0) = \cdots = y^{(n-1)}(x_0) = 0.$$

Соответственно, общее решение исходного уравнения описывается формулой

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} f(\tau)d\tau + \sum_{i=1}^{n} C_i \frac{(x-x_0)^{n-i}}{(n-i)!}.$$

Заметим, что формула Коши (5) связывает между собой функцию $y(x)$ и ее производную n-го порядка $y^{(n)} = f(x)$. Если допустить, что число n может быть действительным, то мы приходим к понятию *производной дробного порядка*.

Вместо факториала $(n-1)!$ в формуле Коши запишем так называемую *гамма-функцию* $\Gamma(z)$, которая является непрерывной и выражается через несобственный интеграл в виде

$$\Gamma(z) = \int_{0}^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt.$$

При натуральных значениях n справедливо равенство

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

Тогда формула Коши представляется в следующем виде:

$$y(x,z) = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-\tau)^{z-1}}{\Gamma(z)} f(\tau)d\tau,$$

где z − действительное число.

Данную формулу можно рассматривать как определение дробной производной порядка z, если исходная функция $y(x)$ известна, или как определение интеграла дробного порядка z, если задана соответствующая производная.

Замечание. Будем говорить, что *уравнение решается в квадратурах*, если его общее решение может быть получено путем последовательного интегрирования уравнения $y^{(n)} = f(x)$:

$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1,$$

$$y^{(n-2)} = \int \left(\int f(x)dx \right) dx + C_1 x + C_2,$$

$$y^{(n-3)} = \int \left(\int \left(\int f(x)dx \right) dx \right) dx + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3,$$

...,

$$y(x) = \underbrace{\int \left(\int \left(\int f(x)dx \right) dx \right) dx}_{n \text{ раз}} + C_1 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + C_2 \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \cdots +$$

$$+ C_{n-1} x + C_n.$$

► Рассмотрим задачу Коши для уравнения

$$y^{IV} = \sin x + 1$$

при начальных условиях

$$y(0) = 1, y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0.$$

Построим сначала общее решение, последовательно интегрируя заданное уравнение:

$$y''' = \int (\sin x + 1)dx = -\cos x + x + C_1,$$

$$y'' = \int (-\cos x + x + C_1)dx = -\sin x + \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2,$$

$$y' = \int \left(-\sin x + \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2 \right) dx =$$

$$= \cos x + \frac{x^3}{6} + \frac{C_1 x^2}{2} + C_2 x + C_3,$$

$$y = \int \left(\cos x + \frac{x^3}{6} + \frac{C_1 x^2}{2} + C_2 x + C_3 \right) dx =$$

$$= \sin x + \frac{x^4}{24} + \frac{C_1 x^3}{6} + \frac{C_2 x^2}{2} + C_3 x + C_4.$$

Подставляя начальные значения, определим коэффициенты C_i, $i = \overline{1,4}$, из системы уравнений:

$$\begin{cases} y(0) = \sin 0 + \dfrac{0^4}{24} + \dfrac{C_1 \cdot 0^3}{6} + \dfrac{C_2 \cdot 0^2}{2} + C_3 \cdot 0 + C_4 = 1, \\ y'(0) = \cos 0 + \dfrac{0^3}{6} + \dfrac{C_1 \cdot 0^2}{2} + C_2 \cdot 0 + C_3 = 0, \\ y''(0) = -\sin 0 + \dfrac{0^2}{2} + C_1 \cdot 0 + C_2 = 0, \\ y'''(0) = -\cos 0 + 0 + C_1 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = 1, \\ C_2 = 0, \\ C_3 = -1, \\ C_4 = 1. \end{cases}$$

Следовательно, решение задачи Коши имеет вид:

$$y = \sin x + \tfrac{1}{24}x^4 + \tfrac{1}{6}x^3 - x + 1. \blacktriangleleft$$

Уравнение вида $F\left(y^{(n-1)}, y^{(n)}\right) = 0$

Рассмотрим сначала случай, когда такое уравнение можно разрешить относительно $y^{(n)}$:

$$y^{(n)} = f\left(y^{(n-1)}\right).$$

Решаем его следующим образом. Вводим новую переменную $z = y^{(n-1)}$. Тогда уравнение записывается как $z' = f(z)$. Разделяя переменные, находим его общее решение:

$$\int \frac{dz}{f(z)} = x + C_1 \qquad \rightarrow \qquad z = \varphi(x, C_1).$$

Возвращаясь к переменной y, получаем дифференциальное уравнение $(n-1)$-го порядка:

$$y^{(n-1)} = \varphi(x, C_1),$$

которое решается методом, изложенном для уравнения $y^{(n)} = f(x)$.

Рассмотрим неявное уравнение

$$F\left(y^{(n-1)}, y^{(n)}\right) = 0.$$

Его можно проинтегрировать, если оно представляется в параметрической форме

$$\begin{cases} y^{(n)} = \varphi(t), \\ y^{(n-1)} = \psi(t). \end{cases}$$

Поскольку $d\left(y^{(n-1)}\right) = y^{(n)}dx$, то получаем следующее выражение для $x(t)$:

$$dx = \frac{d\left(y^{(n-1)}\right)}{y^{(n)}} = \frac{\psi'(t)dt}{\varphi(t)} \qquad \rightarrow \qquad x = \int \frac{\psi'(t)dt}{\varphi(t)} + C_1.$$

Выражение для $y(t)$ находим последовательным интегрированием

$$d\left(y^{(n-2)}\right) = y^{(n-1)}dx = \psi(t) \cdot \frac{\psi'(t)dt}{\varphi(t)},$$

$$y^{(n-2)} = \int \psi(t) \cdot \frac{\psi'(t)dt}{\varphi(t)} + C_2,$$

...

$$dy = y'dx \qquad \rightarrow \qquad y = \int y'dx + C_n.$$

В результате мы получаем общее решение уравнения в параметрическом виде.

► Решим задачу Коши для уравнения

$$y^{IV} - y''' = 1$$

при нулевых начальных условиях

$$y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0).$$

Данное уравнение относится к типу $y^{(n)} = f\left(y^{(n-1)}\right)$, так как $y^{IV} = y''' + 1$. Введем промежуточную переменную $z = y'''$. Получаем линейное уравнение первого порядка:

$$z' - z = 1.$$

Его общим решением является функция

$$z = C_1 e^x - 1.$$

Следовательно, имеем

$$y''' = C_1 e^x - 1.$$

Его можно решить последовательным интегрированием:

$$y'' = C_1 e^x - x + C_2,$$

$$y' = C_1 e^x - \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3,$$

$$y = C_1 e^x - \frac{x^3}{6} + \frac{C_2 x^2}{2} + C_3 x + C_4.$$

Коэффициенты C_i определяются из начальных условий:

$$\begin{cases} y(0) = C_1 + C_4 = 0, \\ y'(0) = C_1 + C_3 = 0, \\ y''(0) = C_1 + C_2 = 0, \\ y'''(0) = C_1 - 1 = 0. \end{cases}$$

Отсюда $C_1 = 1, C_2 = C_3 = C_4 = -1$.

Итак, решение задачи Коши при заданных начальных условиях имеет вид:

$$y = e^x - \tfrac{1}{6}x^3 - \tfrac{1}{2}x^2 - x - 1. \blacktriangleleft$$

► Рассмотрим решение уравнения

$$(y'')^2 - (y'')^3 = x$$

параметрическим методом.

Полагаем $y'' = t$. Тогда $x = t^2 - t^3$. Учитывая, что $d(y') = y''dx$, находим производную y', выраженную через параметр t:

$$d(y') = y''dx = t(2t - 3t^2)dt.$$

Тогда

$$y' = \int (2t^2 - 3t^3)dt = \frac{2}{3}t^3 - \frac{3}{4}t^4 + C_1.$$

Аналогично выполняем еще одно интегрирование:

$$dy = y'dx = \left(\frac{2}{3}t^3 - \frac{3}{4}t^4 + C_1\right)(2t - 3t^2)dt.$$

Тогда

$$y = \int \left(\frac{2}{3}t^3 - \frac{3}{4}t^4 + C_1\right)(2t - 3t^2)dt =$$

$$= \frac{4}{15}t^5 - \frac{7}{12}t^6 + \frac{3}{8}t^7 + C_1 t^2 - C_1 t^3 + C_2.$$

Таким образом, общее решение представляется в параметрической форме

$$\begin{cases} x = t^2 - t^3, \\ y = \dfrac{4}{15}t^5 - \dfrac{7}{12}t^6 + \dfrac{3}{8}t^7 + C_1 t^2 - C_1 t^3 + C_2. \end{cases}$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные. ◄

Уравнение вида $F\left(y^{(n-2)}, y^{(n)}\right) = 0$

Предположим, что данное уравнение разрешено относительно $y^{(n)}$, то есть $y^{(n)} = f\left(y^{(n-2)}\right)$. Вводя новую переменную $y^{(n-2)} = z$, запишем его как $z'' = f(z)$. Умножая обе части на z' (в предположении, что уравнение $z' = 0$ не имеет решения), получаем:

$$z'z'' = f(z)z'.$$

Отсюда, переходя к дифференциалам, получим

$$d((z')^2) = 2f(z)dz.$$

Тогда, проинтегрировав, имеем

$$(z')^2 = 2\int f(z)dz + C_1,$$

$$z' = \pm\sqrt{2\int f(z)dz + C_1}.$$

Выполняем обратную замену:

$$y^{(n-1)} = \pm\sqrt{2\int f(y^{(n-2)})d(y^{(n-2)}) + C_1}.$$

Видно, что мы получили уравнение вида $y^{(n-1)} = f\left(y^{(n-2)}\right)$, которое было рассмотрено выше и решается в квадратурах.

Если уравнение $z''f(z)$ имеет решение $z' = 0$, то общее решение выражается формулой:

$$y^{(n-1)} = 0 \quad \rightarrow \quad y = C_1 x^{n-2} + C_2 x^{n-3} + \cdots + C_{n-1}.$$

В случае, когда дифференциальное уравнение $F\left(y^{(n-2)}, y^{(n)}\right) = 0$ допускает параметрическое представление

$$\begin{cases} y^{(n)} = \varphi(t), \\ y^{(n-2)} = \psi(t), \end{cases}$$

то его решение строится следующим образом.

Из соотношений

$$d\left(y^{(n-1)}\right) = y^{(n)}dx, \quad d\left(y^{(n-2)}\right) = y^{(n-1)}dx$$

следует, что

$$y^{(n-1)}d\left(y^{(n-1)}\right) = y^{(n)}d\left(y^{(n-2)}\right)$$

или в параметрической форме:

$$y^{(n-1)}d\left(y^{(n-1)}\right) = \varphi(t)d\left(\psi(t)\right),$$
$$y^{(n-1)}d\left(y^{(n-1)}\right) = \varphi(t)\psi'(t)dt.$$

Интегрируя, находим:

$$\frac{1}{2}\left(y^{(n-1)}\right)^2 = \int \varphi(t)\psi'(t)dt + C_1,$$

$$y^{(n-1)} = \pm\sqrt{2\int \varphi(t)\psi'(t)dt + C_1}.$$

В результате получили параметрическое выражение для производных $y^{(n-2)}$ и $y^{(n-1)}$, то есть задача сводится к уравнению вида $F\left(y^{(n-1)}, y^{(n)}\right) = 0$.

►Рассмотрим решение уравнения

$$y^{IV} + y'' = 1.$$

Введем новую переменную $y'' = z$. Тогда уравнение примет вид

$$z'' = 1 - z.$$

Умножим обе части на z' (в предположении, что уравнение не имеет решения $z' = 0$), получаем:

$$z'z'' = (1 - z)z'.$$

Отсюда, переходя к дифференциалам, получим

$$\frac{1}{2}d((z')^2) = (1-z)dz,$$
$$d((z')^2) = 2(1-z)dz.$$

Тогда, проинтегрировав, имеем

$$(z')^2 = 2\int(1-z)dz + C_1 = 2\left(z - \frac{z^2}{2}\right) + C_1 = 2z - z^2 + C_1,$$
$$z' = \pm\sqrt{2z - z^2 + C_1}.$$

Получили дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Разделив на $\pm\sqrt{2z - z^2 + C_1} \neq 0$, получим

$$\pm\frac{dz}{\sqrt{2z - z^2 + C_1}} = dx.$$

Решая уравнение, найдем

$$\pm\arcsin\frac{z-1}{\sqrt{C_1+1}} = x + C_2,$$
$$\pm\frac{z-1}{\sqrt{C_1+1}} = \sin(x + C_2),$$
$$z = 1 \pm \sqrt{C_1+1}\sin(x + C_2).$$

Рассмотрим случай, когда $\sqrt{2z - z^2 + C_1} = 0$. Отсюда $z = 1 \pm \sqrt{C_1+1}$ – особые решения.

Выполним обратную замену $y'' = z$. Тогда

$$y'' = 1 \pm \sqrt{C_1+1}\sin(x + C_2) \quad \text{или} \quad y'' = 1 \pm \sqrt{C_1+1}.$$

Для удобства переобозначим $C_1 = \pm\sqrt{C_1+1}$:

$$y'' = 1 + C_1\sin(x + C_2) \quad \text{или} \quad y'' = 1 + C_1.$$

Рассмотрим первое уравнение и проинтегрируем его два раза:

$$y' = -C_1\cos(x + C_2) + x + C_3,$$
$$y = -C_1\sin(x + C_2) + \frac{x^2}{2} + C_3x + C_4 \quad - \quad \text{общее решение.}$$

Рассмотрим второе уравнение и проинтегрируем его два раза:

$$y' = (1 + C_1)x + C_5,$$

$$y = \frac{1 + C_1}{2}x^2 + C_5 x + C_6 \quad - \quad \text{особое решения.} \quad \blacksquare$$

2.2. Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка

Уравнение вида $y'' = f(x)$

Понижение порядка происходит путем интегрирования правой части уравнения два раза, то есть

$$y' = \int y''dx + C_1 = \int f(x)dx + C_1,$$

$$y = \int y'dx + C_2 = \int \left(\int f(x)dx + C_1 \right) dx + C_2 =$$

$$= \int \left(\int f(x)dx \right) dx + C_1 x + C_2.$$

► Найдем общее решение уравнения $y'' = x \sin x$.

Решение. Проинтегрируем уравнение два раза:

$$y' = \int x \sin x \, dx + C_1 = -x \cos x + \sin x + C_1,$$

$$y = \int (-x \cos x + \sin x + C_1)dx + C_2 =$$

$$= -x \sin x - 2 \cos x + C_1 x + C_2. \blacktriangleleft$$

Уравнение $F(y, y', y'') = 0$,
не содержащее независимую переменную x

Понижение порядка происходит с помощью замены

$$y' = z(y), \qquad y'' = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy} z.$$

В результате получаем дифференциальное уравнение первого порядка относительно новой функции $z = z(y)$:

$$F(y, z, z') = 0.$$

Находим общее решение $z = \varphi(y, C_1)$, а затем, решая дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными

$$y' = \varphi(y, C_1),$$

находим решение исходного дифференциального уравнения.

► Найдем общий интеграл уравнения

$$yy'' + (y')^2 = 1, \quad y > 0.$$

Дано дифференциальное уравнение второго порядка, не содержащее независимую переменную *x*. Выполним замену

$$y' = z(y), \qquad y'' = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy} z.$$

Тогда получим дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными:

$$y \frac{dz}{dy} z + z^2 = 1.$$

Решая его, находим

$$yzdz + (z^2 - 1)dy = 0,$$

$$\frac{zdz}{z^2 - 1} + \frac{dy}{y} = 0,$$

$$\frac{1}{2} \ln|z^2 - 1| + \ln|y| = \ln|C_1|,$$

$$y\sqrt{z^2 - 1} = C_1,$$

$$z = \pm \sqrt{\left(\frac{C_1}{y}\right)^2 + 1}.$$

Выполнив обратную замену $z = y'$, получим дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными:

$$y' = \pm \frac{\sqrt{C_1^2 + y^2}}{y},$$

$$\pm \frac{ydy}{\sqrt{C_1^2 + y^2}} = dx,$$

$$\pm\frac{\sqrt{C_1^2+y^2}}{2}=x+C_2,$$
$$y^2+C_1^2=4(x+C_2)^2.\ \blacktriangleleft$$

Уравнение $F(x,y',y'')=0$, не содержащее искомую функции y

Понижение порядка уравнения происходит после замены $y'=z(x)$, тогда $y''=z'(x)$, где x – независимая переменная. В результате получаем дифференциальное уравнение первого порядка относительно новой функции $z=z(x)$:

$$F(x,z,z')=0.$$

Находим общее решение $z=\varphi(x,C_1)$, а затем, решая дифференциальное уравнение с разделёнными переменными

$$y'=\varphi(x,C_1),$$

находим общее решение $y=\psi(x,C_1,C_2)$ исходного дифференциального уравнения.

► Найдем общий интеграл уравнения

$$2xy'y''=(y')^2+1.$$

Задано дифференциальное уравнение второго порядка, допускающее понижение порядка, так как уравнение не содержит искомую функцию. Выполнив замену $y'=z(x)$, $y''=z'(x)$, получим дифференциальное уравнение первого порядка

$$2xzz'=z^2+1.$$

Решая его, получим

$$2xzdz-(z^2+1)dx=0,$$
$$\frac{2zdz}{z^2+1}-\frac{dx}{x}=0,$$
$$\int\frac{2zdz}{z^2+1}-\int\frac{dx}{x}=C,$$
$$z^2+1=C_1x,\ \ C=\ln|C_1|,\ \ C_1\neq 0,$$
$$z=\pm\sqrt{C_1x-1},\ \ C_1\neq 0.$$

Выполнив обратную замену $z = y'$, получим дифференциальное уравнение первого порядка с разделёнными переменными

$$y' = \pm\sqrt{C_1 x - 1}, \quad C_1 \neq 0.$$

Интегрируя его, найдём общий интеграл данного уравнения

$$y = \pm \int \sqrt{C_1 x - 1}\,dx - C_2 = \pm\frac{2}{3C_1}\sqrt{(C_1 x - 1)^3} - C_2.$$

$$(y + C_2)^2 = \frac{4(C_1 x - 1)^3}{9C_1^2}, \quad C_1 \neq 0. \quad \blacktriangleleft$$

2.3. Линейные дифференциальные уравнения *n*-го порядка

Определение. *Линейное дифференциальное уравнение n-го порядка* – это уравнение вида:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x), \qquad (6)$$

где $p_i(x)$, $i = \overline{1,n}$, – коэффициенты уравнения, непрерывные на (a,b), $f(x)$ – правая часть, непрерывная на (a,b).

Если $f(x) \not\equiv 0$, то уравнение называется линейным *неоднородным дифференциальным уравнением*, если $f(x) \equiv 0$, то уравнение называется линейным *однородным дифференциальным уравнением*.

Теорема Коши (существования и единственности решения задачи Коши для линейного дифференциального уравнения n-го порядка). Если функции $p_i(x)$, $i = \overline{1,n}$, $f(x)$ непрерывны на (a,b), то для любого $x_0 \in (a,b)$ и для любых чисел y_0, y_1, …, y_{n-1} существует единственное решение $y = \varphi(x)$ уравнения (6), удовлетворяющее начальным условиям $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$, …, $y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$.

Доказательство. Применим теорему Коши для дифференциального уравнения *n*-го порядка. Запишем уравнение (6) в виде

$$y^{(n)} = \underbrace{f(x) - p_1(x)y^{(n-1)} - \cdots - p_{n-1}(x)y' - p_n(x)y}_{F(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)})}. \qquad (7)$$

Функция $F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$ – это функция $(n+1)$-го переменного и она непрерывна в области $D = \left\{a < x < b, \ -\infty < y^{(i)} < +\infty\right\}$, $i = \overline{0, n-1}$. Найдем ее частные производные:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -p_n(x), \ \frac{\partial F}{\partial y'} = -p_{n-1}(x), \ \ldots, \ \frac{\partial F}{\partial y^{(n-1)}} = -p_1(x).$$

Все частные производные также непрерывны в области D.

Итак, для правой части уравнения (7) выполняются условия теоремы Коши для дифференциального уравнения *n*-го порядка. Тогда по этой теореме для любого $x_0 \in (a, b)$ и для любых чисел y_0, y_1, …, y_{n-1} существует единственное решение $y = \varphi(x)$ уравнения (7), а значит и уравнения (6), удовлетворяющее начальным условиям $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$, …, $y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$. Теорема доказана.

2.4. Линейные однородные дифференциальные уравнения *n*-го порядка

Определение. *Линейный дифференциальный оператор* – это оператор вида

$$L(y) = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y.$$

Тогда линейное однородное дифференциальное уравнение можно записать в виде:

$$L(y) = 0.$$

Свойства оператора

1⁰. $L(cy) = c \cdot L(y)$, $c = \text{const}$.

Доказательство.

$$L(cy) = (cy)^{(n)} + p_1(x)(cy)^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)(cy)' + p_n(x)(cy) =$$

$$= c \cdot y^{(n)} + c \cdot p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + c \cdot p_{n-1}(x)y' + c \cdot p_n(x)y =$$

$$= c \cdot \left(y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y\right) = c \cdot L(y).$$

2⁰. $L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2)$.

Доказательство.

$$L(y_1+y_2)=(y_1+y_2)^{(n)}+p_1(x)(y_1+y_2)^{(n-1)}+\cdots+$$
$$+p_{n-1}(x)(y_1+y_2)'+p_n(x)(y_1+y_2)=$$
$$=y_1^{(n)}+p_1(x)y_1^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}(x)y_1'+p_n(x)y_1+$$
$$+y_2^{(n)}+p_1(x)y_2^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}(x)y_2'+p_n(x)y_2=L(y_1)+L(y_2).$$

Свойства линейного однородного дифференциального уравнения

1^0. Если функция $y(x)$ является решением линейного однородного дифференциального уравнения (6), то и функция $c\cdot y(x)$ является решением этого уравнения.

2^0. Если функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ являются решениями линейного однородного дифференциального уравнения (6), то и функция $y_1(x)+y_2(x)$ является решением этого уравнения.

3^0. Если функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$ являются решениями линейного однородного дифференциального уравнения (6), то и функция $\alpha_1y_1(x)+\alpha_2y_2(x)+\cdots+\alpha_ny_n(x)$, $\alpha_i=\text{const}$, также является решением этого уравнения.

Определитель Вронского и его свойства

Пусть функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$ имеют на (a,b) производные до $(n-1)$-го порядка включительно.

Определитель. *Определитель Вронского* – это определитель вида

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Теорема 1. Если функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$ имеют на (a,b) производные до $(n-1)$-го порядка включительно и если они линейно зависимы на (a,b), то $W(x)\equiv 0$ для любого $x\in(a,b)$.

Доказательство. Доказательство проведем для трех функций y_1, y_2, y_3. Тогда

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix}.$$

Так как y_1, y_2, y_3 – линейно зависимы на (a, b), то одну из них можно линейно выразить через остальные, например, y_3:

$$y_3 = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2.$$

Тогда

$$y_3' = \alpha_1 y_1' + \alpha_2 y_2',$$
$$y_3'' = \alpha_1 y_1'' + \alpha_2 y_2''.$$

Следовательно,

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \\ y_1' & y_2' & \alpha_1 y_1' + \alpha_2 y_2' \\ y_1'' & y_2'' & \alpha_1 y_1'' + \alpha_2 y_2'' \end{vmatrix} =$$

$$= \alpha_1 \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_1 \\ y_1' & y_2' & y_1' \\ y_1'' & y_2'' & y_1'' \end{vmatrix} + \alpha_2 \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_2 \\ y_1' & y_2' & y_2' \\ y_1'' & y_2'' & y_2'' \end{vmatrix} =$$

$$= \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 = 0 \quad \forall\, x \in (a, b).$$

Теорема доказана.

Теорема 2. Если функции $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ – решения линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка, причем они линейно независимы на (a, b), то $W(x) \neq 0$ для любого $x \in (a, b)$, где (a, b) – интервал непрерывности коэффициентов уравнения.

Доказательство. Докажем для уравнения третьего порядка.

Пусть функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$ – линейно независимы на (a, b) и являются решениями уравнения

$$y''' + p_1(x)y'' + p_2(x)y' + p_3(x)y = 0, \qquad (8)$$

где $p_i(x) \in C_{(a.b)}$, $i = \overline{1,3}$.

Докажем, что $W(x) \neq 0$ для любого $x \in (a.b)$ методом от противного. Предположим, что существует $x_0 \in (a,b)$ такое, что $W(x_0) = 0$.

Рассмотрим функцию

$$y = \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \alpha_3 y_3(x). \quad (9)$$

По свойству 3^0 линейных однородных дифференциальных уравнений функция (9) при любых постоянных α_i, $i = \overline{1,3}$, является решением уравнения (8). Подберем α_i, $i = \overline{1,3}$, так, чтобы функция (9) удовлетворяла начальным условиям задачи Коши, то есть

$$\begin{cases} y(x_0) = 0, \\ y'(x_0) = 0, \\ y''(x_0) = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Дифференцируя функцию (9) два раза и подставляя $x = x_0$, запишем систему (10) в виде:

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1(x_0) + \alpha_2 y_2(x_0) + \alpha_3 y_3(x_0) = 0, \\ \alpha_1 y_1'(x_0) + \alpha_2 y_2'(x_0) + \alpha_3 y_3'(x_0) = 0, \\ \alpha_1 y_1''(x_0) + \alpha_2 y_2''(x_0) + \alpha_3 y_3''(x_0) = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Получили систему линейных алгебраических однородных уравнений с неизвестными α_i, $i = \overline{1,3}$. Определителем системы (11) является определитель Вронского в точке $x = x_0$:

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & y_3(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & y_3'(x_0) \\ y_1''(x_0) & y_2''(x_0) & y_3''(x_0) \end{vmatrix}.$$

По допущению $W(x_0) = 0$. Тогда система (11) имеет ненулевые решения. Обозначим одно из них

$$\alpha_1 = \overline{\alpha_1}, \quad \alpha_2 = \overline{\alpha_2}, \quad \alpha_3 = \overline{\alpha_3}.$$

Подставляя их в функцию (9), получим, что функция

$$y = \overline{\alpha_1} y_1(x) + \overline{\alpha_2} y_2(x) + \overline{\alpha_3} y_3(x)$$

удовлетворяет нулевым условиям (10).

С другой стороны, тем же условиям (10) удовлетворяет и функция $\overline{y} \equiv 0$. А с учетом теоремы Коши получаем, что задача Коши

для линейного однородного дифференциального уравнения имеет единственное решение. Следовательно, $y \equiv \overline{y}$.

В результате получаем:

$$\overline{\alpha_1} y_1(x) + \overline{\alpha_2} y_2(x) + \overline{\alpha_3} y_3(x) = 0,$$

при условии, что не все $\overline{\alpha_i} = 0$, $i = \overline{1,3}$. Следовательно, функции $y_i(x)$, $i = \overline{1,3}$, – линейно зависимы, что противоречит условию теоремы. Полученное противоречие доказывает теорему.

Следствие. Если функции y_i, $i = \overline{1,n}$, – решения линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка и если определитель Вронского для этих функций хотя бы в одной точке $x_0 \in (a,b)$ отличен от нуля, то функции y_i, $i = \overline{1,n}$, линейно независимы.

Структура общего решения линейного однородного дифференциального уравнения

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x) y' + p_n(x) y = 0, \qquad (12)$$

где коэффициенты $p_i(x) \in C_{(a,b)}$, $i = \overline{1,n}$.

Определение. Функции y_i, $i = \overline{1,n}$, называются *фундаментальной системой решений линейного однородного дифференциального уравнения (12)*, если эти функции являются решениями уравнения (12), они линейно независимы на $[a,b]$ и их число совпадает с порядком уравнения.

Теорема. Любое линейное однородное дифференциальное уравнение имеет фундаментальную систему решений.

Доказательство. Доказательство проведем для уравнения третьего порядка:

$$y''' + p_1(x) y'' + p_2(x) y' + p_3(x) y = 0, \qquad (13)$$

$p_i(x) \in C_{(a,b)}$, $i = \overline{1,3}$.

Возьмем произвольно 3^2 числа так, чтобы определитель, составленный из этих чисел, был отличен от нуля:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Пусть $x_0 \in (a, b)$. Примем числа первого столбца определителя и x_0 за начальные данные задачи Коши. По теореме Коши существует единственное решение $y_1 = y_1(x)$ уравнения (13), удовлетворяющее условиям

$$\begin{cases} y_1(x_0) = a_{11}, \\ y_1'(x_0) = a_{21}, \\ y_1''(x_0) = a_{31}. \end{cases}$$

Примем числа второго столбца определителя и x_0 за начальные данные задачи Коши. По теореме Коши существует единственное решение $y_2 = y_2(x)$ уравнения (13), удовлетворяющее условиям

$$\begin{cases} y_2(x_0) = a_{12}, \\ y_2'(x_0) = a_{22}, \\ y_2''(x_0) = a_{32}. \end{cases}$$

Примем числа третьего столбца определителя и x_0 за начальные данные задачи Коши. По теореме Коши существует единственное решение $y_3 = y_3(x)$ уравнения (13), удовлетворяющее условиям

$$\begin{cases} y_3(x_0) = a_{13}, \\ y_3'(x_0) = a_{23}, \\ y_3''(x_0) = a_{33}. \end{cases}$$

Рассмотрим систему функций y_1, y_2, y_3. Все функции являются решениями уравнения (13), их число равно порядку уравнения (13). А так как определитель Вронского

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & y_3(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & y_3'(x_0) \\ y_1''(x_0) & y_2''(x_0) & y_3''(x_0) \end{vmatrix} \underset{(2)-(4)}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0,$$

то они линейно независимы.

Следовательно, по определению функции y_1, y_2, y_3 образуют фундаментальную систему решений для уравнения (13). Теорема доказана.

Теорема (о структуре общего решения линейного однородного дифференциального уравнения). Если функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$ образуют фундаментальную систему решений линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка (12), то общее решение этого уравнения имеет вид:

$$y = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i\,(x), \tag{14}$$

где C_i, $i = \overline{1,n}$, – произвольные постоянные.

Доказательство. Для доказательства надо показать, что выполняются все условия определения общего решения дифференциального уравнения n-го порядка.

Так как функции $y_i(x)$, $i = \overline{1,n}$, являются решениями уравнения (12), то по свойству 3^0 линейных однородных дифференциальных уравнений функция (14) также является решением уравнения (12).

Теперь возьмем любые числа $x_0 \in (a,b)$, y_0, y_1, …, y_{n-1} и покажем, что можно подобрать такие постоянные C_i, $i = \overline{1\,,n}$, чтобы выполнялись условия задачи Коши:

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y_1, \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}. \end{cases} \tag{15}$$

Для этого продифференцируем функцию (14) $(n-1)$ раз, подставим $x = x_0$ и полученные функцию и ее производные в систему (15):

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + \dots + C_n y_n(x_0) = y_0, \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + \dots + C_n y_n'(x_0) = y_1, \\ \dots \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \dots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}. \end{cases} \tag{16}$$

Получили систему из n линейных уравнений с n неизвестными C_i.

Так как функции $y_i(x)$, $i = \overline{1,n}$, образуют фундаментальную систему решений для уравнения (12), то они линейно независимы. Тогда определитель Вронского $W(x_0) \neq 0$. И этот же определитель является определителем системы (16). Следовательно, система (16) имеет единственное ненулевое решение, которое обозначим

$$C_i = \overline{C_i}, i = \overline{1,n}.$$

При таких C_i функция (14) удовлетворяет начальным условиям задачи Коши (15). Таким образом, выполняется определение общего решения. Значит функция (14) – общее решение линейного однородного дифференциального уравнения (12). Теорема доказана.

2.5. Линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1} y' + p_n y = 0, \qquad (17)$$

где $p_i = \text{const}$, $i = \overline{1,n}$.

Теорема. Для того чтобы функция $y = e^{kx}$ была решением линейного однородного дифференциального уравнения (17) необходимо и достаточно, чтобы число k было корнем характеристического уравнения:

$$k^n + p_1 k^{n-1} + \cdots + p_{n-1} k + p_n = 0. \qquad (18)$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $y = e^{kx}$ – решение линейного однородного дифференциального уравнения (17). Тогда эта функция обращает уравнение (17) в верное тождество. Так как

$$y' = ke^{kx}, \ y'' = k^2 e^{kx}, \ \ldots, \ y^{(n)} = k^n e^{kx},$$

то

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1} y' + p_n y = 0,$$

$$k^n e^{kx} + p_1 k^{n-1} e^{kx} + \cdots + p_{n-1} k e^{kx} + p_n e^{kx} = 0 \ | : e^{kx} \neq 0,$$

$k^n + p_1 k^{n-1} + \cdots + p_{n-1} k + p_n = 0$ – верное тождество,

то есть k – корень уравнения (18).

Достаточность доказывается путем цепочки обратных рассуждений. Теорема доказана.

Нахождение фундаментальной системы решений линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами в зависимости от корней характеристического уравнения

По теореме о структуре общего решения любого линейного однородного дифференциального уравнения общее решение уравнения (17) имеет вид:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n,$$

где y_1, y_2, …, y_n – фундаментальная система решений для уравнения (17), $C_i = \text{const}$, $i = \overline{1,n}$.

1 случай. Все корни характеристического уравнения (18) действительные и различные, то есть $k_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1,n}$, $k_i \neq k_j$ при $i \neq j$.

По теореме о решении линейного однородного дифференциального уравнения функции $y_1 = e^{k_1 x}$, $y_2 = e^{k_2 x}$, …, $y_n = e^{k_n x}$ являются решениями уравнения (17), причем их количество совпадает с порядком уравнения (17). Покажем, что эти функции образуют фундаментальную систему решений для уравнения (17). Для этого осталось доказать, что они линейно независимы.

Найдем производные функций вплоть до $(n-1)$-го порядка и составим определитель Вронского:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & e^{k_2 x} & \cdots & e^{k_n x} \\ k_1 e^{k_1 x} & k_2 e^{k_2 x} & \cdots & k_n e^{k_n x} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k_1^{n-1} e^{k_1 x} & k_2^{n-1} e^{k_2 x} & \cdots & k_n^{n-1} e^{k_n x} \end{vmatrix} =$$

$$= \underbrace{e^{k_1 x} e^{k_2 x} \cdot \ldots \cdot e^{k_n x}}_{\neq o} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ k_1 & k_2 & \ldots & k_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ k_1^{n-1} & k_2^{n-1} & \ldots & k_n^{n-1} \end{vmatrix}}_{\text{определитель Вандермонда } \neq 0} \neq 0.$$

Тогда по следствию к свойствам определителя Вронского получаем, что функции y_1, y_2, …, y_n – линейно независимы.

Таким образом, функции

$$y_1 = e^{k_1 x}, \ y_2 = e^{k_2 x}, \ \ldots, \ y_n = e^{k_n x}$$

образуют фундаментальную систему решений для уравнения (17).

► Найдем общее решение уравнения

$$y''' - y' = 0.$$

Запишем характеристическое уравнение:

$$k^3 - k = 0.$$

Корни этого уравнения:

$$k_1 = 0, \ k_2 = -1, \ k_3 = 1.$$

Все корни действительные, различные и их число равно порядку уравнения. Тогда частные решения, составляющие фундаментальную систему решений, имеют вид:

$$y_1 = e^{k_1 x} = e^{0x} = 1,$$
$$y_2 = e^{k_2 x} = e^{-x},$$
$$y_3 = e^{k_3 x} = e^{x}.$$

Следовательно, общее решение будет

$$y = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^{x}. \blacktriangleleft$$

2 случай. Корни характеристического уравнения действительные и кратные.

Пусть характеристическое уравнение (18) степени n имеет m корней k_1, k_2, …, k_m, кратность которых, соответственно, равна s_1, s_2, …, s_m, при этом $s_1 + s_2 + \cdots + s_m = n$. Если корень простой, то будем считать, что его кратность $s = 1$.

По теореме о решении линейного однородного дифференциального уравнения функции $y_1 = e^{k_1 x}$, $y_2 = e^{k_2 x}$, …, $y_m = e^{k_m x}$ являются решениями уравнения (17), причем они линейно независимы, так как определитель Вронского для этих функций отличен от нуля. Для фундаментальной системы решений необходимо n линейно независимых частных решений. Найдем остальные $(n - m)$ решений.

Покажем, как находить недостающие решения на примере уравнения второго порядка

$$y'' + py' + qy = 0. \tag{19}$$

Пусть корни характеристического уравнения

$$k^2 + pk + q = 0$$

имеют вид $k_1 = k_2 = k$, то есть k – корень кратности $s = 2$. Как и в первом случае одно из решений будет

$$y_1 = e^{kx}.$$

Покажем, что в качестве второго решения можно взять функцию $y_2 = xe^{kx}$. Сначала покажем, что y_2 – решение уравнения (19). Так как

$$y_2' = e^{kx}(1 + kx), \qquad y_2'' = e^{kx}(2k + k^2 x),$$

то левая часть уравнения (19) будет:

$$y'' + py' + qy = e^{kx}(2k + k^2 x) + pe^{kx}(1 + kx) + qxe^{kx} =$$

$$= e^{kx}\big((k^2 + pk + q)x + 2k + p\big) =$$

$$= \begin{bmatrix} k^2 + pk + q = 0 \text{ из характеристического уравнения,} \\ \text{по т. Виета} \quad k_1 + k_2 = -p \quad \Longrightarrow \quad 2k = -p \end{bmatrix} =$$

$$= e^{kx}(0 \cdot x - p + p) = 0,$$

то есть y_2 – решение уравнения (19).

Так как

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{xe^{kx}}{e^{kx}} = x \neq \text{const},$$

то функции y_1, y_2 – линейно независимы.

Таким образом, функции $y_1 = e^{kx}$, $y_2 = xe^{kx}$ образуют фундаментальную систему решений для уравнения (19).

Вернемся к уравнению n-го порядка. Частные решения будут:

для корня k_1 кратности s_1: $y_1 = e^{k_1 x}$,
$y_2 = xe^{k_1 x}$,
$y_3 = x^2 e^{k_1 x}$,
…,
$y_{s_1} = x^{s_1-1} e^{k_1 x}$,

для корня k_2 кратности s_2: $y_{s_1+1} = e^{k_2 x}$,
$y_{s_1+2} = xe^{k_2 x}$,
$y_{s_1+3} = x^2 e^{k_2 x}$,
…,
$y_{s_1+s_2} = x^{s_2-1} e^{k_2 x}$

и так далее.

Тогда общее решение линейного однородного дифференциального уравнения (19) имеет вид

$$y = \left(C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \cdots + C_{s_1} x^{s_1-1}\right) e^{k_1 x} +$$
$$+\left(C_{s_1+1} + C_{s_1+2} x + C_{s_1+3} x^2 + \cdots + C_{s_1+s_2} x^{s_2-1}\right) e^{k_2 x} + \cdots +$$
$$+\left(C_{s_1+\cdots+s_{m-1}+1} + C_{s_1+\cdots+s_{m-1}+2} x + \cdots + C_{s_1+\cdots+s_m} x^{s_m-1}\right) e^{k_m x}.$$

► Найдем общее решение уравнения

$$y^{(5)} - 2y^{(4)} + y''' = 0.$$

Запишем характеристическое уравнение

$$k^5 - 2k^4 + k^3 = 0,$$

Получили корни:

$$k_1 = 0 \quad \text{кратности} \quad s_1 = 3,$$
$$k_2 = 1 \quad \text{кратности} \quad s_2 = 2,$$

при этом $s_1 + s_2 = 3 + 2 = 5$ совпадает с порядком уравнения.

Тогда частные решения, составляющие фундаментальную систему решений, имеют вид:

для корня $k_1 = 0$ кратности 3: $y_1 = e^{k_1 x} = e^{0x} = 1$,
$y_2 = xe^{k_1 x} = x \cdot 1 = x$,
$y_3 = x^2 e^{k_1 x} = x^2 \cdot 1 = x^2$,

для корня $k_2 = 1$ кратности 2: $y_4 = e^{k_2 x} = e^x$,

$y_5 = xe^{k_2 x} = xe^x$.

В итого получили общее решение:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + C_4 y_4 + C_5 y_5,$$
$$y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 e^x + C_5 x e^x. \blacktriangleleft$$

3 случай. Среди корней характеристического уравнения есть комплексные корни.

Из алгебры известно, что если $k_1 = \alpha + \beta i$ является корнем, то и $k_2 = \alpha - \beta i$ также является корнем уравнения. Найдем вид фундаментальной системы решений для уравнения второго порядка (19):

$$y'' + py' + qy = 0.$$

Пусть корни характеристического уравнения

$$k^2 + pk + q = 0$$

имеют вид $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$.

Покажем, что функции $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$ являются решениями уравнения (19). Так как

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x,$$
$$y_1' = e^{\alpha x}(\alpha\cos\beta x - \beta\sin\beta x),$$
$$y_1'' = e^{\alpha x}\big((\alpha^2 - \beta^2)\cos\beta x - 2\alpha\beta\sin\beta x\big),$$

то

$$y'' + py' + qy = e^{\alpha x}\big((\alpha^2 - \beta^2)\cos\beta x - 2\alpha\beta\sin\beta x\big) +$$
$$+pe^{\alpha x}(\alpha\cos\beta x - \beta\sin\beta x) + qe^{\alpha x}\cos\beta x =$$
$$= e^{\alpha x}[(\alpha^2 - \beta^2 + p\alpha + q)\cos\beta x - (2\alpha + p)\beta\sin\beta x].$$

Так как $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ – корни характеристического уравнения, то по теореме Виета

$$k_1 + k_2 = -p \quad \rightarrow \quad 2\alpha = -p \quad \rightarrow \quad 2\alpha + p = 0,$$
$$k_1 k_2 = q \quad \rightarrow \quad \alpha^2 + \beta^2 = q \quad \rightarrow \quad \beta^2 = q - \alpha^2.$$

Следовательно,

$$y'' + py' + qy =$$
$$= e^{\alpha x}[(\alpha^2 - (q - \alpha^2) + p\alpha + q)\cos\beta x - 0 \cdot \beta\sin\beta x] =$$

$$= e^{\alpha x}(2\alpha^2 + p\alpha)\cos\beta x = e^{\alpha x}\left(\underbrace{2\alpha + p}_{=0}\right)\alpha\cos\beta x = 0,$$

то есть $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$ – решение уравнения (19). Аналогично доказывается и для $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$.

Так как

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{a^{\alpha x}\cos\beta x}{e^{\alpha x}\sin\beta x} = \operatorname{ctg}\beta x \neq const,$$

то функции y_1, y_2 – линейно независимы.

Таким образом, функции $y_1 = e^{\alpha x}\,cos\,\beta x$, $y_2 = e^{\alpha x}\,sin\,\beta x$ образуют фундаментальную систему решений для уравнения (19).

► Найдем общее решение уравнения

$$y'' + 4y' + 5y = 0.$$

Запишем характеристическое уравнение:

$$k^2 + 4k + 5 = 0.$$

Оно имеет корни

$$k_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2} = -2 \pm i\,,$$

то есть $\alpha = -2, \beta = 1$. Тогда частные решения, составляющие фундаментальную систему решений, имеют вид:

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x = e^{-2x}\cos x,$$
$$y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x = e^{-2x}\sin x.$$

Следовательно, общее решение будет

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{-2x}\cos x + C_2 e^{-2x}\sin x.\text{◄}$$

4 случай. Корни характеристического уравнения комплексные и кратные.

Пусть характеристическое уравнение имеет комплексно-сопряженные корни $k_{1,2} = \alpha + \beta i$ кратности s. Этой паре соответствует $2s$ частных решений:

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x, \qquad y_{s+1} = e^{\alpha x}\sin\beta x,$$
$$y_2 = xe^{\alpha x}\cos\beta x, \qquad y_{s+2} = xe^{\alpha x}\sin\beta x,$$

$y_3 = x^2 e^{\alpha x} \cos \beta x,$ $\quad y_{s+3} = x^2 e^{\alpha x} \sin \beta x,$

… …

$y_s = x^{s-1} e^{\alpha x} \cos \beta x,$ $\quad y_{2s} = x^{s-1} e^{\alpha x} \sin \beta x.$

► Найдем общее решение уравнения

$$y^{(4)} + 8y'' + 16y = 0.$$

Запишем характеристическое уравнение:

$$k^4 + 8k^2 + 16 = 0.$$

Оно имеет корни

$$k_{1,2} = \pm 2i \ \text{ кратности } \ s = 2,$$

то есть $\alpha = 0$, $\beta = 2$. Тогда частные решения, составляющие фундаментальную систему решений, имеют вид:

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x = e^{0x} \cos 2x = \cos 2x,$$
$$y_2 = x e^{\alpha x} \cos \beta x = x \cos 2x,$$
$$y_3 = e^{\alpha x} \sin \beta x = e^{0x} \sin 2x = \sin 2x,$$
$$y_4 = x e^{\alpha x} \sin \beta x = x \sin 2x.$$

Следовательно, общее решение будет:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + C_4 y_4,$$
$$y = C_1 \cos 2x + C_2 x \cos 2x + C_3 \sin 2x + C_4 x \sin 2x. \blacktriangleleft$$

Замечание. В общем случае, когда характеристическое уравнение имеет как действительные, так и комплексные корни произвольной кратности, общее решение строится в виде суммы рассмотренных выше.

► Найдем общее решение уравнения

$$y^{(4)} + y'' = 0.$$

Запишем характеристическое уравнение:

$$k^4 + k^2 = 0,$$

Получили корни

$$k_1 = 0 \ \text{ кратности } \ 2, \qquad k_{2,3} = \pm i.$$

Тогда частные решения, составляющие фундаментальную систему решений, имеют вид:

для $k_1 = 0$ кратности 2:

$$y_1 = e^{k_1 x} = e^{0x} = 1,$$
$$y_2 = xe^{k_1 x} = xe^{0x} = x,$$

для $k_{2,3} = \pm i$ имеем $\alpha = 0, \beta = 1$

$$y_3 = e^{\alpha x}\cos\beta x = e^{0x}\cos x = \cos x,$$
$$y_4 = e^{\alpha x}\sin\beta x = e^{0x}\sin x = \sin x.$$

Тогда общее решение имеет вид:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + C_4 y_4,$$
$$y = C_1 + C_2 x + C_3\cos x + C_4\sin x. \blacktriangleleft$$

2.6. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами

Линейным неоднородным дифференциальным уравнением n-го порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_n y = f(x), \qquad (20)$$

где $a_i \in R$, $i = \overline{1,n}$.

Метод вариации произвольных постоянных

Для заданного линейного неоднородного дифференциального уравнения n-го порядка (20) рассмотрим соответствующее линейное однородное дифференциальное уравнение n-го порядка

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_n y = 0.$$

Пусть его фундаментальная система решений состоит из функций $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Тогда общее решение этого уравнения имеет вид

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n.$$

Очевидно, что эта функция не может являться решением линейного неоднородного дифференциального уравнения (20). Ж.Л. Лагранж предложил искать решение линейного неоднородного дифференциального уравнения (20) в виде

$$y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + \cdots + C_n(x)y_n, \qquad (21)$$

где $C_i(x)$, $i = \overline{1,n}$, будут функциями независимого переменного x.

Тем самым задача об отыскании общего решения дифференциального уравнения (20) сводится к отысканию неизвестных функций $C_i(x)$, $i = \overline{1,n}$.

Найдем производные функции (21) до n-го порядка включительно.

$$y' = C_1'(x)y_1 + \cdots + C_n'(x)y_n + C_1(x)y_1' + \cdots + C_n(x)y_n'.$$

В силу произвольности выбора функций $C_i(x)$, $i = \overline{1,n}$, будем считать, что

$$C_1'(x)y_1 + \cdots + C_n'(x)y_n = 0.$$

Тогда

$$y' = C_1(x)y_1' + \cdots + C_n(x)y_n',$$

$$y'' = C_1'(x)y_1' + \cdots + C_n'(x)y_n' + C_1(x)y_1'' + \cdots + C_n(x)y_n''.$$

В силу произвольности выбора функций $C_i(x)$, $i = \overline{1,n}$, будем считать, что

$$C_1'(x)y_1' + \cdots + C_n'(x)y_n' = 0.$$

Тогда

$$y'' = C_1(x)y_1'' + \cdots + C_n(x)y_n''.$$

На $(n-1)$-м шаге получим

$$y^{(n-1)} = C_1(x)y_1^{(n-1)} + \cdots C_n(x)y_n^{(n-1)},$$

при этом мы считаем, что

$$C_1'(x)y_1^{(n-2)} + \cdots + C_n'(x)y_n^{(n-2)} = 0.$$

На n-ом шаге, считая, что

$$C_1'(x)y_1' + \cdots + C_n'(x)y_n' = 0,$$

получим

$$y^{(n)} = C_1(x)y_1^{(n)} + \cdots C_n(x)y_n^{(n)} + f(x).$$

Таким образом, Ж.Л. Лагранж доказал, что функция (21) является решением дифференциального уравнения (20) только при выполнении следующих условий:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 + \cdots + C_n'(x)y_n = 0, \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + \cdots + C_n'(x)y_n' = 0, \\ \qquad\qquad \cdots \\ C_1'(x)y_1^{(n-2)} + C_2'(x)y_2^{(n-2)} + \cdots + C_n'(x)y_n^{(n-2)} = 0, \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)} + C_2'(x)y_2^{(n-1)} + \cdots + C_n'(x)y_n^{(n-1)} = f(x). \end{cases} \quad (22)$$

Заметим, что система (22) однозначно разрешима относительно неизвестных функций $C_i(x)$, $i = \overline{1,n}$.

Метод вариации произвольных постоянных является универсальным и позволяет находить частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения и общее решение соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения одновременно.

► Применим метод вариации произвольных постоянных к дифференциальному уравнению

$$xy'' + y' = x^2.$$

Решая однородное уравнение

$$xy'' + y' = 0,$$

получим его общее решение:

$$y = C_1 \ln x + C_2.$$

Следовательно, фундаментальная система решений имеет вид

$$y_1 = \ln x, \qquad y_2 = 1.$$

Общее решение заданного уравнения будем искать в виде

$$y = C_1(x) \ln x + C_2(x).$$

Для нахождения функций $C_1(x)$ и $C_2(x)$ составляем систему вида (22), учитывая, что канонический вид уравнения есть

$$y'' + \frac{1}{x}y' = x,$$

то есть $f(x) = x$. Тогда

$$\begin{cases} C_1'(x) \cdot \ln x + C_2'(x) \cdot 1 = 0, \\ C_1'(x) \cdot \dfrac{1}{x} + C_2'(x) \cdot 0 = x. \end{cases}$$

Отсюда

$$C_1'(x) = x^2, \qquad C_2'(x) = -x^2 \ln x.$$

Интегрируя, находим

$$C_1(x) = \frac{x^3}{3} + C_1, \qquad C_2(x) = -\frac{x^3}{3}\ln x + \frac{x^3}{9} + C_2.$$

Таким образом, общее решение исходного дифференциального уравнения имеет вид:

$$y = C_1(x)\ln x + C_2(x),$$

$$y = \left(\frac{x^3}{3} + C_1\right)\ln x + \left(-\frac{x^3}{3}\ln x + \frac{x^3}{9} + C_2\right),$$

$$y = C_1 \ln x + \tfrac{1}{9}x^3 + C_2. \blacktriangleleft$$

Метод неопределенных коэффициентов

Теорема (о структуре общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения). Если Y является общим решением линейного однородного дифференциального уравнения, соответствующего данному линейному неоднородному дифференциальному уравнению, а $\overline{y}$ является частным решением линейного неоднородного дифференциального уравнения, то функция $y = Y + \overline{y}$ является общим решением линейного неоднородного дифференциального уравнения.

В случаях особого вида правой части уравнения частное решение неоднородного дифференциального уравнения $\overline{y}$ ищется отдельно. Рассмотрим эти случаи.

Случай 1. Правая часть линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами имеет вид:

$$f(x) = e^{ax}P_m(x),$$

где a – действительная постоянная, $P_m(x)$ – многочлен степени m.

В этом случае $\overline{y}$ ищется в виде

$$\overline{y} = x^s e^{ax} Q_m(x),$$

где $Q_m(x)$ многочлен той же степени, что и $P_m(x)$, но записанный с неопределенными коэффициентами, s – кратность корня $k = a$ характеристического уравнения

$$k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_{n-1} k + a_n = 0$$

для линейного однородного уравнения, соответствующего данному линейному неоднородному дифференциальному уравнению (20). Если a не является корнем характеристического уравнения, то $s = 0$.

► Рассмотрим дифференциального уравнения

$$y'' + y' = (x^2 + 1)e^x.$$

Дано линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Общее решение этого уравнения записывается в виде

$$y = Y + \overline{y},$$

где Y является общим решением линейного однородного дифференциального уравнения $y'' + y' = 0$, а $\overline{y}$ является частным решением данного линейного неоднородного дифференциального уравнения.

Найдем общее решение уравнения

$$y'' + y' = 0.$$

По теореме о структуре общего решения линейного однородного дифференциального уравнения оно имеет вид

$$Y = C_1 y_1 + C_2 y_2,$$

где y_1, y_2 образуют фундаментальную систему однородного уравнения. Чтобы найти фундаментальную систему, составим и решим характеристическое уравнение.

$$k^2 + k = 0.$$

Его корни

$$k_1 = 0, \qquad k_2 = -1.$$

Получили, что корни характеристического уравнения действительные различные, поэтому

$$y_1 = e^{0x} = 1, \qquad y_2 = e^{-x},$$

и общее решение однородного дифференциального уравнения будет

$$Y = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot e^{-x}.$$

Найдем $\overline{y}$. Правая часть заданного дифференциального уравнения имеет вид

$$f(x) = (x^2 + 1)e^x.$$

Здесь $P_m(x) = x^2 + 1, \quad m = 2, \quad a = 1$. Тогда частное решение данного линейного неоднородного уравнения $\overline{y}$ запишется в виде

$$\overline{y} = x^s e^x (Ax^2 + Bx + C).$$

Сравнивая число $a = 1$ с корнями характеристического уравнения $k_1 = 0, k_2 = -1$. Делаем вывод, $a = 1$ не является корнем характеристического уравнения, поэтому $s = 0$.

Подставим $\overline{y} = e^x(Ax^2 + Bx + C)$ в данное уравнение. Для этого найдём

$$\overline{y}' = e^x(Ax^2 + (B + 2A)x + B + C),$$
$$\overline{y}'' = e^x(Ax^2 + (B + 4A)x + 2B + 2A + C).$$

При подстановке получим равенство двух многочленов

$$2Ax^2 + (2B + 6A)x + 3B + 2A + 2C = x^2 + 1.$$

Известно, что два многочлена равны, когда равны коэффициенты при одинаковых степенях *x*. В нашем случае получаем систему:

$$\begin{array}{l|l} x^2 & 2A = 1, \\ x^1 & 2B + 6A = 0, \\ x^0 & 3B + 2A + 2C = 1. \end{array}$$

Следовательно, $A = \frac{1}{2}$, $B = -\frac{3}{2}$, $C = \frac{9}{4}$. Тогда частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения имеет вид:

$$\overline{y} = e^x\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}\right).$$

Итак, общее решение заданного линейного неоднородного уравнения имеет вид

$$y = C_1 + C_2 \cdot e^{-x} + e^x\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}\right). \blacktriangleleft$$

Случай 2. Правая часть линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами имеет вид:

$$f(x) = e^{\alpha x}(M_n(x)\cos\beta x + N_m(x)\sin\beta x),$$

где α, β – действительные постоянные, $M_n(x), N_m(x)$ – многочлены возможно разных степеней.

В этом случае $\overline{y}$ ищется в виде:

$$\overline{y} = e^{\alpha x}x^s(P_r(x)\cos\beta x + Q_r(x)\sin\beta x),$$

где $P_r(x)$, $Q_r(x)$ – многочлены степени $r = \max\{n, m\}$, записанные с неопределенными коэффициентами, s – кратность корня $k = \alpha + \beta i$ характеристического уравнения

$$k^n + a_1k^{n-1} + \ldots + a_{n-1}k + a_n = 0$$

для линейного однородного уравнения, соответствующего данному линейному неоднородному дифференциальному уравнению (20). Если число $\alpha + \beta i$ не является корнем характеристического уравнения, то $s = 0$.

► Найдем решение задачи Коши для уравнения

$$y'' - 2y' + 2y = e^x x\sin x$$

с начальными условиями $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{2}}$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{4}e^{\frac{\pi}{2}}$.

Дано линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Общее решение этого уравнения записывается в виде

$$y = Y + \overline{y},$$

где Y является общим решением линейного однородного дифференциального уравнения $y'' - 2y' + 2y = 0$, а $\overline{y}$ является частным решением данного линейного неоднородного дифференциального уравнения.

Найдем общее решение уравнения

$$y'' - 2y' + 2y = 0.$$

По теореме о структуре общего решения линейного однородного дифференциального уравнения оно имеет вид

$$Y = C_1 y_1 + C_2 y_2,$$

где y_1, y_2 образуют фундаментальную систему однородного уравнения. Чтобы найти фундаментальную систему, составим и решим характеристическое уравнение.

$$k^2 - 2k + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad k_{1,2} = 1 \pm i.$$

Корни характеристического уравнения комплексные сопряженные. Тогда общее решение линейного однородного уравнения будет

$$Y = C_1 e^x \cos x + C_2 e^x \sin x.$$

Найдем $\overline{y}$. Правая часть заданного дифференциального уравнения имеет вид $f(x) = e^x x \sin x$. Здесь $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $M_n(x) = 0$, $N_m(x) = x$, $n = 0$, $m = 1$.

Частное решение $\overline{y}$ данного линейного неоднородного дифференциального уравнения запишется в виде

$$\overline{y} = x^s e^x((Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x).$$

Сравним число $\alpha + \beta i = 1 + i$ с корнями характеристического уравнения $k_1 = 1 + i$, $k_2 = 1 - i$. Делаем вывод, $\alpha + \beta i$ единожды является корнем характеристического уравнения, поэтому $s = 1$.

Подставим

$$\overline{y} = xe^x[(Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x]$$

в данное уравнение. Для этого найдём

$$\overline{y}' = e^x\big[\big((A + C)x^2 + (2A + B + D)x + B\big)\cos x + \\ + \big((C - A)x^2 + (D + C - B)x + D\big)\sin x\big],$$

$$\overline{y}'' = e^x[((2Cx^2 + (4A + 2D + 4C)x + 2B + 2A + 2D)\cos x + \\ + ((-2Ax^2 + (4C - 4A - 2B)x - 2B + 2C + 2D)\sin x].$$

При подстановке получим равенство

$$(4Cx + 2A + 2D)\cos x + (-4Ax - 2B + 2C)\sin x = x\sin x.$$

Приравняем соответствующие коэффициенты при $\sin x$ и $\cos x$, получим систему относительно неизвестных *A, B, C, D.*

$$\begin{cases} 4Cx + 2A + 2D = 0, \\ -4Ax - 2B + 2C = 1. \end{cases}$$

Решая систему, находим $A = -\frac{1}{4}$, $B = C = 0$, $D = \frac{1}{4}$. Следовательно, частное решение $\overline{y}$ имеет вид

$$\overline{y} = \left(xe^x \frac{1}{4}\sin x - \frac{1}{4}\cos x\right).$$

Итак, общим решением данного линейного неоднородного дифференциального уравнения является функция

$$y = C_1 e^x \cos x + C_2 e^x \sin x + xe^x \left(\frac{1}{4}\cos x - \frac{1}{4}\sin x\right).$$

Решим задачу Коши с начальными условиями:

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{2}}, \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{4}e^{\frac{\pi}{2}}.$$

Найдем y'.

$$y' = C_1(e^x \cos x - e^x \sin x) + C_2(e^x \sin x + e^x \cos x) +$$
$$+e^x \left(\frac{1}{4}\cos x - \frac{1}{4}\sin x\right) + xe^x \left(\frac{1}{4}\cos x - \frac{1}{4}\sin x\right) +$$
$$+xe^x \left(-\frac{1}{4}\sin x - \frac{1}{4}\cos x\right).$$

Подставим начальные условия в выражения для y и y', получим

$$\begin{cases} C_2 e^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi}{8}e^{\frac{\pi}{2}} = e^{\frac{\pi}{2}}, \\ C_1 e^{\frac{\pi}{2}} + C_2 e^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{4}e^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi}{4}e^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}e^{\frac{\pi}{2}}. \end{cases}$$

Отсюда $C_1 = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}$, $C_2 = \frac{\pi}{8} + 1$.

Таким образом, решение задачи Коши имеет вид

$$y = \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\right)e^x \cos x + \left(1 + \frac{\pi}{8}\right)e^x \sin x + xe^x \left(\frac{1}{4}\cos x - \frac{1}{4}\sin x\right). \blacktriangleleft$$

3. СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Определение. *Нормальной системой дифференциальных уравнений* называется система дифференциальных уравнений первого порядка вида

$$\frac{dx_i}{dt} = \dot{x}_i = f_i(t, x_1, \dots, x_n), \;\; i = \overline{1,n}, \;\; x_i(t) \in C_{(a,b)}, \qquad (1)$$

где $x_j(t)$, $j = \overline{1,n}$, − неизвестные функции переменной t, которая часто имеет смысл времени, $f_i(\cdot)$ − заданные (в общем случае комплексные) функции.

Порядком системы дифференциальных уравнений называется сумма порядков уравнений, входящих в систему. Если в системе (1) правая часть не зависит от t, то система (1) называется *автономной* или *стационарной*. *Решением системы* (1) называется совокупность n функций $x_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, подстановка которых в систему (1) обращает каждое ее уравнение в тождество.

3.1. Метод исключения

Метод исключения состоит в нахождении функций $x_i = x_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, удовлетворяющие системе (1), путем приведения системы (1) к линейному уравнению *n*-го порядка.

Продифференцируем первое уравнение системы (1) по t:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_2}{dt} + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \cdot \frac{dx_n}{dt}.$$

В полученное уравнение вместо $\frac{dx_j}{dt}, j = \overline{2,n}$, подставим их представления из уравнений системы (1), начиная со второго:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = F_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Дифференцируя полученное уравнение и подставляя вместо $\frac{dx_j}{dt}$, $j = \overline{2,n}$, их представления из уравнений системы (1), начиная со второго, получим

$$\frac{d^3x_1}{dt^3} = F_3(t, x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Повторяя данную операцию до нахождения производной n-го порядка, получаем систему

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \frac{d^2x_1}{dt^2} = F_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \dots \\ \frac{d^nx_1}{dt^n} = F_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n). \end{cases} \quad (2)$$

Решая систему из первых $(n-1)$ уравнений, выражаем x_2, x_3, …, x_n через t, x_1, $\frac{dx_1}{dt}$, …, $\frac{d^{n-1}x_1}{dt^{n-1}}$

$$\begin{cases} x_2 = \psi_2\left(t, x, \frac{dx_1}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}x_1}{dt^{n-1}}\right), \\ x_3 = \psi_3\left(t, x, \frac{dx_1}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}x_1}{dt^{n-1}}\right), \\ \dots \\ x_n = \psi_n\left(t, x, \frac{dx_1}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}x_1}{dt^{n-1}}\right), \end{cases} \quad (3)$$

и подставляем в последнее уравнение системы (2). В итоге получаем линейное неоднородное дифференциальное уравнение n-го порядка

$$\frac{d^nx_1}{dt^n} = f\left(t, x, \frac{dx_1}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}x_1}{dt^{n-1}}\right),$$

решая которое, находим $x_1(t) = \varphi(t, C_1, C_2, \dots, C_n)$. А затем из системы (3) находим функции $x_j(t)$, $j = \overline{2,n}$.

► Применим метод исключения к системе

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x - 4y + 2z + t, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + y - 2z, \\ \dfrac{dz}{dt} = x - 4y + z + 1. \end{cases}$$

Продифференцируем первое уравнение системы:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{dx}{dt} - 4\frac{dy}{dt} + 2\frac{dz}{dt} + 1.$$

Подставим в полученное уравнение вместо $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ их представления из системы:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{dx}{dt} - 4(3x + y - 2z) + 2(x - 4y + z + 1) + 1,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{dx}{dt} - 10x - 12y + 10z + 3.$$

Продифференцируем полученное уравнение по t:

$$\frac{d^3x}{dt^3} = -\frac{d^2x}{dt^2} - 10\frac{dx}{dt} - 12\frac{dy}{dt} + 10\frac{dz}{dt}.$$

Подставим в полученное уравнение вместо $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ их представления из системы:

$$\frac{d^3x}{dt^3} = -\frac{d^2x}{dt^2} - 10\frac{dx}{dt} - 12(3x + y - 2z) + 10(x - 4y + z + 1),$$

$$\frac{d^3x}{dt^3} = -\frac{d^2x}{dt^2} - 10\frac{dx}{dt} - 26x - 52y + 34z + 10.$$

В результате получаем систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x - 4y + 2z + t, \\ \dfrac{d^2x}{dt^2} = -\dfrac{dx}{dt} - 10x - 12y + 10z + 3, \\ \dfrac{d^3x}{dt^3} = -\dfrac{d^2x}{dt^2} - 10\dfrac{dx}{dt} - 26x - 52y + 34z + 10. \end{cases} \quad (4)$$

Решим систему из двух первых уравнений относительно y и z:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x - 4y + 2z + t, \\ \dfrac{d^2x}{dt^2} = -\dfrac{dx}{dt} - 10x - 12y + 10z + 3. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4y - 2z = -\dfrac{dx}{dt} - x + t, \\ 12y - 10z = -\dfrac{d^2x}{dt^2} - \dfrac{dx}{dt} - 10x + 3. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{8}\dfrac{d^2x}{dt^2} - \dfrac{1}{2}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{5}{8}x + \dfrac{5}{8}t - \dfrac{3}{8}, \\ z = \dfrac{1}{4}\dfrac{d^2x}{dt^2} - \dfrac{1}{2}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{7}{4}x + \dfrac{3}{4}t - \dfrac{3}{4}. \end{cases}$$

Подставляя в последнее уравнение системы (4), получим

$$\frac{d^3x}{dt^3} = -\frac{d^2x}{dt^2} - 10\frac{dx}{dt} - 26x - 52\left(\frac{1}{8}\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{1}{2}\frac{dx}{dt} + \frac{5}{8}x + \frac{5}{8}t - \frac{3}{8}\right) + \\ +34\left(\frac{1}{4}\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{1}{2}\frac{dx}{dt} + \frac{7}{4}x + \frac{3}{4}t - \frac{3}{4}\right) + 10.$$

Отсюда получаем линейное неоднородное дифференциальное уравнение третьего порядка

$$\frac{d^3x}{dt^3} - \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} - x = -7t + 4. \qquad (5)$$

Его общее решение будем искать в виде:

$$x = X + \overline{x},$$

где X – общее решение соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения $\frac{d^3x}{dt^3} - \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} - x = 0$, а $\overline{x}$ – частное решение уравнения (5).

Найдем X, решив уравнение

$$\frac{d^3x}{dt^3} - \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} - x = 0.$$

Запишем характеристическое уравнение:

$$k^3 - k^2 + k - 1 = 0.$$

Его корни: $k_1 = 1$, $k_{2,3} = \pm i$. Тогда частные решения линейного однородного дифференциального уравнения примут вид:

для $k_1 = 1$ имеем $X_1 = e^{k_1 t} = e^t$,

для $k_2 = \pm i = \alpha \pm \beta i$ имеем $X_2 = e^{\alpha t}\cos\beta t = e^{0t}\cos t = \cos t$,

$$X_3 = e^{\alpha t}\sin\beta t = e^{0t}\sin t = \sin t.$$

Следовательно, общее решение линейного однородного дифференциального уравнения будет:

$$X = C_1 e^t + C_2\cos t + C_3\sin t.$$

Найдем $\overline{x}$, решив уравнение (5):

$$\frac{d^3x}{dt^3} - \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} - x = -7t + 4.$$

Здесь $f(t) = -7t + 4 = e^{at}P_m(t)$. Тогда $a = 0$ – не является корнем характеристического уравнения, то есть $s = 0$, $m = 1$. В этом случае будем считать:

$$\overline{x} = x^s(At + B) = At + B.$$

Так как

$$\frac{d\overline{x}}{dt} = A, \quad \frac{d^2\overline{x}}{dt^2} = \frac{d^3\overline{x}}{dt^3} = 0,$$

то после подстановки уравнение (5) примет вид:

$$-At + A - B = -7t + 4.$$

Отсюда $A = 7$, $B = 3$. Следовательно,

$$\overline{x} = 7t + 3.$$

Таким образом, получили

$$x(t) = C_1 e^t + C_2\cos t + C_3\sin t + 7t + 3.$$

Тогда, учитывая, выражения для $\frac{dx}{dt}$ и $\frac{d^2x}{dt^2}$, получаем

$$y(t) = \frac{1}{4}C_1 e^t + \frac{1}{2}(C_2 - C_3)\cos t + \frac{1}{2}(C_2 + C_3)\sin t + 5t + \frac{17}{4},$$

$$z(t) = \frac{3}{2}C_1 e^t + \frac{1}{2}(3C_2 - C_3)\cos t + \frac{1}{2}(C_2 + 3C_3)\sin t + 13t + \frac{37}{2}.$$

Таким образом, общее решение исходной системы имеет вид:

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^t + C_2 \cos t + C_3 \sin t + 7t + 13, \\ y(t) = \dfrac{1}{4} C_1 e^t + \dfrac{1}{2}(C_2 - C_3)\cos t + \dfrac{1}{2}(C_2 + C_3)\sin t + 5t + \dfrac{17}{4}, \\ z(t) = \dfrac{3}{2} C_1 e^t + \dfrac{1}{2}(3C_2 - C_3)\cos t + \dfrac{1}{2}(C_2 + 3C_3)\sin t + 13t + \dfrac{37}{2}. \end{cases}$$

3.2. Метод собственных значений и собственных векторов

Рассмотрим линейную однородную систему n дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, которую можно записать в матричном виде

$$\mathbf{X}'(t) = A \cdot \mathbf{X}(t), \tag{6}$$

где

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \cdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \cdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Будем искать нетривиальные решения однородной системы (6) в виде

$$\mathbf{X}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{V}, \tag{7}$$

где $\mathbf{V} \neq 0$ – постоянный n-мерный вектор, $\lambda = \text{const}$.

Подставляя указанное выражение (7) для $\mathbf{X}(t)$ в систему уравнений (6), получаем:

$$\lambda e^{\lambda t}\mathbf{V} = A e^{\lambda t}\mathbf{V}.$$

Отсюда

$$A\mathbf{V} = \lambda\mathbf{V}.$$

Данное уравнение означает, что при действии линейного оператора A вектор $\mathbf{V}$ преобразуется в коллинеарный вектор $\lambda\mathbf{V}$. Вектор, обладающий таким свойством, называется *собственным вектором* линейного оператора A, а число λ называется *собственным значением*.

Таким образом, для того чтобы векторная функция (7) являлась решением линейной однородной системы (6), необходимо и достаточно, чтобы число λ было собственным значением, а вектор $\mathbf{V}$ – соответствующим собственным вектором линейного оператора A.

Нахождение собственных значений и собственных векторов линейного оператора

Матричное уравнение $A\mathbf{V} = \lambda\mathbf{V}$ можно переписать как

$$A\mathbf{V} - \lambda\mathbf{V} = \mathbf{\Theta},$$

где $\mathbf{\Theta}$ – нулевой вектор. Так как $\mathbf{V} = E\mathbf{V}$, где E – единичная матрица соответствующей размерности, то можно записать

$$A\mathbf{V} - \lambda E\mathbf{V} = \mathbf{\Theta}$$

или

$$(A - \lambda E)\mathbf{V} = \mathbf{\Theta}.$$

Определение. Определитель $\det(A - \lambda E)$ называется *характеристическим определителем* (или *характеристическим многочленом*) *линейного оператора* A. Уравнение

$$\det(A - \lambda E) = 0, \qquad (8)$$

называется *характеристическим уравнением линейного оператора* A. Множество всех собственных значений λ_1, λ_2, …, λ_n образует *спектр линейного оператора* A.

Для нахождения спектра оператора A решаем характеристическое уравнение (8), которое можно записать в следующем виде

$$(-1)^n(\lambda - \lambda_1)^{k_1}(\lambda - \lambda_2)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_m)^{k_m} = 0,$$

где

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n.$$

Здесь число k_i, $i = \overline{1,m}$, называется *алгебраической кратностью* собственного значения λ_i, $i = \overline{1,m}$. Для каждого такого собственного значения существует s_i линейно независимых собственных векторов. Число s_i называется *геометрической кратностью* собственного значения λ_i, при этом $0 < s_i \leq k_i$.

Далее находим *собственные векторы*, соответствующие данному собственному значению λ_i, подставляя каждое собственное значение λ_i, $i = \overline{1,n}$, в систему уравнений

$$(A - \lambda_i E)\mathbf{V}_i = \mathbf{\Theta}$$

и решая ее. Рассмотрим возможные случаи, которые здесь возникают.

Случай 1. **Все корни характеристического уравнения (8) действительны и различны.**

В этом случае $s_i = k_i = 1$, $i = \overline{1,n}$. Тогда каждому собственному значению λ_i, $i = \overline{1,n}$, соответствует один собственный вектор $\mathbf{V}_i$, $i = \overline{1,n}$. Эти векторы образуют множество линейно независимых решений

$$\mathbf{X}_1(t) = e^{\lambda_1 t}\mathbf{V}_1, \quad \boldsymbol{X}_2(t) = e^{\lambda_2 t}\boldsymbol{V}_2, \quad \ldots, \quad \boldsymbol{X}_n(t) = e^{\lambda_n t}\boldsymbol{V}_n,$$

то есть *фундаментальную систему решений* однородной системы уравнений (6). Общее решение системы (6) имеет следующий вид:

$$\mathbf{X}(t) = C_1\mathbf{X}_1(t) + C_2\boldsymbol{X}_2(t) + \cdots + C_n\boldsymbol{X}_n(t)$$

или

$$\mathbf{X}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t}\boldsymbol{V}_1 + e^{\lambda_2 t}\boldsymbol{V}_2 + \cdots + e^{\lambda_n t}\boldsymbol{V}_n,$$

где C_i, $i = \overline{1,n}$, – произвольные числа.

► Найдем общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x + 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y. \end{cases}$$

Решение будем искать в виде

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{\lambda t}\mathbf{V}.$$

Запишем характеристическое уравнение системы:

$$\det(A - \lambda E) = 0,$$

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 5 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда

$$(-2-\lambda)(2-\lambda)-5=0,$$
$$\lambda^2-9=0,$$
$$\lambda_1=-3,\quad \lambda_2=3.$$

Получили, что характеристическое уравнение имеет два различных действительных корня.

Найдем для каждого собственного значения λ_i собственный вектор $\mathbf{V}_i$.

Пусть собственному значению $\lambda_1=-3$ соответствует собственный вектор $\mathbf{V}_1=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}$. Для нахождения вектора $\mathbf{V}_1$ решим систему

$$(A-\lambda_1 E)\boldsymbol{V}_1=\boldsymbol{\Theta},$$

то есть

$$\begin{pmatrix}-2-\lambda_1 & 5\\ 1 & 2-\lambda_1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}-2-(-3) & 5\\ 1 & 2-(-3)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}1 & 5\\ 1 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},$$
$$\begin{cases}v_1+5v_2=0,\\ v_1+5v_2=0.\end{cases}$$

Ранг системы равен 1. Обозначив v_1 как базисную переменную, а v_2 как свободную переменную, получаем, что

$$v_1=-5v_2.$$

Полагаем $v_2=1$. Тогда $v_1=-5$. Следовательно, получили собственный вектор $\mathbf{V}_1=\begin{pmatrix}-5\\1\end{pmatrix}$.

Пусть собственному значению $\lambda_2=3$ соответствует собственный вектор $\mathbf{V}_2=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}$. Для нахождения вектора $\mathbf{V}_2$ решим систему

$$(A-\lambda_2 E)\boldsymbol{V}_2=\mathbf{0},$$

то есть

$$\begin{pmatrix}-2-\lambda_2 & 5\\ 1 & 2-\lambda_2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -2-3 & 5 \\ 1 & 2-3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} -5 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$\begin{cases} -5v_1 + 5v_2 = 0, \\ v_1 - v_2 = 0. \end{cases}$$

Ранг системы равен 1. Обозначив v_1 как базисную переменную, а v_2 как свободную переменную, получаем, что

$$v_1 = v_2.$$

Полагаем $v_2 = 1$. Тогда $v_1 = 1$. Следовательно, получили собственный вектор $\mathbf{V}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Таким образом, общее решение системы дифференциальных уравнений имеет вид

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{V}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{V}_2 = C_1 e^{-3t}\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Также результат можно записать в виде:

$$\begin{cases} x(t) = -5C_1 e^{-3t} + C_2 e^{3t}, \\ y(t) = C_1 e^{-3t} + C_2 e^{3t}. \end{cases} \blacktriangleleft$$

Случай 2. **Все корни характеристического уравнения (8) различны, среди них есть комплексные корни.**

Так как характеристический многочлен $\det(A - \lambda E)$ имеет вещественные коэффициенты, то комплексные корни уравнения (8) являются попарно сопряженными. Предположим, что мы получили пару комплексных собственных значений $\lambda_i = \alpha \pm \beta i$. Данной паре комплексно-сопряженных чисел соответствует пара линейно-независимых действительных решения вида

$$\mathbf{X}_1(t) = \mathrm{Re}\big(e^{(\alpha+\beta i)t}\mathbf{V}_i\big), \quad \mathbf{X}_2(t) = \mathrm{Im}\big(e^{(\alpha+\beta i)t}\mathbf{V}_i\big).$$

Таким образом, действительная и мнимая части комплексного решения образуют пару действительных решений.

Если же комплексных корней характеристического уравнения (8) более одной пары, то в отношении каждой из них применяется та же методика построения линейно независимых решений системы (6).

► Найдем общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 8y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + y. \end{cases}$$

Решение будем искать в виде

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{\lambda t}\mathbf{V}.$$

Запишем характеристическое уравнение системы:

$$\det(A - \lambda E) = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -8 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда

$$(1-\lambda)^2 + 16 = 0,$$

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm 4i.$$

Мы получили два собственных значения в виде пары комплексно-сопряженных чисел.

Найдем для собственного значения $\lambda = 1 + 4i$ собственный вектор $\mathbf{V} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$. Для этого решим систему

$$(A - \lambda_1 E)\boldsymbol{V}_1 = \boldsymbol{\Theta},$$

то есть

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda_1 & -8 \\ 2 & 1-\lambda_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1-(1+4i) & -8 \\ 2 & 1-(1+4i) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -4i & -8 \\ 2 & -4i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} -4iv_1 - 8v_2 = 0, \\ 2v_1 - 4iv_2 = 0. \end{cases}$$

Так как $\frac{-4i}{2} = \frac{-8}{-4i} = -2i$, то есть коэффициенты уравнений системы пропорциональны, то система равносильна уравнению

$$2v_1 - 4iv_2 = 0.$$

Отсюда

$$v_1 = 2iv_2.$$

Полагаем $v_2 = 1$. Тогда $v_1 = 2i$. Следовательно, получили собственный вектор $\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \end{pmatrix}$.

Следовательно, комплексным числам $\lambda_{1,2} = 1 \pm 4i$ соответствует решения вида

$$\mathbf{X}_1(t) = \mathrm{Re}\left(e^{(1+4i)t}\mathbf{V}\right), \quad \mathbf{X}_2(t) = \mathrm{Im}\left(e^{(1+4i)t}\mathbf{V}\right).$$

Так как

$$e^{(1+4i)t}\mathbf{V} = e^{(1+4i)t}\begin{pmatrix} 2i \\ 1 \end{pmatrix} = \left[e^{a+bi} = e^a(\cos b + i\sin b)\right] =$$

$$= e^t(\cos 4t + i\sin 4t)\begin{pmatrix} 2i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t(\cos 4t + i\sin 4t)2i \\ e^t(\cos 4t + i\sin 4t) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} e^t(-2\sin 4t + 2i\cos 4t) \\ e^t(\cos 4t + i\sin 4t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2e^t\sin 4t \\ e^t\cos 4t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2e^t\cos 4t \\ e^t\sin 4t \end{pmatrix} i,$$

то

$$\mathbf{X}_1(t) = \begin{pmatrix} -2e^t\sin 4t \\ e^t\cos 4t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_2(t) = \begin{pmatrix} 2e^t\cos 4t \\ e^t\sin 4t \end{pmatrix}.$$

Тогда общее решение

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1\mathbf{X}_1(t) + C_2\mathbf{X}_2(t),$$

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} -2e^t\sin 4t \\ e^t\cos 4t \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} 2e^t\cos 4t \\ e^t\sin 4t \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{cases} x(t) = -2C_2e^t\sin 4t + 2C_2e^t\cos 4t\,, \\ y(t) = C_2e^t\cos 4t + C_2e^t\sin 4t\,. \end{cases} \blacktriangleleft$$

Случай 3. **Характеристическое уравнение (8) имеет кратные вещественные корни, у которых геометрическая и алгебраическая кратности равны.**

В этом случае $s_i = k_i > 1$**.** Этот случай почти не отличается от предыдущего. Несмотря на наличие собственных значений с кратностью более 1, мы можем определить n линейно независимых собственных векторов. В общем случае квадратная матрица размером

$n \times n$ должна быть *диагонализируемой*, чтобы иметь n собственных векторов. Каждому собственному значению λ кратности r будет соответствовать r линейно независимых собственных векторов $\mathbf{V}^{(j)}$, $j = \overline{1,r}$. Общее решение системы n дифференциальных уравнений представляется в виде

$$\mathbf{X}(t) = \underbrace{C_{11}e^{\lambda_1 t}\mathbf{V}_1^{(1)} + C_{12}e^{\lambda_1 t}\mathbf{V}_1^{(2)} + \cdots + C_{1k_1}e^{\lambda_1 t}\boldsymbol{V}_1^{(k_1)}}_{k_1 \text{ членов}} +$$

$$+ \underbrace{C_{21}e^{\lambda_2 t}\mathbf{V}_2^{(1)} + C_{22}e^{\lambda_2 t}\mathbf{V}_2^{(2)} + \cdots + C_{2k_2}e^{\lambda_2 t}\boldsymbol{V}_2^{(k_2)}}_{k_2 \text{ членов}} + \cdots$$

Здесь C_{ij} – произвольные числа, а полное число слагаемых равно n.

► Найдем общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y + z, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y + z, \\ \dfrac{dz}{dt} = x + y + 2z. \end{cases}$$

Запишем характеристическое уравнение системы:

$$\det(A - \lambda E) = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда

$$(2-\lambda)^3 + 1 + 1 - (2-\lambda) - (2-\lambda) - (2-\lambda) = 0,$$

$$(\lambda - 1)^2(\lambda - 4) = 0,$$

$$\lambda_{1,2} = 1, \quad \lambda_3 = 4.$$

Исходная матрица системы является *симметрической*. Поэтому она будет иметь три собственных вектора. Это означает, что у корня $\lambda_{1,2} = 1$ алгебраическая и геометрическая кратность одинаковы и равны 2.

Найдем для собственных значений $\lambda_{1,2} = 1$ собственные векторы в виде $\mathbf{V}_{1,2} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$. Для этого решим систему

$$(A - \lambda_1 E)\mathbf{V} = \mathbf{\Theta},$$

то есть

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda_1 & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda_1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2-1 & 1 & 1 \\ 1 & 2-1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} v_1 + v_2 + v_3 = 0, \\ v_1 + v_2 + v_3 = 0, \\ v_1 + v_2 + v_3 = 0. \end{cases}$$

Система имеет 1 базисную переменную (например, v_1) и 2 свободных переменных (v_2, v_3). Тогда

$$v_1 = -v_2 - v_3.$$

Отсюда фундаментальная система решений имеет вид:

$$\mathbf{V}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, получили два собственных вектора.

Найдем для собственного значения $\lambda_3 = 4$ собственный вектор $\mathbf{V}_3 = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$. Для этого решим систему

$$(A - \lambda_3 E)\boldsymbol{V}_3 = \mathbf{\Theta},$$

то есть

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda_3 & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda_3 & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2-4 & 1 & 1 \\ 1 & 2-4 & 1 \\ 1 & 1 & 2-4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} -2v_1 + v_2 + v_3 = 0, \\ v_1 - 2v_2 + v_3 = 0, \\ v_1 + v_2 - 2v_3 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2v_1 + v_2 + v_3 = 0, \\ -3v_2 + 3v_3 = 0, \\ -3v_2 + 3v_3 = 0. \end{cases}$$

Система имеет 2 базисные переменные (например, v_1, v_2) и 1 свободную переменную (v_3). Тогда

$$\begin{cases} v_1 = v_3, \\ v_2 = v_3. \end{cases}$$

Полагаем $v_3 = 1$. Значит, $v_1 = v_2 = 1$. Следовательно, собственный вектор имеет вид $\mathbf{V}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Общее решение системы дифференциальных уравнений выражается формулой:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{V}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{V}_2 + C_3 e^{\lambda_3 t}\mathbf{V}_3 =$$

$$= C_1 e^t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{cases} x(t) = -C_1 e^t - C_2 e^t + C_3 e^{4t}, \\ y(t) = C_1 e^t + C_3 e^{4t}, \\ z(t) = C_2 e^t + C_3 e^{4t}. \end{cases} \quad \blacktriangleleft$$

Случай 4. Характеристическое уравнение (8) имеет кратные корни, у которых геометрическая кратность меньше алгебраической кратности.

В этом случае $s_i < k_i$. В некоторых матрицах A (такие матрицы называются *дефектными*) собственное число λ_i кратностью k_i может иметь меньше, чем k_i, линейно независимых собственных векторов. В этом случае вместо недостающих собственных векторов определяются так называемые *присоединенные векторы*, так чтобы в результате получить множество n линейно независимых векторов и построить соответствующую *фундаментальную систему решений*. Для этой цели обычно применяются разные способы. Рассмотрим *метод Эйлера* или *метод неопределенных коэффициентов*.

Итак, у нас имеется только s_i собственных векторов, ассоциированных с числом λ_i, при этом

$$s_i = n - \mathrm{rg}(A - \lambda_i E),$$

где $\mathrm{rg}(A - \lambda_i E)$ – ранг матрицы $(A - \lambda_i E)$.

Решение, соответствующее λ_i, можно искать в виде

$$\mathbf{X}_i(t) = P_{k_i - s_i}(t) e^{\lambda_i t},$$

где

$$\mathbf{P}_{k_i - s_i}(t) = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1 t + \mathbf{A}_2 t^2 + \cdots + \mathbf{A}_{k_i - s_i} t^{k_i - s_i}$$

является векторным многочленом степени $k_i - s_i$.

Чтобы найти векторы $\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_{k_i - s_i}$ для каждого такого собственного числа λ_i, надо подставить вектор-функцию $\mathbf{X}_i(t)$ в исходную систему уравнений. Приравнивая коэффициенты при членах с одинаковыми степенями в левой и правой частях каждого уравнения, получим алгебраическую систему уравнений для нахождения неизвестных векторов $\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_{k_i - s_i}$.

Описанный способ построения общего решения системы однородных дифференциальных уравнений называют также *методом Эйлера*.

► Найдем общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -6x + 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - y + 5z, \\ \dfrac{dz}{dt} = x - 3y + 4z. \end{cases}$$

Запишем характеристическое уравнение системы:

$$\det(A - \lambda E) = 0,$$

$$\begin{vmatrix} -6-\lambda & 5 & 0 \\ -2 & -1-\lambda & 5 \\ 1 & -3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда

$$-\lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda - 1 = 0,$$

$$(\lambda + 1)^3 = 0,$$

$$\lambda = -1.$$

Итак, матрица имеет одно собственное значение $\lambda = -1$ с алгебраической кратностью $k = 3$. Найдем ранг матрицы при $\lambda = -1$ и геометрическую кратность s:

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} -6-\lambda & 5 & 0 \\ -2 & -1-\lambda & 5 \\ 1 & -3 & 4-\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -5 & 5 & 0 \\ 0 & 10 & -25 \\ 0 & -10 & 25 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -5 & 5 & 0 \\ 0 & 10 & -25 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $\operatorname{rg}(A - \lambda E) = 2$. Соответственно, геометрическая кратность (а также количество собственных векторов) для собственного числа $\lambda = -1$ составляет

$$s = n - \operatorname{rg}(A - \lambda E) = 3 - 2 = 1 < k.$$

С учетом этого общее решение $\mathbf{X}(t)$ будем искать в виде векторной функции

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{P}_{k-s}(t)e^{\lambda t} = \mathbf{P}_2(t)e^{-t}$$

или

$$\mathbf{X}(t) = (\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1 t + \mathbf{A}_2 t^2)e^{-t}.$$

Пусть

$$\mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Запишем координатные функции и найдем их производные:

$$x(t) = (a_0 + a_1 t + a_2 t^2)e^{-t},$$
$$y(t) = (b_0 + b_1 t + b_2 t^2)e^{-t},$$
$$z(t) = (c_0 + c_1 t + c_2 t^2)e^{-t},$$
$$\frac{dx}{dt} = (a_1 - a_0 + (2a_2 - a_1)t - a_2 t^2)e^{-t},$$
$$\frac{dy}{dt} = (b_1 - b_0 + (2b_2 - b_1)t - b_2 t^2)e^{-t},$$
$$\frac{dz}{dt} = (c_1 - c_0 + (2c_2 - c_1)t - c_2 t^2)e^{-t}.$$

Подставляя в исходную систему и сокращая обе части каждого уравнения на функцию e^{-t}, получаем:

$$\begin{cases} a_1 - a_0 + (2a_2 - a_1)t - a_2 t^2 = \\ \qquad = -6(a_0 + a_1 t + a_2 t^2) + 5(b_0 + b_1 t + b_2 t^2), \\ b_1 - b_0 + (2b_2 - b_1)t - b_2 t^2 = \\ \quad = -2(a_0 + a_1 t + a_2 t^2) - (b_0 + b_1 t + b_2 t^2) + 5(c_0 + c_1 t + c_2 t^2), \\ c_1 - c_0 + (2c_2 - c_1)t - c_2 t^2 = \\ \quad = (a_0 + a_1 t + a_2 t^2) - 3(b_0 + b_1 t + b_2 t^2) + 4(c_0 + c_1 t + c_2 t^2). \end{cases}$$

Приравнивая члены при одинаковых степенях t слева и справа, получаем систему из девяти уравнений:

$$\begin{cases} a_1 - a_0 = -6a_0 + 5b_0, \\ 2a_2 - a_1 = -6a_1 + 5b_1, \\ -a_2 = -6a_2 + 5b_2, \\ b_1 - b_0 = -2a_0 - b_0 + 5c_0, \\ 2b_2 - b_1 = -2a_1 - b_1 + 5c_1, \\ -b_2 = -2a_2 - b_2 + 5c_2, \\ c_1 - c_0 = a_0 - 3b_0 + 4c_0, \\ 2c_2 - c_1 = a_1 - 3b_1 + 4c_1, \\ -c_2 = a_2 - 3b_2 + 4c_2. \end{cases}$$

Решая систему, получаем

$$\begin{cases} b_2 = a_2, \\ c_2 = \dfrac{2}{5}a_2, \\ b_0 = a_0 + \dfrac{1}{5}a_1, \\ b_1 = a_1 + \dfrac{2}{5}a_2, \\ c_0 = \dfrac{2}{5}a_0 + \dfrac{1}{5}a_1 + \dfrac{2}{25}a_2, \\ c_1 = \dfrac{2}{5}a_1 + \dfrac{2}{5}a_2. \end{cases}$$

Здесь a_0, a_1, a_2 – свободные переменные, а остальные –базисные, которые уже выражены через свободные. Обозначим

$$a_0 = C_1, \quad a_1 = C_2, \quad a_2 = C_3.$$

Тогда получим общее решение системы в виде:

$$\begin{cases} x(t) = e^{-t}(C_1 + C_2 t + C_3 t^2), \\ y(t) = e^{-t}\left(C_1 + \frac{1}{5}C_2 + \left(C_2 + \frac{2}{5}C_3\right)t + C_3 t^2\right), \\ z(t) = e^{-t}\left(\frac{2}{5}C_1 + \frac{1}{5}C_2 + \frac{2}{25}C_3 + \frac{2}{5}(C_2 + C_3)t + \frac{2}{5}C_3 t^2\right). \end{cases}$$

◄

4. УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

4.1. Устойчивость по Ляпунову

Многие процессы описываются системой дифференциальных уравнений, которая имеет бесконечное множество решений и для определения одного определенного решения нужно указать его начальные условия. В этих задачах важно знать характер поведения решения при изменении начальных данных и при изменении аргумента. Этими вопросами занимается качественная теория дифференциальных уравнений, одним из основных разделов которой является теория устойчивости решения дифференциальных уравнений.

Пусть некоторое явление описывается системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(t, y_1, y_2, \dots, y_n), \quad i = \overline{1,n}. \tag{1}$$

Функции $y_i = \varphi_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, – решение уравнения (1) с начальными условиями

$$\varphi_i(t_0) = y_i^0, \quad i = \overline{1,n}, \tag{2}$$

а функции $y_i = \widetilde{y_i}(t)$, $i = \overline{1,n}$, – решение уравнения (1) с начальными условиями

$$\widetilde{y_i}(t_0) = \widetilde{y_i^0}, \quad i = \overline{1,n}. \tag{3}$$

Пусть все f_i и их частные производные по y_k, $i,k = \overline{1,n}$, – непрерывны при $|\varphi_i(t) - \widetilde{y_i}(t)| < d$ и всех $t \geq t_0$.

Определение 1. Решение $y_i = \varphi_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, системы (1) называется *устойчивым по Ляпунову*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что из совокупности неравенств

$$|\varphi_i(t_0) - \widetilde{y_i}(t_0)| < \delta, \quad i = \overline{1,n}, \tag{4}$$

следуют неравенства

$$|\varphi_i(t) - \widetilde{y_i}(t)| < \varepsilon, \quad i = \overline{1,n}, \quad t \geq t_0. \tag{5}$$

Это означает, что каждое решение системы (1) с начальным условием из δ-окрестности точки $\varphi_i(t_0)$, $i = \overline{1,n}$, при $t_0 \le t < +\infty$ существует и не выходит из ε-окрестности графика решения $y_i = \varphi_i(t)$, $i = \overline{1,n}$.

Определение 2. Решение $y_i = \varphi_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, называется *асимптотически устойчивым*, если:

1) оно устойчиво по Ляпунову,
2) все решения $\tilde{y}_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, системы (1) с достаточно близкими начальными условиями неограниченно приближаются к $\varphi_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, при $t \to +\infty$, т.е. из неравенств (4) следует, что

$$\lim_{t\to+\infty}\left(\varphi_i(t) - \tilde{y}_i(t)\right) = 0, \;\; i = \overline{1,n}. \qquad (6)$$

Условия 1) и 2) независимы. Из условия 1) не следует 2), так как из (5) не вытекает (6). Из 2) также не всегда следует 1).

Отметим, что наличие или отсутствие устойчивости не зависит от выбора точки t_0.

Определение 3. Решение $y_i = \varphi_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, называется *неустойчивым*, если существует $\varepsilon > 0$ такое, что при всех $\delta(\varepsilon) > 0$, удовлетворяющих неравенству (4), либо решение $\tilde{y}_i(t)$ с начальным условием $\tilde{y}_i(t_0)$ непродолжимо на промежутке $[t_0, +\infty)$, либо оно продолжимо, но существует $t \ge t_0$ такое, что $|\varphi_i(t) - \tilde{y}_i(t)| \ge \varepsilon$.

Обычно при доказательстве неустойчивости решения пользуются неограниченностью разности $|\varphi_i(t) - \tilde{y}_i(t)|$ на промежутке $[t_0, +\infty)$ или тем, что эта разность стремится к $+\infty$ при $t \to +\infty$.

► Используя определения 1 и 2, выяснить, устойчивы ли решения уравнения $\frac{dy}{dt} = -\lambda y$ с начальными условиями $y(t_0) = y_0$.

Общее решение данного уравнения имеет вид $y(t) = Ce^{-\lambda t}$. Решение, удовлетворяющее начальному условию $y(t_0) = y_0$, определяется по формуле

$$y(t) = y_0 e^{-\lambda(t-t_0)}.$$

Если теперь зададим другое начальное условие $\tilde{y}(t_0) = \widetilde{y_0}$, то решением этой задачи будет $\tilde{y}(t) = \widetilde{y_0}e^{-\lambda(t-t_0)}$. Тогда для всех $t \geq t_0$ оценим разность решений:

$$|y_i(t) - \tilde{y}_i(t)| = \left|y_0 e^{-\lambda(t-t_0)} - \widetilde{y_0}e^{-\lambda(t-t_0)}\right| = |y_0 - \widetilde{y_0}| \cdot e^{-\lambda(t-t_0)}.$$

Пусть $\lambda > 0$. Тогда при $t \geq t_0$ имеем $e^{-\lambda(t-t_0)} < 1$, а из неравенства $|y_0 - \widetilde{y_0}| < \delta = \varepsilon$ следует неравенство

$$|y(t) - \tilde{y}(t)| < \delta e^{-\lambda(t-t_0)} < \delta = \varepsilon.$$

Таким образом, решение устойчиво по Ляпунову. А так как

$$\lim_{t\to+\infty}\left(y(t) - \tilde{y}(t)\right) = \lim_{t\to+\infty}\left(y_0 e^{-\lambda(t-t_0)} - \widetilde{y_0}e^{-\lambda(t-t_0)}\right) =$$
$$= \lim_{t\to+\infty}(y_0 - \widetilde{y_0})e^{-\lambda(t-t_0)} = (y_0 - \widetilde{y_0}) \cdot 0 = 0,$$

то решение также асимптотически устойчиво.

Пусть $\lambda = 0$. Тогда при $t \geq t_0$ имеем $e^{0\cdot(t-t_0)} = 1$, а из неравенства $|y_0 - \widetilde{y_0}| < \delta = \varepsilon$ следует неравенство

$$|y(t) - \tilde{y}(t)| < \delta e^{-\lambda(t-t_0)} = \delta = \varepsilon.$$

Таким образом, решение устойчиво по Ляпунову. А так как

$$\lim_{t\to+\infty}\left(y(t) - \tilde{y}(t)\right) = \lim_{t\to+\infty}\left(y_0 e^{-\lambda(t-t_0)} - \widetilde{y_0}e^{-\lambda(t-t_0)}\right) =$$
$$= \lim_{t\to+\infty}(y_0 - \widetilde{y_0})e^{-\lambda(t-t_0)} = \lim_{t\to+\infty}(y_0 - \widetilde{y_0}) = (y_0 - \widetilde{y_0}),$$

то решение асимптотически неустойчиво.

Пусть $\lambda < 0$. Тогда при $t \geq t_0$ имеем

$$\lim_{t\to+\infty}|y_i(t)| = \lim_{t\to+\infty}|y_0|e^{-\lambda(t-t_0)} = \left[\lim_{t\to+\infty} e^{-\lambda(t-t_0)} = +\infty\right] = +\infty.$$

Следовательно, решение неустойчиво. ◄

Исследование на устойчивость данного решения $y_i = \varphi_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, системы (1) можно свести к исследованию на устойчивость нулевого решения $y_i(t) \equiv 0$, $i = \overline{1,n}$, другой системы, получаемой из (1) заменой искомой функции

$$x_i(t) = y_i(t) - \varphi_i(t), \quad i = \overline{1,n}. \tag{7}$$

Подставляя функции (7) в систему (1), получим

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dy_i}{dt} - \frac{d\varphi_i}{dt}, \quad i = \overline{1,n},$$

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i\big(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)\big) -$$

$$-f_i\big(t, \varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)\big), \ \ i = \overline{1,n},$$

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i\big(t, x_1 + \varphi_1(t), x_2 + \varphi_2(t), \dots, x_n + \ \varphi_n(t)\big) -$$

$$-f_i\big(t, \varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)\big), \ \ i = \overline{1,n}. \qquad (8)$$

Как видим, система (8) имеет нулевое решение $x_i(t) \equiv 0$, $i = \overline{1,n}$. Это решение в действительности не движется при изменении t, а стоит на месте. Поэтому решение $x_i(t) \equiv 0$, $i = \overline{1,n}$, системы (8) называют *положением равновесия* или *точкой покоя системы* (8).

С учетом этих рассуждений определения 1 и 2 эквивалентны следующему определению.

Определение 4. Пусть в системе (1) $f_i(t, 0, 0, \dots, 0) = 0$, $i = \overline{1,n}$. Нулевое решение $\varphi_i(t) = 0$, $i = \overline{1,n}$, системы (1) *устойчиво по Ляпунову*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при всех $t \geq t_0$ из совокупности неравенств

$$|y_i(t_0)| < \delta, \quad i = \overline{1,n},$$

где $y_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, – решение той же системы с начальными значениями $y_i(t_0)$, следуют неравенства:

$$|y_i(t)| < \varepsilon, \quad i = \overline{1,n}, \quad t \geq t_0.$$

Если, кроме того,

$$\lim_{t \to +\infty} y_i(t) = 0, \ \ i = \overline{1,n},$$

то нулевое решение $\varphi_i(t) = 0$ называется *асимптотически устойчивым*.

Устойчивость нулевого решения означает, что траектория любого движения, начальная точка которой находится в δ-окрестности

начала координат фазового пространства $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ системы (1), при $t \geq t_0$ не выходит за пределы ε-окрестности точки покоя (см. рис. 1).

Если нулевое решение асимптотически устойчиво, то траектория любого движения, начальная точка которой находится в δ-окрестности начала координат фазового пространства $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ системы (1), при $t \geq t_0$ не только не выйдет из этого круга, но и будет стремиться к его центру (см. рис. 2).

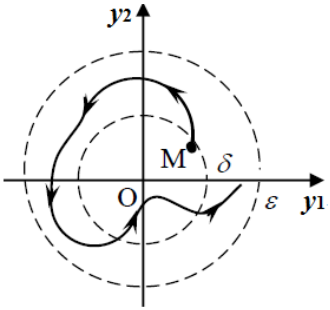

Рис. 1. Устойчивость решения

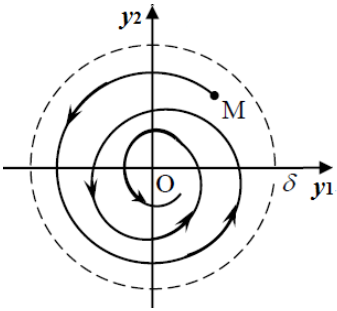

Рис. 2. Асимптотическая устойчивость

► Исследуем на устойчивость решения дифференциального уравнения $\frac{dy}{dt} + ye^t = 0$.

Это линейное однородное уравнение, оно имеет общее решение $y(t) = Ce^{-e^t}$. Начальному условию $y(0) = 0$ удовлетворяет тривиальное решение $y(t) = 0$.

Исследуем устойчивость этого решения. Изменим начальное условие: $y(0) = y_0$. Тогда соответствующее ему решение: $y(t) = y_0 e^{1-e^t}$.

Так как

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = \lim_{t \to +\infty} y_0 e^{1-e^t} = 0 \quad \forall\, y_0 \in R,$$

то тривиальное решение асимптотически устойчиво в целом, а это означает, что асимптотически устойчивы в целом и все частные решения заданного дифференциального уравнения. ◄

► Исследуем на устойчивость решения системы дифференциальных уравнений $\begin{cases} x' = -y, \\ y' = x. \end{cases}$

Общее решение системы имеет вид:

$$\begin{cases} x(t) = -C_1 \sin t + C_2 \cos t\,, \\ y(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t. \end{cases}$$

Начальному условию $x(0) = y(0) = 0$ соответствует точка покоя $(0, 0)$. Чтобы исследовать ее устойчивость, рассмотрим произвольное решение, определяемое начальным условием $\begin{cases} x(0) = x_0, \\ y(0) = y_0. \end{cases}$ Оно имеет вид:

$$\begin{cases} x(t) = -y_0 \sin t + x_0 \cos t\,, \\ y(t) = y_0 \cos t + x_0 \sin t. \end{cases}$$

Из неравенств

$$\begin{cases} |x_0| < \delta = \dfrac{\varepsilon}{2}, \\ |y_0| < \delta = \dfrac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

следуют неравенства

$$|x(t)| = |-y_0 \sin t + x_0 \cos t| \le |-y_0||\sin t| + |x_0||\cos t| \le$$
$$\le |y_0| + |x_0| = 2\delta = \varepsilon,$$
$$|y(t)| = |y_0 \cos t + x_0 \sin t| \le |y_0||\cos t| + |x_0||\sin t| \le$$
$$\le |y_0| + |x_0| = 2\delta = \varepsilon.$$

А это означает, что тривиальное решение и вместе с ним все частные решения данной системы устойчивы. Но так как

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) \ne 0, \quad \lim_{t \to +\infty} y(t) \ne 0,$$

то асимптотической устойчивости нет. ◄

► Исследуем на устойчивость решения дифференциального уравнения $y''' - y' = 0$.

Общее решение имеет вид:

$$y = C_1 + C_2 e^t + C_3 e^{-t}.$$

Начальным условиям $y(0) = y'(0) = y''(0) = \varepsilon$ соответствует частное решение $y(t) = \varepsilon e^t$. Так как для сколь угодно малых ε

$$\lim_{t\to+\infty} |y(t)| = \lim_{t\to+\infty} |\varepsilon| e^t = \left[\lim_{t\to+\infty} e^t = +\infty\right] = +\infty,$$

то тривиальное решение устойчивым не является, значит, неустойчивы и все частные решения заданного дифференциального уравнения, а также неоднородного уравнения $y''' - y' = f(t)$. ◄

Первая теорема Ляпунова (исследование на устойчивость с помощью функции Ляпунова). Пусть:

1) функции $f_i(t, y_1, y_2, \dots, y_n)$, $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$, $i, j = \overline{1,n}$ определены и непрерывны при $t \geq t_0$, $|y_j| \leq d$, $j = \overline{1,n}$, и $f_i(t, 0, 0, \dots, 0) \equiv 0$;
2) при $|y_j| \leq d$ существует непрерывно дифференцируемая функция $v(y_1, y_2, \dots, y_n)$, удовлетворяющая условиям:
   а) $v(y_1, y_2, \dots, y_n) = v(y) > 0$ при $y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2 > 0$ и $v(y_1, y_2, \dots, y_n) = 0$ только при $y_1 = y_2 = \dots = y_n = 0$, то есть функция $v(y)$ является положительно-определенной;
   б) производная функции $v(y)$ на любых решениях системы (1)

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial y_i} f_i(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \leq 0.$$

   Тогда нулевое решение системы (1) устойчиво по Ляпунову.

   Если вместо условия б) выполнено более сильное условие

   в) $\frac{dv}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial y_i} f_i(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \leq -w(y_1, y_2, \dots, y_n) \leq 0,$

где $w(y_1, y_2, \dots, y_n) > 0$ – непрерывная функция, равная нулю лишь в начале координат, то нулевое решение асимптотически устойчиво.

Если производная $\frac{dv}{dt}$ функции $v(y)$ на решениях системы (1) является знакоопределенной, а сама функция $v(y)$ в любой окрестности

начала координат не является знакопостоянной знака, противоположного знаку $\frac{dv}{dt}$, то нулевое решение системы (1) неустойчиво. ■

Замечание. Функция $v(y) = v(y_1, y_2, \dots, y_n)$ из первой теоремы Ляпунова называется *функцией Ляпунова*. Не существует общего метода построения этой функции, когда решение системы (1) неизвестно. В ряде случаев функцию Ляпунова удается построить в виде квадратичной формы

$$v(y_1, y_2, \dots, y_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} y_i y_j$$

или в виде суммы квадратичной формы и интегралов от функций, входящих в правую часть данной системы.

► Исследуем на устойчивость нулевое решение системы с помощью функции Ляпунова

$$\begin{cases} y_1' = -y_1^5 - y_2, \\ y_2' = y_1 - y_2^3. \end{cases}$$

Система имеет нулевое решение $y_1(t) = y_2(t) = 0$. Рассмотрим функцию

$$v(y_1, y_2) = y_1^2 + y_2^2,$$

которая удовлетворяет всем условиям теоремы Ляпунова:

а) $v(y_1, y_2) > 0$ при $y_1^2 + y_2^2 > 0$ и $v(y_1, y_2) = 0$ только при $y_1 = y_2 = 0$;

б) вдоль любого решения $y_i(t)$, $i = 1, 2$, системы (1) производная функции

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial t} = 2y_1\left(-y_1^5 - y_2\right) + 2y_2(y_1 - y_2^3) =$$

$$= -2(y_1^6 + y_2^4) \le 0.$$

Кроме того, вне окрестности начала координат ($y_1^2 + y_2^2 \ge \delta > 0$) производная строго меньше нуля:

$$\frac{dv}{dt} = -2(y_1^6 + y_2^4) \le -d < 0,$$

где d – минимум функции $2(y_1^6 + y_2^4)$ вне круга $y_1^2 + y_2^2 < \delta$.

Тогда на основании первой теоремы Ляпунова точка покоя рассматриваемой системы асимптотически устойчива. ◄

Пусть $y_i \equiv 0$, $i = \overline{1,n}$, – нулевое решение системы (1). Чтобы его исследовать на устойчивость, надо выделить из функций $f_i(t, y_1, y_2, \dots, y_n)$ линейную часть в окрестности точки покоя: $y_1 = y_2 = \dots = y_n = 0$. Полученную таким образом систему можно исследовать с помощью следующей теоремы.

Вторая теорема Ляпунова (исследование на устойчивость по первому приближению). Пусть правые части системы (1) имеют вид

$$f_i(t, y_1, y_2, \dots, y_n) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j + F_i(t, y_1, y_2, \dots, y_n),$$

где a_{ij}, $i, j = \overline{1,n}$, – постоянные, а функции F_i непрерывны по совокупности аргументов и бесконечно малые функции выше первого порядка при $y_i \to 0$, $i = \overline{1,n}$, то есть при всех $t \ge t_0$, $|y_i| < d$, $i = \overline{1,n}$

$$|F_i(t, y_1, y_2, \dots, y_n)| \le M(|y_1|^{1+\alpha} + |y_2|^{1+\alpha} + \dots + |y_n|^{1+\alpha}),$$

где α, M – положительные постоянные. Тогда если все собственные значения матрицы $A = (a_{ij}) \in R^{n \times n}$ имеют отрицательные действительные части, то нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво. Если же хотя бы одно собственное значение матрицы A имеет положительную действительную часть, то нулевое решение системы (1) неустойчиво. ■

Пусть в условиях второй теоремы Ляпунова все функции $F_i(t, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0$. Тогда система (1) становится линейной однородной с постоянными коэффициентами:

$$y_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j, \quad i = \overline{1,n}. \tag{9}$$

Теорема (об асимптотически устойчивом решении). Для того чтобы нулевое решение системы (9) было асимптотически устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения матрицы $A = (a_{ij}) \in R^{n\times n}$, имели отрицательные действительные части. ■

Итак, при исследовании устойчивости точки покоя системы (1) по первому приближению важно установить, что все собственные значения матрицы A имеют отрицательные действительные части. Известна следующая теорема.

Теорема Рауса-Гурвица. Для того чтобы у многочлена

$$\lambda^n + \alpha_1\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1}\lambda + \alpha_n = 0 \qquad (10)$$

с действительными коэффициентами α_i все корни имели отрицательные действительные части, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры матрицы

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_5 & \alpha_4 & \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{2n-1} & \alpha_{2n-2} & \alpha_{2n-3}\cdot & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

(где $\alpha_k = 0$ при $k > n$) были положительными, то есть чтобы

$$\Delta_1 = \alpha_1 > 0, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & 1 \\ \alpha_3 & \alpha_2 \end{vmatrix} > 0, \qquad \dots,$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{2n-1} & \dots & \alpha_n \end{vmatrix} = \Delta_{n-1}\cdot\alpha_n > 0. \quad ■$$

Отметим, что необходимым условием отрицательности всех действительных частей корней уравнения (10) является $\alpha_i > 0$, $i = \overline{1,n}$. В случае $n \le 2$ это условие является и достаточным.

Если порядок уравнения высок, то вместо теоремы Рауса-Гурвица можно использовать следующую теорему.

***Теорема* (*критерий Льенара-Шипара*).** Для того чтобы действительные части всех корней многочлена (10) были отрицательны, необходимо и достаточно, чтобы $\Delta_{n-1} > 0$, $\Delta_{n-3} > 0$, …, где Δ_k – главные диагональные миноры матрицы Гурвица k-го порядка.

► Исследуем на устойчивость решения дифференциального уравнения:

а) $y^{(5)} + 6y^{(4)} + 13y^{(3)} + 18y'' + 37y' + 12y = 0$,

б) $y^{(5)} + 6y^{(4)} + 11y^{(3)} + 12y'' + 8y' + y = 0$,

в) $y^{(5)} - 4y^{(4)} + y^{(3)} + 2y'' + 3y' + y = 0$.

Решение.

А) $y^{(5)} + 6y^{(4)} + 13y^{(3)} + 18y'' + 37y' + 12y = 0$.

Это линейное однородное дифференциальное уравнение 5-го порядка. Составим его характеристическое уравнение:

$$k^5 + 6k^4 + 13k^3 + 18k^2 + 37k + 12 = 0.$$

Необходимое условие отрицательности действительных частей корней этого многочлена выполнено (все коэффициенты положительны), поэтому составим матрицу Гурвица

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 18 & 13 & 6 & 1 & 0 \\ 12 & 37 & 18 & 13 & 6 \\ 0 & 0 & 12 & 37 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}.$$

По критерию Льенара-Шипара вычислим главный диагональный минор 4-го порядка (так как $n = 5$):

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 0 & 0 \\ 18 & 13 & 6 & 1 \\ 12 & 37 & 18 & 13 \\ 0 & 0 & 12 & 37 \end{vmatrix} = -13500 < 0.$$

Значит, среди корней есть числа с положительной действительной частью, а потому нулевое решение однородного дифференциального уравнения неустойчиво.

Б) $y^{(5)} + 6y^{(4)} + 11y^{(3)} + 12y'' + 8y' + y = 0.$

Составим его характеристическое уравнение:

$$k^5 + 6k^4 + 11k^3 + 12k^2 + 8k + 1 = 0.$$

Все коэффициенты многочлена положительны, поэтому составим матрицу Гурвица

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 11 & 6 & 1 & 0 \\ 1 & 8 & 12 & 11 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

По критерию Рауса-Гурвица найдем главные диагональные миноры:

$$\Delta_1 = 6 > 0,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 12 & 11 \end{vmatrix} = 54 > 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 12 & 11 & 6 \\ 1 & 8 & 12 \end{vmatrix} = 366 > 0,$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 0 & 0 \\ 12 & 11 & 6 & 1 \\ 1 & 8 & 12 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 3437 > 0,$$

$$\Delta_5 = 1 \cdot \Delta_4 = 3437 > 0.$$

Следовательно, все корни характеристического уравнения имеют отрицательные действительные части. Тогда тривиальное решение рассматриваемой системы асимптотически устойчиво.

В) $y^{(5)} - 4y^{(4)} + y^{(3)} + 2y'' + 3y' + y = 0.$

Составим характеристическое уравнение:

$$k^5 - 4k^4 + k^3 + 2k^2 + 3k + 1 = 0.$$

Многочлен имеет отрицательные коэффициенты. Необходимое условие отрицательности действительных частей корней не выполнено, значит, среди корней есть такие, у которых действительная часть положительна. Тогда нулевое решение однородного дифференциального уравнения неустойчиво. ◄

4.2. Устойчивость по первому приближению

Рассмотрим автономную систему дифференциальных уравнений:

$$y_i' = f_i(y_1, y_2, \dots, y_n), \quad i = \overline{1,n}. \tag{11}$$

Будем полагать, что система (11) имеет тривиальное решение, то есть $f_i(0,0,\dots,0)$, $i = \overline{1,n}$, и все функции $f_i(y_1, y_2, \dots, y_n)$, $i = \overline{1,n}$, дифференцируемы в некоторой окрестности начала координат.

В этой окрестности по определению дифференцируемой функции нескольких переменных

$$\Delta f_i = f_i(y_1, y_2, \dots, y_n) - f_i(0,0,\dots,0) = f_i(y_1, y_2, \dots, y_n) =$$
$$= \frac{\partial f_i(0,0,\dots,0)}{\partial y_1} y_1 + \dots + \frac{\partial f_i(0,0,\dots,0)}{\partial y_n} y_n + \alpha_{1i}(y_1, y_2, \dots, y_n) y_1 +$$
$$+ \dots + \alpha_{ni}(y_1, y_2, \dots, y_n) y_n,$$

где $\alpha_{ji}(y_1, y_2, \dots, y_n)$, $j, i = \overline{1,n}$, – бесконечно малые функции в некоторой окрестности начала координат.

Поэтому вблизи начала координат слагаемые $\alpha_{ji}(y_1, y_2, \dots, y_n) y_j$ имеют более высокий порядок малости, чем линейные слагаемые $\frac{\partial f_i(0,0,\dots,0)}{\partial y_j} y_j$.

В некоторых случаях при исследовании устойчивости тривиального решения системы (11) нелинейными слагаемыми правой части можно пренебречь, считая, что

$$f_i(y_1, y_2, \dots, y_n) \approx \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i(0,0,\dots,0)}{\partial y_j} y_j.$$

Тогда систему дифференциальных уравнений (11) можно заменить на близкую ей *при достаточно малых* y_1, y_2, …, y_n систему

$$y_i' = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i(0,0,\dots,0)}{\partial y_j} y_j, \quad i = \overline{1,n}.$$

Обозначим $a_{ij} = \frac{\partial f_i(0,0,\dots,0)}{\partial y_j}$ и вместо системы (11) рассмотрим линейную однородную систему с постоянными коэффициентами

$$y_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j\,, \quad i = \overline{1,n}. \tag{12}$$

Линейная однородная система (12) называется *системой первого приближения системы* (11).

Замена исследования устойчивости тривиального решения системы (11) исследованием устойчивости тривиального решения системы (12) называется *исследованием устойчивости решения системы (11) по первому приближению.*

► Исследуем нулевое решение системы на устойчивость с помощью первого приближения:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 0{,}75\sin x - 7y(1-y)^{1/3} + x^3, \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{2}{3}x - 3y\cos y - 11y^5. \end{cases}$$

Решение. Исследуем по первому приближению устойчивость нулевое решения этой системы. При составлении системы первого приближения можно пользоваться тем, что в окрестности нуля (при $t \to 0$) следующие величины эквивалентны:

1) $\sin x \sim x$,

2) $(1-y)^{1/3} = \sqrt[3]{1+(-y)} = \sqrt[3]{1+(-y)} - 1 + 1 \sim \dfrac{-y}{3} + 1$.

Тогда

$$0{,}75\sin x - 7y(1-y)^{\frac{1}{3}} + x^3 \sim \frac{3}{4}x - 7y\left(1 - \frac{y}{3}\right) + x^3 =$$

$$= \frac{3}{4}x - 7y + \frac{7}{3}y^2 + x^3.$$

Так как при достаточно близких к нулю слагаемые $\frac{7}{3}y^2$ и x^3 имеют более высокий порядок малости, чем y и x соответственно, то ими можно пренебречь при составлении системы первого приближения:

$$0{,}75\sin x - 7y(1-y)^{1/3} + x^3 \sim \frac{3}{4}x - 7y.$$

3) $\cos y = \cos y - 1 + 1 = -2\sin^2\frac{y}{2} + 1 \sim 1 - 2\left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1 - \frac{y^2}{2}$.

Тогда

$$\frac{2}{3}x - 3y\cos y - 11y^5 \sim \frac{2}{3}x - 3y\left(1 - \frac{y^2}{2}\right) - 11y^5 =$$

$$= \tfrac{2}{3}x - 3y - \tfrac{3}{2}y^3 - 11y^5 .$$

Так как при достаточно близких к нулю слагаемые $\frac{3}{2}y^3$ и $11y^5$ имеют более высокий порядок малости, чем y, то им можно пренебречь при составлении системы первого приближения. Тогда

$$\frac{2}{3}x - 3y\cos y - 11y^5 \sim \frac{2}{3}x - 3y.$$

Таким образом, система первого приближения имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{3}{4}x - 7y, \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{2}{3}x - 3y. \end{cases}$$

Составим ее характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} \frac{3}{4} - k & -7 \\ \frac{2}{3} & -3 - k \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad k_{1,2} = -\frac{9}{8} \pm \frac{1}{8}\sqrt{\frac{221}{3}}\,i.$$

Так как все собственные значения имеют отрицательную действительную часть, то тривиальное решение рассматриваемой системы асимптотически устойчиво. Следовательно, асимптотически устойчиво тривиальное решение и первоначальной системы. ◄

Исследование устойчивости решения системы (11) по первому приближению возможно, если

1) *все собственные значения* системы первого приближения (12) *имеют отрицательные действительные части*. Тогда тривиальное решение системы (12) асимптотически устойчиво, откуда следует асимптотическая устойчивость тривиального решения исходной системы (11);

2) *среди собственных значений системы* (12) *есть хотя бы одно с положительной действительной частью*. В этом случае тривиальное решение (12) неустойчиво, поэтому неустойчиво и тривиальное решение исходной системы (11).

Если среди собственных значений есть чисто мнимые, а остальные собственные значения, если они есть, имеют отрицательные действительные части, то на устойчивость нулевого решения начинают влиять нелинейные слагаемые, которые отбрасываются при составлении системы первого приближения.

4.3. Положения равновесия линейных автономных систем

Точки равновесия

Пусть задана линейная однородная система второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y, \\ \dfrac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y. \end{cases}$$

Данная система уравнений является *автономной*, поскольку правые части уравнений не содержат независимой переменной t.

В матричной форме система уравнений записывается как

$$X' = AX,$$

где $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Положения равновесия находятся из решения стационарного уравнения

$$AX = \Theta.$$

Это уравнение имеет единственное решение $X = \Theta$, если матрица A является *невырожденной*, то есть при условии $\det A \neq 0$. В случае *вырожденной матрицы* система имеет бесконечное множество точек равновесия.

Классификация положений равновесия определяется собственными значениями матрицы A, которые находятся из решения *характеристического уравнения*

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - k \end{vmatrix} = 0.$$

В общем случае, когда матрица A является невырожденной, существует **4 различных типа точек равновесия**:

1) узел, если собственные значения – действительные числа одного знака,
2) седло, если собственные значения – действительные числа разного знака,
3) фокус, если собственные значения – комплексные числа; действительные части которых равны и отличны от нуля,
4) центр, если собственные значения – чисто мнимые числа.

Устойчивость положений равновесия определяется общими теоремами об устойчивости. Если действительные части комплексных собственных значений отрицательны, то точка равновесия является *асимптотически устойчивой*. Например, *устойчивый узел* и *устойчивый фокус*. Если действительная часть хотя бы одного собственного числа положительна, то точка равновесия является *неустойчивой*. Например, это может быть *седло*. Наконец, в случае чисто мнимых корней (точка равновесия является *центром*) мы имеем дело с классической *устойчивостью в смысле Ляпунова*.

Рассмотрим поведение решений вблизи положений равновесия. Для систем второго порядка это удобно делать графически с помощью *фазового портрета*, представляющего собой совокупность *фазовых траекторий* на координатной плоскости. Стрелки на фазовых траекториях показывают направление перемещения точки (то есть некоторого состояния системы) с течением времени.

Корни характеристического уравнения

$$\boldsymbol{k_1, k_2 \in R,\ k_1 \neq k_2,\ k_1 < k_2 < 0}$$

Построим схематический фазовый портрет такой точки равновесия. Общее решение системы имеет вид

$$X(t) = C_1 e^{k_1 t} V_1 + C_2 e^{k_2 t} V_2,$$

где $V_1 = \begin{pmatrix} V_{11} \\ V_{21} \end{pmatrix}$, $V_2 = \begin{pmatrix} V_{12} \\ V_{22} \end{pmatrix}$ – собственные векторы, соответствующие числам k_1, k_2, а C_1, C_2 – произвольные константы.

Поскольку оба собственных значения отрицательны, то решение $X = 0$ является *асимптотически устойчивым*. Такое положение равновесия называется ***устойчивым узлом***. При $t \to +\infty$ фазовые кривые стремятся к началу координат $X = 0$.

Уточним направление фазовых траекторий. Поскольку

$$\begin{cases} x(t) = C_1 V_{11} e^{k_1 t} + C_2 V_{12} e^{k_2 t}, \\ y(t) = C_1 V_{21} e^{k_1 t} + C_2 V_{22} e^{k_2 t}, \end{cases}$$

то

$$\frac{dy}{dx} = \frac{C_1 V_{21} k_1 e^{k_1 t} + C_2 V_{22} k_2 e^{k_2 t}}{C_1 V_{11} k_1 e^{k_1 t} + C_2 V_{12} k_2 e^{k_2 t}} =$$

$$= \frac{e^{k_2 t}\left(C_1 V_{21} k_1 e^{(k_1 - k_2)t} + C_2 V_{22} k_2\right)}{e^{k_2 t}(C_1 V_{11} k_1 e^{(k_1 - k_2)t} + C_2 V_{12} k_2)} = \frac{C_1 V_{21} k_1 e^{(k_1 - k_2)t} + C_2 V_{22} k_2}{C_1 V_{11} k_1 e^{(k_1 - k_2)t} + C_2 V_{12} k_2}.$$

Так как $k_1 < k_2 < 0$, то $k_1 - k_2 < 0$ и $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{(k_1 - k_2)t} = 0$.

В результате при $C_2 \neq 0$ имеем $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{dy}{dx} = \frac{V_{22}}{V_{12}}$, то есть при $t \to +\infty$ фазовые траектории становятся параллельными собственному вектору V_2.

В случае $C_2 = 0$ производная при любом t равна $\frac{dy}{dx} = \frac{V_{21}}{V_{11}}$, то есть фазовая траектория лежит на прямой, направленной вдоль собственного вектора V_1.

Теперь рассмотрим поведение фазовых траекторий при $t \to -\infty$. Очевидно, что координаты $x(t)$, $y(t)$ стремятся к бесконечности, а производная $\frac{dy}{dx}$ при $C_1 \neq 0$ принимает следующий вид:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{C_1 V_{21} k_1 + C_2 V_{22} k_2 e^{(k_2 - k_1)t}}{C_1 V_{11} k_1 + C_2 V_{12} k_2 e^{(k_2 - k_1)t}}.$$

В результате при $C_1 \neq 0$ имеем $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{dy}{dx} = \frac{V_{21}}{V_{11}}$, то есть при $t \to -\infty$ фазовые траектории становятся параллельными собственному вектору V_1. Соответственно, при $C_1 = 0$ производная $\frac{dy}{dx} = \frac{V_{22}}{V_{12}}$. Тогда фазовая траектория определяется направлением собственного вектора V_2.

С учетом рассмотренных свойств фазовых траекторий фазовый портрет *устойчивого узла* имеет вид, показанный схематически на рис. 3.

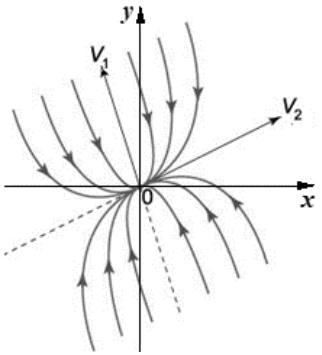

Рис. 3. Устойчивый узел

► Определим тип особой точки и изобразим фазовый портрет

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 2y. \end{cases}$$

Определитель матрицы равен

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 \neq 0.$$

Следовательно, система имеет единственное положение равновесия в точке $(0, 0)$. Найдем собственные значения. Характеристическое уравнение этой системы имеет вид:

$$\begin{vmatrix} -2-k & 1 \\ 1 & -2-k \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1 = -3, \quad k_2 = -1.$$

Собственные значения действительные, различные и отрицательные. Следовательно точка $(0, 0)$ – *устойчивый узел*.

Найдем собственные векторы. При $k_1 = -3$ это вектор $V_1 = \begin{pmatrix}\gamma_{11}\\ \gamma_{21}\end{pmatrix}$ такой, что $\begin{cases}\gamma_{11} + \gamma_{21} = 0,\\ \gamma_{11} + \gamma_{21} = 0.\end{cases}$ Тогда $V_1 = \begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$. При $k_2 = -1$ это вектор $V_2 = \begin{pmatrix}\gamma_{12}\\ \gamma_{22}\end{pmatrix}$ такой, что $\begin{cases}-\gamma_{12} + \gamma_{22} = 0,\\ \gamma_{12} - \gamma_{22} = 0.\end{cases}$ Тогда $V_2 = \begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$.

Следовательно, общее решение имеет вид:

$$\begin{cases}x = C_1 e^{-3t} + C_2 e^{-t},\\ y = -C_1 e^{-3t} + C_2 e^{-t}.\end{cases}$$

Исследуем на устойчивость тривиальное решение, то есть точку покоя, расположенную в начале координат. Пусть $C_1 = 0$. Отсюда $\begin{cases}x = C_2 e^{-t},\\ y = C_2 e^{-t}.\end{cases}$ Разделив второе равенство на первое, получим $\frac{y}{x} = 1$ или $y = x$. Значит, эта траектория – прямая. При этом $\lim\limits_{t\to+\infty} x = 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} y = 0$. Пусть $C_2 = 0$. Отсюда $\begin{cases}x = C_1 e^{-3t},\\ y = -C_1 e^{-3t}.\end{cases}$ Разделив второе равенство на первое, получим $\frac{y}{x} = -1$ или $y = -x$. Значит, эта траектория – прямая. При этом $\lim\limits_{t\to+\infty} x = 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} y = 0$.

Остальные фазовые траектории будут приближаться к нулю, касаясь прямой, направленной вдоль вектора $V_2 = \begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$, поскольку собственному вектору соответствует наименьшее по модулю собственное значение: $k_2 = -1$. Фазовый портрет изображен на рис. 4. ◄

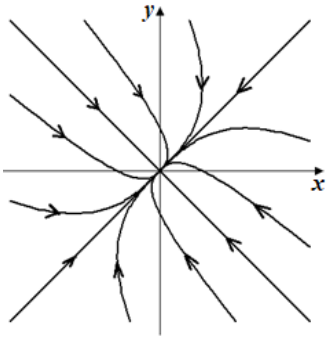

Рис. 4. Устойчивый узел

Корни характеристического уравнения

$$\boldsymbol{k_1, k_2 \in R,\ k_1 \neq k_2,\ 0 < k_1 < k_2}$$

Построим схематический фазовый портрет такой точки равновесия. Общее решение системы имеет вид

$$X(t) = C_1 e^{k_1 t} V_1 + C_2 e^{k_2 t} V_2,$$

где $V_1 = \begin{pmatrix} V_{11} \\ V_{21} \end{pmatrix}$, $V_2 = \begin{pmatrix} V_{12} \\ V_{22} \end{pmatrix}$ – собственные векторы, соответствующие числам k_1, k_2, а C_1, C_2 – произвольные константы.

Поскольку оба собственных значения положительны, то решение $X = 0$ является *асимптотически неустойчивым*. Такое положение равновесия называется ***неустойчивым узлом***.

При $t \to +\infty$ фазовые кривые стремятся к бесконечности. Уточним направление фазовых траекторий. Так как

$$\begin{cases} x(t) = C_1 V_{11} e^{k_1 t} + C_2 V_{12} e^{k_2 t}, \\ y(t) = C_1 V_{21} e^{k_1 t} + C_2 V_{22} e^{k_2 t}, \end{cases}$$

то

$$\frac{dy}{dx} = \frac{C_1 V_{21} k_1 e^{k_1 t} + C_2 V_{22} k_2 e^{k_2 t}}{C_1 V_{11} k_1 e^{k_1 t} + C_2 V_{12} k_2 e^{k_2 t}} = \frac{C_1 V_{21} k_1 e^{(k_1 - k_2)t} + C_2 V_{22} k_2}{C_1 V_{11} k_1 e^{(k_1 - k_2)t} + C_2 V_{12} k_2}.$$

Так как $k_1 < k_2$, то $k_1 - k_2 < 0$ и $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{(k_1 - k_2)t} = 0$. Тогда при $C_2 \neq 0$ имеем $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{dy}{dx} = \frac{V_{22}}{V_{12}}$, то есть при $t \to +\infty$ фазовые траектории становятся параллельными собственному вектору V_2. В случае $C_2 = 0$ производная при любом t равна $\frac{dy}{dx} = \frac{V_{21}}{V_{11}}$, то есть фазовая траектория лежит на прямой, направленной вдоль собственного вектора V_1.

Теперь рассмотрим поведение фазовых траекторий при $t \to -\infty$. Очевидно, что координаты $x(t)$, $y(t)$ стремятся к нулю, а производная $\frac{dy}{dx}$ при $C_1 \neq 0$ принимает следующий вид:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{C_1 V_{21} k_1 + C_2 V_{22} k_2 e^{(k_2 - k_1)t}}{C_1 V_{11} k_1 + C_2 V_{12} k_2 e^{(k_2 - k_1)t}}.$$

В результате при $C_1 \neq 0$ имеем

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{dy}{dx} = \frac{V_{21}}{V_{11}},$$

то есть при $t \to -\infty$ фазовые траектории становятся параллельными собственному вектору V_1.

Соответственно, при $C_1 = 0$ производная равна $\frac{dy}{dx} = \frac{V_{22}}{V_{12}}$. В этом случае фазовая траектория определяется направлением собственного вектора V_2.

С учетом рассмотренных свойств фазовых траекторий фазовый портрет *неустойчивого узла* имеет вид, показанный на рис. 5.

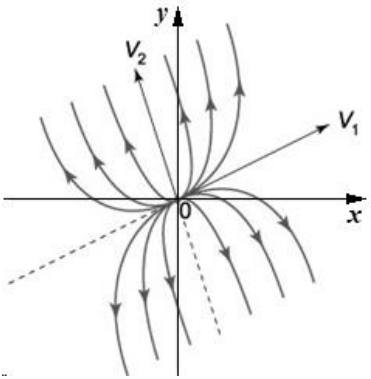

Рис. 5. Неустойчивый узел

► Определим тип особой точки и изобразим фазовый портрет

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x + 3y, \\ \frac{dy}{dt} = 4x + 6y. \end{cases}$$

Определитель матрицы равен

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 30 - 12 = 18 \neq 0.$$

Следовательно, система имеет единственное положение равновесия в точке $(0,0)$. Найдем собственные значения. Характеристическое уравнение этой системы имеет вид:

$$\begin{vmatrix} 5-k & 3 \\ 4 & 6-k \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1 = 2, \quad k_2 = 9.$$

Собственные значения действительные, различные и положительные. Следовательно точка $(0,0)$ – *неустойчивый узел*.

Найдем собственные векторы. При $k_1 = 2$ это вектор $V_1 = \begin{pmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{21} \end{pmatrix}$ такой, что $\begin{cases} 3\gamma_{11} + 3\gamma_{21} = 0, \\ 4\gamma_{11} + 4\gamma_{21} = 0. \end{cases}$ Тогда $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. При $k_2 = 9$ это вектор $V_2 = \begin{pmatrix} \gamma_{12} \\ \gamma_{22} \end{pmatrix}$ такой, что $\begin{cases} -4\gamma_{12} + 3\gamma_{22} = 0, \\ 4\gamma_{12} - 3\gamma_{22} = 0. \end{cases}$ Тогда $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$.

Тогда общее решение имеет вид:

$$\begin{cases} x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{9t}, \\ y = -C_1 e^{2t} + \dfrac{4}{3} C_2 e^{9t}. \end{cases}$$

Исследуем на устойчивость точку покоя, расположенную в начале координат. Пусть $C_1 = 0$. Отсюда $\begin{cases} x = C_2 e^{9t} \\ y = \frac{4}{3} C_2 e^{9t}. \end{cases}$ Разделив второе из них на первое, получим $\frac{y}{x} = \frac{4}{3}$ или $y = \frac{4}{3}x$. Значит, эта траектория – прямая. При этом $\lim\limits_{t \to +\infty} x = \infty$, $\lim\limits_{t \to +\infty} y = \infty$.

Пусть $C_2 = 0$. Отсюда $\begin{cases} x = C_1 e^{2t}, \\ y = -C_1 e^{2t}. \end{cases}$ Разделив второе из них на первое, получим $\frac{y}{x} = -1$ или $y = -x$. Значит, эта траектория – прямая. При этом $\lim\limits_{t \to +\infty} x = \infty$, $\lim\limits_{t \to +\infty} y = \infty$.

Остальные фазовые траектории будут удаляться от нуля, касаясь прямой, направленной вдоль вектора $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, поскольку этому собственному вектору соответствует наименьшее по модулю собственное значение: $k_1 = 2$. Фазовый портрет изображен на рис. 6. ◄

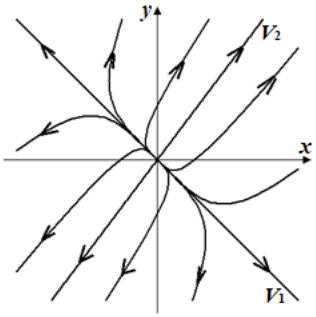

Рис 6. Неустойчивый узел

Корни характеристического уравнения $\boldsymbol{k_1, k_2 \in R, k_1 = k_2 = k}$

Возможны два случая.

1 случай. Геометрическая кратность равна алгебраической кратности и равна 2. Такая ситуация возможна в системах вида:

$$\begin{cases} = kx, \\ \dot{y} = ky. \end{cases}$$

Направление фазовых траекторий зависит от знака k. Здесь возможны следующие два случая:

1) $\boldsymbol{k_1 = k_2 = k < 0}$, такое положение равновесия называется *устойчивым дикритическим узлом* (см. рис. 7),
2) $\boldsymbol{k_1 = k_2 = k > 0}$, такое положение равновесия называется *неустойчивым дикритическим узлом* (см. рис. 8).

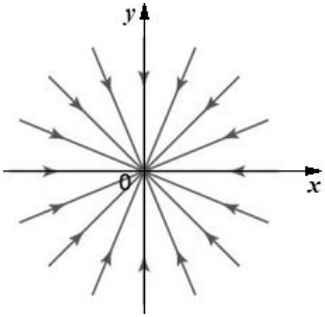

Рис. 7. Устойчивый дикритический узел

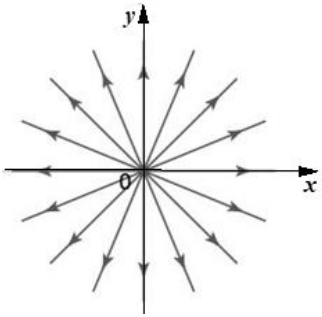

Рис. 8. Неустойчивый дикритический узел

2 случай. Геометрическая кратность равна 1 и меньше алгебраической кратности, равной 2.

Это означает, что матрица A имеет лишь один собственный вектор V_1. Второй линейно независимый вектор, необходимый для составления базиса, определяется как вектор W_1, присоединенный к V_1.

Направление фазовых траекторий зависит от знака k. Здесь возможны следующие два случая:

1) $\boldsymbol{k_1 = k_2 = k < 0}$, такое положение равновесия называется *устойчивым вырожденным узлом* (см. рис. 9),
2) $\boldsymbol{k_1 = k_2 = k > 0}$, такое положение равновесия называется *неустойчивым вырожденным узлом* (см. рис. 10).

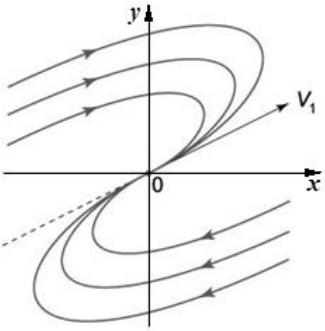

Рис. 9. Устойчивый вырожденный узел

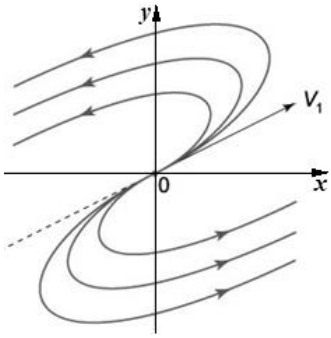

Рис. 10. Неустойчивый вырожденный узел

► Определим тип особой точки и изобразим фазовый портрет

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x + 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x - 3y. \end{cases}$$

Определитель матрицы равен

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} = -15 + 15 = 1 \neq 0.$$

Следовательно, система имеет единственное положение равновесия в точке $(0, 0)$. Найдем собственные значения.

Характеристическое уравнение этой системы имеет вид:

$$\begin{vmatrix} 5-k & 4 \\ -4 & -3-k \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad k_{1,2} = 1 > 0.$$

Собственные значения действительные, равные, положительные, при этом геометрическая кратность не равна алгебраической кратности. Тогда точка покоя является *неустойчивым вырожденным узлом*

Общее решение будем искать в виде

$$\begin{cases} x = (A + Bt)e^t, \\ y = (C + Dt)e^t. \end{cases}$$

Система примет вид:

$$\begin{cases} (A + B + Bt)e^t = 5(A + Bt)e^t + 4(C + Dt)e^t, \\ (C + D + Dt)e^t = -4(A + Bt)e^t - 3(C + Dt)e^t. \end{cases}$$

Обозначив $A = C_1$, $B = C_2$, решим ее:

$$\begin{cases} D = -B, \\ C = -A - \dfrac{1}{4}D = -A + \dfrac{1}{4}B. \end{cases}$$

Тогда общее решение будет:

$$\begin{cases} x = (C_1 + C_2 t)e^t, \\ y = \left(-C_1 + \dfrac{1}{4}C_2 - C_2 t\right)e^t. \end{cases}$$

Так как

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{t \to +\infty} \frac{\left(-C_1 + \frac{1}{4}C_2 - C_2 t\right)e^t}{(C_1 + C_2 t)e^t} = -1,$$

то все траектории имеют общую касательную $y = -x$ и с ростом t точки на всех траекториях удаляются от точки покоя, так как $\lim\limits_{t \to +\infty} y = \infty$, $\lim\limits_{t \to +\infty} x = \infty$.

Фазовый портрет изображен на рис. 11. ◄

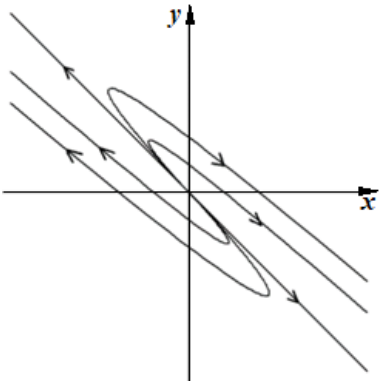

Рис. 11. Неустойчивый вырожденный узел

Корни характеристического уравнения
$k_1, k_2 \in R$, $k_1 \cdot k_2 < 0$ (корни разного знака)

В этом случае точка равновесия является *седлом*. Поскольку одно из собственных значений положительно, то седло является неустойчивой точкой равновесия.

Пусть, например, $k_1 < 0$, $k_2 > 0$. Собственные значения k_1 и k_2 ассоциируются с соответствующими собственными векторами V_1 и V_2. Прямые, направленные вдоль собственных векторов V_1, V_2, называются *сепаратрисами*. Они являются асимптотами для остальных фазовых траекторий, имеющих форму гипербол. Каждой из сепаратрис можно сопоставить определенное направление движения. Если сепаратриса связана с отрицательным собственным значением $k_1 < 0$, то есть в данном случае направлена вдоль вектора V_1, то движение вдоль нее происходит к точке равновесия $X = 0$. И наоборот, при $k_2 > 0$, то есть для сепаратрисы, связанной с вектором V_2, движение направлено от начала координат. Схематически фазовый портрет седла показан на рис. 12.

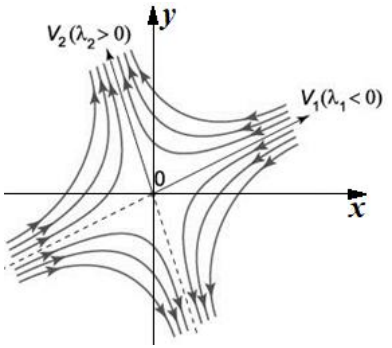

Рис. 12. Фазовый портрет седла

► Определим тип особой точки и изобразим фазовый портрет

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 8y - 7x, \\ \dfrac{dy}{dt} = 9x - 6y. \end{cases}$$

Определитель матрицы равен

$$\begin{vmatrix} -7 & 8 \\ 9 & -6 \end{vmatrix} = 42 - 72 = -30 \neq 0.$$

Следовательно, система имеет единственное положение равновесия в точке $(0, 0)$. Найдем собственные значения.

Характеристическое уравнение этой системы имеет вид:

$$\begin{vmatrix} -7 - k & 8 \\ 9 & -6 - k \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad k_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{129}}{2}.$$

Собственные значения действительные, различные и разных знаков. Точка покоя такого типа неустойчива, она является *седлом*.

Найдем собственные векторы. При $k_1 = \frac{-3-\sqrt{129}}{2}$ это вектор $V_1 = \begin{pmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{21} \end{pmatrix}$ такой, что

$$\begin{cases} \left(-7 - \dfrac{-3 - \sqrt{129}}{2}\right)\gamma_{11} + 8\gamma_{21} = 0, \\ 9\gamma_{11} + \left(-6 - \dfrac{-3 - \sqrt{129}}{2}\right)\gamma_{21} = 0. \end{cases}$$

Тогда $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{11-\sqrt{129}}{16} \end{pmatrix}$.

При $k_2 = \frac{-3-\sqrt{129}}{2}$ это вектор $V_2 = \begin{pmatrix} \gamma_{12} \\ \gamma_{22} \end{pmatrix}$ такой, что

$$\begin{cases} \left(-7 - \frac{-3+\sqrt{129}}{2}\right)\gamma_{12} + 8\gamma_{22} = 0, \\ 9\gamma_{12} + \left(-6 - \frac{-3+\sqrt{129}}{2}\right)\gamma_{22} = 0. \end{cases}$$

Тогда $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{11+\sqrt{129}}{16} \end{pmatrix}$.

Следовательно, общее решение имеет вид:

$$\begin{cases} x = C_1 e^{\frac{-3-\sqrt{129}}{2}t} + C_2 e^{\frac{-3+\sqrt{129}}{2}t}, \\ y = \frac{11-\sqrt{129}}{16} C_1 e^{\frac{-3-\sqrt{129}}{2}t} + \frac{11+\sqrt{129}}{16} C_2 e^{\frac{-3+\sqrt{129}}{2}t}. \end{cases}$$

Исследуем на устойчивость тривиальное решение, то есть точку покоя, расположенную в начале координат. Пусть $C_1 = 0$. Отсюда

$$\begin{cases} x = C_2 e^{\frac{-3+\sqrt{129}}{2}t}, \\ y = \frac{11+\sqrt{129}}{16} C_2 e^{\frac{-3+\sqrt{129}}{2}t}. \end{cases}$$

Разделив второе равенство на первое, получим $\frac{y}{x} = \frac{11+\sqrt{129}}{16}$ или $y = \frac{11+\sqrt{129}}{16}x$. Значит, эта траектория – прямая, вдоль которой точки удаляются от точки покоя, так как $\lim\limits_{t\to+\infty} x = \infty$, $\lim\limits_{t\to+\infty} y = \infty$.

Пусть $C_2 = 0$. Отсюда

$$\begin{cases} x = C_1 e^{\frac{-3-\sqrt{129}}{2}t}, \\ y = \frac{11-\sqrt{129}}{16} C_1 e^{\frac{-3-\sqrt{129}}{2}t}. \end{cases}$$

Разделив второе равенство на первое, получим $\frac{y}{x} = \frac{11-\sqrt{129}}{16}$ или $y = \frac{11-\sqrt{129}}{16}x$. Значит, эта траектория – прямая, вдоль которой точки приближаются к началу координат, так как $\lim\limits_{t\to+\infty} x = 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} y = 0$.

Фазовый портрет изображен на рис. 13. ◄

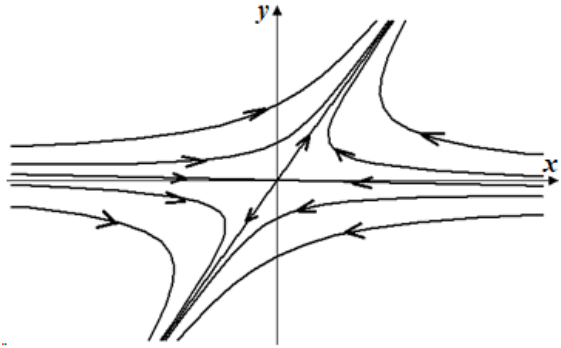

Рис. 13. Седло

Корни характеристического уравнения

$$\boldsymbol{k_{1,2} = \alpha \pm i\beta,\ \alpha \neq 0}$$

В этом случае точка равновесия является *фокусом*.

Выясним, какой вид имеют фазовые траектории в окрестности начала координат. Построим комплексное решение $\tilde{X}(t)$, соответствующее собственному числу $k_1 = \alpha + i\beta$:

$$\tilde{X}(t) = e^{k_1 t}V_1 = e^{(\alpha+i\beta)t}(U + iW),$$

где $V_1 = \begin{pmatrix} U_{11} \\ U_{21} \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} W_{11} \\ W_{21} \end{pmatrix}$ – комплекснозначный собственный вектор, ассоциированный с собственным числом $k_1 = \alpha + i\beta$. В результате преобразований получаем

$$\tilde{X}(t) = \begin{pmatrix} \tilde{x}(t) \\ \tilde{y}(t) \end{pmatrix} = e^{(\alpha+i\beta)t}(U + iW) =$$

$$= e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t)\left(\begin{pmatrix} U_{11} \\ U_{21} \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} W_{11} \\ W_{21} \end{pmatrix}\right) =$$

$$= e^{\alpha t}\left(\cos\beta t \cdot \begin{pmatrix} U_{11} \\ U_{21} \end{pmatrix} - \sin\beta t \cdot \begin{pmatrix} W_{11} \\ W_{21} \end{pmatrix}\right) +$$

$$+ ie^{\alpha t}\left(\cos\beta t \cdot \begin{pmatrix} W_{11} \\ W_{21} \end{pmatrix} + \sin\beta t \cdot \begin{pmatrix} U_{11} \\ U_{21} \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{\alpha t}(\cos\beta t \cdot U_{11} - \sin\beta t \cdot W_{11}) \\ e^{\alpha t}(\cos\beta t \cdot U_{21} - \sin\beta t \cdot W_{21}) \end{pmatrix} +$$

$$+ i\begin{pmatrix} e^{\alpha t}(\cos\beta t \cdot W_{11} + \sin\beta t \cdot U_{11}) \\ e^{\alpha t}(\cos\beta t \cdot W_{21} + \sin\beta t \cdot U_{21}) \end{pmatrix}.$$

Действительная и мнимая части в последнем выражении образуют общее решение системы, которое имеет вид:

$$\begin{cases} x(t) = C_1 \operatorname{Re}\tilde{x}(t) + C_2 \operatorname{Im}\tilde{x}(t), \\ y(t) = C_1 \operatorname{Re}\tilde{y}(t) + C_2 \operatorname{Im}\tilde{y}(t). \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = e^{\alpha t}(C_1\cos\beta t + C_2\sin\beta t)U_{11} + e^{\alpha t}(C_2\cos\beta t - C_1\sin\beta t)W_{11}, \\ y(t) = e^{\alpha t}(C_1\cos\beta t + C_2\sin\beta t)U_{21} + e^{\alpha t}(C_2\cos\beta t - C_1\sin\beta t)W_{21}. \end{cases}$$

Представим постоянные C_1, C_2 в виде

$$C_1 = C\sin\delta, \quad C_2 = C\cos\delta,$$

где δ – некоторый вспомогательный угол. Тогда решение записывается как

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = Ce^{\alpha t}(\sin\delta\cos\beta t + \cos\delta\sin\beta t)\begin{pmatrix} U_{11} \\ U_{21} \end{pmatrix} +$$

$$+ Ce^{\alpha t}(\cos\delta\cos\beta t - \sin\delta\sin\beta t)\begin{pmatrix} W_{11} \\ W_{21} \end{pmatrix} =$$

$$= Ce^{\alpha t}\sin(\beta t + \delta)\begin{pmatrix} U_{11} \\ U_{21} \end{pmatrix} + Ce^{\alpha t}\cos(\beta t + \delta)\begin{pmatrix} W_{11} \\ W_{21} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, решение $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ раскладывается по базису, заданному векторами $U = \begin{pmatrix} U_{11} \\ U_{21} \end{pmatrix}$ и $W = \begin{pmatrix} W_{11} \\ W_{21} \end{pmatrix}$:

$$X(t) = \mu(t)U + \eta(t)W,$$

где коэффициенты разложения $\mu(t)$, $\eta(t)$ имеют вид:

$$\mu(t) = Ce^{\alpha t}\sin(\beta t + \delta), \qquad \eta(t) = Ce^{\alpha t}\cos(\beta t + \delta).$$

Отсюда видно, что фазовые траектории представляют собой спирали. При $\alpha < 0$ спирали будут закручиваться, приближаясь к началу координат. Такое положение равновесия называется *устойчивым фокусом*. Соответственно, при $\alpha > 0$ мы имеем *неустойчивый фокус*.

Направление закручивания спиралей можно определить по знаку коэффициента a_{21} в исходной матрице A. Действительно, рассмотрим производную $\frac{dy}{dt}$, например, в точке $(1,0)$:

$$\frac{dy(1,0)}{dt} = a_{21} \cdot 1 + a_{22} \cdot 0 = a_{21}.$$

Положительный коэффициент $a_{21} > 0$ соответствует закручиванию спиралей против часовой стрелки. При $a_{21} < 0$ спирали будут закручиваться по часовой стрелке. Таким образом, с учетом направления закручивания спиралей, всего существует 4 различных вида фокуса. Схематически они показаны на рисунках 14 и 15.

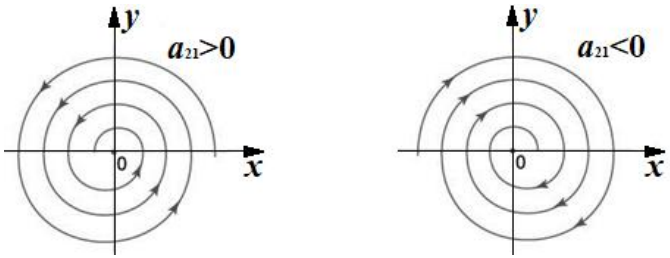

Рис. 14. Устойчивый фокус

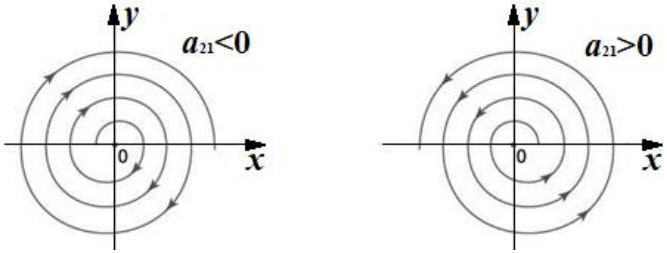

Рис. 15. Неустойчивый фокус

► Определим тип особой точки и изобразим фазовый портрет

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 6y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 8x - 6y. \end{cases}$$

Определитель матрицы равен

$$\begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 8 & -6 \end{vmatrix} = -18 + 48 = 30 \neq 0.$$

Следовательно, система имеет единственное положение равновесия в точке $(0, 0)$. Найдем собственные значения.

Характеристическое уравнение этой системы имеет вид:

$$\begin{vmatrix} 3-k & -6 \\ 8 & -6-k \end{vmatrix} = 0,$$

$$k^2 + 3k + 30 = 0,$$

$$k_{1,2} = \frac{-3 \pm i\sqrt{111}}{2}.$$

Собственные значения комплексные, при этом $\mathrm{Re}\, k_{1,2} = -\frac{3}{2} < 0$. Такая точка покоя асимптотически устойчива в целом и называется *устойчивым фокусом.*

Найдем собственные векторы. Собственному значению $k_1 = \frac{-3+i\sqrt{111}}{2}$ соответствует собственный вектор $V_1 = \begin{pmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{21} \end{pmatrix}$ такой, что

$$\begin{cases} \dfrac{9 - i\sqrt{111}}{2}\gamma_{11} - 6\gamma_{21} = 0, \\ 8\gamma_{11} - \dfrac{9 + i\sqrt{111}}{2}\gamma_{21} = 0. \end{cases}$$

Тогда $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{9-i\sqrt{111}}{12} \end{pmatrix}$.

Решение в этом случае имеет вид:

$$\begin{cases} x = C_1 \operatorname{Re}\left(e^{-\frac{3}{2}t}\left(\cos\dfrac{\sqrt{111}t}{2} + i\sin\dfrac{\sqrt{111}t}{2}\right)\right) + \\ \quad + C_2 \operatorname{Im}\left(e^{-\frac{3}{2}t}\left(\cos\dfrac{\sqrt{111}t}{2} + i\sin\dfrac{\sqrt{111}t}{2}\right)\right), \\ y = C_1 \operatorname{Re}\left(e^{-\frac{3}{2}t}\left(\cos\dfrac{\sqrt{111}t}{2} + i\sin\dfrac{\sqrt{111}t}{2}\right)\dfrac{9 - i\sqrt{111}}{12}\right) + \\ \quad + C_2 \operatorname{Im}\left(e^{-\frac{3}{2}t}\left(\cos\dfrac{\sqrt{111}t}{2} + i\sin\dfrac{\sqrt{111}t}{2}\right)\dfrac{9 - i\sqrt{111}}{12}\right). \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = e^{-\frac{3}{2}t}\left(C_1\cos\dfrac{\sqrt{111}t}{2} + C_2\sin\dfrac{\sqrt{111}t}{2}\right), \\ y = e^{-\frac{3}{2}t}\left(C_1\left(\dfrac{9}{12}\cos\dfrac{\sqrt{111}t}{2} + \dfrac{\sqrt{111}}{12}\sin\dfrac{\sqrt{111}t}{2}\right) + \right. \\ \quad \left. + C_2\left(-\dfrac{\sqrt{111}}{12}\cos\dfrac{\sqrt{111}t}{2} + \dfrac{9}{12}\sin\dfrac{\sqrt{111}t}{2}\right)\right). \end{cases}$$

Исследуем на устойчивость тривиальное решение, то есть точку покоя, расположенную в начале координат. Если t изменится на величину периода $T_0 = \frac{2\pi}{\frac{\sqrt{111}}{2}}$, то точка на траектории вернется не в прежнее положение, а станет ближе к точке покоя, так как $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-\frac{3}{2}t} = 0$.

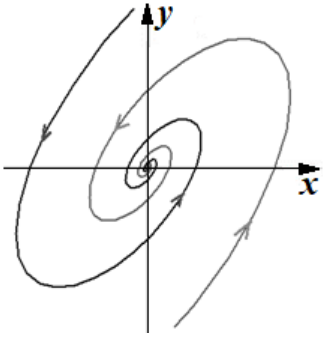

Рис. 16. Устойчивый фокус

Фазовый портрет изображен на рис. 16. ◄

Корни характеристического уравнения $k_{1,2} = \pm i\beta$

В этом случае точка равновесия является *центром*.

Выясним, какой вид имеют фазовые траектории в окрестности начала координат. В случае центра фазовые траектории формально получаются из уравнения спиралей при $\alpha = 0$ и представляют собой *эллипсы*, то есть описывают периодическое движение точки на фазовой плоскости. Положения равновесия типа «центр» являются устойчивыми по Ляпунову.

Возможны два вида центра, различающиеся направлением движения точек. Как и в случае спиралей, направление движения можно определить, например, по знаку производной $\frac{dy}{dt}$ в какой-либо точке. Если взять точку $(1,0)$, то $\frac{dy(1,0)}{dt} = a_{21}$, то есть направление вращения определяется знаком коэффициента a_{21}. Фазовые портреты изображены на рис. 17.

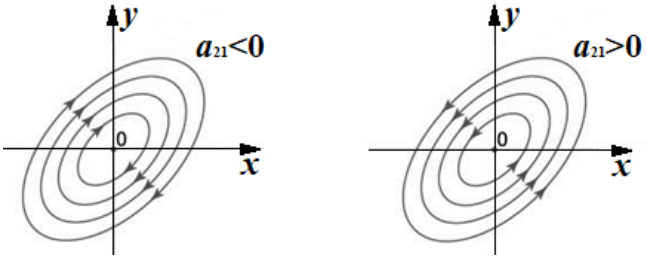

Рис. 17. Центр

► Определим тип особой точки и изобразим фазовый портрет

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x - 8y, \\ \frac{dy}{dt} = 6x + 2y. \end{cases}$$

Определитель матрицы равен

$$\begin{vmatrix} -2 & -8 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = -4 + 48 = 44 \neq 0.$$

Следовательно, система имеет единственное положение равновесия в точке $(0, 0)$. Найдем собственные значения.

Характеристическое уравнение этой системы имеет вид:

$$\begin{vmatrix} -2-k & -8 \\ 6 & 2-k \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad k_{1,2} = \pm 2\sqrt{11}i.$$

Собственные значения комплексные, при этом чисто мнимые. В этом случае точка покоя устойчива, но не асимптотически. Она является *центром.*

Собственному значению $k_1 = 2\sqrt{11}i$ соответствует собственный вектор $V_1 = \begin{pmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{21} \end{pmatrix}$ такой, что

$$\begin{cases} \left(-2-2\sqrt{11}i\right)\gamma_{11} - 8\gamma_{21} = 0, \\ 6\gamma_{11} + \left(2-2\sqrt{11}i\right)\gamma_{21} = 0. \end{cases}$$

Тогда $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1+i\sqrt{11}}{4} \end{pmatrix}$.

Решение в этом случае имеет вид:

$$\begin{cases} x = C_1 \operatorname{Re}\left(\cos 2\sqrt{11}t + i\sin 2\sqrt{11}t\right) + \\ \quad + C_2 \operatorname{Im}\left(\cos 2\sqrt{11}t + i\sin 2\sqrt{11}t\right), \\ y = C_1 \operatorname{Re}\left(-\dfrac{1+i\sqrt{11}}{4}\left(\cos 2\sqrt{11}t + i\sin 2\sqrt{11}t\right)\right) + \\ \quad + C_2 \operatorname{Im}\left(-\dfrac{1+i\sqrt{11}}{4}\left(\cos 2\sqrt{11}t + i\sin 2\sqrt{11}t\right)\right). \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = C_1 \cos 2\sqrt{11}t + C_2 \sin 2\sqrt{11}t, \\ y = C_1\left(-\dfrac{\cos 2\sqrt{11}t}{4} + \dfrac{\sqrt{11}\sin 2\sqrt{11}t}{4}\right) + \\ \quad + C_2\left(-\dfrac{\sqrt{11}\cos 2\sqrt{11}t}{4} - \dfrac{\sin 2\sqrt{11}t}{4}\right). \end{cases}$$

Так как x и y задаются периодическими функциями, то траектории – замкнутые линии, которые являются эллипсами с центром в начале координат, при этом так как в матрице $a_{21} = 6 > 0$, то вращение идет против часовой стрелки.

Фазовый портрет изображен на рис. 18. ◄

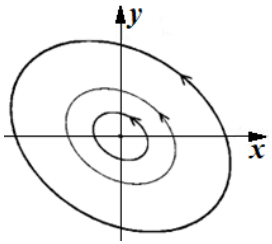

Рис. 18. Центр

Вырожденная матрица A

Если матрица является вырожденной, то у нее одно или оба собственных значения равны нулю. При этом возможны следующие частные случаи:

Случай 1. $k_1 \neq 0, k_2 = 0.$

Здесь общее решение записывается в виде

$$X(t) = C_1 e^{k_1 t} V_1 + C_2 V_2,$$

где $V_1 = \begin{pmatrix} V_{11} \\ V_{21} \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} V_{12} \\ V_{22} \end{pmatrix}$ – собственные векторы, соответствующие числам k_1 и k_2. В данном случае вся прямая, проходящая через начало координат и направленная вдоль вектора V_2, состоит из точек равновесия (эти точки не имеют специального названия). Фазовые траектории (см. рис. 19) представляют собой лучи, параллельные другому собственному вектору V_1. В зависимости от знака k_1 движение при $t \to \infty$ происходит либо в направлении прямой V_2, либо от нее.

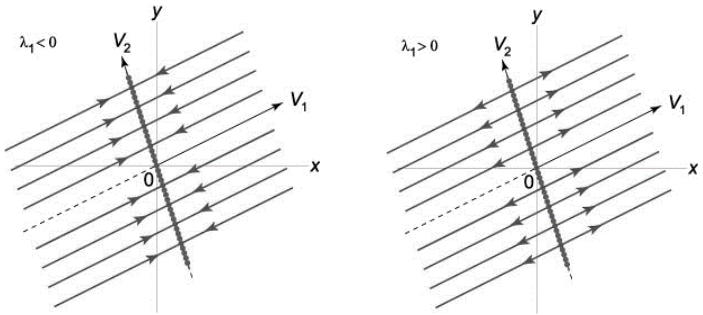

Рис. 19. Фазовый портрет при одном нулевой собственном значении

Случай 2. $k_1 = k_2 = 0$, $\dim \ker A = 2$.

В этом случае размерность собственного подпространства матрицы равна 2 и, следовательно, существуют два собственных вектора V_1 и V_2. Такая ситуация возможна при *нулевой матрице* A. Общее решение выражается формулой

$$X(t) = C_1 V_1 + C_2 V_2.$$

Любая точка плоскости является положением равновесия системы.

Случай 3. $k_1 = k_2 = 0$, $\dim \ker A = 1$.

В этом случае существует лишь 1 собственный вектор (Матрица A при этом будет *ненулевой*). Для построения базиса в качестве второго линейно независимого вектора можно взять вектор W_1, присоединенный к V_1. Общее решение системы записывается в виде

$$X(t) = (C_1 + C_2 t)V_1 + C_2 W_1.$$

Все точки прямой, проходящей через начало координат и направленной вдоль собственного вектора V_1, являются неустойчивыми положениями равновесия. Фазовые траектории представляют собой прямые, параллельные V_1. Направление движения вдоль этих прямых при $t \to \infty$ зависит от постоянной C_2: при $C_2 < 0$ движение происходит слева направо, а при $C_2 > 0$ – в противоположную сторону (см. рис. 20).

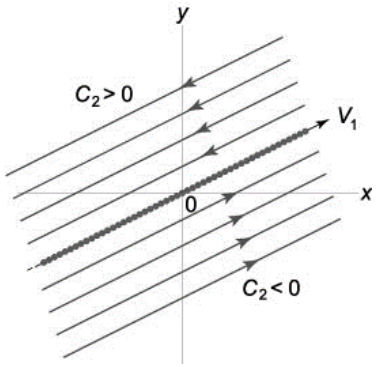

Рис. 20. Фазовый портрет при двух нулевых собственных значениях

► Определим тип особой точки и изобразим фазовый портрет

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 9x + 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 6x + 2y. \end{cases}$$

Определитель матрицы равен

$$\begin{vmatrix} 9 & 3 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = -18 + 18 = 0.$$

Следовательно, система имеет не единственное положение равновесия. Найдем собственные значения.

Характеристическое уравнение этой системы имеет вид:

$$\begin{vmatrix} 9-k & 3 \\ 6 & 2-k \end{vmatrix} = 0,$$

$$k^2 - 11k = 0,$$

$$k_1 = 0, \quad k_2 = 11 > 0.$$

В этом случае точки покоя неустойчивы.

Найдем собственные векторы.

При $k_1 = 0$ это вектор $V_1 = \begin{pmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{21} \end{pmatrix}$ такой, что $\begin{cases} 9\gamma_{11} + 3\gamma_{21} = 0, \\ 6\gamma_{11} + 2\gamma_{21} = 0. \end{cases}$

Тогда $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

При $k_2 = 11$ – это вектор $V_2 = \begin{pmatrix} \gamma_{12} \\ \gamma_{22} \end{pmatrix}$ такой, что $\begin{cases} -2\gamma_{12} + 3\gamma_{22} = 0, \\ 6\gamma_{12} - 9\gamma_{22} = 0. \end{cases}$

Тогда $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$. Тогда общее решение имеет вид:

$$\begin{cases} x = C_1 + C_2 e^{11t}, \\ y = -2C_1 + \dfrac{2}{3} C_2 e^{11t}. \end{cases}$$

Пусть $C_2 = 0$. Отсюда $\begin{cases} x = C_1, \\ y = -2C_1. \end{cases}$ Эти равенства задают точки покоя, расположенные на прямой $\frac{y}{x} = -2$ или $y = -2x$.

Пусть $C_2 \neq 0$. Тогда

$$\frac{y+2C_1}{x-C_1}=\frac{\frac{2}{3}C_2e^{11t}}{C_2e^{11t}}=\frac{2}{3}\quad\Leftrightarrow\quad y=\frac{2}{3}x-\frac{4}{3}C_1,$$

то есть траекториями являются прямые линии, параллельные прямым $y=\frac{2}{3}x$. С ростом t точки на этих траекториях удаляются от точек на прямой $y=-2x$, так как $\lim\limits_{t\to+\infty}e^{11t}=+\infty$.

Фазовый портрет изображен на рис. 21. ◄

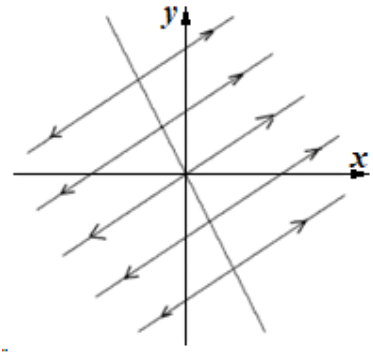

Рис. 5.21. Фазовый портрет

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Балабаева, Н.П. Обыкновенные дифференциальные уравнения и некоторые их приложения: учебно-методическое пособие / Н.П. Балабаева, Е.А. Барова, О.М. Кечина, Е.И. Томина. – Самара: Изд-во ПГСГА, 2016. – 107 с.
2. Егоров, А.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями /А.И. Егоров. – 2-е изд., испр. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 384 с.
3. Николаева, Н.И. Дифференциальные уравнения. Элементы теории устойчивости: конспект лекций. Часть 5 / Н.И. Николаева. – Омск: Изд-во ОмГТУ, 2011. – 88 с.
4. Понтрягин, Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Л.С. Понтрягин. – Москва: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1974. – 331 с.
5. Федорюк, М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения / М.В. Федорюк. – Москва: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1985. – 448 с.

Учебное издание

Барова Евгения Анатольевна

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

Учебное пособие

Редакционно-издательская обработка
издательства Самарского университета

Подписано в печать 27.12.2024. Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Печ. л. 10,0.
Тираж 27 экз. Заказ . Арт. – 27(Р2УП)/2024.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)
443086, САМАРА, МОСКОВСКОЕ ШОССЕ, 34.

Издательство Самарского университета.
443086, Самара, Московское шоссе, 34.