

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»  
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

*Е.В. АРЫШЕНСКИЙ, В.Р. КАРГИН*

# МЕТОДОЛОГИЯ НАУЧНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА В ПРОЦЕССАХ ОМД

Рекомендовано редакционно-издательским советом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева» в качестве учебного пособия для обучающихся по основным образовательным программам высшего образования по направлению подготовки 22.03.02. Металлургия, 15.03.01 Машиностроение

САМАРА  
Издательство Самарского университета  
2020

УДК 621.7(075)

ББК 34.5я7

А895

Рецензенты: д-р техн. наук, проф. И.П. Попов,  
канд. техн. наук, руководитель группы  
АО «Арконик СМЗ». А.В. Андрианов

*Арышенский, Евгений Владимирович*

**А895      Методология научного эксперимента в процессах**

**ОМД:** учебное пособие / *Е.В. Арышенский, В.Р. Каргин.* –  
Самара: Издательство Самарского университета, 2020. –  
112 с.: ил.

**ISBN 978-5-7883-1521-8**

Пособие содержит основные сведения по подготовке, проведению и методологии научного эксперимента, формах его представления. Изложены основные статистические методы обработки экспериментальных данных. Продемонстрированы возможности регрессионного, корреляционного и дисперсионного анализа. Предложено большое количество примеров и заданий для самостоятельной работы в области металловедения и пластического деформирования металлов и сплавов.

Предназначено для студентов института ракетно-космической техники, обучающихся по направлению подготовки магистров 22.03.02. Металлургия, 15.03.01 Машиностроение.

Подготовлено на кафедре обработки металлов давлением

УДК 621.7(075)

ББК 34.5я7

ISBN 978-5-7883-1521-8

© Самарский университет, 2020

# ОГЛАВЛЕНИЕ

|                                                                 |           |
|-----------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Введение .....</b>                                           | <b>5</b>  |
| <b>1. Общие сведения об эксперименте .....</b>                  | <b>7</b>  |
| 1.1. Понятие об эксперименте.....                               | 7         |
| 1.2. Элементы теории измерений.....                             | 12        |
| 1.3. Погрешности косвенных измерений .....                      | 20        |
| 1.4. Выявление и исключение промахов .....                      | 23        |
| 1.5. Графическая обработка результатов эксперимента .....       | 25        |
| 1.6. Вопросы для самопроверки .....                             | 27        |
| 1.7. Задачи и упражнения .....                                  | 28        |
| <b>2. Аппроксимация экспериментальных данных .....</b>          | <b>30</b> |
| 2.1. Метод средних .....                                        | 31        |
| 2.2. Метод наименьших квадратов .....                           | 34        |
| 2.3. Аппроксимация в виде нелинейно-независимых<br>функций..... | 37        |
| 2.4. Сглаживание исходной информации.....                       | 41        |
| 2.5. Вопросы для самопроверки .....                             | 43        |
| 2.6. Задачи и упражнения .....                                  | 44        |
| <b>3. Построение плана многофакторного эксперимента .....</b>   | <b>46</b> |
| 3.1. Планирование факторного эксперимента .....                 | 46        |
| 3.2. Полный факторный эксперимент.....                          | 48        |
| 3.3. Дробный факторный эксперимент.....                         | 50        |
| 3.4. Математическая обработка факторного эксперимента ....      | 55        |
| 3.5. Планы второго порядка.....                                 | 63        |
| 3.6. Вопросы для самопроверки .....                             | 68        |
| 3.7. Задания и упражнения .....                                 | 68        |
| <b>4. Поиск оптимальных условий .....</b>                       | <b>72</b> |
| 4.1. Одномерные методы поиска экстремума.....                   | 72        |
| 4.2. Многомерные методы поиска .....                            | 76        |
| 4.3. Вопросы для самопроверки .....                             | 85        |
| 4.4. Задачи и упражнения .....                                  | 86        |

|                                                 |            |
|-------------------------------------------------|------------|
| <b>5 Дисперсионный анализ .....</b>             | <b>88</b>  |
| 5.1. Основные понятия .....                     | 88         |
| 5.2. Латинские и греко-латинские квадраты ..... | 94         |
| 5.3. Вопросы для самоконтроля .....             | 99         |
| 5.4. Задачи и упражнения .....                  | 100        |
| <b>Список рекомендуемой литературы .....</b>    | <b>102</b> |
| <b>Приложение .....</b>                         | <b>104</b> |

## ВВЕДЕНИЕ

Материалы пособия дают студентам знание и умение использовать идеи планирования и математической обработки эксперимента, вырабатывают определенный взгляд на сущность научной деятельности как на эксперимент с его спецификой.

Несмотря на большое количество литературы по планированию и обработке эксперимента, нет учебника для студентов, который можно было бы использовать при практической постановке лабораторного эксперимента. В имеющихся книгах раскрываются в основном математические проблемы вопроса, много внимания уделяется общему и строгому обоснованию методов. При этом нередко затруднен выбор практических приемов постановки и обработки эксперимента, не сразу видны границы применимости, достоинства и недостатки того или иного математического аппарата. Для изучения многих книг предварительно следует прослушать серьезный математический курс по теории вероятности и математической статистике. Для магистрантов необходим промежуточный курс, который позволит им, с одной стороны, научиться читать современную литературу и не бояться непривычной терминологии, а с другой – понять неизбежность практического использования идей планирования эксперимента в научной деятельности.

При изложении материала авторы основывались на том, что студенты ранее изучали основы теории вероятности и математической статистики и получили достаточные знания по избранной ими области научного исследования, но не имеют представления о связи этих дисциплин. Раскрывая эти связи, пособие доказывает, что любая творческая работа магистранта, будь то исследование или управление технологическим процессом, является экспериментом в широком смысле этого слова, поэтому должна выполняться по определенным правилам с использованием современных достижений математики и информационных технологий.

Без углубления в математические проблемы в предлагаемом пособии демонстрируются возможности современных методов планирования и математической обработки эксперимента на конкретных примерах процессов обработки металлов давлением, показывается область использования описываемых методов.

# 1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ ОБ ЭКСПЕРИМЕНТЕ

## 1.1. Понятие об эксперименте

Термин «эксперимент» происходит от латинского experimentum – проба, опыт.

**Эксперимент** – это система опытов и наблюдений, в процессе которых идет накопление информации об исследуемом явлении (объекте, процессе).

**Опыт** – это воспроизведение исследуемого явления в определенных условиях проведения эксперимента при возможности измерения его результатов. Опыт – это отдельная элементарная часть эксперимента.

**Наблюдение** основано на непосредственном восприятии изучаемого явления с помощью органов чувств без вмешательства в процесс со стороны исследователя.

При проведении эксперимента исследователь вмешивается в изучаемый процесс с целью его познания. При этом одни условия опыта изолируются, другие исключаются, третьи усиливаются или ослабляются. Эксперименты, которые проводятся в различных отраслях науки, являются химическими, физическими, социальными и т.д.

Эксперименты подразделяются:

- по организации проведения на лабораторные, натурные, производственные, мысленные, модельные и т.д.;
- по контролируемым величинам на пассивные и активные;
- по числу варьируемых факторов на однофакторные и многофакторные;
- по назначению на пробные и контрольные.

**Лабораторный эксперимент** проводится в лабораторных условиях с применением приборов, моделирующих установок, стендов. В эксперименте изучается не сам объект, а его образец.

**Натурный (производственный) эксперимент** проводится в естественных условиях и на реальных объектах.

**Мысленный эксперимент** – это эксперимент на мысленной модели исследуемого объекта. Результат мысленного эксперимента отображается в виде формул, графиков, чертежей. Пример мысленного эксперимента – мышление шахматиста. Мысленно разрабатываются различные варианты ходов, а выбирается только один.

**Пассивный эксперимент** предусматривает измерение только выбранных параметров в результате наблюдения за объектом без искусственного вмешательства в его функционирование, например, наблюдение за числом бракованных деталей при штамповке.

**Модельный эксперимент** широко применяют в научно-исследовательской работе. Он осуществляется на искусственно создаваемых объектах.

**Численный эксперимент** выполняется на компьютерах по известной математической модели изучаемого объекта. При этом изучается влияние отдельных параметров на характер протекания исследуемого процесса.

**Активный эксперимент** связан с выбором и управлением входных и выходных переменных.

Эксперимент имеет три стадии. На первой – с помощью датчиков, приборов и т.п. определяют состояние изучаемого явления, измеряют его параметры, составляют таблицу наблюдений. На второй стадии опытные данные обрабатывают для определения зависимости каких-то характеристик от параметров. На третьей стадии делают вывод о путях достижения цели эксперимента. Критерием оптимальности эксперимента является отношение количества получаемой информации к затратам на ее получение.

При проведении экспериментов необходимо:

- а) стремление к сокращению числа опытов;
- б) одновременное варьирование всеми переменными, определяющими процесс;
- в) использование математического аппарата, формализующего многие действия экспериментатора;
- г) выбор четкой стратегии, позволяющей принимать решения после каждой серии экспериментов.

Задачи, где можно успешно использовать эксперимент – это построение математических моделей, поиск оптимальных условий,

выбор существенных факторов и т.п. Наиболее важными в области техники, металлургии являются задачи, связанные с поиском оптимальных условий и построением математических моделей.

**Объект исследования.** Для описания объекта исследования используют представление о кибернетической системе, которую называют «черным ящиком». Последний представляет собой систему связей, недоступную для наблюдения, т.к. о содержании, механизме изучаемого процесса нам ничего не известно, или известно лишь частично. Известны только входы, снимаемые с датчиков, приборов (переменные  $X$ ), участвующие в процессе факторы ( $Z$  и  $W$ ), и выходы – результат процесса (параметр оптимизации, целевая функция, отклик), обозначенный символом  $Y$  (см. рис. 1.1).



Рис. 1.1. Схема объекта исследования

Под объектом исследования может быть рынок, сплав, процесс обработки металлов давлением и т.д., табл. 1.1.

Таблица 1.1. Примеры изучения неизвестных объектов

| Исследователь                 | Объект      | Регулируемые факторы | Нерегулируемые факторы  | Неизвестные факторы | Параметр оптимизации |
|-------------------------------|-------------|----------------------|-------------------------|---------------------|----------------------|
| Фермер                        | Ферма       | Удобрения            | Погода                  | Состояние семян     | Урожай               |
| Депутат                       | Дума        | Речь                 | Политическая обстановка | Настроение          | Итоги голосования    |
| Продавец                      | Рынок       | Цена продукта        | Цены конкурентов        | Вкусы покупателей   | Объем продукции      |
| Представитель любой профессии | Черный ящик | Вход                 | Внешний вид             | Устройство ящика    | Выход                |

Таким образом, входные управляемые переменные и факторы – это способы воздействия на поведение «черного ящика». Каждый фактор может принимать в опыте одно или несколько значений. Такие значения называют уровнями. Фиксированный набор уровней факторов определяет одно из возможных состояний «черного ящика». Одновременно это есть условия проведения одного из возможных опытов. Если перебрать все возможные наборы состояний, то получим полное множество различных состояний данного «ящика». Одновременно это будет число возможных различных опытов, которое может быть подсчитано по формуле

$$N = P^k,$$

где  $P$  – число уровней;  $k$  – число факторов.

Факторы разделяются на количественные и качественные. Например, при термообработке листов из алюминиевых сплавов количественными факторами являются температура отжига и время выдержки, влияющие на уровень механических свойств материала листа. Качественные факторы – это разные вещества, разные технологические способы, аппараты и т.д. Для их количественной оценки используют ранжирование, условную порядковую шкалу, которая ставит в соответствие уровням качественного фактора числа натурального ряда, т.е. производят кодирование. Например, наличие смазки в процессе прессования можно закодировать как +1, отсутствие как –1.

При выборе нескольких факторов должны выполняться следующие основные требования:

1. Управляемость – это установка нужного значения уровня фактора и поддержание его постоянным в течение всего опыта.
2. Однозначность. Трудно управлять фактором, если он является функцией других факторов.
3. Совместимость факторов означает, что все комбинации уровней факторов осуществимы и безопасны.
4. Независимость – возможность установления фактора любым уровнем вне зависимости от уровней других факторов.

К случайным внешним факторам, оказывающим влияние на результаты эксперимента, можно отнести изменение атмосферного

давления, температуры, влажности окружающей среды, изменение работоспособности приборов, их перегрев и др.

Выбор факторов – очень ответственный этап при подготовке к эксперименту. Множество факторов должно быть достаточно полным. Если какой-нибудь существенный фактор пропущен, это может привести к неправильному определению оптимальных условий.

Параметр оптимизации является реакцией на воздействие факторов, которые определяют поведение объекта исследования. В качестве параметров оптимизации в процессах производства и формоизменения металлов могут быть взяты экономические показатели (прибыль, себестоимость, рентабельность), технико-экономические показатели (долговечность, производительность, выход годного продукта) или технологические показатели (степень деформации, уровень механических свойств изделия и др.). Параметр оптимизации должен быть количественным, задаваться числом. Если нет способа количественного измерения результата, то используется прием, называемый ранжированием. При этом параметру оптимизации присваиваются оценки – ранги по заранее выбранной шкале: двухбалльной, пятибалльной и т.д. В качестве примеров рангового подхода можно привести определение чемпиона мира по фигурному катанию, дегустацию вин и т. д. Кроме того, параметр оптимизации должен являться универсальным: быть способным всесторонне характеризовать объект исследования, иметь физический смысл, быть простым и легко вычисляемым, существующим для всех различных состояний «черного ящика», эффективным с точки зрения достижения цели.

Схема «черного ящика» позволяет строить математические модели, связывающие параметр оптимизации  $y$  с факторами  $x_1, x_2, \dots, x_k$ :

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_k).$$

Наибольшее распространение получили полиномиальные модели. Например, для случая двух факторов  $x_1$  и  $x_2$  они имеют вид:

$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2$  – полином первой степени;

$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{12}x_1x_2 + b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2$  – полином второй степени.

Эксперимент в таких случаях нужно проводить для того, чтобы найти численные значения коэффициентов полинома.

Развитие современной техники немыслимо без эксперимента. Каждый магистрант в своей деятельности, работая в исследовательской лаборатории или на производстве, должен уметь проводить эксперимент, т.е.:

- 1) определять точность измеряющих приборов и получаемых данных;
- 2) составлять план проведения эксперимента;
- 3) уменьшать до разумных пределов число переменных в эксперименте;
- 4) проверять правильность полученных результатов и их точность;
- 5) выбрать способ обработки экспериментальных данных;
- 6) анализировать полученные результаты;
- 7) при минимуме затрат на эксперимент получать максимум информации об исследуемом явлении.

## 1.2. Элементы теории измерений

Всякое экспериментальное исследование процесса пластического деформирования металлов состоит из одного или нескольких измерений каких-то параметров  $a_1; a_2; a_3 \dots a_n$  с некоторой точностью, где  $n$  – число измерений

Под измерением понимают сравнение измеряемой величины с другой величиной, принятой за единицу измерения (эталон). Результат измерения выражается числом.

Измерения разделяют на прямые и косвенные (рис. 1.2).

При прямых измерениях определяемая величина сравнивается с единицей измерения непосредственно или при помощи измерительного прибора, проградуированного в соответствующих единицах. Примеры прямых измерений: измерение длин линейкой, штангенциркулем, измерение масс на весах с помощью гирь, измерение времени посредством часов или секундомера, измерение температуры термометром.

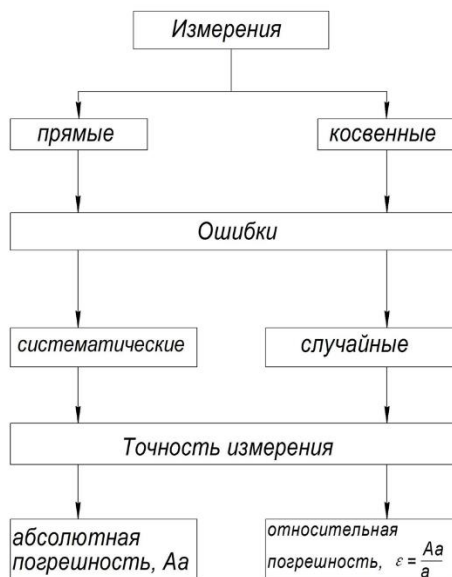


Рис. 1.2. Виды измерений, ошибки и погрешность

При косвенных измерениях измеряемая величина определяется из результатов прямых измерений других величин, которые связаны с измеряемой величиной определенной функциональной зависимостью. Например, объем цилиндрического тела высотой  $H$  и диаметром  $D$ :  $V = \frac{\pi}{4} D^2 H$ , плотность тела массой  $M$  и объемом  $V$ :

$$\rho = \frac{M}{V}.$$

Коэффициент термического расширения рассчитывают по формуле:

$$\alpha = \frac{l_2 - l_1}{T_2 - T_1} \cdot \frac{1}{l_1},$$

где  $l_1$  и  $l_2$  – длина образца при температурах  $T_1$  и  $T_2$ .

При измерении любой величины мы никогда не получаем истинного значения этой величины. Результат измерения дает лишь приближенное значение. Поэтому любые измерения всегда произ-

водятся с какими-то погрешностями (ошибками). Ошибки подразделяются на две группы: систематические и случайные (рис. 1.3).

Систематические ошибки – это ошибки, связанные с ограниченной точностью изготовления прибора, неправильным выбором метода измерений, неправильной установкой прибора. Систематические ошибки вызываются вполне определенными причинами. Их величина при повторных измерениях остается постоянной (рис 1.3) либо измеряется по определенному закону. Примеры: положение нуля термометра может не соответствовать нулевой температуре, капилляр термометра в разных участках может иметь разное сечение и т. д.

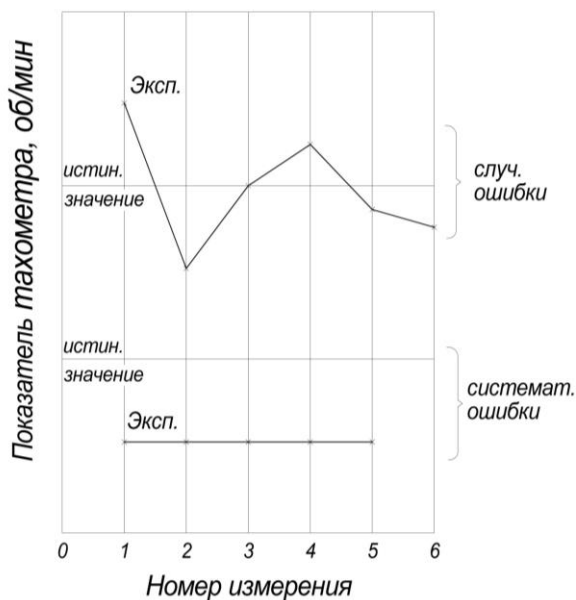


Рис. 1.3. Различие между случайной и систематической ошибками

Если известны причины, вызывающие систематические ошибки, последние могут быть исключены путем введения поправок при измерениях.

Случайные ошибки вызываются большим числом случайных причин, действие которых на каждое измерение различно и не мо-

жет быть учтено. Поэтому при последовательных измерениях одной и той же величины получают различные числовые значения (рис 1.4).

Исключить случайные ошибки нельзя, но оценить ошибки, с которыми получен результат, возможно. Ошибки такого типа подчиняются законам теории вероятностей, установленным для случайных явлений.

В основе теории погрешностей лежат два предположения, подтверждаемые опытом.

При большом числе измерений случайные ошибки одинаковой величины, но разного знака встречаются одинаково часто.

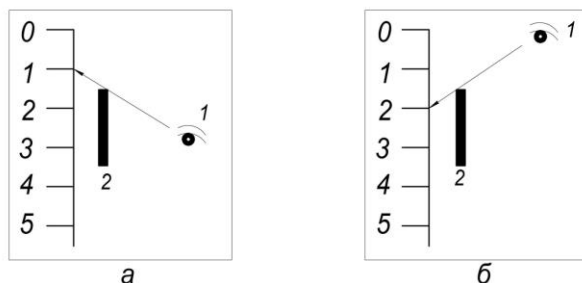


Рис. 1.4. Ошибка параллакса: а – завышенное значение; б – заниженное значение; а – глаз; б – измеряемый предмет

Большие по абсолютной величине погрешности встречаются реже, чем малые (рис. 1.5)

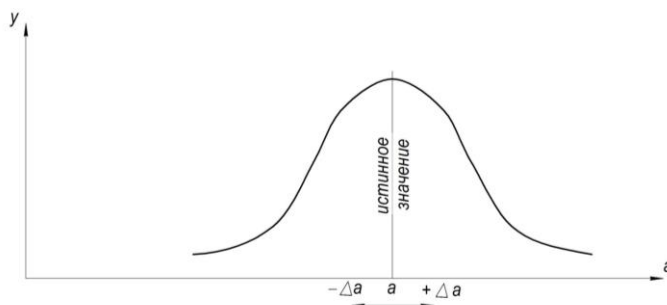


Рис. 1.5. Кривая нормального закона распределения

Допустим, что мы произвели  $n$  прямых измерений  $a_1; a_2 \dots a_n$ . Обозначим через  $a$  – истинное значение. Тогда  $\Delta a_i = a - a_i$  – это абсолютная погрешность  $i$ -го измерения.

Результаты измерений можно представить в виде:

$$\begin{aligned}
 a_1 &= a - \Delta a_1 \\
 &+ \\
 a_2 &= a - \Delta a_2 \\
 &+ \\
 &\dots\dots\dots \\
 &+ \\
 a_n &= a - \Delta a_n;
 \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^n a_i = na - \sum_{i=1}^n \Delta a_i. \quad (1.1)$$

Введем понятие среднеарифметической величины:

$$\bar{a} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i. \quad (1.2)$$

Разделив обе стороны равенства (1.1) на число измерений  $n$ , получим:

$$a = \bar{a} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta a_i.$$

Если число измерений велико, то:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta a_i = 0.$$

При бесконечно большом числе измерений истинное значение измеряемой величины  $a$  равно среднеарифметическому значению  $\bar{a}$  всех результатов произведенных измерений.

При ограниченном числе измерений  $a \approx \bar{a}$  необходимо уметь находить величину этого расхождения:  $\Delta a = a - \bar{a}$ .

Вместо приближенного равенства  $a \approx \bar{a}$  можно записать:

$$a - \Delta a < a < \bar{a} + \Delta a$$

или

$$a = \bar{a} \pm \Delta a,$$

где  $\Delta a$  – абсолютная погрешность(ошибка) измерения.

Это разность между точным и приближенным значением измеряемой величины.

Назовем доверительным интервалом интервал  $(\bar{a} - \Delta, \bar{a} + \Delta)$ , в который попадает истинное значение  $a$  измеряемой величины с заданной вероятностью  $P$ .

**Надежностью** результата серии измерений называется вероятность того, что истинное значение  $a$  измеряемой величины попадает в данный доверительный интервал. Эта величина  $P$  выражается или в долях единицы, или в процентах.

Чем больше величина доверительного интервала, тем с большей надежностью искомая величина  $a$  попадает в этот интервал:

$$\Delta a = t_{\alpha, n} \cdot S_{\bar{a}},$$

где  $t_{\alpha, n}$  – критерий Стьюдента, зависящий от числа произведенных измерений  $n$  и величины уровня значимости  $\alpha$ .

$S_{\bar{a}}$  – среднеквадратическое отклонение результата серии  $n$  измерений:

$$S_{\bar{a}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\Delta a)^2}{n(n-1)}}. \quad (1.3)$$

**Уровень значимости  $\alpha$**  означает вероятность того, что результат измерений отличается от истинного значения на величину, не большую чем  $\alpha$ . Для приближенных расчетов  $\alpha = 0,1$ , что соответствует вероятности  $P = 1$ ,  $\alpha = 0,9$ ; для инженерных расчетов  $\alpha = 0,05$ ,  $P = 0,95$ ; для научных расчетов  $\alpha = 0,01$ ,  $P = 0,99$ .

Для оценки точности измерений кроме абсолютной погрешности вводится понятие относительной погрешности измерений  $\varepsilon$ , равной отношению абсолютной погрешности  $\Delta a$  результата измерений к среднему результату измерений  $\bar{a}$ :

$$\varepsilon = \frac{\Delta a}{a}.$$

Относительную погрешность измерений часто выражают в процентах:

$$\varepsilon = \frac{\Delta a}{\bar{a}} \cdot 100\%.$$

Чем меньше  $\varepsilon$ , тем выше точность измерений. Для облегчения расчетов серии измерений следует применять следующие соотношения:

$$\bar{a}_i = a_0 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (a_i - a_0) \quad (1.4)$$

$$S\bar{a} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \left[ \sum_{i=1}^n (a_i - a_0)^2 - n(\bar{a} - a_0)^2 \right]} \quad (1.5)$$

где  $a_0$  – произвольное число, выбираемое таким образом, чтобы разности  $a_i - a_0$  содержали в основном не более двух значащих цифр.

Пример:  $a_1 = 1,57$ ;  $a_2 = 1,53$ ;  $a_3 = 1,52$ ;  $a_0 = 1,50$ .

Обработка результатов прямых измерений проводится в следующей последовательности: Результаты каждого измерения записывают в таблицу.

1. Вычисляют среднее значение из  $n$ -измерений по формуле (1.2) или (1.4):

$$\bar{a} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i.$$

2. Определяют среднеквадратичную погрешность по формуле (1.3) или (1.5):

$$S_a = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n a_i^2}{n(n-1)}}.$$

3. Задают значение уровня значимости  $\alpha$ .

4. По табл. П1 определяют значение коэффициента Стьюдента в зависимости от уровня значимости  $\alpha$  и числа измерений  $n$ .

5. Находят границы доверительного интервала  $\Delta a = t_{\alpha, n} \cdot S_a$ .

6. Окончательный результат записывают в виде  $a = \bar{a} \pm \Delta a$ .

7. Оценивают относительную погрешность измерения  $\varepsilon = \frac{\Delta a}{\bar{a}} \cdot 100\%$ .

Рассмотрим пример обработки результатов пяти прямых измерений диаметра цилиндрического тела, полученных при замере микрометром с ценой деления 0.01 мм (табл. 1.2).

Таблица 1.2. **Результаты измерений диаметра цилиндра**

| $i$ | $d_i, \text{мм}$ |
|-----|------------------|
| 1   | 14,85            |
| 2   | 14,80            |
| 3   | 14,84            |
| 4   | 14,81            |
| 5   | 14,79            |

Найдем среднее значение диаметра и границы доверительного интервала из этих измерений. Выберем произвольное число  $d_0$ , удобное для расчетов (пусть  $d_0 = 14,80$  мм); вычислим разности  $d_i - d_0$  и квадраты этих разностей. Результаты приведены в табл. 1.3. Найдем среднее значение:

$$\bar{d} = d_0 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (d_i - d_0) = 14,80 + \frac{0,09}{5} = 14,818 \text{ мм}$$

$$\bar{d} - d_0 = 0,018 \text{ мм}$$

Таблица 1.3. **Обработка результатов измерений**

| $i$   | $d_i, \text{мм}$ | $d_i - d_0, \text{мм}$ | $(d_i - d_0)^2, \text{мм}^2$ |
|-------|------------------|------------------------|------------------------------|
| 1     | 14,85            | 0,05                   | 0,0025                       |
| 2     | 14,80            | 0,00                   | 0,0000                       |
| 3     | 14,84            | 0,04                   | 0,0016                       |
| 4     | 14,81            | 0,01                   | 0,0001                       |
| 5     | 14,79            | -0,01                  | 0,0001                       |
| Сумма |                  | 0,09                   | 0,0043                       |

Средний квадрат погрешности серии из пяти измерений равен:

$$\begin{aligned}\Delta S_d^2 &= \frac{1}{n(n-1)} \left[ \sum_{i=1}^n (d_i - d_0)^2 - n(\bar{d} - d_0)^2 \right] = \\ &= \frac{1}{5 \cdot 4} (0,0043 - 5 \cdot 0,000324) = \frac{27}{20} 10^{-4} = \\ &= 1,35 \cdot 10^{-4} \text{ мм}^2.\end{aligned}$$

Извлекая квадратный корень из  $\Delta S_d^2$ , получим:

$$S_{\bar{d}} = 1,16 \cdot 10^{-2} \text{ мм}^2.$$

Для уровня значимости  $\alpha = 0,05$  и  $n = 5$  из таблицы П1 находим значение коэффициента Стьюдента  $t = 2,78$  и вычисляем абсолютную погрешность результата измерений:

$$\Delta d_{\bar{d}} = t_a \cdot \Delta S_{\bar{d}} = 2,78 \cdot 0,0116 = 0,0322 \text{ мм}.$$

Тогда результат измерения можно представить в виде:

$$(14,818 - 0,032) \text{ мм} \leq d \leq (14,818 + 0,032) \text{ мм}$$

или

$$d = (14,818 \pm 0,0322).$$

Относительная погрешность:

$$\varepsilon_d = \pm \frac{0,0322}{14,818} \cdot 100\% = 0,2\%.$$

### 1.3. Погрешности косвенных измерений

Во многих случаях искомая величина является функцией нескольких измеряемых прямым способом случайных величин. При этом вид функциональной зависимости между этими величинами известен

Пусть искомая величина  $z$  определяется из прямых измерений  $a$ , то есть:

$$z = f(a).$$

Обозначим точное значение результата косвенных измерений через

$$z = \bar{z} \pm \Delta z = f(\bar{a} \pm \Delta a), \text{ где } a = \bar{a} + \Delta a; \bar{z} = f(\bar{a}).$$

Полагая величину абсолютной погрешности прямых измерений  $\Delta a$  очень малой по сравнению с  $\bar{a}$ , можно для определения погрешности косвенных измерений воспользоваться связью дифференциала функции  $df$  с бесконечно малым приращением аргумента:

$$df(a) = \frac{df}{da} da.$$

Тогда:

$$\Delta z = df(a) = f(a) - f(\bar{a}) = f(\bar{a} + \Delta a) - f(\bar{a}) = \frac{df}{da}(\bar{a})\Delta a = f'(\bar{a})\Delta a.$$

Относительная погрешность равна:

$$\varepsilon_z = \frac{f'(\bar{a})}{f(\bar{a})} \Delta a \cdot 100\%.$$

Рассмотрим теперь случай, когда искомая величина  $z$  является функцией двух переменных  $a$  и  $b$ , определяемых из прямых измерений, то есть:

$$z = f(a, b).$$

Пусть

$$z = a + b.$$

Величина  $a$  определяется из серии  $k$  измерений  $a_i, i = 1, 2, \dots, k$ , а величина  $b$  – из серии  $m$  измерений  $b_j, j = 1, 2, \dots, m$ .

Истинные значения  $a$  и  $b$  связаны со средними значениями и соотношениями:

$$a = \bar{a} + \Delta \tilde{a}; b = \bar{b} + \Delta \tilde{b},$$

где  $\Delta \tilde{a}$  и  $\Delta \tilde{b}$  случайные возможные значения.

Абсолютная погрешность результата косвенных измерений:

$$\begin{aligned} \Delta z^2 &= (\overline{z - \bar{z}})^2 = \overline{(a - \bar{a} + b - \bar{b})^2} = \overline{(\Delta \tilde{a} + \Delta \tilde{b})^2} \\ &= \overline{\Delta \tilde{a}^2} + 2\overline{\Delta \tilde{a} \Delta \tilde{b}} + \overline{\Delta \tilde{b}^2} = \Delta a^2 + \Delta b^2. \end{aligned}$$

Черта сверху означает усреднение по распределению соответствующих случайных величин. Член  $\overline{2\Delta\tilde{a}\Delta\tilde{b}}$  равен нулю в силу симметрии кривых распределения  $\Delta\tilde{a}$  и  $\Delta\tilde{b}$ .

В самом общем случае:

$$z = f(a, b);$$

$$\Delta z^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial a}\right)^2 \Delta a^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial b}\right)^2 \Delta b^2.$$

Следовательно,

$$\Delta z = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial a}\right)^2 \Delta a^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial b}\right)^2 \Delta b^2},$$

где  $\frac{\partial f}{\partial a}$  и  $\frac{\partial f}{\partial b}$  – частные производные функции  $f(a, b)$  по переменным  $a$  и  $b$  соответственно.

Аналогично для  $z=f(a, b, c, \dots)$  получаем:

$$\Delta z = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial a}\right)^2 \Delta a^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial b}\right)^2 \Delta b^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial c}\right)^2 \Delta c^2 + \dots}.$$

Используя последнюю формулу, найдем погрешность измерения произведения двух величин  $z=ab$ :

$$\frac{\partial f}{\partial a} = b, \frac{\partial f}{\partial b} = a.$$

Тогда абсолютная погрешность:

$$\Delta z = \sqrt{b^2 \Delta a^2 + a^2 \Delta b^2}.$$

Относительная погрешность:

$$\begin{aligned} \varepsilon_z = \frac{\Delta z}{z} &= \frac{\sqrt{\bar{b}^2 \Delta a^2 + a^{-2} \Delta b^2}}{\bar{a} \cdot \bar{b}} = \sqrt{\frac{\bar{b}^2 \Delta a^2}{a^{-2} b^{-2}} + \frac{a^{-2} \Delta b^2}{a^{-2} b^{-2}}} = \sqrt{\frac{\Delta a^2}{a^{-2}} + \frac{\Delta b^2}{b^{-2}}} \\ &= \sqrt{\varepsilon_a^2 + \varepsilon_b^2}. \end{aligned}$$

Обработку результатов косвенных измерений следует проводить в следующем порядке:

1. Для каждой серии измеренных величин, входящих в определение искомой величины, проводится обработка, как для случая прямых измерений. При этом для всех измеряемых величин задают один и тот же уровень значимости  $\alpha$ .

2. Находят границы доверительного интервала для результата косвенных измерений  $\Delta f$ .

3. Окончательный результат записывают в виде:  
 $f(a, b, c, \dots) = f(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \dots) \pm \Delta f$ .

4. Определяют относительную погрешность результата серии косвенных измерений:

$$\varepsilon = \frac{\Delta f}{f} \cdot 100\%.$$

Все вычисления следует проводить с числом значащих цифр, превышающих на единицу число значащих цифр, полученных при косвенных измерениях. Если ошибка измерения составляет 1-10%, то необходимо указать не более трех значащих цифр, а при 0,1-1% – не более четырех значащих цифр.

#### 1.4. Выявление и исключение промахов

Если серия из небольшого числа измерений содержит грубую погрешность – **промах**, то наличие этого промаха может сильно исказить как среднее значение измеряемой величины, так и границы доверительного интервала. Обычно промах имеет резко отличающееся от других измерений значение и его исключают из серии измерений. Для обнаружения промаха необходимо рассмотреть переменную  $\Theta$ :

$$\theta = \frac{x_i - \bar{x}}{\sqrt{\frac{n-1}{n} S_n^2}}. \quad (1.6)$$

которая в случае  $x_i = x_{\min}$  или  $x_i = x_{\max}$  называется критерием максимальных относительных отклонений или критерием совместности.

В формуле (1.6)  $\bar{x}$  – среднее значение

$$\bar{x} = x_0 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - x_0),$$

а  $S_n^2$  дисперсия

$$S_n^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - x_0)^2 - n(\bar{x} - x_0)^2}{n - 1}.$$

**Дисперсия** – это мера изменчивости, рассеивания любого опыта от среднего арифметического  $x_i - \bar{x}$ .

Наличие отклонений свидетельствует об изменчивости значений повторных опытов. Чем больше дисперсия, тем больше рассеяны значения параллельных опытов около среднего значения.

Если  $\Theta_{\text{расч}} > \Theta_{\text{табл}}$ , то подозреваемое значение  $x_i$  следует считать промахом.

Пример: в табл. 1.4 приведены результаты параллельных опытов,  $n = 6$ .

Таблица 1.4. Результаты опытов

| i     | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $x_i$ | 153,4 | 154,6 | 154,7 | 155,0 | 164,3 | 154,5 |

Значения  $x_5=164,3$  является подозреваемым на промах:

$$\bar{x} = x_0 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - x_0), x_0 = 155,0, n = 6$$

$$\bar{x} = 155 + \frac{-1,6 - 0,4 - 0,3 + 0 + 9,3 - 0,5}{6} = 156,08$$

Затем вычисляем расчетное значение  $\Theta$

$$\begin{aligned}
\frac{n-1}{n} S_n^2 &= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [(x_i - x_0)^2 - n(\bar{x} - x_0)^2] \\
&= \frac{1,6^2 + 0,4^2 + 0,3^2 + 9,3^2 + 0,5^2 - 6 \cdot 1,08^2}{6} \\
&= 13,76; \\
\theta_p &= \frac{|164,3 - 156,08|}{\sqrt{13,76}} = 2,22.
\end{aligned}$$

Таблица 1.5. Фрагмент таблицы  $\Theta$ -критерия при  $\alpha = 0.05$

|          |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|----------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| n        | 3    | 4    | 5    | 6    | 8    | 10   | 12   | 15   | 20   | 30   |
| $\theta$ | 1,41 | 1,69 | 1,87 | 2,00 | 2,17 | 2,29 | 2,39 | 2,49 | 2,62 | 2,79 |

При  $n=6$  по табл. 1.4  $\theta_{\text{табл}} = 2,00$ ,  $\theta_{\text{расч}} > \theta_{\text{табл}}$ , поэтому значение  $x_5 = 164,3$  считается промахом. Его исключают из серии опытов.

## 1.5. Графическая обработка результатов эксперимента

Графическое изображение дает наиболее наглядное представление о результатах эксперимента, позволяет лучше понять физическую сущность исследуемого процесса, выявить общий характер функциональной зависимости изучаемых переменных величин, установить наличие оптимума.

Для графического изображения результатов измерений применяют систему прямоугольных координат. Обычно функции имеют плавный характер. Точки на графике необходимо соединять плавной линией так, чтобы она по возможности проходила ближе ко всем экспериментальным точкам (рис. 1.6).

Правильно подобранный масштаб по координатным осям позволяет отобразить вид экспериментальной зависимости. От его выбора зависит форма графической кривой. Узкие графики дают большую погрешность по оси  $y$ , широкие – по оси  $x$  (рис. 1.7).

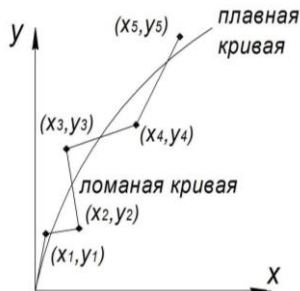


Рис. 1.6. Примеры аппроксимации экспериментальных точек

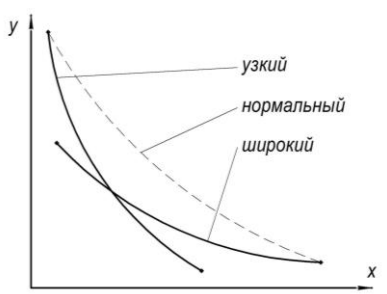


Рис. 1.7. Примеры узкого, нормального и широкого графиков

На один график может быть нанесено несколько кривых, представляющих собой зависимости нескольких величин от одной независимой переменной.

Чтобы различить экспериментальные данные различных величин, пользуются различной формой точек, по которым проводится кривая, например, кружками, треугольниками, звездочками.

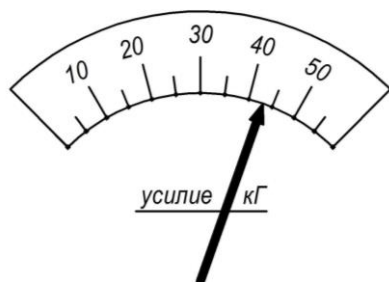
При графическом представлении результатов экспериментов существенную роль играют координатные сетки. Они бывают равномерными и неравномерными. У равномерных координатных сеток ординаты и абсциссы имеют равномерную шкалу. Например, в системе прямоугольных координат длина откладываемых единичных отрезков на обеих осях  $x$  и  $y$  одинаковые. Неравномерные сетки могут быть логарифмическими, полулогарифмическими, вероятностными. Их применяют для более наглядного представления.

## 1.6. Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение эксперимента, опыта, наблюдения.
2. Как различаются эксперименты?
3. Дайте определение активного и пассивного эксперимента.
4. Перечислите основные стадии эксперимента.
5. Что понимают под объектом исследования?
6. Какие основные задачи решают в ходе эксперимента?
7. К чему необходимо стремиться при проведении экспериментальных исследований?
8. Что называют факторами?
9. Как подсчитать число возможных различных опытов?
10. Какие требования предъявляются при выборе факторов?
11. Что понимают под параметром оптимизации, откликом, целевой функцией?
12. Сущность метода ранжирования.
13. Почему используют схему «черного ящика»?
14. Что называют абсолютной погрешностью? Что такое относительная погрешность?
15. Как изменяется коэффициент Стьюдента в зависимости от числа опытов и уровня значимости?
16. Назовите основные шаги при исключении промаха.
17. Приведите примеры систематических и случайных ошибок.
18. Что такое дисперсия? Для чего она применяется?
19. Что такое косвенные измерения? Как определить абсолютную погрешность косвенных измерений?
20. Что такое доверительный интервал? Что он показывает?
21. Как влияет увеличение числа опытов на доверительный интервал?
22. Что такое уровень значимости? Как влияет уровень значимости на доверительный интервал?
23. Каковы основные требования к построению графиков исследуемых процессов?
24. В каких случаях целесообразно применять узкие широкие и нормальные графики?
25. Какова роль эксперимента в научных исследованиях?
26. В чем суть вычислительного эксперимента?
27. Что такое измерение? Его виды.

## 1.7. Задачи и упражнения

1. Оценить точность измерения усилия на приборе.



2. В расчетных формулах часто используется число  $\pi = 3,1415926\dots$ . Число  $\pi$  трансцендентное. Как округлить число  $\pi$ , если  $\varepsilon = 5\%$ ?

3. При испытании на коррозию вес образца составлял 1,54 кг, а после испытаний – 1,52 кг. С какой точностью необходимо взвешивать образцы?

4. Найти погрешность измерения двух величин:

$$z = a + b;$$

$$z = a - b;$$

$$z = \frac{a}{b};$$

$$z = abc.$$

5. Определить абсолютную и относительную погрешность прямых измерений диаметра цилиндрического тела:

Вариант 1

| i          | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    | 10   |
|------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| $d_i$ , мм | 4,85 | 4,80 | 4,84 | 4,81 | 4,79 | 4,81 | 4,80 | 4,85 | 4,84 | 4,80 |

Вариант 2

| i          | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    | 10   |
|------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| $d_i$ , мм | 4,77 | 4,83 | 4,80 | 4,85 | 4,81 | 4,76 | 4,84 | 4,80 | 4,79 | 4,83 |

Расчет провести для двух значений уровня значимости  $\alpha = 0,05$  и  $\alpha = 0,10$ ,  $n = \Phi$  и  $n = \Phi + 5$ , где  $\Phi$  – число букв в фамилии студента.

6. Определить абсолютную и относительную погрешность косвенных измерений при расчете объема круглого цилиндра диаметром  $d$  и высотой  $h > d$ . Выявить промах при измерении высоты  $h$ . Результаты замера диаметра использовать из задачи 5. Результаты замеров высоты  $h$ , полученные с помощью штангенциркуля, приведены в таблице. Число замеров  $n = \Phi$ .

|            |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| i          | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   | 7   | 8   | 9   | 10  | 11  |
| $h_i$ , мм | 4,4 | 4,6 | 4,7 | 6,0 | 4,3 | 4,5 | 4,5 | 4,9 | 4,4 | 4,6 | 4,8 |

6. В табл. 1.6 приведены четыре возможных варианта измерений длин.

**Таблица 1.6.**

| Приборы        | Предел измерения, мм | Цена наименьшего деления, мкм | Измеряемая величина, мм | Относительная ошибка, % |
|----------------|----------------------|-------------------------------|-------------------------|-------------------------|
| Линейка        | 1000                 | 1000                          | 750                     |                         |
| Штангенциркуль | 150                  | 100                           | 100                     |                         |
| Микрометр      | 25                   | 10                            | 20                      |                         |
| Микроскоп      |                      | 5                             | 0,5                     |                         |

Найти относительную ошибку измерений.

## 2. АППРОКСИМАЦИЯ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Методы аппроксимации осуществляют путем подбора, по возможности, простых аналитических формул, с достаточной степенью точности отображающих экспериментально полученные зависимости. Чаще всего вид общей формулы заранее неизвестен.

Процесс подбора формул складывается из двух этапов: определение структуры формулы и нахождения эмпирических коэффициентов. В качестве аппроксимирующих обычно употребляют следующие функции: алгебраические (дробно-рациональные, рациональные, иррациональные) и трансцендентные (тригонометрические, логарифмические, показательные).

По характеру расположения экспериментальных точек на графике или анализа теоретической информации всегда можно установить примерный вид изучаемой зависимости.

Результаты экспериментов содержат случайные ошибки, поэтому нельзя требовать, чтобы подобранная формула точно соответствовала всем экспериментальным точкам. Другими словами, график искомой функции не должен проходить через все точки. Желательно, чтобы отклонения результатов эксперимента от значений, вычисленных по формуле, были как можно меньше.

Пусть в результате эксперимента получен ряд измерений, величин  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ , соответствующих значениям аргумента  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ , которые на графике представлены в виде точек. Необходимо установить эмпирическую зависимость между  $X$  и  $Y$ . При этом принимают следующие допущения:

1) все значения переменной  $X_i$  являются точными, т.е. ошибками в их экспериментальном определении можно пренебречь.

2) результаты эксперимента  $Y_1; Y_2; \dots; Y_n$  являются независимыми случайными величинами, подчиняющимися нормальному закону распределения.

Уравнения, связывающие случайную величину  $Y$  с неслучайной  $X$ , называются уравнениями регрессии, по предложению Френ-сиса Гамильтона.

## 2.1. Метод средних

По методу средних или среднеарифметическому методу требуется, чтобы сумма разностей между значениями расчетной искомой величины  $Y_i$  и экспериментальными ее значениями  $Y_{\text{э}i}$  равнялась нулю:

$$\sum_{i=1}^n (Y_i - Y_{\text{э}i}) = 0.$$

Пусть экспериментальная зависимость на рис. 2.1 аппроксимируется уравнением прямой вида:

$$Y_i = aX_i,$$

где  $a$  – постоянная, подлежащая определению.

По среднеарифметическому методу имеем:

$$\sum_{i=1}^n (Y_{\text{э}i} - Y_i) = \sum_{i=1}^n (Y_{\text{э}i} - aX_i) = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n Y_{\text{э}i} = a \sum_{i=1}^n X_i = 0 \rightarrow a = \frac{\sum_{i=1}^n Y_{\text{э}i}}{\sum_{i=1}^n X_i}.$$

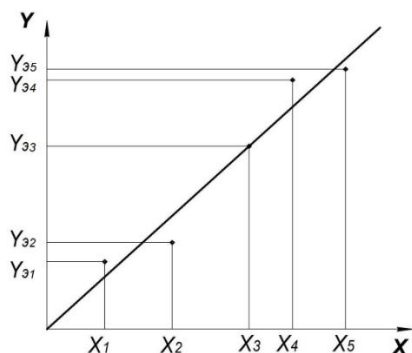


Рис. 2.1. Аппроксимация экспериментальных точек линейным уравнением вида  $Y = aX$

Пусть экспериментальная зависимость на рис. 2.2 аппроксимируется уравнением прямой вида

$$Y_i = aX_i + b,$$

где  $a$  и  $b$  – неизвестные параметры, подлежащие определению.

По среднеарифметическому методу

$$\sum_{i=1}^n (Y_{\text{э}i} - Y_i) = \sum_{i=1}^n (Y_{\text{э}i} - (aX_i + b)) = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n Y_{\text{э}i} - a \sum_{i=1}^n X_i - b_n = 0.$$

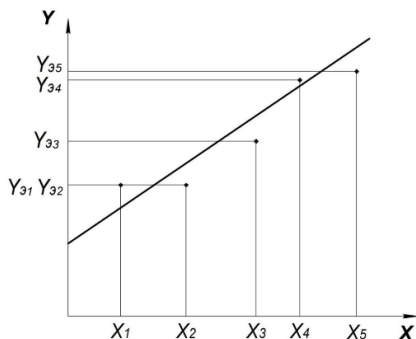


Рис. 2.2. Аппроксимация экспериментальных точек уравнением вида  $Y = aX + b$

Так для определения коэффициентов  $a$  и  $b$  требуется два уравнения, то разобьем данные опытов на две группы с примерно одинаковым (если  $n$ -нечетное) или одинаковым (если  $n$ -четное) числом опытов. Тогда получим два уравнения:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{0,5n} Y_{\text{э}i} - a \sum_{i=1}^{0,5n} X_i - 0,5b_n = 0, \\ \sum_{i=0,5n+1}^n Y_{\text{э}i} - a \sum_{i=0,5n+1}^n X_i - 0,5b_n = 0. \end{cases}$$

Решая систему двух уравнений, получим значения коэффициентов  $a$  и  $b$ .

Для описания экспериментальных точек, изображенных на рис. 2.3, при нелинейной аппроксимации можно использовать квадратичную зависимость

$$Y = aX^2 + bX + c.$$

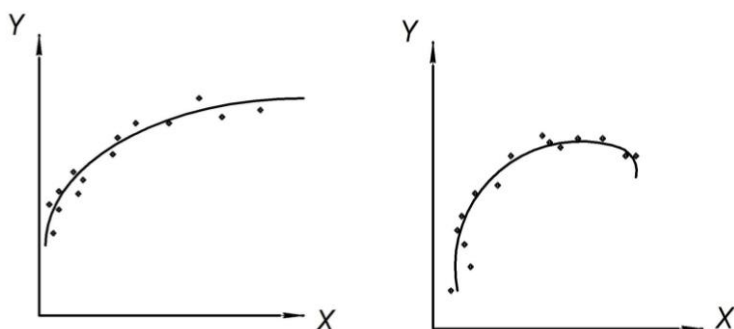


Рис. 2.3. Использование квадратичной аппроксимации

По среднеарифметическому методу имеем:

$$\sum_{i=1}^n (Y_{\text{э}i} - aX_i^2 - bX_i - c) = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n Y_{\text{э}i} = a \sum_{i=1}^n X_i^2 + b \sum_{i=1}^n X_i + nc.$$

Так как для определения трех постоянных  $a$ ,  $b$ ,  $c$  требуется три уравнения, то данные опытов разбивают на три примерно равные по числу опытов группы и составляют три уравнения.

Другие примеры подбора функций показаны на рис. 2.4.

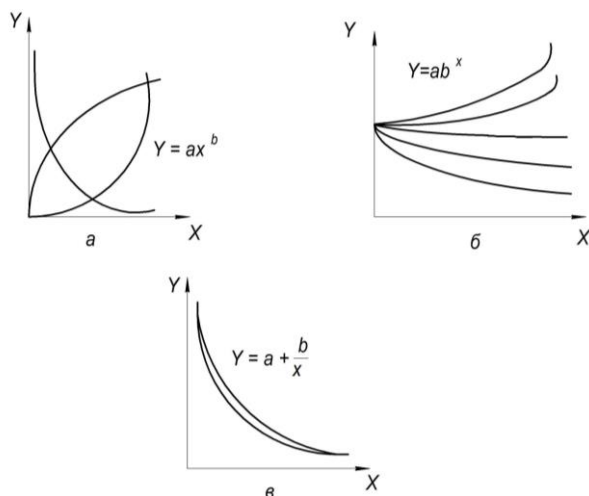


Рис. 2.4. Примеры использования нелинейных аппроксимаций

## 2.2. Метод наименьших квадратов

По методу наименьших квадратов (МНК), разработанному Гауссом более 170 лет назад, требуется, чтобы сумма квадратов разностей между значениями искомой величины, определенными по найденной формуле, и экспериментальными ее значениями была минимальной:

$$\sum_{i=1}^n (Y_{\text{э}i} - Y_i)^2 \Rightarrow \min.$$

Для уравнения прямой вида  $Y_i = a X_i$  по методу наименьших квадратов:

$$\sum_{i=1}^n (Y_{\text{э}i} - Y_i)^2 = \sum_{i=1}^n (Y_{\text{э}i} - aX_i)^2 \Rightarrow \min.$$

Для определения значения  $a$  надо взять производную по  $a$  от этой суммы и приравнять к нулю ( $n$ -число измерений):

$$\frac{d}{da} \sum_{i=1}^n (Y_{\text{э}i} - aX_i)^2 = 0; \quad \sum_{i=1}^n (Y_{\text{э}i} - aX_i)X_i = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n Y_{\text{э}i}X_i = a \sum_{i=1}^n X_i^2; \quad a = \frac{\sum_{i=1}^n Y_{\text{э}i}X_i}{\sum_{i=1}^n X_i^2}.$$

Для уравнения прямой вида  $Y_i = aX_i + b$  по методу наименьших квадратов

$$\sum_{i=1}^n (Y_{\text{э}i} - aX_i)^2 = \sum_{i=1}^n (Y_{\text{э}i} - (aX_i + b))^2 \Rightarrow \min.$$

Минимум этой функции достигается при одновременном равенстве нулю частных производных по  $a$  и  $b$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{da} \sum_{i=1}^n (Y_{\text{э}i} - (aX_i + b))^2 = 0, \\ \frac{d}{db} \sum_{i=1}^n (Y_{\text{э}i} - (aX_i + b))^2 = 0, \end{array} \right.$$

или

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n (Y_{\text{э}i} - (aX_i + b))X_i = 0, \\ \sum_{i=1}^n (Y_{\text{э}i} - (aX_i + b)) = 0. \end{array} \right.$$

После преобразований получаем:

$$\left\{ \begin{array}{l} a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_{\text{э}i}x_i \\ a \sum_{i=1}^n x_i + bn = \sum_{i=1}^n y_{\text{э}i} \end{array} \right.$$

Окончательные формулы для вычисления коэффициентов  $a$  и  $b$  можно найти с помощью определителей по формуле Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & n \end{vmatrix} \quad \Delta_a = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^n y_{\exists i} & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n y_{\exists i} & n \end{vmatrix} \quad \Delta_b = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n y_{\exists i} x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n y_{\exists i} \end{vmatrix};$$

$$a = \frac{\Delta_a}{\Delta} = \frac{n \sum_{i=1}^n y_{\exists i} x_i - \sum_{i=1}^n y_{\exists i} \sum_{i=1}^n x_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2};$$

$$b = \frac{\Delta_b}{\Delta} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_{\exists i} - \sum_{i=1}^n y_{\exists i} x_i \sum_{i=1}^n x_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2}.$$

При нахождении параметров нелинейной зависимости имеем

$$\sum_{i=1}^n (y_{\exists i} - ax_i^2 - bx_i - c)^2 \Rightarrow \min.$$

Дифференцируя это соотношение по а, б и с, получаем соответственно уравнения

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n (y_{\exists i} - ax_i^2 - bx_i - c)x_i^2 = 0, \\ \sum_{i=1}^n (y_{\exists i} - ax_i^2 - bx_i - c)x_i = 0, \\ \sum_{i=1}^n (y_{\exists i} - ax_i^2 - bx_i - c) = 0. \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i + cn = \sum_{i=1}^n y_{\exists i}, \\ a \sum_{i=1}^n x_i^3 + b \sum_{i=1}^n x_i^2 + c \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_{\exists i} x_i, \\ a \sum_{i=1}^n x_i^4 + b \sum_{i=1}^n x_i^3 + c \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n y_{\exists i} x_i^2. \end{cases}$$

Из этой схемы можно найти значения  $a$ ,  $b$  и  $c$ .

Результаты вычислений сводят в таблицу:

| i              | $X_i$ | $Y_{\Xi i}$ | $X_i^2$ | $X_i^3$ | $X_i^4$ | $y_{\Xi i} X_i$ | $y_{\Xi i} X_i^2$ |
|----------------|-------|-------------|---------|---------|---------|-----------------|-------------------|
| 1              |       |             |         |         |         |                 |                   |
| 2              |       |             |         |         |         |                 |                   |
| 3              |       |             |         |         |         |                 |                   |
| $\sum_{i=1}^n$ |       |             |         |         |         |                 |                   |

МНК позволяет находить константы более сложных зависимостей, например, экспоненциальных:  $y = ae^{-bx}$ ,  $z = cx^a y^\beta$

После логарифмирования пришли к линейному уравнению:  
 $\ln y = \ln a - bx$ , или  $y^* = a^* - bx$ , где  $y^* = \ln y$ ;  $a^* = \ln a$

### 2.3. Аппроксимация в виде системы линейно независимых функций

Применяется, когда вид функции заранее не известен. Пусть:

$$y = f(x_i, a_0, a_1, \dots, a_m) = a_0 \varphi_0(x_i) + a_1 \varphi_1(x_i) + \dots + a_m \varphi_m(x_i)$$

где  $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_m$  – ортогональные многочлены Чебышева на множестве точек  $X_1, X_2, \dots, X_n$ .

Условие ортогональности:

$$\sum_{i=1}^n \varphi_j(x_i) \varphi_k(x_i) = 0 \text{ при } j \neq k.$$

Согласно МНК:

$$\sum_{i=1}^n [y_{\Xi i} - f(x_i; a_0, a_1, \dots, a_m)] \rightarrow \min,$$

откуда:

$$a_0 = \frac{1}{H_0} \sum_{i=1}^n y_{\Xi i} a \varphi_0(x_i), H_0 = \sum_{i=1}^n \varphi_0^2(x_i);$$

$$a_1 = \frac{1}{H_1} \sum_{i=1}^n y_{\exists i} a \varphi_1(x_i), H_1 = \sum_{i=1}^n \varphi_1^2(x_i);$$

$$a_m = \frac{1}{H_m} \sum_{i=1}^n y_{\exists i} a \varphi_m(x_i), H_m = \sum_{i=1}^n \varphi_m^2(x_i).$$

Оценка любого параметра  $\alpha_i$  зависит только от соответствующей базисной функции  $\varphi(x_i)$ . Сами базисные функции удобно выбирать в виде многочленов:

$$\varphi_0(x) = 1;$$

$$\varphi_1(x) = x + \alpha;$$

$$\varphi_2(x) = x^2 + \beta x + \gamma \text{ и т. д.}$$

Коэффициенты  $\alpha, \beta, \gamma$  выбирают из условия ортогональности:

$$\sum_{i=1}^n \varphi_0(x_i) \varphi_1(x_i) = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n \varphi_0(x_i) \varphi_2(x_i) = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n \varphi_1(x_i) \varphi_2(x_i) = 0.$$

Полученные отношения проиллюстрируем примером.

Известна экспериментальная зависимость предела прочности от размера  $d[\text{мм}]$  зерна рекристаллизованного металла (см. табл. 2.1).

Произведем линейное преобразование переменных:

$$x = \frac{d - 30}{10}; y = \sigma_b - 44.$$

Примем линейную модель вида  $y = b_0 \varphi_0(x) + b_1 \varphi_1(x)$  с базисными функциями

$$\varphi_0(x) = 1; \varphi_1(x) = x + a.$$

Из условия ортогональности найдем  $\alpha$ :

$$\sum_{i=1}^n \varphi_0(x_i) \varphi_1(x_i) = \sum_{i=1}^n x_i + 9\alpha = 0.$$

В силу симметрии  $\sum_{i=1}^n x_i = 0$ , поэтому  $\alpha = 0, \varphi_1(x_i) = x_i$ .

По методу наименьших квадратов находим параметры  $b_0, b_1$ :

$$b_0 = \frac{1}{H_0} \sum_{i=1}^n y_i \varphi_0(x_i) = -\frac{4,9}{9} = -0,544, H_0 = \sum_{i=1}^n \varphi_0^2(x_i) = n = 9;$$

$$b_1 = \frac{1}{H_1} \sum_{i=1}^n y_i \varphi_1(x_i) = -\frac{66,1}{180} = -0,367, H_1 = \sum_{i=1}^n \varphi_1^2(x_i) = 180.$$

Таким образом получена линейная зависимость вида  $y = -0,544 - 0,367x$ .

Примем квадратичную модель вида  $y = b_0\varphi_0(x) + b_1\varphi_1(x) + b_2\varphi_2(x)$ , где:

$$\varphi_0(x) = 1, \varphi_1(x) = x, \varphi_2(x) = x^2 + \beta x + \gamma.$$

Из условия ортогональности получим:

$$\sum_{i=1}^n \varphi_0(x_i) \varphi_2(x_i) = \sum_{i=1}^n x_i^2 + \beta \sum_{i=1}^n x_i + 9\gamma = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n \varphi_1(x_i) \varphi_2(x_i) = \sum_{i=1}^n x_i^3 + \beta \sum_{i=1}^n x_i^2 + \gamma \sum_{i=1}^n x_i = 0;$$

$$\beta = 0, \gamma = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{9} = -\frac{180}{9} = -20.$$

Следовательно,  $\varphi_2(x_i) = x^2 - 20$

Найдем  $b_2$ :  $b_2 = \frac{1}{H_2} \sum_{i=1}^n \varphi_i \varphi_2(x_i) = \frac{83,1}{5268} = +0.0158$ , где:

$$H_2 = \sum_{i=1}^n \varphi_2^2(x_i) = 5268.$$

Тогда квадратичная зависимость примет вид:

$$b_2 = -0.544 - 0.367x + 0.0158(x^2 - 20) \\ = -0.860 - 0.367x + 0.0158x^2.$$

Порядок и результаты проведенных расчетов представлены в табл. 2.1 и на рис. 2.5.

**Таблица 2.1. Расчет аппроксимации при помощи линейно независимых функций**

| n        | d   | $\sigma_b$ | $X_i = \phi_1$ | $Y_i = Y_{\phi 0}$ | $Y_i X_i = Y_{i\phi 1}$ | $\phi_2$ | $Y\phi_2$ | Линейная модель           |                | Квадратичная модель       |                |
|----------|-----|------------|----------------|--------------------|-------------------------|----------|-----------|---------------------------|----------------|---------------------------|----------------|
|          |     |            |                |                    |                         |          |           | $Y_{расч}$                | $y - y_{расч}$ | $Y_{расч}$                | $y - y_{расч}$ |
| 1        | 50  | 47,1       | -8             | 3,1                | -24,7                   | 44       | 135,8     | 2,392                     | 0,695          | 3,087                     | 0,018          |
| 2        | 90  | 44,8       | -4             | 0,9                | -3,4                    | -4       | -3,4      | 0,924                     | -0,063         | 0,861                     | -0,063         |
| 3        | 100 | 44,4       | -3             | 0,4                | -1,1                    | -11      | -4,2      | 0,557                     | -0,174         | 0,383                     | 0,018          |
| 4        | 120 | 43,6       | -1             | -0,5               | 0,5                     | -19      | 9,1       | -0,177                    | -0,300         | -0,477                    | 0,077          |
| 5        | 130 | 43,2       | 0              | -0,9               | 0,0                     | -20      | 17,2      | -0,544                    | -0,316         | -0,860                    | 0,06           |
| 6        | 140 | 42,6       | 1              | -1,2               | -1,2                    | -19      | 23,0      | -0,911                    | -0,300         | -1,211                    | -0,189         |
| 7        | 160 | 42,3       | 3              | -1,8               | -5,5                    | -11      | 20,0      | -1,645                    | -0,174         | -1,819                    | 0,118          |
| 8        | 170 | 41,9       | 4              | -2,1               | -8,3                    | -4       | 8,3       | -2,012                    | -0,063         | -2,075                    | -0,022         |
| 9        | 210 | 41,2       | 8              | -2,8               | -22,3                   | 44       | -122,5    | -3,48                     | 0,695          | -2,785                    | -0,022         |
| $\Sigma$ |     |            | 180            | -4,9               | -66,1                   | 5268     | 83,2      | -4,896                    | 1,315          | -4,896                    | 0,0648         |
|          |     |            | $H_1$          |                    |                         | $H_2$    |           | $\Sigma (y - y_{расч})^2$ |                | $\Sigma (y - y_{расч})^2$ |                |

$$S^2 = \frac{1}{n - (m + 1)} \sum_{i=1}^n (y_i - y_{ipac})^2.$$

Тогда для линейной модели  $S^2 = \frac{1.371}{7} = 0,196$ ;  
 $S = 0.422$ , а для квадратичной  $S^2 = \frac{0.649}{6} = 0.0108$ ;  $S = 0.1039$ .

## 2.4. Сглаживание исходной информации

Сглаживание исходной информации – это замена таблицы опытных точек другой таблицей близких к ним точек, лежащих на достаточно гладкой кривой. Операция сглаживания неразрывно связана с аппроксимацией и может быть выполнена для всей области или локально.

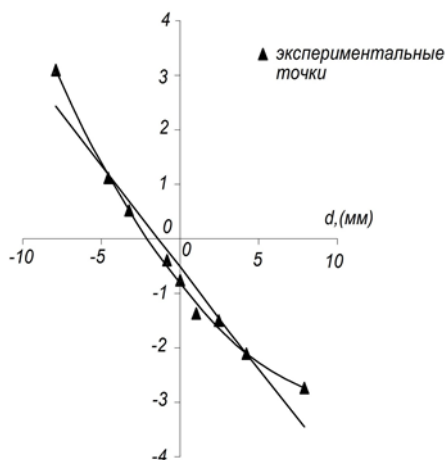


Рис. 2.5. Линейная и квадратичная аппроксимации

Сглаживание применяют:

- для устранения ошибок замеров, что необходимо для численного дифференцирования или интегрирования экспериментальных данных;

- если количество экспериментальных точек велико, то подбор эмпирической формулы может оказаться весьма затруднительным.

Сглаживание производится с помощью многочленов (рис. 2.6). Наилучшее сглаживание получается для средних точек, когда учитывается информация о поведении функции по обе стороны сглаживаемой точки. Количество точек для сглаживания выбирают нечетным.

Линейным сглаживанием называется сглаживание многочленом первой степени.

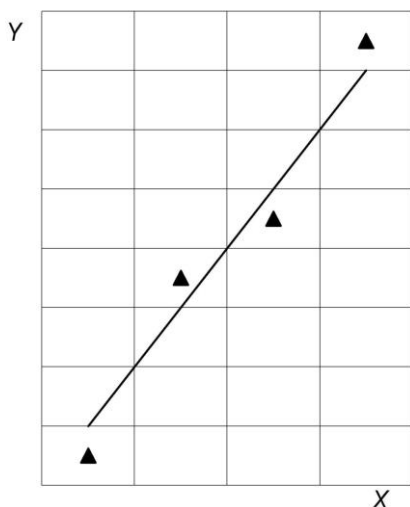


Рис. 2.6. Сглаживание экспериментальных точек

Формулы линейного сглаживания по трем точкам:

$$\tilde{y}_0 = \frac{1}{3}(y_{-1} + y_0 + y_1);$$

$$\tilde{y}_{-1} = \frac{1}{6}(5y_{-1} + 2y_0 - y_1);$$

$$\tilde{y}_1 = \frac{1}{6}(-y_{-1} + 2y_0 + 5y_1).$$

В этих формулах приняты следующие обозначения. Средней точке приписывается индекс «0», симметричные точки получают при этом индекс  $\pm 1$ . Сглаженные значения обозначаются волнистой чертой сверху. Основной формулой служит формула сглаживания средней точки, т.е. формула для  $\tilde{y}_0$ . Остальные формулы используются для экспериментальных данных, расположенных на внешнем контуре таблицы результатов измерений.

### Пример

| Исходные данные |     | Сгл.данные |
|-----------------|-----|------------|
| X               | y   | y          |
| 0               | 431 | 424        |
| 1               | 409 | 423        |
| 2               | 429 | 420        |
| 3               | 422 | 460        |
| 4               | 530 | 486        |

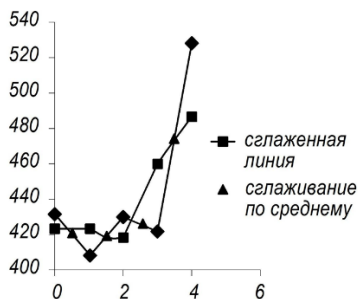


Рис. 2.7. Виды сглаживания

## 2.5. Вопросы для самопроверки

1. Что такое аппроксимация?
2. Что такое уравнение регрессии?
3. Для чего применяется аппроксимация экспериментальных данных?

4. В чем заключается метод средних?
5. Каковы основные шаги при аппроксимации методом наименьших квадратов?
6. Что общего и в чем различие между методами независимых функций и наименьших квадратов?
7. Какие функции называются линейно независимыми?
8. Как влияет количество экспериментальных точек на точность аппроксимации?
9. Как оценить точность используемого метода аппроксимации?
10. Перечислите достоинства и недостатки методов средних, наименьших квадратов и независимых функций
11. Что такое сглаживание? Для чего оно применяется?
12. Какие виды аппроксимаций можно находить методами средних, наименьших квадратов и независимых функций?
13. Что такое полиномы Чебышева? В чем заключается их ортогональность?
14. Как определить вид аппроксимируемой зависимости?
15. Какое минимальное число экспериментальных точек можно аппроксимировать методом наименьших квадратов?
16. Какое максимальное число экспериментальных точек можно аппроксимировать методом средних?
17. Какой метод аппроксимации следует использовать для аппроксимации зависимости вида  $y = ae^{-x}$ ?

## 2.6. Задачи и упражнения

2.1. Провести аппроксимацию экспериментальных данных, приведенных в таблице,

|                 |    |     |    |     |    |     |    |     |    |     |    |     |     |
|-----------------|----|-----|----|-----|----|-----|----|-----|----|-----|----|-----|-----|
| i               | 1  | 2   | 3  | 4   | 5  | 6   | 7  | 8   | 9  | 10  | 11 | 12  | 13  |
| X <sub>i</sub>  | 1  | 1,5 | 2  | 2,5 | 3  | 3,5 | 4  | 4,5 | 5  | 5,5 | 6  | 6,5 | 7   |
| Y <sub>эi</sub> | 12 | 13  | 17 | 24  | 28 | 37  | 48 | 59  | 70 | 83  | 97 | 122 | 145 |

в следующей последовательности:

1. Построить в масштабе экспериментальные точки в координатах  $x$ - $y$ . Число экспериментальных точек совпадает с количеством букв в фамилии студента.

2. Определить примерный вид математической функции, описывающей экспериментальные данные.

3. Найти постоянные среднеарифметическим методом.

4. Найти постоянные методом наименьших квадратов.

Показать, какая из полученных эмпирических формул более точная, используя в качестве критерия среднеквадратичное отклонение, рассчитываемое по формуле:

$$S = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n (Y_{iэ} - Y_{расч})^2}}{n}.$$

## 3. ПОСТРОЕНИЕ ПЛАНА МНОГОФАКТОРНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

### 3.1. Планирование факторного эксперимента

План эксперимента строится в зависимости от вида принятой модели, числа опытов и ряда специальных требований, предъявляемых к описательным свойствам модели.

Исходя из порядка принятой модели, различают соответственно планы первого и второго порядков. Планы первого порядка называют еще двухуровневыми, так как факторы в этих планах варьируются на двух уровнях ( $P = 2$ ). Планы второго порядка предусматривают варьирование факторов на трех уровнях и называются поэтому трехуровневыми ( $P = 3$ ). Если все факторы в соответствии с планом варьируются на одинаковом числе уровней, то они называются симметричными.

Наиболее широкое применение получили планы, в которых каждый фактор варьируется на двух уровнях и реализуется полный набор из  $2^K$  комбинаций уровней факторов. Такие планы называются полными факторными типа  $2^K$ .

Каждый фактор, участвующий в процессе, имеет вполне определенный разумный предел изменения своей величины. В связи с этим при математическом планировании эксперимента необходимо прежде всего оценить реальные границы областей определения факторов. Затем на основании априорной (полученной до начала эксперимента из литературных источников или предыдущих исследований) информации устанавливаются такие значения уровней факторов, которым соответствовал наилучший результат параметра оптимизации. Эти уровни принимают за исходные при построении плана эксперимента и называют *основными уровнями*.

Верхний и нижний уровни факторов устанавливают путем соответственно прибавления к основному уровню или вычитания из него некоторого числа  $\Delta X_i$ , называемого **интервалом варьирования факторов**:

$$\Delta X_i = \frac{X_{j \max} - X_{j \min}}{2}. \quad (3.1)$$

При выборе интервала варьирования необходимо иметь в виду, что он должен быть, с одной стороны, больше ошибки фиксирования уровня фактора; с другой стороны, его необходимо ограничить сверху, чтобы не выйти за пределы области определения факторов. Принято считать интервал варьирования узким, если он составляет не более 10% от области определения фактора; не более 30% – средним, а в остальных случаях – широким.

Для упрощения записи условий каждого опыта и обработки экспериментальных данных масштабы по интервалам изменения факторов выбирают таким образом, чтобы верхний уровень соответствовал плюсу единице, нижний – минус единице, а основной – нулю.

Поскольку факторы, воздействующие на объект исследования, неоднородны и имеют различные единицы измерения, а числа, выражающие величины факторов, имеют различные порядки, их следует привести к единой системе исчисления путем перехода от натуральных значений факторов к кодированным:

$$X_j = \frac{\tilde{X}_j - \tilde{X}_{oj}}{\Delta \tilde{X}_j}, \quad (3.2)$$

где  $X_j$  – кодированное значение  $j$ -го фактора;  $\tilde{X}_j$  – натуральное значение  $j$ -го фактора натуральное значение основного уровня фактора,  $\Delta \tilde{X}_j$  интервал варьирования  $j$ -го фактора.

Руководствуясь рассмотренными понятиями и определениями, условие проведения  $\tilde{X}_{oj}$  – эксперимента можно записать в виде таблицы, где строки соответствуют различным опытам, а столбцы – значениям факторов. Такие таблицы называют матрицами планирования эксперимента. Каждый столбец в матрице планирования называют вектор-столбцом, а каждую строку – вектор-строкой.

### 3.2. Полный факторный эксперимент

Матрица планирования и соответствующий ей эксперимент, в котором реализуются все возможные сочетания уровней факторов, называется полным факторным экспериментом (ПФЭ).

Матрица планирования полного факторного эксперимента  $2^2$  с дублированием каждого опыта  $m$  раз представлена в табл. 3.1.

Таблица 3.1. Матрица планирования типа  $2^2$

| Номер опыта | Кодированные значения факторов |       |       |          | Результаты дублированных опытов |          |      |          |
|-------------|--------------------------------|-------|-------|----------|---------------------------------|----------|------|----------|
|             | $X_0$                          | $X_1$ | $X_2$ | $X_1X_2$ | $Y_1$                           | $Y_2$    | .... | $Y_m$    |
| 1           | +1                             | -1    | -1    | +1       | $Y_{11}$                        | $Y_{21}$ | .... | $Y_{m1}$ |
| 2           | +1                             | +1    | -1    | -1       | $Y_{22}$                        | $Y_{22}$ | .... | $Y_{m2}$ |
| 3           | +1                             | -1    | +1    | -1       | $Y_{31}$                        | $Y_{32}$ | .... | $Y_{m3}$ |
| 4           | +1                             | +1    | +1    | +1       | $Y_{41}$                        | $Y_{42}$ | .... | $Y_{m4}$ |

Для упрощения матрицы планирования единицы, как правило, опускаются.

При построении матрицы планирования целесообразно пользоваться следующей системой чередования знаков: в первом столбце таблицы знаки уровней меняются поочередно (+ – + – и т.д.); во втором – чередуются через два (- -+ +- – и т.д.); в третьем – через четыре (- - - + + +) и т.д. по степеням двойки.

Вектор-столбец эффектов взаимодействий  $X_1X_2$  строится путем перемножения столбцов взаимодействующих факторов.

Известно, что построенная матрица планирования обеспечивает получение качественной математической модели (с наилучшими оценками коэффициентов регрессии) в том случае, если ее план имеет свойства симметричности, нормированности, ортогональности и ротабельности.

Симметричность плана – алгебраическая сумма элементов вектор-столбца каждого фактора равна нулю, т.е.  $\sum_{i=1}^N X_{ij} = 0$ , где  $N$  – число опытов  $j=1,2,...,k$  – номер фактора.

Нормированность плана – сумма квадратов элементов каждого столбца равна числу опытов, т.е.  $\sum_{i=1}^n X_{ji} = N$ .

Ортогональность плана – сумма построчных произведений любых двух вектор-столбцов матрицы равна нулю т.е.

$$\sum_{i=1}^n X_{ji}X_{ui} = 0.$$

Ротабельность плана – свойство, обеспечивающее возможность предсказания значений параметра оптимизации с одинаковой точностью в любых направлениях  $x$  от центра эксперимента.

В случае планирования двухфакторного эксперимента  $2^2$  с эффектом взаимодействия факторов применима следующая математическая модель процесса:

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{12}x_1x_2. \quad (3.3)$$

Целью реализации эксперимента по данному плану является фиксирование параметра оптимизации с последующим вычислением неизвестных коэффициентов модели  $b_j$  по формуле, полученной методом наименьших квадратов:

$$b_j = \frac{\sum_{i=1}^n X_{ji}y_i}{N}. \quad (3.4)$$

Благодаря кодированию факторов коэффициенты  $b_1$ ,  $b_2$  и  $b_{12}$  находятся по формуле простым арифметическим подсчетом. Например,

$$b_1 = \frac{(-1)Y_1 + (+1)Y_2 + (-1)Y_3 + (+1)Y_4}{4}.$$

Аналогичным способом находится и коэффициент  $b_0$  – это среднее арифметическое значение параметра оптимизации. Чтобы привести процедуру вычисления  $b_0$  в соответствие с формулой (3.4), в матрицу планирования вводят (см. табл. 3.1) дополнительный вектор-столбец фиктивной переменной  $X_0$ , которая во всех опытах принимает значение +1.

Коэффициент модели  $b_j$  указывает на степень влияния соответствующего фактора. Чем больше абсолютная величина коэф-

фициентов, тем большее влияние оказывает фактор на параметр оптимизации  $Y$ . Если коэффициент имеет знак плюс, то с увеличением значения фактора увеличивается и параметр оптимизации, а если минус, то уменьшается.

### 3.3. Дробный факторный эксперимент

Полный факторный эксперимент позволяет получить весьма обширную информацию об объекте исследования и упростить анализ его состояний, построив полиномиальную модель. Необходимым и достаточным условием расчета коэффициентов этой модели является равенство числа опытов количеству определяемых коэффициентов. Однако с ростом числа факторов  $k$  число опытов возрастает по показательной функции  $N=2^k$ , а число коэффициентов  $b_j$ , в случае линейной модели увеличивается по линейному закону  $(b_{j-1}+k)$ . Поэтому, начиная с  $k \geq 3$ , проведение ПФЭ, в силу резкого увеличения количества опытов, становится нецелесообразным, так как число опытов превышает число искомых коэффициентов регрессии:  $N \gg \sum_{i=1}^{1+k} b_j; j = 0, 1, 2, \dots, k$ . Это создает объективные предпосылки для уменьшения количества опытов. С этой целью при планировании экспериментов с большим количеством факторов ( $k > 3$ ) используют только часть матрицы полного факторного эксперимента, которую называют дробной репликой ПФЭ или планом дробного факторного эксперимента (ДФЭ). Такой план обеспечивает минимальную разницу между числом опытов в эксперименте и количеством оцениваемых параметров линейной модели.

Рассмотрим пример сокращения числа опытов при изучении влияния на процесс трех факторов. План ПФЭ с эффектами взаимодействия при двукратном повторении опытов будет иметь следующий вид (табл. 3.2).

Результатам экспериментов, выполненных по плану такой матрицы, будет отвечать следующий полином:

$$Y = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + b_3X_3 + b_{12}X_1X_2 + b_{13}X_1X_3 +$$

$$+b_{23}X_2X_3 + b_{123}X_1X_2X_3 \quad (3.5)$$

Если из анализа априорной информации ясно, что эффекты взаимодействия факторов в исследуемом процессе отсутствуют или пренебрежимо малы, то коэффициенты  $b_j$  в уравнении (3.5) при парных и тройных взаимодействиях будут стремиться к нулю, а для описания процесса достаточно линейной части полинома (3.5):

$$Y = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + b_3X_3 \quad (3.6)$$

Таблица 3.2. Матрицы планирования  $2^3$

| Номер опыта | Кодированные значения факторов |       |       |       | Результаты дублированных опытов |          |          |             | Результаты опытов |          |           |
|-------------|--------------------------------|-------|-------|-------|---------------------------------|----------|----------|-------------|-------------------|----------|-----------|
|             | $X_0$                          | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $X_1X_2$                        | $X_1X_3$ | $X_2X_3$ | $X_1X_2X_3$ | $Y_1$             | $Y_2$    | $\bar{Y}$ |
| 1           | +                              | -     | -     | -     |                                 | +        | +        | -           | $Y_{11}$          | $Y_{21}$ | $Y_1$     |
| 2           | +                              | +     | -     | -     | -                               | -        | +        | +           | $Y_{12}$          | $Y_{22}$ | $Y_2$     |
| 3           | +                              | -     | +     | -     | -                               | +        | -        | +           | $Y_{13}$          | $Y_{23}$ | $Y_3$     |
| 4           | +                              | +     | +     | -     | +                               | -        | -        | -           | $Y_{14}$          | $Y_{24}$ | $Y_4$     |
| 5           | +                              | -     | -     | +     | +                               | -        | -        | +           | $Y_{15}$          | $Y_{25}$ | $Y_5$     |
| 6           | +                              | +     | -     | +     | -                               | +        | -        | -           | $Y_{16}$          | $Y_{26}$ | $Y_6$     |
| 7           | +                              | -     | +     | +     | -                               | -        | +        | -           | $Y_{17}$          | $Y_{27}$ | $Y_7$     |
| 8           | +                              | +     | +     | +     | +                               | +        | +        | +           | $Y_{18}$          | $Y_{28}$ | $Y_8$     |

Модель (3.6), как видим, практически идентична уравнению (3.3), полученному при двух ном эксперименте с эффектом взаимодействия. Только вместо независимой переменной  $x_3$  в выражении (3.3) присутствует произведение факторов  $X_1X_2$ . Если же, как было отмечено, эффект парного взаимодействия  $X_1X_2$  отсутствует и, следовательно, коэффициент  $b_{12} \rightarrow 0$ , то в вектор-столбец  $X_1X_2$  в матрице планирования  $2^2$  (табл. 3.1) оказывается лишним. Используя этот вектор-столбец для нового фактора  $X_3$ , мы получим матрицу планирования трехфакторного эксперимента типа  $2^3$  (табл. 3.3), имеющую всего четыре опыта вместо восьми, но позволяющую рассчитать все коэффициенты модели (3.5а). Полученная таким образом матрица планирования и называется планом ДФЭ, в данном конкретном случае – полуреplikой ПФЭ и обозначается  $N=2^{3-1}$ .

В общем случае ДФЭ условно обозначают как  $N=2^{k-q}$ , где  $q$  – число линейных эффектов, приравненных к эффектам взаимодействия. При  $q=1$  получаем  $\frac{1}{2}$  ПФЭ (полуреплика), при  $q=2$  –  $\frac{1}{4}$  ПФЭ (четверть реплики) и т.д. по степени двойки.

При построении матриц планирования ДФЭ необходимо иметь в виду, что знаки уровней новых факторов, вводимых в план вместо эффектов взаимодействий, выбираются не произвольно, а должны соответствовать знакам столбцов тех взаимодействий, вместо которых они вводятся.

Таблица 3.3. Матрицы планирования ДФЭ типа  $2^{3-1}$

| Номер опыта | Кодированные значения факторов |       |       |                | Результаты опытов |          |           |
|-------------|--------------------------------|-------|-------|----------------|-------------------|----------|-----------|
|             | $X_0$                          | $X_1$ | $X_2$ | $X_3 = X_1X_2$ | $Y_1$             | $Y_2$    | $\bar{Y}$ |
| 1           | +                              | -     | -     | -              | $Y_{11}$          | $Y_{21}$ | $Y_1$     |
| 2           | +                              | +     | -     | -              | $Y_{12}$          | $Y_{22}$ | $Y_2$     |
| 3           | +                              | -     | +     | -              | $Y_{13}$          | $Y_{23}$ | $Y_3$     |
| 4           | +                              | +     | +     | -              | $Y_{14}$          | $Y_{24}$ | $Y_4$     |

Для составления плана дробного факторного эксперимента следует брать ближайший полный факторный эксперимент, число опытов, в котором больше числа факторов.

Так, на основе плана ПФЭ типа  $2^2$ , имеющего лишь один эффект взаимодействия  $X_1X_2$ , может быть построено лишь две матрицы планирования ДФЭ типа  $2^{3-1}$ . В первом случае  $X_3 = X_1X_2$ , а во втором  $X_3 = -X_1X_2$ .

На основе ПФЭ плана поз типа  $2^3$  (табл. 3.2) можно построить матрицу планирования ДФЭ с числом факторов от 4 до 7. Так, заменив любой из эффектов взаимодействия четвертым фактором  $X_4$ , получим  $\frac{1}{2}$  ПФЭ типа  $2^{4-1}$ ; заменив два эффекта взаимодействия факторами  $X_4X_5$ , получим  $\frac{1}{4}$  ПФЭ типа  $2^{5-2}$ ; заменив все эффекты взаимодействия факторами  $X_4, X_5, X_6, X_7$ , получим  $1/16$  ПФЭ типа  $2^{7-4}$ .

Выбор степени дробности реплик определяется также задачей, решаемой в исследовании. Так, при оптимизации стремятся сделать эффекты взаимодействия возможно меньшими и, следова-

тельно, здесь можно воспользоваться той или иной репликой высокой степени дробности. В задачах интерполяции, наоборот, выявление таких эффектов может оказаться весьма важным и интересным. Поэтому здесь целесообразней использовать матрицу ПФЭ или ее полуреплику.

Так как матрица планирования ДФЭ строится путем замены вектор-столбцов эффектов взаимодействий новыми или дополнительными факторами, то можно ожидать, что величина выборочных коэффициентов регрессии  $b_j$ , будет являться одновременно оценкой генеральных значений коэффициентов как при основных эффектах  $\beta_j$ , так и при эффектах взаимодействий. Например, коэффициент  $b_3$  в уравнении (3.5a) будет совместной оценкой для коэффициентов  $\beta_3$  и  $\beta_{12}$ , т.е.  $b_3 \rightarrow \beta_3 + \beta_{12}$ . Аналогично  $b_1 \rightarrow \beta_1 + \beta_{23}$ ,  $b_2 \rightarrow \beta_2 + \beta_{13}$ . Другими словами, при таком планировании смешиваются эффекты взаимодействия с основными эффектами, в результате чего часть информации теряется (по сравнению с ПФЭ). От системы смешивания зависит эффективность дробной реплики. Матрицы планирования ДФЭ, в которых линейные эффекты смешаны с взаимодействиями наивысшего порядка, являются наиболее эффективными.

Для определения систем смешивания эффектов в теории планирования дробных экспериментов применяется определяющий контраст (ОК). Он представляет собой символическое произведение столбцов, равное +1 или -1. Так, для полуреплики  $2^{3-1}$  (табл. 3.3) определяющий контраст равен соотношению  $I = X_1 X_2 X_3$ .

Чтобы установить, какое взаимодействие смешано с данным линейным (основным) эффектом, надо умножить обе части определяющего контраста на столбец, соответствующий данному эффекту. Так, если определяющий контраст  $I = X_1 X_2 X_3$ , то для  $X_1$  имеем  $X_1 = X_1^2 X_2 X_3 = X_2 X_3$ , так как  $X_1^2 = 1$ . Для  $X_2$  получим  $X_2 = X_1 X_2^2 X_3 = X_1 X_3$ , а для  $X_3 - X_3 = X_1 X_2$ .

Полученные соотношения называются генерирующими, они показывают, с каким эффектом смешан данный или какое из взаимодействий принято незначимым и заменено новым фактором. Полуреплики, в которых основные эффекты смешаны с двухфакторными взаимодействиями, носят название планов с разрешаю-

щей способностью III (по максимальному числу факторов в определяющем контрасте). Разрешающая способность будет максимальной в той реплике, где линейные эффекты смешаны с эффектами взаимодействия наибольшего возможного порядка. Для расчета максимальной разрешающей способности ДФЭ применяют обобщенный контраст, представляющий собой произведение высшего порядка определяющих контрастов. Например, для матрицы планирования типа  $2^{7-4}$  определяющими контрастами будут следующие соотношения:

$$1 = X_1X_2X_4, 1 = X_1X_3X_5, 1 = X_2X_3X_6, 1 = X_1X_2X_3X_7.$$

Обобщающий контраст получается перемножением всех четырех контрастов:

$$1 = X_1X_2X_3X_4X_5X_6X_7.$$

Умножив полученный обобщающий контраст последовательно на  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_7$ , получим план с разрешающей способностью VII.

В заключение необходимо отметить, что планы ПФЭ могут дробиться лишь до определенного предела. Так, предельное число факторов для восьми опытов равно семи, а для 16 опытов – пятнадцати и т.д.

Планы, в которых число опытов равно числу определяемых оценок коэффициентов функции отклика, называются насыщенными. К таким планам, в частности, относятся планы, представленные в табл. 3.1, 3.3. В насыщенных планах число опытов превышает число определяемых оценок коэффициентов.

Планы второго порядка бывают композиционные и некомпозиционные.

Композиционные планы используют обычно на заключительных этапах исследования при описании экспериментальной области в ситуациях, когда отсутствует априорная информация о характере зависимости и полиномиальную модель приходится подбирать последовательно, начиная с простейшего линейного уравнения, которое затем дорабатывается до полной квадратичной

модели. Композиционные планы второго порядка получают путем добавления  $2^k$  «звездных точек» и некоторого числа центральных точек (точек основного уровня) к «ядру», образованному планом ПФЭ типа  $2^k$ , или его репликой.

### 3.4. Математическая обработка факторного эксперимента

Чтобы уменьшить влияние ошибки опыта на величину параметра оптимизации, матрицы планирования экспериментов строят с учетом дублирования опытов (табл. 3.1). В этом случае в дальнейших расчетах уже используется средняя арифметическая величина функции отклика (математическое ожидание в случае бесконечного числа опытов), определяемая по следующей формуле:

$$\bar{Y}_i = \frac{Y_{i1} + Y_{i2} + \dots + Y_{im}}{m},$$

где  $m$  – число повторных опытов.

Для оценки отклонения значений параметра оптимизации от математического ожидания определяют дисперсию параллельных опытов в каждой строке плана (построчные дисперсии):

$$S_{yi}^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{l=1}^m (Y_{il} - \bar{Y}_i)^2; l = 1, 2, 3, \dots, m; i = 1, 2, 3, \dots, N;$$

$f = m - 1$  – число степеней свободы – это число независимых групп наблюдений исследуемого объекта.

В данном случае из  $m$  наблюдений независимых результатов  $Y_{im}$  будет  $m - 1$ , так как результат любого одного наблюдения зависим и может быть определен по известным остальным опытам и величине среднего значения  $\bar{Y}$ .

Затем проверяется однородность построчных дисперсий по критерию Кохрена. Критерий Кохрена  $G$  – это отношение максимальной построчной дисперсии к сумме всех дисперсий. Данный критерий показывает, что в случае незначимых отличий построчных дисперсий ( $G_{\text{расч}} < G_{\text{табл}}$ ), т.е. их однородности, результаты экспериментов относятся к одной и той же совокупности. В противном случае ( $G_{\text{расч}} > G_{\text{табл}}$ ) дисперсии неоднородны и, следовательно,

наблюдаемые результаты экспериментов  $Y_{im}$  либо характеризуют различные объекты исследования, либо опыты некорректны.

Для расчета критерия Кохрена из всех дисперсий  $S_{y_l}^2$  находится наибольшая  $S_{y_{max}}^2$  и делится на сумму всех построчных дисперсий:

$$G_{\text{расч}} = \frac{S_{y_{max}}^2}{\sum_{i=1}^n S_i^2}.$$

Если вычисленное значение критерия Кохрена  $G_{\text{расч}}$  меньше его критического значения  $G_{\text{кр}}$ , найденного по табл.3.4 для числа степеней свободы  $f=m-1$  и числа опытов  $N$  при выбранном уровне значимости  $\alpha$  (обычно принимают  $\alpha=0,05$ ), то результаты не противоречат гипотезе об однородности дисперсий и на следующих этапах анализа можно применять обобщенную (усредненную) дисперсию воспроизводимости.

**Таблица 3.4. Значения G-критерия Кохрена  
при уровне значимости 5%**

| № | $f=1$  | $f=2$  | $f=3$  | $f=4$  | $f=5$  | $f=6$  |
|---|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 2 | 0,9985 | 0,9750 | 0,9392 | 0,9057 | 0,8772 | 0,8534 |
| 3 | 9669   | 8709   | 7977   | 7457   | 7071   | 6671   |
| 4 | 9065   | 7679   | 6841   | 6287   | 5985   | 5598   |
| 5 | 8412   | 6838   | 5981   | 5441   | 5065   | 4783   |
| 6 | 7808   | 6161   | 5321   | 4803   | 4447   | 4184   |
| 7 | 7281   | 5612   | 4800   | 4307   | 3974   | 3726   |
| 8 | 6798   | 5157   | 4377   | 3910   | 3595   | 3126   |

Дисперсия параметра оптимизации  $S_y^2$  или дисперсия воспроизводимости эксперимента определяется как частное от деления суммы построчных дисперсий на число опытов в матрице планирования  $N$ .

$$S_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^n S_i^2}{N} = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{l=1}^m (Y_{ie} - \bar{Y}_i)^2}{N(m-1)}.$$

Здесь  $N = f_2$  – число степеней свободы для определения  $S_y^2$ . Использование такой формулы возможно в том случае, если число повторных опытов одинаково во всей матрице планирования.

Пример. Расчет критерия Кохрена и проверки однородности построенных дисперсий по результатам эксперимента в табл. 3.5.

Таблица 3.5. Пример обработки результатов эксперимента

| № | 1 | $Y_{il}$ | $\bar{Y}_i$ | $(Y_{il} - \bar{Y}_i)$ | $(Y_{il} - \bar{Y}_i)^2$ | $S_{yi}^2$ |
|---|---|----------|-------------|------------------------|--------------------------|------------|
| 1 | 1 | 40       | 42          | 2                      | 4                        | 8          |
|   | 2 | 44       |             | 2                      | 4                        |            |
| 2 | 1 | 22       | 19,5        | 2,5                    | 6,25                     | 12,5       |
|   | 2 | 17       |             | 2,5                    | 6,25                     |            |
| 3 | 1 | 55       | 53          | 2                      | 4                        | 8          |
|   | 2 | 51       |             | 2                      | 4                        |            |
| 4 | 1 | 40       | 36          | 4                      | 16                       | 32         |
|   | 2 | 32       |             | 4                      | 16                       |            |

$$G_{\text{расч}} = \frac{32}{8 + 12,5 + 8 + 32} \approx 0,5; G_{\text{табл}} = 0,907.$$

$G_{\text{табл}} > G_{\text{расч}}$  ряд дисперсий однороден.

Чтобы исключить влияние на параметр оптимизации систематических ошибок, обусловленных различными внешними условиями, необходимо порядок опытов рандомизировать во времени с помощью таблицы случайных чисел табл. 3.6. Рандомизация-случайный порядок проведения опытов.

|       |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 20636 | 10402 | 00822 | 91665 | 31060 | 10805 |
| 15953 | 34764 | 35080 | 33606 | 85269 | 77602 |
| 88768 | 74397 | 04436 | 27659 | 63573 | 32135 |
| 98951 | 16877 | 19171 | 76833 | 73796 | 45753 |
| 34072 | 76830 | 36697 | 36170 | 65813 | 35885 |
| 45571 | 82406 | 35303 | 42614 | 86779 | 07439 |

Если необходимо провести восемь опытов, то из случайного места таблицы выписывают числа от 1 до 8, отбрасывая числа

больше 8 и уже выписанные. Полученная последовательность цифр определяет последовательность проведения опытов. Например, беря во внимание последнюю цифру числа, стоящего в первой строке и столбце, и двигаясь по столбцам, получим 6, 3, 1, 2, 4, 7, 3, 5.

При проверке статистической значимости коэффициентов модели прежде всего рассчитывается дисперсия в определении коэффициентов:

$$S_{bj}^2 = \frac{S_y^2}{n \cdot N}.$$

Коэффициент считается значимым, когда его абсолютная величина больше доверительного интервала, то есть:

$$|b_j| \geq \Delta b_j = t S_{bj}$$

где  $t$  – критерий Стьюдента (берется из таблиц в зависимости от уровня значимости  $\alpha$  и числа степеней свободы  $f_y = n - 1$ , при определении дисперсии опыта);

$S_{bj}$  – среднеквадратичная ошибка определения коэффициентов регрессии,

$$S_{bj} = \sqrt{S_{bj}^2}.$$

Смысл этого неравенства заключается в том, что абсолютная величина коэффициента должна быть в  $t$  раз больше, чем ошибка его определения.

Статистическая незначимость коэффициента интерпретируется как отсутствие влияния соответствующего фактора в изученных интервалах его изменения. Такие коэффициенты из модели исключаются.

Пример: проверить значимость коэффициентов модели при дисперсии опыта  $S_y^2 = 0,4$  и числу степеней  $f_y = 3$ .

$$Y = 20 - 5X_1 - 2X_2 + 0,5X_1X_2;$$

$$S_{bj}^2 = \frac{S_y^2}{N} = \frac{0,4}{4} = 0,1; S_{bj} = \sqrt{S_y^2} = \sqrt{0,1} \approx 0,33;$$

$$t_{\text{табл}} = 3,18 \text{ при } \alpha = 0,05 \text{ и } f_y = 3;$$

$$\Delta b_j = t_{\text{табл}} S_{bj} = 3,18 \cdot 0,33 = 1,05.$$

Все коэффициенты значимы, кроме  $b_{12}=0,5$ . Тогда модель имеет вид:

$$Y = 20 - 5X_1 - 2X_2.$$

Проверка адекватности модели призвана подтвердить или опровергнуть гипотезу о том, что параметр оптимизации действительно изменяется в соответствии с полученным уравнением регрессии. Эта процедура осуществляется с помощью критерия Фишера  $F$ , который представляет собой отношение двух дисперсий – адекватности  $S_{ад}^2$  и воспроизводимости (опыта)  $S_y^2$ .

$$F = \frac{S_{ад}^2}{S_y^2}.$$

Дисперсия адекватности представляет собой остаточную сумму квадратов разности экспериментальных и расчетных значений параметра оптимизации, отнесенную к числу степеней свободы:

$$S_{ад}^2 = \frac{\sum_{i=1}^N \Delta Y_i^2}{f_1} = \frac{\sum_{i=1}^N (\bar{Y}_{i \text{ эксп}} - \tilde{Y}_{i \text{ расч}})^2}{f_1}$$

где  $f_1=N-1$ ; где 1 – число значимых коэффициентов модели, включая  $b_0$ ;

$\bar{Y}_{i \text{ эксп}}$ ,  $Y_{i \text{ расч}}$  – значения параметра оптимизации в  $i$ -м опыте, соответственно определенные экспериментально и вычисленные по уравнению регрессии.

Гипотеза об адекватности модели принимается в том случае, если выполняется условие  $F_{\text{расч}} \geq F_{\text{табл}}$ .

Критические значения  $F$  – критерия для  $\alpha=0,05$  и степень свободы  $f_1$  и  $f_2$  представлены в табл. 3.6.

Причиной неадекватности модели могут быть недостаточный порядок модели, неудачный выбор интервала варьирования факторов, большая дисперсия воспроизводимости или включение большого числа факторов, не оказывающих существенного влия-

ния на функцию отклика. Решение о дальнейших действиях в таких случаях зависит от того, какой гипотезе отдает предпочтение исследователь. Часто после такого результата анализа модели проводят новое исследование с усовершенствованной постановкой задачи и другими условиями проведения опытов.

Таблица 3.6. Значения F-критерия Фишера при уровне значимости 5%

| $f$ | $f=1$ | $f=2$ | $f=3$ | $f=4$ | $f=5$ | $f=6$ |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1   | 164,4 | 199,5 | 215,7 | 224,6 | 230,2 | 234,0 |
| 2   | 18,5  | 19,2  | 19,2  | 19,3  | 19,3  | 19,3  |
| 3   | 10,1  | 9,6   | 9,3   | 9,1   | 9,0   | 8,9   |
| 4   | 7,7   | 6,9   | 6,6   | 6,4   | 6,3   | 6,2   |
| 5   | 6,6   | 5,8   | 5,4   | 5,2   | 5,1   | 5,0   |
| 6   | 6,0   | 5,1   | 4,8   | 4,5   | 4,4   | 4,3   |
| 7   | 5,5   | 4,7   | 4,4   | 4,1   | 4,0   | 3,9   |
| 8   | 5,3   | 4,5   | 4,1   | 3,8   | 3,7   | 3,6   |

В заключение необходимо отметить, что в случае равенства числа опытов  $N$  числу коэффициентов  $l$  для проверки адекватности модели необходимо реализовать несколько итераций на основном уровне и определить среднее значение  $Y_0$ . Если разность  $|\bar{Y}_0 - b_0| \leq 0,05$ , то модель тоже можно считать адекватной.

В качестве примера рассмотрим построение математической модели, позволяющей контролировать инструмент.

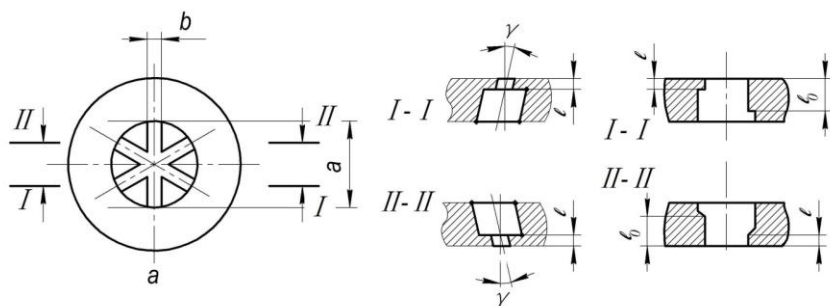


Рис. 3.1. Матрица для прессования винтовых профилей

При прессовании профилей формирование винтового оребрения осуществляется путем затекания металла в пазы на матрице (рис. 3.1,а). При этом движение металла в окружном направлении происходит за счет неравномерности скоростей истечения в пазах с наклонными рабочими поясками одинаковой по сторонам ребра ширины (рис. 3.1,б) или в пазах с поясками, параллельными оси прессования, но имеющими различную ширину на противоположных сторонах канала (рис. 3.1,в).

Ребра профиля в процессе закрутки претерпевают определенную деформацию, обусловленную механизмом процесса. Величина деформации кручения зависит, главным образом, от параметров поясков матрицы и геометрии профиля. Поэтому представляет известный интерес изучение совместного влияния этих факторов на угол закрутки (угол закрутки характеризует поворот сечений, разделенных расстоянием в 1 м, относительно друг друга). Для этой цели использовался метод статистического планирования эксперимента. Кроме того, было принято, что ребристый профиль можно представить как совокупность симметрично расположенных элементов. В силу такой симметрии исследовалась закрутка лишь одного элемента ребристого изделия – профиля с поперечным сечением прямоугольника с размерами  $a$  и  $b$ .

Исследование проводилось по плану дробного факторного эксперимента  $2^{3-1}$  с генерирующим соотношением  $X_3 = X_1 X_2$  и определяющим контрастом  $I = X_1 X_2 X_3$ . В качестве исследуемых факторов были взяты: относительная высота рабочего пояска  $X_1 = l/l_0$ , где  $l_0$  предельная высота, равная 10 мм; угол наклона плоскости рабочих поясков к оси прессования  $\gamma = X_2$  (рад); относительная толщина ребра  $a/b = X_3$ , где  $a$  – ширина,  $b$  – толщина ребра. Откликом служит угол закрутки  $\Theta$  (рад/м). Были приняты следующие интервалы варьирования факторов:  $X_1 = 0,25 \dots 0,75$ ;  $X_2 = 0 \dots 0,104$  рад;  $X_3 = 10 \dots 15$  (табл. 3.7)

**Таблица 3.7. Условия проведения и результаты экспериментов**

| Номер опыта | $l/l_0$ | $\gamma$ , рад | $a/b$ | $\Theta$ , рад/м |
|-------------|---------|----------------|-------|------------------|
| 1           | 0,25    | 0              | 15    | 7,38             |
| 2           | 0,25    | 0,104          | 10    | 0,34             |
| 3           | 0,75    | 0              | 15    | 0,70             |
| 4           | 0,75    | 0,104          | 10    | 8,71             |

Опыты проводились на вертикальном гидравлическом прессе ПСУ-250 с усилием 250 т на свинце, т.к. угол закрутки не зависит от природы металла. Условия проведения эксперимента приведены в табл. 3.6; число повторных опытов было взято равным двум. Порядок проведения опытов был определен по таблице случайных чисел и имел следующую очередность: 6, 5, 2, 8, 4, 7, 3, 1. Прессование слитков осуществлялось без смазки в контейнере диаметром 50 мм. Угол закрутки измерялся с помощью угломера с точностью  $\pm 3^\circ$ .

В результате статистической обработки экспериментальных данных было получено адекватное уравнение регрессии в виде

$$\theta = 6,53 - 1,83X_1 + 2,49X_2 + 1,51X_3,$$

где

$$X_1 = \frac{\tilde{X}_1 - 0,5}{0,25}; X_2 = \frac{\tilde{X}_2 - 0,052}{0,052}; X_3 = \frac{\tilde{X}_3 - 12,5}{2,5}.$$

Графическая иллюстрация уравнения приведена на рис. 3.2. Анализируя диаграмму, можно отметить, что угол закрутки увеличивается с ростом угла наклона плоскости рабочих поясков и с уменьшением отношения длин поясков. Наиболее эффективно влияет на угол закрутки угол наклона плоскости рабочих поясков. Полученная зависимость была использована при расчете параметров матрицы, обеспечивающих заданный угол закрутки.

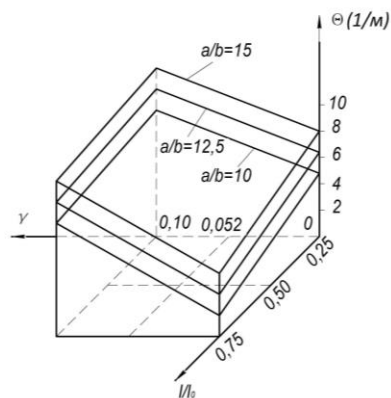


Рис. 3.2. Влияние параметров матрицы на угол закрутки

### 3.5. Планы второго порядка

Планы второго порядка обычно применяют в следующих случаях:

- а) когда линейная модель неадекватна;
  - б) после достижения области экстремума для ее описания.
- Например, модель второго порядка для  $k=2$  имеет вид

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{12}x_1x_2 + b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2.$$

Число членов в этой модели равно

$$\frac{(k+1)(k+2)}{2} = \frac{(2+1)(2+2)}{2} = 6.$$

Поэтому число опытов для ее построения  $N$  должно быть не меньше, чем

$$N \geq \frac{(k+1)(k+2)}{2} = 6.$$

При этом опытов в полном факторном эксперименте ПФЭ  $2^2$  не хватает. Чтобы увеличить число опытов, каждый фактор должен принимать не 2 значения, а 3, т.е. необходимо проводить эксперименты  $N=3^k=9$ . Применение таких планов связано с большим числом опытов. А мы стремимся к минимизации их числа. При построении планов второго порядка более рациональным является применение ЦКП – центрального композиционного планирования. Эта процедура предполагает реализацию опытов ПФЭ при  $k \leq 5$ , или ДФЭ, если  $k > 5$ . Затем к этим точкам добавляется некоторое количество специально расположенных точек, которые называются «звездными». Для случая двух факторов ЦКП имеет вид:

| № опыта | $X_0$ | $X_1$     | $X_2$ | $X_1X_2$ | $X_1^2$    | $X_2^2$ | $Y$   | примечание        |
|---------|-------|-----------|-------|----------|------------|---------|-------|-------------------|
| 1       | 1     | -1        | -1    | 1        | 1          | 1       | $Y_1$ | Ядро<br>ПФЭ $2^k$ |
| 2       | 1     | 1         | -1    | -1       | 1          | 1       | $Y_2$ |                   |
| 3       | 1     | -1        | 1     | -1       | 1          | 1       | $Y_3$ |                   |
| 4       | 1     | 1         | 1     | -1       | 1          | 1       | $Y_4$ |                   |
| 5       | 1     | $\alpha$  | 0     | 0        | $\alpha^2$ | 0       | $Y_5$ | Звездные точки    |
| 6       | 1     | $-\alpha$ | 0     | 0        | $\alpha^2$ | 0       | $Y_6$ |                   |

|   |   |   |           |   |   |            |       |                  |
|---|---|---|-----------|---|---|------------|-------|------------------|
| 7 | 1 | 0 | $\alpha$  | 0 | 0 | $\alpha^2$ | $Y_7$ | Основной уровень |
| 8 | 1 | 0 | $-\alpha$ | 0 | 0 | $\alpha^2$ | $Y_8$ |                  |
| 9 | 1 | 0 | 0         | 0 | 0 | 0          | $Y_9$ |                  |

Такие планы называются центральными, т.к. все опыты расположены симметрично относительно центра (основного уровня), и композиционными, т.к. строятся они последовательно.

Общее число опытов для ЦКП  $N=N_1+2k+N_0$ , где  $N_1$  – число опытов ядра плана,  $N_1=2^k$  при  $k \leq 5$ ;  $N_1=2^{k-p}$  при  $k > 5$ ;  $2k$  – число «звездных» точек,  $N_0$  – число опытов в центре плана. Для ЦКП  $N_0=1$ . Число уровней варьирования каждого фактора составляет 5 ( $-\alpha; -1; 0; 1; \alpha$ ).

Построим матрицу планирования ЦКП для случая 3 факторов:

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_{12}x_1x_2 + b_{23}x_2x_3 + b_{13}x_1x_3 + b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + b_{33}x_3^2$$

| № опыта | $X_0$ | $X_1$     | $X_2$     | $X_3$     | $X_1X_2$ | $X_2X_3$ | $X_1X_3$ | $X_1^2$    | $X_2^2$    | $X_3^2$    | $Y$ | примечание       |
|---------|-------|-----------|-----------|-----------|----------|----------|----------|------------|------------|------------|-----|------------------|
| 1       | 1     | -1        | -1        | -1        | 1        | 1        | 1        | 1          | 1          | 1          |     | Ядро ПФЭ $2^k$   |
| 2       | 1     | 1         | -1        | -1        | -1       | 1        | -1       | 1          | 1          | 1          |     |                  |
| 3       | 1     | -1        | 1         | -1        | -1       | -1       | 1        | 1          | 1          | 1          |     |                  |
| 4       | 1     | 1         | 1         | -1        | 1        | -1       | -1       | 1          | 1          | 1          |     |                  |
| 5       | 1     | -1        | -1        | 1         | 1        | -1       | -1       | 1          | 1          | 1          |     |                  |
| 6       | 1     | 1         | -1        | 1         | -1       | -1       | 1        | 1          | 1          | 1          |     |                  |
| 7       | 1     | -1        | 1         | 1         | -1       | 1        | -1       | 1          | 1          | 1          |     |                  |
| 8       | 1     | 1         | 1         | 1         | 1        | 1        | 1        | 1          | 1          | 1          |     |                  |
| 9       | 1     | $\alpha$  | 0         | 0         | 0        | 0        | 0        | $\alpha^2$ | 0          | 0          |     | Звездные точки   |
| 10      | 1     | $-\alpha$ | 0         | 0         | 0        | 0        | 0        | $\alpha^2$ | 0          | 0          |     |                  |
| 11      | 1     | 0         | $\alpha$  | 0         | 0        | 0        | 0        | 0          | $\alpha^2$ | 0          |     |                  |
| 12      | 1     | 0         | $-\alpha$ | 0         | 0        | 0        | 0        | 0          | $\alpha^2$ | 0          |     |                  |
| 13      | 1     | 0         | 0         | $\alpha$  | 0        | 0        | 0        | 0          | 0          | $\alpha^2$ |     |                  |
| 14      | 1     | 0         | 0         | $-\alpha$ | 0        | 0        | 0        | 0          | 0          | $\alpha^2$ |     |                  |
| 15      | 1     | 0         | 0         | 0         | 0        | 0        | 0        | 0          | 0          | 0          | 0   | Основной уровень |

Число опытов данного ЦКП  $N=15$ . При ПФЭ  $3^3$  –  $N=27$ . Число опытов уменьшилось в 2 раза.

Заметим, что в матрице ЦКП не все столбцы ортогональны:

$$\sum_{i=1}^N x_{ui}x_{ji} = 0, j \neq u.$$

Например,

$$\sum_{i=1}^{15} x_{0i} x_{2i}^2 = 8 + 2\alpha^2 \neq 0 \text{ или } \sum_{i=1}^{15} x_{1i}^2 x_{2i}^2 = 8 \neq 0.$$

Ортогональность столбцов матрицы можно получить, если ввести новые переменные:

$$x_i^{*2} = x_i^2 - \frac{\sum_{u=1}^N x_{iu}^2}{N} = x_i^2 - \bar{x}_i^2,$$

$$\text{где } \bar{x}_i^2 = \frac{\sum_{u=1}^N x_{iu}^2}{N} = \varphi_i = \frac{2^k + 2\alpha^2}{2^k + 2k + 1}.$$

Тогда матрица ЦКП становится ортогональной.

В результате математических преобразований получаем модель в виде:

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_{12}x_1x_2 + b_{23}x_2x_3 + b_{13}x_1x_3 + \\ + b_{11}(x_1^2 - \bar{x}_1^2) + b_{22}(x_2^2 - \bar{x}_2^2) + b_{33}(x_3^2 - \bar{x}_3^2),$$

где

$$b_0 = \frac{\sum_{u=1}^N Y_u X_{0u}}{N}; b_i = \frac{\sum_{u=1}^N X_{iu} Y_u}{2^k + 2\alpha^2}; b_{ij} = \frac{\sum X_{iu} X_{ju} Y_u}{2^k}; b_{ii} \\ = \frac{\sum X_{iu}^2 Y_u}{2^k(1 - \varphi) + 2\alpha^2(\alpha^2 - 1)},$$

причем  $\alpha$  и  $\varphi$  зависят от числа факторов. Их выбирают по табл. 8.

**Таблица 3.8**

| № | $\alpha$ | $\varphi$ | N  | Ядро           | № |
|---|----------|-----------|----|----------------|---|
| 2 | 1        | 0,667     | 9  | Ядро ПФЭ $2^2$ | 1 |
| 3 | 1,215    | 0,73      | 15 | Ядро ПФЭ $2^3$ | 1 |
| 4 | 1,414    | 0,8       | 25 | Ядро ПФЭ $2^4$ | 1 |
| 5 | 1,547    | 0,77      | 27 | Ядро ПФЭ $2^5$ | 1 |

Недостаток ЦКП в том, что коэффициенты уравнения рассчитываются с неодинаковыми дисперсиями, т.е. точность неодинакова в различных направлениях. Этот недостаток устраняет ротабельное планирование. Равномерность информации обеспечивается с помощью определенного значения звездного плеча  $\alpha$  и числа опытов в центре эксперимента. Для ПФЭ  $\alpha = 2^{\frac{k}{4}}$ , для ДФЭ  $\alpha = 2^{\frac{(k-p)}{4}}$ , число параллельных опытов в центре эксперимента  $N_0$  выбирается по формуле так, чтобы  $\lambda$  было немного меньше единицы.  $\lambda = \frac{kN}{(k+2)(N-N_0)}$ .

Используя ранние таблицы, матрицы ротабельного планирования второго порядка для двух факторов имеет вид:

**Таблица 3.9**

| № опыта | $X_0$ | $X_1$  | $X_2$  | $X_1X_2$ | $X_1^2$ | $X_2^2$ | $Y$ | Примечание     |
|---------|-------|--------|--------|----------|---------|---------|-----|----------------|
| 1       | 1     | -1     | -1     | -1       | 1       | 1       |     | Ядро ПФЭ $2^k$ |
| 2       | 1     | 1      | 1      | -1       | -1      | 1       |     |                |
| 3       | 1     | -1     | 1      | -1       | 1       | 1       |     |                |
| 4       | 1     | 1      | 1      | 1        | 1       | 1       |     |                |
| 5       | 1     | 1,141  | 0      | 0        | 2       | 0       |     | Звездные точки |
| 6       | 1     | -1,141 | 0      | 0        | 2       | 0       |     |                |
| 7       | 1     | 0      | 1,141  | 0        | 0       | 2       |     |                |
| 8       | 1     | 0      | -1,141 | 0        | 0       | 2       |     |                |
| 9       | 1     | 0      | 0      | 0        | 0       | 0       |     | Нулевые точки  |
| 10      | 1     | 0      | 0      | 0        | 0       | 0       |     |                |
| 11      | 1     | 0      | 0      | 0        | 0       | 0       |     |                |
| 12      | 1     | 0      | 0      | 0        | 0       | 0       |     |                |
| 13      | 1     | 0      | 0      | 0        | 0       | 0       |     |                |

Дисперсия опыта подсчитывается на основании опытов, проведенных в центре эксперимента:

$$S_y^2 = \frac{\sum_{l=1}^{N_0} \Delta y_{0l}}{N_0 - 1}.$$

Если заранее известно, что процесс описывается квадратичной моделью, то более рационально использовать некомпозиционный план, содержащий экономное число опытов. Для двухфак-

торной модели он имеет вид правильного шестиугольника. Матрица планирования имеет вид:

**Таблица 3.10**

| № опыта | $X_1$ | $X_2$  | $X_1X_2$ | $X_1^2$ | $X_2^2$ | $Y$      |
|---------|-------|--------|----------|---------|---------|----------|
| 1       | 1     | 0      | 0        | 1       | 0       | $Y_1$    |
| 2       | -1    | 0      | 0        | 1       | 0       | $Y_2$    |
| 3       | 0,5   | 0,866  | 0,433    | 0,25    | 0,75    | $Y_3$    |
| 4       | 0,5   | -0,866 | -0,433   | 0,25    | 0,75    | $Y_4$    |
| 5       | -0,5  | 0,866  | -0,433   | 0,25    | 0,75    | $Y_5$    |
| 6       | -0,5  | -0,866 | 0,433    | 0,25    | 0,75    | $Y_6$    |
| 7       | 0     | 0      | 0        | 0       | 0       | $Y_7$    |
| 8       | 0     | 0      | 0        | 0       | 0       | $Y_8$    |
| 9       | 0     | 0      | 0        | 0       | 0       | $Y_9$    |
| 10      | 0     | 0      | 0        | 0       | 0       | $Y_{10}$ |

Этот план является ротакельным. При  $k>3$  строят некомпозиционные планы с варьированием каждого фактора на 3 уровнях (-1; 0; 1). Эти планы представляют собой выборки из ПФЭ  $3^k$ .

**Таблица 3.11**

| № опыта | $X_0$ | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$     | $X_1X_2$ | $X_2X_3$ | $X_1X_3$ | $X_1^2$ | $X_2^2$ | $X_2^3$ | $Y$      |
|---------|-------|-------|-------|-----------|----------|----------|----------|---------|---------|---------|----------|
| 1       | 1     | 1     | -1    | 0         | 1        | 1        | 1        | 1       | 1       | 0       | $Y_1$    |
| 2       | 1     | -1    | -1    | 0         | -1       | 1        | 0        | 1       | 1       | 0       | $Y_2$    |
| 3       | -1    | 1     | 1     | 0         | -1       | 0        | 0        | 1       | 1       | 0       | $Y_3$    |
| 4       | -1    | -1    | 1     | 0         | 1        | 0        | 0        | 1       | 1       | 0       | $Y_4$    |
| 5       | 1     | 0     | 1     | 1         | 0        | 0        | 1        | 1       | 0       | 1       | $Y_5$    |
| 6       | 1     | 0     | -1    | 1         | 0        | 0        | -1       | 1       | 0       | 1       | $Y_6$    |
| 7       | -1    | 0     | 1     | 1         | 0        | 0        | -1       | 1       | 0       | 1       | $Y_7$    |
| 8       | -1    | 0     | -1    | 1         | 0        | 0        | 1        | 1       | 0       | 1       | $Y_8$    |
| 9       | 0     | 1     | 1     | 0         | 0        | 1        | 0        | 0       | 1       | 1       | $Y_9$    |
| 10      | 0     | 1     | -1    | 0         | 0        | -1       | 0        | 0       | 1       | 1       | $Y_{10}$ |
| 11      | 0     | -1    | 1     | 0         | 0        | -1       | 0        | 0       | 1       | 1       | $Y_{11}$ |
| 12      | 0     | -1    | -1    | 0         | 0        | 1        | 0        | 0       | 1       | 1       | $Y_{12}$ |
| 13      | 0     | 0     | 0     | $\alpha$  | 0        | 0        | 0        | 0       | 0       | 0       | $Y_{13}$ |
| 14      | 0     | 0     | 0     | $-\alpha$ | 0        | 0        | 0        | 0       | 0       | 0       | $Y_{14}$ |
| 15      | 0     | 0     | 0     | 0         | 0        | 0        | 0        | 0       | 0       | 0       | $Y_{15}$ |

### 3.6. Вопросы для самопроверки

1. Что понимают под полным факторным экспериментом?
2. Как найти основные уровни факторов?
3. Каким образом выбирают интервал варьирования факторов?
4. Почему все факторы приводят к безразмерному виду?
5. Напишите формулу для кодирования факторов.
6. Что представляет собой матрица планирования эксперимента?
7. Как построить матрицу планирования эксперимента?
8. Перечислите свойства матрицы планирования эксперимента типа  $2^k$ .
9. Каким образом рассчитывают коэффициенты математической модели?
10. Как проводится анализ математической модели?
11. Как оценивается влияние комбинации факторов на параметр оптимизации?

### 3.7. Задачи и упражнения

1. В исследовании изучалось влияние трех факторов, каждый из которых изменялся на четырех уровнях. Найти необходимое число опытов.
2. В исследовании изучалось влияние трех факторов. Первый фактор изменялся на двух уровнях, второй – на трех уровнях, а третий – на четырех. Найти необходимое число опытов.
3. План и результаты эксперимента  $2^2$  представлены матрицей:

| Номер опыта | X0 | X1 | X2 | y    |
|-------------|----|----|----|------|
| 1           | +  | -  | -  | 1.69 |
| 2           | +  | -  | +  | 1.16 |
| 3           | +  | +  | -  | 0.74 |
| 4           | +  | +  | +  | 0.39 |

Требуется определить коэффициенты модели и провести анализ модели.

4. Дана формула:  $C = kx^a y^b z^c$ . Каким образом от данной модели перейти к линейной модели вида  $y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3$ ?

5. Для полного факторного эксперимента  $2^3$  надо получить модель

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_{12} x_1 x_2 + b_{13} x_1 x_3 + b_{23} x_2 x_3 + b_{123} x_1 x_2 x_3.$$

Привести матрицу планирования для расчета коэффициентов этой модели.

6. Сколько новых факторов может быть включено в математическую модель, описанную в задаче 5? Подсчитайте, во сколько раз сокращается необходимое число экспериментов.

7. Привести примеры изучения различных систем с помощью математического планирования эксперимента.

8. Исследуемый процесс определяется четырьмя факторами. Основные уровни интервалы варьирования выбраны следующим образом:

| Факторы               | $\tilde{x}_1$ | $\tilde{x}_2$ | $\tilde{x}_3$ | $\tilde{x}_4$ |
|-----------------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| Основной уровень      | 3             | 30            | 1,5           | 1,5           |
| Интервал варьирования | 2             | 10            | 1             | 10            |

Напишите формулы преобразования натуральных значений факторов в кодированные. Определите верхние и нижние уровни факторов. Проверить правильность их построения.

9. Даны две матрицы планирования.

Матрица 1

| $X_1$ | $X_2$ |
|-------|-------|
| -     | -     |
| -     | +     |
| +     | +     |
| +     | -     |

Матрица 2

| $X_1$ | $X_2$ |
|-------|-------|
| -     | +     |
| +     | -     |
| -     | +     |
| +     | -     |

10. Даны три матрицы планирования.

Матрица 1

| N | X <sub>0</sub> | X <sub>1</sub> | X <sub>2</sub> | X <sub>3</sub> | y              |
|---|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| 1 | +              | -              | -              | +              | Y <sub>1</sub> |
| 2 | +              | +              | +              | -              | Y <sub>2</sub> |
| 3 | +              | -              | +              | -              | Y <sub>3</sub> |
| 4 | +              | +              | +              | +              | Y <sub>4</sub> |

Матрица 2

| N | X <sub>0</sub> | X <sub>1</sub> | X <sub>2</sub> | X <sub>3</sub> | y              |
|---|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| 1 | +              | -              | -              | +              | Y <sub>1</sub> |
| 2 | +              | +              | +              | -              | Y <sub>2</sub> |
| 3 | +              | -              | +              | -              | Y <sub>3</sub> |

Матрица 3

| N | X <sub>0</sub> | X <sub>1</sub> | X <sub>2</sub> | X <sub>3</sub> | y              |
|---|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| 1 | +              | -              | -              | +              | Y <sub>1</sub> |
| 2 | +              | +              | +              | +              | Y <sub>2</sub> |
| 3 | +              | -              | +              | -              | Y <sub>3</sub> |
| 4 | +              | +              | +              | -              | Y <sub>4</sub> |

Какую из них можно выбрать вместо полного факторного эксперимента  $2^3$ , требующего, как вы знаете, восьми опытов?

11. При проведении эксперимента использован план –  $1/32$  реплика от  $2^9$ . Во сколько раз сократилось число экспериментов по сравнению с полным факторным экспериментом?

12. После обработки результатов эксперимента получена модель изучаемого процесса  $y = 52 - 2x_1 + 5x_2 + 0,6x_3 - 1,5x_4 + 0,3x_5$ . Какие из факторов оказывают наибольшее влияние на целевую функцию? Какие факторы нужно увеличивать, чтобы параметр оптимизации уменьшался?

13. План и результаты эксперимента  $2^{4-1}$  представлены матрицей:

| № | $X_0$ | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $X_4$ | $X_{13}$ | $X_{23}$ | $X_{12}$ | Y   |
|---|-------|-------|-------|-------|-------|----------|----------|----------|-----|
| 1 |       | +     | +     | +     |       |          |          |          | 296 |
| 2 |       | -     | +     | +     |       |          |          |          | 122 |
| 3 |       |       | -     | +     |       |          |          |          | 239 |
| 4 |       |       | -     | +     |       |          |          |          | 586 |
| 5 |       |       |       |       |       |          |          |          | 232 |
| 6 |       |       |       |       |       |          |          |          | 292 |
| 7 |       |       |       |       |       |          |          |          | 539 |
| 8 |       |       |       |       |       |          |          |          | 383 |

Требуется достроить матрицу планирования, найти математическую модель и провести ее анализ.

## 4. ПОИСК ОПТИМАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ В ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЯХ

Поиск оптимальных условий – одна из основных задач металлургии. Такие задачи возникают

1) при управлении параметрами технологического процесса, когда необходимо достичь максимальной производительности при минимальных затратах;

2) при проектировании штампов и оборудования, когда требуется подобрать такую комбинацию параметров, которая соответствовала бы наивысшему эксплуатационному характеру;

3) при создании новых образцов металлопродукции и сплавов, обладающих наилучшими свойствами (жаропрочность, коррозионная стойкость).

Задача оптимизации ставится таким образом: надо экспериментально найти координаты многомерной точки  $X_1^{\text{опт}}$ ,  $X_2^{\text{опт}}$ , ... ,  $X_k^{\text{опт}}$ , при которых целевая функция достигает экстремума. При поиске экстремума предполагается, что целевая функция является гладкой, непрерывной, и что в области исследования имеется единственный экстремум. Пример такой функции для случая двух факторов – это холм с одной вершиной.

### 4.1. Одномерные методы поиска экстремума

Одномерный поиск экстремумов производится только для однофакторных экспериментов, а в ряде случаев и многофакторных. Различают активный и пассивный поиски. При пассивном поиске область исследования разбивают на участки равной длины:

$$l_N = \frac{X_{\max} - X_{\min}}{N + 1},$$

где  $N$  – число экспериментальных точек.

Методом перебора находим  $X^{\text{опт}}$  и  $Y^{\text{опт}}$ . При активном поиске выбор значений  $X$  в области исследования зависит от результатов предшествующих опытов. Имеет место накопление и активное использование информации о свойствах целевой функции. Пошаговое проведение опытов более эффективно, т.к. позволяет сократить время и средства.

Наиболее простыми методами являются – дихотомии, «золотого сечения» и Фибоначчи. Идея этих методов заключается в том, что по двум значениям  $X_1, X_2$ , симметрично расположенных в области исследования  $X_{\min} < X_1 < X_2 < X_{\max}$ , можно указать интервал меньше первоначального, в котором находится точка экстремума.

Идея метода дихотомии заключается в следующем: на первом этапе экспериментирования относительно центра области исследования размещают две новые точки и проводят эксперимент, затем процедура повторяется на новом отрезке (рис 4.1). Координаты выбирают следующим образом:

$$X_1 = \frac{(X_{\max} + X_{\min} - \delta)}{2};$$

$$X_2 = \frac{(X_{\max} + X_{\min} + \delta)}{2},$$

где  $\delta$  – точность измерений  $X$ .

Координаты экспериментальных точек на последующих этапах исследования определяются по вышеуказанным формулам с учетом новых границ. Длина интервала неопределенности после проведения  $k$ -й пары опытов:  $l_N = \frac{L}{2^k} + \left(1 - \frac{1}{2^k}\right) \delta$ , где  $l_N$  интервал неопределенности, в котором находится точка экстремума. Задаваясь допустимой относительной погрешностью  $\varepsilon$  локализации точки экстремума, можно найти число наблюдений  $N$ , необходимых для обеспечения желаемой точности:

$$\varepsilon \geq \frac{l_N}{L}; L = X_{\max} - X_{\min}; \varepsilon \geq \frac{l_N}{L} = \frac{1}{2^k} + \left(1 - \frac{1}{2^k}\right) \frac{\delta}{L}.$$

Следует задаваться такой относительной погрешностью, чтобы ошибка была не меньше:

$$\frac{2\delta}{L} \leq \varepsilon(x \pm \delta).$$

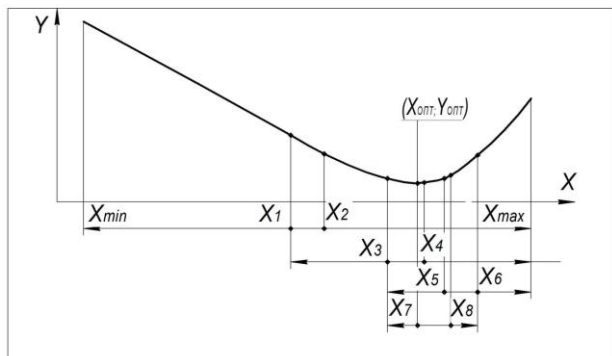


Рис. 4.1. Схема поиска экстремума методом дихотомии

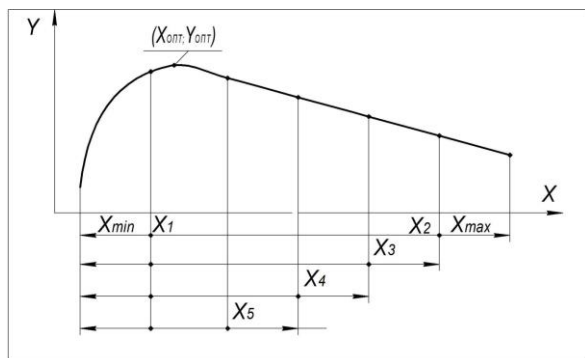


Рис. 4.2. Схема поиска экстремума методами Фибоначчи и «золотого сечения»

Метод Фибоначчи более эффективен, чем дихотомии, так как позволяет сократить число опытов при одинаковой области исследования. Реализация метода связана с последовательностью целых чисел, открытых итальянским математиком Леонардом Фибоначчи (1202 г.). В этом методе две новые точки  $X_1$ ,  $X_2$ , берут на равном расстоянии от концов области исследования. Исходя из чисел Фибоначчи  $F_N = 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \dots$ , которые определяются рекуррентными соотношениями  $F_N = F_{N-1} + F_{N-2}$ ;  $F_0 = F_1 = 1$  определяются значения:

$$X_1 = X_{min} + (X_{max} - X_{min}) \frac{F_{N-2}}{F_N};$$

$$X_2 = X_{min} + (X_{max} - X_{min}) \frac{F_{N-1}}{F_N}.$$

Планирование эксперимента производится следующим образом: вначале определяется необходимое число опытов  $N$ , т.к. оно используется при расчете  $X_1, X_2$ . Для определения  $N$  задаются относительной погрешностью  $\varepsilon$  и абсолютной погрешностью  $\delta$ . Тогда  $N$  находят из соотношения

$$\varepsilon \geq \frac{l_N}{L} = \frac{1}{F_N} + \frac{F_{N-2}}{F_N} \frac{\delta}{L},$$

где  $l_N$  – интервал неопределенности,

$$l_N = \frac{L}{F_N} + \frac{F_{N-2}}{F_N} \delta.$$

В каждой очередной интервал неопределенности попадает один предыдущий эксперимент (рис. 4.2). Для продолжения поиска новую точку следует располагать симметрично оставшейся.

Метод золотого сечения или занимает промежуточное положение между методами дихотомии и Фибоначчи. Координаты точек берут из следующих соотношений:

$$X_1 = X_{min} + (X_{max} - X_{min})\tau^2;$$

$$X_2 = X_{min} + (X_{max} - X_{min})\tau,$$

где,  $\tau^2 = 0,382$ ;  $\tau = 0,618$ .

Деление отрезка подобным образом восходит к Евклиду и называется золотым сечением. Далее процедура планирования эксперимента аналогична методу Фибоначчи (см. рис. 4.2):

$$l_N = (X_{max} - X_{min})\tau^{N-1}.$$

Количество опытов может быть найдено из условия

$$\varepsilon \geq \frac{l_N}{L} = (0,618)^{N-1}.$$

Из сопоставления трех методов следует, что самый эффективный – метод Фибоначчи, далее – метод «золотого сечения» (он более прост в расчетах) и метод дихотомии.

## 4.2. Многомерные методы поиска

К экспериментальным методам многомерного поиска относятся методы: Гаусса-Зайделя, крутого восхождения Бокса-Уилсона и симплекс-метод.

В основе метода Гаусса-Зайделя лежит идея координатного поиска, например, для двухфакторной модели вначале выбирают направление поиска по фактору  $X_1$ . Значение  $X_2$  – фиксировано. Для поиска экстремума используются одномерные методы. Далее движение начинают вдоль новой координатной оси (рис. 4.3). Когда ни по одной из осей невозможно увеличение  $Y$ , поиск прекращается, и полученная точка принимается за экстремальную.

Недостаток: при большом числе факторов ( $k$ ) путь к вершине получается извилистым, что требует большого числа опытов.

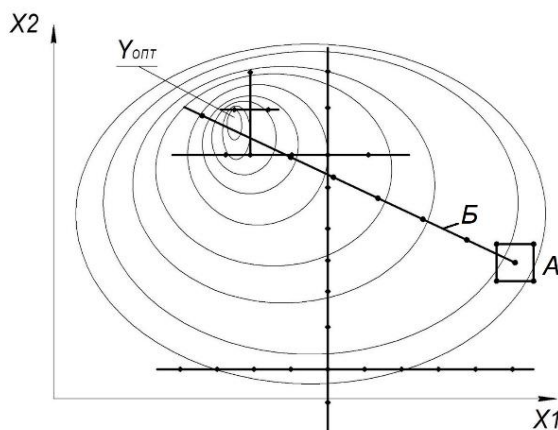


Рис. 4.3. Схема поиска экстремума методами Гаусса-Зайделя и крутого восхождения

Бокс и Уилсон в 1952 году показали, что для поиска оптимальных условий методом крутого восхождения (МКВ) достаточно построение адекватной линейной модели:

например, в окрестностях точки  $A$ , осуществив полный факторный эксперимент типа  $2^2$ , рис 4.3:

$$Y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_kx_k = b_0 + \sum_{j=1}^k b_j x_j.$$

Необходимо найти точку  $x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*$ , в которой целевая функция  $Y$  достигает экстремума. Один из кратчайших путей – это движение от данной точки  $A$  к вершине, в направлении наиболее крутого склона, совпадающего с направлением градиента  $B$  (см. рис. 4.3). Градиент – это вектор, указывающий наискорейшее изменение функции при переходе из одной точки пространства в другую:

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x_1} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \vec{j} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \vec{k},$$

где  $\frac{\partial u}{\partial x_1}$  – частные производные по  $j$ -му фактору,  $(i, j, k)$ -орты, совпадающие с направлением осей.

Для линейной модели частные производные равны  $b_1, b_2, \dots, b_k$ , тогда  $\text{grad } u = b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + \dots + b_k \vec{k}$ . Из формулы следует, что для осуществления движения по градиенту вес значения факторов по каждой из осей  $(i, j, k)$  необходимо изменять пропорционально величинам коэффициентов  $b_1, b_2, \dots, b_k$ . Рассмотрим технологию движения по  $\text{grad}$  для линейной однофакторной модели:

$$Y = b_0 + b_1x_1.$$

Т.к.  $b_1 = \frac{\partial u}{\partial x}$ , то он равен тангенсу угла наклона между линией регрессии и осью фактора. Тогда катет  $AB = \Delta x_1 b_1$ .

Обобщение для многофакторной модели делается механически, т.к. все коэффициенты модели определяются независимо друг от друга. При этом движение по всем осям факторов осуществля-

ется одновременно. Процедура поиска экстремума состоит в следующем: вначале выбирают начальную точку  $S$ , в окрестности которой на основе малой серии опытов находят локальное описание поверхности целевой функции с помощью модели линейного типа. Далее находят направление градиента и в этом направлении планируют «мысленные опыты» (см. рис. 4.3).

Серия «мысленных опытов» рассчитывается последовательным прибавлением к основным уровням факторов величин, пропорциональных произведению соответствующего коэффициента на интервал варьирования. Потом находят базовый фактор, для которого произведение  $b_i \Delta x_i$  было максимальным по абсолютной величине, и для него вычисляют базовый шаг:  $\Delta_{\text{баз}} = \mu \Delta x_{\text{баз}}$ , где  $\Delta x$  – интервал варьирования.

После этого рассчитывают единичные шаги всех остальных факторов по формуле

$$\frac{\Delta_i}{\Delta_{\text{баз}}} = \frac{b_i \Delta x_i}{b_{\text{баз}} \Delta x_{\text{баз}}}.$$

и полученное значение округляют.

Все шаги рассчитывают в натуральном масштабе. Полученные таким образом шаги последовательно прибавляют к основным уровням факторов или вычитают из них (в зависимости от знака  $b_j$ , и от того, что ищут – максимум или минимум). Для качественных факторов фиксируют лучший уровень, для незначимых факторов стабилизируют на любом уровне в интервале  $(+1; -1)$ . Обычно рассчитывают до 10 мысленных опытов. Реализацию мысленных опытов начинают с опыта, условия которого выходят из области эксперимента хотя бы по одному из факторов. Обычно проводят 3-4 опыта и по их результатам принимают решение о прекращении поиска или дальнейшем проведении эксперимента. Если одного линейного приближения недостаточно, то ставится новая серия мысленных опытов до достижения экстремумов.

Симплекс-метод поиска экстремума целевой функции, предложенный в 1962 г. обеспечивает минимальное число опытов при небольшом объеме вычислений. Метод может использоваться при

управлении технологическими процессами с учетом изменяющихся условий производства.

Симплекс – это простейший выпуклый многогранник, образованный  $k+1$  вершиной общего положения в  $k$ -мерном пространстве. На плоскости симплекс образуется тремя точками, не лежащими на одной прямой, то есть любой треугольник. В трехмерном пространстве симплекс образуется любыми 4 точками, не лежащими в одной плоскости, то есть это любая треугольная пирамида. Симплекс называется правильным или регулярным, если все расстояния между образующими его вершинами равны. Регулярными симплексами являются правильный треугольник, тетраэдр и т.д. Таким образом, точка – это нульмерный симплекс, а отрезок прямой – одномерный симплекс.

Из любого симплекса можно, отбросив одну из вершин и используя оставшуюся грань, получить новый симплекс, добавив всего одну точку. Путем последовательного отбрасывания вершин можно осуществлять движение симплекса в факторном пространстве, причем это перемещение будет происходить с каждым экспериментом (рис. 4.4).

Если провести эксперимент в вершинах симплекса, то направление максимального наклона поверхности  $Y$  (направление градиента), определенное на основании проведенных наблюдений, будет проходить из центра симплекса через грань, противоположащую вершине с минимальным значением  $Y$ . При этом предполагается, что поверхность  $Y$  в области, ограниченной симплексом, близка к плоскости.

Для продвижения к экстремуму необходимо перейти от исходного симплекса к симплексу, находящемуся в области более высокого значения  $Y$ , путем отбрасывания вершины с минимальным значением  $Y$  и построением на оставшейся грани симплекса с новой вершиной, являющейся в силу симметрии зеркальным отражением отброшенной. Затем процесс отбрасывания вершины с минимальным значением  $Y$  и построения нового симплекса повторяется, в результате чего формируется цепочка симплексов, перемещающихся к экстремуму. Достигнув области экстремума, симплекс начинает вращение вокруг вершины с максимальным

значением  $Y$ . Это явление используется для определения конца процесса оптимизации.

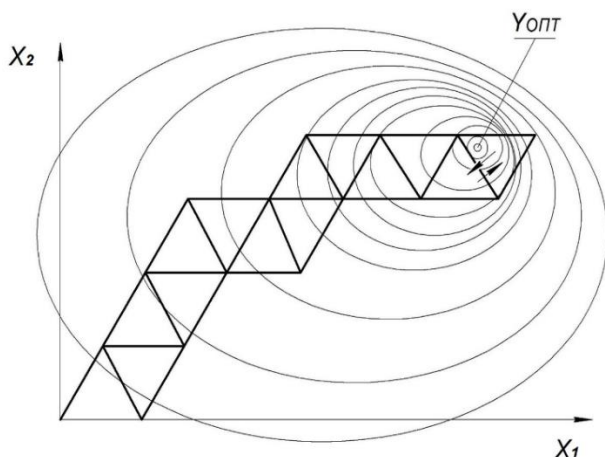


Рис. 4.4. Схема поиска экстремума симплекс-методов

Правильный  $k$ -мерный симплекс с центром в начале координат может быть задан следующей матрицей:

$$\begin{vmatrix} -r_1 & -r_2 & -r_3 & \cdots & -r_{k-1} & -r_k \\ R_1 & -r_2 & -r_3 & \cdots & -r_{k-1} & -r_k \\ & R_2 & -r_3 & \cdots & -r_{k-1} & -r_k \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & R_{k-1} & -r_k \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & R_k \end{vmatrix},$$

где  $R_i, r_i$  – соответственно радиусы сфер, описанных и вписанных около  $i$ -мерного симплекса.

При длине ребра симплекса, равного единицы, радиусы гиперсфер равны:

$$R_i = \sqrt{\frac{i}{2(i+1)}}; \quad r_i = \frac{1}{\sqrt{2(i+1)}},$$

где  $i=1,2,3,\dots,k$ .

Координаты экспериментальных точек, соответствующих вершинам симплекса, можно представить в виде таблицы:

| № опыта | X <sub>1</sub> | X <sub>2</sub> | X <sub>3</sub> | X <sub>4</sub> | X <sub>5</sub> | ... | X <sub>k</sub>                  | y                |
|---------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|-----|---------------------------------|------------------|
| 1       | -0,5           | -0,289         | -0,204         | -0,158         | -0,129         | ... | $r = \frac{1}{\sqrt{2k(k+1)}}$  | Y <sub>1</sub>   |
| 2       | 0,5            | -0,289         | -0,204         | -0,158         | -0,129         | ... |                                 | Y <sub>2</sub>   |
| 3       | 0              | 0,578          | -0,204         | -0,158         | -0,129         | ... |                                 | Y <sub>3</sub>   |
| 4       | 0              | 0              | 0,612          | -0,158         | -0,129         | ... |                                 | Y <sub>4</sub>   |
| 5       | 0              | 0              | 0              | 0,623          | -0,129         | ... |                                 | Y <sub>5</sub>   |
| 6       | 0              | 0              | 0              | 0              | 0,645          | ... |                                 | Y <sub>6</sub>   |
| ....    | ...            | ...            | ...            | ...            | ...            | ... |                                 | ...              |
| k+1     | 0              | 0              | 0              | 0              | 0              | ... | $R_k = \sqrt{\frac{k}{2(k+1)}}$ | Y <sub>k+1</sub> |

Из структуры матрицы видно, что увеличение факторного пространства на единицу влечет добавление одной строки и одного столбца, соответствующих дополнительной экспериментальной точке. Координаты вершин определяются строками матрицы. Одна из вершин лежит на оси x<sub>k</sub>, а остальные вершины располагаются симметрично относительно координатных осей.

Для двух факторов имеем:

$$i = 1, R_1 = \sqrt{\frac{1}{2(l+1)}} = 0,5; r_1 = \frac{1}{\sqrt{2(l+1)}} = 0,5;$$

$$i = 2, R_2 = \sqrt{\frac{2}{2(l+2)}} = 0,578; r_2 = \frac{2}{\sqrt{2(l+2)}} = 0,289.$$

Тогда вершины симплекса запишем в таблице следующим образом:

| N | X1  | X2  |
|---|-----|-----|
| 1 | -r1 | -r2 |
| 2 | R1  | -r1 |
| 3 | 0   | R2  |

| N | X1   | X2     |
|---|------|--------|
| 1 | -0,5 | -0,289 |
| 2 | 0,5  | -0,289 |
| 3 | 0    | 0,578  |

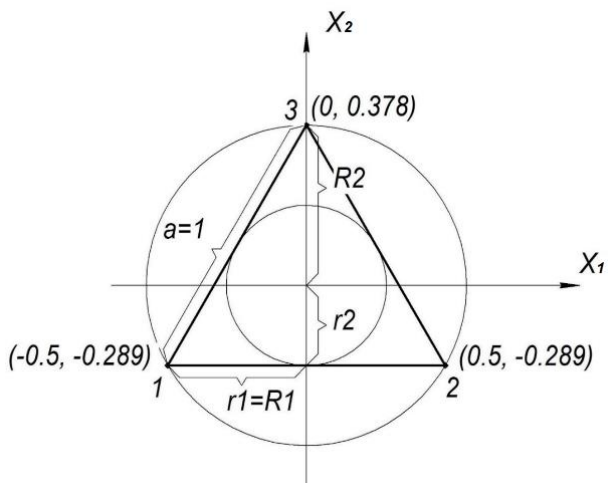


Рис. 4.5. Двухмерный симплекс

Возможны и другие исходные положения начального симплекса, например, приведенные на рис. 4.6.

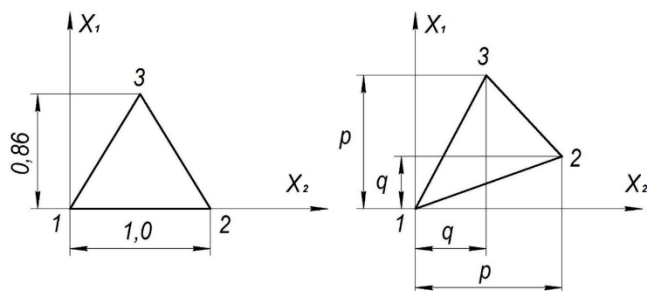


Рис. 4.6. Некоторые виды начального симплекса

Координаты вершин симплексов, представлены на рис. 4.6, записываются следующей таблицей:

| N | $X_1$ | $X_2$ |
|---|-------|-------|
| 1 | 0     | 0     |
| 2 | 1     | 0     |
| 3 | 0,5   | 0,86  |

| N | $X_1$ | $X_2$ |
|---|-------|-------|
| 1 | 0     | 0     |
| 2 | p     | q     |
| 3 | q     | p     |

Пример: Используя симплексное планирование, оптимизировать процесс резания по критерию стойкости в зависимости от скорости резания  $f$  и подачи при сверлении  $s$ :

$$c = F(s, F) \Rightarrow \max.$$

Основные уровни и интервалы варьирования управляющих факторов приведены в таблице:

| Факторы или параметры         | Обозначение | Основной уровень | Интервал варьирования |
|-------------------------------|-------------|------------------|-----------------------|
| Частота вращения $f$ (об/мин) | $X_1$       | 2050             | 2000                  |
| Подача $s$ (мм/об)            | $X_2$       | 0,003            | 0,0012                |

Двухмерный симплекс в данном случае представляет собой равносторонний треугольник ABC. Расстояние между вершинами симплекса примем равным единице. В этом случае высота симплекса будет равна 0,86. Координаты вершины нового симплекса (в кодированных значениях) находятся по формуле:

$$x_{i, k+2} = \frac{2}{k} \sum_u x_{iu} - x_i^*,$$

где  $x_{i, k+2}$  – координата новой вершины, являющейся зеркальным отображением отбрасываемой вершины;  $x_i^*$  – координата отбрасываемой вершины;  $\frac{2}{k} \sum_u x_{iu}$  – среднее значение координат вершин симплекса, кроме отбрасываемой.

Для нашего примера координаты точки A' будут:

$$x_{14} = \frac{2}{2} (0,5 + 1) - 0 = 1,5;$$

$$x_{24} = \frac{2}{2} (0,86 + 0) - 0 = 0,86.$$

Теперь необходимо по кодированным значениям точки определить их натуральные значения, т.е. значения факторов при экс-

перименте в точке. Натуральные и кодированные значения факторов связаны формулой:

$$x_i = \frac{\tilde{x}_i - \tilde{x}_{i0}}{\Delta \tilde{x}_i},$$

где  $x_i$  – кодированное значение фактора;  $\tilde{x}_i$  – натуральные значения фактора;  $\Delta \tilde{x}_i$  – интервал варьирования фактора;  $\tilde{x}_{i0}$  – основной уровень фактора.

Подставляя вместо  $x_i$  кодированные значения  $x_1=x_{14}$  и  $x_2=x_{24}$ , получаем:

$$1,5 = \frac{\tilde{x}_1 - 2500}{2000};$$

$$0,86 = \frac{\tilde{x}_2 - 0,003}{0,0012},$$

откуда находим:  $\tilde{x}_1 = 5050$  об/мин,  $\tilde{x}_2 = 0,004$  об/мин. Аналогично находятся значения и для других точек.

Действуя далее по аналогичной схеме, отбрасывая вершины с наименьшими значениями стойкости и добавляя новые, получим движение симплекса, описанное в следующей табл. 4.1.

**Таблица 4.1**

| N  | Симплекс    | Вершина | Частота вращения $X_1$ |        | Подача $X_2$ |       | Стойкость (мин) |
|----|-------------|---------|------------------------|--------|--------------|-------|-----------------|
|    |             |         | Код.                   | Об/мин | Код.         | мм/об |                 |
| 1  | ABC         | A       | 0                      | 2050   | 0            | 0,003 | 9,0             |
| 2  | ABC         | B       | 0,5                    |        | 0,86         |       | 13,2            |
| 3  | ABC         | C       | 1                      |        | 0            |       | 14,6            |
| 4  | A'BC        | A'      | 1,5                    |        | 0,86         |       | 18,0            |
| 5  | A'B'C       | B'      | 2                      |        | 0            |       | 17,0            |
| 6  | A'B'C'      | C'      | 2,5                    |        | 0,86         |       | 21,2            |
| 7  | A'B''C'     | B''     | 2                      | 6050   | 1,72         | 0,005 | 24,8            |
| 8  | A''B''C'    | A''     | 3                      |        | 1,72         |       | 21,6            |
| 9  | A''B''C''   | C''     | 2,5                    |        | 2,58         |       | 22,1            |
| 10 | A'''B''C''  | A'''    | 2,5                    |        | 2,58         |       | 22,8            |
| 11 | A'''B''C''' | C'''    | 1                      |        | 1,72         |       | 23,7            |

Движение симплекса прекращается его вращением вокруг точки  $B''$ . Таким образом, наибольшая стойкость достигается в точке  $B''$ . Оптимальным режимом при этом является следующий – скорость резания  $f=6050$  об/мин и подача  $s=0,005$  об/мин.

### 4.3. Вопросы для самопроверки

1. Для чего и в каких случаях применяются методы поиска экстремума?
2. В чем особенность одномерных методов поиска?
3. Перечислите достоинства и недостатки метода дихотомии.
4. Какой из рассмотренных одномерных методов: дихотомии, Фибоначчи или золотого сечения наиболее эффективен и почему?
5. Что такое интервал неопределенности?
6. Перечислите основные шаги при поиске экстремума методом Фибоначчи.
7. Для чего необходимо рассчитывать количество экспериментальных точек при использовании одномерных методов?
8. В чем сходство и в чем различие методов дихотомии, Фибоначчи и золотого сечения?
9. Зачем требуется определять минимальную длину интервала неопределенности?
10. Чем определяется эффективность метода поиска экстремума?
11. От чего зависит длина интервала неопределенности?
12. Почему один из методов назван именем Фибоначчи?
13. Когда прекращается поиск в одномерных методах?
14. В чем особенность многомерных методов поиска экстремума?
15. Что такое единичные шаги фактора?
16. Что общего и в чем различие между методами Гаусса-Зайделя, МКВ и симплекса?
17. Какой из методов: Гаусса-Зайделя, МКВ или симплекса наиболее эффективен и почему?
18. Когда целесообразно применять метод Гаусса-Зайделя и почему?

19. Какие из многомерных методов наиболее доступны программированию? Обоснуйте свой ответ.

20. Когда заканчивается поиск в методах Гаусса-Зайделя, МКВ и симплекса?

21. Какие параметры управляют точностью поиска в симплекс-методе?

22. Какие требования к объекту исследования должны выполняться при использовании многомерных методов поиска?

23. Что такое симплекс? В чем сущность симплекс-метода?

24. Чем руководствуются при выборе шага фактора при поиске экстремума?

25. Можно ли менять величину шага фактора при поиске экстремума методами Гаусса-Зайделя и МКВ?

26. В чем сущность метода крутого восхождения?

27. Для каких типов математических моделей применим МКВ?

28. Дайте определение градиента функции.

29. Как выбрать базовый фактор?

30. Как рассчитать единичные шаги факторов?

31. Как спланировать серию мысленных опытов при поиске максимума?

32. Как реализовать серию мысленных опытов?

33. Когда применение метода МКВ эффективно?

34. Перечислите достоинства МКВ.

35. В чем заключается идея метода Гаусса-Зайделя?

#### 4.4. Задачи и упражнения

1. Определить значение  $x_{\text{опт}}$ , при котором целевая функция  $Y = 5 \cdot 10^2 - (x - 7 \cdot \Phi)^2$  принимает максимальное значение на интервале  $[0, 1000]$ .  $\Phi$  – число букв в фамилии студента. Положение экстремума определить с погрешностью  $\epsilon = 0,05$  и точностью измерений  $\delta = 20$ .

2. При реализации ДФЭ  $2^{6-3}$  была получена линейная модель вида  $Y = 0,856 - 0,181x_2 - 0,156x_3 + 0,119x_4$ . Факторы  $x_1, x_5, x_6$  – не-

значимые. Используя МКВ, найдите минимальное значение целевой функции. О факторах также известны следующие данные:

| Факторы               | X <sub>1</sub> | X <sub>2</sub> | X <sub>3</sub> | X <sub>4</sub> | X <sub>5</sub> | X <sub>6</sub> |
|-----------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| Основной уровень      | 1000           | 20             | 0,05           | 25             | 15             | 3              |
| Интервал варьирования | 50             | 10             | 0,25           | 25             | 5              | 1              |

3. Используя симплекс-метод, найти оптимальные значения параметров  $x_1$  и  $x_2$ , обеспечивающие минимум целевой функции  $Y = 8 - 4x_1 - 6x_2 + x_1^2 + x_2^2$ , если известны следующие данные о факторах:

| Фактор         | Основной уровень | Интервал варьирования |
|----------------|------------------|-----------------------|
| X <sub>1</sub> | 200              | 5Ф                    |
| X <sub>2</sub> | 30               | 3                     |

Начальное положение симплекса описываются следующими точками:

| Точка | X <sub>1</sub> | X <sub>2</sub> |
|-------|----------------|----------------|
| 1     | 0              | 0              |
| 2     | 1              | 0              |
| 3     | 0,5            | 0,86           |

4. Провести расчет серии десяти мысленных опытов в направлении градиента при стремлении целевой функции к наибольшему значению для следующих исходных данных эксперимента N=2<sup>3</sup>.

| Факторы               | X <sub>1</sub> | X <sub>2</sub> | X <sub>3</sub> |
|-----------------------|----------------|----------------|----------------|
| Основной уровень      | 0,40           | 40             | 60             |
| Интервал варьирования | 0,15           | 100            | 10             |
| b <sub>j</sub>        | 20             | 11,9           | -5,3           |

С какого опыта можно начать реализацию «мысленных опытов»?

## 5. ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ

### 5.1. Основные понятия дисперсионного анализа

В любом эксперименте средние значения измеряемых величин меняются в связи с изменениями качественных, количественных и случайных факторов. Исследование влияния тех или иных факторов на изменчивость средних значений  $Y$  является задачей дисперсионного анализа. Дисперсионный анализ устанавливает, какие из факторов оказывают наибольшее влияние на  $Y$ , какие из них могут быть исключены из модели из-за их незначимости. Степень влияния фактора  $x_i$ , называется эффектом этого фактора и изображается заглавной буквой латинского алфавита. Тогда дисперсионная модель процесса может быть представлена уравнением

$$y = A + B + \dots + F + AB + AC + \dots + GF \pm \varepsilon,$$

где  $A$  – эффект влияния на  $Y$  фактора  $x_1$ ,  $B$  – фактора  $x_2$ ,  $AB$  – взаимодействия  $x_1$   $x_2$  и т.д.;  $\varepsilon$  – ошибка эксперимента.

Чтобы оценить влияние отдельного фактора на  $Y$ , необходимо:

1. Произвести разложение суммарной дисперсии на составляющие, обусловленные независимыми факторами:

$$S_{\text{общ}}^2 \cong S_A^2 + S_B^2 + \dots + S_F^2 + S_{AB}^2 + S_{AC}^2 + \dots + S_{GF}^2 + S_{\text{ош}}^2.$$

2. Оценить значимость соответствующей дисперсии в сравнении с дисперсией ошибки по критерию Фишера. Если  $F_{\text{расч}} = \frac{S_A^2}{S_{\text{ош}}^2} > F_{\text{табл}}$ , то фактор  $A$  значимый.

В таблице для однофакторного дисперсионного анализа приведены наблюдаемые значения целевой функции  $y_{ij}$  при изменении фактора  $x_1$  на  $a$  уровнях ( $i=1,2,\dots, a$ ). На каждом уровне проведено по  $n$  повторных опытов ( $j=1,2,\dots, n$ ). Эксперимент состоит из  $an$  опытов.

| Номер уровня фактора | Результаты испытаний                                                 | Среднее значение | Дисперсия |
|----------------------|----------------------------------------------------------------------|------------------|-----------|
| III=1                | $n_{11}b_{n_{12}}b_{...}b_{n_{1o}}b_{...}b_{n_{1T}}$                 | $\bar{y}_{o1}$   | $Y_1^2$   |
| III=2                | $n_{21}b_{n_{22}}b_{...}b_{n_{2o}}b_{...}b_{n_{2T}}$                 | $\bar{y}_{o2}$   | $Y_2^2$   |
| ...                  | ...                                                                  | ...              | ...       |
| III=φ                | $n_{\phi 1}b_{n_{\phi 2}}b_{...}b_{n_{\phi o}}b_{...}b_{n_{\phi n}}$ | $\bar{y}_a$      | $S_a^2$   |

Дисперсионное уравнение имеет вид  $y=A \pm \varepsilon$ .

Общая дисперсия:  $S_{общ}^2 = \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y})^2}{P_{общ} = an - 1}$ ;  $\bar{y}_i = \frac{\sum_{i=1}^n y_{ij}}{n}$ ;

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{y}_i}{a}.$$

Дисперсия на каждом уровне:  $S_i^2 = \frac{\sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y})^2}{n - 1}$ .

Дисперсия фактора  $x_1$ :  $S_a^2 \cong S_{общ}^2 - S_{oш}^2$

Проверка значимости:  $F_{расч} = \frac{S_a^2}{S_{oш}^2} > \alpha, f_1, f_2^{табл}$ ;  $f_1 = k - 1$ ;  
 $f_2 = a(n - 1)$ .

В табл. 5.1 приведены для двухфакторного дисперсионного анализа наблюдаемые значения целевой функции  $y_{ijk}$  при изменении фактора  $x_1$  на **a** уровнях ( $i=1,2,3,...,a$ ), фактора  $x_2$  на **b** уровнях ( $j=1,2,3,...,b$ ). В каждой точке эксперимента проведено по **n** повторных опытов ( $k=1,2,3,...,n$ ). Эксперимент проведен при всех возможных сочетаниях уровней факторов  $x_1$  и  $x_2$  содержит **ab** уровней и состоит из **abn** опытов.

**Таблица 5.1**

| $X_1$ | $X_2$          |                |     |                | Суммы               |
|-------|----------------|----------------|-----|----------------|---------------------|
|       | j=1            | j=2            | ... | j=b            |                     |
| i=1   | $y_{111}$      | $y_{121}$      | ... | $y_{1b1}$      | $y_{1 \cdot 1}$     |
|       | $y_{112}$      | $y_{122}$      | ... | $y_{1b2}$      | $y_{1 \cdot 2}$     |
|       | ...            | ...            | ... | ...            | ...                 |
|       | $y_{11n}$      | $y_{12n}$      | ... | $y_{1bn}$      | $y_{1 \cdot n}$     |
| суммы | $y_{11 \cdot}$ | $y_{12 \cdot}$ | ... | $y_{1b \cdot}$ | $y_{1 \cdot \cdot}$ |
| i=2   | $y_{211}$      | $y_{221}$      | ... | $y_{2b1}$      | $y_{2 \cdot 1}$     |
|       | $y_{212}$      | $y_{222}$      | ... | $y_{2b2}$      | $y_{2 \cdot 2}$     |

Окончание табл. 5.1

|       |                     |                     |     |                     |                         |
|-------|---------------------|---------------------|-----|---------------------|-------------------------|
|       | ...                 | ...                 | ... | ...                 | ...                     |
|       | $y_{21n}$           | $y_{22n}$           | ... | $y_{2bn}$           | $y_{2 \cdot n}$         |
| суммы | $y_{21 \cdot}$      | $y_{22 \cdot}$      | ... | $y_{2b \cdot}$      | $y_{2 \cdot \cdot}$     |
| ...   | ...                 | ...                 | ... | ...                 | ...                     |
| $i=a$ | $y_{a11}$           | $y_{a21}$           | ... | $y_{ab1}$           | $y_{a1 \cdot}$          |
|       | $y_{a12}$           | $y_{a22}$           | ... | $y_{ab2}$           | $y_{a2 \cdot}$          |
|       | ...                 | ...                 | ... | ...                 | ...                     |
|       | $y_{a1n}$           | $y_{a2n}$           | ... | $y_{abn}$           | $y_{a \cdot n}$         |
| суммы | $y_{a1 \cdot}$      | $y_{a2 \cdot}$      | ... | $y_{ab \cdot}$      | $y_{a \cdot \cdot}$     |
| суммы | $y_{\cdot 1 \cdot}$ | $y_{\cdot 2 \cdot}$ | ... | $y_{\cdot b \cdot}$ | $y_{\cdot \cdot \cdot}$ |
|       |                     |                     |     |                     |                         |

Введем обозначения сумм и средних значений, приняв  $(\cdot)$  за символ суммирования по соответствующему индексу:

$$\sum_{k=1}^n y_{ijk} = y_{ij \cdot}; \quad \bar{y}_{ij} = \frac{\bar{y}_{ij \cdot}}{n}; \quad \sum_{i=1}^a y_{ij \cdot} = y_{\cdot j \cdot}; \quad \bar{y}_{\cdot j \cdot} = \frac{y_{\cdot j \cdot}}{an};$$

$$\sum_{j=1}^n y_{ij \cdot} = y_{i \cdot \cdot}; \quad \bar{y}_{i \cdot \cdot} = \frac{y_{i \cdot \cdot}}{n}; \quad \sum_{i=1}^a y_{i \cdot \cdot} = y_{\cdot \cdot \cdot}; \quad \bar{y}_{\cdot \cdot \cdot} = \frac{y_{\cdot \cdot \cdot}}{abn}.$$

Дисперсионное уравнение двухфакторного эксперимента имеет вид

$$y = A + b + AB + e.$$

Общая дисперсия эксперимента

$$S_{\text{общ}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c (y_{ijk} - \bar{y}_{\cdot \cdot \cdot})^2}{f_{\text{общ}}},$$

где  $f_{\text{общ}} = abn - 1$  – общее число степеней свободы.

Его можно представить в виде

$$abn - 1 = (a - 1) + (b - 1) + (a - 1)(b - 1) + ab(n - 1),$$

в чем легко убедиться, раскрыв скобки.

Каждое из слагаемых последнего уравнения представляет собой число степеней свободы соответствующих факторов, их взаимодействий и ошибки опыта, т.е.

$$f_{\text{общ}} = f_A + f_B + f_{AB} + f_{\text{ош}} \quad (5.1)$$

Сумма квадратов отклонений

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - \bar{y}_{...})^2 = \\ &= \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n [(y_{i..} - \bar{y}_{...}) + (y_{.j.} - \bar{y}_{...}) \\ &+ (\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{...}) + (y_{ijk} - \bar{y}_{ij.})]^2 = \\ &= \sum \sum \sum (y_{i..} - \bar{y}_{...})^2 \\ &+ \sum \sum \sum (y_{.j.} - \bar{y}_{...})^2 \\ &+ \sum \sum \sum (\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{...})^2 \\ &+ \sum \sum \sum (y_{ijk} - \bar{y}_{ij.})^2. \end{aligned}$$

Доказано, что все удвоенные произведения равны нулю. Если ввести обозначения суммы квадратов отклонений:

$$\begin{aligned} SS_A &= \sum \sum \sum (y_{i..} - \bar{y}_{...})^2; \\ SS_B &= \sum \sum \sum (y_{.j.} - \bar{y}_{...})^2 \\ SS_{AB} &= \sum \sum \sum (\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{...})^2; \end{aligned}$$

$$SS_{\text{ош}} = \sum \sum \sum (y_{ijk} - \bar{y}_{ij\cdot})^2.$$

то получим

$$SS_{\text{общ}} = SS_A + SS_B + SS_{AB} + SS_{\text{ош}} \quad (5.2)$$

Уравнения (5.1) и (5.2) отражают основные свойства общей дисперсии. Ее числитель и знаменатель можно разложить соответственно на сумму квадратов отклонений и сумму степеней свободы каждого эффекта модели.

Расчет квадратов отклонений удобно проводить по преобразованным формулам, которые сведены в табл. 5.2

**Таблица 5.2**

| Фактор                           | f          | SS                                                                                                                                                                             | Дисперсия, $S^2$                                           |
|----------------------------------|------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------|
| $X_1$                            | a-1        | $SS_A = \sum_{i=1}^a \frac{y^2_{i\cdot\cdot}}{nb} - \frac{\bar{y}^2}{abn}$                                                                                                     | $S_A^2 = \frac{SS_A}{a-1}$                                 |
| $X_2$                            | b-1        | $SS_B = \sum_{j=1}^b \frac{y^2_{\cdot j\cdot}}{na} - \frac{\bar{y}^2}{abn}$                                                                                                    | $S_B^2 = \frac{SS_B}{b-1}$                                 |
| $X_1 X_2$                        | (a-1)(b-1) | $SS_{AB} = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \frac{y^2_{ij\cdot}}{n} - \sum_{i=1}^a \frac{y^2_{i\cdot\cdot}}{bn} - \sum_{j=1}^b \frac{y^2_{\cdot j\cdot}}{an} - \frac{\bar{y}^2}{abn}$ | $S_{AB}^2 = \frac{SS_{AB}}{(a-1)(b-1)}$                    |
| общая дисперсия                  | abn-1      | $SS_{\text{общ}} = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n y^2_{ijk} - \frac{\bar{y}^2}{abn}$                                                                                   |                                                            |
| ошибка опыта (воспроизводимости) | ab(n-1)    | $SS_{\text{ош}} = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n y^2_{ijk} - \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \frac{y^2_{ij\cdot}}{n}$                                                        | $S^2_{\text{ош}} = \frac{SS_{\text{ош}}}{ab(n-1)} = S_y^2$ |

Выбор  $f$  и  $SS$  (сумма квадратов отклонений) для любого  $k$  производится по следующему алгоритму.

Для числа степеней свободы  $f$ :

1. По фактору число степеней свободы на единицу меньше числа уровней по этому фактору  $f_A = a - 1$ ;  $f_B = b - 1$ ;  $f_C = c - 1$  и т.д.

2. Число степеней свободы взаимодействия равно произведению числа степеней свободы взаимодействия факторов

$$f_{AB} = f_A f_B = (a - 1)(b - 1); f_{ABC} = f_A f_B f_C.$$

3. Общее число степеней свободы равно общему числу опытов без единицы.

4. Число степеней свободы ошибки  $f_{\text{ош}}$  равно числу точек эксперимента, умноженному на  $(n-1)$ .

Для двух факторов  $f_{\text{ош}} = ab(n-1)$ ;

для трех факторов –  $f_{\text{ош}} = abc(n-1)$ .

Если число опытов в каждой точке неодинаково, то для двух факторов:

$$f_{\text{общ}} = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b n_{ij} - 1; f_{\text{ош}} = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (n_{ij} - 1).$$

Сумма квадратов отклонений SS определяется:

1. Общая сумма квадратов отклонений равна сумме квадратов отклонений каждого фактора модели эксперимента. Для  $k=3$  имеем:

$$SS_{\text{общ}} = SS_A + SS_B + SS_C + SS_{AB} + SS_{AC} + SS_{ABC} + SS_{\text{ош}}.$$

2. Сумма квадратов фактора будет содержать такое же количество членов и с такими же знаками, что и разложение выражения для числа степеней свободы:

$$f_{AB} = (a - 1)(b - 1) = ab - a - b + 1.$$

В нашем случае будем иметь четыре члена.

3. Каждый член суммы квадратов фактора содержит количество сумм, равное количеству параметров в указанном разложении. В нашем случае первый член разложения равен  $ab$ , поэтому первый член суммы квадратов имеет  $\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b$ . Для второго члена –  $\sum_{i=1}^a$  и т.д. Последний член не содержит сумм.

4. Под знаками сумм в числителе записываем  $y^2$  с индексами, по которым производится суммирование, заменяя остальные индексы (\*) и соответственно выписывая их конечные значения в знаменатель.

Пример:

Для случая трех факторов:  $\Phi=3$ ,  $i = 1,2,...,\alpha$ ;  $j = 1,2,...,b$ ;  $s=1,2,...,c$ . Число опытов одинаково для всех факторов  $k=1,2,...,n$ :

$$f_{ABC} = (a-1)(b-1)(c-1) \\ = abc - ab - ca - bc - a + b + c - 1;$$

$$SS_{ABC} = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{s=1}^c \frac{y_{ijs..}^2}{cn} - \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \frac{y_{ijj..}^2}{cn} - \sum_{i=1}^a \sum_{s=1}^c \frac{y_{i..s.}^2}{nb} - \sum_{j=1}^b \sum_{s=1}^c \frac{y_{.js.}^2}{an} \\ + \sum_{i=1}^a \frac{y_{i...}^2}{bcn} + \sum_{j=1}^b \frac{y_{.j..}^2}{acn} + \sum_{s=1}^c \frac{y_{..s.}^2}{abn} + \frac{y_{...}^2}{abc}.$$

## 5.2. Латинские и греко-латинские квадраты

Рассмотрим трехфакторный эксперимент при одинаковом количестве уровней  $P$ . Прямой перебор уровней потребует  $N=P^3$  опытов. Число опытов можно сократить, если воспользоваться ДФЭ по схеме латинского квадрата.

Латинскими квадратом называется таблица, в которой содержится  $P$  столбцов и  $P$  строк и каждый элемент присутствует только один раз, как в столбце, так и в строке.

В таблице показаны стандартные латинские квадраты 2x2, 3x3 и 4x4.

Таблица 5.3. Примеры стандартных латинских квадратов

| Размер                        | 2x2                                                                       | 3x3 | 4x4 |   |   |                                                                                                                                      |   |   |   |   |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                     |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|-------------------------------|---------------------------------------------------------------------------|-----|-----|---|---|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Примеры стандартных квадратов | <table><tr><td>A</td><td>B</td></tr><tr><td>B</td><td>A</td></tr></table> | A   | B   | B | A | <table><tr><td>A</td><td>B</td><td>C</td></tr><tr><td>B</td><td>C</td><td>A</td></tr><tr><td>C</td><td>A</td><td>B</td></tr></table> | A | B | C | B | C | A | C | A | B | <table><tr><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td>D</td></tr><tr><td>B</td><td>C</td><td>D</td><td>A</td></tr><tr><td>C</td><td>D</td><td>A</td><td>B</td></tr><tr><td>D</td><td>A</td><td>B</td><td>C</td></tr></table> | A | B | C | D | B | C | D | A | C | D | A | B | D | A | B | C |
|                               | A                                                                         | B   |     |   |   |                                                                                                                                      |   |   |   |   |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                     |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|                               | B                                                                         | A   |     |   |   |                                                                                                                                      |   |   |   |   |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                     |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|                               | A                                                                         | B   | C   |   |   |                                                                                                                                      |   |   |   |   |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                     |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|                               | B                                                                         | C   | A   |   |   |                                                                                                                                      |   |   |   |   |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                     |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| C                             | A                                                                         | B   |     |   |   |                                                                                                                                      |   |   |   |   |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                     |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| A                             | B                                                                         | C   | D   |   |   |                                                                                                                                      |   |   |   |   |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                     |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| B                             | C                                                                         | D   | A   |   |   |                                                                                                                                      |   |   |   |   |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                     |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| C                             | D                                                                         | A   | B   |   |   |                                                                                                                                      |   |   |   |   |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                     |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| D                             | A                                                                         | B   | C   |   |   |                                                                                                                                      |   |   |   |   |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                     |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |

Например, применение матрицы  $3 \times 3$  для случая трехфакторного эксперимента даст нам следующую матрицу планирования:

| X <sub>1</sub> | X <sub>2</sub> |                |                |
|----------------|----------------|----------------|----------------|
|                | B <sub>1</sub> | B <sub>2</sub> | B <sub>3</sub> |
| A <sub>1</sub> | C <sub>1</sub> | C <sub>2</sub> | C <sub>3</sub> |
| A <sub>2</sub> | C <sub>2</sub> | C <sub>3</sub> | C <sub>1</sub> |
| A <sub>3</sub> | C <sub>3</sub> | C <sub>1</sub> | C <sub>2</sub> |

Фактор X<sub>1</sub> имеет уровни: A<sub>1</sub>, A<sub>2</sub>, A<sub>3</sub>; X<sub>2</sub>-B<sub>1</sub>, B<sub>2</sub>, B<sub>3</sub>; X<sub>3</sub>-C<sub>1</sub>, C<sub>2</sub>, C<sub>3</sub>. Номера элементов по столбцам и строкам соответствуют уровням 1-го и 2-го факторов, а третий выбран по латинским буквам квадрата. По факторам X<sub>1</sub> и X<sub>2</sub> произведен полный перебор уровней (ПФЭ). Далее к каждому сочетанию этих факторов прибавлен третий X<sub>3</sub> на уровне, выбранном в соответствии с латинским квадратом. Всего требуется  $3 \times 3 = 9$  опытов, что значительно дешевле ПФЭ ( $3^3 = 27$  опытов).

Для четырех факторов хорошими свойствами обладают планы, построенные по схеме греко-латинского квадрата. Греко-латинским квадратом называется матрица, имеющая Р строк и Р столбцов, составленная из сдвоенных элементов, каждый из которых по одному разу представлен в каждой строке и каждом столбце. Например, при Р=3 имеем

|        |        |        |
|--------|--------|--------|
| A<br>α | B<br>β | C<br>γ |
| B<br>γ | C<br>α | A<br>β |
| C<br>β | A<br>γ | B<br>α |

Составим план эксперимента по схеме греко-латинского квадрата для четырех факторов. Фактор X<sub>1</sub> имеет уровни:

| X <sub>1</sub> | X <sub>2</sub>                |                               |                               |
|----------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
|                | B <sub>1</sub>                | B <sub>2</sub>                | B <sub>3</sub>                |
| A <sub>1</sub> | C <sub>1</sub> D <sub>1</sub> | C <sub>2</sub> D <sub>2</sub> | C <sub>3</sub> D <sub>3</sub> |
| A <sub>2</sub> | C <sub>2</sub> D <sub>2</sub> | C <sub>3</sub> D <sub>1</sub> | C <sub>1</sub> D <sub>2</sub> |
| A <sub>3</sub> | C <sub>3</sub> D <sub>3</sub> | C <sub>1</sub> D <sub>3</sub> | C <sub>2</sub> D <sub>1</sub> |

По факторам X<sub>1</sub> и X<sub>2</sub> произведен полный перебор уровней. Уровни факторов X<sub>3</sub> и X<sub>4</sub> выбраны по буквам греко-латинского квадрата. Общее количество опытов 3\*3=9 вместо 3<sup>4</sup>=81. В греко-латинском квадрате имеется P<sup>2</sup> различных комбинаций уровней вместо P<sup>4</sup> в ПФЭ. Поэтому греко-латинские квадраты представляют собой 1/P<sup>2</sup> реплику ПФЭ.

Если наложить друг на друга три ортогональных латинских квадрата, то получим латинский квадрат третьего порядка. Он называется гипергреко-латинским квадратом.

Таким образом, при P уровнях в план можно ввести k+1 фактор. Гипергреко-латинские квадраты представляют собой 1/P<sup>3</sup> реплику ПФЭ. Такие обычно применяют на первых стадиях исследования процесса, когда приходится проводить сложный перебор качественных и количественных факторов, с тем чтобы выделить наиболее перспективные. По принципу латинских и греко-латинских квадратов можно построить латинские и греко-латинские кубы. Однако на практике такие планы при P>3 применяются редко из-за большого числа опытов.

На основе латинских квадратов разработаны сбалансированные и несбалансированные планы, позволяющие экономнее организовать эксперимент. Сбалансированными планами называются такие, у которых в каждой строке и каждом столбце одинаковые уровни встречаются одинаковое число раз.

Планы также могут быть полноблочными и неполноблочными. Полноблочными называются такие планы, в которых опыты проводятся во всех точках плана. В неполноблочных планах часть опытов пропускается. Примером несбалансированных и неполноблочных планов являются квадраты Юдена:

| X <sub>1</sub> | X <sub>2</sub> |   |   |
|----------------|----------------|---|---|
|                | 1              | 2 | 3 |
| 1              | G              | A | C |
| 2              | A              | B | D |
| 3              | B              | C | E |
| 4              | C              | D | F |
| 5              | D              | E | G |
| 6              | E              | F | A |
| 7              | F              | G | B |

Факторы X<sub>1</sub> и X<sub>3</sub> имеют одинаковое число уровней. Всего комбинаций уровней 7х3х7=147. Реализуется только 21 опыт. Несбалансированы факторы X<sub>1</sub> и X<sub>3</sub>.

### Пример 1

Необходимо изучить давление металла на валки при холодной прокатке ленты в зависимости от трех факторов: величины зазора между валками, толщины исходной полосы и типа смазки. Примем, что все независимые факторы изменяются на трех уровнях: X<sub>1</sub>=1,2,3; X<sub>2</sub>=1,2,3; фактор X<sub>3</sub> – качественный – это три эмульсии различного состава.

Проведем эксперимент по схеме латинского квадрата 3х3:

| X <sub>1</sub> | X <sub>2</sub>      |                     |                     | Ȳ    |
|----------------|---------------------|---------------------|---------------------|------|
|                | 1                   | 2                   | 3                   |      |
| 1              | Э <sub>1</sub> (25) | Э <sub>2</sub> (31) | Э <sub>3</sub> (38) | 31   |
| 2              | Э <sub>2</sub> (35) | Э <sub>3</sub> (42) | Э <sub>1</sub> (48) | 41,7 |
| 3              | Э <sub>3</sub> (43) | Э <sub>1</sub> (35) | Э <sub>2</sub> (43) | 35,7 |
| Ȳ              | 29,7                | 36                  | 43                  |      |

В круглых скобках приведены значения параметра оптимизации Ȳ (кг/мм<sup>2</sup>). Для уровней фактора X<sub>3</sub> значения параметра оптимизации выпишем в отдельную таблицу:

| Э <sub>1</sub> | Э <sub>2</sub> | Э <sub>3</sub> |
|----------------|----------------|----------------|
| 25             | 31             | 38             |
| 48             | 35             | 42             |
| 35             | 43             | 29             |
| Ȳ              |                |                |
| 36             | 36,3           | 36,3           |

По средним значениям построим графические зависимости  $Y$  от каждого фактора в отдельности.

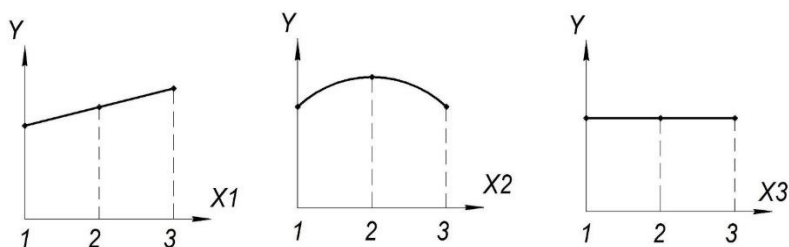


Рис. 5.1. Графические зависимости параметра оптимизации от факторов

Подберем эмпирические формулы, описывающие частные зависимости:

$$Y = a_1 + b_1x_1; Y = a_2 + b_2x_2 + c_2x_2^2; Y = a_3$$

Так как все факторы независимые, то результирующее уравнение будет иметь вид

$$Y = a_1 + a_2 + a_3 + b_1x_1 + b_2x_2 + c_2x_2^2.$$

Все коэффициенты модели могут быть определены методом наименьших квадратов (МНК).

## Пример 2

Составить план для изучения факторов, влияющих на популярность певицы. Успех певицы зависит от репертуара, наряда, аудитории и т.п. Показатель успеха – продолжительность аплодисментов.

Фактор  $X_1$  хорошо подготовленные арии, имеет следующие уровни:

1. Ария Далилы («Самсон и Далила», Сен-Санс).
2. Ария Любаши («Царская невеста», Римский-Корсаков).
3. Частушки Варвары («Не только любовь», Р. Щедрин).
4. Хабанера («Кармен», Бизе).
5. Песнь Леля («Снегурочка», Римский-Корсаков).

Фактор  $X_2$  – наряды:

- А. Черное узкое платье с глубоким декольте.
- В. Синее бархатное платье с серебристой отделкой.
- С. Русский сарафан.

Фактор  $X_3$  – зрительские аудитории:

- α. Консерватория.
- β. Дворец культуры завода.
- γ. Сельский клуб.
- δ. Театр.
- ε. Актальный зал вуза.

Составим следующий план:

| Арии | Наряды |   |   |
|------|--------|---|---|
|      | А      | В | С |
| 1    | α      | β | γ |
| 2    | β      | γ | δ |
| 3    | γ      | δ | ε |
| 4    | δ      | ε | α |
| 5    | ε      | α | β |

Всего комбинаций уровней  $5 \times 3 \times 5 = 75$ . Реализуется только 15. План – неполноблочный и несбалансированный. Несбалансированы арии и аудитории.

### 5.3. Вопросы для самопроверки

1. Что такое дисперсионный анализ?
2. Для каких целей применяется дисперсионный анализ?
3. Каковы основные этапы проведения дисперсионного анализа?
4. Как подсчитать дисперсию ошибки опыта при однофакторном дисперсионном анализе?
5. Как подсчитать ошибку опыта при двухфакторном дисперсионном анализе?

6. Назовите основные параметры, влияющие на ошибку опыта при двухфакторном дисперсионном анализе.

7. Что называется латинским квадратом?

8. В чем отличие греческо-латинского квадрата от латинского?

9. Какие планы называются сбалансированными и несбалансированными? Поясните на примерах.

10. Чем отличаются полноблочные планы от неполноблочных? Приведите примеры.

11. Какое предельное число факторов может использоваться в планах, построенных по принципу греко-латинских квадратов?

12. По какому принципу заполняются клетки греко-латинского квадрата?

13. Как рассчитать коэффициенты математической модели по данным греко-латинского квадрата?

#### 5.4. Задачи и упражнения

1. Определите, какую реплику ПФЭ  $3^4$  составляет греко-латинский квадрат  $3 \times 3$ .

2. Определите, какую реплику ПФЭ  $4^4$  составляет греко-латинский квадрат  $4 \times 4$ .

3. Определите, какую реплику ПФЭ  $5^4$  составляет греко-латинский квадрат  $5 \times 5$ .

4. Определите, какую реплику РФЭ  $4^5$  составляет гипергреко-латинский квадрат  $4 \times 4$ .

5. В клетках таблицы приведены результаты 4-факторного эксперимента, спланированного на 5 уровнях с использованием греко-латинского квадрата по факторам  $x_3$  и  $x_4$ .

| $X_1$ | $X_2$              |                    |                    |                  |                  |
|-------|--------------------|--------------------|--------------------|------------------|------------------|
|       | $B_1$              | $B_2$              | $B_3$              | $B_4$            | $B_5$            |
| $a_1$ | $A\gamma$<br>512   | $D\epsilon$<br>601 | $E\delta$<br>643   | $C\alpha$<br>654 | $B\beta$<br>744  |
| $a_2$ | $B\delta$<br>503   | $E\alpha$<br>502   | $A\epsilon$<br>588 | $D\beta$<br>616  | $C\gamma$<br>712 |
| $a_3$ | $C\epsilon$<br>520 | $A\beta$<br>376    | $B\alpha$<br>411   | $E\gamma$<br>579 | $D\delta$<br>513 |

|       |                  |                  |                  |                       |                       |
|-------|------------------|------------------|------------------|-----------------------|-----------------------|
| $a_4$ | $E\beta$<br>347  | $C\delta$<br>655 | $D\gamma$<br>438 | $B\varepsilon$<br>562 | $A\alpha$<br>319      |
| $a_5$ | $D\alpha$<br>220 | $B\gamma$<br>333 | $C\beta$<br>299  | $A\delta$<br>435      | $E\varepsilon$<br>583 |

Факторы изменяются на следующих уровнях:

$x_1$ - $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ ;  $x_2$ - $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5$ ;  $x_3$ - $A, B, C, D, E$ ;  $x_4$ - $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ .

Требуется построить математическую модель.

## СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Блантер, М.Е. Методика исследования металлов и обработка экспериментальных данных / М.Е. Блантер. – М.: Metallurgizdat, 1952.
2. Пустовалов, Г.Е. Простейшие физические измерения и их обработка / Г.Е. Пустовалов, Е.В. Галилаева. – М.: МГУ, 1967.
3. Пустыльник, Е.И. Статистические методы анализа и обработки наблюдений / Е.И. Пустыльник. – М.: Наука, 1968.
4. Зайдель, А.Н. Элементарные оценки ошибок измерения / А.Н. Зайдель. – Л.: Наука, 1968.
5. Щиголев, Е.М. Математическая обработка наблюдений / Е.М. Щиголев. – М.: Наука, 1969.
6. Гречников, Ф.В. Планирование и обработка на ЭВМ результатов исследований процессов ОМД в авиастроении / Ф.В. Гречников, А.А. Игуменов. – Куйбышев: КуАИ, 1987.
7. Каргин, В.Р. Основы системного проектирования и совершенствования процессов ОМД / В.Р. Каргин. – Куйбышев: КуАИ, 1990.
8. Адлер, Ю.П. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий / Ю.П. Адлер, Е.В. Маркова, Ю.В. Грановский. – М.: Наука, 197.
9. Шенк, Х. Теория инженерного эксперимента / Х. Шенк. – М.: Мир, 1972.
10. Румшинский, Л.З. Математическая обработка результатов эксперимента / Л.З. Румшинский. – М.: Наука, 1971.
11. Каргин, В.Р. Методология научных исследований / В.Р. Каргин. – Самара: СГАУ, 2014.

12. Ванин, В.А. Научные исследования в технологии машиностроения / В.А. Ванин, В.Г. Однолько, С.И. Нестеров [и др.]. – Тамбов: Издательство Тамбовского государственного технического университета, 2009.
13. Круглов, В.И. Методология научных исследований в авиа и ракетостроении / В.И. Круглов, В.И. Ершов, А.С. Чумадин [и др.]. – М.: Логос, 2011.
14. Кассандрова, О.Н. Обработка результатов наблюдений / О.Н. Кассандрова, В.В. Лебедев. – М.: Наука, 1970.
15. Федоров, В.В. Теория оптимального эксперимента (планирование регрессионных экспериментов) / В.В. Федоров – М.: Наука, 1971.
16. Мельниченко, А.С. Анализ данных в материаловедении. Ч. 1. / А.С. Мельниченко. – М.: МИСИС, 2013.
17. Мельниченко, А. С. Анализ данных в материаловедении. Ч. 2. / А. С. Мельниченко. – М.: МИСИС, 2014.
18. Быков, В.В. Научный эксперимент / В.В. Быков. – М.: Наука, 1989.
19. СТО СГАУ 02068410-009-2007 Обработка и оформление результатов измерений: дата введения 2007-11-01 / Отдел стандартизации и метрологии СГАУ. – Самара, 2007.
20. СТО СГАУ 02068410-008-2007 Научно-исследовательская работа. Основные положения: дата ведения 2007-11-01 / Отдел стандартизации и метрологии СГАУ. – Самара, 2007.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица П1. Коэффициенты Стьюдента  $t_{\alpha,n}$

| n-1 | $\alpha$ |      |      |      |       |
|-----|----------|------|------|------|-------|
|     | 0,10     | 0,05 | 0,02 | 0,01 | 0,001 |
| 1   | 6,31     | 12,7 | 31,8 | 63,7 | 636,6 |
| 2   | 2,92     | 4,30 | 6,96 | 9,92 | 31,6  |
| 3   | 2,35     | 3,18 | 4,54 | 5,84 | 12,9  |
| 4   | 2,13     | 2,78 | 3,75 | 4,60 | 8,61  |
| 5   | 2,02     | 2,57 | 3,36 | 4,03 | 6,87  |
| 6   | 1,94     | 2,45 | 3,14 | 3,71 | 5,96  |
| 7   | 1,89     | 2,36 | 3,00 | 3,50 | 5,41  |
| 8   | 1,86     | 2,31 | 2,90 | 3,36 | 5,04  |
| 9   | 1,83     | 2,26 | 2,82 | 3,25 | 4,78  |
| 10  | 1,81     | 2,23 | 2,76 | 3,17 | 4,59  |
| 11  | 1,80     | 2,20 | 2,72 | 3,11 | 4,44  |
| 12  | 1,78     | 2,18 | 2,68 | 3,05 | 4,32  |
| 13  | 1,77     | 2,16 | 2,65 | 3,01 | 4,22  |
| 14  | 1,76     | 2,14 | 2,62 | 2,98 | 4,14  |
| 15  | 1,75     | 2,13 | 2,60 | 2,95 | 4,07  |
| 16  | 1,75     | 2,12 | 2,58 | 2,92 | 1,02  |
| 17  | 1,74     | 2,11 | 2,57 | 2,90 | 3,97  |
| 18  | 1,73     | 2,10 | 2,55 | 2,88 | 3,92  |
| 19  | 1,73     | 2,09 | 2,54 | 2,86 | 3,88  |
| 20  | 1,73     | 2,09 | 2,53 | 2,85 | 3,85  |
| 21  | 1,72     | 2,08 | 2,52 | 2,83 | 3,82  |
| 22  | 1,72     | 2,07 | 2,51 | 2,82 | 3,79  |
| 23  | 1,71     | 2,07 | 2,50 | 2,81 | 3,77  |
| 24  | 1,71     | 2,06 | 2,49 | 2,80 | 3,75  |
| 25  | 1,71     | 2,06 | 2,49 | 2,79 | 3,73  |
| 26  | 1,70     | 2,06 | 2,48 | 2,78 | 3,71  |
| 27  | 1,70     | 2,05 | 2,47 | 2,77 | 3,69  |
| 28  | 1,70     | 2,05 | 2,47 | 2,76 | 3,67  |
| 29  | 1,70     | 2,05 | 2,46 | 2,76 | 3,66  |
| 30  | 1,69     | 2,04 | 2,46 | 2,75 | 3,65  |
| 32  | 1,69     | 2,03 | 2,45 | 2,74 | 3,62  |
| 34  | 1,69     | 2,03 | 2,44 | 2,73 | 3,60  |

Окончание табл. П1

|    |      |      |      |      |       |
|----|------|------|------|------|-------|
| 36 | 1,69 | 2,03 | 2,53 | 2,72 | 3,58  |
| 38 | 1,68 | 2,02 | 2,53 | 2,71 | 3,57  |
| 40 | 1,68 | 2,02 | 2,42 | 2,70 | 3,55  |
| 42 | 1,68 | 2,02 | 2,42 | 2,70 | 3,54  |
| 44 | 1,68 | 2,02 | 2,41 | 2,69 | 3,53  |
| 46 | 1,68 | 2,01 | 2,41 | 2,69 | 3,52  |
| 48 | 1,68 | 2,01 | 2,41 | 2,68 | 3,51  |
| 50 | 1,68 | 2,01 | 2,40 | 2,68 | 3, 50 |
| 55 | 1,67 | 2,00 | 2,40 | 2,67 | 3,48  |
| 60 | 1,67 | 2,00 | 2,39 | 2,66 | 3, 46 |
| 65 | 1,67 | 2,00 | 2,39 | 2,65 | 3,45  |

**Таблица П2. Значения F критерия Фишера при 5%-ном уровне  
значимости**

| $f_1$ | $f_2$ |       |       |       |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|       | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 12    | 24    |
| 1     | 164,4 | 199,5 | 215,7 | 224,6 | 230,2 | 234,0 | 244,9 | 249,0 | 254,3 |
| 2     | 18,5  | 12,2  | 19,2  | 19,3  | 19,3  | 19,3  | 19,4  | 19,4  | 19,5  |
| 3     | 10,1  | 9,6   | 9,3   | 9,1   | 9,0   | 8,9   | 8,7   | 8,6   | 8,5   |
| 4     | 7,7   | 6,9   | 6,6   | 6,4   | 6,3   | 6,3   | 5,9   | 5,8   | 5,6   |
| 5     | 6,6   | 5,8   | 5,4   | 5,2   | 5,1   | 5,0   | 4,7   | 4,5   | 4,4   |
| 6     | 6,0   | 5,1   | 4,8   | 4,5   | 4,4   | 4,3   | 4,0   | 3,8   | 3,7   |
| 7     | 5,5   | 4,7   | 4,4   | 4,1   | 4,0   | 3,9   | 3,3   | 3,4   | 3,2   |
| 8     | 5,3   | 4,5   | 4,1   | 3,8   | 3,7   | 3,6   | 3,3   | 3,1   | 2,7   |
| 9     | 5,1   | 4,3   | 3,9   | 3,6   | 3,5   | 3,4   | 3,1   | 2,9   | 2,5   |
| 10    | 5,0   | 4,1   | 3,7   | 3,5   | 3,3   | 3,2   | 2,9   | 2,7   | 2,4   |
| 11    | 4,8   | 4,0   | 3,6   | 3,4   | 3,2   | 3,1   | 2,8   | 2,6   | 2,3   |
| 12    | 4,8   | 3,9   | 3,5   | 3,3   | 3,1   | 3,0   | 2,7   | 2,5   | 2,2   |
| 13    | 4,7   | 3,8   | 3,4   | 3,2   | 3,0   | 2,9   | 2,6   | 2,4   | 2,1   |
| 14    | 4,6   | 3,7   | 3,3   | 3,1   | 3,0   | 2,9   | 2,5   | 2,3   | 2,1   |
| 15    | 4,5   | 3,7   | 3,3   | 3,1   | 2,9   | 2,8   | 2,5   | 2,3   | 2,0   |
| 16    | 4,5   | 3,6   | 3,2   | 3,0   | 2,9   | 2,7   | 2,4   | 2,2   | 2,0   |
| 17    | 4,5   | 3,6   | 3,2   | 3,0   | 2,8   | 2,7   | 2,4   | 2,2   | 1,9   |
| 18    | 4,4   | 3,6   | 3,2   | 2,9   | 2,8   | 2,7   | 2,3   | 2,1   | 1,9   |
| 19    | 4,4   | 3,5   | 3,1   | 2,9   | 2,7   | 2,6   | 2,3   | 2,1   | 1,9   |
| 20    | 4,4   | 3,5   | 3,1   | 2,9   | 2,7   | 2,6   | 2,3   | 2,1   | 1,8   |
| 22    | 4,3   | 3,4   | 3,1   | 2,8   | 2,7   | 2,6   | 2,1   | 2,0   | 1,7   |
| 24    | 4,3   | 3,4   | 3,0   | 2,8   | 2,6   | 2,5   | 2,2   | 2,0   | 1,7   |
| 26    | 4,2   | 3,4   | 3,0   | 2,7   | 2,6   | 2,5   | 2,2   | 2,0   | 1,7   |
| 28    | 4,2   | 3,3   | 3,0   | 2,7   | 2,6   | 2,4   | 2,1   | 1,9   | 1,7   |
| 30    | 4,2   | 3,3   | 2,9   | 2,7   | 2,5   | 2,4   | 2,1   | 1,9   | 1,6   |
| 40    | 4,1   | 3,2   | 2,9   | 2,6   | 2,5   | 2,3   | 2,0   | 1,8   | 1,5   |
| 60    | 4,0   | 3,2   | 2,8   | 2,5   | 2,4   | 2,3   | 1,9   | 1,7   | 1,4   |
| 120   | 3,9   | 3,1   | 2,7   | 2,5   | 2,3   | 2,2   | 1,8   | 1,6   | 1,3   |

**Таблица ПЗ. Значения G критерия Кохрена  
при 5%-ном уровне значимости**

| N  | $f_1=m-1$ |        |       |        |        |       |        |        |        |    | N   | $f_1=m-1$ |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
|----|-----------|--------|-------|--------|--------|-------|--------|--------|--------|----|-----|-----------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
|    | 1         | 2      | 3     | 4      | 5      | 6     | 7      | 8      | 9      | 10 |     | 1         | 2      | 3      | 4      | 5      | 6      | 7      | 8      | 9      | 10     |
| 2  | 0,6020    | 0,6385 | 0,679 | 0,7271 | 0,7808 | 0,841 | 0,9065 | 0,9669 | 0,9985 |    | 12  | 0,5410    | 0,3924 | 0,3264 | 0,2880 | 0,2624 | 0,2439 | 0,2299 | 0,2187 | 0,2098 | 0,2020 |
| 3  | 0,4450    | 0,4775 | 0,515 | 0,5612 | 0,6161 | 0,683 | 0,7679 | 0,8709 | 0,9750 |    | 15  | 0,4709    | 0,3346 | 0,2758 | 0,2419 | 0,2195 | 0,2034 | 0,1911 | 0,1815 | 0,1736 | 0,1671 |
| 4  | 0,3733    | 0,4027 | 0,437 | 0,4800 | 0,5321 | 0,598 | 0,6841 | 0,797  | 0,9392 |    | 20  | 0,3894    | 0,2705 | 0,2205 | 0,1921 | 0,1735 | 0,1602 | 0,1490 | 0,1422 | 0,1357 | 0,1303 |
| 5  | 0,3311    | 0,3584 | 0,391 | 0,4307 | 0,4803 | 0,544 | 0,6287 | 0,7454 | 0,9057 |    | 24  | 0,343     | 0,235  | 0,190  | 0,165  | 0,149  | 0,137  | 0,128  | 0,121  | 0,116  | 0,111  |
| 6  | 0,3029    | 0,3290 | 0,359 | 0,3974 | 0,4447 | 0,506 | 0,5895 | 0,7071 | 0,8772 |    | 30  | 0,2929    | 0,1980 | 0,1593 | 0,1377 | 0,1237 | 0,1137 | 0,1061 | 0,1001 | 0,0958 | 0,0921 |
| 7  | 0,2823    | 0,3067 | 0,336 | 0,3680 | 0,4184 | 0,478 | 0,5598 | 0,6771 | 0,8534 |    | 40  | 0,2370    | 0,1576 | 0,1259 | 0,1082 | 0,0968 | 0,0887 | 0,0827 | 0,0795 | 0,0745 | 0,0713 |
| 8  | 0,2666    | 0,2901 | 0,324 | 0,3555 | 0,4148 | 0,456 | 0,5365 | 0,6530 | 0,8332 |    | 60  | 0,173     | 0,113  | 0,089  | 0,076  | 0,068  | 0,062  | 0,058  | 0,055  | 0,052  | 0,049  |
| 9  | 0,2541    | 0,2768 | 0,304 | 0,3384 | 0,3817 | 0,438 | 0,5175 | 0,6333 | 0,8159 |    | 120 | 0,0998    | 0,0632 | 0,0495 | 0,0419 | 0,0371 | 0,0337 | 0,0312 | 0,0292 | 0,0279 | 0,0266 |
| 10 | 0,2439    | 0,2659 | 0,292 | 0,3254 | 0,3682 | 0,424 | 0,5017 | 0,6167 | 0,8010 |    |     |           |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
|    | 0,2353    | 0,2568 | 0,282 | 0,3154 | 0,3568 | 0,411 | 0,4884 | 0,6025 | 0,7880 |    |     |           |        |        |        |        |        |        |        |        |        |

**Таблица П4. Таблица равномерно распределенных  
случайных чисел**

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| 10 | 09 | 73 | 25 | 33 | 76 | 52 | 01 | 36 | 86 | 34 | 67 | 35 | 48 | 76 | 80 |
| 37 | 54 | 20 | 48 | 05 | 67 | 89 | 47 | 42 | 96 | 24 | 80 | 52 | 40 | 37 | 20 |
| 08 | 42 | 26 | 89 | 53 | 19 | 64 | 50 | 97 | 03 | 23 | 20 | 90 | 25 | 60 | 15 |
| 99 | 01 | 90 | 25 | 29 | 09 | 37 | 67 | 07 | 15 | 33 | 31 | 13 | 11 | 65 | 88 |
| 12 | 80 | 79 | 99 | 70 | 80 | 53 | 15 | 73 | 61 | 47 | 64 | 03 | 23 | 53 | 98 |
| 66 | 06 | 58 | 47 | 17 | 34 | 07 | 27 | 68 | 50 | 36 | 69 | 73 | 61 | 70 | 65 |
| 31 | 06 | 01 | 08 | 45 | 05 | 48 | 57 | 18 | 24 | 26 | 35 | 30 | 34 | 14 | 86 |
| 85 | 26 | 97 | 76 | 02 | 02 | 05 | 16 | 56 | 92 | 68 | 66 | 57 | 48 | 18 | 73 |
| 63 | 57 | 33 | 21 | 35 | 05 | 32 | 54 | 70 | 48 | 90 | 55 | 35 | 75 | 48 | 28 |
| 73 | 79 | 64 | 57 | 53 | 03 | 52 | 96 | 47 | 73 | 35 | 80 | 83 | 42 | 78 | 60 |
| 98 | 52 | 01 | 77 | 67 | 14 | 90 | 56 | 86 | 07 | 22 | 10 | 94 | 05 | 82 | 61 |
| 11 | 80 | 50 | 54 | 31 | 39 | 80 | 82 | 77 | 32 | 50 | 72 | 56 | 82 | 58 | 29 |
| 83 | 45 | 20 | 96 | 34 | 06 | 28 | 89 | 80 | 83 | 13 | 74 | 67 | 00 | 48 | 18 |
| 88 | 68 | 54 | 02 | 00 | 86 | 50 | 75 | 84 | 01 | 36 | 76 | 66 | 79 | 78 | 90 |
| 99 | 59 | 46 | 73 | 48 | 37 | 51 | 76 | 49 | 69 | 91 | 82 | 60 | 89 | 51 | 93 |
| 65 | 48 | 11 | 76 | 74 | 17 | 46 | 85 | 09 | 50 | 58 | 04 | 77 | 69 | 28 | 73 |
| 80 | 12 | 43 | 56 | 35 | 16 | 73 | 70 | 70 | 15 | 45 | 31 | 82 | 23 | 74 | 21 |
| 74 | 35 | 09 | 98 | 17 | 77 | 45 | 27 | 72 | 14 | 43 | 23 | 60 | 02 | 47 | 45 |
| 69 | 91 | 62 | 68 | 03 | 66 | 25 | 22 | 91 | 48 | 36 | 93 | 68 | 72 | 10 | 76 |
| 75 | 89 | 32 | 05 | 05 | 14 | 22 | 56 | 85 | 14 | 46 | 42 | 75 | 67 | 03 | 96 |
| 91 | 49 | 91 | 45 | 23 | 68 | 47 | 92 | 76 | 86 | 70 | 16 | 28 | 35 | 88 | 94 |
| 80 | 33 | 69 | 46 | 98 | 26 | 94 | 03 | 68 | 58 | 32 | 29 | 73 | 41 | 54 | 53 |
| 42 | 10 | 48 | 19 | 49 | 85 | 15 | 74 | 79 | 54 | 12 | 97 | 92 | 65 | 35 | 57 |
| 12 | 55 | 07 | 37 | 42 | 11 | 10 | 00 | 20 | 40 | 40 | 86 | 07 | 46 | 37 | 96 |
| 63 | 60 | 64 | 93 | 29 | 16 | 50 | 53 | 44 | 84 | 81 | 21 | 95 | 25 | 97 | 42 |
| 61 | 19 | 69 | 04 | 46 | 26 | 45 | 74 | 77 | 74 | 59 | 92 | 43 | 37 | 63 | 65 |
| 15 | 47 | 44 | 52 | 66 | 95 | 27 | 07 | 99 | 53 | 54 | 36 | 78 | 38 | 29 | 82 |
| 94 | 55 | 72 | 85 | 73 | 67 | 89 | 75 | 43 | 87 | 16 | 62 | 24 | 44 | 48 | 91 |
| 42 | 48 | 11 | 62 | 13 | 96 | 34 | 40 | 87 | 21 | 68 | 86 | 84 | 87 | 31 | 03 |
| 23 | 52 | 37 | 83 | 18 | 73 | 20 | 88 | 98 | 37 | 45 | 93 | 69 | 14 | 67 | 26 |
| 04 | 49 | 35 | 24 | 94 | 75 | 24 | 63 | 38 | 24 | 96 | 86 | 25 | 10 | 16 | 61 |
| 00 | 54 | 99 | 76 | 54 | 64 | 05 | 18 | 81 | 69 | 27 | 11 | 96 | 38 | 25 | 54 |
| 35 | 96 | 31 | 53 | 07 | 26 | 89 | 30 | 93 | 64 | 33 | 35 | 13 | 54 | 96 | 77 |
| 50 | 80 | 80 | 83 | 91 | 45 | 42 | 71 | 68 | 42 | 83 | 60 | 94 | 97 | 52 | 13 |
| 46 | 05 | 88 | 52 | 36 | 01 | 39 | 09 | 22 | 86 | 74 | 28 | 14 | 40 | 77 | 93 |
| 32 | 17 | 90 | 06 | 97 | 87 | 37 | 92 | 52 | 41 | 05 | 56 | 70 | 70 | 07 | 86 |
| 69 | 23 | 46 | 14 | 06 | 20 | 12 | 74 | 53 | 04 | 14 | 95 | 63 | 00 | 00 | 18 |

Окончание табл. П4

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 19 | 56 | 54 | 14 | 30 | 01 | 75 | 87 | 72 | 79 | 40 | 41 | 52 | 15 | 85 | 66 |
| 45 | 15 | 51 | 49 | 38 | 19 | 47 | 60 | 08 | 46 | 43 | 87 | 79 | 45 | 43 | 59 |
| 94 | 86 | 43 | 19 | 94 | 36 | 16 | 81 | 84 | 51 | 34 | 89 | 87 | 17 | 53 | 01 |
| 98 | 08 | 62 | 48 | 26 | 45 | 24 | 02 | 09 | 03 | 44 | 99 | 91 | 89 | 96 | 39 |
| 33 | 18 | 51 | 62 | 32 | 41 | 92 | 15 | 07 | 49 | 87 | 43 | 55 | 84 | 81 | 88 |
| 80 | 95 | 10 | 04 | 06 | 96 | 38 | 27 | 82 | 74 | 21 | 15 | 13 | 33 | 87 | 25 |
| 79 | 75 | 24 | 91 | 40 | 71 | 96 | 12 | 65 | 96 | 69 | 84 | 10 | 35 | 91 | 74 |
| 18 | 63 | 33 | 25 | 37 | 98 | 14 | 60 | 22 | 71 | 32 | 02 | 02 | 46 | 74 | 05 |
| 74 | 02 | 94 | 39 | 02 | 77 | 55 | 73 | 47 | 70 | 98 | 79 | 01 | 71 | 79 | 52 |

Учебное издание

*Арышенский Евгений Владимирович,  
Каргин Владимир Родионович*

**МЕТОДОЛОГИЯ  
НАУЧНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА  
В ПРОЦЕССАХ ОМД**

*Учебное пособие*

Редактор Л.Р. Дмитриенко  
Компьютерная верстка Л.Р. Дмитриенко

Подписано в печать 21.07.2020. Формат 60х84 1/16.

Бумага офсетная. Печ. л. 7,0.

Тираж 120 экз. (1 з-д 1-25 экз.). Заказ .

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»  
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)  
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

---

Изд-во Самарского университета.  
443086 Самара, Московское шоссе, 34.



