

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «САМАРСКИЙ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ИНЖЕНЕРНЫХ ЗАДАЧАХ

Рекомендовано редакционно-издательским советом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева» в качестве учебного пособия для обучающихся по основной образовательной программе высшего образования по направлению подготовки 11.03.03 Конструирование и технология электронных средств

САМАРА
Издательство Самарского университета
2024

УДК 519.6:62(075)

ББК В19я7+Жя7

М340

Авторы: *Е. А. Барова, Е. И. Коновалова,*

Ю. Ж. Пчелкина, Л. В. Яблокова

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук, проф. А. И. Жданов,

д-р техн. наук, доц. В. А. Зеленский

М340 Математические методы в инженерных задачах: учебное пособие / *Е. А. Барова, Е. И. Коновалова, Ю. Ж. Пчелкина, Л. В. Яблокова.* – Самара: Издательство Самарского университета, 2024. – 128 с.

ISBN 978-5-7883-2073-1

Учебное пособие содержит теоретический и справочный материал для изучения дисциплины «Математические методы в инженерных задачах». Направлено на применение методов вещественного и функционального анализа к решению инженерных задач.

Подготовлено на кафедре прикладных математики и физики.

УДК 519.6:62(075)

ББК В19я7+Жя7

ISBN 978-5-7883-2073-1

© Самарский университет, 2024

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	5
1. Основы теории моделирования	6
Математика и естествознание	6
Моделирование как метод исследования.....	8
Математические модели	12
Свойства математических моделей	16
Этапы построения и применения математических моделей.....	18
Требования к вычислительным методам	23
Источники и классификация погрешности.....	25
Приближенные числа, их погрешности	26
2. Вычисление значений функции.....	33
Погрешности для функции одной переменной	33
Погрешности для функции нескольких переменных	34
Правила подсчета цифр	34
Определение допустимых погрешностей	35
Вычисление значений многочлена. Схема Горнера	36
Вычисление значений некоторых трансцендентных функций с помощью степенных рядов	38
Сведения из теории цепных дробей. Разложение функций в цепные дроби	41
Применение метода итераций для приближенного вычисления значений функций.....	46
3. Интерполирование функций	50
Интерполирование для случая равноотстоящих узлов.....	52
Интерполяция с кратными узлами	55
Обратное интерполирование.....	56
Интерполяция сплайнами.....	58
4. Методы решения нелинейных уравнений и систем	60
Графический метод	61
Метод половинного деления (метод дихотомии)	61

Способ пропорциональных частей (метод хорд)	62
Метод Ньютона (метод касательных)	64
Комбинированный метод	66
Метод итерации	67
Численное решение систем нелинейных уравнений	70
5. Численное дифференцирование и интегрирование	75
Численное дифференцирование	75
Численное интегрирование	78
6. Приближенное решение дифференциальных уравнений	
и систем	84
Задача Коши для обыкновенных дифференциальных	
уравнений и систем	84
Метод последовательного дифференцирования	86
Метод неопределенных коэффициентов	88
Метод последовательных приближений	89
Метод Эйлера	91
Метод Рунге-Кутты	92
7. Математическая модель движения летательного аппарата	94
Системы координат, используемые при описании движения	
летательного аппарата	95
Взаимное расположение систем координат. Связь между	
координатными системами. Направляющие косинусы	100
Кинематические соотношения	107
Уравнения динамики пространственного движения	111
Вывод уравнений поступательного движения	
в пространстве	115
Уравнения вращательного движения в пространстве	119
Список литературы	124

ВВЕДЕНИЕ

Данное учебное пособие разработано с целью представить студентам и специалистам инженерно-технических специальностей основные математические методы, необходимые для успешного решения разнообразных инженерных задач.

На сегодняшний день одним из основных направлений для прогресса в области компьютерных наук и технологий является междисциплинарное взаимодействие, основанное на создании, изучении, анализе, применении и научной оценке методов и алгоритмов для решения разнообразных практических задач.

В данном пособии представлены методы решения прикладных задач, которые основаны на использовании различных математических подходов. Прежде всего, в пособии применяются методы вещественного и функционального анализа, а также теории приближения функций, что позволяет эффективно и осмысленно подходить к различным задачам и получать конкретные результаты на основе математических методов и моделей.

Учебное пособие написано на основе курса лекций для студентов направления подготовки 11.03.03 Конструирование и технология электронных средств.

1. ОСНОВЫ ТЕОРИИ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Математика и естествознание

Человека в течение всей жизни окружают различные процессы и явления, с которыми он находится в постоянном взаимодействии. При этом вся поступающая информация о рассматриваемом объекте хранится, передаётся и обрабатывается в символьной (знаковой) форме. Представление информации осуществляется с помощью языков.

Язык – это определённая знаковая система представления информации, которая строится на основе определённого алфавита и имеет правила для выполнения операций над знаками.

Существуют:

- *естественные языки*: разговорные языки, язык мимики и жестов, язык специальных знаков (например, дорожных);
- *формальные языки*: специальные языки для различных областей человеческой деятельности, которые характеризуются жёстко зафиксированным алфавитом, более строгими правилами грамматики и синтаксиса – язык музыки (ноты), язык математики (цифры, математические знаки), системы счисления, языки программирования и так далее.

В основе любого языка лежит *алфавит* – это набор символов/знаков.

Математический язык – это формальный язык, который состоит из математических высказываний, то есть математических символов, объединённых формулой.

Математический язык более краток и ясен, чем обычный, так как оперирует точными понятиями.

Математика, как и другие науки, изучает действительный, материальный мир, объекты этого мира и отношения между ними. Однако, в отличие от наук, исследующих различные формы движения материи (механика, физика, химия, биология и другие) или виды

передачи информации (информатика, кибернетика), математика изучает формы и отношения, взятые в отвлечении от их содержания. Последнее выделяет математику из ряда естественных наук.

При изучении объектов окружающего мира можно выделить три направления.

1. *Экспериментальное направление.* В ходе наблюдения, эксперимента мы получаем экспериментальные данные, которые необходимо обработать. Математическая обработка экспериментальных данных включает:

- определение истинных значений измеряемых величин;
- определение вида функциональной зависимости исследуемых величин;
- определение количественных характеристик (параметров) функциональных зависимостей.

2. *Теоретическое направление.* В основе теоретического подхода лежит математическая модель:

- выдвижение гипотезы и построение математической модели (в виде уравнений или неравенств);
- исследование математической модели (решение математической задачи);
- экспериментальная проверка (если возможна);
- модификация модели.

3. *Вычислительное направление:*

- выбор и построение математической модели;
- разработка численного алгоритма решения математической задачи;
- составление компьютерной программы;
- проведение вычислений с помощью компьютера;
- анализ результатов и их экспериментальная проверка (если возможна).

Моделирование как метод исследования

Моделью называется образ или отображение какого-либо процесса или явления, полученное с помощью специальных средств (математических, технических, компьютерных и так далее). В зависимости от выбранных средств можно получить различные виды моделей.

Под *моделированием* можно понимать процесс построения, изучения и совершенствования моделей, их использование в научных исследованиях (теоретических и экспериментальных), применение моделей непосредственно в процессах планирования, управления, оптимизации, прогнозирования, контроля и так далее. Основная цель моделирования – исследовать объекты реального мира и предсказать результаты будущих наблюдений.

Использование моделирования на эмпирическом и теоретическом уровнях исследования по своей сущности приводит к условному делению на материальное (физическое), знаковое (теоретическое) и идеальное моделирование.

Материальное моделирование – это моделирование, при котором исследование объекта выполняется с использованием его материального аналога, воспроизводящего основные физические, геометрические, динамические и функциональные характеристики исследуемого объекта. Математическое моделирование можно поделить на натурное и аналоговое.

Натурное моделирование – это моделирование, при котором реальному объекту ставится в соответствие его материальный аналог измененного размера, обладающий теми же свойствами, что и оригинальный объект, но который возможно исследовать.

Примерами натуральных моделей являются модели гидротехнических сооружений, военные учения, аэродинамическая труба, воспроизводящая условия полета самолета в воздушном пространстве, экспериментальный макет автомобиля и многое другое.

К достоинству натурного моделирования следует отнести получение достаточно достоверных результатов. К недостаткам следует отнести высокую стоимость по сравнению с математическими моделями, а также трудность быстрой доработки модели.

Аналоговое моделирование – моделирование, основанное на аналогии процессов и явлений, имеющих различную физическую природу, но описываемых одними и теми же математическими соотношениями, логическими и структурными схемами.

Таким образом, аналогия не предполагает тождественности физической природы модели и прототипа, но требует, чтобы модель при некоторых условиях вела себя аналогично поведению оригинала. Аналогия основана на возможности моделирования явления одной природы явлениями другой природы. Например, электромеханическая аналогия: колебания в механических системах можно моделировать колебаниями в электрических цепях. При этом модель (аналог) и оригинал (прототип) описываются одинаковыми математическими соотношениями, например дифференциальными уравнениями.

Знаковое (теоретическое, абстрактное) моделирование – моделирование, использующее в качестве моделей знаковые изображения некоторого вида: схемы, графики, чертежи, иероглифы, наборы символов, включающие в себя и совокупность правил оперирования этими знаковыми образованиями и конструкциями.

Примерами таких моделей являются:

- коды и сигналы как модели сообщений;
- математические формулы как модели процессов и объектов;
- рабочие чертежи как модели деталей будущей конструкции;
- характеристика личности как модель деятельности и качеств человека;
- любой язык человеческого общения;
- любые алгоритмические языки и языки программирования.

Между моделями данного класса и оригиналом возможно однозначное отношение. Например, теория кодирования изучает законы и правила построения и использования кодов в технических системах.

Частным случаем знакового моделирования выступает математическое моделирование.

Математическое моделирование – это знаковое моделирование, при котором описание объекта осуществляется на математическом языке, а исследования модели проводятся с использованием математических методов. В настоящее время это один из самых результативных и часто применяемых методов научного познания.

Преимуществами математического моделирования по сравнению с другими видами моделирования являются:

- экономичность, сбережение ресурсов реальной системы;
- возможность моделирования гипотетических, то есть не реализованных в природе объектов и систем;
- возможность реализации режимов, опасных или трудновоспроизводимых в реальности;
- возможность изменения масштаба времени;
- универсальность технического и программного обеспечения, наличие пакетов прикладных программ для проведения широкого круга работ;
- возможность прогнозирования и выявления общих закономерностей;
- возможность сравнительно простого многофакторного анализа.

В качестве примеров математического моделирования в различных областях человеческой деятельности можно указать расчет траекторий космических аппаратов, прогнозирование погодных явлений, расчет и проектирование машин и устройств любой сложности и многое другое.

Идеальное моделирование – это моделирование, при котором исследование объекта выполняется с использованием мыслимого аналога, воспроизводящего требуемые характеристики и свойства исследуемого объекта. Примерами идеальных моделей являются геометрическая точка, математический маятник, идеальный газ, бесконечность и другие

Различают два вида идеального моделирования: неформализованное (интуитивное) и формализованное.

К *неформализованному моделированию* можно отнести построение моделей с использованием различных форм мышления: эмоции, интуиции, образного мышления, подсознания, эвристики как совокупности логических приемов и правил отыскания истины. При неформализованном моделировании модель не формулируется, а вместо неё используется некоторое нечеткое мысленное отражение (образ) реальности, служащее основой для рассуждения и принятия решения.

Примером неопределенных (интуитивных) представлений об объекте может служить нечеткое описание ситуации, основанное на опыте и на интуиции.

К *формализованному моделированию* можно отнести образное моделирование, когда модели строятся из наглядных элементов (упругие шары, потоки жидкости, траектории движения тел и так далее). Анализ образных моделей осуществляется мысленно и может быть отнесён к формализованному моделированию в том случае, когда правила взаимодействия образов четко формализованы. Этот вид моделирования используется при мысленном эксперименте.

К формализуемым абстрактным моделям относятся знаковые модели, в том числе математические и языковые конструкции (языки программирования, естественные языки) вместе с правилами их преобразования и интерпретации. Примером знаковых моделей могут служить чертежи, графики, формулы и так далее.

Компьютерное моделирование является одним из эффективных методов изучения сложных систем. Компьютерные модели проще применять в силу их возможности проводить вычислительные эксперименты. Вычислительный эксперимент – это эксперимент, осуществляемый с помощью компьютерной модели, с целью прогноза состояний системы, её реакций на входные сигналы.

Компьютерные модели позволяют выявлять основные факторы, определяющие свойства изучаемого объекта-оригинала, в частности, исследовать отклик моделируемой технической системы на изменения её параметров и начальных условий. Компьютерное моделирование заключается в проведении серии вычислительных экспериментов на компьютере, целью которых является анализ, интерпретация и сопоставление результатов моделирования с реальным поведением изучаемого объекта.

Эволюционное моделирование представляет собой направление в математическом моделировании, объединяющее компьютерные и эвристические методы моделирования с эволюционным принципом. Инструментами эволюционного моделирования являются генетические алгоритмы, эволюционные стратегии, эволюционное программирование, а также искусственные нейронные сети, нечеткая логика. При этом эволюционные вычисления можно трактовать как развитие методов теории адаптивных систем.

Математические модели

Математическая модель – приближенное описание некоторого класса явлений внешнего мира, выраженное с помощью математической символики. Математическими моделями называются количественные соотношения или их совокупности, содержащие детерминированные или случайные параметры и переменные, отражающие доступные для измерения свойства тех или иных объектов реального мира, а также процессов с их участием.

Количественные соотношения могут быть представлены в графических, логических, алгебраических, дифференциальных или интегральных формах, а также в виде компьютерных программ. Часто термины реальный объект, явление, процесс объединяют в один – «объект», понимая под этим объект моделирования. При решении инженерных задач используют термин «технический объект».

Математические модели классифицируются с учетом целей моделирования, решаемых задач, применяемых математических методов, присутствия нескольких уровней при моделировании некоторого объекта, явления или процесса, а также с учетом входящих в модель параметров и результатов моделирования. Любая классификация носит условный характер, но можно выделить достаточно устоявшиеся виды математических моделей:

- геометрические,
- аналитические,
- детерминированные и стохастические,
- стационарные и нестационарные,
- статические и динамические,
- линейные и нелинейные,
- непрерывные и дискретные,
- одномерные и многомерные,
- структурные,
- функциональные,
- оптимизационные,
- управленческие,
- имитационные.

Геометрические модели – это количественные соотношения с набором детерминированных параметров, позволяющие задать форму, размеры и взаимное расположение фигур произвольной размерности с требуемой для поставленной задачи точностью.

Аналитической называется модель, в которой связь между её параметрами задается в аналитическом, то есть формульном, виде.

Стохастической называется модель, в которой присутствуют случайные параметры. При отсутствии случайных параметров модель называется *детерминированной*.

Если в число параметров модели не входит время, то соответствующая модель называется *стационарной*, в противном случае – *нестационарной*.

Если в модели учитываются инерционные эффекты, характерные для реального процесса, то она называется *динамической*. Если моделирование осуществляется без учета инерционных эффектов, то соответствующая модель называется *статической*.

Если переменные параметры модели связаны линейными соотношениями, то модель называется *линейной*. В противном случае модель *нелинейная*.

Модель называется *дискретной*, если некоторые её параметры определены на подмножествах множества целых чисел. Модель называется *непрерывной*, если все параметры определены на подмножествах множества действительных чисел.

Одномерной называется модель, которая описывает явление или процесс с помощью одной пространственной координаты. При использовании нескольких пространственных координат модель становится *многомерной* (двумерные, трехмерные и так далее).

Структурные модели – это модели, включающие в себя несколько взаимодействующих между собой элементов, каждый из которых характеризуется своим набором параметров.

Модель, отражающая некоторый процесс, называется *функциональной*.

Модель, в которой путем изменения её параметров достигается минимум или максимум некоторой целевой функции, выбранной по соответствующему критерию, называется *оптимизационной*.

Модель, включающая алгоритм изменения параметров для целенаправленного выполнения того или иного процесса, называется *управленческой*.

Модели, позволяющие наглядно воспроизводить поведение объекта при изменении внутренних и внешних параметров или процесса при изменении параметров системы и параметров управления, называются *имитационными*.

Одним из важнейших классификационных признаков математической модели является её отнесение к *прямой* или *обратной* задаче моделирования. Деление задач на прямые и обратные обусловлено причинно-следственной связью. Если в математической модели входными параметрами являются параметры, обуславливающие причину происходящих с объектом моделирования изменений, а на выходе находятся параметры, характеризующие следствие, то задача называется *прямой*. Если входными параметрами являются параметры, отражающие следствие, а на выходе находятся параметры, характеризующие причину, то задача называется *обратной*.

Процедура моделирования называется обратной задачей, поскольку она начинается с результатов, а затем вычисляет причины. Это инверсия прямой проблемы, которая начинается с причин, а затем заканчивается вычислением результатов.

Решение обратных задач – одна из важнейших математических проблем в науке и математике, так как в процессе решения мы сталкиваемся с параметрами, которые не можем непосредственно наблюдать. Эти задачи возникают в оптике, радиолокации, акустике, теории коммуникации, обработке сигналов, медицинской визуализации, компьютерном видении, геофизике, океанографии, астрономии, дистанционном зондировании, обработке естественного языка, теории машин, неразрушающем контроле и многих других областях.

Свойства математических моделей

Приближенность моделей. Конечность и простота модели характеризуют качественное различие (на структурном уровне) между оригиналом и моделью. Тогда приближенность модели будет характеризовать количественную сторону этого различия.

Можно ввести количественную меру приближенности путем сравнения, например, грубой модели с более точной эталонной (полной, идеальной) моделью или с реальной моделью. Приближенность модели к оригиналу неизбежна, существует объективно, так как модель как другой объект отражает лишь отдельные свойства оригинала. Поэтому степень приближенности модели к оригиналу определяется постановкой задачи, целью моделирования.

Чрезмерное стремление к повышенной точности модели приводит к её значительному усложнению, и, следовательно, к снижению её практической ценности. При моделировании систем точность и практический смысл не совместимы и исключают друг друга. Причина противоречивости и несовместимости требований точности и практичности модели кроется в неопределенности и нечеткости знаний о самом оригинале – его поведении, его свойствах и характеристиках, о поведении окружающей среды, о механизмах формирования цели, путей и средствах её достижения и так далее.

Экономичность моделей. Данное свойство математических моделей определяется затратами ресурсов (человеческих, материальных, временных, вычислительных и других) на её реализацию и эксплуатацию.

Истинность моделей. В каждой модели есть доля истины, то есть любая модель в чём-то правильно отражает оригинал. Степень истинности модели выявляется только при практическом сравнении её с оригиналом. Что касается малых переменных, то ими пренебрегают обычно при решении задачи синтеза, но стараются учесть их влияние на свойства системы при решении задачи анализа.

При моделировании стремятся по возможности выделить не-большое число основных факторов, влияние которых одного порядка и не слишком сложно описывается математически, а влияние других факторов оказывается возможным учесть с помощью осредненных или интегральных характеристик.

С одной стороны, в любой модели содержится безусловно истинное, то есть определённо известное и правильное. С другой стороны, в модели содержится и условно истинное, то есть верное лишь при определенных условиях. Типовая ошибка при моделировании заключается в том, что исследователи применяют модели без проверки условий их истинности, границ их применимости. Такой подход приводит заведомо к получению неверных результатов.

В любой модели также содержится нечто, могущее быть в условиях неопределенности либо верным, либо ложным. Только на практике устанавливается фактическое соотношение между истинным и ложным в конкретных условиях. Таким образом, при анализе уровня истинности модели необходимо выяснить:

- точные, достоверные знания;
- знания, достоверные при определенных условиях;
- знания, оцениваемые с некоторой долей неопределенности;
- знания, не поддающиеся оценке даже с некоторой степенью неопределенности;
- незнания, то есть то, что неизвестно.

Таким образом, оценка истинности модели как формы знаний сводится к выявлению содержания в ней как объективных достоверных знаний, так и знаний, приближенно оценивающих оригинал, а также то, что составляет незнание.

Информативность. Модель должна содержать достаточную информацию о системе (в рамках гипотез, принятых при построении модели) и должна давать возможность получить новую информацию.

Эволюционируемость. Возможность развития моделей.

Полнота. В модели должны быть учтены все основные связи и отношения, необходимые для обеспечения достижения цели моделирования.

Адаптивность. Модель должна быть приспособлена к различным входным параметрам, воздействиям среды.

Управляемость. Модель должна иметь хотя бы один параметр, изменениями которого можно имитировать поведение моделируемой системы в различных условиях.

Этапы построения и применения математических моделей

Построение математической модели – это центральный этап исследования или проектирования технической системы. От качества разработанной модели зависит весь последующий анализ объекта. Построение математической модели – это процедура не формальная. Она зависит от исследователя, его опыта и вкуса, и всегда опирается на определенный эмпирический материал.

1 этап – обследование объекта моделирования и формулировка технического задания на разработку модели (содержательная постановка задачи). Этап обследования включает следующие работы:

- выявление основных факторов, механизмов, влияющих на поведение объекта моделирования, определение параметров, подлежащих отражению в модели;
- сбор и проверка имеющихся экспериментальных данных об объектах-аналогах, проведение при необходимости дополнительных экспериментов;
- обзор литературных источников, анализ и сравнение между собой построенных ранее моделей данного объекта (или подобных рассматриваемому объекту);
- анализ и обобщение всего накопленного материала, разработка общего плана создания математической модели.

Содержательная постановка задачи моделирования может уточняться и конкретизироваться в процессе дальнейшей разработки модели. Если объектом моделирования является технологический процесс или конструкция, то содержательную постановку задачи моделирования называют *технической постановкой задачи*. Вместе с дополнительными требованиями к реализации модели и представлению результатов содержательная постановка задачи моделирования оформляется в виде технического задания на проектирование и разработку модели.

2 этап – концептуальная и математическая постановка задачи. На данном этапе формулируется совокупность гипотез о поведении объекта, его взаимодействии с окружающей средой, изменении внутренних параметров. Для обоснования принятых гипотез, как правило, используются некоторые теоретические положения и/или экспериментальные данные об объекте. Законченная концептуальная постановка позволяет сформулировать расчетную схему технического объекта и её математическое описание.

Совокупность математических соотношений определяет вид оператора модели. Наиболее простые операторы модели получают, используя различные методы аппроксимации экспериментальных данных (интерполяция, метод наименьших квадратов и другие). Более сложные теоретические модели получают на основе некоторых законов, справедливых для объектов исследования в рассматриваемой области знаний, например, на основе уравнений законов сохранения. В ряде случаев математические соотношения, описывающие поведение объекта, приходится устанавливать самому исследователю.

3 этап – качественный анализ и проверка корректности модели. В большинстве случаев оператор модели включает в себя систему обыкновенных дифференциальных уравнений, дифференциальных уравнений в частных производных и/или интегро-диффе-

ренциальных уравнений. Для обеспечения корректности постановки задачи к системе обыкновенных дифференциальных уравнений или дифференциальных уравнений в частных производных добавляются начальные или граничные условия, которые, в свою очередь, могут быть алгебраическими или дифференциальными соотношениями различного порядка.

Для *контроля правильности* полученной системы математических соотношений проводят ряд проверок, в частности:

- контроль размерностей величин при использовании принятой системы единиц для значений всех параметров;
- контроль порядков, состоящий из грубой оценки сравнительных порядков складываемых величин и исключения малозначимых параметров;
- контроль характера зависимостей, который заключается в проверке того, что значения выходных параметров модели соответствуют, например, физическому или иному смыслу изучаемой модели;
- контроль экстремальных ситуаций – проверка того, какой вид принимают математические соотношения, а также результаты моделирования, если параметры модели или их комбинации приближаются к своим предельно допустимым значениям;
- контроль граничных условий, включающий проверку того, что граничные условия действительно наложены, что они использованы в процессе построения искомого решения и что значения выходных параметров модели на самом деле удовлетворяют данным условиям;
- контроль математической замкнутости, состоящий в проверке того, что выписанная система математических соотношений дает возможность получить однозначное решение задачи.

4 этап – выбор и обоснование выбора методов решения задачи. При выборе или разработке метода решения задачи прежде всего

устанавливается область его применения. Чем шире круг задач, которые объявлены как допустимые для решения данным методом, тем этот метод более универсален.

В большинстве случаев четкая и однозначная формулировка ограничений на применение метода затруднительна. Возможны ситуации, когда оговоренные заранее условия применения метода выполняются, однако удовлетворительное решение задачи не получается. Следовательно, вероятность успешного применения метода в оговоренном заранее классе задач меньше единицы. Эта вероятность является количественной оценкой важного свойства методов и алгоритмов, называемого *надежностью*.

Аналитические методы более надежны, но не всегда применимы. Отказы в решении задач алгоритмическими методами могут проявляться, например, в несходимости итерационного процесса, в превышении погрешностями предельно допустимых значений и тому подобное. В этом случае удобнее применять численные методы.

К наиболее важным численным методам относятся:

- интерполяция и численное дифференцирование;
- численное интегрирование;
- определение корней линейных и нелинейных уравнений;
- решение систем линейных уравнений (подразделяют на прямые и итерационные методы);
- решение систем нелинейных уравнений;
- решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений;
- решение краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений;
- решение уравнений в частных производных;
- решение интегральных уравнений.

Говоря о численных вычислениях, важно осознавать, что они по своей природе являются приближенными и получаемое численное решение – это не всегда точное математическое решение.

5 этап – поиск решения, разработка алгоритма решения и исследование его свойств, реализация алгоритма в виде программы для ЭВМ.

В случаях, когда решение можно найти аналитическим методом, потребности в разработке специального программного обеспечения, как правило, не возникает. Численный, или приближенный, метод реализуется всегда в виде вычислительного алгоритма. Требования, предъявляемые к алгоритму, указываются в следующем определении.

Алгоритм – это упорядоченный набор недвусмысленных и выполнимых этапов, определяющий некоторый конечный процесс.

Это определение содержит несколько важных требований:

- требование упорядоченности указывает, что этапы алгоритма должны выполняться в некотором определенном порядке, но обязательно один за другим;
- требование выполнимости этапа означает принципиальную возможность его осуществления;
- требование недвусмысленности означает, что во время выполнения алгоритма при любом состоянии процесса информации должно быть достаточно, чтобы полностью определить действия, которые требуется осуществить на каждом этапе;
- требование конечности процесса означает, что алгоритм должен быть результативен, то есть выполнение алгоритма должно приводить к его завершению.

Кроме того, к методам и алгоритмам, как и к математическим моделям, предъявляют требования точности и экономичности.

Точность характеризуется степенью совпадения точного решения уравнений заданной модели и приближенного решения, полученного с помощью оцениваемого метода, а *экономичность* – затратами вычислительных ресурсов на реализацию метода (алгоритма).

Оценки точности и экономичности бывают теоретическими и экспериментальными. *Теоретические оценки* обычно характеризуют эффективность применения исследуемого метода не к одной конкретной модели, а к некоторому классу моделей и являются предметом изучения в вычислительной математике. *Экспериментальные оценки* основаны на определении показателей эффективности решения с помощью набора специально составляемых тестовых задач.

Требования к вычислительным методам

Одной и той же математической задаче можно поставить в соответствие множество различных дискретных моделей. Однако далеко не все из них пригодны для практической реализации.

Можно выделить две группы требований к численным методам. Первая группа связана с адекватностью дискретной модели исходной математической задаче, и вторая группа – с реализуемостью численного метода на ЭВМ.

К первой группе относятся такие требования, как сходимость численного метода, выполнение дискретных аналогов законов сохранения, качественно правильное поведение решения дискретной задачи.

Поясним эти требования. Предположим, что дискретная модель математической задачи представляет собой систему большого, но конечного числа алгебраических уравнений. Обычно, чем точнее мы хотим получить решение, тем больше уравнений приходится брать. Говорят, что численный метод сходится, если при неограниченном увеличении числа уравнений решение дискретной задачи стремится к решению исходной задачи.

Поскольку реальная ЭВМ может оперировать лишь с конечным числом уравнений, на практике сходимость, как правило, не достигается. Поэтому важно уметь оценивать погрешность метода в зависимости от числа уравнений, составляющих дискретную модель. По этой же причине стараются строить дискретную модель таким образом, чтобы она правильно отражала качественное поведение решения исходной задачи даже при сравнительно небольшом числе уравнений.

Сходимость численного метода тесно связана с его корректностью. Предположим, что исходная математическая задача поставлена корректно, то есть её решение существует, единственно и непрерывно зависит от входных данных. Тогда дискретная модель этой задачи должна быть построена таким образом, чтобы свойство корректности сохранилось. Таким образом, в понятие корректности численного метода включаются свойства однозначной разрешимости соответствующей системы уравнений и её устойчивости по входным данным.

Под *устойчивостью* понимается непрерывная зависимость решения от входных данных, равномерная относительно числа уравнений, составляющих дискретную модель.

Решение задачи y^* называется устойчивым по исходным данным x^* , если оно зависит от исходных данных непрерывным образом. Это означает, что малому изменению исходных данных соответствует малое изменение решения. Строго говоря, для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что всякому исходному данному x^* , удовлетворяющему условию $|x - x^*| < \delta$, соответствует приближенное решение y^* , для которого $|y - y^*| < \varepsilon$.

Говорят, что задача поставлена *корректно*, если выполнены следующие три условия:

- решение существует при любых допустимых исходных данных;

- это решение единственно;
- это решение устойчиво по отношению к малым изменениям исходных данных.

Если хотя бы одно из этих условий не выполнено, задача называется *некорректной*.

Вторая группа требований, предъявляемых к численным методам, связана с возможностью реализации данной дискретной модели на данной ЭВМ, то есть с возможностью получить на ЭВМ решение соответствующей системы алгебраических уравнений за приемлемое время. Основным препятствием для реализации корректно поставленного алгоритма является ограниченный объем оперативной памяти ЭВМ и ограниченные ресурсы времени счета. Реальные вычислительные алгоритмы должны учитывать эти обстоятельства, то есть они должны быть экономичными как по числу арифметических действий, так и по требуемому объему памяти.

Источники и классификация погрешности

При численном решении математических и прикладных задач, почти неизбежно появление на том или ином этапе их решения погрешностей, возникающих по следующим причинам.

1. Математическое описание задачи является неточным, в частности неточно заданы исходные данные описания. Погрешности в решении, обусловленные моделированием и исходными данными, называются *неустраняемыми*.

2. Применяемый для решения метод не является точным. Всякий численный метод воспроизводит исходную математическую модель приближенно, при этом неизбежно возникает *погрешность метода вычислений*.

3. При вводе данных, при выполнении арифметических операций и при выводе данных производятся округления. Так возникает *погрешность округления*, которая может накапливаться в ходе вычислений (опасный процесс, способный обесценить результат вычислений).

Все три типа таких погрешностей в сумме дают полную погрешность результата решения задачи.

Алгоритм называется *устойчивым*, если в процессе его работы вычислительные погрешности возрастают незначительно, и *неустойчивым* – в противоположном случае.

Итак, следует различать погрешности модели, метода и вычислительную. Какая же из этих трех погрешностей является преобладающей? Ответ здесь неоднозначен. Видимо, типичной является ситуация, возникающая при решении задач математической физики, когда погрешность модели значительно превышает погрешность метода, а погрешностью округления в случае устойчивых алгоритмов можно пренебречь по сравнению с погрешностью метода. С другой стороны, при решении, например, систем обыкновенных дифференциальных уравнений возможно применение столь точных методов, что их погрешность будет сравнима с погрешностью округления.

В общем случае нужно стремиться, чтобы все указанные погрешности имели один и тот же порядок.

Приближенные числа, их погрешности

Расчеты, как правило, производятся с приближенными значениями величин, приближенными числами. Разумная оценка погрешности при вычислениях позволяет указать оптимальное количество знаков, которые следует сохранять при расчетах, а также в окончательном результате.

Рассмотрим несколько возможных подходов к учету погрешностей действий.

Пусть A и a – два «близких числа»; A – точное, a – приближенное. Величина $\Delta a = |A - a|$ называется *абсолютной погрешностью* приближенного числа. Под оценкой погрешности приближенного числа a понимают установление неравенства вида $|A - a| \leq \Delta a$.

Число Δa также называют *предельной абсолютной погрешностью* приближенного числа.

Абсолютные погрешности записывают не более чем с двумя-тремя значащими цифрами (значащими цифрами числа в его позиционной записи называются все его цифры, начинающиеся с первой ненулевой слева; например, в числе 0,01030 имеется четыре значащих цифры). В приближенном числе не следует сохранять те разряды, которые подвергаются округлению в его абсолютной погрешности.

Итак, абсолютная погрешность оценивает точность измерений, но эта оценка неполна, поскольку не учитывает характерный размер изучаемого явления (объекта). Так, например, абсолютная погрешность в 1 см при измерении длины комнаты – вероятно, вполне приемлемая точность, но при измерении роста человека эта же погрешность будет сочтена непозволительно грубой.

Более информативным показателем качества измерений является относительная погрешность.

Относительной погрешностью δa приближенного числа a называется отношение его абсолютной погрешности Δa к абсолютной величине числа a то есть $\delta a = \frac{\Delta a}{|a|}$ ($a \neq 0$) иногда $\delta a = \frac{\Delta a}{|A|}$. Относительная погрешность обычно выражается в процентах, и её принято записывать не более чем с двумя-тремя значащими цифрами (знаками).

Во многих технических приложениях принято характеризовать точность приближенных чисел их относительной погрешностью.

Относительная погрешность является величиной безразмерной, то есть не зависит от выбора системы единиц измерения, что позволяет сравнивать качество измерений разнородных величин. Бессмысленным является вопрос о том, что больше: 1 кг или 1 м, но сравнение качества измерений массы и длины в терминах относительной погрешности вполне допустимо. Измеряется δa в долях единицы или в процентах.

С понятиями абсолютной и относительной погрешностей связаны понятия верных и значащих цифр.

Если абсолютная погрешность приближенного числа не превышает единицы последнего (самого правого) разряда его десятичной записи, то цифры числа называют *верными* (или *точными*).

По умолчанию десятичная запись приближенного числа должна содержать только верные цифры, и тогда по записи числа сразу можно узнать предельную абсолютную погрешность, с которой оно известно. Цифры, не являющиеся верными, называются *сомнительными*.

Значащими цифрами приближенного числа называются все цифры его десятичной записи, кроме нулей, находящихся левее первой отличной от нуля цифры.

Количество верных знаков числа отсчитывается от первой значащей цифры числа до первой значащей цифры его абсолютной погрешности: например, число $S = 20,7426$ с абсолютной погрешностью $\Delta S = 0,0926$, имеет три верных знака (2, 0, 7); остальные знаки сомнительные.

Ориентировочно можно считать, что наличие только одного верного знака соответствует относительной погрешности порядка 10%, двух верных знаков – погрешности порядка 1%, и так далее.

В математических таблицах все числа округлены до верных знаков, причем абсолютная погрешность не превосходит половины единицы последнего оставленного разряда. Например, если в таблице указано $y = 2,718$, то абсолютная погрешность не превосходит $0,5 \cdot 10^{-3}$.

В окончательных результатах вычислений обычно оставляют, кроме верных, один сомнительный знак.

В промежуточных результатах вычислений обычно сохраняют 2-3 сомнительных знака, чтобы не накапливать лишних погрешностей от округлений.

Этот пример показывает, что округление результатов расчета до верных знаков не всегда целесообразно.

Числа Δ_a и δ_a такие, что $\Delta_a \geq \Delta_a$ и $\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|} \geq \delta_a$ называются *оценками (границами) абсолютной и относительной погрешностей соответственно* (предельные погрешности). Для их расчета используется аналитический (классический) способ учета погрешностей действий, предполагающий точное оценивание погрешностей, основанное либо на правилах подсчета погрешностей арифметических действий, либо на параллельной работе с верхними и нижними границами исходных данных. Этот способ громоздок, учитывает крайние, наихудшие случаи взаимодействия погрешностей.

Существуют вероятностно-статистические законы, которые используются при больших однотипных вычислениях. Также достаточно сложно и вряд ли может быть рекомендовано при рядовых массовых вычислениях. Технический подход связан с именем известного русского кораблестроителя, математика и механика Алексея Николаевича Крылова.

Принцип А.Н. Крылова: приближенное число должно записываться так, чтобы в нем все значащие цифры, кроме последней, были верными и лишь последняя была бы сомнительна, и притом в среднем (в вероятностном смысле) не более чем на единицу.

Значащую цифру называют верной (в широком смысле), если абсолютная погрешность числа не превосходит единицы разряда, в которой стоит эта цифра (или половины единицы разряда – в этом случае термин – «верная в узком смысле»).

Чтобы результаты арифметических действий, совершаемых над приближенными числами, записанными в соответствии с принципом А.Н. Крылова, тоже соответствовали этому принципу нужно придерживаться следующих простых правил.

1. При сложении и вычитании приближениях чисел в результате следует сохранять столько десятичных данных, сколько их в приближенном данном с наименьшим количеством десятичных знаков.

2. При умножении и делении в результате нужно сохранять столько значащих цифр, сколько их имеет приближенное данное с наименьшим числом значащих цифр.

3. Результаты промежуточных данных должны иметь 1-2 запасных знаков, затем их отбрасывают.

Выдача числовых значений в ЭВМ, как правило, устроена таким образом, что нули в конце записи числа, даже если они верны, не сообщаются. Это означает, что если, например ЭВМ показывает результат 236,057 и в то же время известно, что в этом результате верными должны быть 8 значащих цифр, то полученный ответ следует дополнить двумя нулями 236,05700.

При округлении числа мы заменяем его приближенным числом с меньшим количеством значащих цифр, в результате чего возникает погрешность округления.

Правила округления числа, то есть его замены числом с меньшим количеством значащих цифр.

1. Если первая слева из отбрасываемых цифр больше либо равна 5, то последняя из сохраняемых цифр усиливается, то есть увеличивается на единицу.

2. Если первая из отброшенных цифр меньше 5, то последняя из оставшихся цифр не усиливается, то есть остается без изменения.

3. Если первая слева из отброшенных цифр равна 5 и за ней не следует отличных от нуля цифр, то последняя оставшаяся цифра усиливается, если она нечетная, и остается без изменения, если она четная (правило четной цифры).

Смысл правила 3 в том, что при многочисленных округлениях избыточные числа будут встречаться примерно с той же частотой,

что и недостаточные, и произойдет частичная взаимная компенсация погрешностей округления; результат окажется более точным.

При использовании правил округления – абсолютная погрешность округления не превосходит половины единицы разряда, определяемого последней оставленной значащей цифрой.

Абсолютная погрешность алгебраической суммы нескольких приближенных чисел не превышает суммы абсолютных погрешностей этих чисел.

При сложении чисел различной абсолютной точности обычно поступают следующим образом:

- 1) выделяют число (или числа) наименьшей абсолютной точности (то есть число, имеющее наибольшую абсолютную погрешность);
- 2) наиболее точные числа округляют так, чтобы сохранить в них на один знак больше, чем в выделенном числе (то есть оставить один запасной знак);
- 3) производят сложение, учитывая все сохраненные знаки;
- 4) полученный результат округляют на один знак.

При вычитании близких чисел может произойти большая потеря точности, чтобы не допустить этого необходимо их брать с достаточным числом запасных верных знаков.

При умножении и делении приближенных чисел складываются их относительные погрешности (а не абсолютные!); относительная погрешность выражения

$$r = \frac{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_m}{b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_n}$$

оценивается величиной

$$\delta r = \delta a_1 + \delta a_2 + \dots + \delta a_m + \delta b_1 + \delta b_2 + \dots + \delta b_n.$$

При большом числе $m + n$ выгоднее пользоваться статистической оценкой, учитывающей частичную компенсацию погрешностей разных знаков: если все числа a_i и b_j ($i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$) имеют

примерно одинаковую относительную погрешность δ , то относительная погрешность выражения r принимается равной

$$\delta r = \sqrt{3(m+n)} \cdot \delta, \quad m+n > 10.$$

Если у одного из чисел a_i, b_j относительная погрешность значительно превышает относительные погрешности остальных чисел, то относительная погрешность выражения r считается равной этой наибольшей погрешности. При этом в результате целесообразно сохранять столько знаков (значащих цифр), сколько их в числе с наибольшей относительной погрешностью.

Замечание 1. При умножении приближенного числа на точный сомножитель k относительная погрешность произведения равна относительной погрешности приближенного числа, а абсолютная погрешность в $|k|$ раз больше абсолютной погрешности приближенного числа.

Замечание 2. При перемножении чисел с разной относительной погрешностью (имеющих разное число верных значащих цифр) выполняют следующие действия:

- 1) выделяют число с наименьшим количеством верных значащих цифр (наименее точное число);
- 2) округляют оставшиеся сомножители таким образом, чтобы они содержали на одну значащую цифру больше, чем количество верных значащих цифр в выделенном числе;
- 3) сохраняют в произведении столько значащих цифр, сколько верных значащих цифр имеет наименее точный из сомножителей (выделенное число).

2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ

Погрешности для функции одной переменной

Абсолютная погрешность дифференцируемой функции $y = f(x)$, вызываемая достаточно малой погрешностью аргумента Δx , оценивается величиной $\Delta y = |f'(x)|\Delta x$.

Если значения функции $f(x)$ положительны, то для относительной погрешности имеет место оценка

$$\delta y = \frac{|f'(x)|\Delta x}{f(x)} = \left| (\ln f(x))' \right| \Delta x.$$

В частности, для основных элементарных функций получаем следующие правила.

Степенная функция $y = x^a$

Абсолютная погрешность степенной функции равна

$$\Delta y = ax^{a-1}\Delta x.$$

Относительная погрешность степенной функции равна

$$\delta y = |a|\delta x.$$

Показательная функция $y = a^x$, ($a > 0$)

Абсолютная погрешность показательной функции равна

$$\Delta y = a^x \cdot \ln a \cdot \Delta x.$$

Относительная погрешность показательной функции равна

$$\delta y = \ln a \cdot \Delta x.$$

Логарифмическая функция $y = \ln x$

Абсолютная погрешность натурального логарифма числа равна относительной погрешности самого числа:

$$\Delta y = \frac{1}{x} \cdot \Delta x = \delta x.$$

Тригонометрические функции

Абсолютные погрешности синуса и косинуса не превосходят абсолютных погрешностей аргумента:

$$\Delta \sin x = |\cos x| \cdot \Delta x \leq \Delta x, \quad \Delta \cos x = |\sin x| \cdot \Delta x \leq \Delta x.$$

Абсолютные погрешности тангенса и котангенса всегда больше абсолютных погрешностей аргумента:

$$\Delta \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \Delta x = (1 + \operatorname{tg}^2 x) \cdot \Delta x \geq \Delta x,$$

$$\Delta \operatorname{ctg} x = \left| \frac{-1}{\sin^2 x} \right| \cdot \Delta x = (1 + \operatorname{ctg}^2 x) \cdot \Delta x \geq \Delta x.$$

Погрешности для функции нескольких переменных

Абсолютная погрешность дифференцируемой функции $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, вызываемая достаточно малыми погрешностями $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ аргументов $x_1, x_2, \dots, x_n$, оценивается величиной

$$\Delta y = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \cdot \Delta x_i.$$

Если значения функции положительны, то для относительной погрешности имеет место оценка

$$\delta y = \sum_{i=1}^n \frac{1}{f} \cdot \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial \ln f}{\partial x_i} \right| \cdot \Delta x_i.$$

Правила подсчета цифр

Данные правила указывают, как следует проводить округление всех результатов, чтобы обеспечить заданную точность результата и не производить вычислений с лишними знаками, не оказывающие влияние на верные знаки результата.

Правила подсчета, данные В.М. Брадисом.

1. При сложении и вычитании приближенных чисел в результате следует сохранить столько десятичных знаков, сколько их в приближенном данном с наименьшим числом десятичных знаков.

2. При умножении и делении в результате следует сохранить столько значащих цифр, сколько их в приближенном данном с наименьшим числом верных значащих цифр.

3. При возведении приближенного числа в квадрат или куб в результате следует сохранить столько значащих цифр, сколько их в приближенном числе.

4. При извлечении квадратного и кубического корня из приближенного числа в результате следует сохранить столько значащих цифр, сколько их в подкоренном числе.

5. При вычислении промежуточных результатов следует сохранить на одну цифру больше, чем рекомендуют правила 1–4. В окончательном результате эта «запасная» цифра отбрасывается.

6. Если некоторые данные имеют больше десятичных знаков (при сложении и вычитании) или больше значащих цифр (при других действиях), чем другие, то их предварительно следует округлить, сохраняя лишь одну «запасную цифру».

7. Если данные можно брать с произвольной точностью, то для получения результата с m верными цифрами исходные данные следует брать с таким числом цифр, которые, согласно предыдущим правилам, обеспечивают $m + 1$ цифру в результате.

Эти правила дают в предположении, что компоненты действий содержат только верные цифры и число действий невелико.

Определение допустимых погрешностей

Эта задача имеет однозначное решение только для функции одной переменной $y = f(x)$. Если эта функция дифференцируема и $f'(x) \neq 0$, то

$$\Delta x = \frac{1}{|f'(x)|} \Delta y.$$

Для функции нескольких переменных $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ задача решается только при введении каких-либо дополнительных ограничений. Например, если значение одного из аргументов значительно труднее измерить или вычислить с большой точностью, чем значения остальных аргументов, то погрешность именно этого аргумента надо согласовать с требуемой погрешностью функции.

Если значения всех аргументов можно одинаково легко определить с любой точностью, то обычно применяют принцип равных влияний, считая, что все слагаемые $\left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \Delta x_i$ равны между собой; это дает

$$\Delta x_i = \frac{\Delta y}{n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|}, \quad i = \overline{1, n}.$$

На практике часто встречаются задачи промежуточного типа между указанными крайними случаями. Рассмотрим соответствующие примеры.

При вычислении значений функций, заданных формулами, далеко не безразлично, в каком виде записана соответствующая формула. Математически эквивалентные выражения часто оказываются неравноценными с точки зрения практики вычислений. Дело в том, что основными операциями большинства вычислительных машин являются сложение, вычитание, умножение и деление. Поэтому возникает необходимость представить рассматриваемую математическую задачу в виде последовательности этих элементарных операций. Учитывая ограниченность объема памяти машины и необходимость экономии машинного времени, желательно эти операции разбить на повторяющиеся циклы и выбрать соответствующий алгоритм.

Рассмотрим приемы, сводящие вычисление некоторых функций к таким циклам из элементарных операций.

Вычисление значений многочлена. Схема Горнера

Пусть дан многочлен n -й степени

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$$

с действительными коэффициентами a_k , $k = \overline{0, n}$, и пусть требуется найти значение этого многочлена при $x = c$,

$$P(c) = a_0 c^n + a_1 c^{n-1} + \dots + a_n.$$

Вычисление значения $P(c)$ удобнее всего производить следующим образом. Представим данное выражение в виде

$$P(c) = \left(\dots \left((a_0 c + a_1) c + a_2 \right) c + a_3 \right) c + \dots + a_n.$$

Если ввести числа $b_0 = a_0$, $e_1 = b_0 c$, $b_1 = a_1 + e_1$, $\dots$, $e_n = b_{n-1} c$, $b_n = a_n + e_n$, то $b_n = P(c)$.

Вычисление значения многочлена $P(x)$ при $x = c$ сводится к повторению следующей совокупности элементарных операций:

$$e_k = b_{k-1} c, \quad b_k = a_k + e_k, \quad k = \overline{1, n}.$$

Можно показать, что числа $b_0, b_1, \dots, b_n$ являются коэффициентами многочлена $Q(x)$, полученного в качестве частного при делении данного многочлена $P(x)$ на двучлен $x - c$, а $b_n = P(c)$ остаток от деления. Таким образом, не производя деления, возможно определять коэффициенты частного $Q(x)$, а также остаток $P(c)$.

Числа $b_0, b_1, \dots, b_n$ обычно находят, пользуясь известной схемой Горнера, приведенной в таблице 1.

Таблица 1. Схема Горнера

	a_0	a_1	a_2	$\dots$	a_n
+		$b_0 c$	$b_1 c$	$\dots$	b_{n-1}
	$b_0 = a_0$	b_1	b_2	$\dots$	$b_n = P(c)$

Замечание. Пользуясь схемой Горнера, можно получить границы действительных корней данного полинома $P(x)$.

Положим, что при $x = d$ ($d > 0$) все коэффициенты b_i в схеме Горнера неотрицательны, причем первый коэффициент положителен:

$$b_0 = a_0 > 0 \quad \text{и} \quad b_i \geq 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Тогда можно утверждать, что все действительные корни x_k , $k = \overline{1, m}$, $m \leq n$, полинома $P(x)$ расположены не правее d , то есть $x_k \leq d$, $k = \overline{1, m}$.

Вычисление значений некоторых трансцендентных функций с помощью степенных рядов

Здесь рассматриваются только такие трансцендентные функции, которые являются суммами своих рядов Маклорена

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

Беря сумму нескольких первых членов ряда Маклорена, получаем приближенную формулу $f(x) \approx P_n(x)$, где

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

При этом остаток ряда $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ представляет ошибку при замене $f(x)$ многочленом $P_n(x)$. Оценка остатка позволяет определить требуемое число слагаемых, то есть степень n многочлена $P_n(x)$.

Вычисление значений показательной функции

Для показательной функции справедливо разложение

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad (-\infty < x < +\infty).$$

Вычисления удобно вести, пользуясь рекуррентной записью:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} u_k + R_n(x), \quad (1)$$

$$u_k = \frac{x}{k} u_{k-1}, \quad S_k = S_{k-1} + u_k, \quad k = \overline{0, n},$$

где $u_0 = 1, S_0 = 1$.

Число $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$ приближенно дает искомый результат e^x .

Для остатка ряда может быть получена следующая оценка:

$$|R_n(x)| < |u_n| \quad \text{при} \quad 0 < 2|x| \leq n.$$

Вычисление значений синуса и косинуса

Для вычисления значений функций $\sin x$ и $\cos x$ пользуемся степенными разложениями

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad (-\infty < x < +\infty),$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}, \quad (-\infty < x < +\infty).$$

Данные ряды при больших x сходятся медленно, но, учитывая периодичность функций $\sin x$ и $\cos x$ и формулы приведения, легко заключить, что достаточно уметь вычислять $\sin x$ и $\cos x$ для промежутка $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$. При этом можно использовать следующие рекуррентные формулы:

$$\sin x = \sum_{k=1}^n u_k + R_n(x), \quad (2)$$

$$u_1 = x, \quad u_{k+1} = \frac{-x^2 \cdot u_k}{2k(2k+1)}, \quad k = \overline{1, n-1},$$

$$\cos x = \sum_{k=1}^n v_k + R_n(x), \quad (3)$$

$$v_1 = 1, \quad v_{k+1} = \frac{-x^2 \cdot v_k}{2k(2k-1)}, \quad k = \overline{1, n-1}.$$

Справедливы оценки $|R_n| \leq |u_{n+1}|$, $|R_n| \leq |v_{n+1}|$.

Вычисление значений логарифмической функции

Для натуральных логарифмов чисел, близких к единице, справедливо разложение

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots, \quad -1 < x \leq 1. \quad (4)$$

Введем более удобную формулу для вычислений натуральных логарифмов чисел. Заменяя x на $-x$, будем иметь:

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots - \frac{x^n}{n} - \dots \quad (5)$$

Вычитая почленно из формулы (5) формулу (4), находим:

$$\ln \frac{1-x}{1+x} = -2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \right).$$

Полагая $\frac{1-x}{1+x} = z$, получим $\frac{1-z}{1+z} = x$. Тогда

$$\ln z = -2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \left(\frac{1-z}{1+z} \right)^{2k-1}, \quad (0 < z < +\infty). \quad (6)$$

Пусть x – положительное число. Представим его в виде $x = 2^m z$, где $m \in \mathbb{Z}$, $\frac{1}{2} \leq z < 1$. Тогда, полагая

$$\frac{1-z}{1+z} = c, \quad 0 < c \leq \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

и применяя формулу (6) получим:

$$\begin{aligned} \ln x &= \ln 2^m z = m \ln 2 + \ln z = \\ &= m \ln 2 - 2 \left(c + \frac{c^3}{3} + \dots + \frac{c^{2n-1}}{2n-1} \right) - R_n, \\ R_n &= 2 \left(\frac{c^{2n+1}}{2n+1} + \frac{c^{2n+3}}{2n+3} + \frac{c^{2n+5}}{2n+5} + \dots \right) < \\ &< 2 \cdot \frac{c^{2n+1}}{2n+1} (1 + c^2 + c^4 + \dots) < \frac{2}{1-c^2} \cdot \frac{c^{2n+1}}{2n+1}. \end{aligned}$$

При $0 < c \leq \frac{1}{3}$ имеем $\frac{2}{1-c^2} \leq \frac{9}{4}$, поэтому

$$0 < R_n < \frac{9}{4} \cdot \frac{c^{2n+1}}{2n+1} \quad \text{или} \quad 0 < R_n < \frac{9}{4(2n+1)} \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^{2n-1}.$$

Обозначив $u_k = \frac{c^{2k-1}}{2k-1}$, $k = \overline{1, n}$, получаем

$$\ln x = m \ln 2 - 2(u_1 + u_2 + \dots + u_n) - R_n. \quad (7)$$

Процесс суммирования прекращается, как только выполнится $u_n < 4\varepsilon$, где ε – допустимая остаточная погрешность, так как тогда в силу формулы

$$0 < R_n < \frac{9}{4} \cdot \frac{c^{2n+1}}{2n+1} < \frac{9}{4} \cdot c^2 \cdot \frac{c^{2k-1}}{2k-1} \leq \frac{1}{4} u_n < \varepsilon.$$

Вычисление значений гиперболических функций

Пользуемся степенными разложениями

$$\operatorname{sh} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}, \quad (-\infty < x < +\infty),$$

$$\operatorname{ch} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad (-\infty < x < +\infty).$$

Предполагая, что $x > 0$, вычисления удобно производить процессом суммирования

$$\operatorname{sh} x = \sum_{k=1}^n u_k + R_n(x), \quad (8)$$

$$u_1 = x, \quad u_{k+1} = \frac{x^2 \cdot u_k}{2k(2k+1)}, \quad k = \overline{1, n-1},$$

$$\operatorname{ch} x = \sum_{k=1}^n v_k + R_n(x), \quad (9)$$

$$v_1 = 1, \quad v_{k+1} = \frac{x^2 \cdot v_k}{2k(2k-1)}, \quad k = \overline{1, n-1}.$$

Сведения из теории цепных дробей. Разложение функций в цепные дроби

Выражение вида

$$a_0 + \frac{b_1}{a_1 + \frac{b_2}{a_2 + \frac{b_3}{a_3 + \dots}}} = \left[a_0; \frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \frac{b_3}{a_3}, \dots \right]$$

называется *цепной* или *непрерывной дробью*.

В общем случае элементы цепной дроби $a_0, a_k, b_k, k = 1, 2, \dots$ вещественные или комплексные числа, или функции одной или нескольких переменных. Дроби $\frac{a_0}{1}, \frac{b_k}{a_k}, k = 1, 2, \dots$ называются *звеньями цепной дроби* (соответственно нулевым, первым и так далее), а числа или функции $a_k, b_k, k \geq 1$, членами k -го звена (частными знаменателями или числителями). Мы будем предполагать, что $a_k \neq 0$. Заметим, что в сокращенной записи звенья $\frac{b_k}{a_k}$ сокращать нельзя.

Если цепная дробь содержит конечное число звеньев (например, n , не считая нулевого), то она называется *конечной* или *n -звенной* и сокращенно обозначается следующим образом:

$$\left[a_0; \frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \frac{b_3}{a_3}, \dots, \frac{b_n}{a_n} \right] = \left[a_0; \frac{b_k}{a_k} \right]_1^n.$$

Цепная дробь, имеющая бесконечное множество звеньев, называется *бесконечной*.

Цепная дробь

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}} = \left[a_0; \frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \dots \right],$$

у которой все частные числители равны 1, называется *обыкновенной* или *стандартной цепной дробью*. Знаменатели звеньев называются *неполными частными*.

Всякую конечную цепную дробь можно обратить в обыкновенную. Для этого достаточно произвести все действия, указанные в изображении цепной дроби.

Обратно всякое положительное рациональное число можно обратить в цепную дробь с натуральными элементами.

Пусть дана конечная или бесконечная цепная дробь

$$\left[a_0; \frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \frac{b_3}{a_3}, \dots, \frac{b_n}{a_n} \right] = \left[a_0; \frac{b_k}{a_k} \right]_1^n.$$

Обыкновенную дробь

$$\frac{P_k}{Q_k} = \left[a_0; \frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \frac{b_3}{a_3}, \dots, \frac{b_k}{a_k} \right], \quad k = \overline{1, n},$$

называют *k-ой подходящей дробью цепной дроби*.

При работе на ЭВМ подходящие цепные дроби удобно находить с помощью следующей последовательности операций:

$$c_1 = \frac{b_n}{a_n}, \quad d_1 = a_{n-1} + c_1, \quad c_2 = \frac{b_{n-1}}{d_1}, \quad d_2 = a_{n-2} + c_2, \quad \dots,$$

$$c_k = \frac{b_{n-k+1}}{d_{k-1}}, \quad d_k = a_{n-k} + c_k, \quad \dots,$$

$$c_n = \frac{b_1}{d_{n-1}}, \quad d_n = a_0 + c_n = \frac{P_n}{Q_n}.$$

Для числителей и знаменателей подходящих дробей имеют место следующие рекуррентные формулы:

$$P_n = a_n P_{n-1} + b_n P_{n-2}, \quad Q_n = a_n Q_{n-1} + b_n Q_{n-2}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$P_{-1} = 1, \quad Q_{-1} = 0, \quad P_0 = a_0, \quad Q_0 = 1.$$

Цепная дробь $\left[a_0; \frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \frac{b_3}{a_3}, \dots \right]$ называется *сходящейся*, если существует конечный предел A подходящей дроби $\frac{P_n}{Q_n}$ при $n \rightarrow \infty$:

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{Q_n} = A$ причем число A принимается за значение этой дроби.

Если же предел не существует, то цепная дробь называется *расходящейся*.

Для сходящейся цепной дроби подходящая дробь $\frac{P_n}{Q_n}$ является ее приближенным значением.

Цепные дроби являются удобным аппаратом для представления и вычисления функций.

Если функция $f(x)$ с помощью какого-нибудь приема разлагается в бесконечную цепную дробь, то в общем случае нужно доказать сходимость этой дроби и убедиться, что предельное значение цепной дроби равно функции $f(x)$.

Разложение рациональной функции в цепную дробь

Если

$$f(x) = \frac{c_{10} + c_{11}x + c_{12}x^2 + \dots}{c_{00} + c_{01}x + c_{02}x^2 + \dots},$$

то в общем случае, производя элементарные преобразования, будем иметь:

$$f(x) = \frac{1}{\frac{c_{00}}{c_{10}} + \frac{c_{00} + c_{01}x + c_{02}x^2 + \dots}{c_{10} + c_{11}x + c_{12}x^2 + \dots} - \frac{c_{00}}{c_{10}}} = \frac{c_{10}}{c_{00} + xf_1(x)},$$

где

$$f_1(x) = \frac{c_{20} + c_{21}x + c_{22}x^2 + \dots}{c_{10} + c_{11}x + c_{12}x^2 + \dots},$$

$$c_{2k} = c_{10}c_{0,k+1} - c_{00}c_{1,k+1}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Аналогично

$$f_1(x) = \frac{c_{20}}{c_{10} + xf_2(x)},$$

где

$$f_2(x) = \frac{c_{30} + c_{31}x + c_{32}x^2 + \dots}{c_{20} + c_{21}x + c_{22}x^2 + \dots},$$

$$c_{3k} = c_{20}c_{1,k+1} - c_{10}c_{2,k+1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

и так далее. Таким образом,

$$f(x) = \frac{c_{10}}{c_{00} + \frac{c_{20}x}{c_{10} + \frac{c_{30}x}{c_{20} + \ddots}}} = \left[0; \frac{c_{10}}{c_{00}}, \frac{c_{20}x}{c_{10}}, \frac{c_{30}x}{c_{20}}, \dots, \frac{c_{n0}x}{c_{n-1,0}} \right],$$

причем легко убедиться, что цепная дробь получится конечной. Коэффициенты в разложении c_{jk} удобно последовательно вычислять по формуле

$$c_{jk} = - \begin{vmatrix} c_{j-2,0} & c_{j-2,k+1} \\ c_{j-1,0} & c_{j-1,k+1} \end{vmatrix}, \text{ где } j \geq 2.$$

Разложение e^x в цепную дробь

Пользуемся следующим разложением:

$$e^x = \left[0; \frac{1}{1}, \frac{-2x}{2+x}, \frac{x^2}{6}, \frac{x^2}{10}, \dots, \frac{x^2}{4n+2}, \dots \right].$$

Для любого x эта дробь сходящаяся.

Подходящими дробями для данной функции являются

$$\begin{aligned} \frac{P_1}{Q_1} &= \frac{1}{1}, & \frac{P_2}{Q_2} &= \frac{2+x}{2-x}, & \frac{P_3}{Q_3} &= \frac{12+6x+x^2}{12-6x+x^2}, \\ \frac{P_4}{Q_4} &= \frac{120+60x+12x^2+x^3}{120-60x+12x^2-x^3}, \\ \frac{P_5}{Q_5} &= \frac{1680+840x+180x^2+20x^3+x^4}{1680-840x+180x^2-20x^3+x^4}, \dots \end{aligned}$$

Разложение $\operatorname{tg} x$ в цепную дробь

Имеет место следующее разложение:

$$\operatorname{tg} x = \left[0; \frac{x}{1}, \frac{-x^2}{3}, \frac{-x^2}{5}, \dots, \frac{-x^2}{2n+1}, \dots \right].$$

Это разложение справедливо во всех точках непрерывности $\operatorname{tg} x$.

Первыми подходящими дробями будут

$$\begin{aligned} \frac{P_1}{Q_1} &= \frac{x}{1}, & \frac{P_2}{Q_2} &= \frac{3x}{3-x^2}, & \frac{P_3}{Q_3} &= \frac{15x-x^3}{15x-6x^2}, \\ \frac{P_4}{Q_4} &= \frac{105x-10x^3}{105-45x^2+x^4}, & \frac{P_5}{Q_5} &= \frac{945x-105x^3+x^5}{945-420x^2+15x^4}. \end{aligned}$$

Применение метода итераций для приближенного вычисления значений функций

Всякую функцию $y = f(x)$ можно задать неявно, некоторым уравнением $F(x, y) = 0$.

Часто бывает, что решение данного уравнения относительно y каким-либо итерационным методом сводится к однообразным операциям, легко реализуемым на ЭВМ. Тогда, очевидно, целесообразно применить метод итераций.

Один из возможных итерационных процессов для вычисления $y(x)$ можно построить следующим образом.

Пусть y_n – приближенное значение y . Применив формулу Лагранжа, получим $F(x, y_n) = F(x, y_n) - F(x, y) = (y_n - y)F'_y(x, \overline{y_n})$, где $\overline{y_n}$ – некоторое промежуточное значение между y_n и y .

Отсюда

$$y = y_n - \frac{F(x, y_n)}{F'_y(x, \overline{y_n})},$$

причем $\overline{y_n}$ значение нам не известно.

Полагая приближенно $\overline{y_n} \approx y_n$, получим следующую формулу для вычисления $y \approx y_{n+1}$:

$$y_{n+1} = y_n - \frac{F(x, y_n)}{F'_y(x, y_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (10)$$

Если $F'_y(x, y_n)$ и $F''_{yy}(x, y_n)$ существуют и сохраняют постоянные знаки в рассматриваемом интервале, содержащем корень $y(x)$, то итерационный процесс сходится к $y(x)$.

Начальное приближение $y_0(x)$ выбирают так, чтобы оно легко вычислялось и было, по возможности, близким к истинному значению $y(x)$.

Процесс итераций продолжается до тех пор, пока в пределах заданной точности два последовательных значения y_{n+1} и y_n не совпадут между собой, после чего приближенно полагают $y(x) \approx y_{n+1}$.

Вычисление обратной величины

Пусть $y = \frac{1}{x}$, $x > 0$. Положим

$$F(x, y) \equiv x - \frac{1}{y} = 0.$$

Применив формулу (10), получим

$$y_{n+1} = y_n(2 - xy_n). \quad (11)$$

Вычисление y_{n+1} по полученной итерационной формуле содержит лишь действия умножения и вычитания. Начальное значение y_0 выбирается обычно следующим образом. Записывают аргумент x в двоичной системе: $x = 2^m x_1$, где $m \in \mathbb{Z}$, $\frac{1}{2} \leq x_1 < 1$. Полагают $y_0 = 2^{-m}$; при таком выборе начального значения y_0 сходимость итерационного процесса довольно быстрая.

Вычисление квадратного корня

Пусть $y = \sqrt{x}$, $x > 0$. Преобразуем это уравнение к виду $F(x, y) \equiv y^2 - x = 0$. Применив формулу (10), получим:

$$y_{n+1} = \frac{1}{2} \left(y_n + \frac{x}{y_n} \right), \quad n = 0, 1, \dots \quad (12)$$

Пусть аргумент x записан в двоичной системе: $x = 2^m x_1$, где $m \in \mathbb{Z}$, $\frac{1}{2} \leq x_1 < 1$. Тогда обычно полагают

$$y_0 = 2^{E\left(\frac{m}{2}\right)},$$

где $E\left(\frac{m}{2}\right)$ – целая часть числа $\frac{m}{2}$.

Итерационный процесс по формуле Герона сходится при любом выборе $y_0 > 0$.

Укажем еще один способ вычисления квадратного корня, оказывающийся иногда полезным.

Заменяем функцию $F(x, y) \equiv y^2 - x = 0$ эквивалентным соотношением

$$F(x, y) \equiv \frac{x}{y^2} - 1 = 0.$$

Тогда

$$F'_y(x, y) = \frac{-2x}{y^3}.$$

Применяя формулу (10), получим

$$y_{n+1} = \frac{y_n}{2} \left(3 - \frac{y_n^2}{x} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (13)$$

Вычисление обратной величины квадратного корня

Пусть $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x > 0$. Записав функцию в виде $\sqrt{\frac{1}{x}}$, из формулы (13) получим итеративный процесс

$$y_{n+1} = \frac{y_n}{2} (3 - y_n^2 \cdot x), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (14)$$

Если $x = 2^m x_1$, где $m \in \mathbb{Z}$, $\frac{1}{2} \leq x_1 < 1$, то за y_0 полагают $y_0 = 2^{-E(\frac{m}{2})}$, где $E(\frac{m}{2})$ – целая часть числа $\frac{m}{2}$.

Вычисление кубического корня

Пусть $y = \sqrt[3]{x}$, $x > 0$, то, положив

$$F(x, y) \equiv y^3 - x = 0,$$

будем иметь

$$F'_y(x, y) = 3y^2.$$

Применив формулу (10), получаем:

$$y_{n+1} = y_n - \frac{y_n^3 - x}{3y_n^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

или

$$y_{n+1} = \frac{1}{3} \left(2y_n + \frac{x}{y_n^2} \right). \quad (15)$$

Если $x = 2^m x_1$, где $m \in \mathbb{Z}$, $\frac{1}{2} \leq x_1 < 1$, то за y_0 полагают $y_0 = 2^{E(\frac{m}{3})}$, где $E(\frac{m}{3})$ – целая часть числа $\frac{m}{3}$.

Формула Ньютона для вычисления корня p -й степени

Пусть $y = \sqrt[p]{x}$, то, положив

$$F(x, y) \equiv y^p - x = 0,$$

будем иметь

$$F'_y(x, y) = p \cdot y^{p-1}.$$

Применив формулу (10), получаем:

$$y_{n+1} = \frac{1}{p} \left((p-1)y_n + \frac{x}{y_n^{p-1}} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (16)$$

Начальное приближение y_0 можно подобрать с точностью до одной-двух значащих цифр. При $p = 2$ из формулы Ньютона получаем формулу Герона.

3. ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

Задача приближения (аппроксимации) функций заключается в том, чтобы для данной функции построить другую, отличную от нее функцию, значения которой достаточно близки к значениям данной функции. Наиболее типичные случаи:

- 1) функция задана таблицей в конечном множестве точек, а вычисления нужно произвести в других точках;
- 2) функция задана аналитически, но ее вычисление по формуле затруднительно.

При решении задачи поиска приближенной функции возникают следующие проблемы:

- 1) необходимо выбрать вид приближенной функции (для приближения широко используются многочлены, тригонометрические функции, показательные функции и так далее);
- 2) необходимо выбрать критерий близости исходной и приближенной функции – это может быть требование совпадения обеих функций в узловых точках (задача интерполяции), минимизация среднеквадратичного отклонения (метод наименьших квадратов) и другие;
- 3) необходимо указать правило (алгоритм), позволяющее с заданной точностью найти приближение функции.

Интерполяция – способ нахождения промежуточных значений величины по имеющемуся дискретному набору известных значений.

Пусть на $[a; b]$ определена некоторая функция $y = f(x)$, однако полная информация о ней неизвестна. Известны лишь ее значения в конечном числе точек $x_0, x_1, \dots, x_n$ этого отрезка, которые будем считать занумерованными в порядке возрастания:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_n = b.$$

Требуется по известным табличным значениям $y_i = f(x_i)$, $i = \overline{0, n}$, «восстановить» исходную функцию $y = f(x)$, то есть построить на отрезке $[a; b]$ функцию $F(x)$, достаточно близкую

к $f(x)$. Функцию $F(x)$ называют *интерполирующей*, точки – *узлами интерполяции*.

Иногда, непосредственное вычисление функции $y = f(x)$ связано с проведением сложных расчетов. Нередко значения функции находятся из эксперимента, и табличные значения y_i^* отличаются от «истинных» y_i , так как заведомо содержат ошибки эксперимента. В такой ситуации строят приближенную функцию $F(x)$, так, чтобы погрешность приближения была достаточно мала.

Замена одной функции $f(x)$ другой более простой и удобной для дальнейшей работы функцией $f(x) \approx F(x)$ называется *аппроксимацией функции*, или просто приближением функции $f(x)$ функцией $F(x)$.

Задача интерполирования ставится обычно в следующей форме: найти многочлен $P(x) = P_n(x)$ степени не выше n , значения которого в точках x_i , $i = \overline{0, n}$, совпадают со значениями данной функции, то есть $P(x_i) = y_i$.

Геометрически это означает, что нужно найти алгебраическую кривую вида $y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$, проходящую через заданную систему точек $M_i(x_i, y_i)$, $i = \overline{0, n}$.

Многочлен $P(x)$ называется *интерполяционным многочленом*. Точки x_i , $i = \overline{0, n}$, называются *узлами интерполяции*.

Степень интерполяционного полинома, построенного по $(n + 1)$ точке, в исключительных случаях может оказаться меньше n . Например, если все точки $M_i(x_i, y_i)$ лежат на одной прямой наклонной или горизонтальной, то полином будет иметь первую соответственно нулевую степень. Понятно, что такие случаи крайне редки.

В общем случае по заданным значениям $f(x)$ в $(n + 1)$ узле конструируется полином степени n , притом единственным образом. Покажем это. Подставляя в общий вид полинома

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$$

условия $P_n(x_i) = f(x_i)$, $i = \overline{0, n}$, получим систему из $(n + 1)$ линейного уравнения

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + \dots + a_nx_0^n = y_0, \\ a_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_1^n = y_1, \\ \dots\dots\dots \\ a_0 + a_1x_n + \dots + a_nx_n^n = y_n \end{cases}$$

с $(n + 1)$ неизвестными-коэффициентами полинома $a_0, a_1, \dots, a_n$. Решать эту систему можно, например, по формулам Крамера.

Если главный определитель системы (составленный из коэффициентов при неизвестных) отличен от нуля, то система имеет решение и притом единственное. В нашем случае главный определитель имеет специальный вид (определитель Вандермонда):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{vmatrix}.$$

При оценке погрешности результатов должны учитываться как погрешность метода интерполяции (остаточный член), так и погрешности округления при вычислениях.

Интерполирование для случая равноотстоящих узлов

Узлы интерполяции называются *равноотстоящими*, если

$$x_{i+1} - x_i = \Delta x_i = h = \text{const}, \quad i = \overline{0, n-1}.$$

Конечными разностями функции $y = f(x)$ называются разности вида:

$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$ – конечные разности первого порядка,

$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i$ – конечные разности второго порядка,

...

$\Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i$ – конечные разности k -го порядка.

Таблица 2. Горизонтальная таблица конечных разностей при $n = 5$

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
x_0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	$\Delta^4 y_0$
x_1	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$	$\Delta^4 y_1$
x_2	y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_2$	$\Delta^3 y_2$	—
x_3	y_3	Δy_3	$\Delta^2 y_3$	—	—
x_4	y_4	Δy_4	—	—	—
x_5	y_5	—	—	—	—

Справедливо утверждение: если

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$$

— полином n -й степени, то

$$\Delta^n P_n(x) = n! a_0 h^n = \text{const}, \text{ где } \Delta x = h.$$

Первая интерполяционная формула Ньютона:

$$y(x) = P_n(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \dots + \frac{q(q-1)\dots(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0, \quad (17)$$

где $q = \frac{x-x_0}{h}$.

Остаточный член $R_n(x)$ для данной формулы имеет вид:

$$R_n(x) = h^{n+1} \frac{q(q-1)\dots(q-n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c),$$

где c — некоторая внутренняя точка наименьшего промежутка, содержащего все узлы x_i , $i = \overline{0, n}$, и точку x .

Число n желательно выбирать так, чтобы разности $\Delta^n y_i$ были практически постоянными.

Первая интерполяционная формула Ньютона используется для интерполирования и экстраполирования в точках x близких к началу таблицы x_0 .

При $n = 1$ и $n = 2$ получаем частные случаи:

- линейная интерполяция:

$$y(x) = y_0 + q\Delta y, \quad (18)$$

- квадратичная интерполяция:

$$y(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0. \quad (19)$$

Вторая интерполяционная формула Ньютона:

$$y(x) = P_n(x) = y_n + q\Delta y_{n-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \dots + \frac{q(q+1) \dots (q+n-1)}{n!}\Delta^n y_0, \quad (20)$$

где $q = \frac{x-x_n}{h}$.

Остаточный член $R_n(x)$ для данной формулы имеет вид:

$$R_n(x) = h^{n+1} \frac{q(q+1) \dots (q+n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c),$$

где c – некоторая внутренняя точка наименьшего промежутка, содержащего все узлы x_i , $i = \overline{0, n}$, и точку x .

Интерполяционная формула Лагранжа

Пусть x_i , $i = \overline{0, n}$, – произвольные узлы, а $y_i = f(x_i)$ – значения функции $f(x)$. Многочленом степени n , принимающим в точках x_i значения y_i является интерполяционный многочлен Лагранжа:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \frac{(x-x_0)(x-x_1) \dots (x-x_{i-1})(x-x_{i+1}) \dots (x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1) \dots (x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1}) \dots (x_i-x_n)}. \quad (21)$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-x_0)(x-x_1) \dots (x-x_n).$$

Выражения

$$L_i^{(n)}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)} \quad (22)$$

называются *коэффициентами Лагранжа*.

Интерполяция с кратными узлами

Иногда в узлах x_i , $i = \overline{0, m}$, бывают заданы не только значения $y_i = f(x_i)$, но и значения ее производных $y'_i = f'(x_i)$, ..., $y_i^{(k_i-1)} = f^{(k_i-1)}(x_i)$ до некоторого порядка $k_i - 1$. В этом случае узел x_i называют *кратным*, а число k_i , равное количеству заданных значений, *кратностью узла*. Пусть $n = k_0 + k_1 + \dots + k_m - 1$. Можно доказать, что существует единственный многочлен $P_n(x)$ степени n , удовлетворяющий условиям

$$P_n(x_i) = y_i, \quad P'_n(x_i) = y'_i, \dots, \quad P_n^{(k_i-1)}(x_i) = y_i^{(k_i-1)}, \quad i = \overline{0, m}.$$

Этот многочлен называют *интерполяционным многочленом с кратными узлами* или *интерполяционным многочленом Эрмита*.

Пусть в точке x_0 заданы значения $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n)}$. Тогда многочлен $P_n(x)$, удовлетворяющий условиям $P_n(x_0) = y_0, P'_n(x_0) = y'_0, \dots, P_n^{(n)}(x_0) = y_0^{(n)}$ представляется в виде

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n y_0^{(k)} \frac{(x - x_0)^k}{k!}.$$

Многочлен $P_n(x)$ представляет собой отрезок ряда Тейлора. Таким образом, формула Тейлора дает решение задачи интерполяции, в действительности с ее помощью осуществляется экстраполяция, с одним узлом кратности $n + 1$.

Многочлены Чебышёва. При $n = 0$ и $n = 1$ они определяются явными формулами $T_0(x) = 1, T_1(x) = x$, а при $n \geq 2$ рекуррентной формулой

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x).$$

Запишем явные формулы для многочленов Чебышёва

$$\begin{aligned}T_2(x) &= 2xT_1(x) - T_0(x) = 2x^2 - 1, \\T_3(x) &= 2xT_2(x) - T_1(x) = 4x^3 - 3x, \\T_4(x) &= 2xT_3(x) - T_2(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1.\end{aligned}$$

Обратное интерполирование

Пусть функция $y = f(x)$ задана таблицей. Задача обратного интерполирования заключается в том, чтобы по заданному значению функции y определить соответствующее значение аргумента x . Считаем, что в рассматриваемом интервале функция $f(x)$ монотонна. В этом случае задача решается с помощью интерполяционного многочлена Лагранжа. Примем переменную y за независимую, а x считать функцией от y . Тогда, написав по заданным узлам $(y_i; x_i)$, $i = \overline{0, n}$, многочлен Лагранжа

$$x = \sum_{i=0}^n x_i \frac{(y - y_0)(y - y_1) \dots (y - y_{i-1})(y - y_{i+1}) \dots (y - y_n)}{(y_i - y_0)(y_i - y_1) \dots (y_i - y_{i-1})(y_i - y_{i+1}) \dots (y_i - y_n)},$$

можно определить x по заданному y .

Если функция $y = f(x)$ задана таблицей с равноотстоящими узлами, то записываем для нее один из интерполяционных многочленов, например, первый интерполяционный многочлен Ньютона:

$$y = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \dots + \frac{q(q-1) \dots (q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0.$$

Рассматривая последнее выражение как уравнение относительно q , находим q по заданному значению y , а затем вычисляем $x = x_0 + qh$.

Если число узлов велико, то получим алгебраическое уравнение высокой степени. При решении такого уравнения удобно применить метод итераций. Для этого запишем уравнение в виде

$$\begin{aligned}q &= \varphi(q) = \\&= \frac{y - y_0}{\Delta y_0} - \frac{q(q-1)}{2! \Delta y_0} \Delta^2 y_0 - \dots - \frac{q(q-1) \dots (q-n+1)}{n! \Delta y_0} \Delta^n y_0.\end{aligned}$$

За начальное приближение принимаем $q_0 = \frac{y-y_0}{\Delta y_0}$, а затем изменяем процесс итераций $q_m = \varphi(q_{m-1})$.

При достаточно малом шаге $h = x_{i+1} - x_i$ процесс итераций сходится; при этом $q = \lim_{m \rightarrow \infty} q_m$. Условием сходимости является выполнение неравенства

$$|\varphi'(q)| \leq \alpha < 1.$$

На практике итерации продолжают до тех пор, пока два последовательных значения q_m и q_{m+1} не совпадут с заданной точностью, и полагают $q \approx q_{m+1}$.

Указанный метод итераций для обратной интерполяции требует монотонности функции $f(x)$ только на интервале $(x_0; x_1)$, где $y_0 < y < y_1$ или $y_0 > y > y_1$. Узлы же применяемой интерполяционной формулы могут лежать и вне интервала монотонности функции $f(x)$.

Пусть функция интерполируется на отрезке $[a; b]$. Метод решения этой задачи с помощью интерполяции единым для всего отрезка многочленом $P_n(x)$ называют *глобальной полиномиальной интерполяцией*. Альтернативный подход состоит в локальной интерполяции, когда функция f аппроксимируется интерполяционным многочленом $P_n(x)$ невысокой степени m на содержащемся в $[a; b]$ отрезке $[\alpha; \beta]$ малой длины. Рассмотрим два подхода к приближению функции, основанные на локальной интерполяции.

Интерполирование с помощью «движущегося» полинома

Строят набор полиномов $P_{(0,1,\dots,m)}(x)$, $P_{(1,2,\dots,m+1)}(x)$, ..., $P_{(n-m,n-m+1,\dots,n)}(x)$ фиксированной степени m , каждый из которых совпадает с табличными значениями в $m + 1$ последовательных точках. Каждый такой полином используют для приближения функции в тех точках x из отрезка $[a; b]$, для которых выбранные узлы таблицы являются ближайшими.

Кусочно-полиномиальная интерполяция

Исходный отрезок $[a; b]$ разбивают на несколько отрезков меньшей длины, на каждом из которых функция интерполируется своим многочленом.

Интерполяцию «движущимся» полиномом можно рассматривать как частный случай кусочно-полиномиальной интерполяции.

Часто это обстоятельство не играет существенной роли. Вместе с тем нередко требуется, чтобы аппроксимирующая функция была гладкой, и тогда простейшая кусочно-полиномиальная интерполяция становится неприемлемой.

Интерполяция сплайнами

Естественная потребность в наличии аппроксимирующих функций, которые сочетали бы в себе локальную простоту многочлена невысокой степени и глобальную на всем отрезке $[a; b]$ гладкость, привела к появлению *сплайн-функций* – специальным образом построенных гладких кусочно-многочленных функций. Сплайны к настоящему времени стали важной составной частью самых различных вычислительных методов и нашли широчайшее применение в решении разнообразных научно-технических и инженерных задач.

Пусть отрезок $[a; b]$ разбит точками $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ на n частичных отрезков $[x_{i-1}; x_i]$. *Сплайном степени m* называется функция $S_m(x)$, обладающая следующими свойствами:

1) функция $S_m(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ вместе со всеми своими производными до некоторого порядка p ;

2) на каждом частичном отрезке $[x_{i-1}; x_i]$ функция $S_m(x)$ совпадает с некоторым алгебраическим многочленом $P_{m,i}(x)$ степени m .

Разность между степенью сплайна и наивысшим порядком непрерывной на отрезке $[a; b]$ производной называется *дефектом сплайна*.

Простейший пример сплайна дает непрерывная кусочно-линейная функция, являющаяся сплайном первой степени (линейным

сплайном) с дефектом, равным 1. Термин происходит от английского слова (гибкая линейка, стержень) – названия приспособления, использовавшегося чертежниками для проведения гладких кривых через заданные точки. Если гибкую стальную линейку поставить на ребро и, изогнув, зафиксировать ее положение в узловых точках, то получится механический аналог кубического сплайна.

Интерполяционный сплайн

Пусть функция $y = f(x)$ задана таблицей своих значений $y_i = f(x_i)$, $i = \overline{0, n}$. Сплайн $S_m(x)$ называется *интерполяционным*, если $S_m(x_i) = y_i$ для всех $i = \overline{0, n}$. Значение $s_i = S'_m(x_i)$ называется *наклоном сплайна в точке x_i* . На отрезке $[x_{i-1}; x_i]$ интерполяционный кубический сплайн однозначно определяется заданием значений y_{i-1} , y_i , s_{i-1} , s_i .

$$S_3(x) = P_{3,i}(x) = y_{i-1} \frac{(x - x_i)^2(2(x - x_{i-1}) + h_i)}{h_i^3} + \\ + s_{i-1} \frac{(x - x_i)^2(x - x_{i-1})}{h_i^2} + y_i \frac{(x - x_{i-1})^2(2(x - x_i) + h_i)}{h_i^3} + \\ + s_i \frac{(x - x_{i-1})^2(x - x_i)}{h_i^2}, \quad \text{где } h_i = x_i - x_{i-1}.$$

Различные методы интерполяции кубическими сплайнами отличаются один от другого способом выбора наклонов s_i .

4. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ

Пусть задано уравнение вида: $f(x) = 0$, где $f(x)$ – алгебраическая или трансцендентная функция.

Решить уравнение, значит найти такое значение x , которое удовлетворяет уравнению $f(x) = 0$.

Методы решения нелинейных уравнений делятся на прямые (точные) и итерационные (приближенные).

Прямые методы позволяют найти корни уравнения в виде аналитического выражения. Но чаще приходится решать уравнения, не имеющие аналитических решений. Кроме того, в некоторых случаях уравнение содержит коэффициенты, известные лишь приближенно. Для таких задач используются итерационные методы.

Решить уравнение $f(x) = 0$, значит установить имеет ли оно корни, количество корней и найти их значения с заданной точностью.

Задача отыскания корней уравнения $f(x) = 0$ итерационным методом состоит из двух этапов:

- 1) отделение корней;
- 2) уточнение приближенных корней.

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, и принимает на концах отрезка значения разных знаков, то внутри отрезка $[a; b]$ найдется такая точка c , в которой значение функции $f(c)$ равно нулю, то есть c является корнем уравнения $f(x) = 0$.

Будем считать, что интересующий нас корень уравнения изолирован на некотором отрезке $[a; b]$, то есть внутри отрезка $[a; b]$ содержится единственный корень уравнения $f(x) = 0$.

Непрерывная строго монотонная функция $f(x)$ имеет и притом единственный нуль на отрезке $[a; b]$ тогда и только тогда, когда на его концах она принимает значения разных знаков.

Рассмотрим некоторые методы нахождения корней уравнения $f(x) = 0$.

Графический метод

Решить уравнение можно графически, так как действительные корни уравнения $f(x) = 0$ – это точки пересечения графика функции $f(x)$ с осью абсцисс. Процесс построения графика можно упростить, заменив уравнение $f(x) = 0$ равносильным ему уравнением: $f_1(x) = f_2(x)$, где $f_1(x)$ и $f_2(x)$ более простые функции, чем $f(x)$.

Метод половинного деления (метод дихотомии)

Пусть уравнение $f(x) = 0$ на отрезке $[a; b]$ имеет единственное решение и функция $f(x)$ непрерывна на данном отрезке. Разделим отрезок $[a; b]$ точкой $c = \frac{a+b}{2}$. Если $f(c) = 0$, то c – корень уравнения, если указанное значение не равно нулю, то из двух сегментов выберем тот, на концах которого функция $f(x)$ имеет значения разных знаков. Обозначим его $[a_1; b_1]$. С сегментом $[a_1; b_1]$ поступим аналогично, то есть разделим пополам. Продолжая рассуждения далее, у нас есть два случая: либо описанный выше процесс оборвется вследствие того, что значение функции в середине некоторого из сегментов окажется равным нулю (решили уравнение); или же получаем бесконечную последовательность вложенных друг в друга отрезков $[a_1; b_1], [a_2; b_2], \dots, [a_n; b_n], \dots$ таких, что

$$f(a_n)f(b_n) < 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$b_n - a_n = \frac{1}{2^n} (b - a).$$

Так как левые концы $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ образуют монотонную неубывающую ограниченную последовательность, а правые концы $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ – монотонную невозрастающую ограниченную последовательность, то существует общий предел

$$c = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$ в неравенстве $f(a_n)f(b_n) < 0$, в силу непрерывности функции $f(x)$ получим $f^2(c) \leq 0$. Отсюда $f(c) = 0$, то есть c является корнем уравнения $f(x) = 0$, причем, очевидно,

$$0 \leq c - a_n \leq \frac{1}{2^n}(b - a).$$

Если корни уравнения не отделены на отрезке $[a; b]$, то таким способом можно найти один из корней уравнения.

Достоинства: метод прост и надежен, всегда сводится к решению независимо от вида функции $f(x)$.

Недостаток: самый медленный из всех известных методов.

Способ пропорциональных частей (метод хорд)

Пусть уравнение $f(x) = 0$, функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и $f(a)f(b) < 0$. Пусть для определенности $f(a) < 0$ и $f(b) > 0$. Тогда, вместо того чтобы делить отрезок $[a; b]$ пополам, более естественно разделить его в отношении $f(a):f(b)$. Это дает нам приближенное значение корня $x_1 = a + h_1$, где

$$h_1 = -\frac{f(a)}{f(b) - f(a)}(b - a).$$

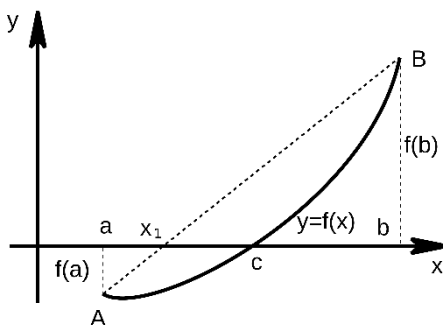


Рис. 1. Способ пропорциональных частей

Далее, применяя этот прием к тому из отрезков $[a; x_1]$ или $[x_1; b]$, на концах которого функция $f(x)$ имеет противоположные знаки, получим второе приближение корня x_2 и так далее.

Геометрически способ пропорциональных частей эквивалентен замене кривой $y = f(x)$ хордой, проходящей через точки $A(a, f(a))$ и $B(b, f(b))$ (см. рис. 1). В самом деле, уравнение хорды AB есть

$$\frac{x - a}{b - a} = \frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)}.$$

Отсюда, полагая $x = x_1$ и $y = 0$, получим:

$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f(b) - f(a)}(b - a).$$

Для доказательства сходимости процесса предположим, что корень отделен, и вторая производная сохраняет постоянный знак на отрезке $[a; b]$. Пусть для определенности $f''(x) > 0$ при $a \leq x \leq b$ (случай $f''(x) < 0$ сводится к нашему, если записать уравнение в виде $-f(x) = 0$). Тогда кривая $y = f(x)$ будет выпукла вниз и, следовательно, расположена ниже своей хорды AB . Возможны два случая: 1) $f(a) > 0$ и 2) $f(a) < 0$.

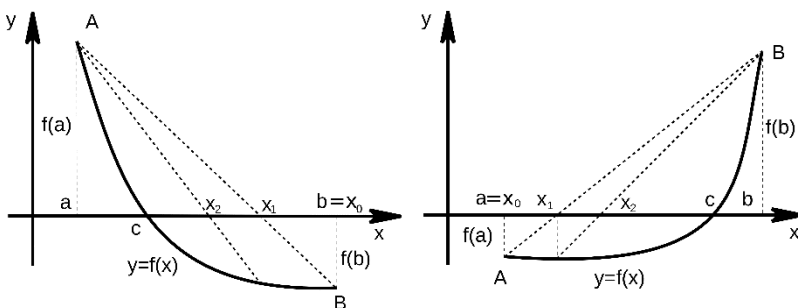


Рис. 2. Способ пропорциональных частей

В первом случае конец a неподвижен и последовательные приближения:

$$x_0 = b, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(a)}(x_n - a), \quad n = 0, 1, \dots \quad (23)$$

образуют ограниченную монотонно убывающую последовательность, причем $a < c < \dots < x_{n+1} < x_n < \dots < x_1 < x_0$.

Во втором случае неподвижен конец b , а последовательные приближения:

$$x_0 = a, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(b) - f(x_n)}(b - x_n), \quad n = 0, 1, \dots \quad (24)$$

образуют ограниченную монотонно возрастающую последовательность, причем $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1} < \dots < c < b$.

Обобщим результаты:

1) неподвижен тот конец, для которого знак функции совпадает со знаком ее второй производной;

2) последовательные приближения x_n лежат по ту сторону корня c , где функция имеет знак, противоположный знаку ее второй производной.

Для оценки точности приближения можно воспользоваться формулой

$$|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon.$$

Метод Ньютона (метод касательных)

Пусть корень c уравнения $f(x) = 0$ отделен на отрезке $[a; b]$, причем $f'(x)$ и $f''(x)$ непрерывны и сохраняют определенные знаки при $a \leq x \leq b$. Геометрически метод Ньютона эквивалентен замене небольшой дуги кривой $y = f(x)$ касательной, проведенной в некоторой точке кривой. Пусть для определенности $f''(x) > 0$ при $a \leq x \leq b$ и $f(b) > 0$.

Выберем, например, $x_0 = b$, для которого $f(x_0)f''(x_0) > 0$. Проведем касательную к кривой $y = f(x)$ в точке $B_0(x_0, f(x_0))$. В качестве первого приближения корня c возьмем абсциссу точки пересечения этой касательной с осью Ox . Через точку $B_1(x_1, f(x_1))$ снова проведем касательную, абсцисса точки пересечения которой даст нам второе приближение x_2 корня c и так далее.

Уравнение касательной в точке $B_n(x_n, f(x_n))$, $n = 0, 1, \dots$ есть $y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n)$.

Полагая $y = 0$, $x = x_{n+1}$ получим:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \quad (25)$$

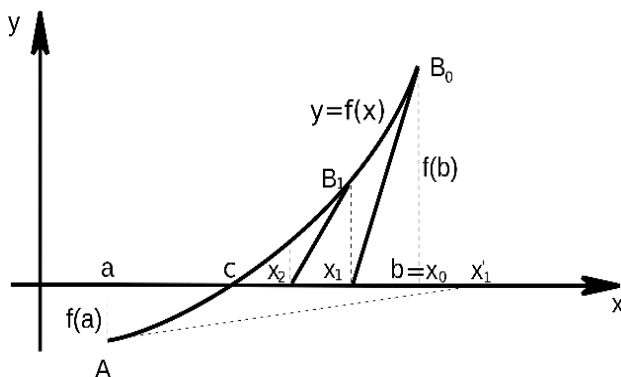


Рис. 3. Метод касательных

Заметим, что если в нашем случае положить $x_0 = a$ и, следовательно, $f(x_0)f''(x_0) < 0$, то, проведя касательную к кривой $y = f(x)$ в точке $A(a, f(a))$, мы получили бы точку x'_1 , лежащую вне отрезка $[a; b]$, то есть при этом выборе начального значения метод Ньютона оказывается непрактичным. В качестве исходной точки x_0 выбирается тот конец интервала, которому отвечает ордината того же знака, что и знак $f''(x)$.

Комбинированный метод

Пусть $f(x_0)f''(x_0) < 0$, а $f'(x)$ и $f''(x)$ непрерывны и сохраняют постоянные знаки при $a \leq x \leq b$. Соединяя способ пропорциональных частей и метод Ньютона, получаем метод, на каждом этапе которого находим значения по недостатку и значения по избытку точного корня с уравнения $f(x) = 0$. Возможны четыре случая.

1) $f' > 0, f'' > 0$.

Полагаем $x_0 = a, \bar{x}_0 = b$ и

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(\bar{x}_n) - f(x_n)}(\bar{x}_n - x_n),$$

$$\bar{x}_{n+1} = \bar{x}_n - \frac{f(\bar{x}_n)}{f'(\bar{x}_n)}, \quad n = 0, 1, \dots$$

На каждом шаге метод хорд применяется к новому отрезку $[x_n; \bar{x}_n]$. Очевидно, $x_n < c < \bar{x}_n$ и $0 < c - x_n < \bar{x}_n - x_n$.

Если допустимая абсолютная погрешность приближенного корня x_n задана заранее и равна ε , то процесс сближения прекращается в тот момент, когда будет обнаружено, что $\bar{x}_n - x_n < \varepsilon$. По окончании процесса за значение корня c лучше всего взять среднее арифметическое полученных последних значений.

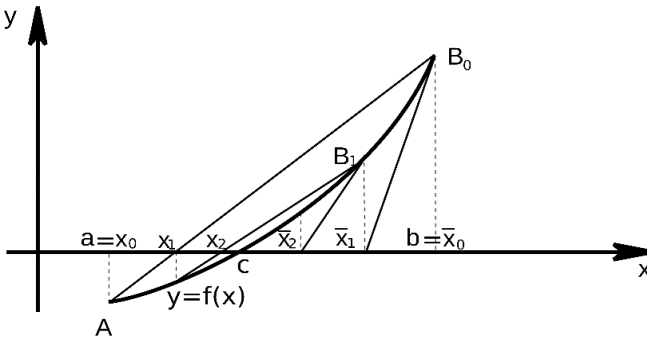


Рис. 4. Комбинированный метод, случай $f' > 0, f'' > 0$

Остальные случаи

2) $f' > 0$, $f'' < 0$,

3) $f' < 0$, $f'' > 0$,

4) $f' < 0$, $f'' < 0$

изучаются аналогично.

Метод итерации

Сущность этого метода заключается в следующем. Пусть дано уравнение $f(x) = 0$, где $f(x)$ непрерывная функция, и требуется определить его вещественные корни. Заменим уравнение равносильным уравнением $x = F(x)$.

Выберем каким-либо способом грубо приближенное значение корня x_0 и подставим его в правую часть уравнения $x = F(x)$. Тогда получим некоторое число $x_1 = F(x_0)$. Подставляя теперь в правую часть равенства $x_1 = F(x_0)$ вместо x_0 число x_1 получим новое число $x_2 = F(x_1)$. Повторяя этот процесс, будем иметь последовательность чисел

$$x_n = F(x_{n-1}), \quad n = 1, 2, \dots \quad (26)$$

Если эта последовательность – сходящаяся, то есть существует предел $c = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, то, переходя к пределу в равенстве (26) и предполагая функцию $F(x)$ непрерывной, найдем:

$$c = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = F\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n-1}\right) = F(c).$$

Таким образом, предел c является корнем уравнения $x = F(x)$ и может быть вычислен по формуле (26) с любой степенью точности.

Последовательность $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$ называют *итерационной*, если для любого $n \geq 1$ элемент x_n выражается через элемент x_{n-1} по рекуррентной формуле (26), а в качестве x_0 взято любое число из области задания функции $F(x)$.

Теорема. Пусть функция $F(x)$ непрерывна на сегменте $[a; b]$, и пусть все элементы итерационной последовательности $x_0, x_1, \dots$,

$x_n, \dots$ лежат на этом сегменте. Тогда, если эта последовательность сходится к некоторому числу c , то указанное число c является корнем уравнения $x = F(x)$.

Теорема. Пусть c – корень уравнения $x = F(x)$ и пусть в некотором симметричном относительно точки c сегменте $[c - \varepsilon; c + \varepsilon]$ производная функции $F(x)$ удовлетворяет условию $|F'(x)| \leq \alpha < 1$. Тогда итерационная последовательность $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$, у которой в качестве x_0 взято любое число из сегмента $[c - \varepsilon; c + \varepsilon]$, сходится к указанному корню c .

Практические замечания. Предположим, что мы некоторым образом установили, что интересующий нас корень уравнения $x = F(x)$ изолирован на некотором сегменте $[a; b]$, на котором производная функции $F(x)$ удовлетворяет $|F'(x)| \leq \alpha < 1$.

Заметим, что где бы внутри сегмента $[a; b]$ ни находился корень c , хотя бы один из двух симметричных относительно c сегментов $[a; 2c - a]$, $[2c - b; b]$ целиком принадлежит сегменту $[a; b]$. Поэтому хотя бы одна из точек a или b принадлежит симметричному относительно корня c сегменту, всюду на котором $|F'(x)| \leq \alpha < 1$.

Значит, по крайней мере одну из точек a или b можно выбрать за x_0 . Конкретно за x_0 следует выбрать ту из двух точек a или b , для которой приближение $x_1 = F(x_0)$ не выходит за пределы сегмента $[a; b]$.

Поясним способ итерации геометрически. Построим на плоскости xOy графики функций $y = x$ и $y = F(x)$. Каждый действительный корень c уравнения $x = F(x)$ является абсциссой точки пересечения M кривой $y = F(x)$ с прямой $y = x$.

Отправляясь от некоторой точки $A_0(x_0, F(x_0))$, строим ломаную линию $A_0B_1A_1B_2A_2 \dots$ («лестница»), звенья которой попеременно параллельны осям Ox и Oy , вершины $A_0, A_1, A_2 \dots$ лежат на

кривой $y = F(x)$, а вершины $B_1, B_2, \dots$ на прямой $y = x$. Общие абсциссы точек A_1 и B_1 , A_2 и B_2 , ..., очевидно, представляют собой соответственно последовательные приближения $x_1, x_2, \dots$ корня c .

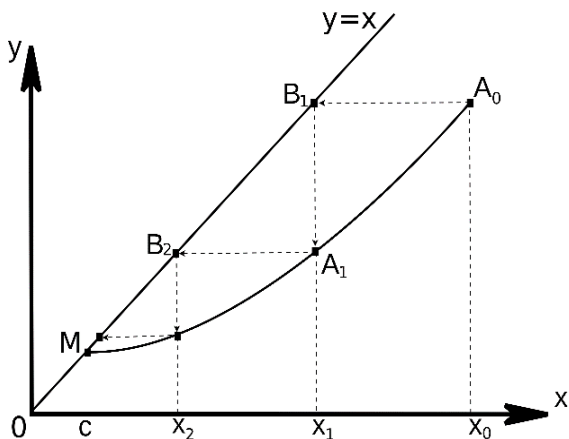


Рис. 5. Вид ломаной «лестница»

Возможен также другой вид ломаной $A_0B_1A_1B_2A_2 \dots$ («спираль»).

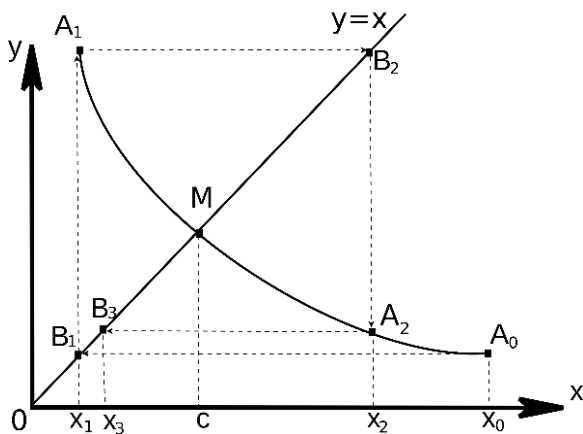


Рис. 6. Вид ломаной «спираль»

Легко сообразить, что решение в виде «лестницы» получается, если производная $F'(x)$ положительна, а решение в виде «спирали», если $F'(x)$ отрицательна.

Численное решение систем нелинейных уравнений

Метод Ньютона для системы двух уравнений

Пусть дана система

$$\begin{cases} F(x, y) = 0, \\ G(x, y) = 0. \end{cases}$$

Согласно методу Ньютона, последовательные приближения вычисляются по формулам

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - \frac{\Delta_x^{(n)}}{J(x_n, y_n)}, \\ y_{n+1} = y_n - \frac{\Delta_y^{(n)}}{J(x_n, y_n)}, \end{cases} \quad (27)$$

где

$$\Delta_x^{(n)} = \begin{vmatrix} F(x_n, y_n) & F'_y(x_n, y_n) \\ G(x_n, y_n) & G'_y(x_n, y_n) \end{vmatrix}, \quad \Delta_y^{(n)} = \begin{vmatrix} F'_x(x_n, y_n) & F(x_n, y_n) \\ G'_x(x_n, y_n) & G(x_n, y_n) \end{vmatrix},$$

а якобиан

$$J(x, y) = \begin{vmatrix} F'_x(x, y) & F'_y(x, y) \\ G'_x(x, y) & G'_y(x, y) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Метод простой итерации для системы двух уравнений.

Пусть дана система двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} F_1(x, y) = 0, \\ F_2(x, y) = 0, \end{cases} \quad (28)$$

действительные корни которых требуется найти с заданной степенью точности.

Предположим, что система допускает лишь изолированные корни. Число этих корней и их приближенные значения можно установить, построив кривые $F_1(x, y) = 0$ и $F_2(x, y) = 0$ и определив координаты их точек пересечения.

Для применения метода итераций система приводится к виду

$$\begin{cases} x = \phi_1(x, y), \\ y = \phi_2(x, y). \end{cases} \quad (29)$$

Функции $\phi_1(x, y)$ и $\phi_2(x, y)$ называются *итерирующими*. Алгоритм решения задается формулами

$$\begin{cases} x_{n+1} = \phi_1(x_n, y_n), \\ y_{n+1} = \phi_2(x_n, y_n), \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (30)$$

где x_0, y_0 – некоторое начальное приближение.

Теорема. Пусть в некоторой замкнутой окрестности

$$R: a \leq x \leq A, b \leq y \leq B$$

имеется одно и только одно решение $x = c, y = d$ системы (29). Если функции $\phi_1(x, y)$ и $\phi_2(x, y)$ определены и непрерывно дифференцируемы в R , начальные приближения x_0, y_0 и все последующие приближения $x_n, y_n, n = 0, 1, 2, \dots$ принадлежат R и в R выполнены неравенства

$$\left\{ \begin{aligned} \left| \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \right| &\leq q_1 < 1, \\ \left| \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \right| + \left| \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \right| &\leq q_2 < 1 \end{aligned} \right. \quad \text{или} \quad \left\{ \begin{aligned} \left| \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \right| &\leq q_1 < 1, \\ \left| \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \right| &\leq q_2 < 1, \end{aligned} \right. \quad (31)$$

то процесс последовательных приближений (30) сходится к решению $x = c, y = d$ системы, то есть $c = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n, d = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$.

Оценка погрешности n -го приближения дается неравенством

$$|c - x_n| + |d - y_n| \leq \frac{M}{1 - M} (|x_n - x_{n-1}| + |y_n - y_{n-1}|),$$

где M – наибольшее из чисел q_1, q_2 .

Сходимость метода итераций считается хорошей, если $M < \frac{1}{2}$, при этом $\frac{M}{1-M} < 1$, так что если в двух последовательных приближениях совпадают, скажем, первые три десятичных знака после запятой, то ошибка последнего приближения не превосходит 0,001.

Вместо рассмотренного итерационного процесса (30) иногда удобнее пользоваться так называемым «процессом Зейделя»:

$$\begin{cases} x_{n+1} = \phi_1(x_n, y_n), \\ y_{n+1} = \phi_2(x_{n+1}, y_n), \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Для преобразования системы уравнений (28) к виду (29) с соблюдением условия (31) можно рекомендовать следующий прием.

Положим

$$\begin{aligned} \phi_1(x, y) &= x + \alpha F_1(x, y) + \beta F_2(x, y), \\ \phi_2(x, y) &= y + \gamma F_1(x, y) + \delta F_2(x, y), \end{aligned} \quad \alpha\delta \neq \beta\gamma.$$

Коэффициенты $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ найдем как приближенные решения следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} 1 + \alpha \frac{\partial F_1(x_0, y_0)}{\partial x} + \beta \frac{\partial F_2(x_0, y_0)}{\partial x} = 0, \\ \alpha \frac{\partial F_1(x_0, y_0)}{\partial y} + \beta \frac{\partial F_2(x_0, y_0)}{\partial y} = 0, \\ \gamma \frac{\partial F_1(x_0, y_0)}{\partial x} + \delta \frac{\partial F_2(x_0, y_0)}{\partial x} = 0, \\ 1 + \gamma \frac{\partial F_1(x_0, y_0)}{\partial y} + \delta \frac{\partial F_2(x_0, y_0)}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

При таком выборе параметров условие сходимости будет соблюдено, если только частные производные функций $F_1(x, y)$ и $F_2(x, y)$ изменяются не очень быстро в окрестности (x_0, y_0) .

Распространение метода Ньютона на системы n уравнений с n неизвестными

Рассмотрим систему уравнений, вообще говоря, нелинейную с действительными левыми частями.

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ \dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0. \end{cases}$$

Можно записать данную систему в более компактном виде. Совокупность аргументов $x_1, x_2, \dots, x_n$ можно рассматривать как n -мерный вектор:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Аналогично совокупность функций $f_1, f_2, \dots, f_n$ представляет собой также n -мерный вектор (вектор-функцию):

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_n \end{pmatrix}.$$

Поэтому система кратко записывается так: $f(x) = 0$. Для решения системы будем пользоваться методом последовательных приближений.

Предположим, что найдено p -е приближение $x^{(p)} = (x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \dots, x_n^{(p)})$ одного из изолированных корней $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ векторного уравнения $f(x) = 0$. Тогда точный корень уравнения можно представить в виде $x = x^{(p)} + \varepsilon^{(p)}$, где $\varepsilon^{(p)} = (\varepsilon_1^{(p)}, \varepsilon_2^{(p)}, \dots, \varepsilon_n^{(p)})$ – поправки (погрешность корня).

Введем в рассмотрение матрицу Якоби системы функций $f_1, f_2, \dots, f_n$ относительно переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$W(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right).$$

Если эта матрица неособенная, то есть если $\det W(x) \neq 0$, то поправка $\varepsilon^{(p)}$ выражается следующим образом:

$$\varepsilon^{(p)} = -W^{-1}(x^{(p)})f(x^{(p)}),$$

где $W^{-1}(x^{(p)})$ – матрица, обратная матрице Якоби.

Таким образом, последовательные приближения находятся по формуле

$$x^{(p+1)} = x^{(p)} - W^{-1}(x^{(p)})f(x^{(p)}), \quad p = 0, 1, 2, \dots$$

За нулевое приближение x_0 можно взять грубое приближенное значение искомого корня.

5. ЧИСЛЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Численное дифференцирование

Численное дифференцирование применяется тогда, когда функцию трудно или невозможно продифференцировать аналитически. Формулы численного дифференцирования широко используются при разработке вычислительных методов решения многих задач (решение дифференциальных уравнений, поиск решений нелинейных уравнений, поиск точек экстремума функций и др.).

Вычисление первой производной.

Предположим, что в окрестности точки x функция $f(x)$ дифференцируема достаточное число раз. Исходя из определения первой производной

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

естественно попытаться использовать для её вычисления две простейшие приближенные формулы

$$f'(x) \approx \frac{f(x + h) - f(x)}{h}, \quad (32)$$

$$f'(x) \approx \frac{f(x) - f(x - h)}{h}, \quad (33)$$

соответствующие выбору фиксированных значений $\Delta x = h$ и $\Delta x = -h$. Здесь $h > 0$ – малый параметр (шаг). Разностные отношения в правых частях формул часто называют правой и левой разностными производными.

Для оценки погрешностей

$$r_+(x, h) = f'(x) - \frac{f(x + h) - f(x)}{h},$$
$$r_-(x, h) = f'(x) - \frac{f(x) - f(x - h)}{h}$$

введенных формул численного дифференцирования (погрешностей аппроксимации) воспользуемся формулами Тейлора.

$$f(x \pm h) = f(x) \pm f'(x)h + \frac{f''(\xi_{\pm})}{2}h^2,$$

$$\xi_+ \in (x, x+h), \quad \xi_- \in (x-h, x).$$

Подставляя разложения в выражения для r_+ и r_- , получаем

$$r_+(x, h) = -\frac{1}{2}f''(\xi_+)h, \quad r_-(x, h) = \frac{1}{2}f''(\xi_-)h.$$

Следовательно

$$|r_+(x, h)| \leq \frac{1}{2} \max_{[x, x+h]} |f''(\xi)|h, \quad |r_-(x, h)| \leq \frac{1}{2} \max_{[x-h, x]} |f''(\xi)|h.$$

Приведенные формулы численного дифференцирования имеют простую геометрическую интерпретацию. Пусть точки $N_0(x, f(x))$, $N_-(x-h, f(x-h))$ и $N_+(x+h, f(x+h))$ расположены на графике функции $y = f(x)$. Напомним, что производная $f'(x)$ равна тангенсу угла α наклона к оси Ox касательной, проведенной к графику функции в точке N_0 .

Формула (32) соответствует приближенной замене производной $f'(x) = \operatorname{tg} \alpha$ правой разностной производной $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, равной тангенсу угла α_+ наклона к графику функции секущей, проведенной через точки N_0 и N_+ .

Формула (33) соответствует аналогичной замене левой разностной производной $\frac{f(x)-f(x-h)}{h}$ равной тангенсу угла α_- секущей, проведенной через точки N_0 и N_- . Естественно предположить, что лучшим по сравнению с $\operatorname{tg} \alpha_+$ и $\operatorname{tg} \alpha_-$ приближением к $f'(x) = \operatorname{tg} \alpha$ является тангенс угла наклона α_0 секущей к графику, проведенной через точки N_- и N_+ .

Соответствующая приближенная формула имеет вид

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}. \quad (34)$$

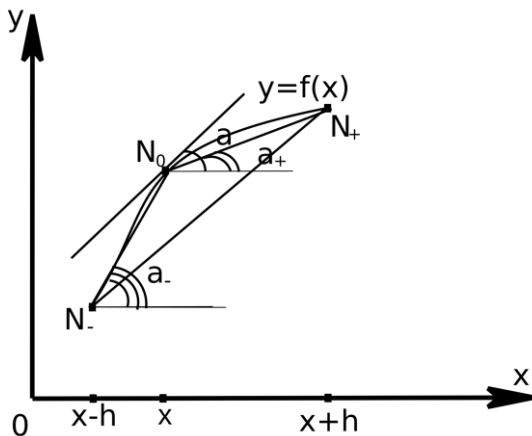


Рис. 7. Геометрическая интерпретация

Величину в правой части этой формулы часто называют *центральной разностной производной*. Подставляя в выражение для погрешности

$$r_0(x, h) = f'(x) - \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

соответствующие разложения по формуле Тейлора

$$f(x \pm h) = f(x) \pm f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2 \pm \frac{f^{(3)}(\xi_{\pm})}{6}h^3,$$

$$\xi_+ \in (x, x+h), \quad \xi_- \in (x-h, x),$$

получаем

$$r_0(x, h) = -\frac{f^{(3)}(\xi_+) + f^{(3)}(\xi_-)}{12}h^2.$$

Следовательно, справедлива оценка погрешности

$$|r_0(x, h)| \leq \frac{1}{6} \max_{[x-h, x+h]} |f^{(3)}(\xi)| h^2.$$

Таким образом, центральная разностная производная аппроксимирует производную $f'(x)$ со вторым порядком точности относительно h .

Для вычисления $f'(x)$ можно получить формулы любого порядка точности. Однако в таких формулах с ростом порядка точности возрастает и число используемых значений функции.

Вычисление второй производной

Наиболее простой и широко применяемой для приближенного вычисления второй производной является следующая формула:

$$f''(x) \approx \frac{f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)}{h^2}. \quad (35)$$

Величину в правой части этого приближенного равенства часто называют *второй разностной производной*. Подставляя в выражение для погрешности

$$r(x, h) = f''(x) - \frac{f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)}{h^2}$$

соответствующие разложения по формуле Тейлора

$$f(x \pm h) = f(x) \pm f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2 \pm \frac{f^{(3)}(x)}{6}h^3 + \frac{f^{(4)}(\xi_{\pm})}{24}h^4,$$

$$\xi_+ \in (x, x+h), \quad \xi_- \in (x-h, x),$$

получаем

$$r(x, h) = -\frac{1}{24} \left(f^{(4)}(\xi_+) + f^{(4)}(\xi_-) \right) h^2.$$

Следовательно, справедлива оценка погрешности

$$|r_0(x, h)| \leq \frac{1}{6} \max_{[x-h, x+h]} |f^{(3)}(\xi)| h^2.$$

Численное интегрирование

В прикладных исследованиях часто возникает необходимость вычисления значения определенного интеграла

$$I = \int_a^b f(x) dx.$$

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и ее первообразную $F(x)$ можно выразить через известные функции, то для вычисления интеграла используется формула Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Обычно для вычисления значения определенного интеграла применяют специальные численные методы. Наиболее широко используют на практике квадратурные формулы – приближенные равенства вида

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^n A_k f(x_k) + R.$$

где x_k – выбранные узлы интерполяции, A_k – коэффициенты, зависящие только от выбора узлов, но не от вида функции $k = \overline{0, n}$, R – остаточный член, или погрешность квадратурной формулы. Отбрасывая остаточный член R , мы совершаем погрешность усечения. При расчете к ней еще добавляются различные погрешности округления.

Разобьем отрезок интегрирования $[a; b]$ на n равных частей системой точек

$$x_i = x_0 + ih, \quad i = \overline{0, n}, \quad x_0 = a, \quad x_n = b, \quad h = \frac{b - a}{n},$$

вычислим подынтегральную функцию в узлах $y_i = f(x_i)$, $i = \overline{0, n}$.

Квадратурные формулы для равноотстоящих узлов называются формулами Ньютона-Котеса. Формулы Ньютона-Котеса различаются степенями использованных интерполяционных многочленов. Чтобы не иметь дело с многочленами высоких степеней, обычно разбивают промежуток интегрирования на отдельные участки, применяют формулы Ньютона-Котеса с невысокими степенями на каждом участке и потом складывают полученные результаты (что дает так называемые составные формулы).

Наиболее простые из формул такого типа приведены ниже.

1. *Формула трапеций:*

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \right),$$

где $y_i = f(x_i)$, $i = \overline{0, n}$.

Остаточный член имеет вид

$$R_1 = -\frac{1}{12}nh^3f''(\xi) = -\frac{(b-a)h^2}{12}f''(\xi), \quad a < \xi < b.$$

Формула трапеций дает точное значение интеграла, когда подынтегральная функция линейна, ибо тогда $f''(x) \equiv 0$.

2. *Формула Симпсона (формула парабол):*

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + y_{2m} + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2m-2}) + \\ + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2m-1})), \quad h = \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{2m}.$$

Остаточный член имеет вид

$$R_2 = -\frac{1}{90}mh^5f^{(4)}(\xi) = -\frac{(b-a)h^4}{180}f^{(4)}(\xi), \quad a < \xi < b.$$

Формула Симпсона является точной для многочленов до третьей степени включительно, так как в этом случае $f^{(4)}(x) \equiv 0$. Заметим, что в формуле Симпсона число узлов обязательно нечетное, то есть n четное, $n = 2m$.

3. *Формула Ньютона (правило трех восьмых):*

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{3h}{8}(y_0 + y_{3m} + 2(y_3 + y_6 + \dots + y_{3m-3}) + \\ + 3(y_1 + y_2 + y_4 + y_5 + \dots + y_{3m-2} + y_{3m-1})), \\ h = \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{3m}.$$

Остаточный член имеет вид

$$R_3 = -\frac{1}{80} 3mh^5 f^{(4)}(\xi) = -\frac{(b-a)h^4}{80} f^{(4)}(\xi), \quad a < \xi < b.$$

Заметим, что в формуле число узлов равно $3m + 1$, то есть $n = 3m$.

Выбор шага интегрирования

Задача состоит в выборе шага h , обеспечивающего заданную точность вычисления интеграла по выбранной формуле численного интегрирования.

Рассмотрим два способа решения этой задачи.

1 способ. Выбор шага по оценке остаточного члена. Пусть требуется вычислить интеграл с точностью ε . Используя формулу соответствующего остаточного члена R , выбирают h таким, чтобы выполнялось неравенство $|R| < \frac{\varepsilon}{2}$. Затем вычисляют интеграл по приближенной формуле с полученным шагом. При этом вычисления следует производить с таким числом знаков, чтобы погрешность округления не превышала $\frac{\varepsilon}{2}$.

Бывают ситуации, когда допустимую погрешность делят между погрешностью усечения и погрешностью округления не поровну. Например, если вычисления значений подынтегральной функции очень трудоемки, но могут быть произведены с любой точностью, то может оказаться целесообразным выбирать шаг h из условия $|R| < \varepsilon$. Другой крайний случай может представиться для функций, задаваемых экспериментально, когда трудно обеспечить большую точность вычисления значений функции.

2 способ. Двойной пересчет. Так как отыскание $\max |f^{(k)}(x)|$ нередко приводит к слишком громоздким вычислениям, на практике обычно используют следующий прием.

Вычисляют интеграл I по выбранной квадратурной формуле дважды: сначала с некоторым шагом h , затем с шагом $\frac{h}{2}$, то есть удваивают число n . Обозначив результаты вычислений через I_n и I_{2n} соответственно, сравнивают их. Если $|I_n - I_{2n}| < \varepsilon$, где ε – допустимая погрешность, то полагают $I \approx I_{2n}$. Если же окажется, что $|I_n - I_{2n}| \geq \varepsilon$, то расчет повторяют с шагом $\frac{h}{4}$. В качестве начального шага иногда можно рекомендовать число, близкое к $\sqrt[m]{\varepsilon}$, где $m = 2$ для формулы трапеций и $m = 4$ для формулы Симпсона. Указанный прием широко используется при вычислении интегралов на ЭВМ, так как он позволяет осуществить автоматический выбор шага при заданной точности с одновременным контролем вычислений.

Отметим, что для приближенной оценки погрешности усечения Δ можно пользоваться принципом Рунге, согласно которому

$$\Delta \approx \frac{1}{3} |I_n - I_{2n}| \text{ — для формулы трапеций,}$$

$$\Delta \approx \frac{1}{15} |I_n - I_{2n}| \text{ — для формулы Симпсона.}$$

Интегрирование с помощью степенных рядов

Рассмотрим определенный интеграл $\int_a^b f(x) dx$. Пусть подынтегральная функция $f(x)$ разлагается в степенной ряд

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k,$$

сходящийся в интервале $(-R; R)$, который содержит отрезок интегрирования $[a; b]$. Применяя теорему о почленном интегрировании степенных рядов, можно представить интеграл в виде числового ряда

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1} (b^{k+1} - a^{k+1}).$$

Если ряд сходится достаточно быстро, то можно приближенно вычислить определенный интеграл с помощью частичной суммы ряда

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^N \frac{c_k}{k+1} (b^{k+1} - a^{k+1}).$$

Погрешность результата в таком случае складывается из следующих погрешностей: из погрешности замены ряда частичной суммой; эта погрешность (погрешность усечения) равна остатку ряда; из погрешностей округления при вычислении суммы.

Для знакопередающегося ряда с монотонно убывающими по абсолютной величине членами абсолютная величина остатка ряда не превосходит абсолютной величины первого из отбрасываемых членов ряда. Для оценки остатка ряда в других случаях применяют мажорирование такими числовыми рядами, остатки которых легко оцениваются.

6. ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ

Задача Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений и систем

Часто приходится иметь дело с процессами, характеристики которых непрерывным образом меняются со временем t . Соответствующие явления, как правило, подчиняются физическим законам, которые формулируются в виде дифференциальных уравнений. Одной из основных математических задач, которые приходится решать для таких уравнений, является задача Коши (или начальная задача).

Чаще всего к ней приходят тогда, когда начальное состояние некоторой физической системы в момент времени t_0 считается известным, и требуется предсказать ее поведение при $t \geq t_0$. Понимание того, что задача Коши описывает развитие тех или иных процессов во времени, значительно упрощает восприятие как подходов к её решению, так и критериев оценки качества получаемых приближений.

Моделирование самых разнообразных процессов приводит к необходимости решать системы дифференциальных уравнений (иногда довольно высокого порядка).

Задача Коши для дифференциального уравнения n -го порядка

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

заключается в отыскании функции $y = y(x)$, удовлетворяющей этому уравнению и начальным условиям

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

где $x_0, y_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ – заданные числа.

Задача Коши для системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, \dots, y_n), \\ \frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, \dots, y_n), \\ \dots\dots\dots \\ \frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, \dots, y_n) \end{cases}$$

заключается в отыскании функций $y_1, y_2, \dots, y_n$, удовлетворяющих этой системе и начальным условиям

$$y_1(x_0) = y_{10}, \quad y_2(x_0) = y_{20}, \quad \dots, \quad y_n(x_0) = y_{n0}.$$

Систему, содержащую производные высших порядков и разрешенную относительно старших производных искомых функций, путем введения новых неизвестных функций можно привести к системе

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, \dots, y_n), \\ \frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, \dots, y_n), \\ \dots \\ \frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, \dots, y_n). \end{cases}$$

В частности, дифференциальное уравнение n -го порядка $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ приводится к системе с помощью замены $y_1 = y, y_2 = y', \dots, y_{n-1} = y^{(n-1)}$, что дает следующую систему:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = y_1, \\ \frac{dy_1}{dx} = y_2, \\ \dots \\ \frac{dy_{n-2}}{dx} = y_{n-1}, \\ \frac{dy_{n-1}}{dx} = f(x, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}). \end{cases}$$

Если удастся найти общее решение уравнения или системы, то задача Коши сводится к отысканию значений произвольных постоянных. Но найти общее решение задачи Коши удастся в редких случаях; чаще всего приходится решать задачу Коши приближенно.

Приближенные методы в зависимости от формы, в которой они представляют решение, можно разделить на две группы.

1. Аналитические методы, дающие приближенное решение дифференциального уравнения в виде аналитического выражения.

2. Численные методы, дающие приближенное решение в виде таблицы.

В дальнейшем изложении предполагается, что для рассматриваемых уравнений выполнены условия существования и единственности решения.

Метод последовательного дифференцирования

Рассмотрим уравнение

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

с начальными условиями

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

где $x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ – заданные числа. Предположим, что искомое частное решение $y = y(x)$ может быть разложено в ряд Тейлора по степеням разности $x - x_0$:

$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + \frac{y''(x_0)(x - x_0)^2}{2!} + \dots + \frac{y^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n}{n!} + \dots$$

Начальные условия непосредственно дают нам значения $y^{(k)}(x_0)$, $k = \overline{0, n-1}$. Значение $y^{(n+1)}(x_0)$ найдем из уравнения $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$, подставляя $x = x_0$ и используя начальные условия $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$:

$$y^{(n)}(x_0) = f(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}).$$

$y^{(n+1)}(x_0), y^{(n+2)}(x_0), \dots$ последовательно определяются дифференцированием уравнения

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

и подстановкой $x = x_0, y^{(k)}(x_0) = y_{0k}, k = \overline{0, n}$.

Доказано, что если правая часть уравнения

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

в окрестности точки $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)})$ есть аналитическая функция своих аргументов, то при значениях x , достаточно близких к x_0 , существует единственное решение задачи Коши, которое разлагается в ряд Тейлора. Тогда частичная сумма этого ряда будет приближенным решением поставленной задачи.

Аналогично применяется метод последовательного дифференцирования и для решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Для некоторых численных методов интегрирования дифференциальных уравнений требуется определить значения искомых функций в нескольких точках. Эти значения могут быть подсчитаны с помощью степенных рядов. Таким образом, метод разложения решений в степенные ряды может быть использован как элемент более эффективных численных методов приближенного интегрирования дифференциальных уравнений (метод Адамса, метод Милна и другие).

Если уравнение содержит особенность, например неопределенность типа $\frac{0}{0}$, то численное решение невозможно. Тогда использование степенных рядов дает возможность «отодвинуться» от особенности.

Метод неопределенных коэффициентов

Этот метод рекомендуется применять при решении линейных дифференциальных уравнений (с переменными коэффициентами).

Суть метода покажем на примере уравнения второго порядка

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x) \quad (36)$$

с начальными условиями $y(0) = y_0$, $y'(0) = y_0'$. Предположим, что каждый из коэффициентов уравнения можно разложить в ряд по степеням x :

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n, \quad q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n, \quad r(x) = \sum_{n=0}^{\infty} r_n x^n. \quad (37)$$

Решение данного уравнения будем искать в виде ряда

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

где c_n – коэффициенты, подлежащие определению.

Дифференцируем обе части равенства два раза по x :

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}, \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}.$$

Подставляя полученные ряды для y , y' , y'' , p , q , r в уравнение (36), получим

$$\begin{aligned} & \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} + \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} r_n x^n. \end{aligned}$$

Произведя умножение рядов и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и в правой частях тождества, получим систему:

$$x^0: 2c_2 + c_1p_0 + c_0q_0 = r_0,$$

$$x^1: 3 \cdot 2c_3 + 2c_2p_0 + c_1p_1 + c_1q_0 + c_0q_1 = r_1,$$

$$x^2: 4 \cdot 3c_4 + 3c_3p_0 + 2c_2p_1 + c_1p_2 + c_2q_0 + c_1q_1 + c_0q_2 = r_2,$$

$$\dots \dots x^n: (n+2)(n+1)c_{n+2} + L(c_{n+1}, c_n, \dots, c_1, c_0) = q_n,$$

где $L(c_{n+1}, c_n, \dots, c_1, c_0)$ означает линейную функцию аргументов $c_0, c_1, \dots, c_n, c_{n+1}$.

Каждое уравнение системы содержит на одно неизвестное больше по сравнению с предыдущим уравнением. Коэффициенты c_0, c_1 определяются из начальных условий, а все остальные последовательно определяются из системы. Если ряды (37) сходятся при $|x| < R$, то полученный степенной ряд сходится в той же области и является решением уравнения (36).

Если начальные условия заданы при $x = x_0$, то рекомендуется сделать замену $x - x_0 = t$ и после чего задача сводится к рассмотренной выше.

Метод последовательных приближений

Рассмотрим задачу Коши для дифференциального уравнения первого порядка $y' = f(x, y)$ с начальным условием $y(x_0) = y_0$.

Метод последовательных приближений состоит в том, что решение $y(x)$ получают как предел последовательности функций $y_n(x)$, которые находятся по рекуррентной формуле

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x_n, y_{n-1}(x)) dx.$$

Доказано, что если правая часть $f(x, y)$ в некотором замкнутом прямоугольнике

$$R = \{|x - x_0| \leq a, \quad |y - y_0| \leq b\}$$

удовлетворяет условию Липшица по y :

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq N|y_1 - y_2|, \quad N = \text{const},$$

то независимо от выбора начальной функции последовательные приближения $y_n(x)$ сходятся на некотором отрезке $[x_0; x_0 + h]$ к решению задачи Коши $y' = f(x, y)$ с начальным условием $y(x_0) = y_0$.

Если $f(x, y)$ непрерывна в прямоугольнике R , то оценка погрешности приближенного решения $y_n(x)$ на отрезке $[x_0; x_0 + h]$ дается неравенством

$$\varepsilon_n = |y(x) - y_n(x)| \leqslant MN^n \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n + 1)!},$$

где $M = \max_{(x,y) \in R} |f(x, y)|$, а число h определяется из условия

$$h = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}.$$

В качестве начального приближения $y_0(x)$ можно взять любую функцию, достаточно близкую к точному решению. Иногда, например, выгодно в качестве $y_0(x)$ брать приближенное решение уравнения $y' = f(x, y)$, полученное в виде частичной суммы степенного ряда.

Замечание. Метод последовательных приближений применим и для решения системы дифференциальных уравнений, а также для решения дифференциального уравнения n -го порядка, если его записать в виде системы. Область применения метода последовательных приближений является, вообще говоря, более широкой: он применим и в тех случаях, когда разложение решения дифференциального уравнения в степенной ряд невозможно. Однако недостатком метода последовательных приближений является необходимость вычисления все более громоздких интегралов.

На практике, применяя метод последовательных приближений, останавливаются на таком n , для которого значения y_{n-1} , y_n совпадают в пределах допустимой точности.

Метод Эйлера

Ранее были рассмотрены аналитические приближенные методы решения задачи Коши. Метод Эйлера относится к численным методам, дающим решение в виде таблицы приближенных значений искомой функции $y(x)$.

Рассмотрим дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ с начальным условием $y(x_0) = y_0$.

Выбрав достаточно малый шаг h , построим систему равноотстоящих точек $x_i = x_0 + ih, i = 0, 1, 2, \dots$.

В методе Эйлера приближенные значения $y(x_i) \approx y_i$ вычисляются последовательно по формулам

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

При этом искомая интегральная кривая $y = y(x)$, проходящая через точку $M_0(x_0, y_0)$ заменяется ломаной $M_0M_1M_2 \dots$ с вершинами $M_i(x_i, y_i), i = 0, 1, 2, \dots$ Каждое звено M_iM_{i+1} этой ломаной, называемой *ломаной Эйлера*, имеет направление, совпадающее с направлением той интегральной кривой уравнения $y' = f(x, y)$, которая проходит через точку M_i .

Если правая часть уравнения $y' = f(x, y)$ в некотором прямоугольнике

$$R\{|x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$$

удовлетворяет условиям

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq N|y_1 - y_2|, \quad N = \text{const},$$

$$\left| \frac{df}{dx} \right| = \left| \frac{\partial f}{\partial x} + f \frac{\partial f}{\partial y} \right| \leq M, \quad M = \text{const},$$

то имеет место следующая оценка погрешности:

$$|y(x_n) - y_n| \leq \frac{hM}{2N} ((1 + hN)^n - 1),$$

где $y(x_n)$ – значение точного решения уравнения при $x = x_n$, y_n – приближенное значение, полученное, на n -м шаге. Формула имеет

лишь теоретическое применение. На практике иногда оказывается более удобным двойной просчет: расчет повторяют с шагом $\frac{h}{2}$ и погрешность более точного значения $\widetilde{y}_n$ (при шаге $\frac{h}{2}$) оценивают приближенно так:

$$|\widetilde{y}_n - y(x_n)| \approx |\widetilde{y}_n - y_n|.$$

Метод Эйлера легко распространяется на системы дифференциальных уравнений и на дифференциальные уравнения высших порядков. Последние должны быть предварительно приведены к системе дифференциальных уравнений первого порядка.

Метод Рунге-Кутты

Рассмотрим задачу Коши для дифференциального уравнения

$$y' = f(x, y)$$

с начальным условием

$$y(x_0) = y_0.$$

Обозначим через y_i приближенное значение искомого решения в точке x_i . По методу Рунге-Кутты вычисление приближенного значения y_{i+1} в следующей точке $x_{i+1} = x_i + h$ производится по формулам

$$\begin{aligned} & y_{i+1}y_i + \Delta y_i, \\ \Delta y_i &= \frac{1}{6} \left(K_1^{(i)} + 2K_2^{(i)} + 2K_3^{(i)} + K_4^{(i)} \right), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} K_1^{(i)} &= hf(x_i, y_i), \\ K_2^{(i)} &= hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_1^{(i)}}{2}\right), \\ K_3^{(i)} &= hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_2^{(i)}}{2}\right), \\ K_4^{(i)} &= hf\left(x_i + h, y_i + K_3^{(i)}\right). \end{aligned}$$

Оценка погрешности метода очень затруднительна. Грубую оценку погрешности можно получить с помощью двойного просчета по формуле

$$|\widetilde{y}_n - y(x_n)| \approx \frac{|\widetilde{y}_n - y_n|}{15},$$

где $y(x_n)$ – значение точного решения уравнения $y' = f(x, y)$ в точке x_n , а $\widetilde{y}_n, y_n$ – приближенные значения, полученные с шагом $\frac{h}{2}$ и h .

При реализации метода Рунге-Кутты обычно в каждой точке x_i делают двойной просчет сначала с шагом h , затем с $\frac{h}{2}$. Если полученные при этом значения y_i различаются в пределах допустимой точности, то шаг h для следующей точки x_{i+1} удваивают, в противном случае берут половинный шаг.

7. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА

Летательный аппарат может рассматриваться как некоторая динамическая система. При проектировании летательного аппарата возникает задача оценки качества этой системы, которая может производиться экспериментальными или теоретическими методами. В случае использования последних необходимо составить математическую модель управляемого движения летательного аппарата.

Процесс создания математической модели включает следующие этапы:

- 1) математическое описание движения управляемого летательного аппарата;
- 2) математическая формулировка целей управления (критериев оптимальности);
- 3) количественная характеристика взаимодействия летательного аппарата с окружающей средой (силы и моменты, действующие на летательный аппарат в полёте);
- 4) математическое описание алгоритма управления (закон управления);
- 5) математическое описание схемы технической реализации алгоритма управления.

Наиболее общей формой математической модели является система нелинейных дифференциальных уравнений, содержащая случайные факторы. На определенных стадиях проектирования могут использоваться детерминированные математические модели (не содержащие случайных факторов). При этом, в зависимости от характера исследуемой задачи, могут учитываться упругость конструкции летательного аппарата, колебание жидкого наполнения, наличие подвижных масс («маховиков») внутри летательного аппарата, а также определенная специфика при движении летательного аппарата в воде.

Будем рассматривать движение летательного аппарата вблизи поверхности Земли без учета колебаний жидкого наполнения и влияния подвижных масс. Летательный аппарат абсолютно жесткий. Не учитываются упругие деформации корпуса. Движение происходит в спокойной атмосфере (без учета влияния приземного ветра).

Полная система уравнений, из которых состоит эта математическая модель, включает:

- 1) уравнения динамики пространственного движения летательного аппарата;
- 2) кинематические соотношения, связывающие линейные или угловые скорости летательного аппарата с линейными или угловыми координатами;
- 3) уравнения, определяющие зависимость массы и моментов инерции летательного аппарата от времени;
- 4) геометрические и вспомогательные соотношения (уравнения связи между различными системами координат, соотношения между углами, определяющими ориентацию летательного аппарата в различных координатных системах, явные выражения для сил, моментов и так далее);
- 5) уравнения, определяющие работу системы управления (уравнения управления).

Системы координат, используемые при описании движения летательного аппарата

Движение летательного аппарата принято описывать с помощью уравнений движения, записанных в определенной системе координат. В задачах внешней баллистики одна из них должна быть связана с точкой старта реактивного снаряда: с поверхностью Земли или с бортом летательного аппарата (самолетом, спутником Земли и прочее) и определять три линейные координаты точек траектории снаряда. Другая система координат должна быть связана с самим

баллистическим или реактивным снарядом и определять ориентацию снаряда как твердого тела в пространстве, а также его угловые параметры. Таким образом, можно условно выделить три группы систем координат:

1) связанные с земной поверхностью (в этой системе координат определяется положение движущегося тела относительно поверхности Земли);

2) связанные с движущимся летательными аппаратами (общим признаком таких систем координат является расположение начала координат в характерной точке: обычно в центре масс летательного аппарата или его центре давления);

3) определяющие положение движущегося летательного аппарата относительно среды, в которой он движется: относительно вектора скорости центра масс и вектора воздушной скорости.

При исследовании движения летательного аппарата используются прямоугольные или косоугольные системы координат, а также криволинейные (цилиндрические, сферические и другие), являющиеся «правыми» системами координат.

Основные СК, используемые в механике полета: стартовая (земная) $O_0x_cy_cz_c$, связанная $Oxyz$, скоростная $Ox_a y_a z_a$, полусвязанная $Ox_e y_e z_e$, полускоростная $Ox_* y_* z_*$, инерциальная $O_{и} x_{и} y_{и} z_{и}$.

Стартовая система координат $O_0x_cy_cz_c$ (рис. 8) связана с Землёй и участвует в ее суточном вращении. Начало координат (точка O_0) – точка старта, расположенная на поверхности Земли. Ось O_0x_c направлена горизонтально по направлению полета и лежит в плоскости стрельбы. Ось O_0y_c перпендикулярна оси O_0x_c , направлена вертикально вверх и совпадает с истинной или геодезической вертикалью места старта; $O_0x_cy_c$ – плоскость стрельбы, $O_0x_cz_c$ – горизонтальная плоскость. Система координат $O_0x_cy_cz_c$, вообще говоря, неинерциальная, но часто при решении задач этим пренебрегают.

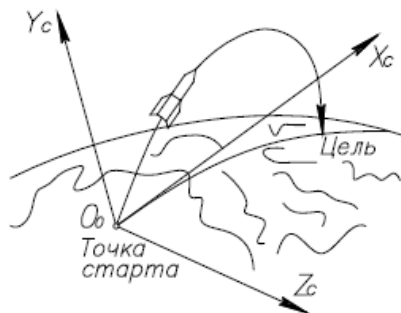


Рис. 8. Стартовая система координат

Для определения координат летательного аппарата относительно земных осей применяется связанная с аппаратом система координат.

Связанная и полусвязанная системы координат. Связанная система координат (рис. 9) неизменно связана с летательным аппаратом как с твёрдым телом. Ее движение воспроизводит пространственное движение летательного аппарата. Если рассматривать летательный аппарата как недеформируемое твёрдое тело, то в пространственном движении он имеет шесть степеней свободы, из которых три определяют вращательное движение относительно центра масс, три – движение центра масс.

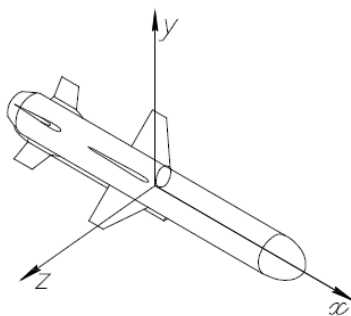


Рис. 9. Связанная система координат

Начало координат (точка O) совпадает с центром масс летательного аппарата, который считается неподвижным относительно корпуса аппарата. Оси Ox и Oy располагаются в плоскости симметрии летательного аппарата. Ось Ox совпадает с продольной осью летательного аппарата и направлена от центра масс к носовой части летательного аппарата либо параллельно хорде крыла. Ось Oy перпендикулярна оси Ox и лежит в той плоскости симметрии летательного аппарата, которая в момент запуска совпадает с плоскостью стрельбы. Ось Oz перпендикулярна плоскости Oxy и составляет правую систему координат с плоскостью симметрии Oxy .

В *полусвязанной системе координат* $Ox_e y_e z_e$ ось Ox_e совпадает с осью летательного аппарата Ox (продольная ось летательного аппарата). Ось Oy_e перпендикулярна оси Ox_e и лежит в вертикальной плоскости, проходящей через ось летательного аппарата Ox . Данная система координат имеет две степени свободы во вращательном движении.

Скоростная $Ox_a y_a z_a$ и полускоростная $Ox_* y_* z_*$ системы координат.

В некоторых задачах динамики уравнения движения центра масс летательного аппарата удобно записывать в проекциях на оси координат, связанные с вектором скорости центра масс $\bar{V}$. Начало координат (точка O) *скоростной системы координат* $Ox_a y_a z_a$ располагается в центре масс летательного аппарата. Ось Ox_a направлена по вектору скорости $\bar{V}$, то есть по касательной к траектории в сторону полета; ось Oy_a лежит в плоскости симметрии летательного аппарата, а Oz_a – в плоскости, нормальной к траектории полета.

В *полускоростной системе координат* $Ox_* y_* z_*$ ось Ox_* совпадает с осью Ox_a , ось Oy_* расположена в вертикальной плоскости, проходящей через вектор скорости центра масс, а ось Oz_* дополняет эту систему координат до правой.

Во вращательном движении относительно центра масс скоростная система координат имеет три степени свободы, а полускоростная – две.

Инерциальная система координат $O_{и}x_{и}y_{и}z_{и}$.

Для исследования абсолютного движения, то есть движения в инерциальном пространстве, применяется инерциальная система координат $O_{и}x_{и}y_{и}z_{и}$ (рис. 10). Она занимает в пространстве неподвижное положение или движется равномерно и прямолинейно, а ее оси не изменяют своего направления в пространстве. Инерциальная система координат участвует только в поступательном движении Земли вокруг Солнца, и положение ее осей не зависит от суточного вращения Земли.

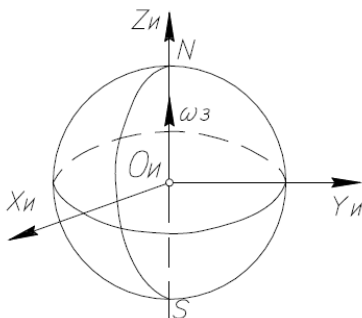


Рис. 10. Инерциальная система координат

Начало координат (точка $O_{и}$) помещается в центре Земли, основной является плоскость экватора $O_{и}x_{и}y_{и}$, за опорное принимается направление $O_{и}x_{и}$, параллельное линии Земля-Солнце в день весеннего равноденствия. Ось $O_{и}z_{и}$ направлена вдоль оси вращения Земли в сторону северного полюса.

Каждая система координат используется для составления математической модели движения летательного аппарата. От удачного выбора координатной системы во многом зависит простота математических операций.

Взаимное расположение систем координат. Связь между координатными системами. Направляющие косинусы

Взаимное расположение стартовой $O_0x_cy_cz_c$, связанной $Oxuz$ и полусвязанной $Ox_ey_ez_e$ систем координат при совмещённых началах.

Совместим точку старта с центром масс летательного аппарата. Положение летательного аппарата в пространстве определяется взаимным угловым положением связанной и стартовой (земной) систем координат. Это положение при совмещённых началах определяется тремя углами Эйлера (эйлеровыми углами): рыскания, тангажа и крена.

Угол рыскания ψ – угол между земной осью O_0x_c и проекцией продольной оси Ox на горизонтальную плоскость (линия OM_1 , рис. 11). Угол рыскания положителен, когда ось O_0x_c совмещается с проекцией продольной оси на горизонтальную плоскость поворотом вокруг оси O_0y_c против часовой стрелки, если смотреть с конца этой оси.

Угол тангажа ϑ – угол между продольной осью летательного аппарата Ox и горизонтальной плоскостью. Угол тангажа положителен, когда продольная ось находится выше горизонтальной плоскости.

Угол крена γ – угол между поперечной осью Oz и осью O_0z_c стартовой системы координат, смещенной в положение, при котором угол рыскания равен нулю, или что то же самое, между нормальной осью летательного аппарата Oy и вертикальной плоскостью, проходящей через продольную ось летательного аппарата Ox . Угол крена положителен, когда смещенная ось O_0z_c совмещается с поперечной осью поворотом вокруг продольной оси против часовой стрелки, если смотреть с конца оси.

Напомним, что углы Эйлера независимы между собой, то есть при изменении одного угла два других не меняются. Координатные

преобразования, связанные с переходом от одной системы координат к другой, осуществляются с помощью матриц направляющих косинусов. Элементы этой матрицы называются направляющими косинусами, так как каждый элемент равен косинусу угла между положительными направлениями соответствующих осей.

Связанную и стартовую системы координат можно совместить при помощи трех поворотов. На рис. 11 показано взаимное расположение связанной и стартовой систем координат.

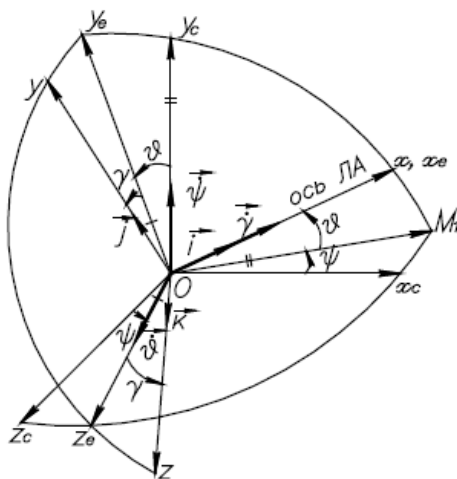


Рис. 11. Переход от стартовой системы координат к связанной

Первый поворот производится относительно любой оси исходной системы координат. Как правило, осью первого поворота выбирается та, относительно которой система координат в процессе полета может поворачиваться на больший угол. Например, для летательного аппарата самолетной схемы первой осью поворота будет ось $O_0 y_c$ поворота на угол рыскания, а для летательного аппарата с вертикальным стартом и программным изменением угла тангажа первой осью поворота будет ось $O_0 z_c$ поворота на угол тангажа.

Итак, произведем первый поворот относительно O_0y_c на угол ψ с угловой скоростью $\bar{\dot{\psi}}$. Второй поворот производится относительно любой из двух осей, вновь образовавшихся в результате первого поворота. Произведем второй поворот относительно оси Oz_e на угол ϑ с угловой скоростью $\bar{\dot{\vartheta}}$, третий поворот – относительно оси, занявшей окончательное положение (относительно оси Ox на угол γ с угловой скоростью $\bar{\dot{\gamma}}$). Векторы производных $\bar{\dot{\psi}}$, $\bar{\dot{\vartheta}}$ и $\bar{\dot{\gamma}}$ направлены так, как показано на рис. 11.

Так как связанная система координат совмещается со стартовой с помощью трёх поворотов, а летательный аппарат неизменно связан со связанной системой координат, то абсолютная угловая скорость вращения летательного аппарата:

$$\bar{\omega} = \bar{\dot{\psi}} + \bar{\dot{\vartheta}} + \bar{\dot{\gamma}}.$$

Одновременно $\bar{\omega}$ – угловая скорость вращения связанной системы координат. Соответственно угловая скорость вращения полусвязанной системы координат:

$$\bar{\omega}_e = \bar{\dot{\psi}} + \bar{\dot{\vartheta}},$$

где $\bar{\omega}_e$ – угловая скорость полусвязанной системы координат.

Таблица 3. Косинусы углов между стартовыми и связанными осями

	Ox	Oy	Oz
O_0x_c	a_{11}	a_{12}	a_{13}
O_0y_c	a_{21}	a_{22}	a_{23}
O_0z_c	a_{31}	a_{32}	a_{33}

На основе таблицы 3 можно установить связь между стартовыми и связанными координатными осями:

$$\begin{aligned} x_c &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, \\ y_c &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, \\ z_c &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z. \end{aligned}$$

Данную систему можно записать в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

где ортогональная квадратная матрица перехода от связанных координат к стартовым:

$$A = A(\vartheta, \psi, \gamma) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Если надо осуществить обратный переход, то есть от стартовой системы координат к связанной, то необходимо воспользоваться обратной матрицей A^{-1} , которая совпадает с транспонированной матрицей A^T , так как матрица перехода является ортогональной. Тогда

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^T \cdot \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix}.$$

Взаимное расположение стартовой $O_0x_cy_cz_c$, скоростной $Ox_a y_a z_a$ и полускоростной $Ox_* y_* z_*$ систем координат при совмещённых началах.

Расположение скоростной и стартовой систем координат при совмещённых началах определяется тремя углами: углом курса, углом возвышения и скоростным углом крена.

Угол курса Ψ – угол между осью O_0x_c и проекцией скорости на горизонтальную плоскость (линия OM_2 , рис. 12).

Угол возвышения (угол наклона траектории) Θ – угол между вектором скорости центра масс $\bar{V}$ и горизонтальной плоскостью.

Скоростной угол крена γ_c – угол между боковой осью Oz_a и осью O_0z_c стартовой системы координат, смещенной в положение, при котором угол курса равен нулю.

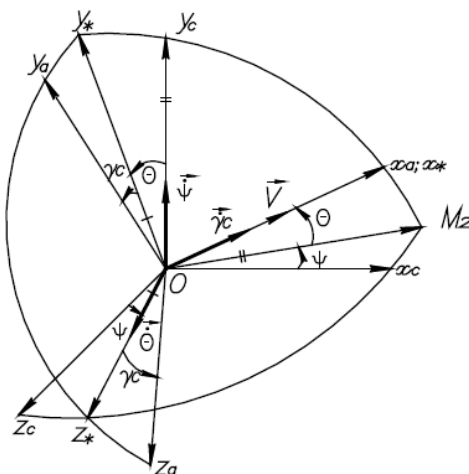


Рис. 12. Переход от стартовой системы координат к скоростной

Скоростную систему координат можно совместить со стартовой с помощью трех поворотов соответственно на углы Ψ , Θ и γ_c . Порядок поворотов аналогичен порядку перехода от стартовой системы координат к связанной. Первый поворот осуществляется относительно оси $O_0 y_c$ на угол Ψ с угловой скоростью $\bar{\Psi}$, второй – относительно оси $O z_*$ на угол Θ с угловой скоростью $\bar{\Theta}$, третий – относительно оси $O x_a$ на угол γ_c с угловой скоростью $\bar{\gamma}_c$. Векторы производных $\bar{\Psi}$, $\bar{\Theta}$ и $\bar{\gamma}_c$ направлены так, как показано на рис. 12, где $O x_*, y_*, z_*$ – полускоростная система координат, отличающаяся от скоростной отсутствием поворота на угол γ_c . Когда $\gamma_c = 0$, то скоростная и полускоростная системы осей совпадают.

Вектор угловой скорости вращения скоростной системы координат определяется геометрическим сложением всех угловых скоростей последовательных трех вращений:

$$\bar{\omega}_a = \bar{\Psi} + \bar{\Theta} + \bar{\gamma}_c,$$

где $\bar{\omega}_a$ – угловая скорость полускоростной системы координат.

Таблица 4. Косинусы углов между стартовыми и скоростными осями

	Ox_a	Oy_a	Oz_a
O_0x_c	b_{11}	b_{12}	b_{13}
O_0y_c	b_{21}	b_{22}	b_{23}
O_0z_c	b_{31}	b_{32}	b_{33}

В таблице 4 $b_{ij} = a_{ij}$, если $\vartheta = \Theta$, $\psi = \Psi$, $\gamma = \gamma_c$. Тогда можно установить связь между стартовыми и скоростными осями:

$$\begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix} = B \cdot \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix},$$

где $B = B(\Theta, \Psi, \gamma_c) = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$ – ортогональная квадратная

матрица перехода от скоростных координат к стартовым.

Для обратного перехода, то есть от стартовой системы координат к скоростной, необходимо воспользоваться обратной матрицей B^{-1} , которая совпадает с транспонированной матрицей B^T , так как матрица перехода является ортогональной. Тогда

$$\begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} = B^T \cdot \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix}.$$

Взаимное расположение связанной $Ox_ay_az_a$ систем координат.

Взаимное расположение связанной и скоростной систем координат определяется двумя углами: углом атаки и углом скольжения.

Угол атаки α – угол между продольной осью Ox летательного аппарата и проекцией скорости центра масс $\bar{V}$ на плоскость симметрии летательного аппарата (линия OM_3 на рис. 13).

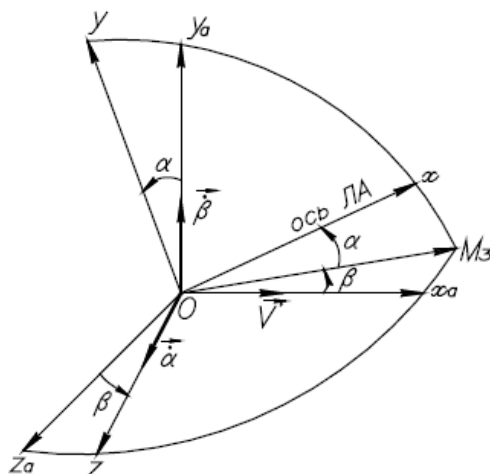


Рис. 13. Переход от скоростной системы координат к связанной

Угол скольжения β – угол между вектором скорости $\bar{V}$ и плоскостью симметрии летательного аппарата.

Угол β принимается положительным, если вектор скорости центра масс $\bar{V}$ отклонен вправо от продольной плоскости Ox связанной системы координат; угол α считается положительным, если вектор $\bar{V}$ отклонен «вверх» связано с направлением оси Oy).

Для перехода от скоростной системы координат к связанной осуществим два поворота: первый – вокруг оси Oy_a на угол β с угловой скоростью $\bar{\beta}$, второй – вокруг оси Oz на угол α с угловой скоростью $\bar{\alpha}$.

Таблица 5. Косинусы углов между скоростными и связанными осями

	Ox	Oy	Oz
Ox_a	c_{11}	c_{12}	c_{13}
Oy_a	c_{21}	c_{22}	c_{23}
Oz_a	c_{31}	c_{32}	c_{33}

Режим эксплуатации летательного аппарата происходит, как правило, при малых углах атаки α и β и малых значениях безразмерных угловых скоростей $\overline{\omega}_y$ и $\overline{\omega}_z$, угловых ускорений и других параметров, входящих в выражение коэффициента полной аэродинамической силы. Поэтому при малых углах α и β можно записать приближенные равенства:

$$\sin \alpha \approx \alpha, \quad \sin \beta \approx \beta, \quad \cos \alpha \approx \cos \beta \approx 1.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} c_{11} &\approx 1, & c_{12} &\approx -\alpha, & c_{13} &\approx \beta, & c_{21} &\approx \alpha, & c_{22} &\approx 1, \\ c_{23} &\approx 0, & c_{31} &\approx -\beta, & c_{32} &\approx \alpha\beta \approx 0, & c_{33} &\approx 1. \end{aligned}$$

Таким образом, линейные преобразования перехода от связанной системы координат к скоростной в матричном виде имеет вид

$$\begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

$$\text{где } C = C(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \text{ — ортогональная квадратная}$$

матрица перехода от связанных координат к скоростным.

Если надо осуществить обратный переход, то есть от скоростной системы координат к связанной, то необходимо воспользоваться обратной матрицей C^{-1} , которая совпадает с транспонированной матрицей C^T , так как матрица перехода является ортогональной.

Кинематические соотношения

Кинематические соотношения служат для определения линейных или угловых координат летательного аппарата в зависимости от линейных или угловых скоростей.

При изучении движения летательного аппарата вблизи поверхности Земли со скоростями, меньшими первой космической, можно не учитывать орбитальное движение Земли и её вращательное движение. В этом случае стартовую систему координат $O_0x_cy_cz_c$, где O_0 – точка старта, можно считать инерциальной, то есть абсолютно неподвижной. При этих допущениях выведем основные кинематические соотношения.

Кинематическое уравнение движения центра масс летательного аппарата в векторной форме:

$$\bar{V} = \frac{d\bar{r}}{dt}, \quad (38)$$

где $\bar{r}$ – радиус-вектор, проведенный из начала стартовой системы координат в центр масс летательного аппарата; $\bar{V}$ – вектор скорости центра масс летательного аппарата относительно рассматриваемой системы отсчета.

Каждому векторному уравнению соответствуют три скалярных, конкретный вид которых зависит от выбранных осей координат.

Разложим вектор скорости и радиус-вектор по осям стартовой системы координат:

$$\begin{aligned} \bar{V} &= V_{x_c} \bar{i}_c + V_{y_c} \bar{j}_c + V_{z_c} \bar{k}_c, \\ \bar{r} &= x_c \bar{i}_c + y_c \bar{j}_c + z_c \bar{k}_c, \end{aligned}$$

где x_c, y_c, z_c – координаты центра масс в стартовой системе координат; $\bar{i}_c, \bar{j}_c, \bar{k}_c$ – орты соответствующих осей стартовой системы координат.

Подставим вектор скорости $\bar{V}$ и радиус-вектор $\bar{r}$ в уравнение (38):

$$V_{x_c} \bar{i}_c + V_{y_c} \bar{j}_c + V_{z_c} \bar{k}_c = \frac{dx_c}{dt} \bar{i}_c + \frac{dy_c}{dt} \bar{j}_c + \frac{dz_c}{dt} \bar{k}_c.$$

В результате получим

$$\begin{cases} \frac{dx_c}{dt} = V_{x_c}, \\ \frac{dy_c}{dt} = V_{y_c}, \\ \frac{dz_c}{dt} = V_{z_c}. \end{cases} \quad (39)$$

Уравнения (39) служат для определения координат центра масс летательного аппарата.

Запишем выражения для проекций скорости центра масс на координатные оси стартовой системы координат. Для этого обратимся к рис. 12 и табл. 15:

$$\begin{aligned} \bar{V} &= V\bar{i}_a = V\bar{i}_* \quad (x_a \text{ совпадает с } x_*), \\ V_{x_c} &= Vb_{11} = V \cos \Theta \cos \Psi, \\ V_{y_c} &= Vb_{21} = V \sin \Theta, \\ V_{z_c} &= Vb_{31} = -V \cos \Theta \sin \Psi. \end{aligned}$$

Тогда, с учетом формул (39), получаем

$$\begin{cases} \frac{dx_c}{dt} = V \cos \Theta \cos \Psi, \\ \frac{dy_c}{dt} = V \sin \Theta, \\ \frac{dz_c}{dt} = -V \cos \Theta \sin \Psi. \end{cases}$$

Кинематическое уравнение вращательного движения летательного аппарата ЛА в векторной форме:

$$\bar{\omega} = \bar{\psi} + \bar{\vartheta} + \bar{\gamma}. \quad (40)$$

Поскольку при вращении летательного аппарата изменяются углы ψ , ϑ , γ , определяющие положение летательного аппарата относительно стартовых осей, вектор угловой скорости летательного

аппарата $\bar{\omega}$ относительно этих осей равен геометрической сумме угловых скоростей элементарных поворотов.

Для определения угловых скоростей поворота $\bar{\psi}$, $\bar{\vartheta}$, $\bar{\gamma}$ обратимся к рис. 14.

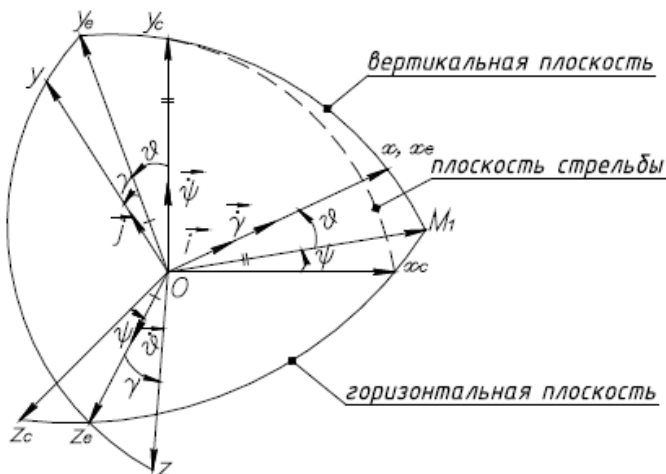


Рис. 14. Переход от стартовой системы координат к связанной

Проецируя равенство (40) на оси x, y, z связанной системы координат (см. рис. 14), получим

$$\begin{cases} \omega_x = \dot{\psi} \sin \vartheta + \dot{\gamma}, \\ \omega_y = \dot{\psi} \cos \vartheta \cos \gamma + \dot{\vartheta} \sin \gamma, \\ \omega_z = -\dot{\psi} \cos \vartheta \sin \gamma + \dot{\vartheta} \cos \gamma. \end{cases}$$

Решая систему, найдём $\dot{\psi}$, $\dot{\vartheta}$, $\dot{\gamma}$:

$$\begin{aligned} \dot{\vartheta} &= \omega_y \sin \gamma + \omega_z \cos \gamma, \\ \dot{\psi} &= \frac{1}{\cos \vartheta} (\omega_y \cos \gamma - \omega_z \sin \gamma), \\ \dot{\gamma} &= \omega_x - \operatorname{tg} \vartheta (\omega_y \cos \gamma - \omega_z \sin \gamma). \end{aligned}$$

Уравнения динамики пространственного движения

Летательный аппарат в своём пространственном движении имеет шесть степеней свободы, если рассматривать его как недеформируемое твёрдое тело с переменной массой. Его движение определяется шестью обобщёнными координатами: тремя координатами центра масс и тремя эйлеровыми углами, определяющими угловую ориентацию летательного аппарата относительно центра масс. Для определения шести указанных координат нужно составить шесть уравнений динамики. Для этого используются основные законы механики системы материальных точек и твёрдого тела: закон количества движения и закон моментов количества движения.

Закон количества движения.

Изменение вектора количества движения системы в единицу времени равняется главному вектору всех внешних сил, действующих на систему:

$$\frac{d\bar{k}}{dt} = \sum \bar{F}_i.$$

Закон момента количества движения.

Изменение вектора момента количества движения в единицу времени равно главному моменту всех внешних сил, действующих на систему. При этом вектор момента количества движения и момент внешних сил вычисляются относительно неподвижной точки пространства или относительно центра масс системы:

$$\frac{d\bar{L}_0}{dt} = \sum \bar{M}_{i0},$$

где $\bar{L}_0$ – вектор момента количества движения (или кинетический момент) относительно центра масс O .

Оба эти закона справедливы для тела или системы с постоянной массой. При этом закон количества движения для тела с постоянной массой трансформируется в уравнение второго закона механики:

$$m \frac{d\bar{V}}{dt} = \sum \bar{F}_i, \quad m = \text{const},$$

где $\bar{V}$ – скорость центра масс; $\frac{d\bar{V}}{dt}$ – абсолютное ускорение.

Если масса меняется в зависимости от времени, то эти законы несправедливы. В этом случае появляются дополнительные силы и моменты, вызванные изменением массы. Так как поступательное движение может быть описано движением одной точки, совпадающей с центром масс, то для вывода уравнений поступательного движения можно использовать уравнение Мещерского.

Уравнение Мещерского.

Уравнение описывает движение точки с переменной массой. В общем случае, когда при движении точки с переменной массой имеет место как отсоединение, так и присоединение массы, уравнение Мещерского запишется в виде

$$m(t) \frac{d\bar{V}}{dt} = \sum \bar{F}_i + \bar{R}_1 + \bar{R}_2,$$

где $\bar{R}_1, \bar{R}_2$ – реактивные силы, вызванные присоединением и отсоединением массы (рис. 15) и определяемые по следующим формулам.

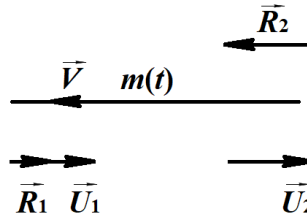


Рис. 15. Реактивные силы

Реактивная сила, вызванная присоединением массы, тормозит движение точки: $\bar{R}_1 = Q_1 \bar{U}_1$, где Q_1 – секундный приход массы (количество массы, присоединяющейся в единицу времени); $\bar{U}_1$ – относительная скорость присоединения массы.

В полете, главным образом вследствие работы двигателей, часть массы реактивного снаряда с течением времени отделяется от ракеты. Существуют летательные аппараты, присоединяющие определенное количество массы окружающей среды для использования в качестве одного из продуктов сгорания в камере реактивного двигателя: реактивные торпеды, использующие забортную воду в качестве окислителя; самолеты с воздушно-реактивными двигателями; крылатые ракеты больших дальностей и другие виды летательных аппаратов. Одновременно с забором окружающей среды продукты сгорания выбрасываются через сопла с большой скоростью, создавая силу тяги.

Реактивная сила, вызванная отсоединением массы: $\overline{R_2} = -Q_2 \overline{U_2}$, где Q_2 – секундный расход массы, $\overline{U_2}$ – относительная скорость отсоединения массы (скорость истечения продуктов сгорания из сопла). Эта сила возникает у ракет с жидкостными и твердотопливными двигателями.

Будем считать, что $\overline{R_1} = 0$, то есть рассматривать летательный аппарат с жидкостными и твердотопливными двигателями. Тогда

$$m(t) \frac{d\overline{V}}{dt} = \overline{R_2} + \sum \overline{F_i}.$$

Закон изменения массы определяется уравнением

$$\frac{dm}{dt} = -Q.$$

Закон изменения массы при постоянном расходе ($Q = \text{const}$): $m = m_0 - Qt$, где m_0 – начальная масса точки.

Используя вместо закона количества движения уравнение Мещерского для описания поступательного движения летательного аппарата, мы допускаем известную неточность, которая происходит от того, что не учитывается перемещение центра масс летательного аппарата за счёт выгорания топлива.

Рассмотрим схему ракеты (рис. 16), где: p_a – давление газов на выходе из сопла; $p(y_c)$ – атмосферное давление, зависящее от высоты полёта y_c ; F_{BC} – площадь выходного сечения.

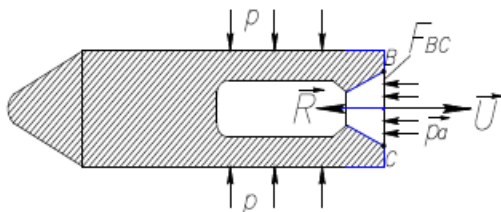


Рис. 16. Схема ракеты

При движении летательного аппарата в атмосфере на него будет действовать тяга R , приложенная в точке O_2 (центр масс выходного сечения сопла), которая представляет собой сумму реактивной силы R_2 и статической добавки $R_{ст}$:

$$R = R_2 + R_{ст},$$

где

$$R_{ст} = F_{BC}(p_a - p(y_c)).$$

Таким образом,

$$R = QU + F_{BC}(p_a - p(y_c)) = Qu_e,$$

где u_e – эффективная скорость истечения газов:

$$u_e = U + \frac{F_{BC}}{Q}(p_a - p(y_c)).$$

Заметим, что реактивная сила приложена в центре масс выходного сечения сопла, но не в геометрическом центре.

Кроме силы тяги R , в состав сил, обусловленных переменным составом летательного аппарата, входят:

- силы, вызванные нестационарностью движения топлива и продуктов горения относительно корпуса летательного аппарата;
- кориолисовы силы, обусловленные движением топлива и продуктов горения в летательного аппарата, вращающемся относительно инерциальной СК;

– силы, обусловленные перемещением центра масс летательного аппарата относительно корпуса.

Перечисленные силы очень малы по сравнению с тягой, причем непосредственно их измерить невозможно. В связи с этим при выводе уравнений динамики пространственного движения летательного аппарата указанными малыми силами обычно пренебрегают.

Вывод уравнений поступательного движения в пространстве

Для вывода уравнений поступательного движения используется уравнение Мещерского:

$$m(t) \frac{d\bar{V}}{dt} = R + \bar{F}_A + \bar{G}, \quad (41)$$

где R – тяга; $\bar{F}_A$ – главный вектор аэродинамических сил; $\bar{G}$ – сила тяжести; $\frac{d\bar{V}}{dt}$ – абсолютное ускорение; $\bar{V}$ – скорость центра масс относительно земли (путевая скорость).

Уравнение (41) эквивалентно трём уравнениям в проекциях на оси системы координат. Чтобы получить эти уравнения, нужно выбрать какую-либо из пяти координатных систем, рассмотренных нами: стартовую, связанную, скоростную, полусвязанную, полускоростную.

При выводе уравнений поступательного движения может использоваться любая из них. Вид уравнений в проекциях будет зависеть от выбора системы координат. Наиболее часто при выводе уравнений поступательного движения используются полускоростная или связанная. В уравнении (41) слева стоит полная векторная производная от вектора $\bar{V}$, а справа – сумма сил.

Рассмотрим, как найти производную от вектора в подвижной системе координат. Если какой-либо вектор $\bar{a} = \bar{a}(t)$ определен в подвижной системе координат $\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}$, где $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ – единичные векторы подвижной системы координат, то производная по времени от этого вектора:

$$\frac{d\bar{a}}{dt} = \frac{da_x}{dt}\bar{i} + \frac{da_y}{dt}\bar{j} + \frac{da_z}{dt}\bar{k} + a_x\frac{d\bar{i}}{dt} + a_y\frac{d\bar{j}}{dt} + a_z\frac{d\bar{k}}{dt}.$$

Сумма первых трех слагаемых представляет собой производную от вектора $\bar{a}$ в подвижной системе координат (характеризует изменение вектора a во времени относительно подвижной системы координат) и называется *локальной производной*, обозначим ее $\frac{d'\bar{a}}{dt}$:

$$\frac{d'\bar{a}}{dt} = \frac{da_x}{dt}\bar{i} + \frac{da_y}{dt}\bar{j} + \frac{da_z}{dt}\bar{k}.$$

Поскольку $\frac{d\bar{i}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{i}$, $\frac{d\bar{j}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{j}$, $\frac{d\bar{k}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{k}$, где $\bar{\omega}$ является угловой скоростью вращения подвижной системы координат относительно рассматриваемой неподвижной опорной системы координат, то вторая сумма слагаемых (характеризует изменение вектора a во времени, вызванное вращением координатных осей) может быть представлена как

$$\begin{aligned} a_x\frac{d\bar{i}}{dt} + a_y\frac{d\bar{j}}{dt} + a_z\frac{d\bar{k}}{dt} &= a_x(\bar{\omega} \times \bar{i}) + a_y(\bar{\omega} \times \bar{j}) + a_z(\bar{\omega} \times \bar{k}) = \\ &= \bar{\omega} \times (a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}) = \bar{\omega} \times \bar{a}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\frac{d\bar{a}}{dt} = \frac{d'\bar{a}}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{a}.$$

Таким образом, при рассмотрении сложного движения абсолютная производная вектора в подвижной системе координат равна сумме локальной производной этого вектора и векторного произведения угловой скорости вращения подвижной системы координат относительно опорной на этот вектор.

Применим это правило к нахождению производной от вектора $\bar{V}$. Рассмотрим полускоростную систему координат $Ox_*y_*z_*$. Полная производная вектора скорости:

$$\frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{d'\bar{V}}{dt} + \bar{\omega}_* \times \bar{V},$$

где $\bar{\omega}_*$ – абсолютная угловая скорость вращения системы координат $Ox_*y_*z_*$.

Спроецируем вектор скорости $\bar{V}$ на полускоростную систему координат:

$$\bar{V} = V\bar{i}_*.$$

Тогда

$$\frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{dV}{dt}\bar{i}_* + \bar{\omega}_* \times \bar{V}.$$

Запишем векторное произведение в проекциях:

$$\bar{\omega}_* \times \bar{V} = \begin{vmatrix} \bar{i}_* & \bar{j}_* & \bar{k}_* \\ \omega_{*x_*} & \omega_{*y_*} & \omega_{*z_*} \\ V & 0 & 0 \end{vmatrix} = V(\omega_{*z_*}\bar{j}_* - \omega_{*y_*}\bar{k}_*).$$

Абсолютная угловая скорость полускоростной системы координат:

$$\bar{\omega}_* = \bar{\dot{\theta}} + \bar{\dot{\Psi}}.$$

Тогда

$$\omega_{*y_*} = \dot{\Psi} \cos \theta,$$

$$\omega_{*z_*} = \dot{\theta},$$

$$\bar{\omega}_* \times \bar{V} = V\dot{\theta}\bar{j}_* - V\dot{\Psi} \cos \theta \bar{k}_*.$$

В результате система уравнений поступательного движения в проекциях на полускоростные оси запишется следующим образом:

$$\begin{cases} m \frac{dV}{dt} = R_{x_*} + G_{x_*} + F_{AX_*}, \\ mV \frac{d\theta}{dt} = R_{y_*} + G_{y_*} + F_{AY_*}, \\ -mV \cos \theta \frac{d\Psi}{dt} = R_{z_*} + G_{z_*} + F_{AZ_*}. \end{cases}$$

Рассмотрим *связанную систему координат* $Oxuz$. Полная производная вектора скорости в связанной системе координат:

$$\frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{d'\bar{V}}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{V},$$

где $\bar{\omega}$ – абсолютная угловая скорость вращения системы координат $Oxuz$.

Спроецируем вектор скорости на оси связанной системы координат:

$$\bar{V} = V_x \bar{i} + V_y \bar{j} + V_z \bar{k}.$$

Обратившись к рис. 13, можно записать:

$$\begin{aligned} V_x &= V \cos \alpha \cos \beta \approx V, \\ V_y &= -V \sin \alpha \cos \beta \approx -V\alpha, \\ V_z &= V \sin \beta \approx V\beta. \end{aligned}$$

Локальная производная вектора скорости:

$$\frac{d'\bar{V}}{dt} = \frac{dV_x}{dt} \bar{i} + \frac{dV_y}{dt} \bar{j} + \frac{dV_z}{dt} \bar{k}.$$

Векторное произведение в проекциях:

$$\bar{\omega} \times \bar{V} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} =$$

$$= \bar{i}(\omega_y V_z - \omega_z V_y) + \bar{j}(\omega_z V_x - \omega_x V_z) + \bar{k}(\omega_x V_y - \omega_y V_x),$$

где $\bar{\omega} = \bar{\psi} + \bar{\vartheta} + \bar{\gamma}$,

$$\begin{cases} \omega_x = \dot{\psi} \sin \vartheta + \dot{\gamma}, \\ \omega_y = \dot{\psi} \cos \vartheta \cos \gamma + \dot{\vartheta} \sin \gamma, \\ \omega_z = -\dot{\psi} \cos \vartheta \sin \gamma + \dot{\vartheta} \cos \gamma. \end{cases}$$

Тогда система уравнений поступательного движения в проекциях на связанные оси будет:

$$\begin{cases} m \left(\frac{dV_x}{dt} + \omega_y V_z - \omega_z V_y \right) = R_x + G_x + F_{AX}, \\ m \left(\frac{dV_y}{dt} + \omega_z V_x - \omega_x V_z \right) = R_y + G_y + F_{AY}, \\ m \left(\frac{dV_z}{dt} + \omega_x V_y - \omega_y V_x \right) = R_z + G_z + F_{AZ}. \end{cases}$$

Уравнения вращательного движения в пространстве

Для вывода уравнений вращательного движения используется закон момента количества движения:

$$\frac{d\bar{L}_0}{dt} = \bar{M}_R + \bar{M}_F, \quad (42)$$

где $\bar{L}_0$ – момент количества движения относительно центра масс (кинетический момент), $\bar{M}_R$ – момент тяги, $\bar{M}_F$ – момент внешних сил, кроме силы тяги. Выражение (42) будет иметь смысл, если точка O неподвижна в инерциальном пространстве или является центром масс летательного аппарата.

Векторное уравнение (42) запишем в проекциях на связанную систему координат, которая используется преимущественно при проектировании уравнения (42). Но наряду со связанной системой координат в случае осесимметричного летательного аппарата может использоваться полусвязанная (рис. 17).

Остальные систему координат из перечисленных выше при записи уравнений вращательного движения не используются. Связанная система координат неизменно связана с летательным аппаратом, и ее оси при движении летательного аппарата сохраняют относительно него постоянную ориентацию, то есть связанная система в пространстве вращается с той же угловой скоростью, что и сам летательный аппарат. Таким образом, моменты инерции, которые

входят в уравнение вращательного движения, в случае использования связанной системы координат будут зависеть только от изменения массы, и не будут зависеть от вращения летательного аппарата.

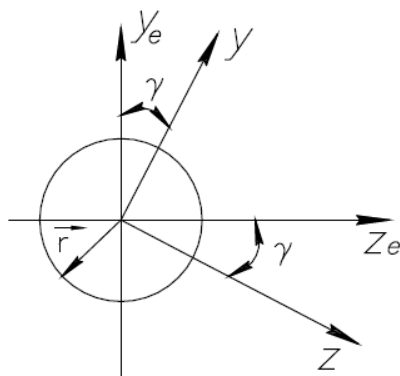


Рис. 17. Взаимное расположение связанных и полусвязанных осей

Если $\dot{\gamma}$ мала (крен стабилизирован), то не имеет существенного значения, какую систему координат использовать, связанную или полусвязанную. Итак, при использовании связанной системы координат

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{L}_0}{dt} &= \frac{d'\bar{L}_0}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{L}_0, \\ \bar{L}_0 &= L_x \bar{i} + L_y \bar{j} + L_z \bar{k}, \\ \frac{d'\bar{L}_0}{dt} &= \frac{dL_x}{dt} \bar{i} + \frac{dL_y}{dt} \bar{j} + \frac{dL_z}{dt} \bar{k},\end{aligned}$$

где $\bar{L}_0$ – момент количества движения летательного аппарата относительно центра масс; $\bar{\omega}$ – абсолютная угловая скорость связанной системы координат (абсолютная угловая скорость летательного аппарата).

При использовании полусвязанной системы координат

$$\frac{d\bar{L}_0}{dt} = \frac{d'\bar{L}_0}{dt} + \bar{\omega}_e \times \bar{L}_0.$$

Проекции $\bar{L}_0$ на связанные оси (для любой конфигурации летательного аппарата):

$$\begin{aligned}L_x &= J_x \omega_x - J_{xy} \omega_y - J_{xz} \omega_z, \\L_y &= J_y \omega_y - J_{yx} \omega_x - J_{yz} \omega_z, \\L_z &= J_z \omega_z - J_{zx} \omega_x - J_{zy} \omega_y,\end{aligned}$$

где $\bar{\omega}(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ – абсолютная угловая скорость летательного аппарата; J_x, J_y, J_z – осевые моменты инерции массы; $J_{xy}, J_{xz}, J_{yz}, \dots$ – центробежные моменты инерции (произведения инерции).

Моменты инерции:

$$\begin{aligned}J_x &= \int_{(m)} (y^2 + z^2) dm, & J_y &= \int_{(m)} (x^2 + z^2) dm, \\J_z &= \int_{(m)} (x^2 + y^2) dm, & J_{xy} &= \int_{(m)} xy dm, \\J_{xz} &= \int_{(m)} xz dm, & J_{yz} &= \int_{(m)} yz dm, & \text{и т. д.}\end{aligned}$$

Если летательный аппарат имеет определенную симметрию, то эти формулы упрощаются:

1. Oxy – плоскость симметрии (летательный аппарат самолётной схемы). Поскольку основная плоскость Oxy связанной системы координат является плоскостью симметрии летательного аппарата, то в связанных осях центробежные моменты инерции, содержащие координаты z , обращаются в нуль: $J_{xz} = J_{yz} = 0$. Иначе говоря, для самолётной схемы

$$\begin{aligned}L_x &= J_x \omega_x - J_{xy} \omega_y, \\L_y &= J_y \omega_y - J_{yx} \omega_x, \\L_z &= J_z \omega_z,\end{aligned}$$

причем $J_{xy} \omega_y, J_{yx} \omega_x$ – малые величины и ими часто пренебрегают;

2. Ox – ось симметрии. В этом случае все центробежные моменты равны нулю. Если все центробежные моменты инерции относительно осей принятой системы координат равны нулю, то такие оси называются главными осями инерции. В этом случае проекции вектора кинетического момента:

$$L_x = J_x \omega_x, \quad L_y = J_y \omega_y, \quad L_z = J_z \omega_z.$$

В дальнейшем при выводе уравнений вращательного движения будем использовать именно этот случай.

Отметим, что моменты инерции – это функции времени $J_x, J_y, J_z = f_i(t)$, то есть являются переменными величинами, однако при проведении приближенных баллистических расчетов принято считать их постоянными. В стадии сдаточных исследований и испытаний конкретных образцов реактивных снарядов учитывают влияние переменности моментов инерции на характер движения центра масс.

В дальнейшем будем полагать моменты инерции постоянными величинами, а значит, при вычислении локальной производной они выносятся за знак производной:

$$\frac{d'\bar{L}_0}{dt} = J_x \frac{d\omega_x}{dt} \bar{i} + J_y \frac{d\omega_y}{dt} \bar{j} + J_z \frac{d\omega_z}{dt} \bar{k}.$$

Векторное произведение:

$$\begin{aligned} \bar{\omega} \times \bar{L}_0 &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ J_x \omega_x & J_y \omega_y & J_z \omega_z \end{vmatrix} = \\ &= (J_z - J_y) \omega_y \omega_z \bar{i} + (J_x - J_z) \omega_x \omega_z \bar{j} + (J_y - J_x) \omega_x \omega_y \bar{k}. \end{aligned}$$

Запишем уравнение вращательного движения в общем виде:

$$\begin{cases} J_x \frac{d\omega_x}{dt} + (J_z - J_y)\omega_y\omega_z = M_{Rx} + M_{Ax}, \\ J_y \frac{d\omega_y}{dt} + (J_x - J_z)\omega_x\omega_z = M_{Ry} + M_{Ay}, \\ J_z \frac{d\omega_z}{dt} + (J_y - J_x)\omega_x\omega_y = M_{Rz} + M_{Az}, \end{cases}$$

где M_{Rx} , M_{Ry} , M_{Rz} – управляющие моменты относительно соответствующих осей, которые создаются за счёт отбора части тяги на управление; M_{Ax} , M_{Ay} , M_{Az} – составляющие аэродинамического момента, действующего на летательный аппарат.

Если угловое движение летательного аппарата стабилизировано ($\overline{\omega}$ – малая величина), тогда ω_x , ω_y , ω_z малы, а значит, произведениями $(J_z - J_y)\omega_y\omega_z$, $(J_x - J_z)\omega_x\omega_z$, $(J_y - J_x)\omega_x\omega_y$ можно пренебречь (для управляемого летательного аппарата).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Амосов, А.А. Вычислительные методы: учебное пособие / А.А. Амосов, Ю.А. Дубинский, Н.В. Копченкова. – 4-е изд., стер. – Санкт-Петербург: Изд-во «Лань», 2022. – 672 с.
2. Аюпов, В.В. Математическое моделирование технических систем: учебное пособие / В.В. Аюпов; М-во с.-х. РФ, федеральное гос. бюджетное образов. учреждение высшего образования «Пермская гос. с.-х. акад. им. акад. Д.Н. Прянишникова». – Пермь: ИПЦ «Прокрость», 2017. – 242 с.
3. Бахвалов, Н.С. Численные методы: учебник / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. – 9-е изд. – Москва: Лаборатория знаний, 2020. – 636 с.
4. Берестова, С.А. Математическое моделирование в инженерии: учебник / С.А. Берестова, Н.Е. Мисюра, Е.А. Митюшов. – Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2018. – 244 с.
5. Вержбицкий, В.М. Численные методы: Линейная алгебра и нелинейные уравнения: учебное пособие для студентов мат. и инж. специальностей вузов / В.М. Вержбицкий. – Москва: Высш. шк., 2000. – 265 с.
6. Вержбицкий, В.М. Основы численных методов: учебник для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению подготовки дипломированных специалистов «Прикладная математика» / В.М. Вержбицкий. – 3-е изд., стер. – Москва: Высш. шк., 2009. – 839 с.
7. Воеводин, В.В. Вычислительные основы линейной алгебры / В.В. Воеводин. – Москва: Наука, 1977. – 303 с.
8. Воеводин, В.В. Матрицы и вычисления / В.В. Воеводин, Ю.А. Кузнецов. – Москва: Наука, 1984. – 320 с.
9. Волков, Е.А. Численные методы / Е.А. Волков. – Москва: Наука, 1982. – 256 с.

10. Воробьева, Г.Н. Практикум по численным методам / Г.Н. Воробьева, А.Н. Данилова. – Москва: Высш. шк., 1979. – 184 с.
11. Голуб, Дж. Матричные вычисления / Дж. Голуб, Ч. Ван Лоун; пер. с англ. Москва: Мир, 1999. – 548 с.
12. Демидович, Б.П. Основы вычислительной математики: учебное пособие / Б.П. Демидович, И.А. Марон. – 8-е изд., стер. – Санкт-Петербург: Изд-во «Лань», 2022. – 672 с.
13. Деммель, Дж. Вычислительная линейная алгебра. Теория и приложения / Дж. Деммель – М.: Мир, 2001. – 435 с.
14. Зарубин, В.С. Математическое моделирование в технике: учебник / В.С. Зарубин. – 3-е изд. – Москва: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010. – 496 с.
15. Зенков, А.В. Численные методы: учебное пособие / А.В. Зенков; научный редактор В.В. Плещев. – Екатеринбург: УрФУ, 2016. – 124 с.
16. Калиткин, Н.Н. Численные методы / Н.Н. Калиткин. – Москва: Наука, 1978. – 512 с.
17. Копченкова, Н.В. Вычислительная математика в примерах и задачах: учебное пособие для вузов / Н.В. Копченкова, И.А. Марон. – 5-е изд., стер. – Санкт-Петербург: Изд-во «Лань», 2021. – 368 с.
18. Лапчик, М.П. Численные методы: учебное пособие для студентов вузов / М.П. Лапчик, М.И. Рагулина, Е.К. Хеннер. – Москва: Академия, 2005. – 384 с.
19. Минькова, Р.М. Методы вычислительной математики / Р.М. Минькова, Р.А. Вайсбурд. – Свердловск: Изд-во УПИ им. С.М. Кирова, 1981. – 88 с.
20. Уилкинсон, Дж.Х. Алгебраическая проблема собственных значений / Дж.Х. Уилкинсон – Москва: Наука, 1970. – 564 с.
21. Фаддеев, Д.К. Вычислительные методы линейной алгебры: учебник / Д.К. Фаддеев, В.Н. Фаддеева. – 4-е изд., стер. – Санкт-Петербург: Изд-во «Лань», 2022. – 736 с.

22.Фаддеев, Д.К. Лекции по алгебре / Д.К. Фаддеев. – Москва: Наука, 1984. – 416 с.

23.Форсайт, Дж. Машинные методы математических вычислений: учебник / Дж. Форсайт, М. Малькольм, К. Моулер – 1-е изд. – Москва: Мир, 1980. – 276 с.

24.Численные методы / Н.И. Данилина [и др.]. – Москва: Высш. шк., 1976. – 368с.

25.Хемминг, Р.И. Численные методы для научных работников и инженеров / Р.И. Хемминг. – Москва: Мир, 1972. – 399 с.

Учебное издание

*Евгения Анатольевна Барова,
Елена Игоревна Коновалова,
Юлия Жиганшиевна Пчелкина,
Людмила Вениаминовна Яблокова*

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ
В ИНЖЕНЕРНЫХ ЗАДАЧАХ**

Учебное пособие

Редакционно-издательская обработка
издательства Самарского университета

Подписано в печать 28.10.2024. Формат 60×84 1/16.

Бумага офсетная. Печ. л. 8,0.

Тираж 120 экз. (1-й з-д 1-27). Заказ № . Арт. – 8(Р2УП)/2024.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)
443086, САМАРА, МОСКОВСКОЕ ШОССЕ, 34.

Издательство Самарского университета
443086, Самара, Московское шоссе, 34.

