

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

В. М. Белоконов, И. В. Белоконов

Системный анализ космических миссий

Электронный конспект лекций

САМАРА

2010

Авторы: БЕЛОКОНОВ Виталий Михайлович,
БЕЛОКОНОВ Игорь Витальевич

Предмет дисциплины «Системный анализ космических миссий» включает в себя совокупность взаимосвязанных задач, комплексное решение которых позволяет сделать оценку возможности реализации миссии, обосновать основные технические характеристики и проектные параметры, обеспечивающие достижение поставленных целей. Так как центральным элементом любой космической миссии является полет космического аппарата, то знание основ теории полета, инженерных моделей, связывающих проектные параметры космического аппарата, методы управления движением с критериальным базисом космической миссии является обязательным условием.

Настоящий курс лекций включает в себя информацию для взаимосвязанной оценки реализуемости миссий, как в околоземном космическом пространстве, так и для миссий в пределах Солнечной системы.

Конспект лекций предназначен для магистратов, обучающихся по магистерской программе «Космические информационные системы и наноспутники. Навигация и дистанционное зондирование» по направлению 010900.68 «Прикладные математика и физика».

Конспект лекций разработан на межвузовской кафедре космических исследований.

	ВВЕДЕНИЕ	4
1	Математическое моделирование движения – основной инструмент системного анализа космических миссий	5
1	Основные понятия и классификация математических моделей движения	5
1.2	Системы координат, применяемые при системном анализе космических миссий	5
1.3	Уравнения движения летательного аппарата	15
2	Невозмущенное движение космического аппарата	22
2.1.	Уравнения движения в поле центральной силы	22
2.2	Основные интегралы уравнений движения	23
2.3	Уравнения орбиты и скорость в полярных координатах	27
2.4	Движение по эллиптическим орбитам	28
2.5	Движение по гиперболическим траекториям	32
2.6	Характерные космические скорости	35
3	Элементы орбит в пространстве	38
4	Анализ возможности выведения полезной нагрузки на орбиту ракетами космического назначения	42
4.1	Проектные характеристики ракет космического назначения	42
4.2	Приближенная оценка возможности запуска на орбиту	47
4.3	Расчет и анализ программной траектории движения первой ступени ракеты-носителя	49
4.4	Расчет и анализ программных траекторий внеатмосферных ступеней ракеты-носителя	52
5	Анализ возмущенного движения космических аппаратов	57
5.1	Возмущения орбиты, вызванные нецентральностью поля тяготения Земли	57
5.2	Возмущения движения, вызванные торможением атмосферой	58
6	Перелеты между орбитами и маневрирование космических аппаратов	65
6.1	Расчет маневров перелета между орбитами	65
6.2	Расчет маневров, корректирующих орбиту полета	75
6.3	Относительное движение двух космических аппаратов и маневры сближения	77
7	Анализ движения спускаемых аппаратов в атмосфере Земли	81
7.1	Расчет маневра схода с орбиты при возвращении на Землю	81
7.2	Анализ движения спускаемого аппарата в атмосфере	83
8	Анализ межпланетных миссий	85
8.1	Приближенная методика расчёта траекторий межпланетных перелётов	81
8.2	Анализ перелёта с околоземной орбиты на орбиты спутников ближних планет (Марса, Венеры)	86
8.3	Анализ пертурбационных маневров	91
8.4	Анализ движения КА в системе Земля-Луна	98

ВВЕДЕНИЕ

Предмет дисциплины «Системный анализ космических миссий» включает в себя совокупность взаимосвязанных задач, комплексное решение которых позволяет сделать оценку возможности реализации миссии, обосновать основные технические характеристики и проектные параметры, обеспечивающие достижение поставленных целей. Так как центральным элементом любой космической миссии является полет космического аппарата, то знание основ теории полета, инженерных моделей, связывающих проектные параметры космического аппарата, методы управления движением с критериальным базисом космической миссии является обязательным условием.

Настоящий курс лекций включает в себя информацию для взаимосвязанной оценки реализуемости миссий, как в околоземном космическом пространстве, так и для миссий в пределах Солнечной системы.

Для миссий в околоземном космическом пространстве учебный материал позволяет оценить рациональность выбранной схемы, продолжительность и потребные энергозатраты каждого этапа миссии : выведение космического аппарата (КА) на промежуточную орбиту; переход с орбиты выведения на целевую орбиту и/или маневрирование, связанное с потребностью периодического изменения орбиты, если это входит в программу миссии; основные возмущения, испытываемые КА на целевой орбите; маневрирование для сближения и стыковки, например с орбитальной станцией (если это предусматривается программой миссии); перевод КА на орбиту захоронения или сведение КА с орбиты после завершения функционирования и/или возвращение с орбиты экипажа орбитальной станции; оценка различных нештатных ситуаций, возникающих на любых этапах миссии.

Для космических миссий в пределах Солнечной системы ко всем вышеперечисленным этапам добавляется этап межпланетных перелетов, на которых необходимо обеспечивать фазирование движения.

Лекционный курс интегрирован с курсом «Физика околоземного космического пространства», что усиливает его системную составляющую.

1. Математическое моделирование движения – основной инструмент системного анализа космических миссий

1.1 Основные понятия и классификация математических моделей движения

Математическая модель движения летательного аппарата (ЛА) является совокупностью дифференциальных и функциональных операторов, графических и табличных зависимостей, однозначно определяющих траекторию полета летательного аппарата.

Математическая модель включает в себя пять основных элементов:

- **уравнения движения** (дифференциальные уравнения, приведенные к форме Коши и функциональные зависимости);
- **метод решения системы дифференциальных уравнений** (наиболее распространенным является метод численного интегрирования Рунге-Кутты 4-ого порядка);
- **характеристики гравитационных и иных полей, а также атмосферы;**
- **система проектных параметров летательного аппарата, характеристики двигательной установки летательного аппарата, аэродинамические характеристики;**
- **законы управления движением летательного аппарата.**

Первые два элемента образуют основную математическую модель, которая имеет универсальный характер. Остальные элементы модели формируют ее привязку к конкретному облику летательного аппарата и целевому назначению.

Выделяют два вида математических моделей: детерминированные и стохастические.

В детерминированной математической модели, в которой все исходные характеристики являются полностью определенными заданными величинами или функциями.

В стохастической математической присутствуют исходные характеристики, описываемыми вероятностными моделями (являются случайными величинами или случайными функциями).

1.2. Системы координат, применяемые при системном анализе космических миссий

Системы координат, используемые при записи моделей движения однозначно характеризуются тремя элементами: началом координат, основной плоскостью и основным направлением.

$Z\Xi$ – ось, направленная к северному полюсу мира;

YЭ – ось, направленная к точке зимнего солнцестояния (ЗСС);
 ЛСС - точка летнего солнцестояния;
 ОР - точка осеннего равноденствия.

Гелиоцентрическая эклиптическая система координат является инерциальной системой координат и применяются при расчёте межпланетных траекторий.

Тропический год - время одного полного оборота Земли вокруг Солнца

$$T_{\text{ТРОП}} = 365, 2422 \text{ суток}$$

Средние солнечные сутки (время одного оборота Земли) - время между двумя соседними нижними кульминациями Солнца $T_{\text{СС}} = 24 \text{ часа} = 86400 \text{ сек.}$

Звёздные сутки – время одного оборота относительно неподвижных звёзд

$$T_{\text{ЗВС}} = 86164 \text{ сек.}$$

1.2.2 Планетоцентрические системы координат

Геоцентрическая экваториальная инерциальная система координат ($O_3, X_{\text{и}}, Y_{\text{и}}, Z_{\text{и}}$) представлена на рис.2, где α – угол прямого восхождения ЛА, δ – угол склонения ЛА, ω_3 – угловая скорость вращения Земли, S – звездное время на Гринвичском меридиане; местное звездное время $S_0 = (S + \lambda)$ λ – географическая долгота ЛА; φ – географическая широта ЛА; Р – подспутниковая точка.

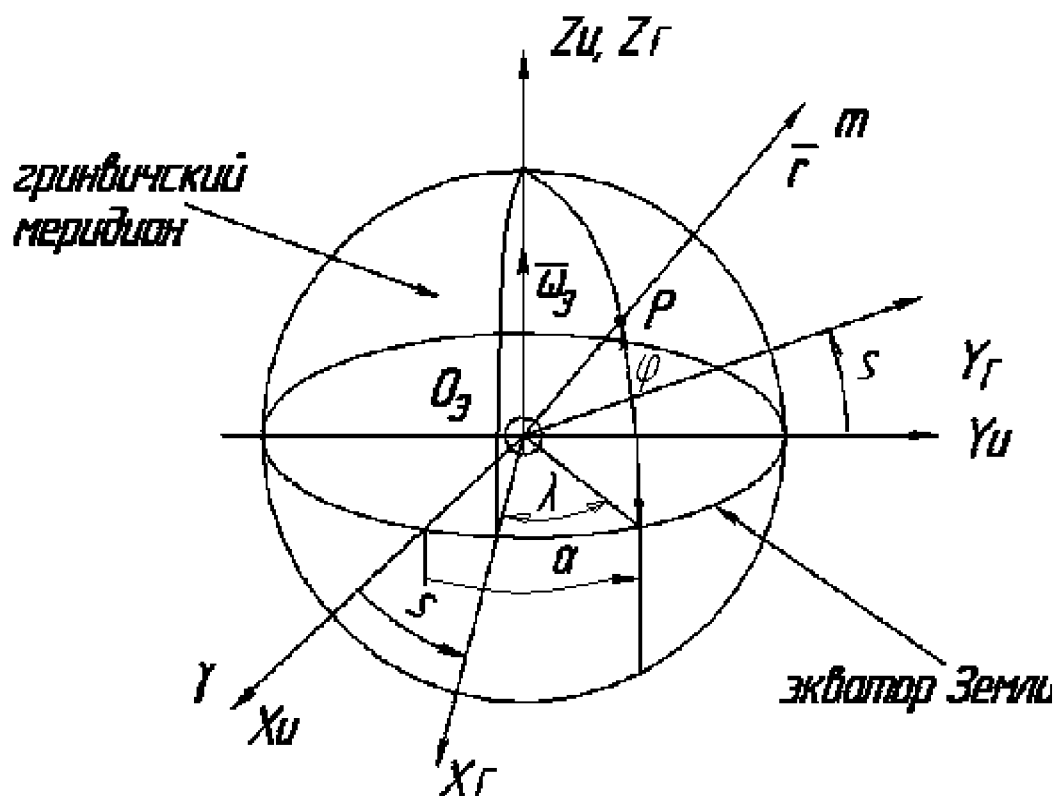


Рис.2. Геоцентрическая экваториальная система координат

Геоцентрическая гринвичская система координат $(O_3, X_Г, Y_Г, Z_Г)$ – это неинерциальная вращающаяся система.

1.2.3 Топоцентрические системы координат

Земная географическая система координат $(O_с, X_0, Y_0, Z_0)$ является неинерциальной системой координат и показана на рис.3

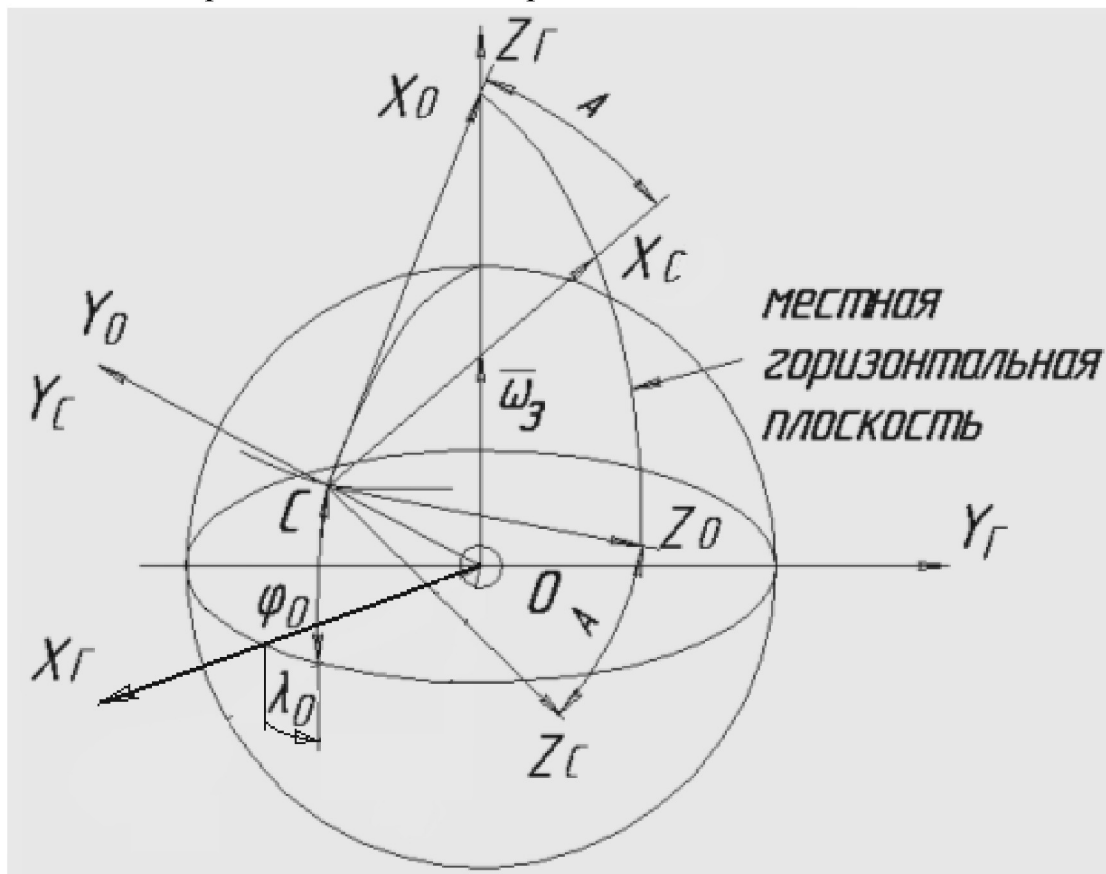


Рис.3. Земная географическая система координат.

Здесь начало координат - точка старта C или стартовая позиция (т.е. космодром); ось X_0C (основное направление) - направлена по касательной к меридиану; ось Z_0C - направлена по касательной к параллели; ось Y_0C – направлена перпендикулярно плоскости Z_0CX_0 ; угол A – азимут запуска (стрельбы).

Земная стартовая система координат $(O_с, X_с, Y_с, Z_с)$ является неинерциальной системой координат и показана на рис.3. Стартовая система координат повернута относительно географической системы координат на угол азимута стрельбы.

1.2.4 Объектоцентрические системы координат

Нормальная система координат $(0, X_g, Y_g, Z_g)$ представлена на рис.4.

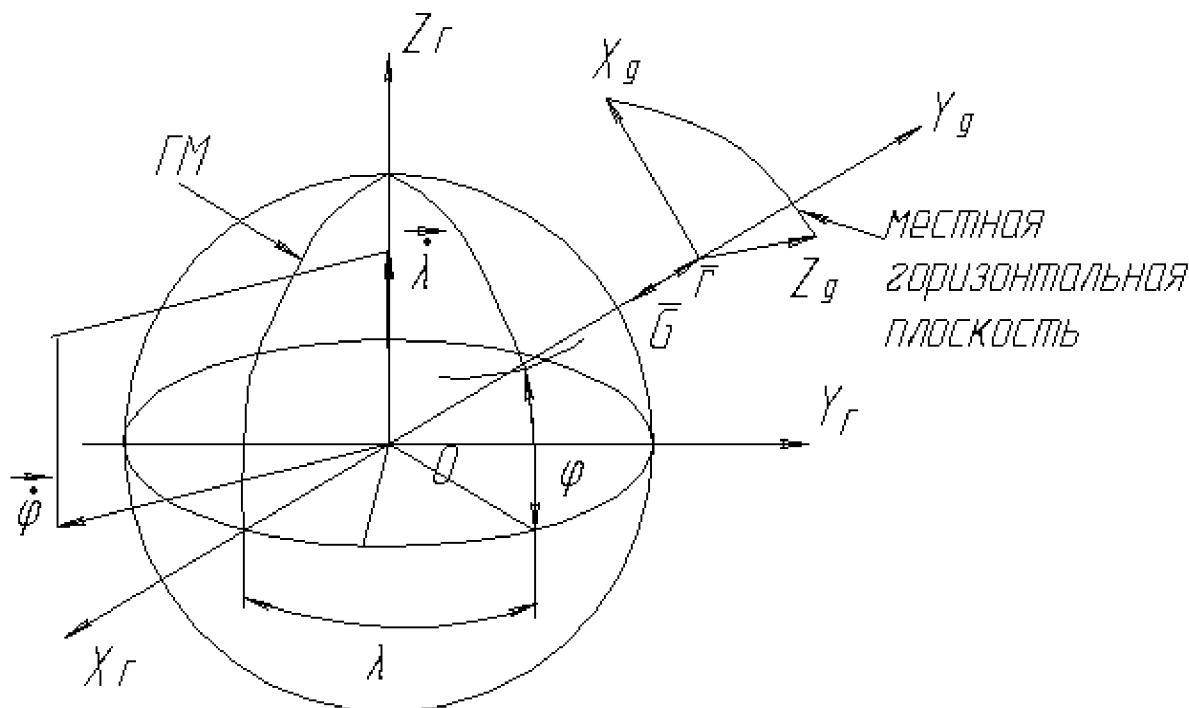


Рис.4. Нормальная система координат.

Здесь ось OX_g параллельна касательной к меридиану; ось OZ_g параллельна касательной к параллели; ось OY_g направлена перпендикулярно плоскости $Z_g OX_g$; $\vec{\lambda}$ - вектор угловой скорости, обусловленный изменением долготы ЛА; $\vec{\phi}$ - вектор угловой скорости, обусловленной изменением широты ЛА; $\vec{\omega}_o = \vec{\lambda} + \vec{\phi}$ - кинематическое уравнение угловой скорости вращения нормальной системы координат

На ЛА действуют сила тяги $\vec{P}$, сила притяжения $\vec{G}$, $\vec{R}_a$ - аэродинамическая сила.

В нормальной системе координат сила притяжения задается с наивысшей точностью

$$\begin{bmatrix} \vec{G}_{\vec{A}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{\vec{A}} \cdot x_{\vec{a}} \\ G_{\vec{A}} \cdot x_{\vec{a}} \\ G_{\vec{A}} \cdot z_{\vec{a}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{bmatrix} - \text{вектор-столбец силы притяжения Земли.}$$

Связанная система координат $(0, X, Y, Z)$ показана на рис.5.

Эта система координат обычно используется при изучении движения ЛА вокруг центра масс.

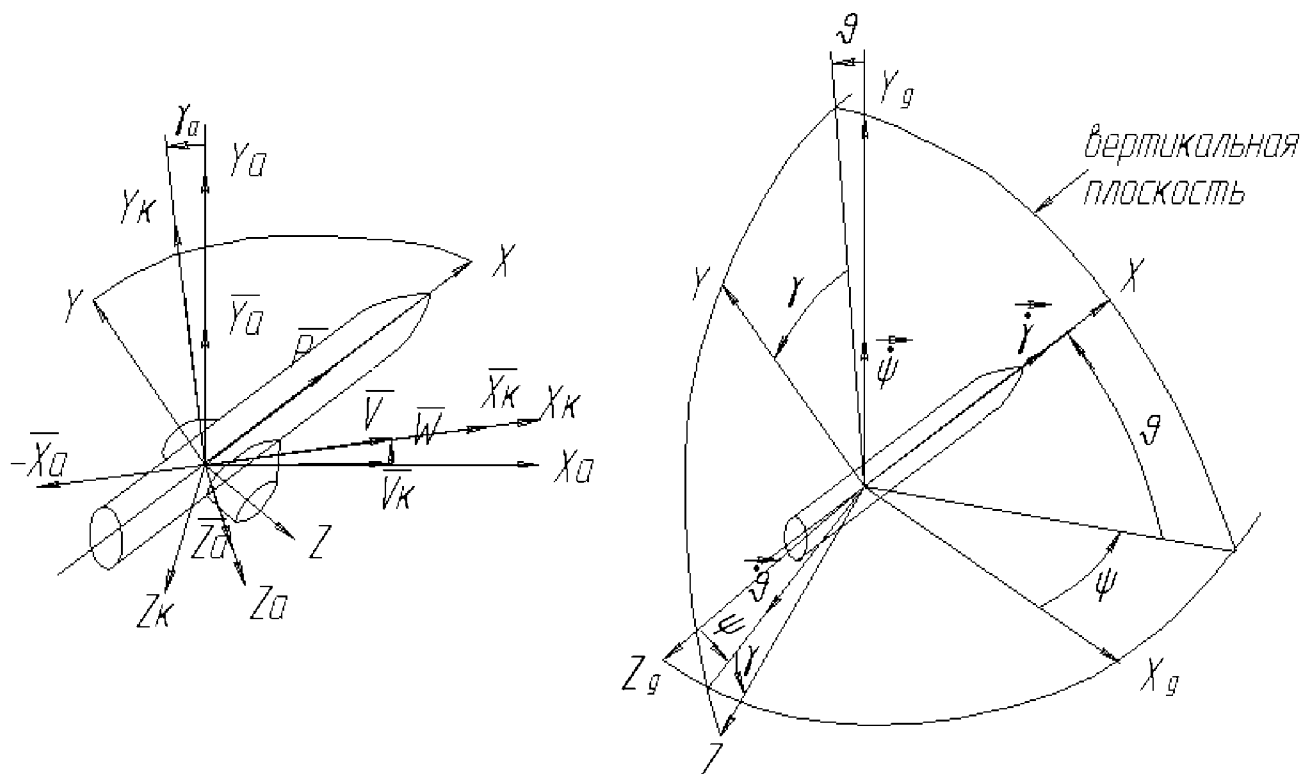


Рис.5. Связанная система координат.

Здесь ψ , ν , γ – соответственно, углы рысканья, тангажа, крена; $\vec{\nu}$ – вектор угловой скорости по тангажу; $\vec{\psi}$ – вектор угловой скорости по рысканью; $\vec{\gamma}$ – вектор угловой скорости по крену; $\vec{\omega} = \vec{\psi} + \vec{\nu} + \vec{\gamma}$ – кинематическое уравнение вращательного движения летательного аппарата.

В связанной системе координат сила тяги задается с наивысшей точностью

$$\begin{bmatrix} \bar{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \text{вектор-столбец силы тяги.}$$

Скоростная (аэродинамическая) система координат $(0, X_a, Y_a, Z_a)$ представлена на рис.6, где можно видеть взаимную ориентацию со связанной системой координат.

Здесь α – угол атаки; β – угол скольжения; $\vec{V}$ – воздушная скорость; Y_a – аэродинамическая подъемная сила; X_a – аэродинамическая сила лобового сопротивления; Z_a – боковая аэродинамическая сила.

В скоростной системе координат аэродинамическая сила задается с наивысшей точностью

$$\vec{R}_a = -\vec{X}_a + \vec{Y}_a + \vec{Z}_a$$

$$\begin{bmatrix} \vec{R}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -X_a \\ Y_a \\ Z_a \end{bmatrix} - \text{вектор-столбец аэродинамической силы}$$

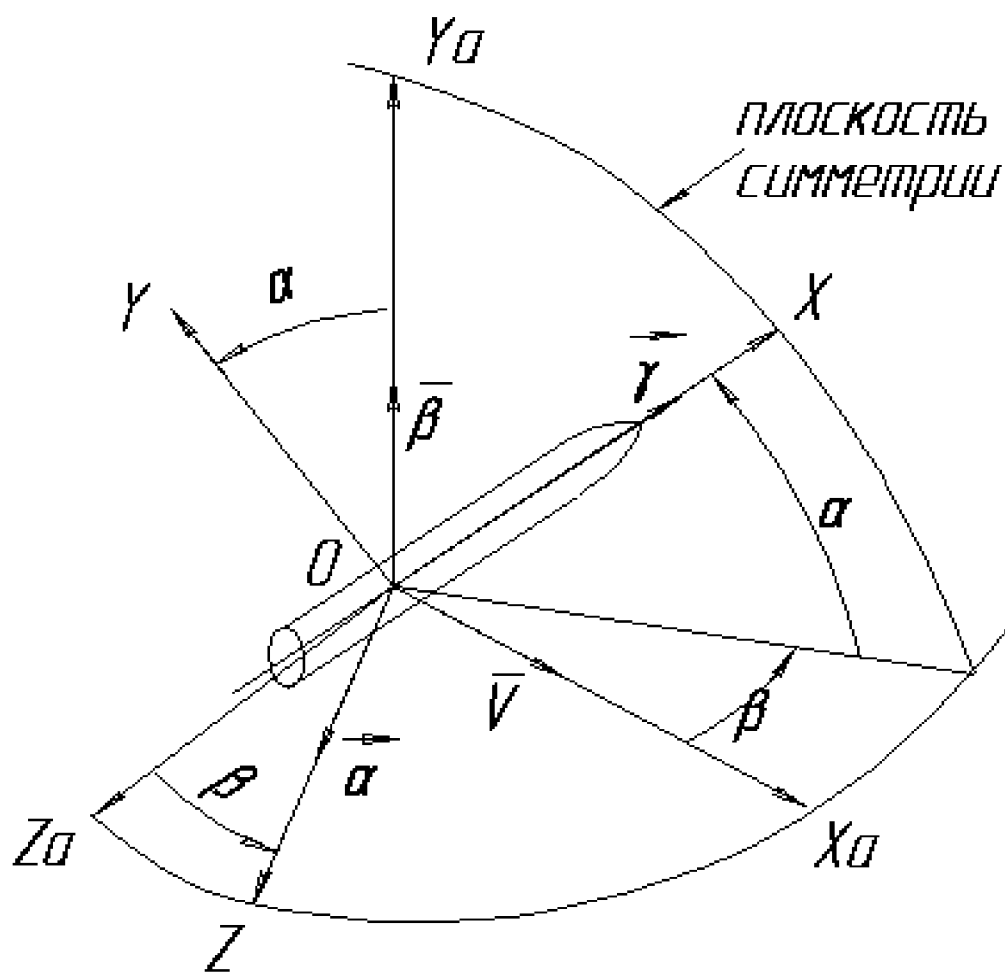


Рис.6. Скоростная (аэродинамическая) система координат.

Траекторная система координат $(0, X_k, Y_k, Z_k)$ показана на рис.7 и в данном курсе является основной системой координат.

$\vec{V}_k$ - скорость ЛА по траектории; $\vec{W}$ - скорость ветра; γ_a - аэродинамический угол крена; ψ_k - угол курса; Θ - угол наклона траектории; $\dot{\vec{\psi}}_k$ - угловая скорость курса; $\dot{\vec{\Theta}}$ - угловая скорость наклона траектории; $\vec{\omega}_{kg} = \dot{\vec{\psi}}_k + \dot{\vec{\Theta}}$ - векторное кинематическое уравнение движения.

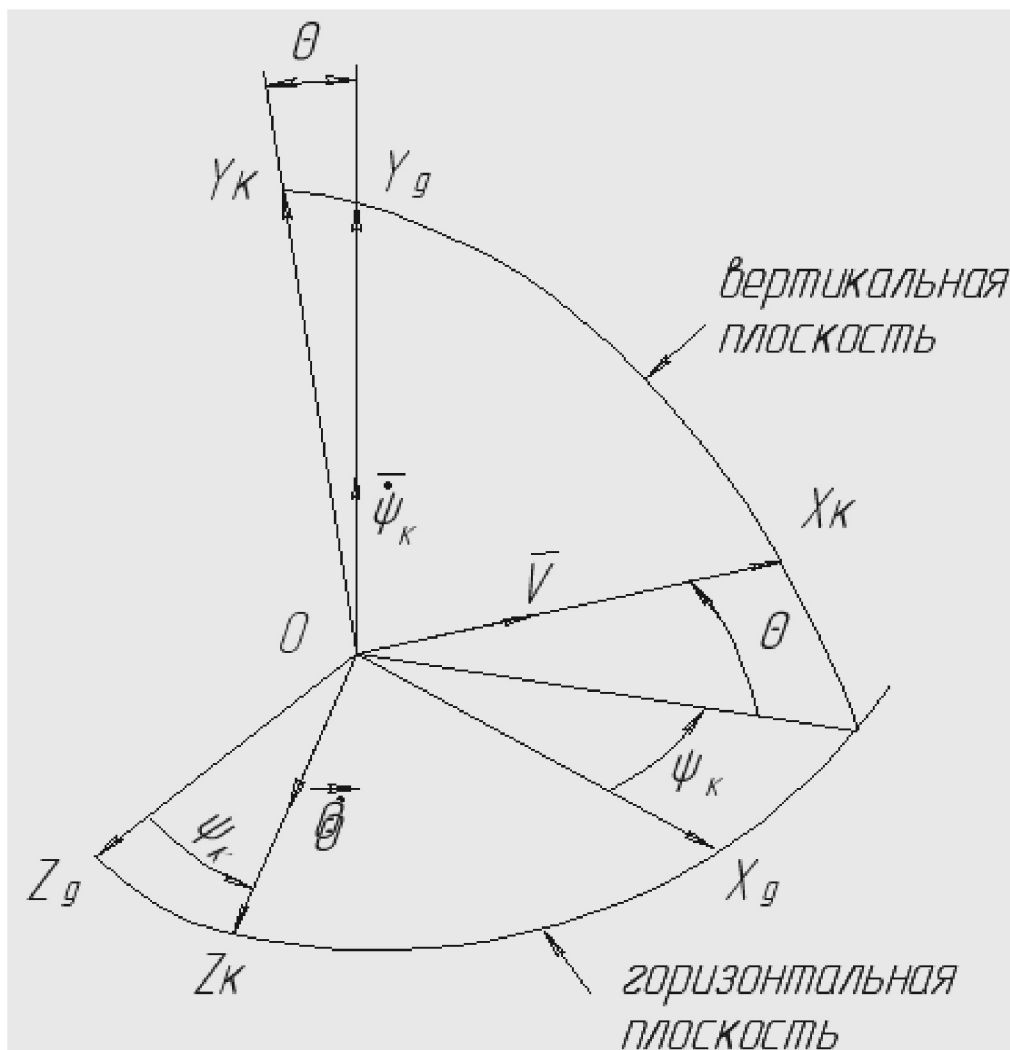


Рис.7. Траекторная система координат.

1.2.5 Пересчет из одной системы координат в другую

Задача заключается в пересчете проекций вектора из одной системы координат в другую.

Рассмотрим это на примере пересчета из нормальной системы координат в связанную систему координат (рис.8)

$$\bar{a}(a_{xg} \cdot \bar{i}_a + a_{yg} \cdot \bar{j}_a + a_{zg} \cdot \bar{k}_a)$$

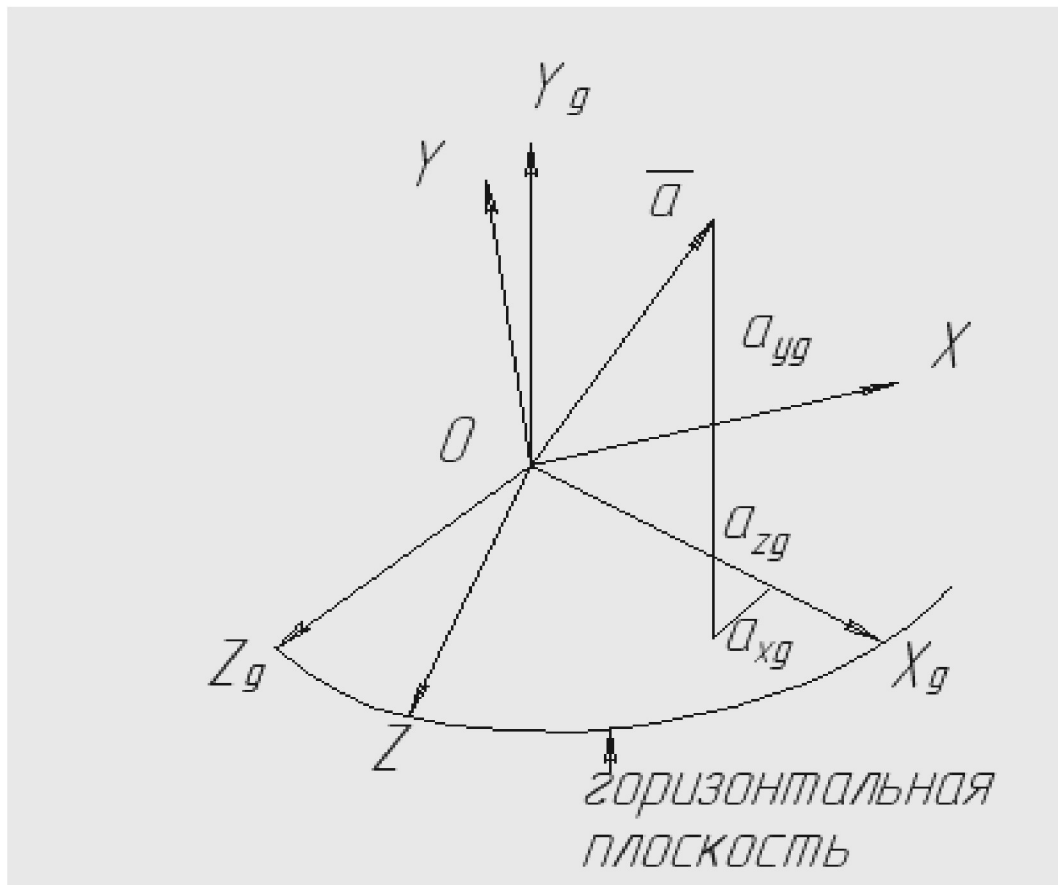


Рис.8. Вектор $\bar{a}(a_{xg}, a_{yg}, a_{zg})$

$$[\bar{a}]_{\tilde{n}\tilde{a}} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}; \quad [\bar{a}]_g = \begin{bmatrix} a_{x\tilde{a}} \\ a_{y\tilde{a}} \\ a_{z\tilde{a}} \end{bmatrix}$$

$$[\bar{a}]_{\tilde{n}\tilde{a}} = [A^{X\tilde{X}g}] \cdot [\bar{a}]_g$$

$$\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{xg} \\ a_{yg} \\ a_{zg} \end{bmatrix},$$

где

$$\alpha_{11} = \cos(x_g^? x_g), \alpha_{21} = \cos(y_g^? x_g), \alpha_{31} = \cos(z_g^? x_g)$$

$$\alpha_{12} = \cos(x_g^? y_g), \alpha_{22} = \cos(y_g^? y_g), \alpha_{32} = \cos(z_g^? y_g)$$

$$\alpha_{13} = \cos(x_g^? z_g), \alpha_{23} = \cos(y_g^? z_g), \alpha_{33} = \cos(z_g^? z_g)$$

Матрица перехода от одной системы координат к другой определяется перемножением матриц элементарных поворотов, взятых в последовательности, противоположной последовательности этих поворотов (рис.9).

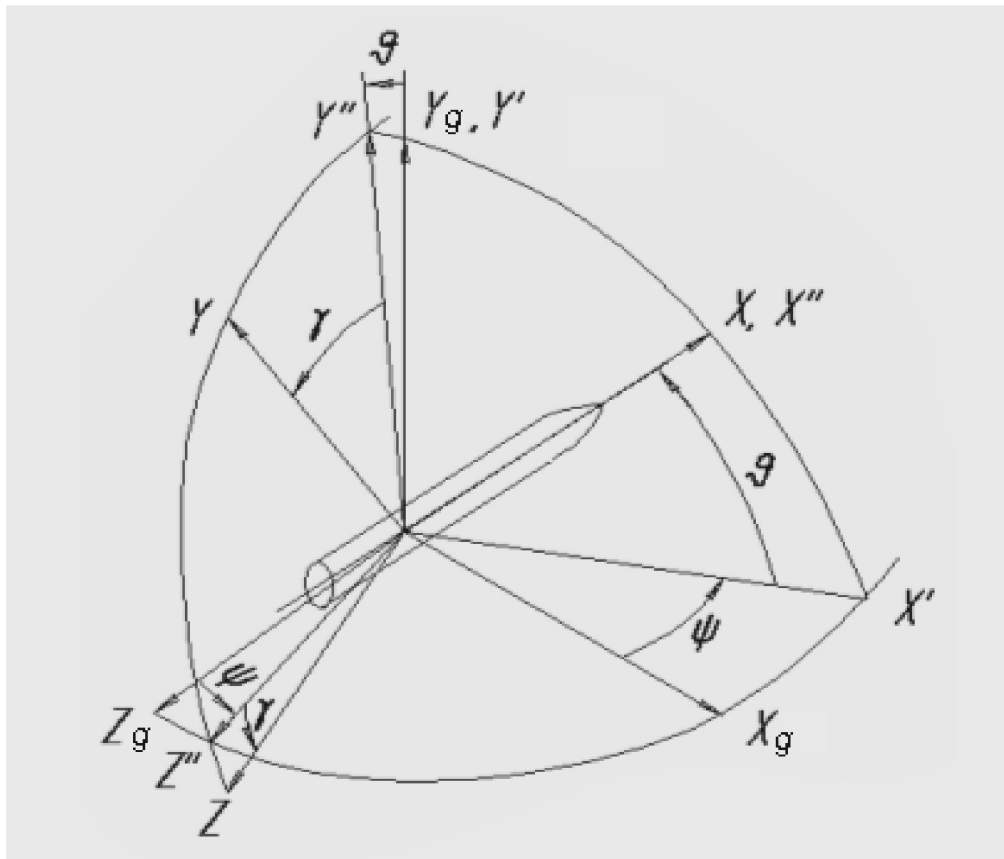


Рис.9. Переход от одной системы координат к другой

Совместим связанную систему координат с нормальной системой координат. Поворот системы координат на один угол называется элементарным поворотом.

Осуществляется последовательность элементарных поворотов: первый поворот - на угол ψ , второй поворот - на угол υ , третий поворот - на угол γ .

$[A^{XX_s}] = [A_\gamma] \cdot [A_\upsilon] \cdot [A_\psi]$ - матрица перехода

$$[A_\psi] = \begin{bmatrix} \cos \psi & 0 & -\sin \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \psi & 0 & \cos \psi \end{bmatrix} \text{ - поворот на угол } \psi$$

$$[A_\upsilon] = \begin{bmatrix} \cos \upsilon & \sin \upsilon & 0 \\ -\sin \upsilon & \cos \upsilon & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ - поворот на угол } \upsilon$$

$$[A_\gamma] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & \sin \gamma \\ 0 & -\sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix} \text{ - поворот на угол } \gamma$$

$$[A_\gamma] \cdot [A_\nu] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & \sin \gamma \\ 0 & -\sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \nu & \sin \nu & 0 \\ -\sin \nu & \cos \nu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \nu & \sin \nu & 0 \\ -\sin \nu \cdot \cos \gamma & \cos \nu \cdot \cos \gamma & \sin \gamma \\ \sin \nu \cdot \sin \gamma & -\cos \nu \cdot \sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix}$$

Результирующая матрица перехода принимает вид

$$[A^{XX_g}] = \begin{bmatrix} \cos \nu & \sin \nu & 0 \\ -\sin \nu \cdot \cos \gamma & \cos \nu \cdot \cos \gamma & \sin \gamma \\ \sin \nu \cdot \sin \gamma & -\cos \nu \cdot \sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \psi & 0 & -\sin \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \psi & 0 & \cos \psi \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \nu \cdot \cos \psi & \sin \nu & -\sin \psi \cdot \cos \nu \\ -\sin \nu \cdot \cos \gamma \cdot \cos \psi & \cos \nu \cdot \cos \gamma & \sin \nu \cdot \cos \gamma \cdot \sin \psi + \sin \gamma \cdot \cos \psi \\ \sin \nu \cdot \sin \gamma \cdot \cos \psi + \sin \psi \cdot \cos \gamma & -\cos \nu \cdot \sin \gamma & -\sin \psi \cdot \sin \nu \cdot \sin \gamma + \cos \gamma \cdot \cos \psi \end{bmatrix}$$

1.3 Уравнения движения летательного аппарата

Предположим, что S – твердая, не деформируемая оболочка (рис.10). Уравнение движения ЛА (системы переменного состава) записывается как уравнение движения твердого тела, в которое входит масса затвердевшего тела, если к силам, действующим на летательный аппарат, добавить вариационные силы и Кориолисовы силы инерции и момент от этой силы, чисто реактивную силу и момент.

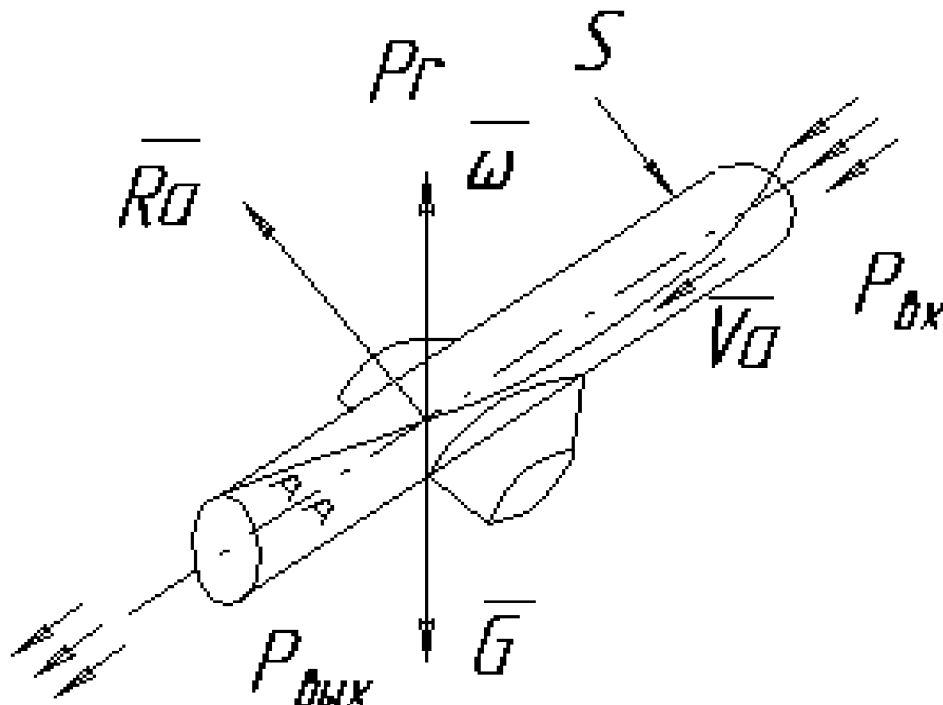


Рис.10. Тело переменного состав

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{F}^e + \vec{F}_p + \vec{F}_{вар} + \vec{F}_{кор}$$

$$\frac{d\vec{K}_0}{dt} = \vec{M}^e + \vec{M}_{Fp} + \vec{M}_{вар} + \vec{M}_{кор}$$

Здесь

$\vec{F}_p, \vec{M}_{Fp}$ - реактивная сила и момент, созданные присоединением и отбрасыванием масс; $\vec{F}_{вар}, \vec{M}_{вар}$ - вариационные силы и моменты, вызванные нестационарным движением частиц в канале двигательной установки (в силу малости ими пренебрегаем); $\vec{F}_{кор}, \vec{M}_{кор}$ - кориолисовы силы и моменты, возникающие из-за относительного движения частиц внутри канала двигательной установки при вращении ЛА (в силу малости ими пренебрегаем).

При испытаниях двигателя измеряются чисто реактивные силы давления и статические силы, вызванные внешним давлением, которые при суммировании дают силу тяги

$$\vec{P} = \vec{F}_p + \vec{F}_{см.д.}$$

Уравнения движения ЛА в инерциальной системе координат имеют вид

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d\vec{V}^a}{dt} &= \vec{F}^e + \vec{P} \\ \frac{d\vec{K}_0}{dt} &= \vec{M}^e + \vec{M}_p \end{aligned} \right\}.$$

При составлении системы уравнений движений для неинерциальной системы координат, добавляются переносная и кориолисова силы инерции, вызванные вращением системы отсчета.

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d\vec{V}}{dt} &= \vec{F}^e + \vec{P} + \vec{F}_{ин}^e + \vec{F}_{ин}^{кор} \\ \frac{d\vec{K}_0}{dt} &= \vec{M}^e + \vec{M}_p + \vec{M}_{ин}^e + \vec{M}_{ин}^{кор} \end{aligned} \right\}$$

Проекции вектора на оси произвольной системы координат записываются в виде:

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{d}{dt}(a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) = \frac{da_x}{dt} \vec{i} + \frac{da_y}{dt} \vec{j} + \frac{da_z}{dt} \vec{k} + a_x \frac{d\vec{i}}{dt} + a_y \frac{d\vec{j}}{dt} + a_z \frac{d\vec{k}}{dt} = \frac{da'}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{a}$$

$$\left[\begin{aligned} \frac{d\vec{i}}{dt} &= \vec{\omega} \times \vec{i} \\ \frac{d\vec{j}}{dt} &= \vec{\omega} \times \vec{j} \\ \frac{d\vec{k}}{dt} &= \vec{\omega} \times \vec{k} \end{aligned} \right] \quad \boxed{\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{d\vec{a}'}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{a}}$$

Тогда для вектора скорости и вектора кинетического момента $\vec{K}$ можно записать векторные уравнения в подвижной системе координат

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d'\vec{V}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{V}$$

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \frac{d'\vec{K}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{K}_0$$

Дифференциальные уравнения движения центра масс в проекциях на оси произвольной подвижной системы отсчета примут вид:

$$\left. \begin{aligned} m \left(\frac{dV_x}{dt} + \omega_y V_z - \omega_z V_y \right) &= \sum F_{ix} \\ m \left(\frac{dV_y}{dt} + \omega_z V_x - \omega_x V_z \right) &= \sum F_{iy} \\ m \left(\frac{dV_z}{dt} + \omega_x V_y - \omega_y V_x \right) &= \sum F_{iz} \end{aligned} \right\}$$

где $\vec{\omega}(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ - угловая скорость подвижной системы координат.

Дифференциальные уравнения движения вокруг центра масс в проекциях на главные центральные оси инерции запишутся в виде:

$$\vec{K}_0 = I_x \omega_x \vec{i}_{zl} + I_y \omega_y \vec{j}_{zl} + I_z \omega_z \vec{k}_{zl}$$

$$I_x \frac{d\omega_x}{dt} + (I_z - I_y) \cdot \omega_y \cdot \omega_z = \sum M_{ix}$$

$$I_y \frac{d\omega_y}{dt} + (I_x - I_z) \cdot \omega_x \cdot \omega_z = \sum M_{iy}$$

$$I_z \frac{d\omega_z}{dt} + (I_y - I_x) \cdot \omega_y \cdot \omega_x = \sum M_{iz}$$

X, Y, Z – главные центральные оси инерции.

Для осесимметричных или имеющих плоскость симметрии ЛА главные центральные оси совпадают со связанными осями.

Векторные уравнения движение центра масс ЛА относительно неинерциальной гравитационной системы координат имеют вид

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{P} + \vec{R}_a + \underbrace{m\vec{g} + \vec{F}_{ин}^e}_{\text{сила тяжести } m\vec{g}} + \vec{F}_{ин}^{кор} = \sum \vec{F}_i$$

Запишем уравнения движения ЛА в проекциях на оси траекторной системы координат (рис.11)

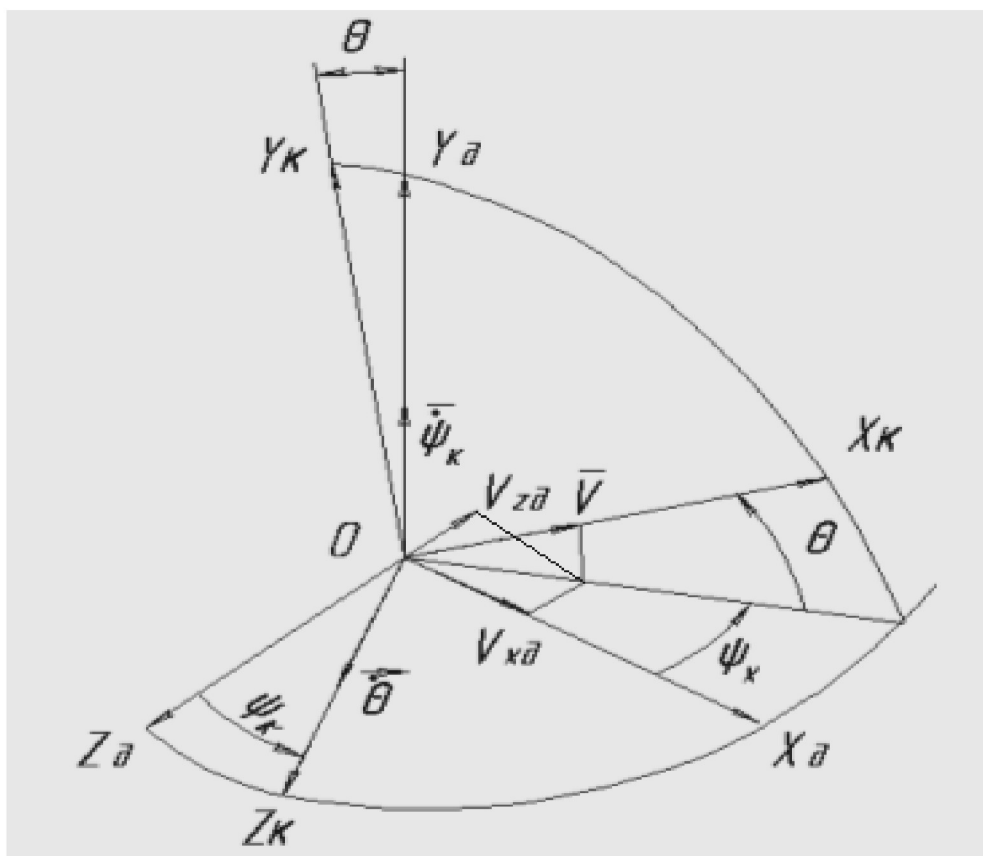


Рис.12. Траекторная система координат

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d'\vec{V}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{V}$$

Спроектировав векторное уравнение движения, получим

$$m \left(\frac{dV_{xk}}{dt} + \omega_{yk} V_{zk} - \omega_{zk} V_{yk} \right) = \sum F_{ixk}$$

$$m \left(\frac{dV_{yk}}{dt} + \omega_{zk} V_{xk} - \omega_{xk} V_{zk} \right) = \sum F_{iyk}$$

$$m \left(\frac{dV_{zk}}{dt} + \omega_{xk} V_{yk} - \omega_{yk} V_{xk} \right) = \sum F_{izk}$$

Так как $V_{xk} = V$, $V_{yk} = V_{zk} = 0$,

$$\text{то } \left. \begin{aligned} m \frac{dV}{dt} &= \sum F_{ixk} \\ m V \omega_{zk} &= \sum F_{iyk} \\ -m V \omega_{yk} &= \sum F_{izk} \end{aligned} \right\}$$

Составим кинематические уравнения (рис.12).

$$\vec{\omega}_a = \vec{\lambda} + \vec{\phi}, \quad \vec{\omega}_{ea} = \vec{\phi} + \vec{\psi}_k, \quad \vec{\omega}_k = \vec{\omega}_a + \vec{\omega}_{\alpha a} \text{ или}$$

$$\vec{\omega}_k = \vec{\lambda} + \vec{\phi} + \vec{\psi}_k + \vec{\theta}$$

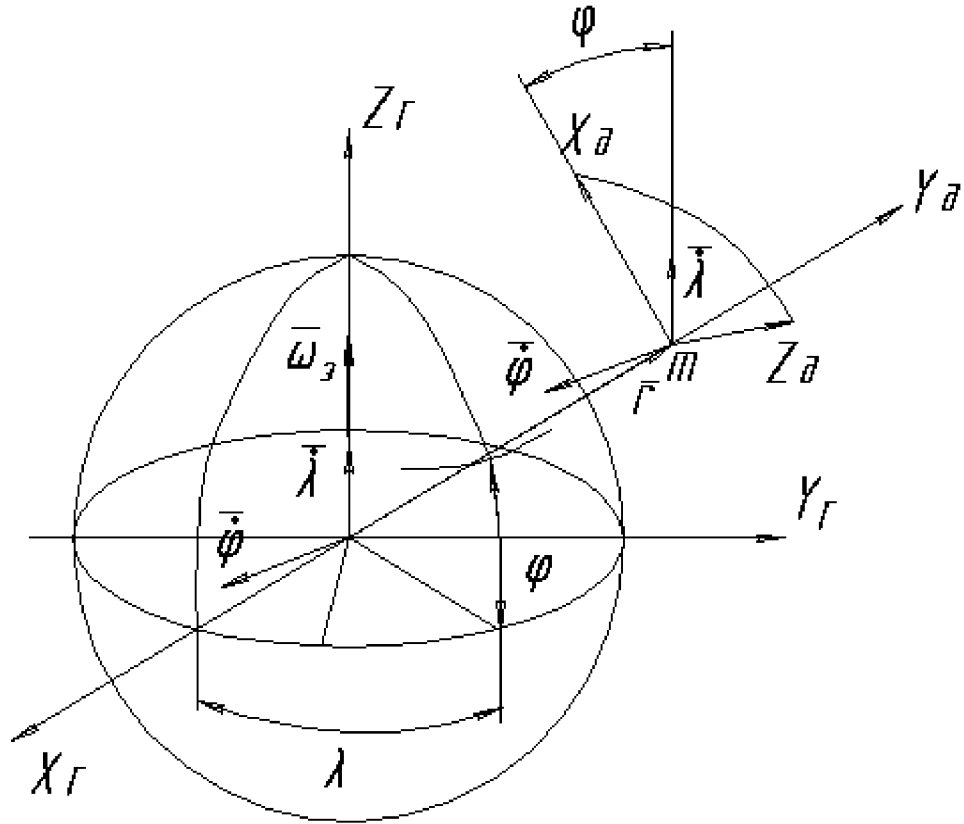


Рис.11. Нормальная система координат

Для определения проекций угловых скоростей $\vec{\lambda}, \vec{\phi}$ воспользуемся матричным методом пересчёта

$$\begin{bmatrix} \left(\vec{\lambda} \right)_{xk} \\ \left(\vec{\lambda} \right)_{yk} \\ \left(\vec{\lambda} \right)_{zk} \end{bmatrix} = [A^{x_k, x_a}] \cdot \begin{bmatrix} \dot{\lambda} \cos \varphi \\ \dot{\lambda} \sin \varphi \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} \left(\vec{\phi} \right)_{xk} \\ \left(\vec{\phi} \right)_{yk} \\ \left(\vec{\phi} \right)_{zk} \end{bmatrix} = [A^{x_k, x_a}] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot{\phi} \end{bmatrix}$$

где

$$\left(\vec{\lambda} \right)_{yk} = \dot{\lambda} (-\cos \psi_k \cdot \sin \theta \cdot \cos \varphi + \cos \theta \cdot \sin \varphi), \quad \left(\vec{\lambda} \right)_{zk} = \dot{\lambda} \sin \psi_k \cos \varphi, \quad \left(\vec{\lambda} \right)_{xk} = -\dot{\phi} \sin \psi_k \cos \theta,$$

$$\left(\dot{\theta} \right)_{yk} = 0, \quad \left(\dot{\theta} \right)_{zk} = \dot{\theta}, \quad \left(\vec{\lambda} \right)_{zk} = -\dot{\phi} \sin \psi_k$$

$$\begin{aligned}\left(\vec{\dot{\psi}}_k\right)_{yk} &= \dot{\psi}_k \cos \theta \\ \left(\vec{\dot{\psi}}_k\right)_{zk} &= 0 \\ \omega_{yk} &= \dot{\lambda}(-\cos \psi_k \cdot \sin \theta \cdot \cos \varphi + \cos \theta \cdot \sin \varphi) - \dot{\varphi} \sin \psi_k \\ \sin \dot{\theta} + \dot{\psi}_k \cos \theta, \quad \omega_{zk} &= \dot{\lambda} - \sin \psi_k \cos \varphi - \dot{\varphi} \cos \psi_k + \dot{\theta}\end{aligned}$$

После преобразований записываем кинематические уравнения движения

$$\left. \begin{aligned}\dot{\varphi} &= \frac{V_{x\dot{\theta}}}{r} = \frac{V \cdot \cos \theta \cdot \cos \psi_k}{r} \\ \dot{\lambda} &= -\frac{V_{z\dot{\theta}}}{r \cos \varphi} = -\frac{V \cos \theta \sin \psi_k}{r \cos \varphi}\end{aligned} \right\}$$

Подставляя выражения

$$\omega_{yk} = \frac{V \cos \theta \sin \psi_k}{r \cos \varphi} \cos \psi_k \sin \theta \cos \varphi - \frac{V \cos \theta \sin \psi_k}{r \cos \varphi} \cos \theta \sin \varphi - \frac{V \cos \theta \sin \psi_k}{r \cos \varphi} \sin \psi_k \sin \theta + \dot{\psi}_k \cos \theta$$

$$\omega_{yk} = \dot{\psi}_k \cos \theta - \frac{V \cos^2 \theta \sin \psi_k \operatorname{tg} \varphi}{r},$$

$$\omega_{zk} = -\frac{V \cos \theta}{r} + \dot{\theta}$$

записываются динамические уравнения движения

$$m\dot{V} = \sum F_{ixk}$$

$$mV\dot{\theta} = \sum F_{iyk} + m \frac{V^2 \cos \theta}{r}$$

$$-mV \cos \theta \dot{\psi}_k = \sum F_{izk} - \frac{mV^2 \cos^2 \theta \sin \psi_k \operatorname{tg} \varphi}{r}$$

Выполняем проектирование внешних сил, действующих на ЛА на оси траекторной системы координат

$$\begin{bmatrix} \sum F_{xk} \\ \sum F_{yk} \\ \sum F_{zk} \end{bmatrix} = [A^{x_k x}] \cdot \begin{bmatrix} P \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + [A^{x_k x_a}] \cdot \begin{bmatrix} -x_a \\ y_a \\ z_a \end{bmatrix} + [A^{x_k x_\theta}] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{un, xk}^{kop} \\ F_{un, yk}^{kop} \\ F_{un, zk}^{kop} \end{bmatrix}$$

$$\vec{F}_{un}^{kop} = -m\vec{W}_k = -2m(\vec{\omega}_3 \times \vec{V}) = -2m \begin{vmatrix} \vec{i}_k & \vec{j}_k & \vec{k}_k \\ \omega_{3xk} & \omega_{3yk} & \omega_{3zk} \\ V & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2mV\omega_{3zk}\vec{j} + 2mV\omega_{3yk}\vec{k}$$

Окончательно уравнения движения в траекторной системе координат примут вид

- динамические уравнения движения

$$m\dot{V} = P \cos \alpha \cos \beta - X_a - mg \sin \theta$$

$$mV\dot{\theta} = P(\cos \alpha \sin \beta \sin \gamma_a + \sin \alpha \cos \gamma_a) + Y_a \cos \gamma_a - Z_a \sin \gamma_a - mg \cos \theta - 2mV\omega_{3zk} + \frac{mV^2 \cos \theta}{r} 3$$

$$\begin{aligned}-mV \cos \theta \dot{\psi}_k &= P(-\cos \alpha \sin \beta \cos \gamma_a + \sin \alpha \sin \gamma_a) + Y_a \sin \gamma_a + Z_a \cos \gamma_a + 2mV\omega_{3yk} - \\ &- \frac{m \cdot V^2 \cdot \sin \psi_k \cdot \cos^2 \theta \cdot \tan \varphi}{r}\end{aligned}$$

- кинематические уравнения движения.

$$\dot{\varphi} = \frac{V \cos \theta \cos \psi_k}{r}, \quad \dot{\lambda} = -\frac{V \cos \theta \sin \psi_k}{r}, \quad \dot{H} = V \sin \theta$$

Вектором перегрузки $\vec{n}$ называется отношение суммы внешних сил, исключая силу тяжести (сил тяги и аэродинамической силы), к силе тяжести

$$\vec{n} = \frac{\vec{P} + \vec{R}_a}{mg} \text{ -перегрузка}$$

Проекция вектор перегрузки

- на оси траекторной системы координат

$$n_{xk} = \frac{P \cos \alpha \cos \beta - X_a}{mg}$$

$$n_{yk} = \frac{P(\cos \alpha \sin \beta \sin \gamma_a + \sin \alpha \cos \gamma_a) + Y_a \cos \gamma_a - Z_a \sin \gamma_a}{mg}$$

$$n_{zk} = \frac{P(-\cos \alpha \sin \beta \cos \gamma_a + \sin \alpha \sin \gamma_a) + Y_a \sin \gamma_a - Z_a \cos \gamma_a}{mg}$$

- на оси скоростной системы координат:

$$n_{xa} = \frac{P \cos \alpha \cos \beta - X_a}{mg}$$

$$n_{ya} = \frac{P \sin \alpha + Y_a}{mg}$$

$$n_{za} = \frac{-P \cos \alpha \sin \beta + Z_a}{mg}$$

- на е оси связанной системы координат:

$$\begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = [A^{XX_k}] \cdot \begin{bmatrix} n_{xa} \\ n_{ya} \\ n_{za} \end{bmatrix}$$

Уравнения движения в перегрузках (в безразмерной форме) могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{g} \dot{V} &= n_{xk} - \sin \theta \\ \frac{V}{g} \dot{\theta} &= n_{yk} - \cos \theta - 2 \frac{V}{g} \omega_{zk} + \frac{V^2 \cos \theta}{gr} \\ -\frac{V \cos \theta}{g} \dot{\psi}_k &= n_{zk} + \frac{2V}{g} \omega_{yk} - \frac{V^2 \sin \psi_k \cos^2 \theta \cdot \tan \varphi}{gr} \end{aligned}$$

При системном анализе космических миссий моделирование движения является главным средством ответа на вопрос об их возможности и реализуемости.

2. Невозмущенное движение космического аппарата

Рассматривается движение летательного аппарата как материальной точки в поле тяготения одного небесного тела (Земли), создающего центральное поле притяжения.

Принимаются следующие допущения:

- притягивающее тело имеет сферическую форму и сферическое распределение плотности (рис.12);
- масса ЛА ничтожно мала по сравнению с массой Земли (ЛА не оказывает влияния на движение Земли);
- пренебрегается действием возмущающих сил: гравитационными возмущениями, сопротивлением воздуха, силами светового давления, электромагнитными силами.
- применяется сферическая система координат

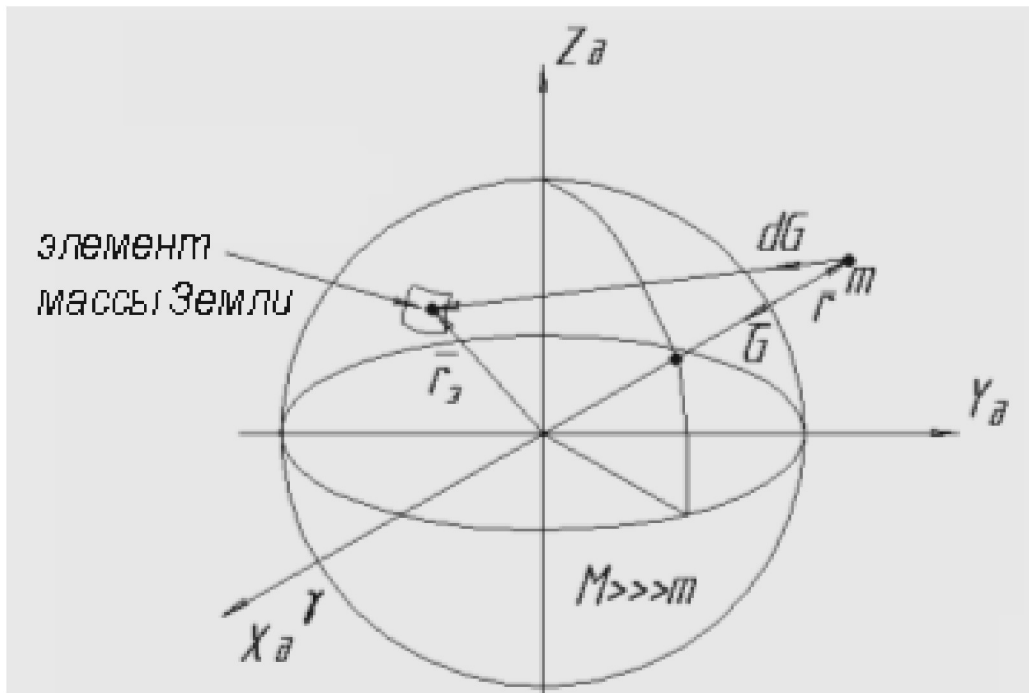


Рис.12. Модель сферической Земли

2.1. Уравнение движения космического аппарата в поле центральной силы

Запишем уравнение движения тела в центральном поле притяжения

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{G}_r; \quad \vec{G}_r = -\gamma \frac{Mm}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} = -\frac{m\mu}{r^3} \cdot \vec{r},$$

где γ – универсальная постоянная тяготения, μ – гравитационный параметр Земли,

$\vec{g}_r = -\frac{\mu}{r^3} \vec{r}$, - вектор ускорения притяжения.

Дифференциальное уравнение движения ЛА в векторной форме

$$\boxed{\frac{d\vec{V}}{dt} + \frac{M}{r^3} \vec{r} = 0}$$

где $\mu_{\oplus} = \gamma \cdot M_{\oplus} = 3,98602 \cdot 10^5 \text{ км}^3/\text{с}^2$

Дифференциальные уравнения движения в проекциях на оси координат инерциальной системы координат:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} + \frac{\mu}{r^3} x &= 0 \\ \ddot{y} + \frac{\mu}{r^3} y &= 0 \\ \ddot{z} + \frac{\mu}{r^3} z &= 0 \end{aligned} \right\}$$

где

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= f_1(t, C_1, \dots, C_6) \\ \dot{y} &= f_2(t, C_1, \dots, C_6) \\ \dot{z} &= f_3(t, C_1, \dots, C_6) \end{aligned} \right\} - \text{называются первыми интегралами;}$$

$$\left. \begin{aligned} x &= f_4(t, C_1, \dots, C_6) \\ y &= f_5(t, C_1, \dots, C_6) \\ z &= f_6(t, C_1, \dots, C_6) \end{aligned} \right\} - \text{называются вторыми интегралами.}$$

Проинтегрировав дифференциальные уравнения в векторной форме можно получить три интеграла.

2.2 Основные интегралы уравнений движения

Интеграл энергии

Умножим скалярно векторное дифференциальное уравнение на вектор скорости

$$\vec{V} \frac{d\vec{V}}{dt} + \frac{\mu}{r^3} \left[\vec{r} \frac{d\vec{r}}{dt} \right] = 0$$

Учитывая, что

$$\vec{V} \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d\vec{V}^2}{dt} = \frac{1}{2} \frac{dV^2}{dt} = V \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{V^2}{2} \right)$$

$$\vec{r} \frac{d\vec{r}}{dt} = r \frac{dr}{dt}, \quad \frac{\mu}{r^3} r \frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt} \left(-\frac{\mu}{r} \right)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{V^2}{2} - \frac{\mu}{r} \right) = 0,$$

выполняем интегрирование и получаем

$$\frac{V^2}{2} - \frac{\mu}{r} = \frac{h}{2}, \text{ где } h - \text{константа.}$$

$$\boxed{V^2 - \frac{2\mu}{r} = h} - \text{называется интегралом энергии}$$

Первое слагаемое выражения представляет собой кинетическую энергию единицы массы тела, второе слагаемое - потенциальную энергию.

Таким образом, интеграл энергии выражает закон сохранения полной механической энергии в центральном поле притяжения: сумма кинетической и потенциальной энергии единицы массы тела в течение всего времени его движения остается постоянной.

Постоянная интеграла энергии h находится из начальных условий:

$$t = 0, r = r_0, V = V_0 \Rightarrow h = V_0^2 - \frac{2\mu}{r_0}$$

В зависимости от знака постоянной интеграла энергии орбита может быть замкнутой и незамкнутой.

Так как $V^2 = \frac{2\mu}{r} + h \geq 0$, то при $h \geq 0$ – орбита разомкнута, при $h < 0$: $\frac{2\mu}{r} - |h| \geq 0$,

$r \leq \frac{2\mu}{|h|}$ – орбита замкнута.

Интеграл площадей

Умножим векторно слева векторное дифференциальное уравнение движения на радиус-вектор $\vec{r}$:

$$\vec{r} \times \frac{d\vec{V}}{dt} + \frac{\mu}{r^3} (\vec{r} \times \vec{r}) = 0$$

$$\frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{V}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{V} + \vec{r} \times \frac{d\vec{V}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{V}) = 0$$

Проинтегрировав полученное выражение находим в векторной форме **интеграл площадей**

$$\boxed{\vec{r} \times \vec{V} = \vec{C}}$$

Интеграл площадей выражает закон сохранения момента количества движения в центральном поле притяжения.

Найдем величину векторной константы $\vec{C}$ интеграла площадей.

В скалярной форме интеграл площадей имеет вид (рис.

$$r \cdot V \sin \alpha = r \cdot V \cos \theta = C,$$

где θ – угол наклона вектора скорости к местному горизонту.

$\boxed{r \cdot V \cos \theta = C}$ – скалярная форма интеграла площадей.

Модуль константы интеграла площадей находится через начальные условия:

$$t = t_0, r = r_0, V = V_0, \theta = \theta_0$$

$$\underline{C = r_0 \cdot V_0 \cos \theta_0}$$

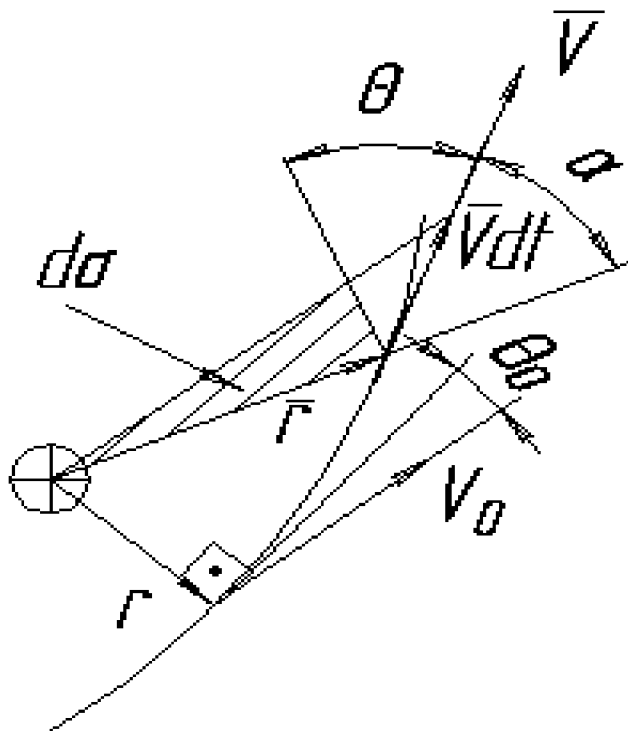


Рис.13 Графическая интерпретация интеграла площадей

Запишем интеграл площадей в координатной форме:

$$(\vec{r} \times \vec{V}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} y\dot{z} - \dot{y}z = C_1 \text{ (проекция константы } C \text{ на } O_x) \\ z\dot{x} - \dot{z}x = C_2 \text{ (проекция константы } C \text{ на } O_y) \\ x\dot{y} - \dot{x}y = C_3 \text{ (проекция константы } C \text{ на } O_z) \end{cases} \text{ - интеграл площадей в координатной форме.}$$

Умножив интеграл площадей на dt , получим

$$\vec{r} \times \vec{V} dt = \vec{C} dt$$

Откуда следует $2d\delta = C \cdot dt$

$C = 2 \frac{d\delta}{dt}$ - **второй закон Кеплера**, который гласит:

в центральном поле притяжения площадь, ометаемая радиусом-вектором движущейся точки за единицу времени, остается постоянной.

Из интеграла площадей также следует, что в центральном поле притяжения

движение ЛА происходит в одной и той же плоскости (два вектора $\vec{r}$ и $\vec{V}$ образуют неизменную плоскость движения).

Интеграл Лапласа

Умножим векторно справа векторное дифференциальное уравнение движения на векторную константу интеграла площадей

$$\left(\frac{d\vec{V}}{dt} \times \vec{C} \right) + \frac{\mu}{r^3} \left[\vec{r} \times \left(\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right) \right] = 0$$

Тогда после элементарных преобразований

$$\frac{d\vec{V}}{dt} \times \vec{C} = \frac{d}{dt} (\vec{V} \times \vec{C})$$

$$\frac{\mu}{r^3} \left[\vec{r} \times \left(\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right) \right] = \frac{\mu}{r^3} \left[\vec{r} \left(\vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \right) - \frac{d\vec{r}}{dt} (\vec{r} \cdot \vec{r}) \right] = \mu \left[\frac{1}{r^2} \frac{dr}{dt} \vec{r} - \frac{1}{r} \frac{d\vec{r}}{dt} \right] = \frac{d}{dt} \left(-\mu \frac{\vec{r}}{r} \right)$$

$$\frac{d}{dt} \left[(\vec{V} \times \vec{C}) - \frac{\mu}{r} \vec{r} \right] = 0$$

Получаем выражение, которое называется **интегралом Лапласа** в векторной форме

$$(\vec{V} \times \vec{C}) - \frac{\mu \cdot \vec{r}}{r} = \vec{f}$$

где $\vec{f}$ - векторная постоянная интеграла Лапласа (рис 14).

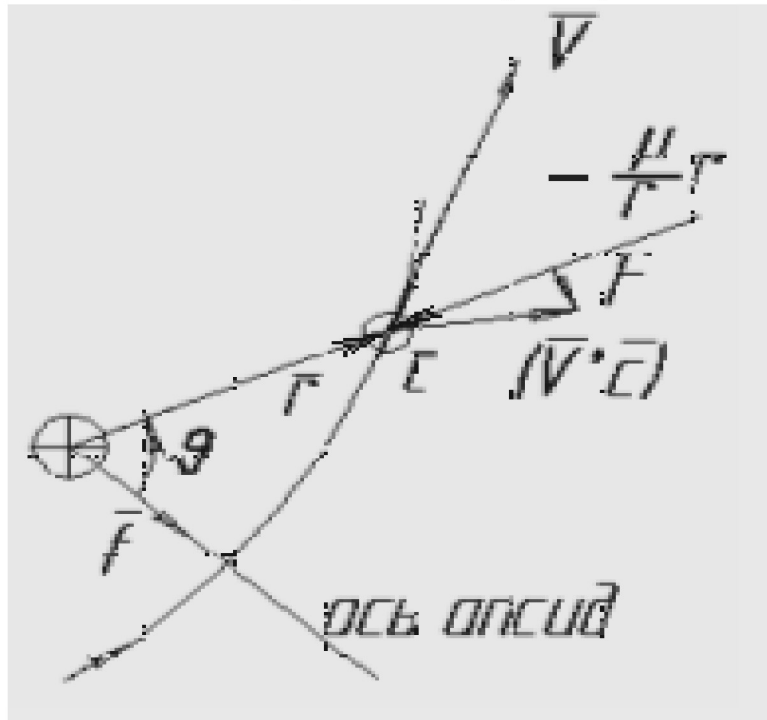


Рис.14 Графическое изображение интеграла Лапласа

Из интеграла Лапласа вытекает важное свойство движения в центральном поле притяжения: в плоскости движения существует некоторое неизменное направление, определяемое вектором Лапласа. Линия, проходящая через притягивающий центр параллельно вектору Лапласа, называется осью апсид и принимается за направление отсчета углового движения тела (угол истинной аномалии ν).

Так как $(\vec{V} \times \vec{C}) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} = (\dot{y} \cdot C_3 - \dot{z} \cdot C_2) \bar{i} + (\dot{z} \cdot C_1 - \dot{x} \cdot C_3) \bar{j} + (\dot{x} \cdot C_2 - \dot{y} \cdot C_1) \bar{k}$, то

интеграл Лапласа в скалярной форме имеет вид

$$\left. \begin{aligned} (\dot{y}C_3 - \dot{z}C_2) - \frac{\mu}{r}x &= f_1 \\ (\dot{z}C_3 - \dot{x}C_2) - \frac{\mu}{r}y &= f_2 \\ (\dot{x}C_2 - \dot{y}C_1) - \frac{\mu}{r}z &= f_3 \end{aligned} \right\}$$

Вектор $\vec{f}$ перпендикулярен вектору $\vec{C}$, отсюда следует, что существует связь между константами найденных интегралов

$$\boxed{\vec{f} \cdot \vec{C} = 0 = f_1 C_1 + f_2 C_2 + f_3 C_3}$$

$$f^2 = \vec{f}^2 = \left[(\vec{V} \times \vec{C}) - \frac{\mu}{r} \vec{r} \right]^2 = V^2 C^2 - \frac{\mu}{2r} r \cdot (\vec{V} \times \vec{C}) + \frac{\mu^2}{r^2} \vec{r}^2; \quad r \cdot (\vec{V} \times \vec{C}) = \vec{C} \cdot (\vec{r} \times \vec{V}) = \vec{C}^2$$

$$f^2 = V^2 C^2 - 2 \frac{\mu}{r} C^2 + \mu^2 = \mu^2 + C^2 \cdot (V^2 - \frac{2 \cdot \mu}{r})$$

Уравнение связи между величиной константы Лапласа и величиной константы интеграла площадей и энергии

$$\boxed{f^2 = \mu^2 + C^2 h}$$

Так как между константами интегралов существует два соотношения, то из семи полученных скалярных интегралов независимыми являются только пять.

2.3 Уравнения орбиты и скорость в полярных координатах

Умножим векторно слева интеграл Лапласа на радиус-вектор

$$\vec{f} \cdot \vec{r} = \left[(\vec{V} \times \vec{C}) - \frac{\mu}{r} \vec{r} \right] \cdot \vec{r} = (\vec{V} \times \vec{C}) \cdot \vec{r} - \frac{\mu}{r} r^2 = c^2 - \mu \cdot r$$

$$\vec{f} \cdot \vec{r} = f \cdot r \cos \nu$$

$$c^2 - \mu \cdot r = f \cdot r \cos \nu$$

Тогда получаем уравнение орбиты в полярных координатах

$$r = \frac{c^2}{\mu + f \cos \nu} = \frac{c^2 / \mu}{1 + \frac{f}{\mu} \cos \nu} = \frac{p}{1 + e \cos \nu}$$

где использованы следующие обозначения:

$$\boxed{p = \frac{c^2}{\mu}} \text{ - фокальный параметр (характеризует геометрический размер орбиты);}$$

$$\boxed{e = \frac{f}{\mu}} \text{ - эксцентриситет (характеризует форму орбиты).}$$

Этот результат отражает первый закон Кеплера: движение тела в центральном гравитационном поле совершается по коническому сечению, один из фокусов которого находится в притягивающем центре, а главная фокальная ось совпадает с направлением вектора Лапласа.

Существует следующая классификация орбит в зависимости от величины эксцентриситета:

- $e = 0$ – орбита – окружность;
- $0 < e < 1$ – орбита – эллипс;
- $e = 1$ – орбита – парабола);
- $e > 1$ – орбита – гипербола.

Найдем проекции скорости движения в полярных координатах (рис.

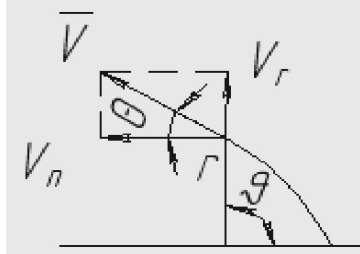


Рис.15. Скорость в полярных координатах

$V_r = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{dv} \frac{dv}{dt}$ - радиальная составляющая скорости - проекция вектора скорости на направление радиус- вектора;

$V_n = r \frac{dv}{dt} = V \cos \theta$ - тангенциальная составляющая скорости - проекция вектора на направление , перпендикулярное радиусу - вектору.

$$C = r \cdot V \cdot \cos \theta = r \cdot V_n \Rightarrow V_n = \frac{C}{r}$$

$$r \frac{dv}{dt} = \frac{C}{r}$$

$$\boxed{\frac{dv}{dt} = \frac{C}{r^2}}$$

Отсюда

$$V_r = \frac{p \sin v}{(1 + e \cos v)^2} \frac{c(1 + e \cos v)^2}{p^2} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin v$$

$$V_n = \frac{p}{1 + e \cos v} \frac{\sqrt{\mu \cdot p}(1 + e \cos v)}{p^2} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} (1 + e \cos v)$$

$$V = \sqrt{V_r^2 + V_n^2} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} \sqrt{1 + e^2 + 2e \cos v}$$

Вышеприведенные выражения используются для решения задач , связанных с наблюдением за движением спутников и с измерением параметров орбит с поверхности Земли

2.4 Движение по эллиптическим орбитам

Геометрия эллиптической орбиты

Эллиптические орбиты самые распространенные в природе (рис. 16)

$$p = r_{\alpha}(1-e) \cdot r_{\pi}$$

$$b = \sqrt{2r_{\alpha} \cdot r_{\pi}}$$

$$p = \frac{2r_{\alpha}r_{\pi}}{r_{\alpha} + r_{\pi}} \text{ - фокальный параметр эллиптической орбиты}$$

$$e = \frac{r_{\alpha} - r_{\pi}}{r_{\alpha} + r_{\pi}} \text{ - эксцентриситет эллиптической орбиты}$$

Интеграл энергии для эллиптической орбиты.

$$V^2 - \frac{2\mu}{r} = h$$

$$f^2 = \mu^2 + C^2 h, \quad \frac{C^2}{\mu} = p$$

$$e^2 = 1 + \frac{C^2}{\mu^2} h$$

$$e^2 - 1 = \frac{\mu \cdot a(1 - e^2)}{\mu^2} h$$

Выразим константу интеграла энергии через величину большой полуоси:

$$h = -\frac{\mu}{a}$$

$$V_{\text{эл}}^2 - \frac{2\mu}{e} = -\frac{\mu}{a}$$

$$V_{\text{эл}} = \sqrt{\frac{\mu}{r} \left(2 - \frac{r}{a} \right)}$$

Время движения по эллиптической орбите

Определим связь времени движения с положением тела на эллиптической орбите.

$$t = f(v) - ?$$

Учитывая, что $V \cos \theta = V_n = \frac{dv}{dt} \cdot r$, найдем $dt = \frac{r^2}{\sqrt{\mu \cdot p}} \cdot dv$,

Тогда в результате интегрирования находим

$$t - \tau = \frac{1}{c} \int_0^v r^2 dv$$

τ – время прохождения через перицентр.

Введем в рассмотрение угол эксцентрической аномалии E (рис.17).

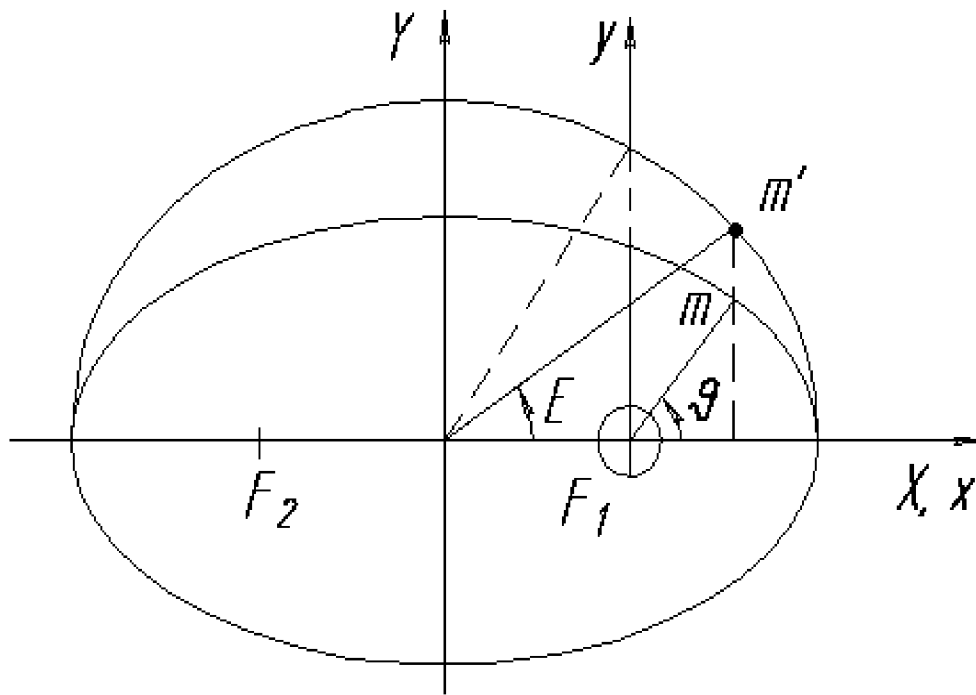


Рис.17 Угол эксцентрической аномалии

Соответствие между углами:

$v \rightarrow E$; $E = 0$ при $v = 0$; $E < 90^\circ$ при $v = 90^\circ$; $E = 180^\circ$ при $v = 180^\circ$.

Выразим координаты тела в системе отсчета, связанной с центром эллипса

$$\underline{X} = a \cos E,$$

$$\underline{Y} = b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = b \sqrt{1 - \frac{a^2 \cos^2 E}{a^2}} = \underline{a \sqrt{1 - e^2} \sin E}$$

Тогда в результате преобразований

$$x = X - c = a(\cos E - e)$$

$$y = Y = a \sqrt{1 - e^2} \sin E$$

$$r^2 = x^2 + y^2 = a^2 [(\cos E - e)^2 + (1 - e^2) \sin^2 E]$$

Находим выражение для уравнения орбиты через угол эксцентрической аномалии

$$\underline{r = a(1 - e \cos E)}$$

Выражая угол истинной аномалии через угол эксцентрической аномалии,

$$\sin v = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin E}{1 - e \cos E}$$

$$\cos v = \frac{x}{r} = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E}$$

в результате преобразований

$$d(\sin v) = \cos v \cdot dv = \sqrt{1 - e^2} \frac{(1 - \cos E) \cos E - e \sin E}{(1 - e \cos E)^2} dE$$

$$t - \tau = \frac{1}{c} \int_0^v r^2 dv$$

$$r^2 = a^2 (1 - e \cos E)^2$$

$$\sin v = \frac{\sqrt{1-e^2} \sin E}{1-e \cos E} \quad \cos v = \frac{\cos E - e}{e \cos E} \quad dv = \frac{\sqrt{1-e^2} dE}{1-e \cos E}$$

$$t - \tau = \frac{a^2 \sqrt{1-e^2}}{\sqrt{\mu \cdot p}} \int_0^E (1-e \cos E)^2 \frac{dE}{(1-e \cos E)} = \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}} (E - e \sin E)$$

находится искомое соотношение для определения времени полета (шестой интеграл), которое называется уравнением Кеплера

$$t - \tau = \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}} (E - e \sin E)$$

Окончательный вид выражения связи углов истинной и эксцентрической аномалий

$$1 - \cos v = 1 - \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E}$$

$$1 + \cos v = \frac{(1 - e)(1 + \cos E)}{1 - e \cos E}$$

получается разделив вышеприведенные соотношения друг на друга

$$\operatorname{tg}^2 \frac{v}{2} = \frac{1+e}{1-e} \operatorname{tg}^2 \frac{E}{2}$$

$$\operatorname{tg} \frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{v}{2}$$

Из уравнения Кеплера следует формула для определения периода обращения по эллиптической орбите

$$T = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{\mu}}$$

Из этого выражения легко получается третий закон Кеплера, согласно которому квадраты периодов обращения относятся как кубы их больших полуосей

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$$

Для прогнозирования движения формула Кеплера представляется в виде трансцендентного уравнения

$$E - e \sin E = M,$$

$$\text{где } M = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} (t - \tau)$$

2.5 Движение по гиперболическим траекториям

Движение по гиперболическим орбитам редко наблюдается в природных явлениях. Вместе с тем полеты на околопланетных участках траекторий межпланетных перелетов всегда совершаются по гиперболическим орбитам.

Геометрия гиперболической орбиты

Каноническое уравнение гиперболы в прямоугольных координатах ОХУ с началом координат в центре гиперболы (рис.18) имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где a и b – действительная и мнимая полуоси гиперболы.

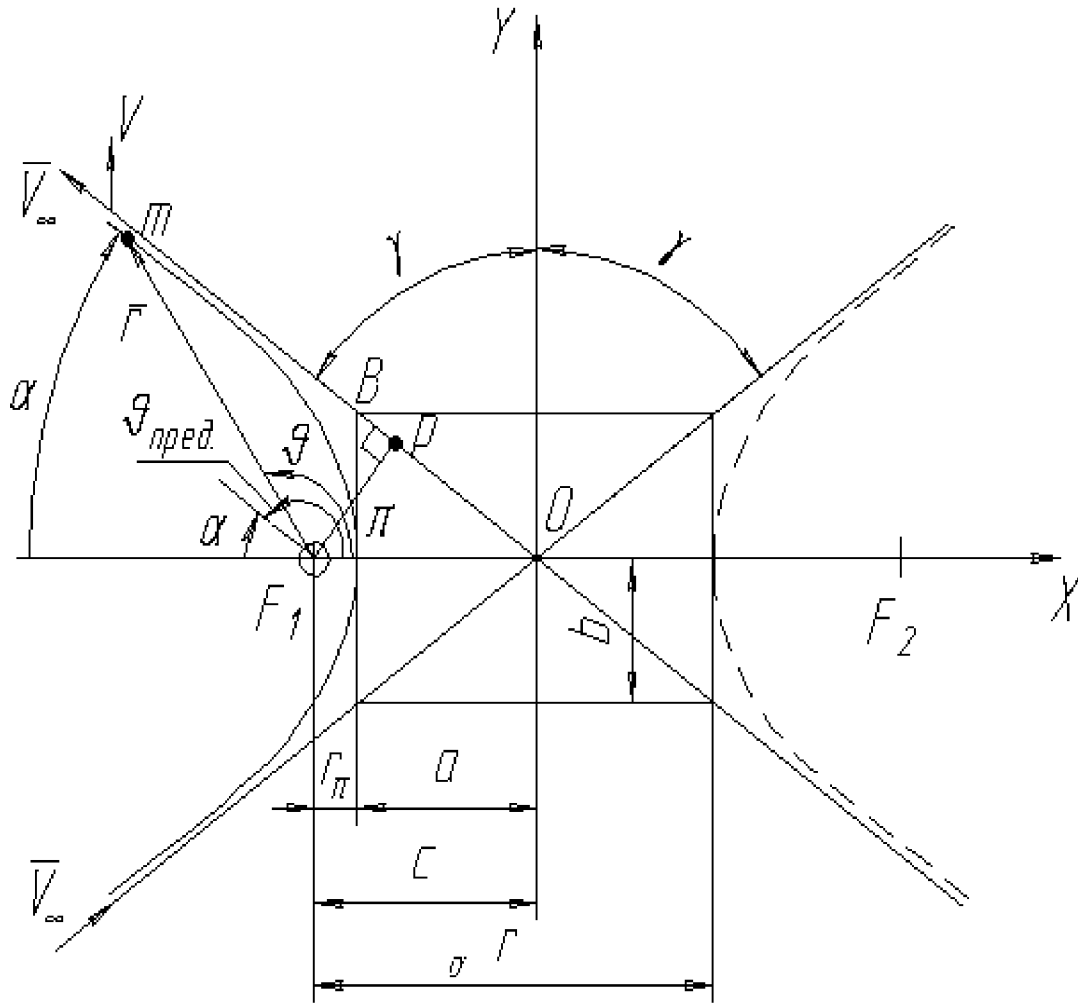


Рис.18 Движение по гиперболической траектории

Из уравнения гиперболы в полярных координатах

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v}, \quad e > 1$$

Следует, что при $r \rightarrow \infty, 1 + e \cos v_{np} = 0$

Отсюда

$$\cos v_{np} = -\frac{1}{e}, \quad \boxed{\cos \alpha = \frac{1}{e}}$$

Геометрические характеристики гиперболической орбиты

$$r_{\pi} = \frac{p}{1+e}; \quad r_{\alpha} = \frac{p}{1-e}$$

$$a = \frac{|r_{\alpha}| - r_{\pi}}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{p}{e-1} - \frac{p}{e+1} \right) = \frac{p}{e^2 - 1}$$

$$c = \frac{r_{\alpha} + r_{\pi}}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{p}{e-1} + \frac{p}{e+1} \right) = \frac{pe}{e^2 - 1}$$

$$r_{\pi}(1+e)=p$$

(F_1P) - прицельная дальность – кратчайшее расстояние от притягивающего центра (фокуса гиперболы) до асимптоты гиперболы.

$$\Delta OPF_1 = \Delta B\pi O$$

$$c^2 = a^2 + b^2, \boxed{F_1P = b}$$

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = a\sqrt{e^2 - 1} = a\sqrt{1 + \frac{2r_{\pi}}{a} + \frac{r_{\pi}^2}{a^2} - 1} = r_{\pi}\sqrt{1 + \frac{2a}{r_{\pi}}}$$

$$r_{\pi}(1+e)=p=a(e^2-1)$$

$$e = 1 + \frac{r_{\pi}}{a}$$

$$F_1P = b = r_{\pi}\sqrt{1 + \frac{2a}{r_{\pi}}} - \text{прицельная дальность}$$

$$\boxed{p = \frac{b^2}{a}}, \quad b^2 = a^2(e^2 - 1)$$

Следует помнить, что при полете вокруг притягивающего центра по гиперболе вектор скорости на бесконечности $\vec{V}_{\infty}$ поворачивается на угол $2\cdot\gamma$, который находится из соотношения :

$$\sin \gamma = \frac{\dot{a}}{\dot{r} \dot{A}} = \frac{\dot{a}}{\dot{n}} = \frac{a}{a+r_{\pi}} = \frac{1}{1+r_{\pi}/\dot{a}}$$

Интеграл энергии для гиперболической орбиты

Выведем частный вид интеграла энергии для движения по гиперболической траектории. Из интеграла энергии следует, что константа h равна квадрату гиперболического избытка скорости $\vec{V}_{\infty}$. С другой стороны, эта константа может быть выражена через действительную полуось гиперболы:

$$V^2 = \frac{2\mu}{r} = h$$

$$C^2 = V_{\infty}^2 b^2, \quad \frac{C^2}{\mu} = p$$

$$C^2 = h \cdot p \cdot a, \quad \mu \cdot p = h \cdot p \cdot a$$

$$\boxed{h = \frac{\mu}{a}}$$

Из интеграла энергии определяется скорость при движении по гиперболе

$$V_{\text{сун}} = \sqrt{\frac{\mu}{r} \left(2 + \frac{r}{a} \right)}$$

Определение времени движения по гиперболической орбите

Для определения зависимости времени движения от положения на гиперболической орбите используется формула $t - \tau = \frac{1}{c} \int_0^v r^2 dv$, справедливая для любой орбиты.

Вводится гиперболический аналог угла эксцентрической аномалии $v \rightarrow F$.

$$\nu = 0, F = 0$$

$$\nu = \nu_{\text{праз}}, F = \frac{\pi}{2}$$

$$X = -\frac{a}{\cos F}$$

Уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Координаты тела в орбитальной системе координат и величина его радиуса-вектора находятся по формулам:

$$Y = b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} = b\sqrt{\frac{1}{\cos^2 F} - 1} = b \cdot \operatorname{tg} F = a\sqrt{e^2 - 1} \cdot \operatorname{tg} F$$

$$X = C + X = a \cdot e - \frac{a}{\cos F} = a \frac{e \cos F - 1}{\cos F}$$

$$r^2 = x^2 + y^2 = a^2 \frac{(e \cos F - 1)^2 + (e^2 - 1) \sin^2 F}{\cos^2 F} = a^2 \frac{(e - \cos F)^2}{\cos^2 F}$$

В результате преобразований

$$\sin \nu = \frac{y}{r} = \sqrt{e^2 - 1} \frac{\sin F}{e - \cos F} \quad \cos \nu = \frac{x}{r} = \frac{e \cos F - 1}{e - \cos F}$$

$$d(\sin \nu) = \cos \nu \cdot d\nu = \sqrt{e^2 - 1} \frac{(e - \cos F) \cos F - \sin^2 F}{e - \cos F} dF$$

$$d\nu = \sqrt{e^2 - 1} \frac{dF}{e - \cos F}$$

$$t - \tau = \frac{a^2 \sqrt{e^2 - 1}}{\sqrt{\mu \cdot p}} \int_0^F \frac{e - \cos F}{\cos^2 F} dF = \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}} \left[e \int_0^F \frac{dF}{\cos F} - \int_0^F \frac{dF}{\cos F} \right]$$

выводится формула Кеплера для гиперболической орбиты

$$t - \tau = \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}} \left[e \cdot \operatorname{tg} F - \ln \operatorname{tg} \left(\frac{F}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right]$$

$$\operatorname{tg} \frac{F}{2} = \sqrt{\frac{e-1}{e+1}} \operatorname{tg} \frac{\nu}{2}$$

Из нее следует трансцендентное уравнение, которое используется при прогнозировании движения по гиперболической орбите

$$\left[\begin{aligned} e \cdot \operatorname{tg} F - \ln \operatorname{tg} \left(\frac{F}{2} + \frac{\pi}{4} \right) &= N \\ N &= \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} (t - \tau) \end{aligned} \right.$$

2.6 Характерные космические скорости

Характерные космические скорости определяют минимальные энергетические затраты для реализации различного типа миссий.

Круговая и первая космические скорости

Круговая скорость ($V_{\text{кр}}$) – скорость, которую должен иметь спутник для того, чтобы двигаться по круговой орбите.

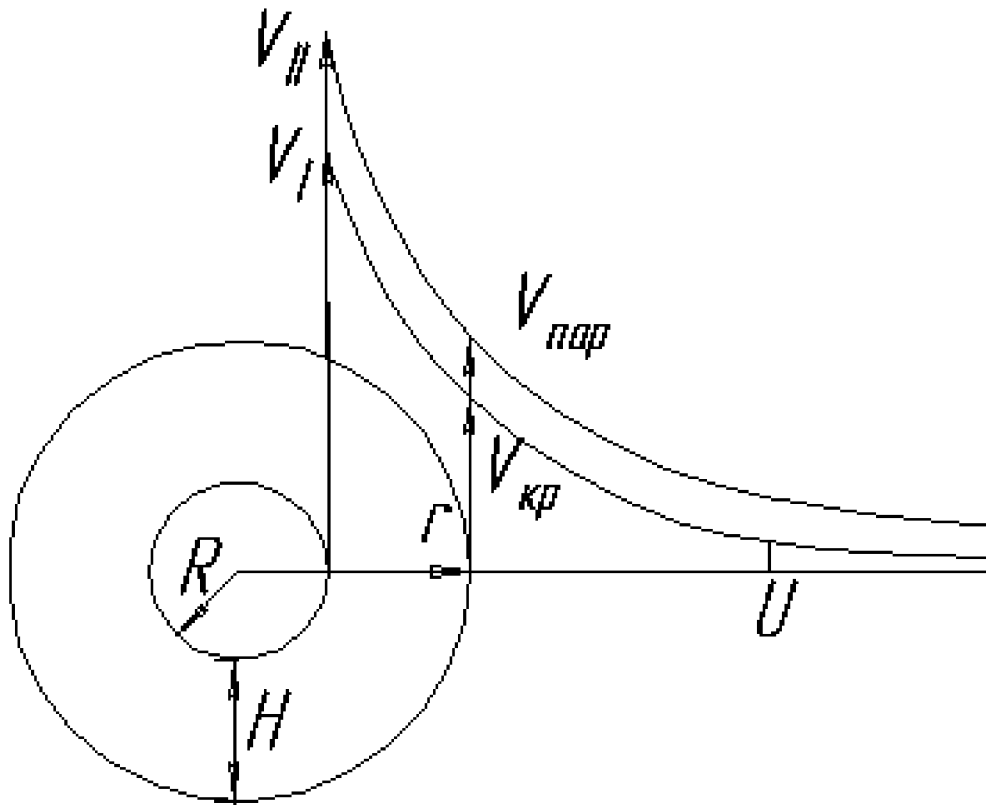


Рис.19. Круговая скорость движения

Из выражения $f^2 = \mu^2 + C^2 h$ следует, что $e = 1 + \frac{C^2}{\mu^2} \left(V^2 - \frac{2\mu}{r} \right)$

Тогда в случае, если $e = 0$, $\theta = 0$ (угол между скоростью и нормалью к радиусу-вектору), $C = r \cdot V_{kp}$

Отсюда находится выражение для круговой скорости

$$0 = 1 + \frac{r^2 \cdot V_{kp}^2}{\mu^2} \left(V_{kp}^2 - \frac{2\mu}{r} \right)$$

$$V_{kp}^4 - \frac{2\mu}{r} V_{kp}^2 + \frac{\mu^2}{r^2} = 0$$

$$V_{kp}^2 = \frac{\mu}{r}$$

Круговая скорость по орбите радиуса r $V_{kp} = \sqrt{\frac{\mu}{r}}$.

Таким образом, чем меньше r , тем больше V_{kp} .

Первая космическая скорость относительно Земли – круговая скорость у ее поверхности $r = R$

$$V_{I\oplus} = \sqrt{\frac{\mu}{R}}$$

$V_{I\oplus} = 7,912 \text{ км/с}$ - - первая космическая скорость ($R = 6371 \text{ км}$ - радиус Земли).

Параболическая скорость и вторая космические скорости

Параболическая скорость – скорость, которую нужно сообщить телу на заданном расстоянии r от центра притяжения, чтобы оно начало двигаться по параболической орбите и покинуло поле тяготения.

$$e = 1, 1 = 1 + \frac{C^2}{\mu^2} \left(V_{\text{пар}}^2 - \frac{2\mu}{r} \right);$$

$$V_{\text{пар}} = \sqrt{\frac{2\mu}{r}} = \sqrt{2} \cdot V_{\text{кр}},$$

При $r = R$, находится вторая космическая скорость $V_{II} = \sqrt{\frac{2\mu}{R}} = \sqrt{2} \cdot V_I$

$V_{II\oplus} = 11,190 \text{ км/с}$ - **вторая космическая скорость** – параболическая скорость у поверхности Земли.

Третья космическая скорость

Третья космическая скорость - скорость, которую необходимо сообщить телу, чтобы оно могло покинуть не только поле тяготения Земли, но и поле тяготения Солнца, т.е. вышло за пределы Солнечной системы (рис.20).

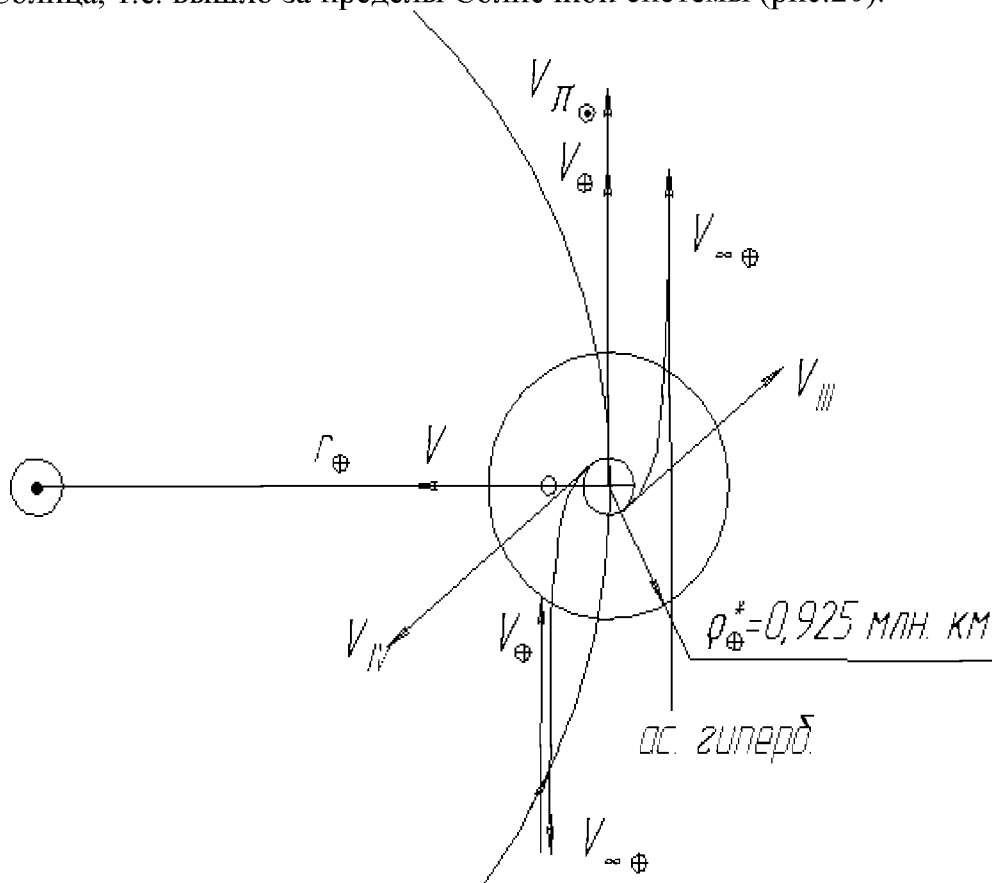


Рис. 20 Космические скорости

Введем понятие сферы действия Земли – область пространства, внутри которой поле притяжения Земли является преобладающим настолько, что действием Солнца можно пренебречь.

Сфера действия Земли

$$\rho_{\oplus} = 925000 \text{ км}$$

$$r_{\oplus} = 149.600 \text{ км}$$

$$V_{\oplus} = V_{\text{до}} = 29,77 \text{ км/с} / \tilde{n}$$

$$V_{\oplus} = \sqrt{\frac{\mu}{r_{\oplus}}} \quad \bullet$$

$$V_{\pi} = V_{\text{пар}} = \sqrt{\frac{2\mu}{r_{\oplus}}} \quad \bullet$$

$$V_{\infty\oplus} = V_{\pi} - V_{\oplus} \quad \bullet$$

$$\text{Из интеграла энергии: } V_{III}^2 - \frac{2\mu}{R} = V_{\infty\oplus}^2$$

$$V_{III\oplus} = \sqrt{V_{\infty\oplus}^2 + \frac{2\mu}{R}} = \sqrt{V_{\infty\oplus}^2 + V_{II\oplus}^2} = \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2 V_{I\oplus}^2 + V_{II\oplus}^2} = 16,86 \text{ км/с} \text{ - третья космическая}$$

скорость

Четвертая космическая скорость

Четвертая космическая скорость – скорость, которую нужно сообщить телу около Земли, чтобы остановить его движение относительно Солнца и оно начало вертикальное падение на Солнце.

$$V_{\infty\oplus} = V_{\oplus}, \quad V_4^2 - \frac{2 \cdot \mu_{\oplus}}{R_{\oplus}} = V_{\infty\oplus}^2$$

$$V_4 = \sqrt{V_{2\oplus}^2 + V_{2\oplus}^2} = 32,8 \text{ км/с} / \tilde{n} \text{ - четвертая космическая скорость}$$

3. Элементы орбит в пространстве

Элементами орбиты назовем 6 постоянных интегрирования уравнений движения, которые удобны и наглядны для характеристики пространственных орбит (рис.21):

Ω – долгота восходящего узла (угол между осью OX_n инерциальной системы координат, направленной в точку весеннего равноденствия, и линией восходящего узла),

ω – аргумент перигея (угол между направлением на перигей и линией узлов);

i – наклонение орбиты (угол между плоскостью орбиты и плоскостью экватора);

p – фокальный параметр орбиты;

e – эксцентриситет орбиты;

τ – момент времени прохождения через перигей.

Ω, i – определяют ориентацию орбиты в пространстве; ω – определяет ориентацию большой оси орбиты в плоскости орбиты относительно линии узлов; p и e – характеризуют геометрию орбиты; τ – обеспечивает временную привязку.

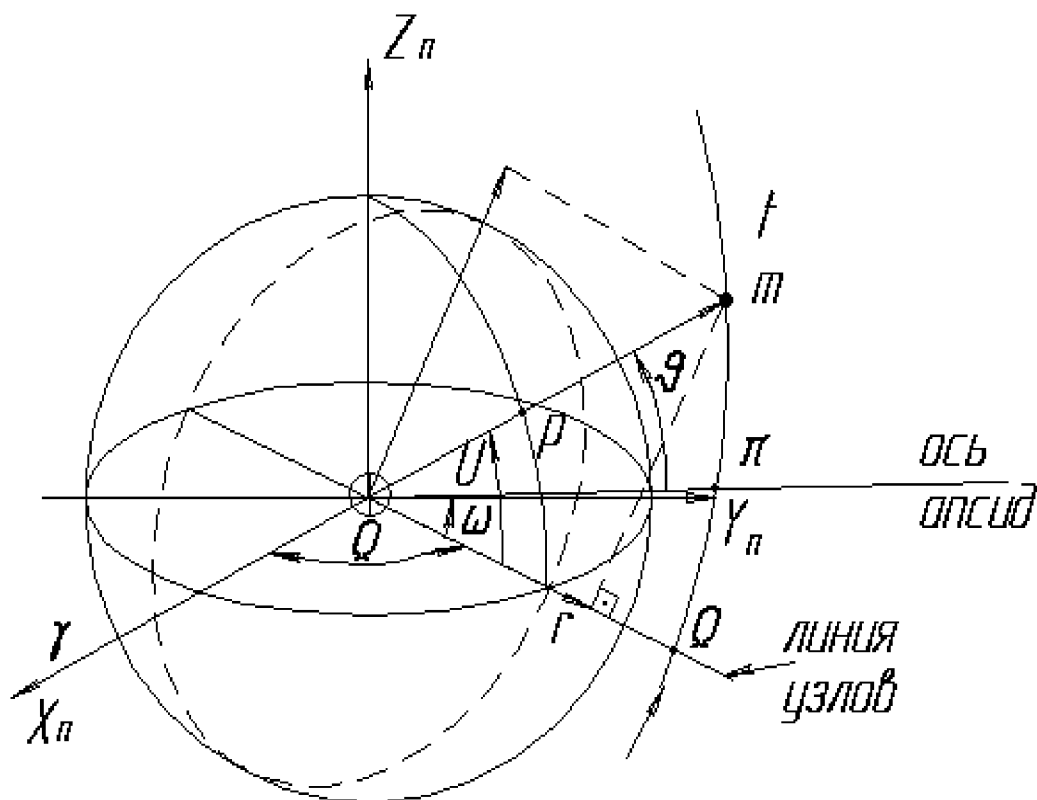


Рис.21 Элементы орбиты

Элементы орбиты и начальные условия движения, например, в геоцентрической системе координат, связаны взаимно-однозначным соответствием.

Выразим координаты движения через элементы орбиты. Для чего спроектируем радиус-вектор $\vec{r}$ на линию узлов и в плоскость перпендикулярную линии узлов.

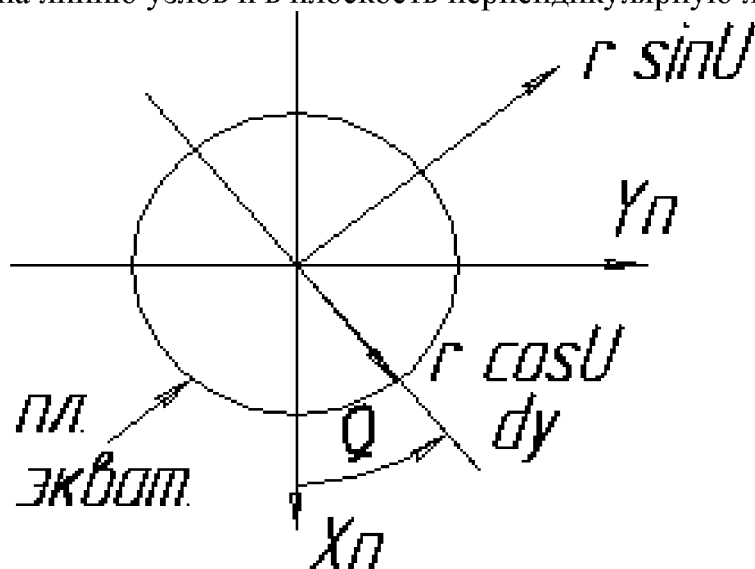


Рис.22. Проекция на плоскость экватора.

$U = \theta + \omega$ – аргумент широты (характеризует угловое положение тела относительно линии узлов)

Тогда координаты тела будут находиться по соотношениям

$$x = r(\cos U \cos \Omega - \sin U \cos i \sin \Omega)$$

$$y = r(\cos U \sin \Omega + \sin U \cos i \cos \Omega)$$

$$z = r \sin U \sin i.$$

Выразим проекции скорости движения, для чего выполним дифференцирование

$$\frac{dU}{dt} = \frac{dv}{dt}.$$

В результате преобразований получим

$$\dot{x} = \frac{dr}{dt}(\cos U \cos \Omega - \sin U \cos i \sin \Omega) - r \frac{dv}{dt}(\sin U \cos \Omega + \cos U \cos i \sin \Omega);$$

$$\dot{y} = \frac{dr}{dt}(\cos U \sin \Omega + \sin U \cos i \cos \Omega) - r \frac{dv}{dt}(\sin U \sin \Omega + \cos U \cos i \cos \Omega)$$

$$\dot{z} = \frac{dr}{dt} \sin U \sin i - r \cos U \sin i \frac{dv}{dt}.$$

$$\frac{dr}{dt} = V_r = \sqrt{\frac{\mu}{p}} \cdot e \sin v;$$

$$r \frac{dv}{dt} = V_n = \sqrt{\frac{\mu}{p}} (1 + e \cos v).$$

$v(t)$ выражается из уравнения Кеплера.

Основные формулы сферической тригонометрии

$O\vec{A}(1,0,0); O\vec{B}(\cos C, \sin C, 0); O\vec{C}(\cos b, \sin b \cos A, \sin b \sin A);$

1) Формула косинуса стороны

$$\cos a = O\vec{C} * O\vec{B} = \cos b \cos c + \sin b \sin C \cos A;$$

2) Формула синусов.

$$O\vec{A} * (O\vec{B} \times O\vec{C}) = \begin{bmatrix} 1 \dots \dots \dots 0 \dots \dots \dots 0 \\ \cos c \dots \dots \sin c \dots \dots \dots 0 \\ \cos b \dots \sin b \cos A \dots \sin b \sin A \end{bmatrix} = \sin c \sin b \sin A = \sin c \sin a \sin B =$$

$$= \sin a \sin b \sin C$$

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c} \quad \text{- синусы углов пропорциональны синусам сторон.}$$

3) Формула cosB $\cos B = -\cos A \cos C + \sin A \sin C \cos b,$

Косинус угла равен произведению косинусов двух других углов плюс произведение синусов этих углов на косинус стороны между ними.

4) Формула котангенсов.

$$\operatorname{ctg} a \sin C = \cos B \cos c + \sin B \operatorname{ctg} A.$$

Котангенс крайней стороны, умноженный на синус внутренней стороны с равен произведению косинусов внутренних элементов сложного с произведением синуса внутреннего угла и котангенса внешнего угла.

Выразим элементы орбиты через начальные значения параметров движения (рис.23).

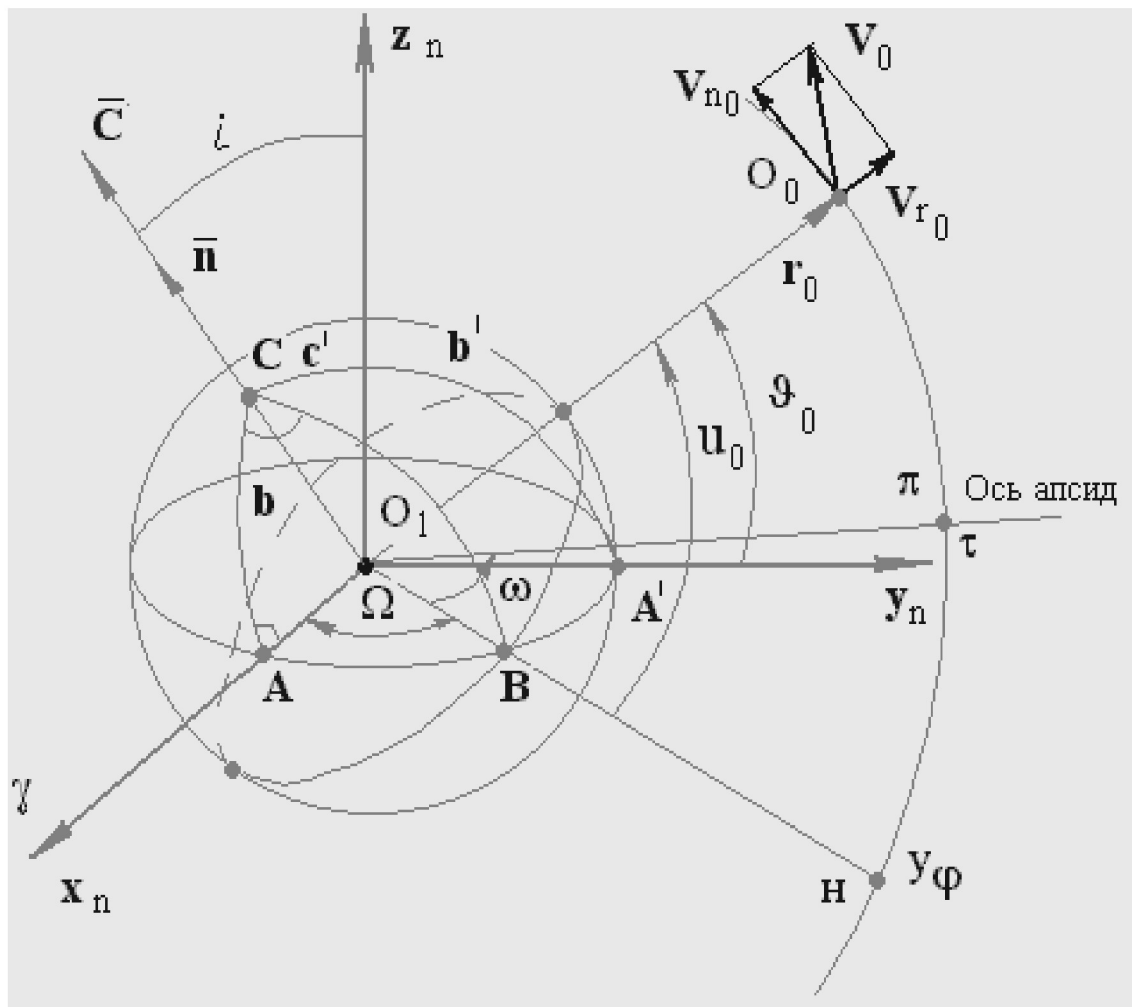


Рис. 23 Связь элементы орбиты с геоцентрическими координатами

Пусть известны положение ЛА и проекции его абсолютной скорости в конце активного участка, которые соответствуют начальным условиям орбитального движения

$\vec{r}_0(x_0, y_0, z_0), \vec{V}(\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$. в инерциальной геоцентрической системе координат.

Определение долготы восходящего узла Ω и наклонения орбиты i .

Спроецируем $\vec{n} = \frac{\vec{C}}{C}$; на оси геоцентрической системы координат и найдем направляющие косинусы нормали

$$n_x = \frac{C_x}{C}; \quad n_y = \frac{C_y}{C}; \quad n_z = \frac{C_z}{C}; \quad \text{где} \quad \vec{C} = (\vec{r}_0 \times \vec{V}_0);$$

$$C = \sqrt{C_x^2 + C_y^2 + C_z^2}; \quad C_x = y_0 z_0 - z_0 \dot{y}_0; \quad C_y = z_0 \dot{x}_0 - x_0 z_0; \quad C_z = x_0 \dot{y}_0 - y_0 \dot{x}_0;$$

$$n_x = \cos(u?x) = b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B$$

$$\sin \Omega \cos(a\theta i)$$

$$n_y = \cos(u?y) = b' = \cos a \cos C' + \sin a \sin c' \cos B' \cos \Omega (-\sin i);$$

$$n_x = \sin \Omega \sin i = \frac{C_x}{C}; n_y = -\cos \Omega \sin i = \frac{C_y}{C}; n_z = \cos i = \frac{C_z}{C}.$$

$$\operatorname{tg} \Omega = -\frac{C_y}{C_x}, 0 < \Omega < 360. \quad \operatorname{sign}(\sin \Omega) = \operatorname{sign}(C_x), \\ \operatorname{sign}(\cos \Omega) = -\operatorname{sign}(C_y).$$

Определение геометрические параметры орбиты - фокальный параметр p , эксцентриситет e и большую полуось эллипса a .

$$r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}; \quad V_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}.$$

$$\sin \Theta = \frac{\vec{r}_0 \vec{V}_0}{r_0 V_0}$$

$$\cos \Theta = \frac{|\vec{r}_0 \times \vec{V}_0|}{r_0 V_0}$$

$$e = \sqrt{1 + V_0(v_0 - 2) \cos^2 \Theta_0}; \quad P = v_0 r_0 \cos^2 \Theta^2$$

$$a = \frac{P}{1 - e^2} = \frac{r_0}{2 - v_0}$$

Определение аргумента перицентра ω : $\omega = u_0 - \vartheta_0$;

$$V_{r0} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin \Theta_0 = V_0 \sin \Theta_0; \quad \sin \vartheta_0 = \frac{1}{e} V_0 \sin \Theta_0 \cos \Theta_0$$

$$V_{n0} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} (1 - e \cos \Theta_0) = V_0 \cos \Theta_0. \quad \cos \vartheta_0 = \frac{1}{e} \left[V_0^2 \frac{\cos^2 \Theta_0 r_0}{\mu} - 1 \right]; 0 < \vartheta < 360$$

Определение аргумента широты в начальный момент времени .

$$x_0 = r_0 (\cos \Omega \cos u_0 - \sin \Omega \sin u_0 \cos i);$$

$$y_0 = r_0 (\sin \Omega \cos u_0 + \cos \Omega \sin u_0 \cos i)$$

$$z_0 = r_0 \sin u_0 \sin i,$$

откуда

$$\cos u_0 = \frac{x_0 \cos \Omega + y_0 \sin \Omega}{r_0}$$

$$\sin u_0 = \frac{z_0}{r_0}; 0 \leq u_0 \leq 360$$

Определение момента времени прохождения через перицентр для эллиптической орбиты – τ .

Находится из формулы Кеплера:

$$t_0 - \tau = \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}} (E - e \sin E_0)$$

$$\operatorname{tg} \frac{E_0}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{\vartheta_0}{2}$$

$$\tau = t_0 - \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}} (e_0 - \sin E_0).$$

4. Анализ возможности выведения полезной нагрузки на орбиту ракетами космического назначения

4.1 Проектные характеристики ракет космического назначения

Многоступенчатая ракета состоит из полезной нагрузки, выводимой на орбиту, и ускорителей. *Ускорителем* (ракетным блоком) составной ракеты называется каждая отделяемая часть ракеты, содержащая в своем составе топливо и двигательную установку. *Ступенью* называется соединение ускорителя (ракетного блока) с полезной нагрузкой, которую разгоняет ускоритель рассматриваемой ступени. Полезной нагрузкой каждой ступени является следующая по порядку работы ступень носителя. Так, ракета на старте является *первой ступенью* носителя; часть ракеты после отделения ускорителя первой ступени называется *второй ступенью* и т.д.

Составные ракеты могут иметь последовательное, параллельное и

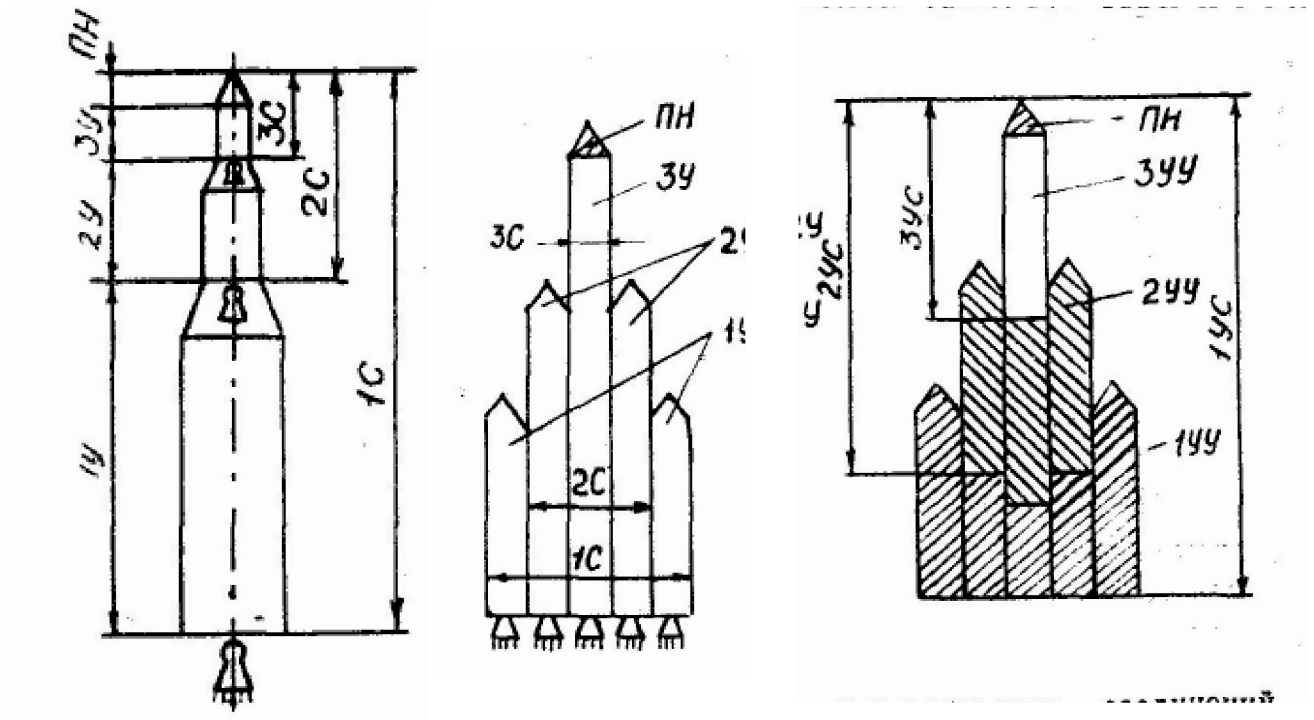


Рис.24 Схемы соединения ускорителей

смешанное соединение ускорителей (рис. 24). При *последовательном соединении* (поперечном делении) ускорителей работа двигателей следующей ступени происходит после окончания работы двигателей и отбрасывания ускорителя предыдущей ступени.

При *параллельном соединении* (продольном делении) ускорителей одновременно работают двигатели всех ускорителей. После выгорания горючего и отделения предыдущего ускорителя продолжают работу двигатели всех остальных ускорителей.

Последовательно связанные ускорители в комбинации с параллельно присоединенными ускорителями образуют *смешанную схему ракеты* (например, ракеты – носители «Союз», «Сатурн-1 В-7»).

Расчет энергетики многоступенчатой ракеты с параллельным и смешанным соединением ускорителей приводится к расчету энергетики ракеты с последовательным соединением ускорителей введением понятия об условных ускорителях ступеней. Условный ускоритель ступени включает отбрасываемый блок и часть топлива, выгоревшего из оставшихся блоков за время работы отбрасываемого ускорителя (см.рис.24).

При выполнении баллистических расчетов применяют следующие массовые характеристики:

m_i — начальная масса i -ой ступени;

m_{Ti} — масса топлива ($m_{Ti} + m_{окi}$) i -го ускорителя,

m_{ki} — сухая масса i -го ускорителя (масса конструкции);

$m_{пн}$ — масса полезной нагрузки многоступенчатой ракеты.

Используются также ряд безразмерных массовых характеристик.

Относительной массой ступени называется отношение начальной массы ступени к массе ее полезной нагрузки (следующей ступени):

$$p_i = \frac{m_i}{m_{i+1}}.$$

Относительной массой многоступенчатой ракеты называется отношение ее стартовой массы к массе полезной нагрузки, выводимой на орбиту:

$$p_{\Sigma} = \frac{m_1}{m_{пн}}, p_{\Sigma} = p_1 \cdot p_2 \cdots p_n = \prod_{i=1}^n p_i.$$

Этот параметр непосредственно связан со стоимостью выведения на орбиту полезной нагрузки. Для ракет-носителей космического назначения (РКН) $p_{\Sigma} = 30 \dots 100$.

Конструктивной характеристикой ускорителя называется отношение массы ускорителя к его сухой массе:

$$s_i = \frac{m_{ki} + m_{Ti}}{m_{ki}}.$$

Эта характеристика определяет степень совершенства конструкции ускорителей (ракетных блоков) и зависит от типа двигателей: для жидкостных ракетных двигателей (ЖРД) $s_i = 8 \dots 16$, для ракетных двигателей твердого топлива (РДТТ) $s_i = 5 \dots 11$.

Числом Циолковского (отношением масс) ступени называется отношение начальной массы ступени к ее массе после выгорания горючего работающего ускорителя:

$$z_i = \frac{m_i}{m_i - m_{\partial i}}, z_i = 3 \dots 6.$$

Эти безразмерные массовые параметры связаны между собой следующим соотношением:

$$\frac{z_i - 1}{z_i} = \frac{p_i - 1}{p_i} = \frac{s_i - 1}{s_i}.$$

Для анализа возможности реализации космической миссии проводится поверочно-проектировочный расчет программной траектории запуска космического аппарата на опорную орбиту. При этом должны быть известны следующие данные.

1. Тактико-технические требования к опорной орбите КА:

— радиусы перигея r_{π} и апогея r_{α} орбиты выведения; угол истинной аномалии, ϑ_0 , определяющий положение перигея относительно точки выведения на орбиту, угол наклона орбиты i .

2. Географические условия старта: долгота λ_c и широта φ_c пункта старта.

3. Проектные характеристики носителя и его двигательных установок. Общие характеристики: стартовая масса m_0 , масса полезной нагрузки $m_{\text{пн}}$, площадь миделевого (наибольшего) сечения носителя S_M , общая длина носителя L , размах стабилизаторов l .

Таблица 1

Проектные характеристики носителя и его двигательных установок

Характеристика	Обозначение	Размерность	Ускоритель 1-й ступени	Ускоритель 2-й ступени	Ускоритель 3-й ступени
Масса ускорителя	m_{yi}	т	m_{y1}	m_{y2}	m_{y3}
Масса топлива	m_{Ti}	т	m_{T1}	m_{T2}	m_{T3}
Тип и число двигателей	—	—			
Горючее	—	—			
Окислитель	—	—			
Соотношение компонентов топлива	χ_i		χ_1	χ_2	χ_3
Плотность горючего	ρ_{Gi}	т./м ³	ρ_{G1}	ρ_{G2}	ρ_{G3}
Плотность окислителя	$\rho_{Ok i}$	т/м ³	$\rho_{Ok 1}$	$\rho_{Ok 2}$	$\rho_{Ok 3}$
Тяга двигателей на уровне моря	$P_{0i}, i=\overline{1,m}$	кН	P_{01}	—	—

Тяга двигателей в вакууме	$P_{ni}, i=\overline{1,n}$	кН	P_{n1}	P_{n2}	P_{n3}
Удельная тяга на уровне моря	$P_{уд oi}, i=\overline{1,m}$	м/с	$P_{уд o1}$	—	—.
Удельная тяга в вакууме	$P_{уд ni}, i=\overline{1,n}$	м/с	$P_{уд n1}$	$P_{уд n2}$	$P_{уд n3}$
Коэффициент высотности сопла	$\lambda_1 = \frac{P_{\dot{\sigma} \dot{\alpha} \dot{\Gamma} 1}}{\dot{D}_{\dot{\sigma} \dot{\alpha} \dot{\Gamma} 1}}$	—	λ_1	—	—
Диаметр ускорителя	d_i	м	d_1	d_2	d_3

В таблице приняты обозначения: n — число ступеней носителя, m — число ступеней, работающих в плотных слоях атмосферы.

Проектные характеристики носителя и его двигательных установок выбирают в соответствии с заданным прототипом носителя из справочно-информационной литературы. Недостающие данные принимают на основании статистики по согласованию с преподавателем.

4. Аэродинамические характеристики носителя в стартовой конфигурации, представленные в виде графических или табличных зависимостей в указанных диапазонах аргументов:

$$C_{ya}^{\alpha}(M), M = 0 \div 5,$$

$$C_{x \alpha \min}(M, H), M = 0 \div 5, H = H_{\dot{\sigma} \dot{\alpha} \dot{\Gamma} 1} = 10 \hat{e} \hat{i}$$

5. Стандартная атмосфера (СА) Земли представлена значениями абсолютной температуры в узловых точках кусочно-линейной зависимости температуры от высоты:

Высота H , км	0	11	25	46	54	80	95
-----------------	---	----	----	----	----	----	----

Температура воздуха, К	288,16	216,0	216,0	274,0	274,0	185,0	185,0
------------------------	--------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

Подготовка исходных данных для анализа возможности этапа выведения завершается определением системы баллистических проектных параметров и характеристик двигательной установки. *Баллистическими проектными параметрами ракеты* называются параметры, которые при заданных конструктивной схеме ракеты, характеристиках двигательных установок и программе полета однозначно определяют конечную скорость выводимой на орбиту полезной нагрузки.

Используется следующая система проектных параметров.

1. Числа Циолковского ступеней

$$z_i = \frac{m_i}{m_i - m_{\dot{\sigma} i}}, i = 1, \dots, n.$$

Вместо числа Циолковского могут быть использованы также одни из следующих параметров:

$$a_{ki} = \frac{m_{\dot{0}i}}{m_i} \text{ — коэффициент заполнения топливом ускорителя } i\text{-й ступени [}$$

$$\mu_{ki} = \frac{m_i - m_{\dot{0}i}}{m_i} \text{ — относительная конечная масса ступени, которые связаны между}$$

собой и с z_i соотношениями:

$$\mu_{ki} = \frac{1}{z_i}; \mu_{ki} = 1 - a_{ki}; a_{ki} = 1 - \frac{1}{z_i}; a_{ki} = 1 - \mu_{ki}; z_i = \frac{1}{\mu_{ki}}; z_i = \frac{1}{1 - a_{ki}}.$$

2. Удельные тяги двигателей на уровне моря и в пустоте:

$$P_{\dot{0}\dot{0}i} = \frac{P_{0i}}{\dot{m}_i}, i = \overline{1, m}, \quad P_{\dot{0}\dot{0}ii} = \frac{P_{ii}}{\dot{m}_i}, i = \overline{1, n}.$$

3. Отношения удельных тяг в пустоте и на Земле (коэффициенты высотности сопел двигателя) для ступеней, работающих в плотных слоях атмосферы:

$$\lambda_i = \frac{P_{\dot{0}\dot{0}ii}}{P_{\dot{0}\dot{0}i}} = \frac{P_{ii}}{P_{0i}}, i = \overline{1, m}.$$

4. Начальные тяговооруженности ступеней:

$$n_{0i} = \frac{P_{0i}}{m_i \cdot g_0}, i = \overline{1, m}, \quad n_{0i} = \frac{P_{ii}}{m_i \cdot g_0}, i = \overline{m+1, n}.$$

5. Начальные нагрузки на мидель для ступеней, работающих в плотных слоях атмосферы:

$$p_{Mi} = \frac{m_i}{S_{Mi}}, i = \overline{1, m}.$$

Для каждой ступени должны быть определены также следующие характеристики двигательных установок:

эффективная скорость истечения газов в пустоте $u_i = P_{\dot{0}\dot{0}i}$;

секундный расход топлива $m_i = \frac{P_{ii}}{P_{\dot{0}\dot{0}ii}}$;

время работы ступени $t_{ki} = \frac{m_{\dot{0}i}}{\dot{m}_i}$.

П р и м е ч а н и е. Для носителей с параллельным соединением ускорителей 1 и 2 ступеней сначала осуществляется приведение носителя к последовательному соединению условных ускорителей:

- определяется время работы 1-й ступени, которое равно времени работы отделяемого ускорителя 1-й ступени,

$$m_{\dot{0}1} = \frac{P_{i\dot{0}1}}{P_{\dot{0}\dot{0}i\dot{0}1}}; \quad t_{k1} = \frac{m_{\dot{0}i}}{\dot{m}_{\dot{0}1}}$$

- рассчитывается масса топлива Δm_2 которая расходуется вторым ускорителем за время работы первого,

$$m_{\dot{0}2} = \frac{F_{i\dot{0}2}}{P_{\dot{0}\dot{0}i\dot{0}2}}; \quad \Delta m_2 = \dot{m}_{\dot{0}2} t_{e1};$$

- определяются массы топлива 1 и 2 ступеней и масса второй ступени:

$$m_{T1} = m_{Ty1} + \Delta m_2; \quad m_{T2} = m_{Ty2} + \Delta m_2; \quad m_2 = m_1 - m_{y1} - \Delta m_2.$$

- определяются эффективные значения проектных параметров 1-й ступени:
удельные тяги на Земле и в пустоте:

$$P^{\dot{y}\delta}_{\delta\delta 01} = \frac{P^{\Sigma}_{01}}{\dot{m}_1} = \frac{P_{01} + P_{02}}{\dot{m}_{\delta 1} + \dot{m}_{\delta 2}}; \quad P^{\dot{y}\delta}_{\delta\delta r1} = \frac{P^{\Sigma}_{r1}}{\dot{m}_1} = \frac{P_{r1} + P_{r2}}{\dot{m}_{\delta 1} + \dot{m}_{\delta 2}}$$

- степень высотности сопла

$$\lambda^{\dot{y}\delta}_{\delta 1} = \frac{P^{\dot{y}\delta}_{\delta\delta r1}}{P^{\dot{y}\delta}_{\delta\delta 01}} = \frac{P^{\Sigma}_{r1}}{P^{\Sigma}_{01}}$$

- начальная тяговооруженность 1-й ступени

$$n_{01} = \frac{P^{\Sigma}_{01}}{m_1 g_0} = \frac{P_{01} + P_{02}}{m_1 g_0}.$$

4.2 Приближенная оценка возможности запуска на орбиту

Конечная скорость запуска на опорную орбиту является одновременно начальной скоростью орбитального полета, поэтому она определяется через заданные параметры орбиты выведения. Расчет орбитальных скоростей движения КА отражен в разделе невозмущенное движение. Обычно вывод КА производится в перигей орбиты и в направлении, совпадающем с местной горизонталью.

Начальные орбитальные скорости V_0 при запуске в перигее на круговую, эллиптическую, параболическую или гиперболическую орбиты рассчитываются по формулам

$$V_{\epsilon\delta} = \sqrt{\frac{\Re}{R + H_0}}; \quad V_{\dot{y}\epsilon\delta} = V_{\epsilon\delta} \cdot \sqrt{2 - \frac{r_\pi}{a}}; \quad V_{\dot{r}\delta\delta} = \sqrt{2} \cdot V_{\epsilon\delta}; \quad V_{\dot{a}\epsilon\delta} = \sqrt{V_{\dot{r}\delta\delta}^2 + V_{\epsilon\delta}^2},$$

где $\Re = 3.98602 \cdot 10^{-5} \frac{\text{м}^3}{\text{с}^2}$ гравитационный параметр Земли; $R=6371$ км — средний радиус Земли; H_0 — заданная высота круговой орбиты или ее перигея; $r_\pi = R + H_0$ — радиус перигея орбиты выведения; $a = 0.5(r_\pi + r_\alpha)$ — большая полуось эллиптической орбиты; r_α — радиус апогея орбиты выведения; V_∞ — гиперболический избыток скорости при выходе из гравитационного поля Земли

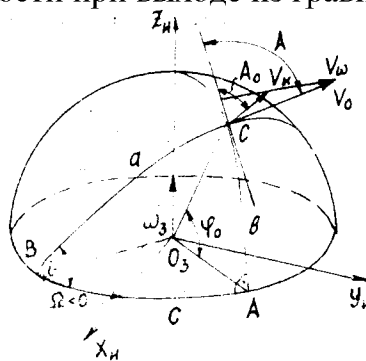


Рис. 25. Определение азимута стрельбы

Для определения азимута стрельбы A_0 необходимо вычислить угол между плоскостью опорной орбиты и местным меридианом пункта старта (рис. 25) из формулы косинусов углов сферического прямоугольного треугольника ABC:

$$A = \arcsin \left(\frac{\cos i}{\cos \varphi_0} \right).$$

Скорость полета в конце участка выведения на промежуточную орбиту относительно стартовой системы координат определяется из формулы

$$V_k = \sqrt{V_0^2 + V_\omega^2 - 2 \cdot V_0 \cdot V_\omega \cdot \sin A},$$

где V_0 — орбитальная скорость на промежуточной орбите; $V_\omega = \omega_3 \cdot R \cdot \cos \varphi_0$ — скорость стартового стола, обусловленная вращением Земли; $\omega_3 = 7.2921 \cdot 10^{-5} \text{ 1/c}$ — угловая скорость вращения Земли; $R = 6371 \text{ км}$ — средний радиус Земли.

Азимут стрельбы вычисляется по формуле

$$A_0 = \arccos\left(\frac{V_0}{V_k} \cdot \cos A\right).$$

Оценка энергетических возможностей носителя производится с целью проверки выполнимости задачи выведения носителем номинальной полезной нагрузки на опорную орбиту. Запасы топлива в ускорителях, конструктивно-компоновочная схема ракеты и удельные характеристики двигательной установки определяют располагаемую характеристическую скорость.

Располагаемой характеристической скоростью РКН называют скорость, которую теоретически он может развить под действием реактивных сил, двигаясь прямолинейно в вакууме при отсутствии гравитации. Эта скорость определяется известной формулой Циолковского:

$$V_{\text{Хддд}} = \sum_{i=1}^n V_{\text{ддд}} = \sum_{i=1}^n u_i \ln z_i.$$

где $u_i = P_{\text{ддд}}$ — эффективная скорость истечения газов; n — число ступеней ракеты.

При вычислении $V_{\text{ддд}}$ следует зафиксировать характеристические скорости каждой ступени в отдельности, которые могут служить верхней оценкой развиваемых каждой ступенью приращений скорости.

Поставленная задача выведения КА на опорную орбиту определяет требуемые запасы топлива носителя и, следовательно, требуемую для запуска характеристическую скорость.

Сначала определяется идеальная требуемая характеристическая скорость запуска. *Идеальной требуемой характеристической скоростью запуска* называется скорость, которая должна быть сообщена ЛА на поверхности Земли мгновенным импульсом, чтобы КА вышел без сопротивления атмосферы в точку, соответствующую концу активного участка, с заданной орбитальной скоростью V_0 .

Эта скорость определяется с помощью интеграла энергии:

$$V_{\text{хдд}} = \sqrt{V_0^2 + \frac{2\mathfrak{R}}{R} \left(1 - \frac{R}{R + H_0}\right)};$$

Идеальные характеристические требуемые скорости запуска КА на круговую, эллиптическую, параболическую и гиперболическую орбиты вычисляются соответственно последующим формулам:

$$V_{\text{хдд}} = \sqrt{\frac{\mathfrak{R}}{R + H_0}} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot (R + H_0)}{R} - 1} = V_{\text{ддд}_0} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot (R + H_0)}{R} - 1};$$

$$V_{\text{хдд}} = \sqrt{\frac{\mathfrak{R}}{R} \cdot \left(2 - \frac{R}{a}\right)} = V_1 \cdot \sqrt{2 - \frac{R}{a}};$$

$$V_{\tilde{o}\tilde{i}\tilde{a}\tilde{o}} = \sqrt{\frac{2\Re}{R}} = V_{\Pi}$$

$$V_{\tilde{o}\tilde{a}\tilde{e}\tilde{i}} = \sqrt{\frac{2\Re}{R} + V_{\infty}^2} = \sqrt{V_{\Pi}^2 + V_{\infty}^2};$$

где V_I и V_{Π} — первая и вторая космические скорости.

4.2 Расчет и анализ программной траектории движения первой ступени ракеты-носителя

При поверочно-проектировочном расчете траектории первой ступени рассматривается движение относительно стартовой системы координат в вертикальной плоскости, и принимаются следующие допущения: пренебрегают переносной и кориолисовой силами инерции, поле силы тяжести принимается однородным и плоскопараллельным, секундный расход массы принимается постоянным.

Система дифференциальных уравнений в проекциях на оси траекторной системы координат с учетом принятых допущений имеет следующий вид:

$$\dot{V} = g_0 \cdot (n_{xk} - \sin \Theta), \quad V_0 = 0;$$

$$\dot{\Theta} = \frac{g_0}{V} \cdot (n_{yk} - \cos \Theta), \quad \Theta_0 = \pi/2;$$

$$\dot{x} = V \cdot \cos \Theta, \quad x_0 = 0;$$

$$\dot{y} = V \cdot \sin \Theta, \quad y_0 = 0;$$

$$\text{где } n_{xk} = \frac{P - X_a}{mg_0}; \quad n_{yk} = \alpha^0 \cdot \frac{(P/57,296) + Y_a^{\alpha^0}}{mg_0};$$

$$m = m_0 - |\dot{m}| \cdot t; \quad P = P_I - (P_I - P_0) \cdot \frac{p(y)}{P_0};$$

$$X_a = C_{xa} q S; \quad Y_a^{\alpha^0} = C_{ya}^{\alpha^0} / S.$$

Параметры атмосферы, используемые при вычислении подъемной силы и лобового сопротивления, заданы таблицами стандартной атмосферы в виде зависимостей плотности ρ , температуры T , давления p и скорости звука a от высоты.

Через проектные параметры первой ступени величины, стоящие и правых частях дифференциальных уравнений, а также время работы двигателя определяются по формулам:

$$n_x = \frac{P - X_a}{mg_0} = \frac{n_{01} \cdot \left[\lambda - (\lambda - 1) \cdot \frac{p}{P_0} \right] - \frac{1}{g_0 P_M} \cdot C_{xa} q}{1 - \frac{n_{01} g_0}{P_{\phi \alpha 01}} t};$$

$$n_y = \alpha^0 \cdot \frac{(P/57,296) + Y_a^{\alpha^0}}{mg_0} = \alpha^0 \cdot \frac{\frac{n_{01}}{57,296} \left[\lambda - (\lambda - 1) \cdot \frac{P}{P_0} \right] + \frac{1}{g_0 P_M} \cdot C_{xa} q}{1 - \frac{n_{01} g_0}{P_{\partial \partial 01}} t};$$

$$t_{\varepsilon 1} = \frac{z_1 - 1}{z_1} \cdot \frac{P_{\partial \partial 01}}{n_{01} g_0}.$$

При выборе программы полета носителя на активном участке необходимо обеспечить полезной нагрузке максимально возможную конечную скорость для заданных конечных значений угла наклона траектории и высоты с учетом необходимых ограничений, наложенных условиями старта, аэродинамикой, прочностью конструкции и возможностями системы управления.

Большинство ограничений наложены на движение первой ступени, поэтому оптимальная программа движения первой ступени строится по ограничениям. Единственная возможность оптимизации заключается в варьировании участка ненулевых углов атаки.

В соответствии с ограничениями траектория первой ступени разделяется на характерные участки (рис.26).

Стартовый вертикальный участок возможно короткой длительности, продолжительность которого определяется временем, необходимым, чтобы развить достаточную для эффективного действия органов управления скорость $V_1 \cong 50 \text{ м/с}$. Этот момент времени t_1 может быть приближенно определен из второй формулы Циолковского, которая является трансцендентным уравнением относительно t_1 :

$$V_1 = P_{\partial \partial 01} \ln \frac{1}{1 - \frac{n_{01} g_0}{P_{\partial \partial 01}} t_1} - g_0 t_1$$

Программа на вертикальном участке: $\alpha = 0 (\varphi = \Theta = \pi/2)$.

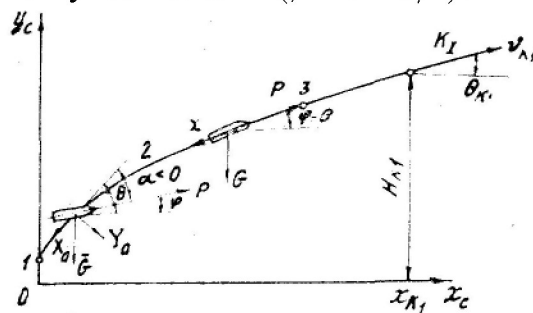


Рис. 26. Основные участки траектории первой ступени

Начальный участок разворота, на котором система управления быстро отклоняет продольную ось носителя до заданного максимального отрицательного угла атаки α_m затем постепенно уменьшает угол атаки до нулевого или пренебрежимо малого значения.

Длительность этого участка определяется моментом времени t_2 , когда достигается скорость $V_2 = 270 \text{ м/с}$, соответствующая $M_2 = 0,8$. Этот момент времени приближенно рассчитывается также из уравнения Циолковского:

$$V_2 = P_{\dot{\alpha}01} \ln \frac{1}{1 - \frac{n_{01} g_0}{P_{\dot{\alpha}01}} t_2} - g_0 t_2$$

Программа изменения угла атаки может быть взята в виде непрерывной функции (рис.27):

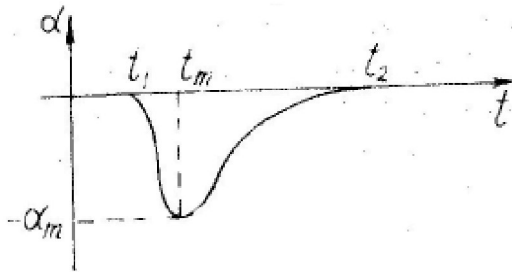


Рис.27. Программа изменения угла атаки

$\alpha = -\alpha_m \sin^2 \frac{\pi(t-t_1)}{(t-t_1) + \Re(t_2-t)}$, где $\Re = \frac{t_m-t_1}{t_2-t_m} = \frac{1}{4}$; t_m — момент времени, когда достигается минимум угла атаки.

Такая зависимость определяет семейство программ, зависящих от одного параметра α_m . Варьированием этого параметра α_m определяется программа, обеспечивающая в конце работы первой ступени нужный угол наклона траектории Θ_{k1} . Угол α_m ориентировочно можно определить по графикам рис.28-29 в зависимости от заданного Θ_{k1} и от тяговооруженности ступени n_{01} . Выбрав шаг варьирования $\Delta\alpha_m$ в окрестности α_m по результатам расчетов траектории следует построить для заданного носителя график $\Theta_{k1}(\alpha_m)$, по которому определяется уточненное значение α_m . Для найденного значения α_m окончательно выполняется расчет траектории первой ступени.

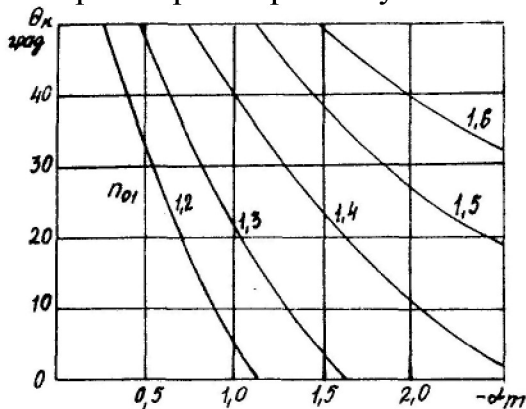


Рис.28. Зависимость Θ_{k1} от α_m
 n_{01}

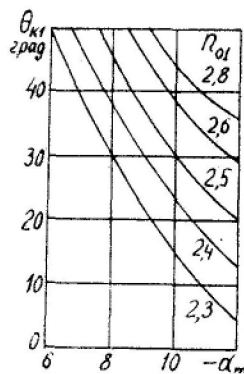


Рис. 29. Зависимость Θ_{k1} от α_m для больших

На участке гравитационного разворота, на котором угол атаки равен нулю, искривление траектории носителя происходит только под действием силы тяжести. За это время носитель проходит околозвуковой диапазон скоростей и совершает разгон до гиперзвуковых скоростей, одновременно преодолевая плотные слои атмосферы с минимальным лобовым сопротивлением.

Примечание. При запуске КА ориентировочно можно принимать значения угла

наклона траектории Θ_{k1} , в конце работы первой ступени в зависимости от высоты выведения H_0 :

Высота орбиты, км	185	200	250	300	400	500
Угол наклона траектории в конце первой ступени, град	20	25	28	30	35	40

Если на 1-й ступени установлены твердотопливные ускорители с коротким временем работы, то следует ориентировочно принимать значение угла наклона траектории в конце работы второй ступени $\Theta_{k2} = 0.5 \cdot \Theta_{k1}$, где Θ_{k1} — берется в зависимости от высоты орбиты.

Для многоступенчатых РКН этим участком заканчивается программа первой ступени. В конце участка гравитационного разворота РКН выйдет на определенную высоту $y_{k1} = H_{k1}$, разовьет скорость V_{k1} и будет иметь заданный угол наклона траектории Θ_{k1} , которые являются начальными условиями для построения программы и расчета траектории второй ступени.

4.3 Расчет и анализ программных траекторий внеатмосферных ступеней ракеты космического назначения

Выбор схемы выведения

Перед началом расчета движения верхних ступеней носителя, работающих в разреженных слоях атмосферы ($H > 50$ км), необходимо произвести выбор схемы выведения. В зависимости от структуры и назначения носителя могут встретиться следующие варианты схем выведения на опорную орбиту.

В а р и а н т 1. Вывод на орбиту обеспечивает одна верхняя (вторая) ступень двухступенчатого носителя с ЖРД. При выборе программы движения решается двухпараметрическая краевая задача выведения ($H_k = H_{i\partial a}$, $\Theta_k = \Theta_{i\partial a}$).

В а р и а н т 2. Вывод на орбиту завершают две верхние ступени трехступенчатого носителя с ЖРД. Промежуточная ступень обеспечивает постепенное уменьшение угла наклона траектории до $\Theta_{k2} = (1/3 \dots 1/4) \Theta_{k1}$. При выборе программы движения этой ступени решается однопараметрическая краевая задача. Верхняя ступень завершает вывод на орбиту. При выборе программы полета верхней ступени решается двухпараметрическая краевая задача ($H_{i\partial a}$, $\Theta_{i\partial a}$).

В а р и а н т 3. Вывод на орбиту завершают две верхние ступени с РДТТ. Двигатели на твердом топливе работают короткое время, за которое при непрерывной работе двигателей полезная нагрузка не успевает подняться на заданную высоту. В этом случае вводится пассивный участок полета между промежуточной и верхней ступенями носителя. Промежуточная ступень обеспечивает выведение под таким углом наклона траектории в конце работы ступени, чтобы при пассивном полете по баллистической траектории в апогее была достигнута заданная высота орбиты $H_{i\partial a}$. В апогее включается двигатель верхней ступени, обеспечивающий разгон полезной нагрузки до орбитальной скорости при соблюдении условия $\Theta = 0$.

При определении траекторий верхних ступеней носителя необходимо учитывать кривизну поверхности Земли и неоднородность поля силы тяжести. Аэродинамическими и инерционными силами, обусловленными вращением Земли, пренебрегаются. Система дифференциальных уравнений движения в проекциях на оси стартовой системы координат (рис. 30) с учетом принятых допущений после линеаризации проекций гравитационного ускорения имеет вид :

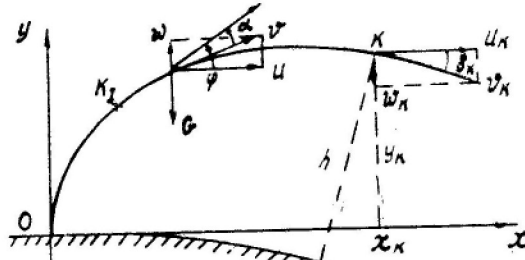


Рис.30. Схема движения верхней, ступени носителя

$$\left. \begin{aligned} \dot{u} &= p \cos \varphi - v^2 x, \\ \dot{\omega} &= p \sin \varphi - g_0 + 2v^2 y, \\ x &= u, \dot{y} = \omega, \end{aligned} \right\}$$

где $p \frac{P}{m} = \frac{n_0 g_0}{1 - \beta \cdot t} = \frac{n_0 g_0}{1 - a \cdot \xi}$ — ускорение силы тяги;

$\beta = \frac{\dot{m}}{m} = \frac{n_0 g_0}{P_{\text{дв}}}$ — относительный секундный расход топлива;

$a = m_T / m$ — коэффициент наполнения топливом ступени;

$\xi = t / t_k$ — безразмерное время;

m_T, m — масса топлива и начальная масса ступени;

t_k — время работы ступени; $v^2 = g_0 / R$.

Начальные условия выражаются через параметры, полученные в конце траектории предыдущей ступени:

$$u_0 = V_{k1} \cos \Theta_{k1}, \quad \omega_0 = V_{k1} \sin \Theta_{k1}, \quad x_0 = x_{k1}, \quad y_0 = y_{k1}.$$

Конечные условия зависят от варианта схемы выведения.

В качестве приближенно-оптимальной программы угла тангажа принимается программа, полученная из решения вариационной задачи движения верхней ступени в плоскопараллельном гравитационном поле вне атмосферы (рис.31):

$$\text{tg} \varphi = \text{tg} \varphi_0 + Bt, \text{ где } B = b/t_k$$

После подбора параметров оптимальной программы угла тангажа по найденным параметрам окончательно рассчитываются конечные параметры движения верхней ступени относительно стартовой системы координат по формулам. Затем определяются ошибки конечных параметров и осуществляется их сравнение с заданными допустимыми отклонениями.

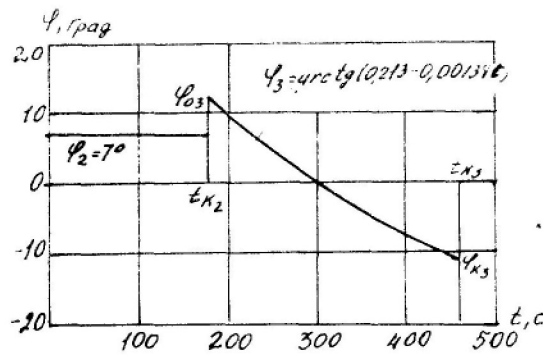


Рис. 31. Оптимальные программы движения верхних ступеней

Примечание. Для варианта запуска КА после завершения расчета конечных параметров движения с табличным значением коэффициента наполнения топливом ступени a' следует сделать пересчет конечных параметров движения на действительное значение коэффициента a ступени по следующему алгоритму:

по первой формуле Циолковского определяются приращение скорости и конечная скорость за полное время работы ступени:

$$\Delta V = u_i (\ln z - \ln z'), \quad z' = 1/(1 - a'), \quad V_k = V'_k + \Delta V;$$

по второй формуле Циолковского определяется приращение пути, проходимого последней ступенью по дуге орбиты за время $(t_k - t'_k)$:

$$\Delta S = \left[V_0 t_k + u_i t_k \cdot \left(1 - \frac{\ln z}{z-1} \right) \right] - \left[V_0 t'_k + u_i t'_k \cdot \left(1 - \frac{\ln z'}{z'-1} \right) \right]$$

где V_0 — начальная скорость ступени;

находится приращение угловой дальности ступени и полная угловая дальность:

$$\Delta \delta_k = \Delta S / (R + H_{i\partial a}), \quad \delta_k = \delta'_k + \Delta \delta_k;$$

рассчитываются конечные параметры движения ступени.

$$x_k = (R + H_{i\partial a}) \cdot \sin \delta_k, \quad y_k = (R + H_{i\partial a}) \cdot \cos \delta_k - R,$$

$$u_k = V_k \cos \delta_k, \quad \omega_k = -V_k \sin \delta_k.$$

В результате решения двухпараметрической краевой задачи выведения на орбиту при полном выгорании топлива последней ступени достигается максимально возможная конечная скорость, которая может не совпадать со скоростью, необходимой для движения по заданной орбите. Для обеспечения вывода полезной нагрузки с нужной скоростью необходимо сделать пересчет времени движения последней ступени, что эквивалентно изменению запаса топлива. Принимая, что в конце работы последней ступени движение происходит без изменения угла наклона траектории (для КЛА $\Theta_{i\partial a} = 0$) и без сопротивления атмосферы, для пересчета скорости допустимо применять формулу Циолковского.

Находится избыток (недостаток) скорости с учетом добавки от вращения Земли: $\Delta V = V_k + \Delta V_{\partial \partial} - V_{i\partial a}$. Этот избыток (недостаток) скорости возникает из-за излишнего (недостаточного) запаса топлива последней ступени.

Определяется потребный запас топлива и время работы ступени по формулам:

$$\Delta V = u_n \cdot (\ln z_n - \ln z'_n) + g_i (t_{kn} - t'_{kn}) \sin \Theta_{i\partial a},$$

$$z'_n = z_n \exp(-\Delta V / u_i);$$

$$m'_{\partial n} = \frac{z'_n - 1}{z'_n} m_n;$$

$$t'_{kn} = m'_{Tn} / \dot{m}_n,$$

Здесь n номер последней ступени, величины со штрихами соответствуют потребным значениям.

С новым значением времени работы t'_{kn} последней ступени носителя необходимо повторить расчет двухпараметрической (для КА) краевой задачи выведения по ранее приведенным алгоритмам.

Как видно из изложенного выше, выведение на заданную орбиту требует решения трехпараметрической для КА краевой задачи, которая решается методом последовательных приближений.

После пересчета следует найти оценку массы полезной нагрузки, которая может быть выведена на заданную орбиту, и если есть избыток (недостаток) топлива Δm_T , то его необходимо учесть в полезной нагрузке:

$$\Delta m_T = m_{Tn} - m'_{Tn}; \quad m'_{ij} = m_{ij} + \Delta m_O.$$

Пересчет конечных параметров из стартовой системы координат в инерциальную геоцентрическую систему координат

В результате расчета траектории выведения найдены координаты и проекции скорости движения в конце активного участка относительно стартовой системы координат $Ox_c y_c z_c$. Для определения характеристик орбитального движения необходимо для этого же момента времени вычислить координаты и проекции скорости относительно инерциальной системы отсчета.

В качестве инерциальной системы отсчета возьмем геоцентрическую экваториальную систему координат, ось $O_c x_e$ которой проходит через меридиан точки старта в момент окончания активного участка. Заметим, что введенная таким образом инерциальная система координат повернута относительно звездной геоцентрической инерциальной системы на угол S , где S — местное звездное время в точке старта в момент выхода КА на опорную орбиту.

Положение стартовой системы координат $O_3 x_c y_c z_c$

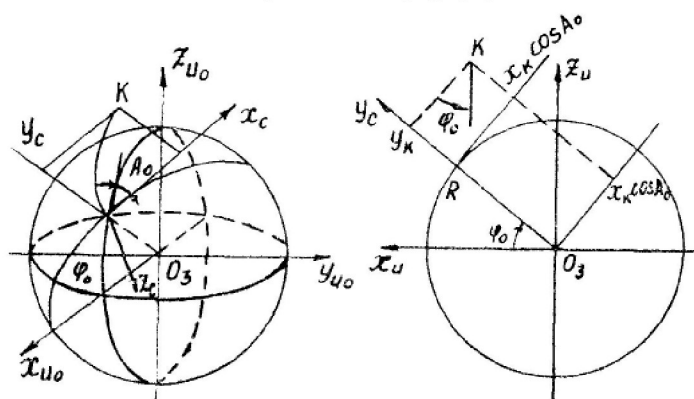


Рис. 32 Переход от стартовой к инерциальной системе координат.

относительно принятой инерциальной $O_3x_\epsilon y_\epsilon z_\epsilon$ определяется широтой пункта старта φ_0 и азимутом запуска A_0 (рис. 32).

Переход от координат конца активного участка x_k, y_k, z_k в стартовой системе к начальным координатам x_0, y_0, z_0 орбитального движения в геоцентрической инерциальной системе (рис. 16)) выполняется по формулам :

$$x_0 = -x_k \cos A_0 \sin \varphi_0 + (R + y_k) \cos \varphi_0 ;$$

$$y_0 = x_k \sin A_0 ;$$

$$z_0 = x_k \cos A_0 \cos \varphi_0 + (R + y_k) \sin \varphi_0 .$$

Величина радиуса - вектора начальной точки орбитального движения

$$r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} .$$

Проекции относительной скорости V_k на оси геоцентрической системы $O_3x_\epsilon y_\epsilon z_\epsilon$ выражаются через проекции относительной скорости u_k, ω_k на стартовые оси аналогичными формулами.

Абсолютная скорость в начале орбитального движения складывается из относительной скорости $V^r = V_k$, и переносной скорости, которая определяется формулой:

$$\vec{V}^e = \vec{\omega}_3 \times \vec{r}_0 = \begin{vmatrix} \vec{i}_\epsilon & \vec{j}_\epsilon & \vec{\Re}_\epsilon \\ 0 & 0 & \omega_3 \\ x_0 & y_0 & z_0 \end{vmatrix} = -\omega_3 y_0 \vec{i}_\epsilon + \omega_3 x_0 \vec{j}_\epsilon ,$$

где $\vec{i}_\epsilon, \vec{j}_\epsilon, \vec{\Re}_\epsilon$ – единичные векторы геоцентрической системы координат.

Таким образом, проекции абсолютной скорости на геоцентрические оси координат и начальной точке орбиты определяются формулами:

$$V_{x0} = \dot{x}_0 = -u_k \cos A_0 \sin \varphi_0 + \omega_k \cos \varphi_0 - \omega_3 y_0 ;$$

$$V_{y0} = \dot{y}_0 = u_k \sin A_0 + \omega_3 x_0 ;$$

$$V_{z0} = \dot{z}_0 = u_k \cos A_0 \cos \varphi_0 + \omega_k \sin \varphi_0 .$$

Величина начальной скорости орбитального движения и угол наклона ее к местному горизонту соответственно

$$V_0 = \sqrt{\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2} , \quad \Theta_0 = \arcsin \frac{x_0 \dot{x}_0 + y_0 \dot{y}_0 + z_0 \dot{z}_0}{r_0 V_0} .$$

5. Анализ возмущенного движения космических аппаратов

После выхода на орбиту КА испытывает действие различных возмущающих сил, которые влияют на характер выполнения поставленных задач. Поэтому необходимо при системном анализе космических миссий оценивать хотя бы основные возмущающие факторы, к которым относятся нецентральность поля тяготения и для орбит ниже 500 км – торможение атмосферой.

Движение космического аппарата происходит в сложном силовом поле, характеризуемом большим числом сил различной физической природы. Основной силой является ньютоновская сила гравитационного притяжения, соответствующая сферической модели Земли с равномерным по радиусу распределением массы.

Движение под действием этой силы называется невозмущенным движением, характеризуемым постоянством элементов орбиты. При проектировании космических аппаратов, движущихся по низким высотам до 1000 км, необходимо использовать более сложные модели движения, учитывающие дополнительные силы. К их числу относятся сила, которая появляется в случае использования более сложной, модели Земли - эллипсоида вращения (обычно ограничиваются учетом второй зональной гармоники разложения потенциала поля притяжения), а также аэродинамическая сила, возникающая за счет действия атмосферы Земли. Такое движение космического аппарата называется *возмущенным движением*.

Учет дополнительных сил приводит к появлению периодических и вековых возмущений в движении космического аппарата.

При системном анализе космических миссий учитывают обычно вековые возмущения, которые нарастают монотонно от витка к витку.

Вековые возмущения вычисляются по приближенной методике за один виток космического аппарата вокруг Земли (на интервале изменения аргумента широты u и от 0 до 2π).

5.1 Возмущения орбиты, вызванные нецентральностью поля тяготения Земли

Вековые возмущения наклона i , фокального параметра p , эксцентриситета e орбиты равны нулю ($\delta i = \delta p = \delta e = 0$). Вековое возмущение (прецессия) относительно звезд (в абсолютной системе координат) долготы восходящего узла орбиты за 1 виток определяется по соотношению

$$\delta\Omega = -\frac{2\pi}{p^2} \frac{\varepsilon}{\mu} \cos i$$

Под влиянием сжатия Земли восходящий узел орбиты перемещается в сторону, противоположную вращению Земли (к Западу), для прямых орбит ($i < 90^\circ$) и по направлению вращения Земли (к Востоку) для обратных орбит ($i > 90^\circ$). Для полярных орбит ($i = 90^\circ$) прецессия плоскости орбиты отсутствует ($\delta\Omega = 0$).

Вековое возмущение (прецессия) аргумента перигея орбиты в абсолютной системе координат за 1 виток определяется по соотношению

$$\delta\omega = \frac{2\pi}{p^2} \frac{\varepsilon}{\mu} (5\cos^2 i - 1)$$

Под влиянием сжатия Земли аргумент перигея орбиты при $i < 63^\circ 26'$ и $i > 116^\circ 34'$ аргумент смещается в направлении движения космического аппарата, при $63^\circ 26' < i < 116^\circ 34'$ аргумент перигея орбиты смещается в направлении, противоположном движению космического аппарата. При $i = 63^\circ 26'$ и $i = 116^\circ 34'$ смещение перигея отсутствует ($\delta\omega = 0$).

Вековые возмущения за N витков $\Delta\Omega, \Delta\omega$:

$$\Delta\Omega = N\delta\Omega$$

$$\Delta\omega = N\delta\omega$$

В формулах (13), (14) p - фокальный параметр и e - эксцентриситет орбиты в начальный момент времени.

5.2 Возмущения движения, вызванные торможением атмосферой

Вековые возмущения долготы восходящего узла Ω , наклонения орбиты i (если не учитывается захват атмосферы вращением Земли), аргумента перигея ω (для случая экспоненциальной модели плотности атмосферы) равны нулю ($\delta\Omega = \delta i = \delta\omega = 0$). Вековые возмущения фокального параметра p и эксцентриситета e за 1 виток определяются по нижеприведенным формулам для модели изотермической атмосферы $p = p_1 \exp\left(-\frac{H-H_1}{\tilde{H}}\right)$:

-эллиптические орбиты с малым начальным эксцентриситетом

$$0 < e < \frac{2\tilde{H}}{a}$$

$$\delta p = -4\pi\sigma\rho_{cp}p^2\left(1 + \frac{v^2}{8} + \frac{v^4}{192} + \dots\right) \quad (16)$$

$$\delta e = -2\pi\sigma\rho_{cp}p\left[v\left(1 + \frac{v^2}{8} + \frac{v^4}{192} + \dots\right) + e\left(1 + \frac{3v^2}{8} + \frac{5v^4}{192} + \dots\right)\right]$$

-эллиптические орбиты со средним начальным эксцентриситетом

$$\frac{1.5\tilde{H}}{a} < e < 0.5$$

$$\delta p = -\frac{2\sigma\rho_n p^2}{1-e^2} \sqrt{\frac{2\pi}{v}} (f_0 - 0.5e^2 f_2 - 0.125e^4 f_4 - \dots)$$

$$\delta e = -2\sigma\rho_n p \sqrt{\frac{2\pi}{v}} (f_1 + e f_2 - 0.5e^2 f_4 - \dots)$$

$$f_0 = 1 + \frac{1}{8v} + \frac{9}{128v^2} + \dots$$

$$f_1 = 1 - \frac{3}{8v} - \frac{15}{128v^2} - \dots$$

$$f_2 = 1 - \frac{7}{8v} + \frac{57}{128v^2} - \dots$$

$$f_3 = 1 - \frac{11}{8v} + \frac{225}{128v^2} - \dots$$

$$f_4 = 1 - \frac{15}{8v} + \frac{489}{128v^2} - \dots$$

-эллиптические орбиты с большим начальным эксцентриситетом
 $0.5 < e < 1$

$$\delta p = -2f_0 \sigma p_n \sqrt{\frac{2\pi}{e}} p^3 \dot{H}$$

$$\delta e = -2f_1 \sigma p_n (1 + e) \sqrt{\frac{2\pi}{e}} p \dot{H}$$

Здесь $v = \frac{ae}{\dot{H}}$,

$\dot{H} = \frac{R_0 T}{g_1 M}$ - высота однородной атмосферы (равна высоте некоторого

фиктивного столба однородной атмосферы, плотность которой равна ρ_1 , и который имеет на высоте $H = H_1$ то же давление, что и рассматриваемая атмосфера),

p_n - плотность атмосферы в перигее,

$p_{cp} = p_n \exp(-v)$ - средняя плотность атмосферы для околокруговой орбиты.

Вековые возмущения фокального параметра p и эксцентриситета e за N витков рассчитываются по формулам.

Под влиянием атмосферы эллиптическая орбита космического аппарата с течением времени все более приближается к круговой.

Период обращения монотонно убывает, а средняя скорость полета возрастает. Максимальная скорость понижения высоты орбиты приходится на район апогея, минимальная - на район перигея орбиты.

Для круговой (или околокруговой $e < 0,02$) орбиты вековые возмущения обычно рассчитываются в полярных координатах.

Формулы расчета изменений траекторных параметров за 1 виток:

-изменение модуля радиуса – вектора

$$\delta r = -4\pi \sigma p r^2$$

-смещение вдоль орбиты

$$\delta r = 12\pi^2 \sigma p r^2$$

-изменение периода обращения

$$\delta T = -12\pi^2 \sigma p \sqrt{\frac{r^5}{\mu}}$$

-изменение радиальной составляющей скорости полета

$$\delta V_r = -2\sigma p \sqrt{\mu r}$$

-изменение трансверсальной составляющей скорости полета

$$\delta V_n = 2\pi \sigma p \sqrt{\mu r}$$

где $r = R_3 + H$

Формулы расчета изменений траекторных параметров за N витков

$$\Delta l = \frac{N^2}{2} \delta l$$

$$\Delta r = N \delta r$$

$$\Delta V_n = N \delta V_n$$

$$\Delta T = \frac{2N-1}{2} \delta T \quad (\text{возмущение периода обращения за } N \text{ витков}).$$

При системном анализе миссий космических аппаратов, движущихся по низким орбитам, важнейшей характеристикой является время существования на орбите, т. е. время пассивного движения с момента выхода космического аппарата на орбиту до момента входа в плотные слои атмосферы и прекращения его существования. Время существования можно приближенно рассчитать только для круговых орбит по формуле

$$t_{\text{сущ}} = \frac{F(H_0)}{\delta}$$

где $F(H_0)$ - функция от начальной высоты полета отыскивается по табл. 2 для соответствующего индекса солнечной активности,

σ - баллистический коэффициент космического аппарата.

Для получения зависимости изменения высоты полета от времени движения $H(\Delta t_i)$ необходимо выбрать шаг расчета по высоте ΔH и воспользоваться формулой (25):

$$H_t = (H \Delta t_i) = H_0 - \Delta H_i$$

$$\Delta t_i = t_i - t_0 = \frac{F(H_i) - F(H_0)}{\sigma}$$

где Δt_i - время снижения с высоты H_0 до высоты H_i :

$\Delta H = \frac{H_k - H_0}{K}$, K - количество шагов, на который разбит рассматриваемый интервал высот ($H_0 \div H_k$).

В качестве конечной высоты, по достижении которой расчет необходимо прекращать, рекомендуется выбирать критическую высоту круговой орбиты H^* (высота круговой орбиты, для которой время существования равно периоду обращения космического аппарата по орбите).

Критическая высота круговой орбиты находится в результате решения уравнения

$$\frac{2\pi(R_3 + H^*)^{3/2}}{\sqrt{\mu}} = \frac{F(H^*)}{\sigma}$$

Для большинства космических аппаратов H^* лежит в диапазоне от 90 км до 110 км.

При проведении расчетов по вышеприведенным формулам рекомендуется использовать табл. 2, в которой в зависимости от высоты полета H приводятся величины функции $F(H)$ для минимального ($65 * 10^{-22} \frac{\text{ВТ}}{\text{м}^2 \text{Гц}}$), среднего ($175 * 10^{-22} \frac{\text{ВТ}}{\text{м}^2 \text{Гц}}$) и максимального ($275 * 10^{-22} \frac{\text{ВТ}}{\text{м}^2 \text{Гц}}$) значений индекса солнечной активности F_0 , высоты однородной атмосферы $\bar{H}$ модельной плотности воздуха ρ для среднего значения индекса солнечной активности. Эти

данные соответствуют Государственному стандарту СССР "Атмосфера Земли верхняя. Модель плотности для проектных баллистических расчетов искусственных спутников Земли" (ГОСТ 25645.101 - 83).

Таблица 2

$H, \text{ км}$	$\bar{H}, \text{ км}$	$\rho \text{ кг/м}^3$	$F(H), \text{ м}^2 \cdot \text{сут/км}$		
			$F_{0\text{мин}}$	$F_{0\text{ср}}$	$F_{0\text{макс}}$
120	6	2,440-8	3,365-5	3,365-5	3,365-5
130	12	8,357-9	1,255-4	1,221-4	1,192-4
140	16	4,201-9	3,514-4	3,209-4	3,046-4
150	19	2,425-9	8,029-4	6,842-4	6,342-4
160	22	1,514-9	1,612-3	1,285-3	1,167-3
170	25	9,954-10	2,966-3	2,219-3	1,979-3
180	27	6,766-10	5,823-3	3,609-3	3,166-3
190	32	4,916-10	8,695-3	5,585-3	4,774-3
200	34	3,645-10	1,380-2	8,270-3	6,945-3
210	36	2,748-10	2,113-2	1,187-2	9,728-3
220	38	2,102-10	3,659-2	1,659-2	1,333-2
230	40	1,628-10	4,484-2	2,272-2	1,787-2
240	42	1,274-10	6,357-2	3,058-2	2,353-2
250	43	1,007-10	8,885-2	4,056-2	3,050-2
260	45	8,023-10	1,227-1	5,313-2	3,900-2
270	46	6,442-11	1,676-1	6,883-2	4,930-2
280	48	5,209-11	2,269-1	8,829-2	6,168-2
290	49	4,239-11	3,044-1	1,123-1	7,646-2
300	51	3,469-11	4,054-1	1,416-1	9,401-2
310	52	2,854-11	5,361-1	1,774-1	1,147-1
320	53	2,360-11	7,042-1	2,207-1	1,391-1
330	55	1,960-11	9,195-1	2,729-1	1,675-1
340	56	1,635-11	1,194-1	3,356-1	2,007-1
350	57	1,369-11	1,542	4,105-1	2,392-1
360	58	1,151-11	1,981	4,997-1	2,838-1
370	59	9,704-12	2,534	6,056-1	3,351-1
380	60	8,212-12	3,226	7,309-1	3,941-1
390	62	6,970-12	4,091	8,786-1	4,617-1
400	63	5,934-12	5,166	1,052	5,389-1

Продолжение табл.2

$H, \text{ км}$	$\bar{H}, \text{ км}$	$\rho \text{ кг/м}^3$	$F(H), \text{ м}^2 \cdot \text{сут/км}$		
			$F_{0\text{мин}}$	$F_{0\text{ср}}$	$F_{0\text{макс}}$
410	64	5,066-12	6,500	1,256	6,270-1
420	65	4,337-12	8,147	1,493	7,271-1
430	66	3,722-12	1,018	1,771	8,406-1
440	67	3,201-12	1,267	2,093	9,692-1
450	68	2,760-12	1,573+1	2,467	1,114
460	69	2,365-12	1,946+1	2,900	1,278
470	70	2,065-12	2,401+1	3,401	1,462
480	71	1,792-12	2,954+1	3,978	1,669
490	72	1,557-12	3,624+1	4,641	1,902
500	73	1,356-12	4,435+1	5,404	2,161
510	74	1,183-12	5,415+1	6,277	2,452
520	75	1,034-12	6,594+1	7,278	2,776
530	76	9,053-13	8,011+1	8,420	3,138
540	76	7,937-12	9,712+1	9,723	3,540
550	77	6,970-13	1,175+2	1,121+1	3,987
560	78	6,129-13	1,418+2	1,289+1	4,483
570	79	5,398-13	1,708+2	1,481+1	5,033
580	80	4,760-13	2,054+2	1,698+1	5,642
590	81	4,204-13	2,464+2	1,944+1	6,316
600	82	3,717-13	2,916+2	2,223+1	7,060
610	96	3,377-13	3,597+2	2,531+1	7,788
620	97	3,044-13	4,329+2	2,880+1	8,666
630	98	2,747-13	5,156+2	3,252+1	9,319
640	99	2,482-13	6,084+2	3,670+1	1,031+11
650	101	2,246-13	7,112+2	4,133+1	1,109+1
660	102	2,035-13	8,249+2	4,647+1	1,222+1
670	103	1,846-13	1,088+3	5,213+1	1,344+1
680	104	1,676-13	1,239+3	5,832+1	1,462+1
690	105	1,524-13	1,404+3	6,517+1	1,606+1
700	107	1,387-13		7,270+1	1,762+1

Продолжение табл.2

$H, \text{ км}$	$\bar{H}, \text{ км}$	$\rho \text{ кг/м}^3$	$F(H), \text{ м}^2 \cdot \text{сут/км}$		
			$F_{0\text{мин}}$	$F_{0\text{ср}}$	$F_{0\text{макс}}$
710	108	1,583-13	1,583+3	8,084+1	1,933+1
720	109	1,152-13	1,774+3	8,988+1	2,074+1
730	110	1,051-13	1,988+3	9,980+1	2,272+1
740	111	9,605-14	2,215+3	1,106+2	2,486+1
750	112	8,783-14	2,460+3	1,225+2	2,721+1
760	113	8,038-14	2,724+3	1,354+2	2,975+1
770	115	7,363-14	3,008+3	1,495+2	3,255+1
780	116	6,750-14	3,312+3	1,649+2	3,557+1
790	117	6,194-14	3,638+3	1,817+2	3,887+1
800	118	5,687-14	3,987+3	1,999+2	4,245+1
810	119	1,183-12	4,359+3	2,198+2	4,635+1
820	120	1,034-12	4,757+3	2,414+2	5,030+1
830	121	9,053-13	5,181+3	2,648+2	5,489+1
840	122	7,937-12	5,632+3	2,903+2	5,989+1
850	123	6,970-13	6,111+3	3,179+2	6,533+1
860	124	6,129-13	6,621+3	3,478+2	7,124+1
870	125	5,398-13	7,162+3	3,802+2	7,767+1
880	126	4,760-13	7,736+3	4,153+2	8,476+1
890	127	4,204-13	8,344+3	4,533+2	9,237+1
900	128	3,717-13	8,987+3	4,944+2	1,006+2
910	129	3,377-13	9,668+3	5,388+2	1,092+2
920	130	3,044-13	1,039+4	5,867+2	1,189+2
930	131	2,747-13	1,115+4	6,384+2	1,295+2
940	132	2,482-13	1,195+4	6,942+2	1,410+2
950	133	2,246-13	1,279+4	7,543+2	1,535+2
960	134	2,035-13	1,369+4	8,192+2	1,671+2
970	135	1,846-13	1,463+4	8,890+2	1,818+2
980	135	1,676-13	1,561+4	9,641+2	1,978+2
990	136	1,524-13	1,665+4	1,045+3	2,152+2
1000	137	1,387-13	1,775+4	1,132+3	2,341+2

Оценка времени существования космического аппарата на эллиптической орбите является сложной задачей, которая решается путем численного интегрирования уравнений, описывающих возмущенное движение космического аппарата.

Для оценочных расчетов $t_{\text{сущ}}$ можно использовать следующие формулы:

$$t_{\text{сущ}} = \begin{cases} \frac{F(H_{\text{ср0}})F_1(v_0)}{\sigma}, & \text{при } e_0 < \frac{\tilde{H}}{a_0} \\ \frac{\Phi(H_{\text{п0}})\psi_1(e_0)F_2(v_0)}{\sigma}, & \text{при } \frac{\tilde{H}}{a_0} < e_0 < e_{\text{кр}} \\ \frac{\Phi(H_{\text{п0}})\psi(e_0)}{\sigma}, & \text{при } e_0 > e_{\text{кр}} \end{cases}$$

$$\text{Здесь } v_0 = \frac{a_0 e_0}{\tilde{H}}$$

$$e_{\text{кр}} \sim 0.66 \sqrt{\frac{\tilde{H}}{R_3 + H_{\text{п0}}}} - 0.22 \frac{\tilde{H}}{R_3 + H_{\text{п0}}}$$

$$\Phi(H_{\text{п0}}) = \frac{R_3 + H_{\text{п0}}}{p(H_{\text{п0}})} \sqrt{\frac{\pi}{2\mu\tilde{H}}}$$

$$\psi_1(e_0) = \frac{e_0^{3/2}}{2(1 - e_0)}$$

$$\psi(e_0) = \frac{e_0^{\frac{3}{2}}}{2} \left(1 + \frac{1}{6}e_0 + \frac{31}{48}e_0^2 + \frac{71}{480}e_0^3 + \dots \right)$$

$$\text{при } v_0 \leq 2 F_1(v_0) = \left(1 + \frac{v^2}{8} + \frac{v^4}{192} + \dots \right)^{-1}$$

$$F_2(v_0) = 2 \exp(v_0) \left[\sqrt{2\pi v_0^3} \left[1 - \frac{v_0^2}{8} - \frac{v_0^4}{192} + \dots \right] \right]$$

$$\text{при } v_0 \geq 1,5$$

$$F_2(v_0) = \left(1 - \frac{3}{8v_0} - \frac{15}{128v_0^2} - \frac{105}{1024v_0^3} - \dots \right)^{-1}$$

Баллистический коэффициент σ является основным проектным параметром космического аппарата и определяется по формуле:

$$\sigma = \frac{C_x S}{m}, \text{ где } C_x - \text{коэффициент аэродинамического сопротивления, который для большинства современных космических аппаратов лежит в пределах 2-2,5 (обычно принимается 2,2), } m - \text{масса космического аппарата, } S - \text{площадь максимального сечения космического аппарата, перпендикулярная вектору скорости полета (площадь миделевого сечения).}$$

Для ориентированного космического аппарата определение величины S не представляет труда, для неориентированного космического аппарата в форме цилиндра при его беспорядочном вращении $S = Ld(0.818 + 0.25 \frac{L}{d})$,

где L и d - соответственно длина и диаметр цилиндра.

Для космических аппаратов с выпуклой поверхностью при равновероятных положениях осей $S \sim S_{\text{полн}}/4$, где $S_{\text{полн}}$ – площадь всей поверхности.

6. Перелеты между орбитами и маневрирование космических аппаратов

6.1 Расчет маневров перелета между орбитами

В общем случае полет КА для выполнения целевой задачи является сложной космической операцией и предусматривает многократное включение двигательных установок.

Каждое включение двигательной установки с целью изменения величины и (или) направления скорости КА называется элементарной космической операцией. Потребная характеристическая скорость элементарной операции определяется видом маневра изменения скорости. Потребная характеристическая скорость сложной космической операции является суммой характеристических скоростей элементарных космических операций:

$$V_x = \sum_{i=1}^n V_{xi} \quad \text{где } n \text{ — число элементарных космических операций.}$$

При системном анализе космических миссий принимается, что двигатели работают на химических источниках энергии и их тяга достаточно велика. В этом случае время работы двигателей при совершении маневров перехода между орбитами мало по сравнению с общей продолжительностью перелета, и можно принять предположение об импульсном изменении скорости.

Приведем основные формулы для расчета потребных импульсов скорости для различных маневров на орбитах, рассматриваемых как элементарные космические операции.

В зависимости от поставленной задачи различаются следующие основные виды маневров:

- маневры перехода с одной орбиты на другую (межорбитальный переход);
- корректирующие маневры;
- маневры сближения на орбите;
- маневры схода с орбиты при возвращении на Землю.

В общем случае расчет маневров космического аппарата сводится к решению краевой задачи.

После определения полных затрат характеристической скорости маневр (сумма импульсов скорости $\Delta V_{x\Sigma}$) определяется потребный запас топлива на его совершение по формуле Циолковского

$$m_T = m_0 \left[1 - \exp \left(-\frac{\Delta V_{x\Sigma}}{P_{y\phi}} \right) \right],$$

где m_0 – начальная масса космического аппарата, $P_{y\phi}$ – удельный импульс тяги двигателя.

Продолжительность работы двигателей приближенно оценивается по соотношению

$$\Delta t = \frac{m_T}{P} P_{y\phi}.$$

где P - тяга двигателя космического аппарата.

В анализе космических миссий под маневрами перелета между орбитами понимаются маневры перехода с орбиты выведения на рабочую орбиту (например, на геостационарную или высокоэллиптическую), маневр перехода с рабочей орбиты на предпусковую.

Если маневры совершаются в плоскости начальной орбиты, то они называются компланарными, в случае изменения плоскости орбиты в пространстве- некомпланарными.

Компланарные маневры ($i^{(k)} = i^{(0)}, \Omega^{(k)} = \Omega^{(0)}$)

Переход с круговой орбиты на эллиптическую или с эллиптической орбиты на круговую орбиту, касающиеся друг друга (рис. 33).

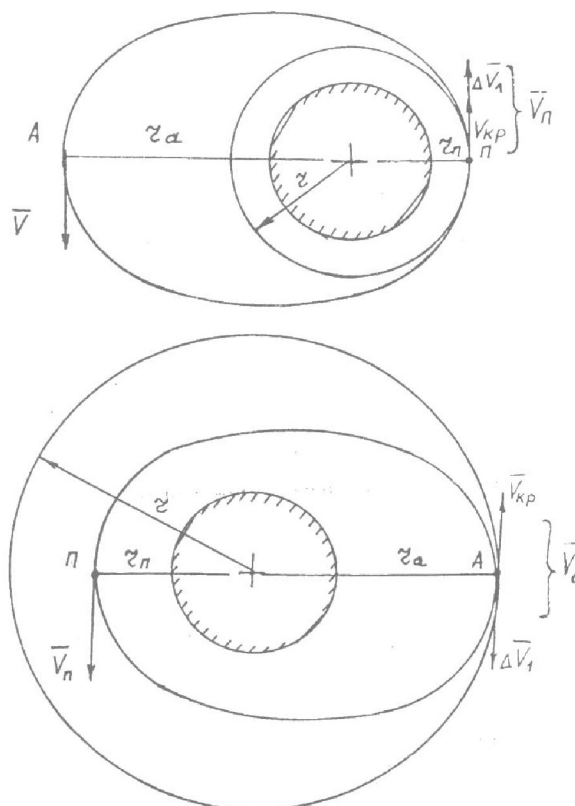


Рис. 33 Схема одноимпульсного перехода между компланарными касающимися орбитами

Маневр осуществляется путем приложения одного импульса в точке касания орбит (т. е. в перигее или апогее эллиптической орбиты). Скорости в перигеице и апоцентре эллиптической орбиты определяются по формулам

$$V_n = \sqrt{\frac{2\mu r_a}{r_a(r_a + r_n)}} \quad V_a = \sqrt{\frac{2\mu r_n}{r_a(r_a + r_n)}},$$

где $r_a = \frac{p}{1-p}$, $r_n = \frac{p}{1+p}$ - радиусы апоцентра и перигеице орбиты.

Величина разгонного импульса скорости ΔV_1 перехода с круговой орбиты радиуса r на внешнюю эллиптическую орбиту $r_n = r, r_a > r$ (или тормозного

импульса скорости при переходе с внешней эллиптической орбиты на круговую орбиту)

$$\Delta V_1 = V_n - V_{кр} = \sqrt{\frac{\mu}{r_n}} \left(\sqrt{\frac{2r_a}{r_a + r_n}} - 1 \right). \quad)$$

Величина тормозного импульса скорости ΔV_1 перехода с круговой орбиты радиуса r на внутреннюю эллиптическую орбиту $r_a = r, r_n < r$ (или разгонного импульса скорости при переходе с внутренней эллиптической орбиты на круговую орбиту):

$$\Delta V_1 = V_{кр} - V_a = \sqrt{\frac{\mu}{r_a}} \left(1 - \sqrt{\frac{2r_n}{r_a + r_n}} \right),$$

Переход с круговой орбиты на гиперболическую орбиту, касающиеся друг друга, при уходе на траекторию межпланетного перелёта (или наоборот с гиперболической орбиты на круговую при возврате с траектории межпланетного перелёта) (рис. 34). Маневр осуществляется путем приложения одного импульса в точке касания орбит (в перигентре гиперболической орбиты).

Величина импульса скорости определяется по формуле

$$\Delta V_l = V_n - V_{кр} = \sqrt{V_\infty^2 + \frac{2\mu}{r_n}} - \sqrt{\frac{\mu}{r_n}},$$

где $V_n = \sqrt{V_\infty^2 + \frac{2\mu}{r_n}}$, V_∞ - гиперболический избыток скорости.

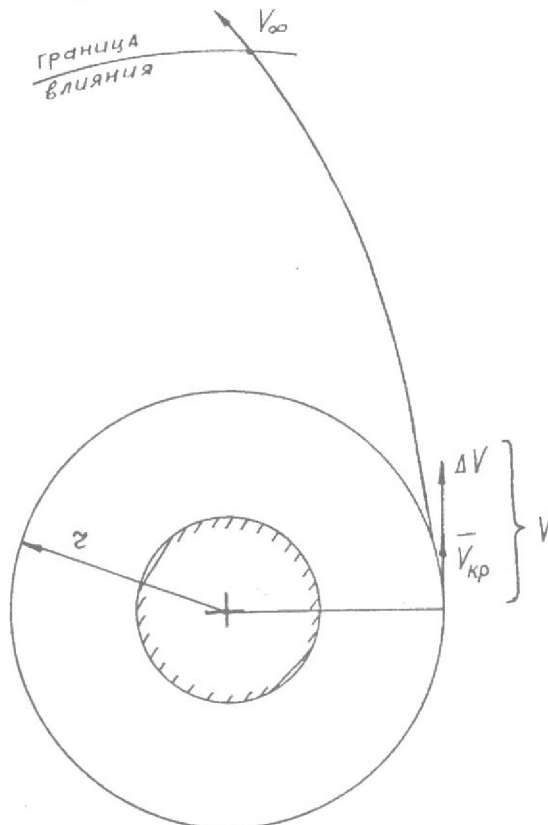


Рис. 34 Схема одноимпульсного перехода на гиперболическую орбиту

Переход между круговыми орбитами. Минимальное количество импульсов скорости для перехода равно двум. Для случая двух импульсного перехода минимальные затраты характеристической скорости достигаются,

если в качестве переходной орбиты выбрана эллиптическая орбита, которая в перигее и апогее касается начальной и конечной круговых. Первый импульс скорости дастся для перехода с начальной орбиты на переходную орбиту, второй импульс скорости — для перехода с переходной орбиты на конечную орбиту.

Время перелета определяется по соотношению

$$\Delta t = \frac{\pi}{\sqrt{\mu}} \left(\frac{r^{(0)} + r^{(k)}}{2} \right)^{3/2}$$

На рис.35 приведена иллюстрация перехода с внутренней орбиты на внешнюю орбиту (например, переход с орбиты выведения на рабочую орбиту).

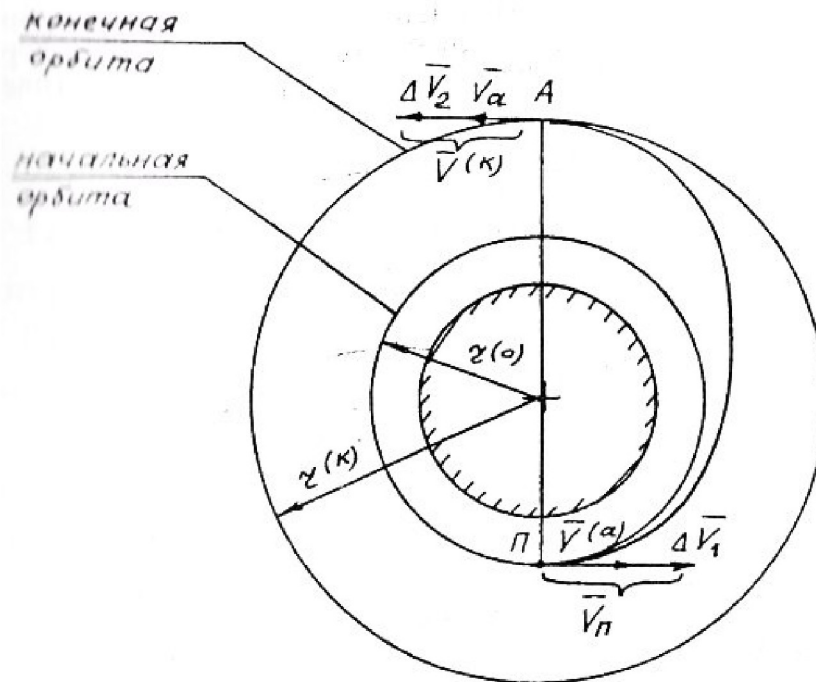


Рис. 35 Схема двухимпульсного перелета между компланарными круговыми орбитами по эллипсу Цандера-Гомана

Оба импульса скорости – разгонные и определяются по формулам

$$\Delta V_1 = \sqrt{\frac{\mu}{r^{(0)}}} \left(\sqrt{\frac{2r^{(k)}}{r^{(0)} + r^{(k)}}} - 1 \right), \quad \Delta V_2 = \sqrt{\frac{\mu}{r^{(k)}}} \left(1 - \sqrt{\frac{2r^{(0)}}{r^{(0)} + r^{(k)}}} \right)$$

Аналогично рассчитывается переход с внешней орбиты на внутреннюю орбиту (например, переход с рабочей орбиты на предпусковую орбиту). Оба импульса скорости – тормозные и находятся по соотношениям

$$\Delta V_1 = \sqrt{\frac{\mu}{r^{(0)}}} \left(1 - \sqrt{\frac{2r^{(k)}}{r^{(0)} + r^{(k)}}} \right), \quad \Delta V_2 = \sqrt{\frac{\mu}{r^{(k)}}} \left(\sqrt{\frac{2r^{(0)}}{r^{(0)} + r^{(k)}}} - 1 \right).$$

При переходах с внутренней орбиты на внешнюю орбиту может быть использован трехимпульсный баллистический перелет (рис.36), в котором присутствуют две переходные эллиптические орбиты.

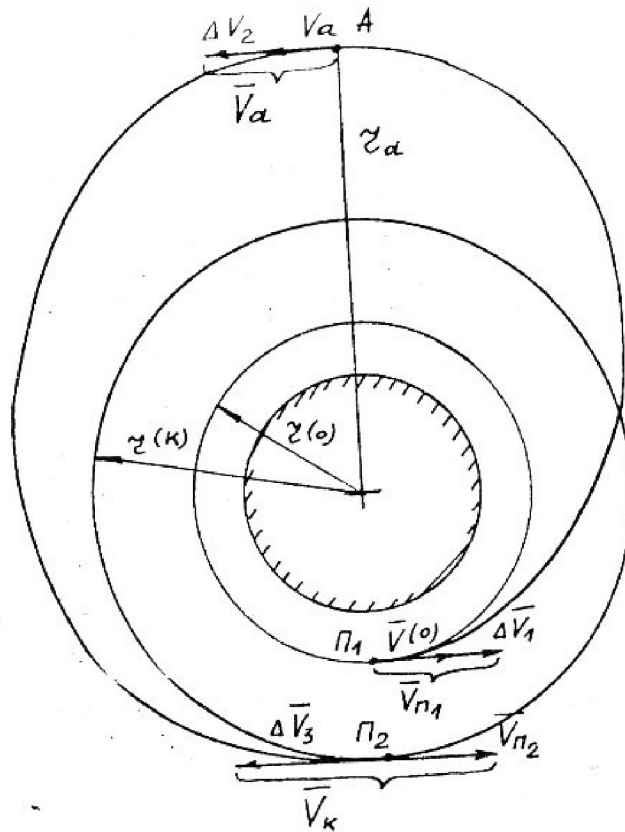


Рис.36 Схема трехимпульсного биэллиптического перелета между компланарными круговыми орбитами

Первый и второй импульсы в этом случае будут разгонными, а третий – тормозным:

$$\Delta V_1 = \sqrt{\frac{\mu}{r^{(0)}}} \left(\sqrt{\frac{2r_a}{r_a + r^{(0)}}} - 1 \right), \quad \Delta V_2 = \sqrt{\frac{\mu}{r_a}} \left(\sqrt{\frac{2r^{(k)}}{r^{(k)} + r_a}} - \sqrt{\frac{2r^{(0)}}{r^{(0)} + r_a}} \right),$$

$$\Delta V_3 = \sqrt{\frac{\mu}{r^{(k)}}} \left(\sqrt{\frac{2r_a}{r_a + r^{(k)}}} - 1 \right).$$

Время перелета определяется по соотношению

$$\Delta t = \frac{\pi}{\sqrt{\mu}} \left[\left(\frac{r^{(0)} + r_a}{2} \right)^{3/2} + \left(\frac{r^{(k)} + r_a}{2} \right)^{3/2} \right].$$

Если время на перелет ограничено $\Delta t \leq \Delta t^*$, то можно найти предельно допустимое значение r_a^* .

Сравнение двух и трехимпульсных переходов приводит к выводу, что если $r^{(0)}/r_a < r^{(0)}/r_k$, то трехимпульсная программа более экономична, чем оптимальная двухимпульсная программа при $r^{(0)}/r^{(k)} < 0.064$, и менее экономична при $\frac{r^{(0)}}{r^{(k)}} > 0.084$; если $0.064 < r^{(0)}/r^{(k)} < 0.084$, то в зависимости от величины отношения $r^{(0)}/r_a$ экономичным может быть как двухимпульсный, так и трехимпульсный перелет.

Аналогично можно рассмотреть трехимпульсный биэллиптический переход с внешней орбиты на внутреннюю орбиту. В этом случае первый импульс будет разгонным, а второй и третий – тормозными.

Формулы для расчета перелета:

$$\Delta V_1 = \sqrt{\frac{\mu}{r^{(0)}}} \left(\sqrt{\frac{2r_a}{r^{(0)} + r_a}} - 1 \right), \quad \Delta V_2 = \sqrt{\frac{\mu}{r_a}} \left(\sqrt{\frac{2r^{(0)}}{r^{(0)} + r_a}} - \sqrt{\frac{2r^{(k)}}{r^{(k)} + r_a}} \right),$$

$$\Delta V_3 = \sqrt{\frac{\mu}{r^{(k)}}} \left(\sqrt{\frac{2r_a}{r_a + r^{(k)}}} - 1 \right).$$

Переход между околокруговыми орбитами. Рассматривается случай двухимпульсного перехода. Известно, что энергетически оптимальным является перелет, в котором импульсы скорости прикладываются перпендикулярно текущему радиусу (трансверсально). На рис. 10 показана схема перехода между околокруговыми орбитами.

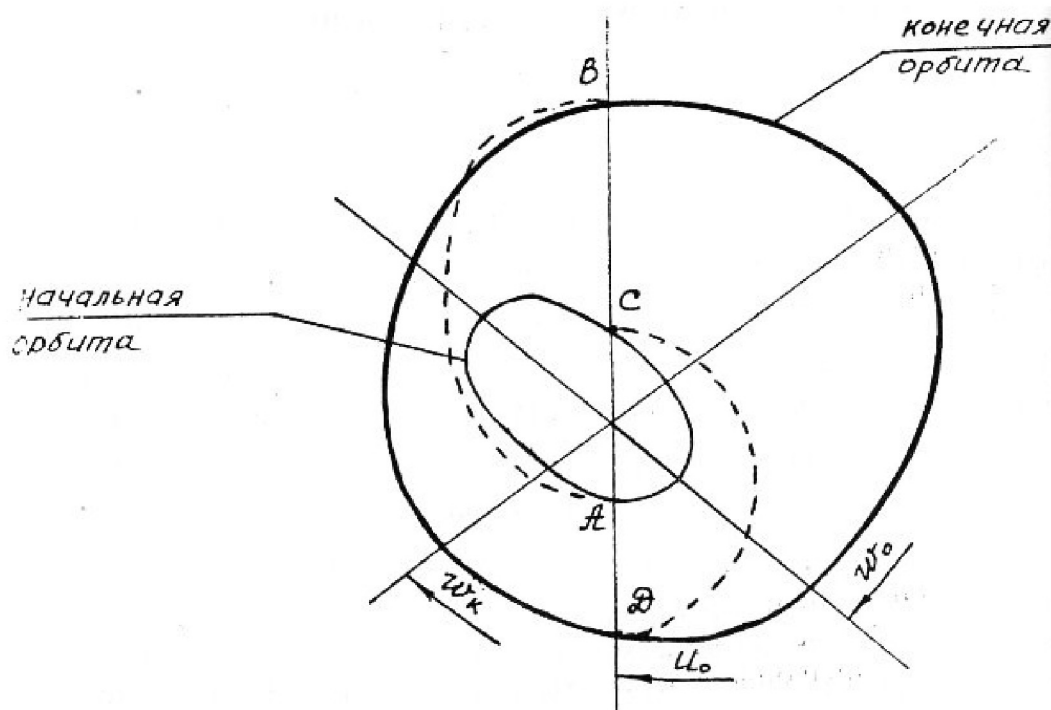


Рис. 37 Схема двухимпульсного перелета между компланарными околокруговыми орбитами

Точки приложения импульса разнесены вдоль орбиты на угол 180° и лежат на прямой, проходящей через притягивающий центр (такая прямая называется линией переключения).

Существуют две траектории двухимпульсного перехода с начальной орбиты на конечную, эквивалентные по энергетическим затратам. Для первой траектории (дуга АВ) аргументы широты точек приложения трансверсальных импульсов $u_1 = u_0$, $u_2 = u_0 + \pi$, а величины импульсов определяются по соотношениям

$$\Delta V_1 = \frac{\omega_{\text{ф}}}{4} (A_1 - A_2 \cos u_0 - A_3 \sin u_0), \quad \Delta V_2 = \frac{\omega_{\text{ф}}}{4} (A_1 + A_2 \cos u_0 + A_3 \sin u_0).$$

Для второй траектории (дуга СД) аргументы широты тяги приложения трансверсальных импульсов $u_1 = u_0 + \pi$, $u_2 = u_0$, а величины импульсов определяются по соотношениям

$$\Delta V_1 = \frac{\omega_{\text{ф}}}{4} (A_1 + A_2 \cos u_0 - A_3 \sin u_0), \quad \Delta V_2 = \frac{\omega_{\text{ф}}}{4} (A_1 - A_2 \cos u_0 - A_3 \sin u_0).$$

Здесь $\omega_{\text{ср}} = \frac{1}{\hat{r}^{(0)}} \sqrt{\frac{\mu}{\hat{r}^{(0)}}}$ - средняя угловая скорость движения по начальной орбите, $\hat{r}^{(0)} = 0.5(r_a^{(0)} + r_n^{(0)})$ - средний радиус начальной орбиты, $u_0 = \arctg \frac{A_3}{A_2}$ - аргумент широты линии переключения

$$A_1 = p^{(k)} - p^{(0)}, A_2 = p^{(k)} e^{(k)} \cos \omega^{(k)} - p^{(0)} e^{(0)} \cos \omega^{(0)},$$

$$A_3 = p^{(k)} e^{(k)} \sin \omega^{(k)} - p^{(0)} e^{(0)} \sin \omega^{(0)}.$$

Для аппаратов дистанционного зондирования Земли в момент прохождения минимального расстояния от поверхности (в перигее) производится фотографирование. Если в процессе полета требуется производить фотографирование различных участков земной поверхности, то необходимо смещать перигей без изменения ее формы (рис. 38).

Такой двухимпульсный маневр является частным случаем вышерассмотренного маневра и рассчитывается по соотношениям

$$\Delta V_1 = -\frac{\omega_{\text{ср}}}{4} (r_a - r_n) \sin \frac{\alpha}{2}, \Delta V_2 = -\frac{\omega_{\text{ср}}}{4} (r_a - r_n) \sin \frac{\alpha}{2},$$

$$u_1 = -\frac{\pi}{2}, u_2 = \frac{\pi}{2}.$$

Здесь α - угол поворота линии апсид, аргументы широты u_1, u_2 отсчитываются от биссектрисы угла α (линия переключения перпендикулярна биссектрисе угла α).

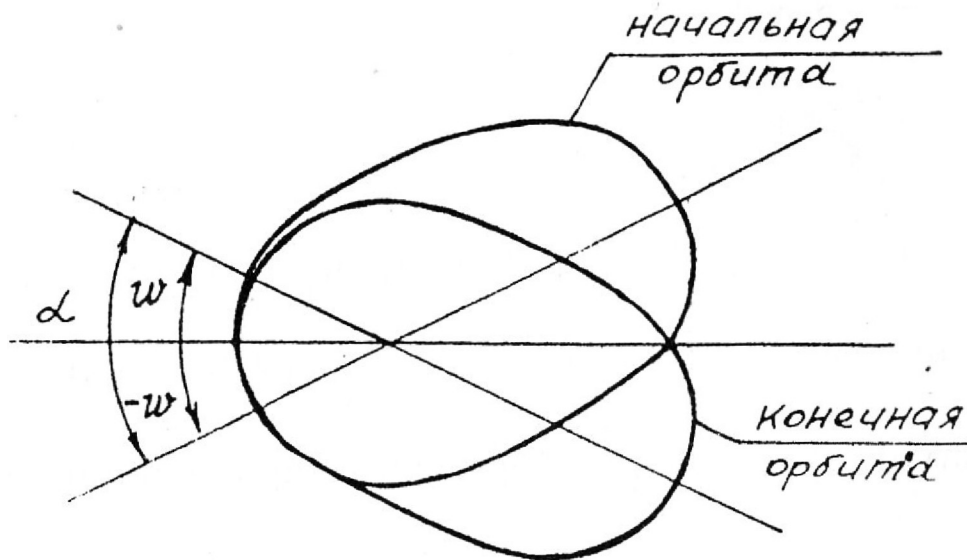


Рис. 38 Иллюстрация к маневру поворота линии апсид без изменения геометрических размеров орбиты

Вышеприведенные формулы дают достаточно точный результат в случае, если средние радиусы начальной и конечной круговых орбит отличаются не более чем на 3000 км.

Некомпланарные маневры ($i^{(k)} \neq i^{(н)}, \Omega^{(k)} = \Omega^{(н)}$)

При выборе схемы некомпланарного маневра необходимо руководствоваться следующим правилом: изменение плоскости орбиты следует проводить в точке, где скорость космического аппарата минимальна.

Переход между некомпланарными круговыми орбитами равного радиуса.

Для случая одноимпульсного перехода между круговыми орбитами импульс скорости прикладывается в точке пересечения орбит (рис.39) и определяется по соотношению $\Delta V = 2V_{кр} \sin \frac{\Delta i}{2}$, где $\Delta i = |\mathbf{i}^{(k)} - \mathbf{i}^{(H)}|$, $V_{кр} = \sqrt{\frac{\mu}{r}}$ - скорость движения по орбите.

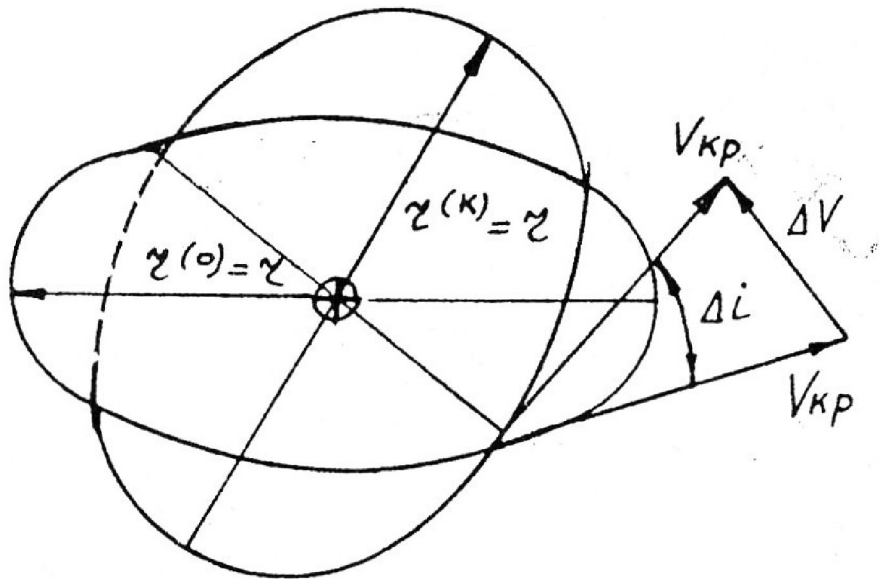


Рис. 39 Схема одноимпульсного поворота плоскости круговой орбиты

Более оптимальным с точки зрения энергетики является трехимпульсный маневр (рис. 40):

- первый импульс ΔV_1 обеспечивает перевод космического аппарата на переходную орбиту, компланарную начальной, с перицентром равным $r^{(0)}$ и апоцентром r_a ;

- второй импульс ΔV_2 прикладывается в апоцентре переходной орбиты и поворачивает ее плоскость на угол некомпланарности Δi без изменения геометрических характеристик орбиты;

- третий импульс ΔV_3 прикладывается в перицентре переходной орбиты, компланарной конечной орбите, и реализует переход на круговую орбиту радиуса $r^{(0)}$

$$\Delta V_1 = \sqrt{\frac{\mu}{r^{(0)}}} \left(\sqrt{\frac{2r_a}{r^{(0)} + r_a}} - 1 \right), \quad \Delta V_2 = \sqrt{\frac{\mu}{r^{(0)}}} \left(\sqrt{\frac{4r^{(0)}}{r^{(0)} + r_a}} (1 - \cos \Delta i) \right),$$

$$\Delta V_3 = \sqrt{\frac{\mu}{r^{(0)}}} \left(\sqrt{\frac{2r_a}{r^{(0)} + r_a}} - 1 \right).$$

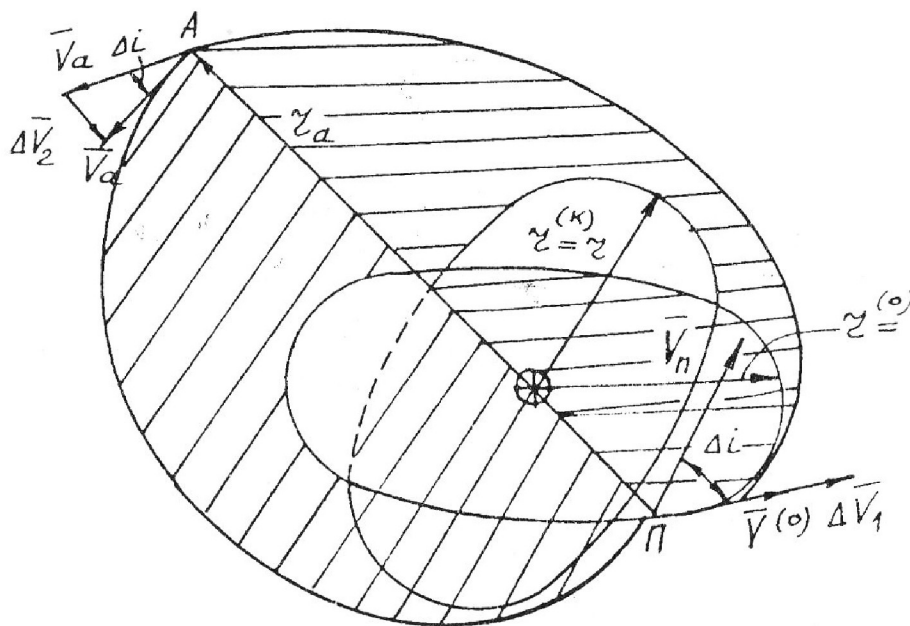


Рис. 40 Схема трехимпульсного поворота плоскости круговой орбиты

Время перелета определяется формулой $\Delta t = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} \left(\frac{r^{(0)} + r_a}{2} \right)^{\frac{3}{2}}$.

Здесь целесообразно решать однопараметрическую задачу оптимизации по r_a с учетом возможного ограничения на допустимую продолжительность перелета из условия минимальных энергетических затрат на переход.

Переход между некомпланарными круговыми орбитами разного радиуса (например, перевод космического аппарата на геостационарную орбиту спутника Земли). Существует несколько схем двухимпульсных переходов с орбиты радиуса $r^{(0)}$ на орбиту радиуса $r^{(k)} > r^{(0)}$, из которых, для сравнения, выбираются две.

Схема 1 (рис. 41): первый импульс ΔV_1 увеличивает скорость до такой величины, чтобы апоцентр переходной орбиты равнялся $r^{(k)}$, второй импульс скорости прикладывается в апоцентре переходной орбиты и осуществляет поворот плоскости орбиты на угол некомпланарности Δi и доразгон для выхода на конечную орбиту.

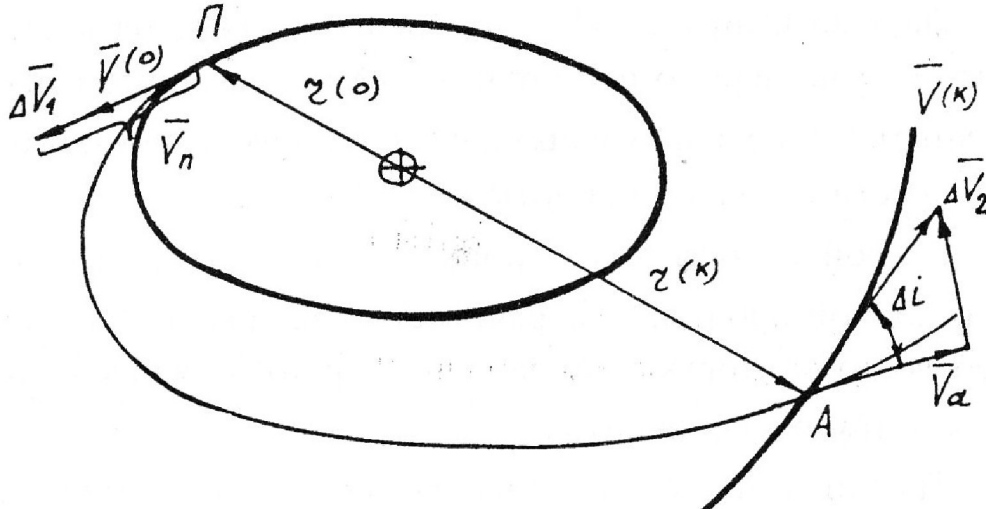


Рис. 41 Схема двухимпульсного перелета между некомпланарными круговыми орбитами разного радиуса

Схема 2: первый импульс ΔV_1 одновременно увеличивает скорость до достижения в апогее переходной орбиты расстояния $r^{(K)}$ и поворачивает плоскость переходной орбиты на угол Δi_1 ($\Delta i_1 < \Delta i$), второй импульс прикладывается в апоцентре переходной орбиты, поворачивает плоскость орбиты на угол $\Delta i_2 = \Delta i - \Delta i_1$ и увеличивает скорость до круговой, соответствующей радиусу орбиты $r^{(K)}$.

Для второго случая импульсы скорости рассчитываются по формулам

$$\Delta V_1 = \sqrt{\frac{\mu}{r^{(0)}}} \sqrt{\frac{r^{(0)} + 3r^{(K)}}{r^{(0)} + r^{(K)}}} - 2\sqrt{\frac{2r^{(K)}}{r^{(0)} + r^{(K)}}} \cos \Delta i_1,$$

$$\Delta V_2 = \sqrt{\frac{\mu}{r^{(K)}}} \sqrt{\frac{3r^{(0)} + r^{(K)}}{r^{(0)} + r^{(K)}}} - 2\sqrt{\frac{2r^{(0)}}{r^{(0)} + r^{(K)}}} \cos (\Delta i - \Delta i_1).$$

Для первого случая импульсы скорости рассчитываются по ранее приведенным формулам, в которых $\Delta i_1 = 0$. Здесь может быть решена однопараметрическая задача оптимизации по Δi_1 из условия обеспечения минимальных энергетических затрат на переход.

Заслуживает внимания трехимпульсный маневр перехода с тремя поворотами плоскости переходных орбит.

Первый импульс ΔV_1 обеспечивает перевод космического аппарата на первую переходную орбиту с радиусом перицентра равным $r^{(0)}$ и радиусом апоцентра r_a , повернутую относительно плоскости начальной орбиты на угол Δi_1 .

Второй импульс ΔV_2 прикладывается в апоцентре первой переходной орбиты, поворачивает ее плоскость на угол Δi_2 и переводит на вторую компланарную орбиту с радиусом апоцентра r_a и радиусом перицентра $r^{(K)}$.

Третий импульс ΔV_3 прикладывается в перицентре второй переходной орбиты, доворачивает ее плоскость на угол $i_3 = \Delta i - \Delta i_1 - \Delta i_2$ и переводит на конечную круговую орбиту радиуса $r^{(K)}$.

Формулы для расчета величины импульсов скорости

$$\Delta V_1 = \sqrt{\frac{\mu}{r^{(0)}}} \sqrt{\frac{r^{(0)} + 3r_a}{r^{(0)} + r_a}} - 2\sqrt{\frac{2r_a}{r^{(0)} + r_a}} \cos \Delta i_1,$$

$$\Delta V_2 = \sqrt{\frac{\mu}{r_a}} \sqrt{\frac{2r^{(0)}}{r^{(0)} + r_a} + \frac{2r^{(K)}}{r^{(K)} + r_a}} - 4\sqrt{\frac{r^{(K)}}{(r^{(0)} + r_a)(r^{(K)} + r_a)}} \cos \Delta i_2,$$

$$\Delta V_3 = \sqrt{\frac{\mu}{r^{(K)}}} \sqrt{\frac{r^{(K)} + 3r_a}{r^{(K)} + r_a}} - 2\sqrt{\frac{2r_a}{r^{(K)} + r_a}} \cos (\Delta i - \Delta i_1 - \Delta i_2).$$

Время перелета оценивается по формуле

$$\Delta t_{\text{пер}} = \frac{\pi}{\sqrt{\mu}} \left[\left(\frac{r^{(0)} + r_a}{2} \right)^{3/2} + \left(\frac{r^{(K)} + r_a}{2} \right)^{3/2} \right].$$

Оптимизируя полные затраты скорости, находятся оптимальные значения $r_a, \Delta i_1, \Delta i_2$.

6.2 Расчет маневров, корректирующих орбиту полета

Корректирующие маневры предназначены для устранения ошибок действительной траектории полета, вызванных действием возмущающих факторов или другими причинами. Коррекция, как правило, подвергаются отдельные элементы орбиты. Величины импульсов скорости при этом относительно невелики, что позволяет использовать линеаризованные модели.

Расчет коррекции на поддержание заданной высоты полета H^ или движения космического аппарата в заданном диапазоне высот $(H_{max} - \Delta H, H_{max})$.* Методика расчета основывается на ранее приведенных соотношениях и Государственном стандарте СССР “Расчеты баллистические искусственных спутников Земли. Методика расчета затрат топлива на маневрирование” (ГОСТ 25645.301-83).

Учитываются только возмущения, вызванные действием атмосферы (аэродинамическое торможение космического аппарата). Корректирующие импульсы полагаются трансверсальными.

Затраты характеристической скорости на поддержание заданной высоты полета H^* определяются по следующим формулам:

$$\text{- за виток } \Delta V_{\text{хар}}^{(B)} = 2\pi\sigma\rho(H^*)\sqrt{\mu(R_3 + H^*)},$$

$$\text{- за сутки } \Delta V_{\text{хар}}^{(C)} = \frac{\mu\sigma\rho(H^*)}{R_3 + H^*} 86400.$$

Поддержание высоты орбиты в заданном диапазоне высот $(H_{max} - \Delta H, H_{max})$ осуществляется с помощью двухимпульсной коррекции (с использованием эллипса Цандера-Гомана), выполняемой циклично по мере падения высоты полета. Величины корректирующих импульсов находятся по соотношениям

$$\Delta V_1 = \sqrt{\frac{\mu}{R_3 + H_{max} - \Delta H}} \left(\sqrt{\frac{R_3 + H_{max}}{R_3 + H_{max} - \frac{\Delta H}{2}}} - 1 \right),$$

$$\Delta V_2 = \sqrt{\frac{\mu}{R_3 + H_{max}}} \left(1 - \sqrt{\frac{R_3 + H_{max} - \Delta H}{R_3 + H_{max} - \frac{\Delta H}{2}}} \right),$$

$$\Delta V_{\text{хар}} = \Delta V_1 + \Delta V_2.$$

Интервал времени между двумя последовательными коррекциями (цикл коррекции) вычисляется по формуле

$$\Delta t = \frac{F(H_{max}) - F(H_{max} - \Delta H)}{\sigma}.$$

Коррекция положения космического аппарата в малой окрестности траектории движения. Пусть $\Delta r, \Delta n, \Delta b$ - отклонения относительно круговой орбиты радиуса r координат космического аппарата вдоль радиуса-вектора, трансверсали и по нормали к плоскости орбиты, вызванные действием

аналогично спроектированных компонент корректирующего импульса $\Delta V_r, \Delta V_n, \Delta V_b$:

$$\begin{aligned}\Delta r &= \frac{\sin \tilde{u}}{\omega_{cp}} \Delta V_r + \frac{2(1 - \cos \tilde{u})}{\omega_{cp}} \Delta V_n, \\ \Delta n &= -\frac{2(1 - \cos \tilde{u})}{\omega_{cp}} \Delta V_r - \frac{3\tilde{u} - 4\sin \tilde{u}}{\omega_{cp}} \Delta V_n, \\ \Delta b &= \frac{\sin \tilde{u}}{\omega_{cp}} \Delta V_b.\end{aligned}$$

Здесь $\omega_{cp} = \sqrt{\frac{\mu}{r_{cp}^3}}$ – средняя угловая скорость движения космического аппарата по орбите, $\tilde{u}$ – угловая дальность полета, отсчитываемая от точки приложения импульса.

Зная потребные значения $\Delta r, \Delta n, \Delta b$, которые характеризуют требуемое изменение положения космического аппарата на орбите в момент времени t , отсчитываемый от момента проведения коррекции, можно найти необходимые проекции корректирующего импульса.

Коррекция эллиптических орбит

Связь между проекциями корректирующего импульса $\Delta V_r, \Delta V_n, \Delta V_b$ и вызываемыми ими изменениями элементов орбиты определяется следующими формулами:

$$\begin{aligned}\Delta \rho &= \sqrt{\frac{\rho}{\mu}} \frac{2\rho}{1 + e \cos \vartheta} \Delta V_n, \\ \Delta e &= \sqrt{\frac{\rho}{\mu}} \left(\sin \vartheta \Delta V_r + \frac{e \cos^2 \vartheta + 2 \cos \vartheta + e}{1 + e \cos \vartheta} \Delta V_n \right), \\ \Delta \omega &= \frac{1}{e} \sqrt{\frac{\rho}{\mu}} \left[-\cos \vartheta \Delta V_r + \frac{\sin \vartheta (2 + e \cos \vartheta)}{1 + e \cos \vartheta} \Delta V_n - \frac{e \operatorname{ctg} i \sin u}{1 + e \cos \vartheta} \Delta V_b \right], \\ \Delta \Omega &= \sqrt{\frac{\rho}{\mu}} \frac{\cos u}{1 + e \cos \vartheta} \Delta V_b, \\ \Delta r &\approx \frac{1}{1 + e} \Delta \rho - \frac{\rho}{(1 + e)^2} \Delta e.\end{aligned}$$

Здесь $\rho, e, \omega, \Omega, i$ – элементы орбиты в момент времени приложения импульса, аргумент широты u и угол истинной аномалии относятся к точке орбиты, в которой импульс прикладывается.

На основании приведенных соотношений выбирается тип корректирующего импульса (трансверсальный ΔV_n , радиальный ΔV_r , бинормальный ΔV_b), точка приложения (угол истинной аномалии ϑ или аргумент широты u) и минимальная величина импульса для требуемого изменения элемента орбиты.

Например, для компенсации накопившихся возмущений долготы восходящего угла орбиты $\Delta\Omega$ следует, что необходимо выбрать бинормальный импульс, приложить в точке с аргументом широты около 90° или 270° для орбит с малыми значениями эксцентриситета и определить минимальное значение корректирующего импульса по соотношению

$$\Delta V_{bmin} \approx \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \sin i \Delta\Omega.$$

Для компенсации накопившихся возмущений аргумента перицентра ω может быть использован любой из типов корректирующих маневров, например, радиальный ΔV_r , который целесообразно приложить в перигеуме или апоцентре орбиты.

Минимальное значение корректирующего импульса определяется по формуле

$$\Delta V_{rmin} \approx \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} e \Delta\omega.$$

6.3 Относительное движение двух космических аппаратов и маневры сближения

Маневр сближения предполагает синхронизацию движения двух космических аппаратов, один из которых активный (1), совершающий маневрирование, второй – пассивный (2). Обычно перед этим обеспечивается компланарность орбит обоих космических аппаратов.

Сближение космических аппаратов состоит из двух основных этапов: дальнейшее сближение – рассчитывается по формулам межорбитальных переходов и сближение на конечном участке – обычно рассчитывается в системе координат, связанной с пассивным космическим аппаратом.

Маневр дальнего сближения

Для того, чтобы в результате совершения маневра два космических аппарата оказались в малой окрестности друг от друга необходимо обеспечить между ними в начальный момент времени (момент времени приложения первого импульса скорости) определенный угол, называемый углом фазирования.

Если рассматривается двухимпульсный перелет, совершаемый по эллипсу Цандера-Гомана между круговыми орбитами (рис. 42), то угол фазирования вычисляется по следующим формулам:

- для случая перехода на внешнюю орбиту

$$v^* = \pi \left[1 - \left(\frac{r^{(1)} + r^{(2)}}{2r^{(2)}} \right)^{3/2} \right]$$

- для случая перехода на внутреннюю орбиту

$$v^* = \pi \left[\left(\frac{r^{(1)} + r^{(2)}}{2r^{(2)}} \right)^{3/2} - 1 \right].$$

Если в начальный момент времени угловое расстояние между активным (1) и пассивным (2) космическим аппаратом $\tilde{v}$, не равно углу фазирования v^* , то необходимо рассчитать время ожидания угла фазирования (называется временем фазирования), которое определяется по формулам:

- для первого случая

$$T_{\text{ож}} = \frac{r^{(1)3/2}}{\sqrt{\mu} \left[1 - \left(\frac{r^{(1)}}{r^{(2)}} \right)^{3/2} \right]} \Delta v$$

- для второго случая

$$T_{\text{ож}} = \frac{r^{(1)3/2}}{\sqrt{\mu} \left[\left(\frac{r^{(1)}}{r^{(2)}} \right)^{3/2} - 1 \right]} \Delta v,$$

где

$$\Delta v = \tilde{v} - v^*, 0 \leq \Delta v < 2\pi.$$

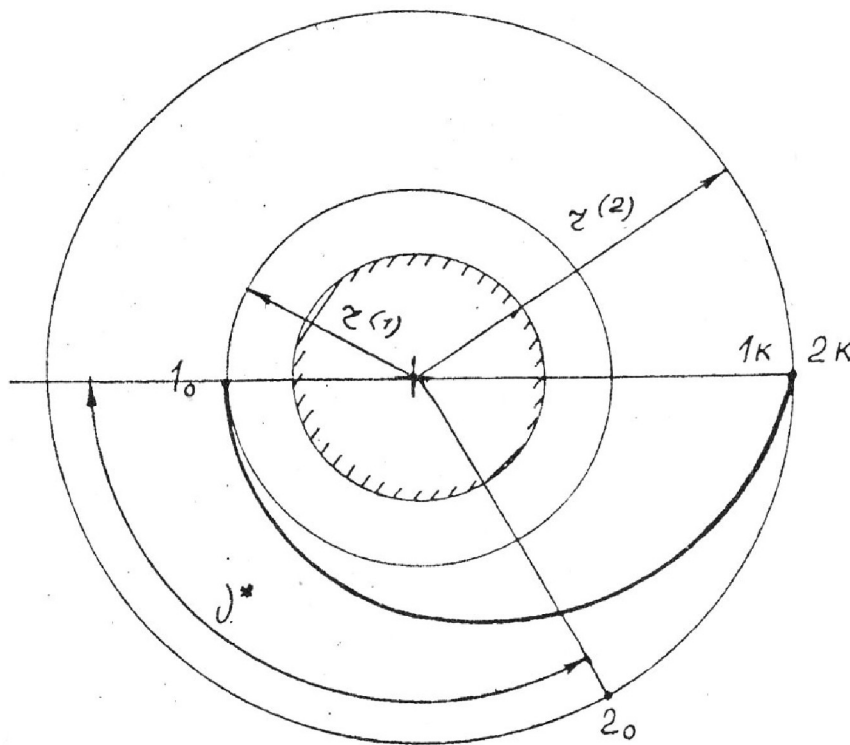


Рис. 42 Схема перелета с фазированием

Чем меньше разница в периодах обращения космических аппаратов, тем больше время фазирования для заданного угла рассогласования. Поэтому при малых разностях в периодах для уменьшения времени фазирования целесообразно использовать биэллиптические перелеты.

В этом случае угол фазирования зависит от радиуса апоцентра переходной орбиты r_a и можно подобрать такой радиус апоцентра, чтобы в начальный момент времени $\Delta v = 0$.

В случае биэллиптического перелета на внешнюю орбиту при заданном начальном угловом рассогласовании v между космическими аппаратами радиус

апоцентра переходной орбиты, обеспечивающей условие фазирования, находится из уравнения:

$$\left(\frac{r^{(1)} + r_a}{2}\right)^{3/2} + \left(\frac{r^{(2)} + r_a}{2}\right)^{3/2} = \frac{v r_a^{3/2}}{\pi}$$

Импульсы скорости при маневрировании рассчитываются по ранее приведенным соотношениям.

Маневр сближения на конечном участке

Маневр сближения на конечном участке считается двух импульсным и рассчитывается в рамках метода свободных траектории. Полагается, что оба космических аппарата движутся по близким околокруговым орбитам. Движение активного космического аппарата рассматривается в орбитальной системе координат, связанной с пассивным космическим аппаратом (ось $O\tilde{X}$ направлена вдоль орбитальной скорости, ось $O\tilde{Y}$ направлена по геоцентрическому радиусу-вектору, ось $O\tilde{Z}$ дополняет систему координат до правой).

После выполнения этапа дальнего сближения как правило имеются ошибки, приведенные в орбитальной системе координат $\tilde{x}_0, \tilde{y}_0, \tilde{z}_0, \tilde{v}_{x0}, \tilde{v}_{y0}, \tilde{v}_{z0}$.

Невозмущенное относительное движение приближенно описывается следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= \tilde{x}_0 + 6(\sin(\omega_{cp} \Delta t) - \omega_{cp} \Delta t) \tilde{y}_0 + \left(\frac{4}{\omega_{cp}} \sin(\omega_{cp} \Delta t) - 3 \Delta t\right) \tilde{v}_{x0} - \\ &\quad - \frac{2}{\omega_{cp}} (1 - \cos(\omega_{cp} \Delta t)) \tilde{v}_{y0} \\ \tilde{y} &= (4 - 3 \cos(\omega_{cp} \Delta t)) \tilde{y}_0 + \frac{2}{\omega_{cp}} (1 - \cos(\omega_{cp} \Delta t)) \tilde{v}_{x0} + \\ &\quad + \frac{1}{\omega_{cp}} \sin(\omega_{cp} \Delta t) \tilde{v}_{y0} \\ \tilde{z} &= \cos(\omega_{cp} \Delta t) \tilde{z}_0 + \frac{1}{\omega_{cp}} \sin(\omega_{cp} \Delta t) \tilde{v}_{z0} \\ \tilde{v}_x &= -6\omega_{cp} (1 - \cos(\omega_{cp} \Delta t)) \tilde{y}_0 - 2 \sin(\omega_{cp} \Delta t) \tilde{v}_{y0} + 4 \cos(\omega_{cp} \Delta t) \tilde{v}_{x0} \\ \tilde{v}_y &= 3\omega_{cp} \sin(\omega_{cp} \Delta t) \tilde{y}_0 + 2 \sin(\omega_{cp} \Delta t) \tilde{v}_{x0} + \cos(\omega_{cp} \Delta t) \tilde{v}_{y0} \\ \tilde{v}_z &= -\omega_{cp} \sin(\omega_{cp} \Delta t) \tilde{z}_0 + 2 \cos(\omega_{cp} \Delta t) \tilde{v}_{z0}\end{aligned}$$

где ω_{cp} — средняя угловая скорость движения орбитальной станции по около круговой орбите, Δt — интервал времени движения космического аппарата от момента завершения этапа дальнего сближения.

Полагается; что первый импульс скорости прикладывается сразу после завершения этапа дальнего сближения и обеспечивает совпадение координат обоих космических аппаратов через интервал времени Δt_k (продолжительность этапа ближнего наведения): $\tilde{x}(\Delta t_k) = \tilde{y}(\Delta t_k) = \tilde{z}(\Delta t_k) = 0$.

Проекции первого импульса скорости на осп орбитальной системы координат определяются по соотношениями:

$$\Delta V_{x1} = \tilde{V}_{x0}^* - \tilde{V}_{x0}$$

$$\Delta V_{y1} = \tilde{V}_{y0}^* - \tilde{V}_{y0}$$

$$\Delta V_{z1} = \tilde{V}_{z0}^* - \tilde{V}_{z0}$$

где $\tilde{V}_{x0}^*, \tilde{V}_{y0}^*$ — находятся из решения системы линейных

$$\text{уравнений} \left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{4}{\omega_{cp}} \sin(\omega_{cp} \Delta t_k) - 3 \Delta t_k \right) \tilde{V}_{x0}^* - \frac{2}{\omega_{cp}} (1 - \cos(\omega_{cp} \Delta t_k)) \tilde{V}_{y0}^* = - \\ & \quad = -\tilde{x}_0 - 6(\sin(\omega_{cp} \Delta t) - \omega_{cp} \Delta t) \tilde{y}_0, \\ & \frac{2}{\omega_{cp}} (1 - \cos(\omega_{cp} \Delta t)) \tilde{V}_{x0}^* + \frac{1}{\omega_{cp}} \sin(\omega_{cp} \Delta t) \tilde{V}_{y0}^* = - \\ & \quad = -(4 - 3 \cos(\omega_{cp} \Delta t)) \tilde{y}_0, \\ & \tilde{V}_{z0}^* = -\omega_{cp} ctg(\omega_{cp} \Delta t) \tilde{y}_0, \end{aligned} \right.$$

Второй импульс в момент Δt_k компенсирует рассогласование по скорости. Проекция второго импульса скорости на оси орбитальной системы координат определяются по соотношениям:

$$\Delta V_{x2} = -\{-6\omega_{cp}(1 - \cos(\omega_{cp} \Delta t_k))\tilde{y}_0 + (4\cos(\omega_{cp} \Delta t) - 3)\tilde{V}_{x0}^* - 2\sin(\omega_{cp} \Delta t)\tilde{V}_{y0}^*\},$$

$$\Delta V_{y2} = -\{-3\omega_{cp}\sin(\omega_{cp} \Delta t)\tilde{y}_0 + 2\sin(\omega_{cp} \Delta t)\tilde{V}_{x0}^* + \cos(\omega_{cp} \Delta t)\tilde{V}_{y0}^*\},$$

$$\Delta V_{z2} = -\{\omega_{cp}\sin(\omega_{cp} \Delta t)\tilde{z}_0 + \cos(\omega_{cp} \Delta t)\tilde{V}_{z0}^*\}.$$

Таким образом, полные затраты характеристической скорости на сближение находятся по формуле:

$$\Delta V_{xp} = \Delta V_1 + \Delta V_2 = \sqrt{\Delta V_{x1}^2 + \Delta V_{y1}^2 + \Delta V_{z1}^2} + \sqrt{\Delta V_{x2}^2 + \Delta V_{y2}^2 + \Delta V_{z2}^2}.$$

Предполагая, что маневр сближения на конечном участке производится в пределах одного витка, можно найти оптимальное время маневра Δt_k и рассчитать параметры маневра из условия минимальной величины характеристической скорости.

7 Анализ движения спускаемых аппаратов в атмосфере Земли

Этап движения спускаемого аппарата является важным этапом многих космических миссий, которые совершаются как в околоземном пространстве, так и при межпланетных перелетах.

7.1 Расчет маневра схода с орбиты при возвращении на Землю

Маневр схода с орбиты при возвращении на Землю должен обеспечить как в штатном, так и в аварийном варианте спуска не превышение допустимых перегрузок и термодинамического нагрева при полете в плотных слоях атмосферы, что обуславливается в первую очередь значением угла входа в плотные слои $\theta_{\text{вх}}$. В дальнейшем рассматривается случай спуска с круговой орбиты.

В этом случае угол ориентации тормозного импульса α откладывается от направления, противоположного вектору скорости полета, и лежит в диапазоне $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Методика расчета основывается на ГОСТ 25645.301 - 83 "Расчеты баллистические искусственных спутников Земли. Методика расчета затрат топлива на маневрирование".

Минимальное значение тормозного импульса определяется по формуле:

$$\Delta V_T = V_{\text{орб}} \left[1 - \sqrt{\frac{2(\tilde{r} - 1)}{(\tilde{r} \sec \theta_{\text{вх}}^*)^2 - 1}} \right]$$

где $V_{\text{орб}} = \sqrt{\frac{\mu}{r^{(0)}}}$ - скорость движения по круговой предпусковой орбите радиуса $r^{(0)}$, $\tilde{r} = \frac{r^{(0)}}{R_{\text{атм}}}$ - радиус условной границы атмосферы ($R_{\text{атм}} = R_3 + 100$ км).

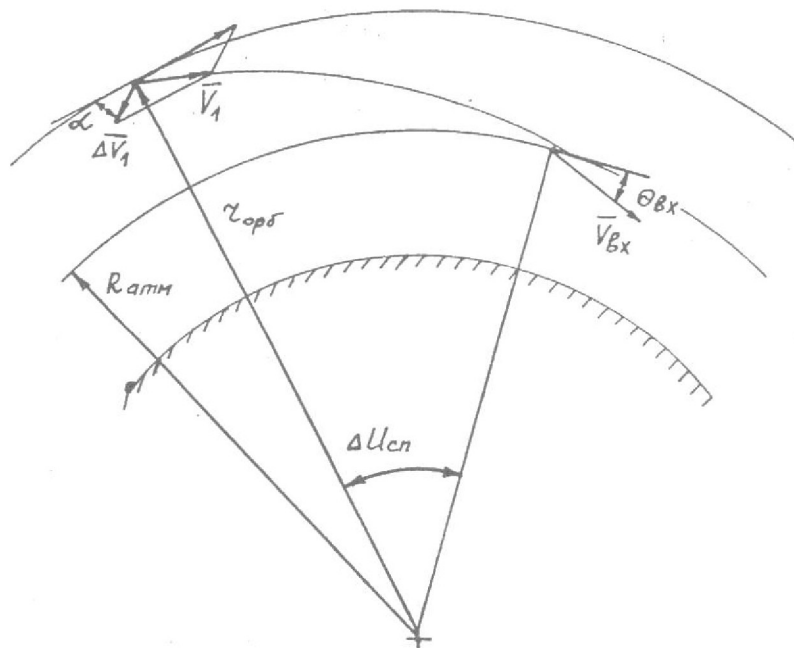


Рис. 43. Маневр схода с предпусковой орбиты

Оптимальный угол ориентации тормозного импульса равен:

$$\alpha_{opt} \begin{cases} 0, \text{ при } |b| > 1; \\ \arccos b, \text{ при } |b| \leq 1; \end{cases}$$

где

$$b = \frac{\Delta V_T^2 + 2(\dot{r} - 1)}{\Delta V_T}, \Delta V_T = \frac{\Delta V_T}{V_{orb}}$$

При анализе этого этапа по известным величине ΔV_T и направлению ориентации α тормозного импульса, радиусу $r^{(0)}$ и наклонению i круговой предпусковой орбиты, географическим координатам (широта φ_T и долгота λ_T) точки включения тормозной двигательной установки необходимо найти скорость $V_{вх}$ и угол входа $\theta_{вх}$ в плотные слои атмосферы, а также угловую дальность $\Delta u_{сп}$, время полета $\Delta t_{сп}$; до входа в плотные слои атмосферы и географические, координаты входа в плотные слои атмосферы.

Скорость входа и угол входа определяются по соотношениям:

$$V_{вх} = \sqrt{V_{orb}^2 + \Delta V_T^2 - 2V_{orb}\Delta V_T \cos \alpha}$$

$$\theta_1 = -\arctg[\Delta V_T \sin \alpha (V_{orb} - \Delta V_T \cos \alpha)^{-1}]$$

Здесь $V_{вх} = \sqrt{V_{orb}^2 + \Delta V_T^2 - 2V_{orb}\Delta V_T \cos \alpha}$ — скорость космического аппарата после подачи тормозного импульса;

$\theta_1 = -\arctg[\Delta V_T \sin \alpha (V_{orb} - \Delta V_T \cos \alpha)^{-1}]$ — угол наклона траектории космического аппарата после подачи тормозного импульса;

$$V_{orb} = \sqrt{\frac{\mu}{r^{(0)}}} - \text{скорость на предпусковой круговой орбите радиуса } r^{(0)}.$$

Продолжительность и угловая дальность полета на внеатмосферном участке вычисляются по формулам:

$$\Delta u_{сп} = \arccos \left[\frac{1}{e} \left(1 - \frac{p}{r^{(0)}} \right) \right] - \arccos \left[\frac{1}{e} \left(1 - \frac{p}{R_3 + H_{атм}} \right) \right]$$

$$\Delta t_{сп} = \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}} [E_{вх} - E_1 - (\sin E_{вх} - \sin E_1)]$$

Здесь p , a , e — фокальный параметр, большая полуось и эксцентриситет орбиты внеатмосферного участка движения:

$$p = \frac{(V_1 r^{(0)} \cos \theta_1)^2}{\mu}, \quad a = \frac{p}{1 - e^2},$$

$$e = \sqrt{1 + v_1(v_1 - 2) \cos^2 \theta_1}, \quad v_1 = \frac{V_1^2 r^{(0)}}{\mu}$$

где $E_1, E_{вх}$ — углы эксцентрической аномалии в точках начала и конца внеатмосферного участка движения, соответствующие углам истинной аномалии $\vartheta_1, \vartheta_{вх}$:

$$\operatorname{tg} \frac{E_1}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{\vartheta_1}{2}, \quad \operatorname{tg} \frac{E_{\text{вх}}}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{\vartheta_{\text{вх}}}{2},$$

$$\cos \vartheta_1 = \frac{1}{e} \left(1 - \frac{p}{r^{(0)}} \right), \quad \cos \vartheta_{\text{вх}} = \frac{1}{e} \left(1 - \frac{p}{R_3 + H_{\text{атм}}} \right).$$

Аргумент широты точки включения тормозной двигательной установки (в предположении его нахождения на восходящем участке траектории) определяется соотношением:

$$u_{\text{т}} = \arcsin \left(\frac{\sin \varphi_{\text{т}}}{\sin i} \right).$$

Аргумент широты точки входа в плотные слои атмосферы

$$u_{\text{вх}} = u_{\text{т}} + \Delta u_{\text{сп}},$$

географическая широта, на которой произошел вход в плотные слои атмосферы:

$$\varphi_{\text{вх}} = \arcsin(\sin u_{\text{вх}} \cdot \sin i),$$

географическая долгота точки входа в плотные слои атмосферы:

$$\lambda_{\text{вх}} = \lambda_{\text{т}} + \operatorname{arctg} (\operatorname{tg} \Delta u_{\text{сп}} \cos i) - \omega_3 \Delta t_{\text{сп}}$$

7.2 Анализ движения спускаемого аппарата в атмосфере

Расчет траекторных параметров полета возможен только путем численного интегрирования уравнений математической модели движения. В настоящем разделе приведены приближенные аналитические соотношения, позволяющие сформировать требования к условиям входа в плотные слои атмосферы (в первую очередь к углу входа), исходя из необходимости обеспечения допустимых перегрузок и термодинамических параметров на всей траектории полета.

Приближенно географические координаты точки достижения спускаемым аппаратом поверхности Земли (без учета движения на парашюте) рассчитываются по нижеприведенным соотношениям:

угловая дальность полета на атмосферном участке спуска

$$\Delta U_{\text{атм}} = \frac{L}{R_3},$$

географическая широта точки достижения поверхности Земли

$$\varphi_{\text{вх}} = \arcsin[\sin(u_{\text{т}} + \Delta u_{\text{сп}} + \Delta u_{\text{атм}}) \sin i],$$

географическая долгота точки достижения поверхности Земли

$$\lambda_{\text{пп}} = \lambda_{\text{вх}} + \operatorname{arctg} (\operatorname{tg} \Delta u_{\text{атм}} \cos i) - \omega_3 \Delta t_{\text{сп}}$$

Здесь L и $\Delta t_{\text{атм}}$ — дальность и время полета на атмосферном участке спуска, найденные численным интегрированием; $u_{\text{т}}, \Delta u_{\text{сп}}, \lambda_{\text{вх}}$ характеризуют внеатмосферный участок полета.

На основании известных условий входа в плотные слои атмосферы (угол $\theta_{\text{вх}}$ и скорость $V_{\text{вх}}$) требуется оценить максимальные значения контролируемых характеристик полета - перегрузки, удельного теплового потока ($n_{\text{max}}, Q_{\text{т max}}$) и температуры конструкции в критической точке ($T_{\text{кр}}^{\circ}$).

Случай движения с нулевым аэродинамическим качеством

Этот случай рассматривается для спускаемых аппаратов сферической формы ($K=0$) и для спускаемых аппаратов несферической формы, совершающих аварийное движение, связанное с выходом из строя системы управления движением. При этом спускаемый аппарат закручивается относительно продольной оси и происходит осреднение влияния на траекторию движения возникающей подъемной силы.

Величина максимальной перегрузки n_{max} оценивается по соотношению:

$$n_{\text{max}} = \frac{\beta \sin \theta_{\text{вх}}}{2g_0 \exp(1)} V_{\text{вх}}^2,$$

при этом скорость полета в этот момент составляет $V_{n \text{ max}} \approx 0,605 V_{\text{вх}}$.

Максимальная величина удельного теплового потока (учитывается только конвективный тепловой поток, обтекание считается ламинарным), подведенного в критической точке, оценивается по формуле:

$$\dot{Q}_{\text{max}} \approx \tilde{k} V_{\text{вх}}^3 \sqrt{-\frac{\beta \sin \theta_{\text{вх}}}{6\sigma \exp(1)}},$$

при этом скорость полета в этот момент составляет $V_{Q \text{ max}} \approx 0,847 V_{\text{вх}}$.

Здесь $\tilde{k} = c R_{\text{кр}}^{4,2} \rho_0^{1,2} V_{11}^3$, ρ_0 - плотность атмосферы на поверхности Земли, β - параметр модели атмосферы, $R_{\text{кр}}$ радиус кривизны носка спускаемого аппарата, V_1 - первая космическая скорость для Земли,

$$c \approx (38 \div 45) \cdot 10^{10} \frac{\text{Дж}}{\text{м}^{3/2} \text{час}}$$

Максимальная температура конструкции в критической точке

$$T_{\text{кр}}^{\circ} = \left(\frac{\dot{Q}_{\text{max}}}{\tilde{\sigma} \varepsilon} \right)^{\frac{1}{4}},$$

где $\tilde{\sigma}$ - постоянная Стефана-Больцмана, ε - коэффициент черноты обшивки спускаемого аппарата (обычно берется 0,9).

Исходя из условий $n_{max} \leq n_{доп}$, $\dot{Q}_{max} \leq \dot{Q}_{доп}$, формируются требования на угол входа $\theta_{вх}$ при заданных конструктивных характеристиках спускаемого аппарата.

Случай движения с ненулевым аэродинамическим качеством

Для случая полета с максимальным значением аэродинамического качества K_{max} максимальное значение перегрузки достигается в точке возникновения рикошета:

$$n_{max} \approx \frac{\beta}{2g} V_{вх}^2 \theta_{вх}^2 \sqrt{1 + \frac{1}{K_{max}^2} \exp\left(\frac{2 \theta_{вх}}{K_{max}}\right)}.$$

В той же точке достигает максимального значения удельный тепловой поток:

$$\dot{Q}_{max} \approx \tilde{k} V_{вх}^3 \theta_{вх} \left(\frac{\beta}{2\sigma K_{max}}\right)^{1/2} \exp\left(\frac{3 \theta_{вх}}{K_{max}}\right).$$

8. Анализ межпланетных миссий

8.1 Приближенная методика расчёта траекторий межпланетных перелётов

В строгой постановке задача межпланетных перелетов должна решаться при учете сил притяжения не только планеты-старта и Солнца, но и других планет. Эта задача является весьма сложной и решается численным моделированием.

При системном анализе космических миссий широко используется редукция этой задачи к последовательному решению нескольких задач о движении в поле притяжения одного центра. Причем поле притяжения принимается центральным.

Таким образом, приближенная методика расчета траекторий межпланетных перелётов основывается на теории движения тела в поле центральной силы, то есть использует результаты раздела, описывающего невозмущенное движение.

Для обоснования использования модели движения в поле одного притягивающего тела используется понятие сферы притяжения планеты.

Если тело находится в сфере действия планеты, то силы тяготения солнца не учитываются, если вне сферы деятельности, то действия только силы тяготения Солнца (рис. 44).

Сфера притяжения планеты – это область пространства, внутри которого возмущение действия Солнца в планетоцентрическом движении меньше возмущаемого действия планеты в гелиоцентрическом движении.

$$\left(\frac{F_{1b}}{2}\right)_{пл.ц.} = \left(\frac{F_{2b}}{F_1}\right)_{гелиоц.}$$

Сфера действия планетоцентрической системы по Лапласу:

$$\rho_{пл}^* = r_{\oplus} \left(\frac{m_{пл}}{m_0} \right)^{2/5}$$

где m_0 – масса Солнца, $m_{пл}$ – масса планеты, r – радиус орбиты планеты в гелиоцентрическом движении.

Для Земли сфера действия составляет

$$\rho_{\oplus}^* = 925000 \hat{e}i$$

В результате траектория одностороннего межпланетного перелета сводится к последовательному решению ограниченных трех задач: движению в сфере действия планеты-старта, движение в сфере действия Солнца, движение в сфере действия планеты-назначения.

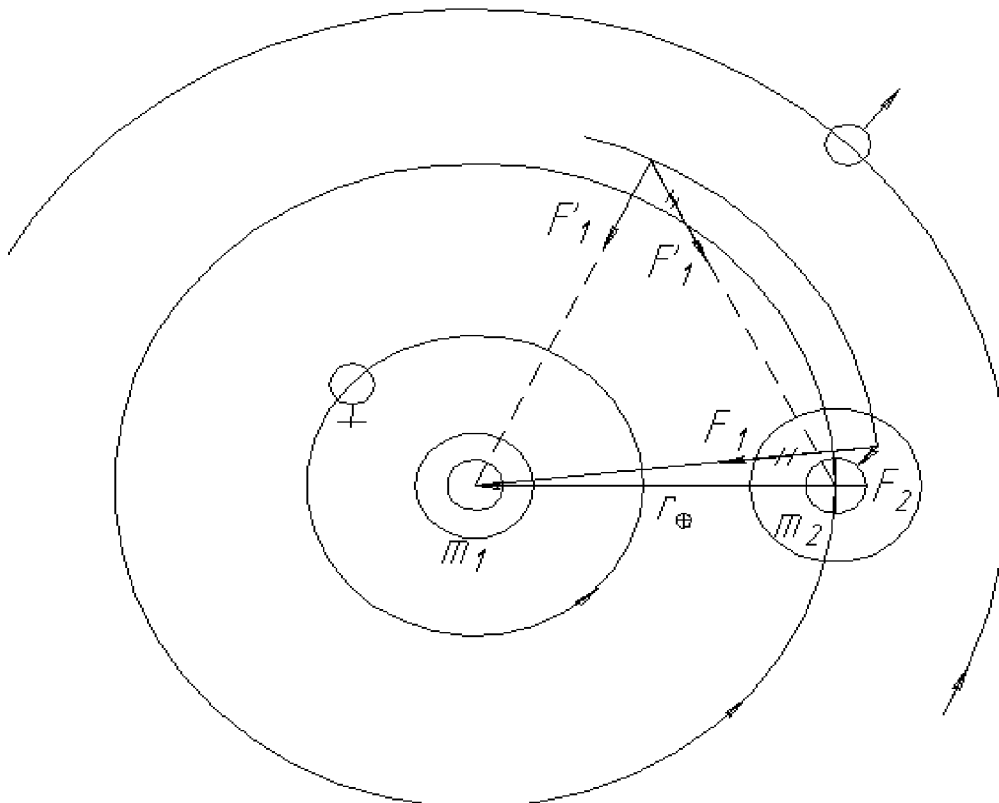


Рис. 44. Силы гравитационного притяжения

8.2 Анализ перелёта с околоземной орбиты на орбиты спутников ближних планет (Марса, Венеры)

Рассмотрим перелет на орбиту спутника Марса (перелет на внешнюю по отношению к Земле планету).

Считаются известными для планеты-старта (Земли) следующие исходные данные: радиус орбиты Земли, высота околоземной орбиты старта и радиус сферы действия, соответственно,

$$R_{\oplus}, H_{\oplus}, \rho_{\oplus}^*,$$

Аналогичные данные считаются известными для планеты-назначения (Марса):

$$R_{\oplus}, H_{\oplus}, \rho_{\oplus}^*$$

Принимаются следующие допущения:

- плоскости орбит планет компланарны;
- орбиты планет – околокруговые;
- радиусы сфер действия планет пренебрежимо малы, по сравнению с радиусами их орбит в гелиоцентрическом движении.

На рис.45 приведена иллюстрация методики расчета, где b – прицельная дальность.

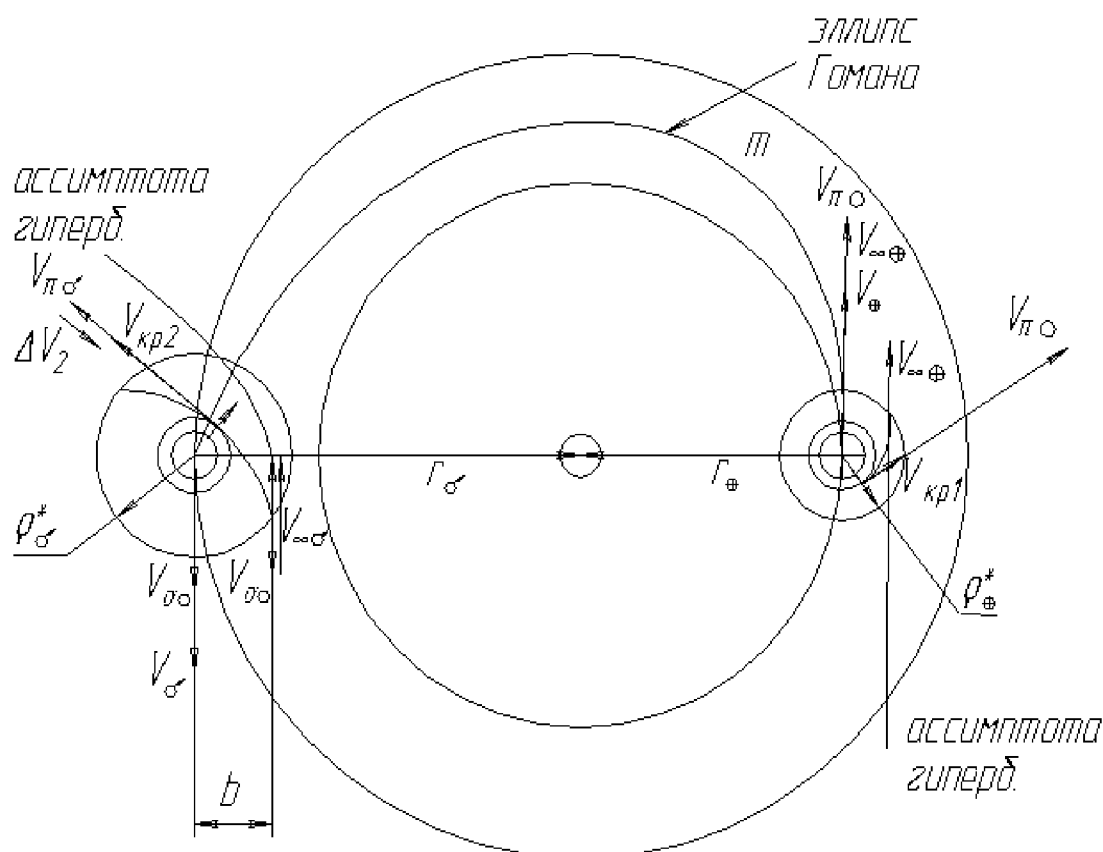


Рис.45 Межпланетный перелет между орбитами искусственных спутников Земли и Марса

Первый этап: расчет гелиоцентрического движения.

Принимается, что он совершается по эллипсу Гомона-Цандера.

Тогда потребные скорости в перигее и апогее переходной гелиоцентрической орбиты находятся по соотношениям

$$V_{\pi\oplus} = \sqrt{\frac{2 \cdot \mu_{\oplus} \cdot r}{r_{\oplus} \cdot (r_{\oplus} + r)}}; \quad V_{\alpha\oplus} = \sqrt{\frac{2 \cdot \mu_{\oplus} \cdot r_{\oplus}}{r \cdot (r_{\oplus} + r)}}$$

Здесь радиус апогея эллипса Гомана-Цандера совпадает с радиусом орбиты Марса, а радиус перигея – совпадает с радиусом орбиты Земли.

Второй этап: расчет геоцентрического движения в сфере действия планеты старта (Земля).

Геоцентрическое движение в сфере действия Земли происходит по гиперболе.

Находится гиперболический избыток скорости V_{∞} (скорость, которую будет иметь КА на выходе из сферы действия Земли) как разность между скоростью в перигее гелиоцентрической переходной орбиты и скоростью орбитального движения Земли вокруг Солнца.

Далее из интеграла площадей определяется скорость, которую должен иметь КА при старте с геоцентрической круговой орбиты заданной высоты (орбиты выведения) V_{π} . Затем определяется потребный импульс скорости перехода с геоцентрической орбиты старта на гиперболическую орбиту ΔV_L , обеспечивающий достижение требуемой величины гиперболического избытка скорости на границе сферы действия Земли, и потребные затраты на топлива на маневр.

$$V_{\infty\oplus} = V_{\pi\oplus} - V_{\oplus}$$

$$V_{\pi\oplus}^2 - \frac{2\mu_{\oplus}}{R_{\oplus} + H_{\oplus}} = V_{\infty\oplus}^2; \quad V_{\pi\oplus} = \sqrt{V_{\infty\oplus}^2 + \frac{2\mu_{\oplus}}{R_{\oplus} + H_{\oplus}}}$$

$$\Delta V_L = V_{\pi\oplus} - V_{\oplus}, \quad V_{\oplus} = \sqrt{\frac{\mu_{\oplus}}{R_{\oplus} + H_{\oplus}}}$$

$$z_{D\dot{A}} = \arccos\left(\frac{\Delta V_L}{V_{\oplus}}\right)$$

$$m_{T_{D\dot{A}}} = \frac{z_{D\dot{A}} - 1}{z_{D\dot{A}}} \cdot m_0$$

Третий этап: расчет движения в сфере действия планеты назначения (Марса).

Марсоцентрическое движение осуществляется также по гиперболе.

Последовательность расчета аналогичная второму этапу.

Находится гиперболический избыток скорости V_{∞} (скорость, которую будет иметь КА на входе в сферу действия Марса) как разность между скоростью в апогее гелиоцентрической переходной орбиты и скоростью орбитального движения Марса вокруг Солнца.

Далее из интеграла площадей определяется скорость, которую должен будет иметь КА в точке касания гиперболической марсоцентрической орбиты и целевой марсоцентрической круговой орбиты, высота которой задана (радиус перигея гиперболической орбиты принимается равным радиусу целевой круговой орбиты) V_{π} .

Затем определяется требуемый импульс скорости маневра перехода с гиперболической орбиты на целевую круговую марсоцентрическую орбиту ΔV_2 и требуемые затраты на топлива на маневр.

В результате КА переходит на требуемую орбиту спутника Марса (например, орбиту спутника Фобос радиуса 9850 км, если миссия ориентирована на его исследование) и процедура расчета завершается.

$$V_{\infty} = V - V_{\alpha\beta}; V_{\pi}^2 - \frac{2\mu}{r_{\delta i \delta}} = V_{\infty}^2, \text{ где } r_{\delta i \delta} = 9850 \text{ км}$$

$$V_{\pi} = \sqrt{V_{\infty}^2 + \frac{2\mu}{r_{\delta i \delta}}}$$

$$\Delta V_2 = V_{\pi} - V_{\delta \delta 2}; V_{\delta \delta 2} = \sqrt{\frac{\mu}{r_{\delta i \delta}}}$$

Продолжительности всех этапов перелета рассчитываются по соответствующим соотношениям из раздела, посвященного невозмущенному движению: продолжительность гелиоцентрического участка равняется половине периода движения по переходному эллипсу Гомана-Цандера; продолжительности полета в сферах действия планет находятся из решения соответствующих уравнений Кеплера.

Полные энергетические затраты на перелет определяются суммированием характеристических скоростей двух импульсов.

Рассмотрим перелет на орбиту спутника Венеры (перелет на внутреннюю по отношению к Земле планету).

Считаются известными для планеты-старта (Земли) следующие исходные данные: радиус орбиты Земли, высота околоземной орбиты старта и радиус сферы действия, соответственно,

$$R_{\oplus}, H_{\oplus}, \rho_{\oplus}^*,$$

Аналогичные данные считаются известными для планеты-назначения (Венеры):

$$R_{\odot}, H_{\odot}, \rho_{\odot}^*$$

Принимаются допущения, аналогичные принятым для перелета на Марс:

- плоскости орбит планет компланарны;
- орбиты планет – околокруговые;
- радиусы сфер действия планет пренебрежимо малы, по сравнению с радиусами их орбит в гелиоцентрическом движении.

На рис.46 приведена иллюстрация методики расчета, где b – прицельная дальность.

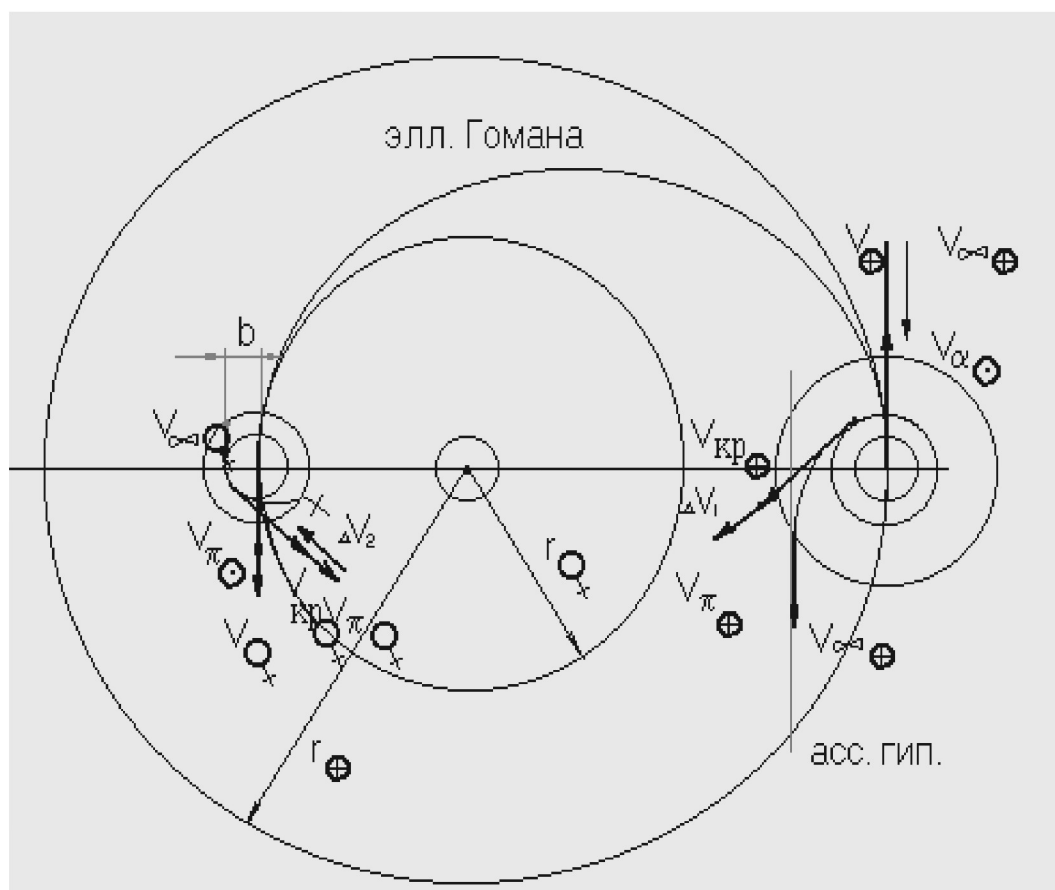


Рис 46. Межпланетный перелет между орбитами искусственных спутников Земли и Венеры

Первый этап: расчет гелиоцентрического движения.

Принимается, что он совершается по эллипсу Гомона-Цандера.

Находятся необходимые скорости в перигее и апогее переходной гелиоцентрической орбиты. Здесь, в отличие от перелета на Марс, радиус апогея эллипса Гомона-Цандера совпадает с радиусом орбиты Земли, а радиус перигея – совпадает с радиусом орбиты Марса.

Второй этап: расчет геоцентрического движения в сфере действия планеты старта (Земля).

Геоцентрическое движение в сфере действия Земли происходит по гиперболе.

Находится гиперболический избыток скорости V_∞ (скорость, которую будет иметь КА на выходе из сферы действия Земли) как разность между скоростью в апогее гелиоцентрической переходной орбиты и скоростью орбитального движения Земли вокруг Солнца.

Далее из интеграла площадей определяется скорость, которую должен иметь КА при старте с геоцентрической круговой орбиты заданной высоты (орбиты выведения) V_π . Затем определяется необходимый импульс скорости перехода с геоцентрической орбиты старта на гиперболическую орбиту ΔV_1 , обеспечивающий достижение требуемой величины гиперболического избытка скорости на границе сферы действия Земли, и необходимые затраты на топлива на маневр.

Третий этап: расчет движения в сфере действия планеты назначения (Венера).

Полные энергетические затраты на перелет определяются суммированием характеристических скоростей двух импульсов.

8.3 Анализ пертурбационных маневров

В большинстве современных миссий к дальним планетам используются маневры в окрестности планет, мимо которых пролетает КА, что дает возможность существенно сократить потребные энергетические затраты за счет использования для маневра поля притяжения планеты и тем самым повысить массу научного оборудования КА.

Однако такие миссии достаточно длительные и требуют точного фазирования относительного расположения нескольких планет (по меньшей мере трех планет – старта, назначения и той, в окрестности которой предполагается осуществление пертурбационного маневра). Вследствие этого они могут быть осуществлены только в определенные календарные моменты времени (жестко привязываются к ограниченному числу возможных дат старта).

Цель применения пертурбационного маневра – изменение величины и направления гелиоцентрической скорости за счет использования потенциальной энергии планеты, вблизи которой совершается пролет.

Это изменение вызывает требуемый поворот вектора гиперболического избытка скорости в планетоцентрическом движении при облете планеты и выгодное его суммирование с орбитальной скоростью планеты.

Рассмотрим классификацию траектории планетоцентрического движения в зависимости от точки входа в сферу действия планеты.

Введем обозначения:

траектории П-класса - это, траектории, попадающие в планету;

траектории О-класса – это облётный класс траекторий (поворот вектора скорости осуществляется по часовой стрелке);

траектории Д-класса – это долётный класс траекторий (поворот вектора скорости осуществляется против часовой стрелки).

Таким образом, можно выделить два типа пертурбационных маневров:

- пертурбационный манёвр разгона на траекториях *Д-класса* (ПМР),
- пертурбационный манёвр торможения на траекториях *О класса* (ПМТ).

На рис.47 проиллюстрирован пертурбационный маневр и показаны области пертурбационного маневра разгона (ПМР) и торможения (ПМТ) в окрестности планеты, а на рис.48 – механизм сложения скоростей при пертурбационном маневре.

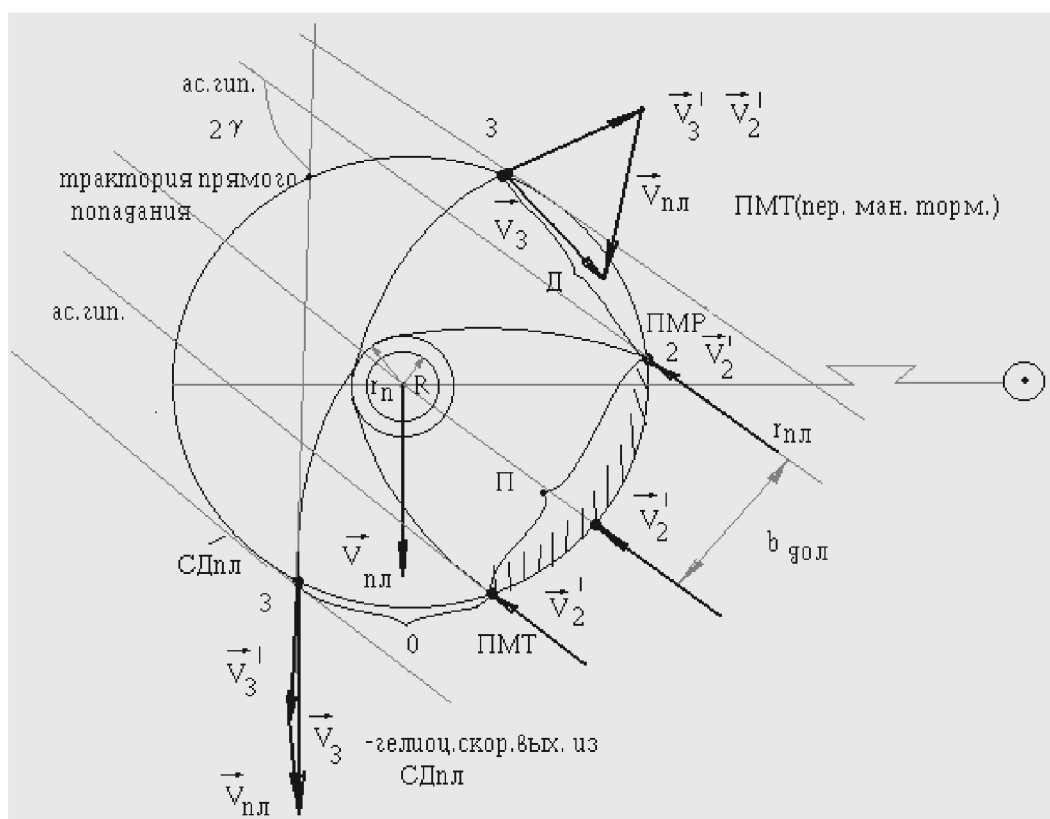


Рис 47. Примеры пертурбационных манёвров в сфере действия планеты

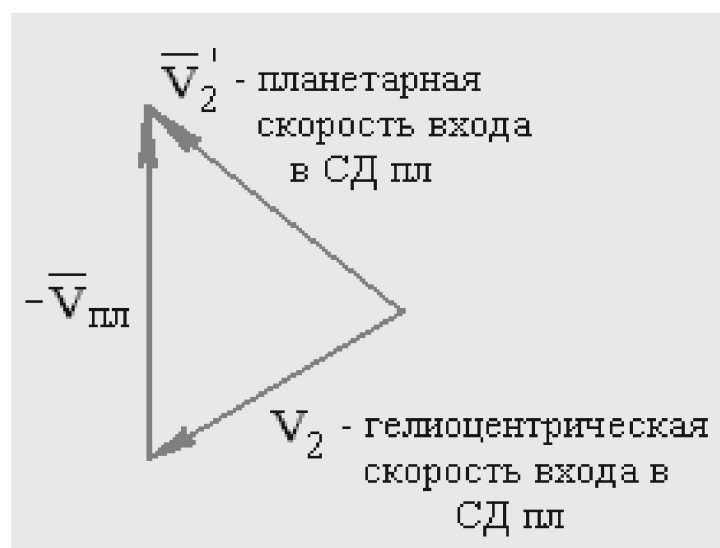


Рис 48. Треугольник скоростей

Расчет параметров пертурбационного маневра начинается с расчета прицельной дальности b

$$b = r_{\pi} \sqrt{1 + \frac{2a}{r_{\pi}}}$$

Подставляя в это выражение соотношение для большой полуоси планетоцентрической гиперболической орбиты, выраженное через гиперболический избыток скорости на границе сферы действия

$$a = \frac{\mu}{V_{\infty}^2} : h = V_{\infty}^2 = \frac{\mu}{a},$$

получаем в окончательном виде формулу

$$b = r_{\pi} \sqrt{1 + \frac{2\mu_{nl}}{r_{\pi} V_{\infty}^2}}$$

Так как величина гиперболического избытка скорости на входе в сферу действия планеты равна величине гиперболического избытка скорости на выходе из сферы действия планеты после совершения пертурбационного маневра $V_{3\infty} = V_{2\infty}$

то модуль вектора разности скоростей в гелиоцентрическом движении до входа и после выхода из сферы действия планеты (модуль вектора прироста скорости)

$$\Delta V = |\vec{V}_3 - \vec{V}_2| = \sqrt{(\vec{V}_3 - \vec{V}_2)^2}$$

После подстановки соотношений, описывающих механизм сложения скоростей на входе и выходе из сферы действия планеты, выражение для прироста скорости за счет пертурбационного эффекта

$$\begin{aligned} \vec{V}_3 &= \vec{V}_{nl} + \vec{V}_{\infty 3}, \quad \vec{V}_2 = \vec{V}_{nl} + \vec{V}_{\infty 2} \\ (\vec{V}_3 - \vec{V}_2) &= \vec{V}_{nl} + \vec{V}_{\infty 3} - \vec{V}_{nl} - \vec{V}_{\infty 2} \end{aligned}$$

приводится к виду

$$\Delta V = \sqrt{(\vec{V}_3 - \vec{V}_2)^2} = \sqrt{\vec{V}_{3\infty}^2 - 2\vec{V}_{3\infty}\vec{V}_{2\infty} + \vec{V}_{2\infty}^2} = \sqrt{2V_{2\infty}^2 - 2V_{2\infty}^2 \cos 2\gamma} = \sqrt{2V_{2\infty}^2 (1 - \cos 2\gamma)} = 2V_{2\infty} \sin \gamma$$

где γ – угол поворота гиперболического избытка скорости.

На основании геометрических свойств гиперболической орбиты можно найти угол γ

$$\sin \gamma = \frac{a}{a + r_{\pi}} = \frac{1}{1 + \frac{r_{\pi} V_{\infty}^2}{\mu_{nl}}}$$

где большая полуось гиперболы определяется выражением

$$a = \frac{\mu_{nl}}{V_{\infty}^2}$$

Тогда окончательное выражение для оценки прироста скорости после прохождения КА в сфере действия планеты (эффективности пертурбационного маневра) принимает вид

$$\Delta V = \frac{2V_{2\infty}\mu_{nl}}{\mu_{nl} + r_{\pi}V_{2\infty}^2}$$

Как следует из полученного соотношения, прирост скорости определяется величиной радиуса перигея гиперболической орбиты и величиной гиперболического избытка скорости при входе в сферу действия.

Предельное значение прироста скорости за счет выбора радиуса перигея гиперболической орбиты можно условно достигнуть, если радиус перигея гиперболической планетоцентрической орбиты совпадает с радиусом планеты

$$\Delta V_{\max} = \frac{2V_{2\infty}\mu_{nl}}{\mu_{nl} + R_{nl}V_{2\infty}^2}$$

Для отыскания максимума по величине гиперболического избытка скорости выполним дифференцирование

$$\frac{\partial \Delta V_{\max}}{\partial V_{\infty}} = 2\mu_{nl} \frac{(\mu_{nl} + R_{nl} V_{\infty}^2)}{(\mu_{nl} + R_{nl} V_{\infty}^2)^2} - \frac{V_{\infty} 2R_{nl} V_{\infty}}{(\mu_{nl} + R_{nl} V_{\infty}^2)^2} = 2\mu_{nl} \frac{\mu_{nl} - R_{nl} V_{\infty}^2}{(\mu_{nl} + R_{nl} V_{\infty}^2)^2}$$

Приравнявая нулю полученное выражение, находится оптимальное значение гиперболического избытка скорости, которое равно первой космической скорости для планеты «разгонщика»

$$V_{2\infty}^{opt} = \sqrt{\frac{\mu_{i\bar{e}}}{R_{i\bar{e}}}}$$

Этот гиперболический избыток скорости обеспечивает теоретический абсолютный максимум приросту скорости в результате пертурбационного маневра

$$\Delta V_{\max} = \frac{2\mu_{i\bar{e}} \sqrt{\frac{\mu_{i\bar{e}}}{R_{i\bar{e}}}}}{\mu_{i\bar{e}} + R_{i\bar{e}} \frac{\mu_{i\bar{e}}}{R_{i\bar{e}}}}$$

В табл.3 приведены оценки эффективности пертурбационных маневров разгона в окрестности планет Солнечной системы и Луны.

Таблица 3 Эффективность пертурбационного маневра разгона в окрестности планет

Небесное тело	$\Delta V_{\max}$, км/с	$\Delta V_{\text{гомана}}$, км/с
Венера	7,3	5,0
Земля	8,0	6,0
Марс	3,8	3,5
Юпитер	42,6	10,8
Сатурн	25,0	10,4
Уран	15,3	10,0
Нептун	17,5	8,0
Луна	1,669	1,335

Во втором столбце приведены данные по абсолютным максимальным значениям прироста скорости, а в третьем столбце – значения прироста скорости, достигаемые при совершении гелиоцентрического перелета по эллипсу Гомана-Цандера (радиус перигея гиперболической орбиты также принимается равным радиусу планеты).

8.4 Анализ движения КА в системе Земля-Луна

Анализ космических миссий в системе Земля-Луна имеет свои особенности по сравнению с межпланетными миссиями.

Так как Луна является спутником Земли, то при рассмотрении космических миссий в системе Земля-Луна отсутствует участок гелиоцентрического движения.

При анализе миссий принимаются следующие допущения:

- центр масс системы (барицентр) Земля-Луна движется приблизительно по окружности;
- Земля и Луна являются сферическими телами со сферическим распределением масс, то есть создают центральные поля притяжения;
- пренебрегается влиянием Солнца и других небесных тел, а также атмосферой Земли;
- масса КА несравнимо мала по сравнению с массами Земли и Луны.

Данная задача является ограниченной задачей 3-х тел, решение которой описывается векторным дифференциальным уравнением (рис.49) во вращающейся системе

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{G}_1 + \vec{G}_2 + \vec{F}_{ei}^{\dot{\alpha}} + \vec{F}_{ei}^{\dot{\theta}}$$

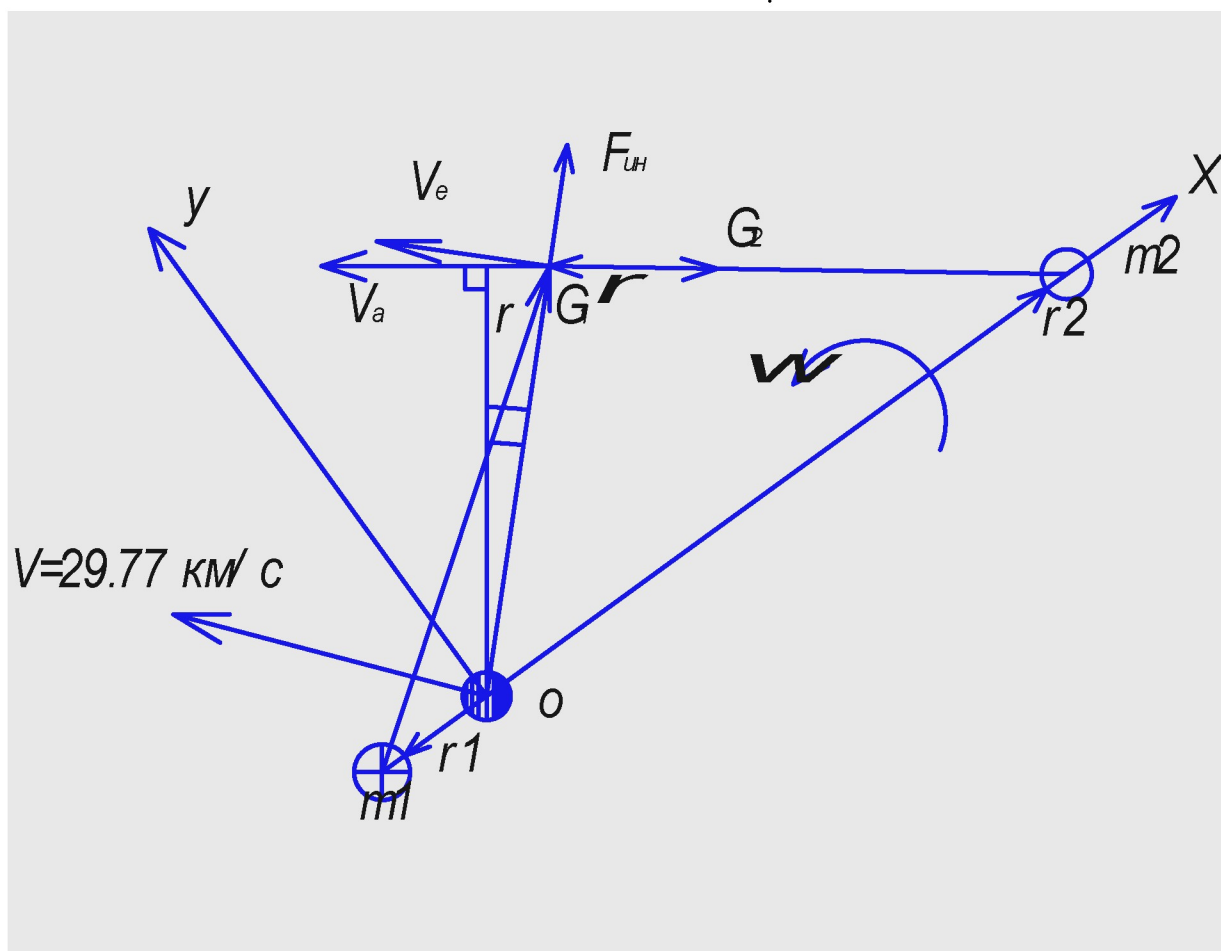


Рис. 49 Движение КА в системе Земля-Луна

Модели сил притяжения, переносной и кориолисовой сил инерции, будучи подставленными в векторную модель движения, позволяют записать уравнения движения в системе Земля-Луна. Эта система уравнений допускает нахождение интеграла энергии в системе Земля-Луна, который называется интегралом Якоби.

$$\vec{G}_1 = -\frac{m\mu_{\oplus}}{r^3}\vec{r}; \vec{G}_2 = -\frac{m\mu_{\text{л}}}{\rho^3}\vec{\rho}$$

$$\bar{F}_{ei}^e = -m\bar{W}^e = -m(-\omega^2 \bar{r}_0) = m\omega^2 \bar{r}_0$$

$$\bar{F}_{ei}^{\dot{e}i\dot{o}} = -m\bar{W}^{\dot{e}i\dot{o}} = -2m(\bar{\omega} \times \bar{V}_r) = -2 \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \omega \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix} = -2m\omega \dot{y}i + 2m\omega \dot{x}j$$

$$W_r = -\frac{\mu_{\oplus}}{r^3} \bar{r} - \frac{\mu_{eoi}}{\rho^3} \bar{\rho} + \omega^2 \bar{r}_0 - 2m\omega \dot{y}i + 2m\omega \dot{x}j$$

$$\ddot{x} = -\frac{\mu_{\oplus}}{r^3} (x - x_1) - \frac{\mu_{eoi}}{\rho^3} (x - x_2) + \omega^2 x - 2\omega \dot{y}, \quad r = \bar{r}_0 - r_1 \quad \rho = \bar{r}_0 - r_2$$

$$\ddot{y} = -\frac{\mu_{\oplus}}{r^3} y - \frac{\mu_{eoi}}{\rho^3} y + \omega^2 y + 2\omega \dot{x}$$

$$U(x, y) = \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2) + \frac{\mu_{\oplus}}{r} + \frac{\mu_{eoi}}{\rho}$$

$$\ddot{x} - 2\omega \dot{y} = \frac{\partial U}{\partial x}$$

$$\ddot{y} + 2\omega \dot{x} = \frac{\partial U}{\partial y} \quad - \dot{A} \dot{O} . \dot{i} \dot{o} \dot{i} \dot{i} \dot{n} \dot{e} \dot{o} \dot{a} \dot{e} \dot{u} \dot{i} \dot{i} \dot{a} \dot{i} \quad \dot{a} \dot{a} \dot{e} \dot{x} \dot{a} \dot{i} \dot{e} \dot{y} \quad \dot{E} \dot{A} \dot{a} \dot{n} \dot{e} \dot{n} \dot{o} \dot{a} \dot{i} \dot{a} \quad \dot{\zeta} \dot{a} \dot{i} \quad \dot{e} \dot{y} - \dot{E} \dot{o} \dot{i} \dot{a}$$

$$\dot{N} \dot{a} \dot{a} \dot{e} \dot{a} \dot{a} \dot{i} \quad \dot{o} \dot{y} \dot{a} \quad \dot{i} \dot{o} \dot{a} \dot{i} \quad \dot{a} \dot{o} \dot{a} \dot{\zeta} \dot{i} \quad \dot{a} \dot{a} \dot{i} \quad \dot{e} \dot{e} , \dot{i} \dot{i} \dot{e} \dot{o} \dot{a} \dot{a} \dot{i} :$$

$$\frac{d}{dt} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = 2 \frac{\partial U}{\partial t}$$

$$\frac{d}{dt} (V_r - 2U) = h - \dot{e} \dot{i} \dot{o} \dot{a} \dot{a} \dot{e} \dot{\beta} \dot{e} \dot{i} \dot{a} \dot{e}$$

$$V_a^2 - \frac{2\mu_{\oplus}}{r} = h - \dot{e} \dot{i} \dot{o} \dot{a} \dot{a} \dot{e} \dot{y} \dot{i} \dot{a} \dot{o} \dot{a} \dot{e} \dot{e} \quad 2 - \dot{o} \dot{o} \dot{a} \dot{e}$$

$$\bar{V}_a = \bar{V}_e + \bar{V}_r$$

Из выше приведенных выражений следует запись аналога интеграла энергии:

$$E_{i \dot{o} \dot{o}}^{\dot{a}} - 2K_z \omega = h,$$

из которого следует, полная механическая энергия КА не постоянна в системе трех тел, а сохраняется постоянным лишь линейное соотношение между полной механической энергией и кинетическим моментом системы притягивающих тел (Земля-Луна).

В системе трех тел существуют особые точки – точки либрации, которые в настоящее время представляют большой интерес с позиций фундаментальных исследований и достижение которых является целью многих космических миссий.

Точками либрации называются точки, в которых существует равновесие действующих сил со стороны двух тел (Луны и Земли) и центробежных сил инерции

$$\bar{F}_{ei}^e + \bar{G}_1 + \bar{G}_2 = 0$$

На рис.50 показаны точки либрации системы Земля-Луна: точки L₁, L₂, L₃ – являются точками неустойчивого равновесия, а точки L₄, L₅ – точками устойчивого равновесия (СДЛ - сфера действия Луны).

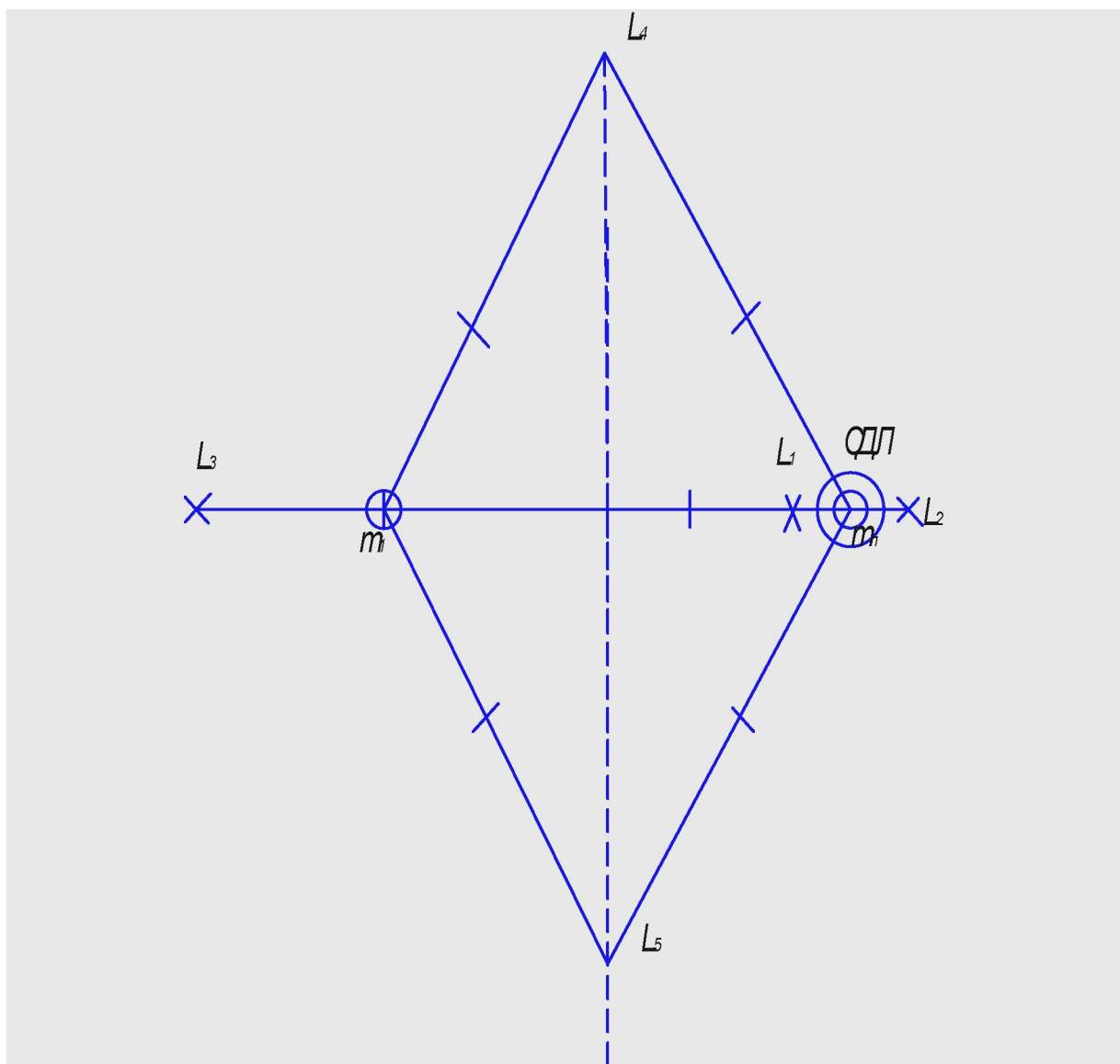


Рис.50 Точки либрации системы Земля-Луна

Приближенная методика расчета движения КА в системе Земля-Луна основана на понятии сферы действия планеты. Траектория полета на Луну разбивается на два участка геоцентрический участок и селеноцентрический участок. Также как и при межпланетных перелетах, движение в пределах каждого участка происходит под действием одной центральной силы, при этом геоцентрический участок является геоцентрической эллиптической орбитой, а селеноцентрический участок – селеноцентрической гиперболической орбитой. На границе сферы действия происходит переход от одного вида движения к другому посредством вычитания круговой скорости движения Луны по орбите вокруг Земли.

На рис.51 показана схема перелета от Земли на орбиту спутника Луны.

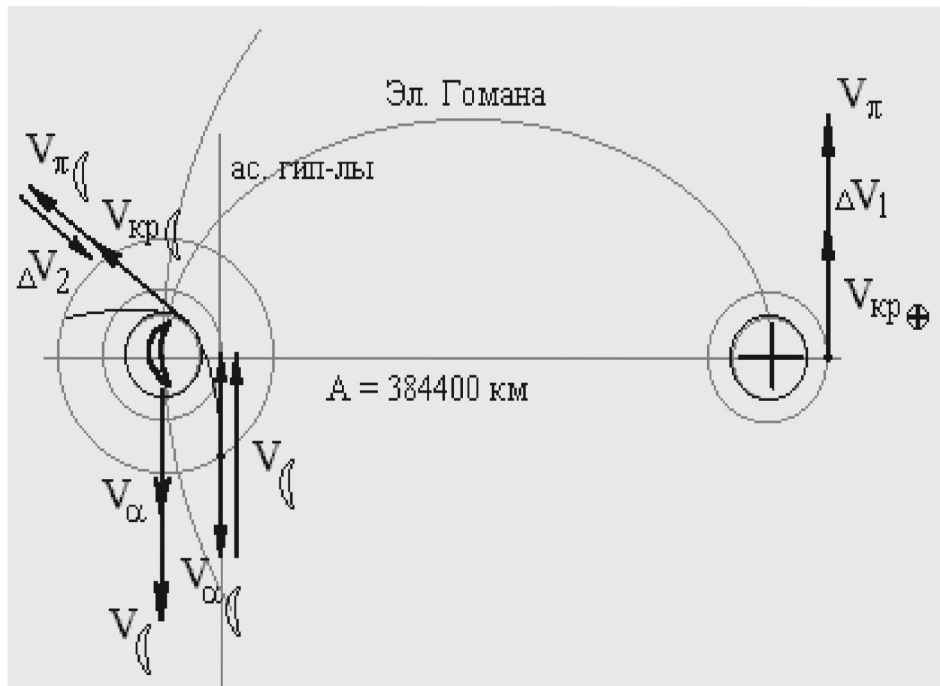


Рис 51. Перелёт от Земли на орбиту спутника Луны

Математические соотношения, описывающие интегралы геоцентрического движения КА по эллиптической орбите до СДЛ для случая старта с круговой геоцентрической орбиты высотой 200 км приведены ниже.

В результате находятся

- эксцентриситет орбиты перелета

$$r_1 = R_{\oplus} + H_1 \quad H_1 = 200 \text{ км} \quad \tilde{N} = r_1 V_1 \quad h = V_1^2 - \frac{2\mu_{\oplus}}{r_1}, e = \sqrt{1 + \frac{C^2}{\mu_{\oplus}} h}$$

- скорость и угол, под которым эллиптическая орбита пересекает СДЛ

$$V_2^2 - \frac{2\mu_{\oplus}}{r_2} = V_1^2 - \frac{2\mu_{\oplus}}{r_1} \rightarrow V_2 = r_2 V_2 \sin \alpha_2 = r_1 V_1 \rightarrow \sin \alpha_2 = \frac{r_1 V_1}{r_2 V_2}$$

$$r_2 \approx A = 384000 \text{ км}$$

- время перелета и угол истинной аномалии до пересечения со СДЛ

$$t_2 - \tau = \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}} (E_2 - e \sin E_2)$$

$$\operatorname{tg} \frac{E_2}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{\vartheta_2}{2}$$

$$r_2 = \frac{P}{1 - e \cos \vartheta_2}, \cos \vartheta_2 = \frac{1}{e} \left(\frac{P}{r_2} - 1 \right)$$

- угол начального фазирования положения Луны, определяющий момент старта с орбиты выведения

$$\varphi_2 = \omega t_{12} \quad \lambda_1 = \pi - (\vartheta_2 - \varphi_{12} - \varphi_2)$$

Для минимизации затрат характеристической скорости (максимизации доставляемой полезной нагрузки) целесообразно в качестве селеноцентрических орбит рассматривать параболические орбиты.

В этом случае при движении по селеноцентрической параболической орбите в СДЛ избыток скорости на удалении, равном радиусу сферы действия Луны равен 0,383 км/с

$$\bar{V}_2' = \bar{V}_{\infty \bar{e} \bar{o} \bar{i}} = \bar{V}_2' - \bar{V}_{\bar{e} \bar{o} \bar{i}}$$

$$\bar{V}_2' = \sqrt{(\bar{V}_{\bar{e} \bar{o} \bar{i}} \cos \varphi_2 - V_2 \sin \alpha_2)^2 + (V_2 \cos \alpha_2 - \bar{V}_{\bar{e} \bar{o} \bar{i}} \sin \varphi_2)^2} = \bar{V}_{\infty \bar{e} \bar{o} \bar{i}}$$

$$V_{\bar{e} \bar{o} \bar{i}} = 1.018 \hat{e} \hat{i} / \hat{n}$$

$$V_{\bar{i} \bar{a} \bar{o} \bar{\rho} \bar{e} \bar{a}} = 0,383 \hat{e} \hat{i} / \hat{n}$$

Соотношения определяющие время движения в СДЛ в случае миссии облета Луны на минимальном расстоянии $H_{\text{лун}}$ от поверхности Луны $r_{\pi} = R_{\bar{e} \bar{o} \bar{i}} + H_{\bar{e} \bar{o} \bar{i}}$, приводятся ниже

$$a = \frac{V_{\infty}^2}{\mu_{\bar{e} \bar{o} \bar{i}}}; b = r_{\pi} \sqrt{1 + \frac{2a}{r_{\pi} V_{\infty}^2}}; e = \frac{c}{a} = 1 + \frac{r_{\pi} V_{\infty}^2}{\mu_{\bar{e} \bar{o} \bar{i}}}; p = a(e^2 - 1)$$

$$c = a + r_{\pi}, \quad t_{23} = 2(t_3 - \tau) = \frac{2a^{3/2}}{\sqrt{\mu}} \left[e \cdot \text{tg} F_3 - \ln \text{tg} \left(\frac{F_3}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right]$$

$$\varphi_{23} = \omega t_{23}$$

В случае миссии, предполагающей переход на круговую орбиту вокруг Луны высотой $H_{\text{лун}}$, величина импульса торможения для перехода на круговую орбиту определяется по соотношениям

$$V_{\pi \bar{e} \bar{o} \bar{i}}^2 - \frac{2\mu_{\bar{e} \bar{o} \bar{i}}}{r_{\pi \bar{e} \bar{o} \bar{i}}} = V_{\infty \bar{e} \bar{o} \bar{i}}^2$$

$$V_{\pi \bar{e} \bar{o} \bar{i}} = \sqrt{V_{\infty \bar{e} \bar{o} \bar{i}}^2 + \frac{2\mu_{\bar{e} \bar{o} \bar{i}}}{r_{\pi \bar{e} \bar{o} \bar{i}}}} = \sqrt{V_{\infty \bar{e} \bar{o} \bar{i}}^2 + V_{\bar{i} \bar{a} \bar{o} \bar{\rho} \bar{e} \bar{a}}^2}$$

$$\Delta V_2 = V_{\pi \bar{e} \bar{o} \bar{i}} - V_{\bar{e} \bar{o} \bar{i}} = V_{\pi \bar{e} \bar{o} \bar{i}} - \sqrt{\frac{\mu_{\bar{e} \bar{o} \bar{i}}}{r_{\pi \bar{e} \bar{o} \bar{i}}}}$$

На рис.52 приведены возможные виды траекторий сближения с Луной. Обозначение $\hat{A}^+$ - применяется к траекториям сближения на восходящем участке геоцентрической орбиты, H^+ - на нисходящем участке геоцентрической орбиты.

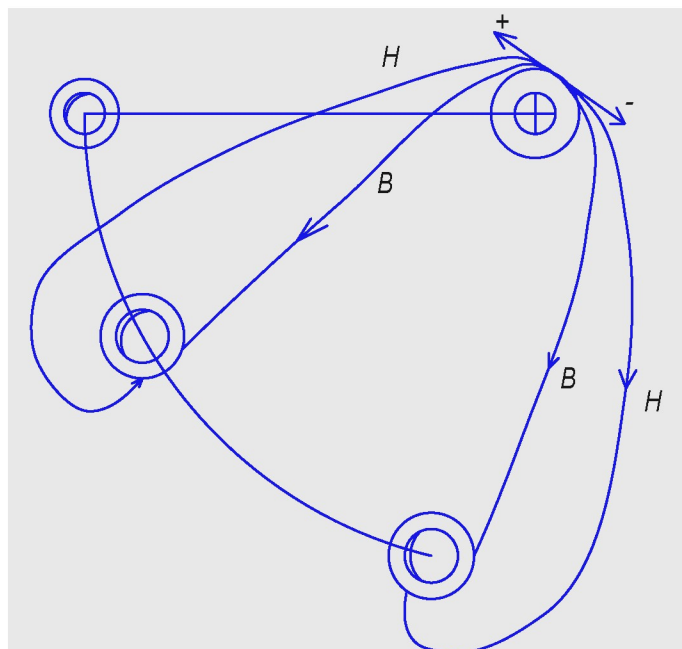


Рис.52 Траектории сближения с Луной